

UBIRAJARA FERRAILO WICHOSKI

MODELO COSMOLÓGICO COM MÉTRICA DE EINSTEIN - DE SITTER
E SEÇÃO ESPACIAL FECHADA



68
Dissertação de Mestrado
apresentada no Instituto
de Física Teórica - IFT.

ORIENTADOR: Helio V. Fagundes

SÃO PAULO

Março de 1987

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer de um modo geral aos professores, funcionários e colegas do IFT e aos companheiros e amigos que direta ou indiretamente colaboraram comigo nesta tarefa. No entanto, não posso deixar de agradecer particularmente ao Professor Helio V. Fagundes pela orientação, paciência e amizade no decorrer destes três anos; ao Professor Laerte Sodré Jr. do Instituto Astron mico e Geofísico da USP, pelos esclarecimentos relativos à astrofísica; aos colegas Edson, Jonas, Gustavo, George e Juan, pelas sugestões e amizade, aos meus pais e às tias Leda e Yara pelo apoio e carinho; e finalmente à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Partindo da hipótese de que a nossa Galáxia, numa fase primitiva de sua evolução, foi um quasar, o nosso modelo prevê que as imagens desta fase ainda podem ser observadas no céu. Assim, procuramos num catálogo de quasares, aqueles que possam ser interpretados como imagens da nossa Galáxia nesta fase, de maneira a determinar os parâmetros do modelo.

ABSTRACT

From the hypothesis that our Galaxy, in an early stage of its evolution, was a quasar, our model expects that images of this stage can still be observed in the sky. Thus, we look in a quasar catalogue for the ones that can possibly be interpreted as images of our Galaxy in that stage, with a view to determine the parameters of the model.

ÍNDICE

. APRESENTAÇÃO	3
1 - MOTIVAÇÃO E PRELIMINARES	
1.1. Introdução	5
1.2 Um Breve Panorama	9
1.3 O Contexto da Nossa Proposta	20
2 - A VARIEDADE ESPAÇO-TEMPO	
2.1 Introdução	22
2.2 Subvariedades	23
2.3 Propriedades Plausíveis do Espaço-Tempo	23
2.4 As Seções Espaciais	31
2.5 Espaço Quociente	33
2.6 Ação de um Grupo Discreto Sobre uma Variedade	34
2.7 Espaço de Recobrimento Universal	36
3 - O MODELO DE EINSTEIN - DE SITTER COM TOPOLOGIA $T^3 \times R$	
3.1 Introdução	38
3.2 Os Modelos FRW	38
3.3 As Seções Espaciais do Modelo de Einstein - de Sitter	41
3.4 A Topologia do 3-toro	42
3.5 O 3-toro como "Universo Pequeno"	49
3.6 A Proposta Deste Trabalho	50
3.7 Cálculo da Distância em Função do Redshift	54
3.8 O Tempo de Vida dos Quasares e a Permanência Simultânea das Imagens no Céu	57
4 - PROCEDIMENTOS E RESULTADOS	
4.1 Introdução	58
4.2 O Catálogo de Quasares	58
4.3 O Programa Varredura	61
4.4 As Tolerâncias ΔZ , ΔAR e ΔDE	66
4.5 Resultados	67

5 - ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1	Introdução	74
5.2	Análise para o Grupo 2	75
5.3	Análise para os Grupos 1 e 3.....	94
5.4	Considerações Sobre os Espectros	103

.	CONCLUSÃO	110
---	-----------------	-----

APÊNDICE A

	RESOLUÇÃO PARA O MODELO FRW COM CURVATURA NULA.....	113
--	---	-----

APÊNDICE B

	PARÂMETROS OBSERVACIONAIS	126
--	---------------------------------	-----

APÊNDICE C

	SISTEMA EQUATORIAL DE COORDENADAS EM ASTRONOMIA	130
--	---	-----

.	REFERÊNCIAS	133
---	-------------------	-----

APRESENTAÇÃO

Este trabalho está dividido em cinco Capítulos principais e três Apêndices, além da Conclusão que se segue, após o último Capítulo. Partimos pois, para uma rápida idéia do conteúdo de cada Capítulo e dos Apêndices.

No Capítulo 1 é apresentada a motivação para este trabalho, de maneira a colocar os problemas que nos dirão respeito diretamente e, em adição a isto, descreve-se um breve panorama de trabalhos nesta área e em áreas afins. Queremos deixar claro que tal panorama não é completo, pois demonstra apenas um caminho possível para se entender o contexto em que o trabalho em questão está inserido.

No Capítulo 2, delinea-se um resumo dos requisitos físicos e matemáticos necessários para o entendimento das propostas apresentadas.

No Capítulo 3, fazemos a aplicação dos assuntos tratados no Capítulo 2 que é geral, para a classe de modelos na qual o modelo que estudamos está inserido e, em seguida, especificamente para ele. O Capítulo 3 é complementado pelo Apêndice A, que mostra o tratamento usual que é dado para se chegar ao modelo que estudamos.

Observemos que até aqui, excetuando-se a seção 3.6 onde a nossa proposta de pesquisa é apresentada, o tratamento e os assuntos discutidos não são originais.

Os procedimentos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa, incluindo a parte computacional, são discutidos no Capítulo 4. Na seção 4.5 os primeiros resultados são apresentados.

Finalmente no Capítulo 5, os resultados são discutidos, analisados e ampliados, com o intuito de se fazerem previsões, em função das propostas deste trabalho.

Nos Apêndices B e C são tratados brevemente os parâmetros observacionais da cosmologia e alguns rudimentos de astronomia, que julgamos necessários, respectivamente.

Gostaríamos ainda de convencionar que, quando no decorrer dos Capítulos, falarmos do redshift sem especificarmos se é de emissão (Z_{ems}) ou absorção (Z_{abs}), queremos dizer que trata-se do redshift de emissão.

Com respeito as unidades, chamamos a atenção para o fato de que todas as distâncias são dadas em Megaparsec ($1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} = 3.262 \times 10^6 \text{ anos-luz} = 3.086 \times 10^{19} \text{ Km}$).

Para finalizar, notamos que os quasares também são indicados pela abreviatura QSO.

CAPÍTULO 1

MOTIVAÇÃO E PRELIMINARES

1.1. Introdução

No quadro teórico da Teoria da Relatividade Geral, novas possibilidades são abertas para a compreensão das propriedades globais do Universo.

As observações astronômicas e astrofísicas nos levam a crer numa homogeneidade na distribuição da matéria no Universo, se o considerarmos em "larga escala". Isto é, se desprezarmos o fato de que a matéria se encontra altamente concentrada em estrelas e galáxias e passarmos a considerá-la sob o ponto de vista dos aglomerados e superaglomerados de galáxias.

Ao lado desta homogeneidade a isotropia da radiação de microondas de fundo observada, que corresponde a uma temperatura de aproximadamente 2.7 K, aponta fortemente para uma equivalência das direções no Universo.

Uma maneira que se tem tornado corrente para explicar essa aparente isotropia, é a de que ela é uma decorrência da homogeneidade espacial que, por sua vez, é devida a um período "inflacionário" no Universo primitivo (Guth 1981).

Entretanto, não há presentemente nenhuma evidência direta, observacional ou experimental, que apoie esta hipótese inflacionária; além dos problemas dessa teoria em explicar a formação das galáxias, há ainda vários problemas relacionados com a teoria da Grande Unificação, que fundamenta o modelo inflacionário e sua aplicação na cosmologia (Ellis e Schreiber 1986).

Totalmente diferentes do modelo inflacionário são os modelos cosmológicos estáticos. Estes modelos, em geral, são obtidos pela resolução das equações de Einstein para valores não-nulos da constante cosmológica Λ .

Os dados observacionais também não justificam o estudo deste tipo de modelo, em vista da constatação da velocidade de recessão das galáxias que, por seu turno, embasa a conhecida Lei de Hubble a saber: "a velocidade de afastamento das galáxias é proporcional à distância do observador". Esta constatação indica que o Universo está em expansão e que portanto, não há sentido em se falar em modelos estáticos para o Universo.

Embora os casos que nos interessam consideram que $\Lambda = 0$, é importante notar que o fato da constante cosmológica ser diferente de zero ($\Lambda \neq 0$) não significa que temos apenas modelos estáticos de Universo (cf. pg. 10).

O modelo de Universo que estudaremos neste trabalho é um dos modelos de Friedmann - Robertson - Walker (FRW).

Tais modelos tomam o Universo como homogêneo e isotrôpico, o que implica que a curvatura das seções espaciais (veja Cap. 2 e Apênd. A) seja constante.

Naturalmente que um modelo desse tipo é uma idealização e portanto, temos que ter em vista que as soluções apresentadas por ele são aproximadas. Isto porém não deve ser tomado como um argumento contra o modelo, entendendo-se que as soluções encontradas no seu contexto determinam parâmetros, que servirão para a obtenção de modelos mais exatos, principalmente, como é o nosso caso, no que diz respeito à estrutura global do Universo.

Em geral a métrica dos modelos FRW pode ser resumida por:

$$ds^2 = - c^2 dt^2 + a^2(t) d\sigma^2 \quad (1.1)$$

onde:

$$d\sigma^2 = dX^2 + F^2(X) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.2)$$

$$e \quad F(X) = \begin{cases} \sin X, & \text{para } k = 1 \\ X, & \text{para } k = 0 \\ \sinh X, & \text{para } k = -1 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde: k dá o sinal da curvatura espacial.

Por uma rápida inspeção da métrica (1.1), notamos que os modelos FRW têm a particularidade de separar completamente a dependência temporal da dependência espacial, no sentido de podermos tratar com hipersuperfícies para $t =$

const (veja Caps. 2, 3 e Apênd. A).

Desta maneira, os valores para k : 1, 0 e -1 referem-se a três tipos de modelos FRW, distinguidos por apresentarem hipersuperfícies com curvatura constante positiva, nula e negativa, respectivamente.

O caráter diferencial apresentado pela métrica (1.1) implica em que ela diga respeito apenas às propriedades locais do espaço-tempo. Em outras palavras, a partir da métrica não podemos determinar a estrutura global do Universo sem lançarmos mão de outros conhecimentos.

Por este motivo, a decisão a respeito de qual tipo de modelo FRW é o mais adequado, para descrever o Universo a atual em "larga-escala", não se limita simplesmente na escolha ou determinação da constante k .

Na verdade estes três casos se desdobram em infinitas possibilidades no que concerne à estrutura global do Universo.

Como se sabe (cf. Cap. 3), as hipersuperfícies de que falamos acima, são espaços tridimensionais (3-dim) com curvatura intrínseca constante. Os três casos possíveis: $k = 1$, 0 e -1 estão ligados, respectivamente, aos espaços esféricos (S^3), euclidiano (R^3) e hiperbólico (H^3).

Do ponto de vista da topologia, existem vários outros espaços que possuem as mesmas propriedades locais, que estes três, embora sejam diferentes deles.

Para $k = 1$ e $k = 0$ existe uma classificação completa dos espaços localmente isométricos a S^3 e R^3 respectivamente (Wolff 1967). Para $k = -1$ tal classificação não é

conhecida para espaços localmente isométricos a H^3 , entre tanto para estruturas compactas, o volume destes espaços é usado para uma classificação incompleta (Thurston e Weeks 1984).

O número destes espaços topologicamente diferentes, mas com as mesmas propriedades locais dadas pela métrica (1.1), é infinito para $k = 1$ e $k = -1$ e restrito a 18 possibilidades para $k = 0$.

Feitas essas considerações iniciais, apresentaremos agora um panorama das pesquisas que, de alguma maneira, direta ou indiretamente, contribuem com o objetivo de se determinar a topologia do Universo.

1.2. Um Breve Panorama

As pesquisas que têm sido feitas com vistas à determinação da topologia do Universo se baseiam quase que exclusivamente nos modelos FRW.

Trabalhos que, diretamente, nada tinham a ver com este assunto, em geral feitos por astrofísicos, acabaram servindo de motivação e mesmo de justificação para trabalhos diretamente ligados à determinação da topologia do Universo, como veremos a seguir.

Os primeiros trabalhos teóricos no sentido de se mostrar que uma mesma estrutura local pode corresponder a modelos de Universo globalmente diferentes são devidos a Felix Klein, em 1918.

Por outro lado, só por volta de 1968 é que apareceram os primeiros trabalhos que, através de dados observacionais, tentaram encontrar evidências que apontassem para a possibilidade de uma determinada estrutura.

Estes trabalhos são devidos a Solheim (1968 *a*). A partir do fato de que, na distribuição de quasares (QSOs) no céu era observado um excesso de fontes com redshifts Z , tal que $1.9 \leq Z \leq 2.1$, Solheim, embasado pelos estudos de Petrosian *et al.* (1967) que mostravam que este efeito poderia ser explicado por intermédio de um modelo cosmológico que tivesse um polo nesta faixa de redshift, utilizando os dados do *4C Radio Catalogue*, testou a possibilidade de se observar um mesmo objeto em posições aproximadamente o postas no céu.

O modelo de Universo pretendido nestas pesquisas é o FRW com $\Lambda \neq 0$ e $k = +1$, o que implica numa geometria esférica para o espaço que, por sua vez leva a um Universo com uma seção espacial fechada, isto é, com volume finito. Topologicamente este modelo seria equivalente a uma hiper superfície S^3 .

Nesta hipersuperfície a luz de um determinado objeto pode chegar ao observador pelos dois segmentos da geodési ca que une o observador à fonte. O segmento de comprimen to menor representaria o raio de luz que vai "diretamente", da fonte ao observador; o outro segmento, de comprimento maior, representaria o raio de luz que deu "uma volta em torno do Universo" e atingiu o observador. Implicitamente

supõe-se que o quasar deve ter sua forma inalterada por um tempo, da ordem de bilhões de anos, que é o tempo que um raio de luz levaria para dar a volta neste Universo, de tal maneira que se pudesse identificar as duas imagens como sendo a mesma.

Além disso os parâmetros observacionais deste modelo q_0 e σ_0 (veja Apênd. B), dado o fato de que os modelos fechados expandem-se até um certo ponto e depois se recontraem (Landau e Lifshitz 1980, pg. 469), devem ser ajustados de tal maneira que permitam que a luz proveniente da fonte tenha tempo de "dar a volta no Universo" e atingir o observador antes que o Universo colapse.

É importante notar também que as imagens vistas do mesmo objeto corresponderiam a épocas diferentes da história deste objeto, pois o raio de luz que demorasse mais tempo para alcançar o observador estaria ligado a épocas mais recentes da história deste objeto. O mesmo Solheim (1968 b) além de testar a possibilidade descrita acima, também procurou encontrar fontes de rádio opostas a quasares conhecidos neste mesmo espírito.

Logo em seguida a estes trabalhos, Piper (1968) já chamava a atenção para o fato de que os argumentos colocados por Solheim não eram suficientes para corroborar o modelo proposto. Ainda assim, até agora não há argumentos para descartarmos de vez este tipo de modelo.

É oportuno observar que o modelo que Solheim pretendia corroborar era, como já dissemos, globalmente um espaço

S^3 , cuja topologia pode ser considerada trivial, no sentido de ser a topologia mais simples para um espaço de curvatura constante positiva, como veremos mais tarde (cf. Cap. 3).

Uma outra linha de pesquisa que começou paralelamente à de Solheim, mas com resultados posteriores, no que diz respeito à cosmologia, é a que tem origem a partir da investigação da distribuição do redshift dos quasares. Esta investigação, em princípio, teve um caráter eminentemente astrofísico.

Também em 1968 era discutida a existência de dois picos na distribuição do redshift de absorção (Z_{abs}) dos quasares em $Z_{abs} = 0.06$ e $Z_{abs} = 1.95$, além da provável periodicidade desta distribuição (Burbidge 1968). Estudos subsequêntes do próprio Burbidge (Burbidge e O'Dell 1972) confirmaram em parte os resultados então obtidos, mas por outro lado, trabalhos como o de Wills e Ricklefs (1976) não conseguiram detectar nenhuma periodicidade.

O interesse nesses trabalhos por parte dos astrofísicos era, geralmente, motivado pela dúvida em saber se o redshift de emissão dos quasares é intrínseco ou extrínseco. No primeiro caso, a origem do redshift se deve a efeitos no próprio quasar, por exemplo, devido a efeitos de uma grande quantidade de massa presente no quasar, que pode causar o assim chamado redshift gravitacional. No segundo caso o redshift poderia ser um efeito cosmológico causado pela expansão do Universo.

A solução desta questão inclina-se mais para o lado da origem extrínseca do redshift, pois, é difícil explicar redshifts de emissão tão grande ($Z_{\text{ems}} \sim 2.0$) em termos das propriedades intrínsecas dos quasares. Além disso a periodicidade no redshift de absorção, que vinha sendo um forte apelo no sentido de se considerar a absorção local, o que portanto, reforçaria a hipótese do redshift de emissão ser intrínseco, passa a ser considerada passível de uma explicação através de um modelo cosmológico do tipo Lenaître (Burbidge *et al.* 1971).

Desse ponto de vista, poderíamos escrever o redshift total de um quasar como sendo:

$$\left(1 + Z_T\right) = \left(1 + Z_c\right) \cdot \left(1 + Z_r\right) \cdot \left(1 + Z_i\right) \quad (1.4)$$

Onde Z_c refere-se ao redshift cosmológico, Z_r ao redshift devido às velocidades randômicas que o quasar possa ter e Z_i ao redshift devido a fenômenos intrínsecos ao quasar (cf. Burbidge e O'Dell 1972).

Mais tarde, o trabalho de Karson (1977) viria estender esta análise a 574 quasares com redshifts disponíveis (note-se que nos primeiros trabalhos, haviam menos de cem quasares). O número de quasares aumentava muito de trabalho para trabalho, em vista de novos quasares serem constantemente descobertos.

Neste trabalho Karlson, que antes havia sugerido uma

periodicidade com respeito ao argumento $x = \ln(1 + Z)$ (Karlson 1971), atribui uma significação marginal às periodicidades até então encontradas, dado que diferentes autores obtiveram resultados distintos. Karlson reafirma as periodicidades, agora porém, a partir dos novos dados. Entretanto ele deixa em aberto a explicação para esta periodicidade, bem como, se ela implicaria de uma maneira decisiva na solução da questão sobre a origem local ou não do redshift dos quasares.

Em 1978 Burbidge publicou um artigo de revisão, onde deixou claro que tanto há dúvidas ainda, com relação aos quasares serem locais ou não, quanto ao fato de que as tentativas de se interpretar o pico $Z = 1.95$, na distribuição dos redshifts de emissão e absorção, podem recair numa explicação em termos de modelos cosmológicos do tipo Lemaître ou, naqueles que apontam para a possibilidade do pico ser devido a propriedades intrínsecas do quasar (Burbidge 1978).

Neste ponto das investigações Burbidge destacava que os picos encontrados, principalmente o pico $Z = 1.95$, tanto para a emissão quanto para a absorção, não são estatisticamente significantes, o que, segundo ele, não implicava em ignorar este forte efeito que só as observações futuras poderiam esclarecer (Burbidge 1978).

Paál (1971) foi talvez o primeiro a chamar a atenção para a relação das investigações com respeito a distribuição do redshift e da posição dos quasares no céu, com uma larga classe de modelos cosmológicos com topologias não-

triviais; não restringindo a uma só topologia, como Solheim e além disso, deixando as considerações estatísticas para um segundo plano, ao contrário de tantos outros.

Pode-se concluir, de tudo que foi dito até aqui que, ao que se refere às pesquisas sobre modelos com topologias não-triviais, quase não havia preocupação em testar estes modelos e suas conseqüências, em função dos dados observacionais.

Os trabalhos nesta área eram, e são, devidos quase totalmente a físicos teóricos.

Em 1971, Ellis publicou um artigo de revisão onde são colocadas as propriedades que se deve esperar de qualquer modelo de Universo razoável, em que pese sua topologia não trivial (cf. Cap. 2 - sec 2.3). Este trabalho de Ellis tem uma importância muito grande na pesquisa que se seguiu a ele (Ellis 1971).

Em 1974 Sokolov e Shvartzman propuseram um modelo de Universo "colado junto", isto é, baseado nos modelos FRW desconsiderando o sinal da curvatura (k), o Universo deve ter uma estrutura espacial fechada (compacta) de pequenas dimensões. Isso só é possível, pelo menos para $k = 0$ e $k = -1$, se a topologia da seção espacial do Universo for não-trivial.

Nesse artigo (cf. Cap. 3) é estimado, a partir de dados observacionais, o tamanho do Universo, em vista dele possuir uma topologia não-trivial. Além disso, é importante ressaltar que há uma parte do artigo dedicada a

recomendações para observações astronômicas, onde se leva em conta a linha de pesquisas sugerida pelo trabalho de Paál.

Pode-se dizer que este artigo de Sokolov e Shvartzman reforça uma possibilidade, qual seja a de se pensar que o Universo pode ser finito e bem menor do que tradicionalmente se considera onde, dependendo dos parâmetros característicos deste Universo (cf. Cap. 3) poderiam aparecer várias imagens do mesmo objeto em diferentes posições no céu, sendo a topologia não-trivial, a responsável por isto. Mas, mais do que isso, esse artigo deixa patente a necessidade de se dirigir tais observações para as consequências observacionais destes modelos, confirmando-se ou não suas previsões.

O trabalho de Gott (1980) aparece como uma tentativa de utilizar-se dos pressupostos dos "Universos pequenos", na linha da cosmologia física. Nesse trabalho Gott mostra que Universos com topologias não-triviais (multiplamente conexos), produzem naturalmente as condições da cosmologia caótica de Rees (1972). Não há entretanto, nada de conclusivo, já que, por exemplo, há dificuldades em explicar a produção de uma radiação de corpo negro termalizada.

Em outro contexto, temos os trabalhos de Fang. Este, segue uma linha de pesquisas que, de certa maneira, funde várias das correntes de pesquisas que citamos até aqui.

No seu trabalho de 1982 (Fang *et al.* 1982) é retomado o problema de se tentar aplicar o porquê da periodicidade

na distribuição dos redshifts dos quasares. A idéia principal é propor um modelo em que a periodicidade pode ser remanescente de uma onda de densidade de perturbação que ocorreu um pouco antes da época da recombinação. Uma das propostas deste modelo, seria então a de que a periodicidade deve se dar com respeito ao argumento:

$$x = F(Z, q_0) \quad (1.5)$$

sendo que:

$$F(Z, q_0) = \int_0^Z \frac{dZ'}{(1+Z') \cdot (1+2q_0 Z')^{1/2}} \quad (1.6)$$

Onde Z é o redshift e q_0 é o fator de desaceleração (cf. Apênd. B). É interessante notar que para $q_0 = 0$ em (1.6), obtemos a periodicidade proposta por Karlson (1971), (cf. pg. 13).

Já no trabalho de 1983 (Fang e Sato 1983) Fang aplica os resultados do trabalho de 1982 ao modelo de Einstein - de Sitter, supondo uma topologia não-trivial $T^3 \times R$, encontrando uma relação entre os redshifts de imagens que corresponderiam a mesma fonte:

$$Z_n + 1 = \left(1 - \frac{a(t_0) X_f}{2(c/H_0)} - \frac{a(t_0) a_x n}{2(c/H_0)} \right)^{-2} \quad (1.7)$$

onde: Z_n = redshift da enésima imagem da fonte

$a(t_0)$ = fator de escala atual do Universo (cf. Apênd. A)

X_f = coordenada espacial da fonte

c = velocidade da luz

H_0 = constante de Hubble (cf. Apênd. B)

a_x = parâmetro característico da célula fundamental na di
reção do eixo x (cf. Cap. 3).

Apesar do modelo de Einstein - de Sitter ser, por sim
plicidade, o mais estudado nos artigos que citamos, para
o caso das topologias não-triviais, havia (e ainda há) um
desacordo entre os pressupostos deste modelo e as observa
ções. O modelo de Einstein - de Sitter exige que Ω_0 (cf.
Apênd. B) seja exatamente um ($\Omega_0 = 1$). No entanto, as ob
servações até então (Huchra 1984) davam $\Omega_0 \approx 0.1$, ou se
ja, dez por cento do valor esperado para o modelo Eins
tein - de Sitter.

Baseado nestas evidências, Fagundes (1983) estudou a
possibilidade de se compactificar as seções espaciais pa
ra modelos FRW com $k = -1$, que implicam em $\Omega_0 < 1$, de ma
neira que as seções espaciais sejam fechadas (volume fini
to) mesmo para espaços com curvatura constante negativa,

lembrando que as propriedades locais são dadas pela métrica FRW.

Num outro trabalho, as particularidades de modelos FRW com seção espacial hiperbólica ($k = -1$) compacta são usadas por Fagundes (1984) como uma possível explicação para a associação quasar-galáxia com redshifts discordantes.

Esta associação era convencionalmente usada para reforçar a interpretação não cosmológica do redshift (Burbridge 1981). Neste sentido o trabalho de Fagundes mostra a possibilidade de se explicar este efeito como sendo devido à topologia e, além disso, se levarmos em conta a discussão sobre a periodicidade do redshift, esta explicação reforça que a periodicidade deve ser também, de alguma maneira, devida à topologia do espaço.

Em trabalhos mais recentes (Demianski e Lysik (1986) estudam duas conseqüências observacionais dos "Universos pequenos": a periodicidade das distâncias e a existência de pares opostos de galáxias, aglomerados de galáxias e quasares, com o objetivo de, a partir disto, poder se decidir por esta ou aquela topologia para o espaço.

Não podemos deixar de citar também o trabalho de Ellis e Schreiber (1986) onde são estudadas as propriedades dinâmicas e observacionais dos "Universos pequenos".

1.3. O Contexto da Nossa Proposta

Em vista de tudo o que foi exposto até aqui, colocaremos em linhas gerais, de que maneira direcionamos o nosso trabalho.

A nossa hipótese central é a de que vivemos num Universo cuja topologia é não-trivial, mais precisamente, estudaremos o modelo cuja seção espacial teria a topologia do toro 3-dim chato ou 3-toro ou ainda T^3 .

Este tipo de topologia se insere na classe de modelos com métrica FRW e curvatura espacial nula que são chamados de modelos de Einstein - de Sitter.

No decorrer do breve panorama das pesquisas, que demos acima, pudemos notar que há uma tendência de interação entre as observações astrofísicas, no que diz respeito à distribuição dos quasares no céu, à distribuição do redshift dos quasares e ao tempo de vida dos quasares, com as propriedades topológicas que se poderia atribuir ao Universo, sem esquecer da cosmologia do Universo primitivo.

Nos parece que quanto mais relacionadas forem todas estas questões, mais chances teremos de poder determinar em que tipo de Universo vivemos.

Nesse sentido o nosso projeto de pesquisa enfatiza sobremaneira a questão, já em parte levantada por Fang e Sato (1983) além de Demianski e Lysik (1986) no contexto da cosmologia, da evolução dos quasares (cf. Seldner e Peebles 1979).

Esta questão aparece no nosso trabalho, na medida em que procuramos imagens da nossa própria Galáxia como quasars (cf. Cap. 3 e 4).

Além disso, no nosso trabalho buscamos verificar as conseqüências específicas a que o modelo Einstein - de Sitter é levado em vista da topologia $T^3 \times R$.

Cabe a nós, finalmente, notar que a escolha pelo modelo de Einstein - de Sitter é reforçada por estimativas recentes da massa total do Universo que é compatível com $\Omega_0 = 1$ (Loh e Spillar 1986).

O nosso objetivo neste trabalho não é tentar determinar de maneira absoluta as propriedades globais do Universo, mas sim apresentar um projeto de pesquisa que, somado a outros tantos, possa contribuir para esse fim.

CAPÍTULO 2

A VARIEDADE ESPAÇO - TEMPO

2.1. Introdução

Na relatividade geral é importante que se faça uma distinção entre a realidade física de um evento, ou ponto, no espaço-tempo e o sistema de coordenadas que será usado para descrevê-lo.

Essa distinção é reconhecida no conceito de variedade, de tal maneira que um ponto na variedade é independente de qualquer sistema de coordenadas que seja utilizado sobre esta variedade.

Desta maneira, os únicos conceitos definidos pela estrutura da variedade são aqueles que independem da escolha do sistema de coordenadas.

A variedade na relatividade geral é o espaço-tempo, que, resumidamente, podemos dizer ser uma variedade topológica (Boothby 1975, pg. 6) juntamente com uma estrutura diferenciável de classe C^r ($r \geq 1$) (Boothby 1975, sec. III.1 - III.4).

Antes de passarmos a analisar a variedade espaço-tempo (sec. 2.3), definiremos o conceito de subvariedade, que é importante termos bem claro para este Capítulo e para o próximo.

2.2. Subvariedades (Kreyszig 1975, pg. 277)

Uma variedade diferenciável m -dimensional de classe r , M' é chamada de uma subvariedade de uma variedade diferenciável n -dimensional de classe r, M , se $m \leq n$, tendo M' as seguintes propriedades:

- i) M' , considerada como espaço topológico, é um sub-espaço topológico de M , isto é, a topologia de M' consiste precisamente das intersecções de M' e dos conjuntos abertos de M .
- ii) O mapeamento $\phi: M' \rightarrow M$ com $\phi(p) = p$ quando $p \in M'$ é um mapeamento não degenerado de classe r , isto é, a matriz jacobiana da transformação entre as coordenadas locais permitidas em p e a imagem $\phi(p)$ tem o maior grau possível (se M tem dimensão n e M' têm dimensão m , tal que, $n \geq m$, então o grau máximo é m).

2.3. Propriedades Plausíveis do Espaço - Tempo

Nesta seção consideraremos as propriedades que podemos esperar o espaço-tempo possuir.

É importante notarmos que aqui nos referiremos às variedades fundamentais dos modelos que procuram descrever o Universo. Como já dissemos (cf. sec 1.1), um modelo de

Universo pode ser descrito por uma infinidade de variedades com as mesmas propriedades locais, mas globalmente diferentes. Estas variedades fundamentais seriam os espaços de recobrimento Universal para um dado modelo, como veremos mais adiante (cf. sec. 2.7).

Os modelos usuais de Universo se baseiam numa variedade M , 4 - dimensional de classe C^∞ , Hausdorff, conexa e paracompacta.

Uma variedade ser Hausdorff significa que o espaço topológico em que ela está baseada é um espaço de Hausdorff. Por sua vez, um espaço topológico V é um espaço de Hausdorff se para quaisquer pontos distintos p e q em V , existem conjuntos abertos disjuntos A e B em V tal que $p \in A$ e $q \in B$. (Hawking e Ellis 1973, pg. 13).

Caso a variedade espaço-tempo fosse não-Hausdorff, isso poderia acarretar a violação do que nós entendemos por "eventos distintos" (Geroch e Horowitz 1979).

A variedade também deve ser conexa, isto é, ela não pode ser representada como a união de dois conjuntos abertos disjuntos e não vazios (Kreyszig 1973, pg. 58). Intuitivamente uma variedade é conexa se ela é composta de um só pedaço. Se a variedade espaço-tempo fosse não-conexa haveriam partes que não se comunicariam (não trocariam sinais luminosos, por exemplo) de nenhuma maneira.

Uma variedade Hausdorff conexa é paracompacta somente se ela tem uma base contável, ou seja, qualquer conjunto aberto pode ser expresso como a união de membros desta coleção (Hawking e Ellis 1973, pg. 14). Fisicamente

falando, a importância da variedade ser paracompacta é que toda a variedade que admite uma métrica de Lorentz é paracompacta (Geroch e Horowitz 1979).

Outra propriedade importante é a de que a variedade espaço-tempo não tenha fronteira. Caso existisse a fronteira representaria uma aresta do espaço-tempo; veja a discussão de Harrison (1981), Capítulo 5.

Sobre a variedade espaço-tempo devemos exigir que seja possível definir uma métrica pseudo-riemanniana (Wolff 1967, pg. 46) g , de pelo menos classe C^2 e localmente de classe C^4 . Um tensor métrico g num ponto $p \in M$ é um tensor de grau dois em p . Desta maneira uma métrica de classe C^r sobre M é um campo tensorial simétrico g (Hawking e Ellis 1973, sec. 2.6).

Devemos exigir também que a variedade tenha uma métrica com assinatura de Lorentz. Escolheremos a forma normal da métrica ser $(-, +, +, +)$. A existência desta métrica em M implica na validade local da relatividade especial (Ellis 1971). Suporemos também que as equações de Einstein são as equações do campo que determinam a métrica g , bem como o comportamento da matéria contida no espaço-tempo.

Ainda sobre a existência de uma métrica lorentziana sobre M , é importante chamarmos a atenção para o fato de que qualquer variedade paracompacta de classe C^r admite uma métrica positiva-definida (Hawking e Ellis 1973, pg. 38). Por outro lado uma variedade paracompacta de classe C^r

($r \geq 1$) admite uma métrica de Lorentz se e somente se ela admite um "campo direcionável" (Geroch e Horowitz 1979).

Em adição a isto, pode-se mostrar que toda a variedade não-compacta admite um "campo direcionável" e, portanto, admite alguma métrica com a assinatura de Lorentz (Ellis 1971). Dizemos que uma variedade é compacta se toda a sequência de seus pontos tem um ponto de acumulação (Lima 1971, pg. 82).

Apesar de alguns tipos de espaços compactos também admitirem uma métrica de Lorentz (Ellis 1971), daqui por diante consideraremos que a variedade espaço-tempo é não-compacta. Com respeito à notação representaremos a variedade espaço-tempo M com uma métrica g por (M, g) .

Outro motivo que nos leva a considerar a variedade espaço-tempo não compacta é a questão da causalidade. Para compreendermos bem este ponto, algumas definições são necessárias.

Dizemos que um ponto p *precede* um ponto q [p e $q \in (M, g)$] se existe uma curva tipo-tempo que começa em p e termina em q . Como consequência desta relação de precedência, podemos enumerar algumas propriedades básicas (Geroch e Horowitz 1979):

- i) p precede q e q precede r , implica que p precede r .
- ii) O "domínio de influência passado" de p , $I^-(p)$ é o conjunto de todos os pontos que precedem p .

Similarmente temos o "domínio de influência futura" de p , $I^+(p)$ que é o conjunto de todos os pontos que são precedidos por p . Notemos que $I^-(p)$ e $I^+(p)$ são conjuntos abertos. No espaço-tempo de Minkowski, $I^-(p)$ e $I^+(p)$ são os interiores dos cones de luz passado e futuro respectivamente.

iii) se γ é uma curva tipo-tempo ou nula, direcionada para o futuro de um ponto q , e γ não entra em $I^+(q)$, então γ é uma geodésica nula.

iv) Para qualquer ponto p a fronteira $I^-(p)$ deve ser nula no seguinte sentido: através de qualquer ponto $q \neq p$ da fronteira de $I^-(p)$ passa uma geodésica nula dirigida para o futuro, que permanece inteiramente nesta fronteira e que além disso, a esta geodésica não pode ser atribuído nenhum ponto final futuro.

Das propriedades acima, vemos que a mais óbvia manifestação da violação da causalidade é a existência de curvas tipo-tempo fechadas, o que significa em termos de relação causal, um ponto p precedendo a si mesmo.

É importante notar que a Relatividade Geral, como ela é geralmente formulada, não proíbe curvas tipo-tempo fechadas. A questão que se põe é se nós gostaríamos que o nosso modelo de Universo tivesse este comportamento causal anômalo. Fisicamente, a existência de linhas tipo-tempo fechadas, passando por um ponto p , significaria que um

evento individual em p poderia influenciar o seu passado.

Também não gostaríamos que fosse violada a condição de causalidade forte, isto é, que dado um ponto p qualquer do espaço-tempo não haja, através de uma vizinhança suficientemente pequena de p , alguma curva tipo-tempo passando mais de uma vez, em outras palavras, que não haja curvas tipo-tempo "quase fechadas", que começam e terminam muito próximo de p .

Para deixar bem claro o que gostaríamos de exigir de um modelo de Universo com respeito a causalidade, o mais razoável parece ser adotar a condição de "causalidade estável" (Hawking 1969). Um espaço-tempo (M, g) é dito ser *estavelmente causal* se existe um vetor tipo-tempo ($\neq 0$ em toda parte) t_α , tal que a métrica de Lorentz sobre M dada por $g_{\alpha\beta} - t_\alpha t_\beta$ não admite curvas tipo-tempo fechadas. Para ver o que isto significa, consideremos a geometria num ponto p . O cone de luz da métrica de Lorentz $g_{\alpha\beta} - t_\alpha t_\beta$ é mais aberto (isotropicamente em torno do vetor t^α) do que o cone de luz da métrica $g_{\alpha\beta}$. O efeito de "abrir" o cone desta maneira é que mais curvas são tomadas como tipo-tempo, e em particular a probabilidade de achar curvas tipo-tempo fechadas aumenta (veja Fig. 2.1)

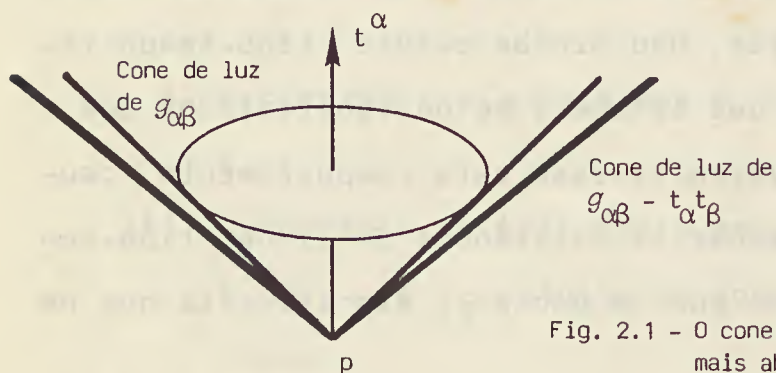


Fig. 2.1 - O cone de luz da métrica $g_{\alpha\beta} - t_\alpha t_\beta$ é mais aberto do que o cone de luz da métrica $g_{\alpha\beta}$.

A seguir damos algumas conseqüências da estabilidade causal (Geroch e Horowitz 1979).

- i) Se (M, g) é um espaço-tempo estavelmente causal, então a topologia de M segue da estrutura causal.
- ii) Todo espaço-tempo estavelmente causal é não-compacto.
- iii) Por uma "função do tempo" sobre um espaço-tempo (M, g) queremos dizer um campo escalar suave t , cujo gradiente é estritamente tipo-tempo. Ou seja, atribuir a todo ponto do espaço-tempo um "tempo" de maneira que ele seja estritamente crescente ao longo de toda curva tipo-tempo. Isto implica na afirmação: um espaço-tempo admite uma função do tempo se e somente se ele é estavelmente causal.

Torna-se necessário neste ponto explicitarmos o conceito de orientabilidade que leva a uma condição que foi subentendida na discussão anterior sobre causalidade, qual seja, a que o espaço-tempo é orientado no tempo.

Um espaço-tempo é dito ser orientável no tempo se uma designação de quais vetores tipo-tempo são direcionadas para o futuro e quais são direcionadas para o passado pode ser feita em cada um dos seus pontos, sendo que esta designação é contínua de ponto a ponto sobre toda a variedade.

Usando as violações de simetria observadas atualmente na física de partículas elementares, conclue-se que o

nosso espaço-tempo deve ser totalmente orientável, o que não nos permite concluir que o espaço-tempo deva ser separadamente espacial e temporalmente orientável (Geroch e Horowitz 1979).

Mencionamos anteriormente que a condição de causalidade estável leva a estrutura causal ser, em certo sentido, mais fundamental do que as outras estruturas. Devemos então desconfiar que haja alguma interação entre a topologia da variedade e a estrutura causal expressa através da orientabilidade do tempo.

Esta interação pode ser evidenciada através do seguinte resultado: todo espaço-tempo baseado numa variedade simplesmente conexa é temporal e espacialmente orientável. Sendo que uma variedade M é simplesmente conexa se dado um ponto $p \in M$ arbitrário, quaisquer duas curvas fechadas através de p são homotópicas, quer dizer, podem ser deformadas continuamente uma na outra (Geroch e Horowitz 1979).

Como veremos mais adiante neste Capítulo (sec. 2.7), podemos construir a partir de espaços não-simplesmente conexos um espaço simplesmente-conexo que é chamado de Espaço de Recobrimento Universal. Por construção este espaço é localmente indistingüível do espaço multiplamente-conexo, que lhe deu origem, pois o único efeito ao se tomar o espaço de recobrimento universal é o de se produzir várias cópias de cada região local do espaço tempo original; portanto a física local permanece a mesma.

Apesar de que por experiências locais (que são as únicas que podemos fazer) não podemos determinar se o nosso espaço-tempo é ou não simplesmente-conexo, não há nenhum abuso em se supor que ele é simplesmente-conexo e assim, considerar as orientabilidades no tempo e no espaço.

Uma última exigência que mencionaremos aqui é a de que a variedade espaço-tempo (M, g) comporte uma estrutura espinorial. Como vemos em todo o Universo observável elétrons e neutrinos e como tais férmions são descritos no espaço-tempo por campos espinoriais, a variedade espaço-tempo deve comportar tal estrutura.

2.4. As Seções Espaciais

Na seção anterior frizamos que estávamos tratando com propriedades da variedade fundamental do espaço-tempo 4-dim. Desta seção em diante estaremos interessados em subvariedades 3-dim do espaço-tempo, particularmente nas subvariedades espaciais 3-dim compactas (cf. Apênd. A) do espaço-tempo que chamaremos de seção espacial compacta do espaço-tempo 4-dim. Note que a seção espacial ser uma subvariedade compacta não implica que a variedade espaço-tempo seja compacta.

O fato de podermos ter seções espaciais é uma consequência direta do espaço-tempo ser estavelmente causal.

Quando numa seção espacial do espaço-tempo nenhum ponto precede o outro (no sentido que foi definido anteriormente) chamamos a seção de *seção acronal*. O resultado importante é que todo espaço-tempo estavelmente causal admite seções acronais (Geroch e Horowitz 1979).

Outro fato que é consequência direta da estabilidade de causal é o que se segue:

Seja um espaço-tempo que tenha duas seções compactas S e S' e seja um subconjunto compacto da variedade cujas fronteiras consistem de S e S' . Se a causalidade estável mantém-se então S e S' são difeomorfas.

Fisicamente isto significa que em um Universo com seções compactas sem violações de causalidade, a topologia do espaço não muda.

Passamos agora a analisar uma exigência mais forte sobre as seções do espaço-tempo compactas.

Seja (M, g) um espaço-tempo com uma orientação temporal fixa e seja S uma seção acronal. Por "domínio de dependência futura" de S , $D^+(S)$, entendemos o conjunto de todos os pontos $p \in M$ tal que toda curva tipo-tempo dirigida para o passado de p , a qual não pode ser atribuído nenhum ponto passado final, encontra S . A idéia desta definição é garantir que a física em $D^+(S)$ seja determinada pelas informações em S . De maneira análoga definimos $D^-(S)$. O domínio de dependência de S é a união de $D^+(S)$ e $D^-(S)$.

As definições dadas acima nos permitem definir a

superfície de Cauchy. Seja (M, g) um espaço-tempo e S uma seção acronal. S é dita ser uma *superfície de Cauchy* para o espaço-tempo se todos os pontos de M estão no domínio de dependência de S .

Fisicamente a existência de uma superfície de Cauchy significa que há uma seção tal que a informação sobre esta seção é suficiente para determinar a física em todo o espaço-tempo.

Voltemo-nos agora para algumas conseqüências de termos num modelo de Universo superfícies de Cauchy:

Podemos escolher uma função do tempo tal que cada seção acronal seja ela mesma uma superfície de Cauchy do espaço-tempo e, em particular, deverá passar uma superfície de Cauchy por cada ponto do espaço-tempo. Todas estas seções deverão ser topologicamente idênticas, isto é, difeomorfas (Geroch e Horowitz 1979).

O espaço-tempo que possui uma superfície de Cauchy tem uma estrutura global muito bem comportada, isto é, não há anomalias causais.

Uma conseqüência de grande importância para os modelos FRW, da existência das superfícies de Cauchy numa variedade espaço-tempo implica que esta variedade deve ser da forma $S \times \mathbb{R}$ onde S é uma variedade 3-dim.

2.5. Espaço Quociente (Boothby 1975, pg. 60)

Até aqui procuramos justificar o caminho que

percorremos para chegar a espaços-tempo da forma $S \times R$ onde S é uma variedade 3-dim. Porém, novos conceitos são necessários para continuarmos. Nesta seção trataremos do conceito de espaço quociente e nas seguintes do conceito de ação de um grupo discreto sobre uma variedade e do conceito de espaço de recobrimento universal.

Seja X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X . Denotando por $[x] = \{y \in X / y \sim x\}$ a classe de equivalência de x , e para o subconjunto $A \subset X$, denotado por $[A]$ o conjunto $\cup_{a \in A} [a]$, isto é, todos os x equivalentes a algum elemento de A . Chamaremos $X/\sim$ o conjunto das classes de equivalência e denotaremos por $\pi: X \rightarrow X/\sim$ o mapeamento natural que leva cada $x \in X$ na sua classe de equivalência, $\pi(x) = [x]$. Chamamos $X/\sim$ espaço quociente de X relativo a relação $\sim$.

2.6. Ação de Um Grupo Discreto Sobre Uma Variedade

(Boothby 1975, sec. III. 8)

O espaço quociente definido acima é uma possível fonte de novas variedades, sendo que cada nova variedade corresponderia a uma dada relação de equivalência.

Esta porém, não é a única maneira de se construir um espaço quociente. O espaço quociente pode também ser construído pela ação de um grupo numa variedade. Definamos em primeiro lugar o conceito de órbita.

Seja G um grupo agindo num conjunto M e suponha que $A \subset M$ é um subconjunto. GA então denota o conjunto $\{ga/ g \in G \text{ e } a \in A\}$. A órbita de $x \in M$ é o conjunto Gx . Se $Gx = x$, então x é um ponto fixo.

Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável de classe C^∞ . Vamos supor uma ação de classe C^∞ $\theta: G \times M \longrightarrow M$. Define-se uma relação $\sim$ sobre M por $p \sim q$ se para algum $g \in G$ temos $q = \theta_g(p) = gp$. Vemos que $\sim$ é uma relação de equivalência e que as classes de equivalência coincidem com as órbitas de G . Podemos ver também que $p \sim q$ implica que p e q estão na mesma órbita, de maneira que a classe de equivalência $[p] \subset Gp$.

Denotaremos por M/G o conjunto das classes de equivalência. Este conjunto será sempre tomado com a topologia quociente e será chamado de espaço da órbita da ação.

O caso que consideraremos será aquele onde G é um grupo discreto que denotaremos por Γ . Por grupo discreto queremos dizer um grupo com um número contável de elementos e uma topologia discreta (cada ponto é um conjunto aberto). Neste caso Γ é homeomorfo a um espaço euclidiano de dimensão zero, isto é, um ponto; o que significa que Γ é um grupo de Lie de dimensão zero.

Seja Γ um subgrupo de isometrias de M . Os espaços quocientes que nos interessarão, serão aqueles obtidos através de uma ação livre e propriamente descontínua de Γ sobre M .

A ação de um grupo descontínuo Γ sobre uma variedade M é dita ser propriamente descontínua quando ela satisfaz as seguintes condições:

- i) cada $x \in M$ tem uma vizinhança U tal que o conjunto $\{\gamma \in \Gamma / \gamma U \cap U \neq \emptyset\}$ é finito;
- ii) se $x, y \in M$ não estão na mesma órbita, então há vizinhanças U, V de x, y tal que $U \cap \Gamma V = \emptyset$.

É dita livre se $\gamma(x) = x$ para qualquer $x \in M$ quando $\gamma \in \Gamma$ implica que γ seja a identidade I .

É importante notar que a identificação de pontos de M através de Γ geralmente diminui a dimensão do grupo de isometrias do espaço, daí em geral não obtemos espaços que admitam todo o grupo de isometrias 6-dimensional G , por exemplo, no caso de R^3 (cf. Ellis 1971).

2.7. Espaço de Recobrimento Universal

(Geroch e Horowitz 1979)

Vamos introduzir o espaço de recobrimento universal de uma maneira que nos parece ser a mais intuitiva.

Seja (M, g) uma variedade diferenciável. Como já sabemos, a partir desta variedade (M, g) outras podem ser construídas. Aqui construiremos uma variedade $(\tilde{M}, \tilde{g})$ da seguinte maneira.

Consideremos pares (q, γ) , onde q é um ponto de M e γ é uma curva em M de um ponto p para o ponto q . Chamamos dois pares (q, γ) e (q', γ') , equivalentes se $q = q'$ e há uma deformação contínua (mantendo os pontos finais fixos) de γ para γ' . O conjunto destas classes de equivalência denotaremos por $\tilde{M}$. A métrica $\tilde{g}$ sobre $\tilde{M}$ é obtida como segue. Considera-se um ponto $\tilde{q}$ de $\tilde{M}$ (representado por um ponto q de M e uma curva γ). Definiremos o intervalo de $\tilde{q}$ para $\tilde{q}'$ em $\tilde{M}$ ser o mesmo intervalo q para q' em M . O espaço $(\tilde{M}, \tilde{g})$ é chamado de espaço de recobrimento universal de (M, g) . Por construção vemos que $(\tilde{M}, \tilde{g})$ e (M, g) são localmente indistinguíveis, pois são isométricos. Globalmente, porém eles podem ser bastante diferentes no sentido que $(\tilde{M}, \tilde{g})$ é por definição simplesmente-conexo (um ponto de $\tilde{M}$ é essencialmente um ponto de M e uma curva de um ponto p para o ponto considerado, levando-se em conta as possíveis deformações contínuas da curva). Se (M, g) não for simplesmente-conexo, então as classes (q, γ) e (q', τ) onde γ não pode ser continuamente deformada em τ e $q = q'$, são representadas pelo mesmo ponto; porém em $(\tilde{M}, \tilde{g})$ estas classes ainda serão representadas por pontos diferentes.

No caso de $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ser o espaço de recobrimento universal do espaço-tempo, vemos que a física local será a mesma em ambos os espaços e portanto, não há como distinguir por medidas locais se o espaço-tempo é ou não simplesmente-conexo.

CAPÍTULO 3

O MODELO DE EINSTEIN - DE SITTER COM TOPOLOGIA $T^3 \times R$

3.1. Introdução

Neste Capítulo examinaremos as conseqüências do que foi colocado no Capítulo anterior para os modelos de Universo, que se originam das soluções exatas das equações de Einstein, conhecidos como modelos FRW. Nos deteremos particularmente no modelo FRW com curvatura nula, também conhecido como modelo de Einstein - de Sitter, mais especificamente no caso em que a seção espacial tem uma topologia não-trivial: a do 3-toro, $T^3 (S^1 \times S^1 \times S^1)$.

3.2. Os Modelos FRW

É sabido (Hawking e Ellis 1973, sec. 5.3 e 5.4) que modelos de Universo espacialmente homogêneos e isotrópicos são aproximações muito boas para o Universo observado desde a época do espalhamento da radiação de microondas de fundo observada.

Os modelos de FRW tem como base a métrica (1.1) já

apresentada no Capítulo 1 (cf. sec. 1.1).

Com base no Capítulo 2, podemos dizer que as hipersuperfícies $t = \text{const}$ para $k = 1, 0$ e -1 (cf. sec. 1.1), são na verdade subvariedades da variedade espaço-tempo, que podem ser consideradas *superfícies de Cauchy* desta variedade. Usualmente estas hipersuperfícies são referidas como sendo espaços de Clifford-Klein, isto é, espaços 3-dim completos (um espaço é completo se o limite de toda seqüência fundamental dos seus pontos pertence a este espaço) com curvatura constante (Ellis 1971).

Outro resultado importante, é o de que todas as variedades 3-dim com curvatura constante (respeitando-se as exigências do Capítulo 2) podem ser obtidas através da ação de um subgrupo discreto Γ do grupo de isometrias 6-dim G de $\tilde{M}$, onde $\tilde{M}$ é:

S^3 - esfera 3-dim, quando $k = 1$

R^3 - espaço euclidiano 3-dim, quando $k = 0$

H^3 - espaço hiperbólico 3-dim, quando $k = -1$

Em outras palavras, qualquer variedade $\tilde{M}$ com curvatura constante pode ser escrita da seguinte maneira: $M = \tilde{M}/\Gamma$ (Wolff 1967), sendo $\tilde{M}/\Gamma$ um espaço de Hausdorff, e Γ age livremente (cf. sec. 2.6).

Os espaços S^3 , R^3 e H^3 são particulares no sentido de serem todos eles simplesmente-conexos, o que significa que na verdade (cf. sec. 2.7) tais espaços são aqueles de recobrimento universal de todas as variedades que podem ser obtidas através da relação $M = \tilde{M}/\Gamma$, para cada um dos casos $k = 1, 0$ e -1 , respectivamente.

Dependendo de qual seja a ação do subgrupo Γ , poderemos obter espaços M que não sejam simplesmente conexos e que, portanto não sejam topologicamente equivalentes às variedades $\tilde{M}$ acima (note que os casos $k = 1, 0$ e -1 são independentes um do outro, não havendo portanto confusão em tratá-los em conjunto).

Embora M e $\tilde{M}$ possam não ser topologicamente equivalentes (isto é, não há um difeomorfismo entre eles), vemos que eles são necessariamente isométricos, sendo a métrica dada pela equação (1.2), que é a parte espacial da métrica (1.1) com assinatura $(+, +, +)$, a menos do fator de escala $\alpha(t)$ (cf. Apênd. A).

Devido a isso, os espaços M e $\tilde{M}$ são localmente indistinguíveis um do outro no que diz respeito à física, e portanto, como foi colocado no Capítulo 2, podemos considerar a variedade 4-dim espaço-tempo, com a seção espacial dada por M , orientável tanto temporal quanto espacialmente.

Quanto a seção espacial 3-dim ser compacta é importante lembrarmos que no Capítulo 2 foi colocado que duas seções acronais 3-dim de uma variedade 4-dim (no caso as hipersuperfícies $t_1 = \text{const}$ e $t_2 = \text{const}$) tem a mesma topologia se estas seções forem compactas. Ou seja, a topologia do espaço só mudaria se houvesse violação da causalidade. É interessante notar que, sendo a seção espacial compacta, o volume do Universo num dado instante $t = \text{const}$ é finito.

Vale esclarecermos neste ponto o fato de que o que foi chamado de topologia não-trivial, por exemplo no Capítulo 1, é exatamente a ação do grupo $\Gamma \rtimes I$ (onde I é a identidade) nas variedades S^3 , R^3 e H^3 .

3.3. As Seções Espaciais do Modelo de Einstein - de Sitter

As seções espaciais planas se resumem a dezoito possibilidades (Wolff 1967, Cap. 3).

Porém como estamos interessados em seções espaciais conexas, compactas e orientáveis, as possibilidades ficam limitadas a seis classes de difeomorfismo.

A maneira de visualizar estas seis classes de difeomorfismo possíveis, para variedades riemanianas 3-dim [signatura (+, +, +)] conexas, compactas e orientáveis com curvatura nula, é pensar que elas são obtidas identificando lados opostos de estruturas cristalinas (veja Wolff 1967, teorema 3.5.5.).

Nos quatro primeiros casos a estrutura será um paralelepípedo e as identificações serão as seguintes:

- i) identificar os lados opostos do paralelepípedo obtendo-se um toro T^3 .
- ii) identificar os lados opostos do paralelepípedo rodando um dos pares de um ângulo π .
- iii) identificar os lados opostos do paralelepípedo rodando um dos pares de um ângulo $\pi/2$.

iv) identificar os lados opostos do paralelepípedo com todos os pares sendo rodados de um ângulo π .

A estrutura nos dois últimos casos é a de um hexágono:

v) identificar os lados opostos do hexágono com o topo rodado de $2\pi/3$ em relação ao fundo.

vi) identificar os lados opostos do hexágono com o topo rodado de $\pi/3$ em relação ao fundo.

Notemos apenas que a única forma espacial plana invariante sob todo o grupo de isometrias 6-dim, G é a variedade original R^3 (Ellis 1971).

3.4. A Topologia do 3-Toro

No modelo Einstein - de Sitter a topologia do 3-toro para a seção espacial é obtida através da identificação das faces opostas do paralelepípedo conforme o caso (i) da seção anterior.

O subgrupo discreto Γ de isometrias, no caso, será 3-dim e terá os seguintes geradores:

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= (x + a_x, y, z) \\ g_2(x, y, z) &= (x, y + a_y, z) \\ g_3(x, y, z) &= (x, y, z + a_z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

de maneira que uma identificação genérica no espaço-tempo é dada por:

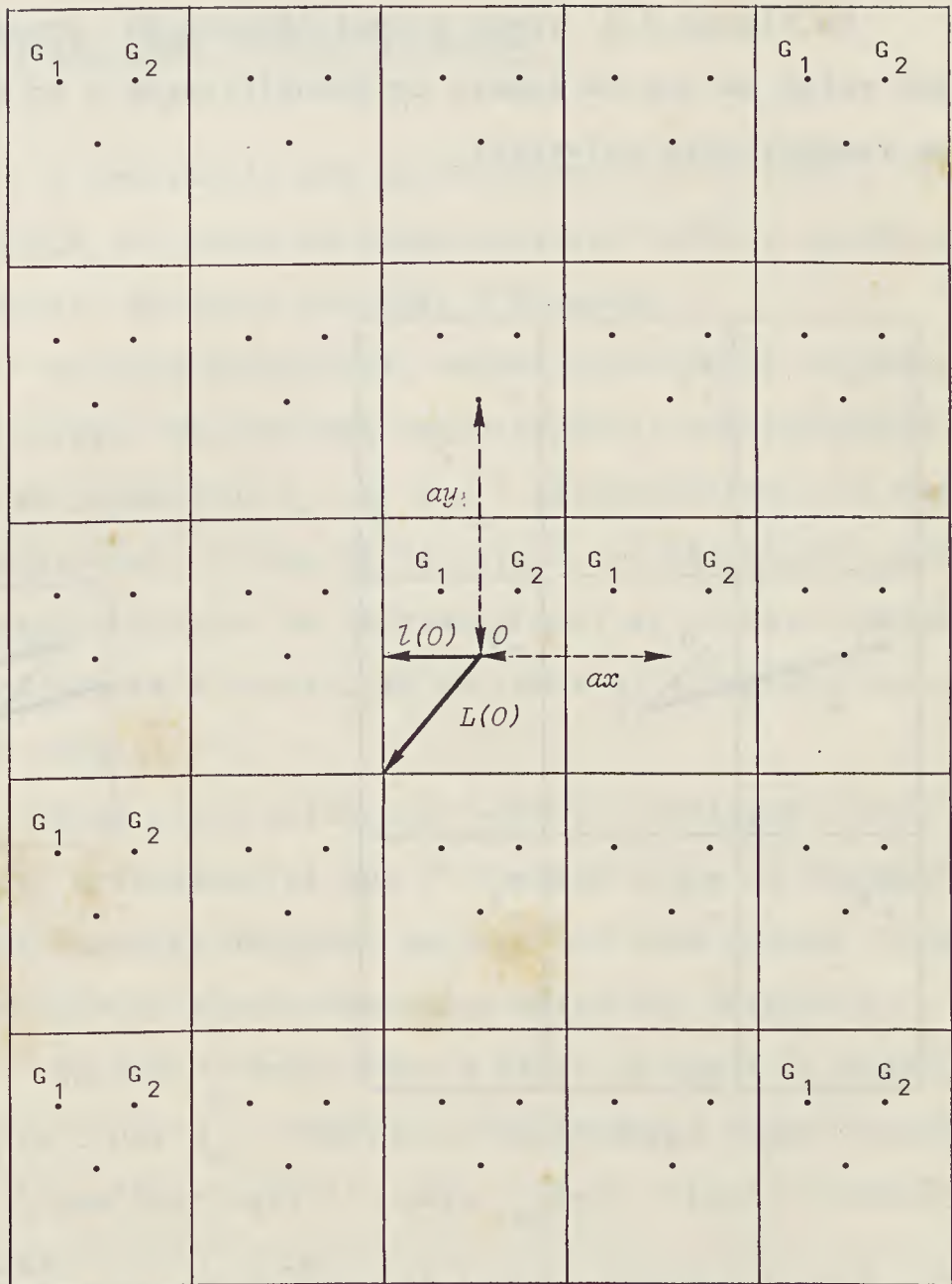


Fig. 3.2 - Corte do espaço de recobrimento universal (uma dimensão foi suprimida por simplicidade) de maneira que a célula fundamental para o observador O no centro é repetida. O observador pode ver as mesmas galáxias (G_1, G_2) várias vezes (incluindo a sua própria). $L(O)$ e $l(O)$ são respectivamente os parâmetros máximo e mínimo de colagem. Os parâmetros característicos da célula fundamental ax e ay são mostrados em função dos pontos equivalentes ao observador.

$$(x, y, z, t) = g_1^l g_2^m g_3^n (x, y, z, t) \quad (3.2)$$

onde: l, m, n são inteiros quaisquer com

$$\begin{aligned} g_1^l(x, y, z) &= (x + l a_x, y, z) \\ g_2^m(x, y, z) &= (x, y + m a_y, z) \\ g_3^n(x, y, z) &= (x, y, z + n a_z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta identificação irá produzir um espaço-tempo com uma topologia $T^3 \times R$ (produto cartesiano entre um 3-toro, representando a seção espacial e a reta real, na verdade $R^+ - \{0\}$, representando o tempo). Podemos considerar então, a seção espacial como um espaço de identificação caracterizado pelos parâmetros a_x, a_y e a_z .

O espaço de identificação pode ser intuído com mais facilidade se no paralelepípedo da Fig. 3.1 identificarmos as faces opostas duas a duas mantendo a orientação, de maneira que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ABCD} &\equiv \overrightarrow{EFGH} \\ \overrightarrow{ABFE} &\equiv \overrightarrow{DCGH} \\ \overrightarrow{ADHE} &\equiv \overrightarrow{BCGF} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Embora um Universo com tal topologia seja multiplamente-conexo, a figura do Universo que temos quando o observamos é a de um Universo simplesmente-conexo.

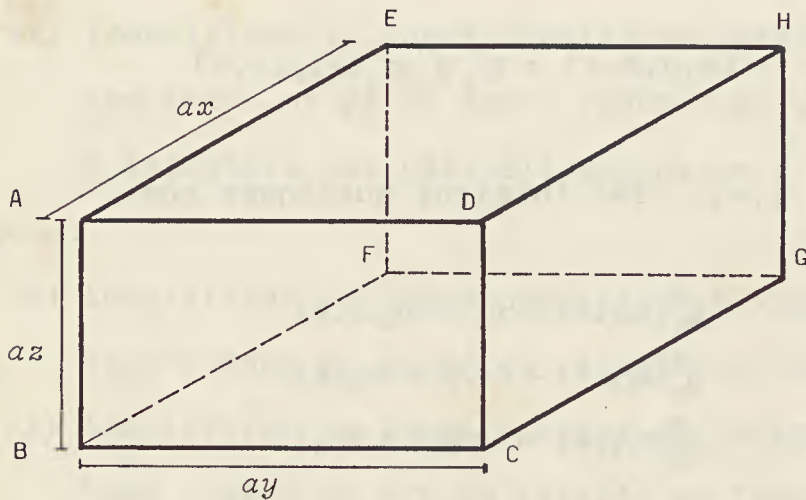


Fig. 3.1 - Paralelepípedo como espaço de identificação do 3-toro. As dimensões do espaço são dadas pelos parâmetros a_x , a_y e a_z . Os lados são identificados de maneira que a relação (3.4) seja satisfeita.

Isto nos leva a conclusão de que um observador em tal Universo não vê o espaço de identificação, mas sem o espaço de recobrimento Universal do espaço T^3 .

Com isto um observador neste Universo poderia "ver" muito mais fontes (galáxias, quasares, etc.) do que realmente existiriam, na medida em que, fontes situadas em pontos equivalentes seriam vistas como fontes distintas, quando na verdade são o mesmo objeto.

Em vista disto, chamaremos de objeto original, no espaço de recobrimento universal, a fonte deste objeto que estiver mais próxima do observador. As outras fontes do mesmo objeto localizadas em pontos equivalentes

espaço de recobrimento universal serão chamadas de fantasmas de primeira espécie (Sokolov e Shvartzman 1974).

Alguns objetos, entretanto, podem corresponder a vários pontos equivalentes, no espaço de recobrimento universal, localizados a uma mesma distância mínima do observador; neste caso qualquer um deles poderá ser considerado como original. É necessário notarmos que a condição de original ou fantasma de uma fonte não é absoluta, dependendo da posição do observador.

Os fantasmas acima citados são chamados de primeira espécie, para distinguí-los daqueles que apareceriam em modelos de FRW com curvatura constante positiva; onde o espaço de recobrimento universal é uma esfera S^3 e portanto, dois pontos podem ser ligados por segmentos distintos de uma mesma geodésica. Assim sendo, o raio de luz que percorresse o segmento mais curto da geodésica seria considerado, ao atingir o observador, o objeto original; o raio de luz que percorresse o segmento maior e que conseqüentemente tivesse que dar "a volta no Universo" para chegar ao observador, seria considerado fantasma de segunda espécie (Sokolov e Shvartzman 1974).

No modelo que consideramos, só aparecerão fantasmas de primeira espécie.

Um conceito que é muito útil para se ter maior clareza quanto a uma fonte ser considerada original ou fantasma, é o conceito de região ou célula fundamental.

Uma região ou célula fundamental é qualquer região do espaço de recobrimento universal que contenha um só

representante de cada classe de equivalência de maneira que todas as classes estejam representadas (Sokolov e Shvartzman 1974).

Para um dado observador O , a totalidade dos originais que ele observa formam uma célula fundamental que denotaremos como Sokolov e Shvartzman (1974) por $H(O)$. O tamanho da região $H(O)$ pode ser caracterizado por duas quantidades: o parâmetro de colagem máximo $L(O)$ e o parâmetro de colagem mínimo $l(O)$, que são relativos a maior e a menor distância de O à fronteira de $H(O)$; além dos parâmetros característicos a_x, a_y e a_z .

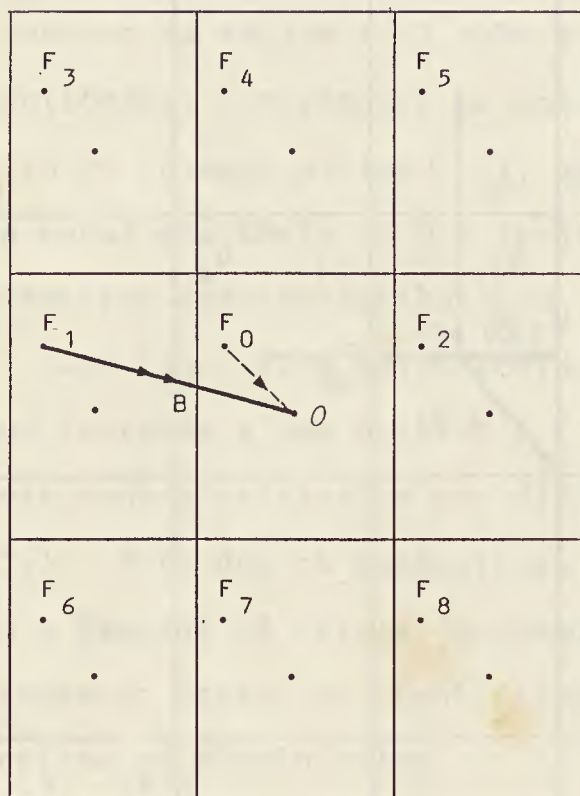
Com isso, fica estabelecido que não pode haver nenhum fantasma a uma distância $D < l(O)$ e que não poderá haver nenhum original a uma distância $D > L(O)$ (veja Fig. 3.2.). Note que os parâmetros a_x, a_y e a_z caracterizam o tamanho da célula fundamental da mesma maneira que o fazem no espaço de identificação, assim $L(O)$ e $l(O)$ são escritos em função deles.

Pela Figura 3.2. fica claro que:

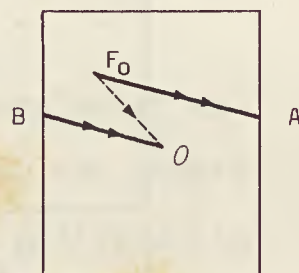
$$L(O) = \frac{1}{2} (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

$$l(O) = \frac{1}{2} \min(a_x, a_y, a_z) \quad (3.6)$$

Na Figura 3.3 vemos a equivalência da propagação dos raios de luz no espaço de identificação e no espaço de recobrimento universal.



(a)



(b)

Fig. 3.3 - A trajetória virtual da luz F_1O no espaço de recobrimento universal (a), onde F_1 (fantasma) é um ponto equivalente a F_0 (original) e O é o observador, é equivalente a trajetória $F_0(A \equiv B)O$ no espaço de identificação (b). Por simplicidade suprimimos uma dimensão.

3.5. O 3-Toro Como "Universo Pequeno"

É necessário que esclareçamos que em toda a discussão que foi feita na seção anterior havia a hipótese implícita de que o Universo é "pequeno".

De nada adiantaria, observacionalmente falando, que o Universo tivesse uma seção espacial com topologia T^3 se os parâmetros a_x , a_y e a_z , característicos da célula fundamental, fossem de tal ordem que não permitissem a existência atual de fantasmas nem, em um caso extremo, permitissem a observação de todos os originais (veja Ellis 1975).

Fica claro então, que além da topologia T^3 , não-trivial, é fundamental que o Universo tenha um "tamanho" suficientemente pequeno, de modo que toda célula fundamental além de alguns fantasmas possa ser observada.

Se for t_d denotarmos o tempo da época do desacoplamento e por t_0 o tempo atual consideraremos seções espaciais $S(t)$ com topologia T^3 para $t_d \leq t \leq t_0$ (Ellis e Schreiber 1986).

Com respeito à causalidade, uma das características do "Universo pequeno" é que $S(t_d)$ está no passado causal $J^-(0)$ do observador 0 . Lembramos que na seção 2.3 definimos o "domínio de influência passado" $I^-(0)$, para um ponto 0 , como sendo o conjunto de todos os pontos que precedem 0 , ou seja, todos os pontos que podem ser ligados a 0 por uma curva tipo-tempo. O passado causal $J^-(0)$

incluiria as curvas nulas (Ellis e Schreiber 1986). Esta característica implica que a linha-de-universo de qualquer observador passa pela hipersuperfície $S(t_0)$ e intercepta o cone de luz do próprio observador e desta maneira permitiria que toda matéria presente no Universo tenha sido observada pelo menos uma vez pelo observador, desconsiderando, é claro, os efeitos de obscurecimento causados pelo meio intergalático. Lembramos que (cf. sec. 3.2) as seções espaciais $S(t)$ são *superfícies de Cauchy*.

Para confirmar estas hipóteses precisaríamos distinguir no Universo estruturas que se repetissem. A escala destas estruturas estaria entre L e l , ou como alguns autores preferem podemos tomar um valor médio $R(t)$ da escala de comprimento, de maneira que $R^3(t)$ represente o volume médio da seção espacial $S(t)$ no instante t .

Vários autores já procuraram estabelecer os valores para R ou L e l . Sokolov e Shvartzman (1974) propuseram $l \geq 10\text{Mpc}$ e $L \geq 400\text{Mpc}$; Gott (1980) propôs $l \geq 40\text{Mpc}$ e $L \geq 260\text{Mpc}$; Fang e Sato (1983) sugeriram $R \sim 600\text{Mpc}$. Ellis e Schreiber (1986) em vista destes e de outros resultados sugeriram que a escala de identificação deve ser maior do que 600Mpc .

3.6. A Proposta Deste Trabalho

A linha de pesquisa deste trabalho coincide em parte com aquela proposta por Demianski e Lysik(1986), no

sentido de que também procuramos objetos, no nosso caso quasares, em direções opostas do céu. O conceito de geodésica principal proposto naquele trabalho nos será bastante útil, qual seja:

No espaço de recobrimento universal, temos várias curvas ligando o ponto que representa o observador neste espaço aos seus pontos equivalentes. Fisicamente isto significa que o observador poderá ver várias imagens de si mesmo em épocas diferentes da sua evolução. Estas curvas serão chamadas de Geodésicas Principais e as direções nas quais as cópias são vistas serão chamadas de Direções Principais (veja Fig. 3.4).

Consideremos um observador O , que no caso seremos nós mesmos, situado no centro de uma célula fundamental do espaço de recobrimento universal (note que devido ao Universo ser homogêneo qualquer ponto pode ser colocado no centro da célula).

Se a topologia da seção espacial $S(t)$ for realmente T^3 , então deverão haver três eixos que, por simplicidade supomos mutuamente ortogonais, cujas direções dos seis semi-eixos associados são definidas pelas imagens (fantasmas) do próprio observador, mais próximas (veja Fig. 3.4)

Identificando as imagens como suas próprias o observador poderá determinar os parâmetros a_x , a_y e a_z , que podem ser entendidos como a escala de repetição em cada um dos eixos e que definem o tamanho da célula fundamental do modelo, bastando, para isto, determinar a que

distância estas imagens estão dele.

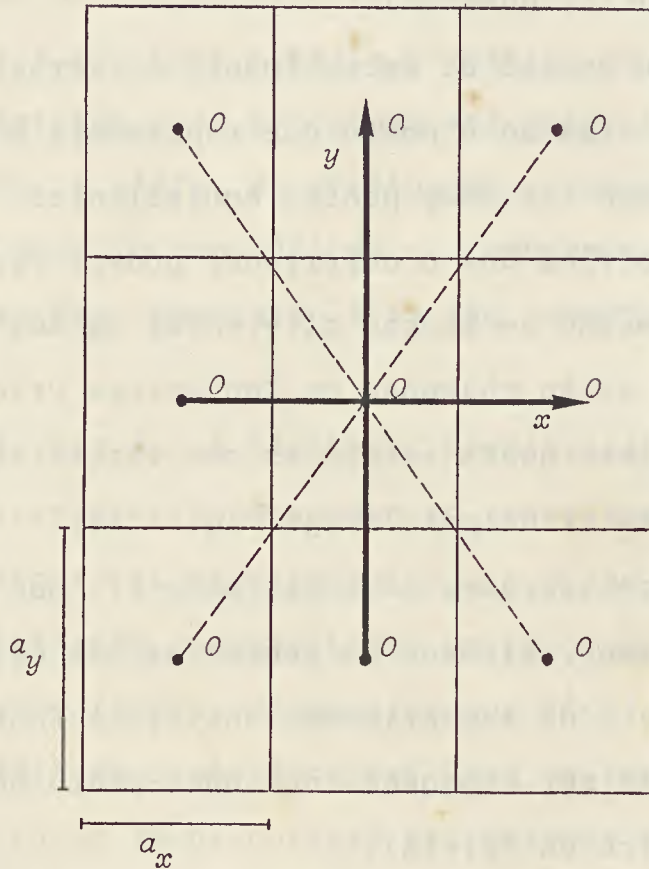


Fig. 3.4 - A direção dos eixos x e y é definida a partir das imagens mais próximas do próprio observador O (linha cheia). Note que além das direções dos eixos, as direções definidas por outras imagens do observador (linha tracejada) também são direções principais. O tamanho da célula, caracterizado pelos parâmetros a_x e a_y , é igual à distância do observador até suas imagens mais próximas, que definiram a direção dos eixos x e y , nas respectivas direções.

Dado o grande número de galáxias conhecidas, encontrarmos entre elas seis que satisfaçam as condições acima, não seria muito difícil. Porém, devido a esse grande

número teríamos o problema de reconhecer a validade do resultado, em vista de que é provável que qualquer outra possibilidade testada seja satisfeita.

Escolhemos então tentar fazer esta identificação, com quasares, dado o número relativamente pequeno de quasares conhecidos (neste trabalho usamos aproximadamente 1550 quasares), poderemos ter muito mais confiança nos resultados.

Em vista da controvérsia, colocada no Capítulo 1 se os quasares são locais ou não, consideraremos como a maioria que, os quasares não são locais e que o seu redshift é preponderantemente cosmológico (Burbidge 1981).

Outra questão importante, e também controversa, é se os quasares tem ou não um tempo de vida curto da ordem de milhões de anos e se eles são estágios primitivos da evolução de uma galáxia (Seldner e Peebles 1979; Chanan 1982; Chu e Zhu 1983).

Para os nossos propósitos é interessante supor que os quasares tenham um tempo de vida longo, da ordem de 3×10^9 anos (Chanan 1982), pois como os eixos podem não ter o mesmo comprimento, um tempo de vida muito curto poderia implicar em não podermos determinar os três parâmetros a_x , a_y e a_z ao mesmo tempo.

Quanto aos quasares serem estágios primitivos da evolução das galáxias, é fundamental para nós considerar desta maneira, pois do contrário a busca de quasares que definem a direção dos três eixos não teria sentido.

3.7. Cálculo da Distância em Função do Redshift

Não há outro meio, pelo menos atualmente, de se determinar a distância que os quasares estão de nós, senão a través do redshift de emissão destes quasares. A seguir tomando a métrica FRW, para o caso de curvatura nula da da no Apêndice A, deduziremos esta relação.

Seja a métrica:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.7)$$

$$a(t) = \left(\frac{3}{2 H_0} \right) c t^{2/3} \quad (3.8)$$

[cf. Apênd. A eqs (A.10) e (A.36)]

A métrica (3.7) pode ser escrita em coordenadas es féricas como se segue:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.9)$$

Como para um raio de luz $ds^2 = 0$, e em vista da luz se propagar radialmente em relação à fonte podemos ex crever que $d\theta = d\phi = 0$, então a equação (3.9) se reduz a:

$$c^2 dt^2 = a^2(t) dr^2 \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.8) em (3.10), ficamos com:

$$dr = - \left(\frac{2}{3} H_0 \right)^{1/3} t^{-2/3} dt \quad (3.11)$$

No sistema de coordenadas co-móvel, podemos escolher a nossa posição como sendo a origem, em vista disto integrando a equação (3.11) desde o instante de emissão t_e até o instante atual t_0 , vem:

$$\int_r^0 dr' = - \left(\frac{2}{3} H_0 \right)^{1/3} \int_{t_e}^{t_0} t^{-2/3} dt \Rightarrow$$

$$r = - 3 \left(\frac{2}{3} H_0 \right)^{1/3} (t_e^{1/3} - t_0^{1/3}) \quad (3.12)$$

Em vista do redshift poder ser escrito como:

$$1 + Z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (3.13)$$

(cf. Adler *et al.* 1975, pg 413)

Substituindo (3.8) em (3.13) vem:

3.7. Cálculo da Distância em Função do Redshift

Não há outro meio, pelo menos atualmente, de se determinar a distância que os quasares estão de nós, senão a través do redshift de emissão destes quasares. A seguir tomando a métrica FRW, para o caso de curvatura nula da da no Apêndice A, deduziremos esta relação.

Seja a métrica:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.7)$$

$$a(t) = \left(\frac{3}{2 H_0} \right) c t^{2/3} \quad (3.8)$$

[cf. Apênd. A eqs (A.10) e (A.36)]

A métrica (3.7) pode ser escrita em coordenadas es féricas como se segue:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.9)$$

Como para um raio de luz $ds^2 = 0$, e em vista da luz se propagar radialmente em relação à fonte podemos ex- crever que $d\theta = d\varphi = 0$, então a equação (3.9) se reduz a:

$$c^2 dt^2 = a^2(t) dr^2 \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.8) em (3.10), ficamos com:

$$dr = - \left(\frac{2}{3} H_0 \right)^{1/3} t^{-2/3} dt \quad (3.11)$$

No sistema de coordenadas co-móvel, podemos escolher a nossa posição como sendo a origem, em vista disto integrando a equação (3.11) desde o instante de emissão t_e até o instante atual t_0 , vem:

$$\int_r^0 dr' = - \left(\frac{2}{3} H_0 \right)^{1/3} \int_{t_e}^{t_0} t^{-2/3} dt \Rightarrow$$

$$r = - 3 \left(\frac{2}{3} H_0 \right)^{1/3} (t_e^{1/3} - t_0^{1/3}) \quad (3.12)$$

Em vista do redshift poder ser escrito como:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (3.13)$$

(cf. Adler *et al.* 1975, pg 413)

Substituindo (3.8) em (3.13) vem:

$$t_e = \frac{t_0}{(1+Z)^{3/2}}, \text{ que em vista de } t_0 = \frac{2}{3H_0} \text{ (A.32),}$$

pode ser escrita como:

$$t_e = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{(1+Z)^{3/2}} \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) e (A.32) em (3.12) vem:

$$r = - (12)^{1/3} \left(\frac{1}{(1+Z)^{1/2}} - 1 \right) \quad (3.15)$$

Como r é uma coordenada adimensional, para encontrarmos a distância atual devemos introduzir o fator de escala $\alpha(t_0)$, daí:

$$D = \alpha(t_0)r, \text{ que implica em:}$$

$$D = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{(1+Z)^{1/2}} \right) \quad (3.16)$$

onde: H_0 = valor atual da constante de Hubble (cf. Apênd. B)

c = velocidade da luz ($c = 2.998 \times 10^5$ km/s)

Lembrando que: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Em toda a discussão que se segue por — dimensão ou comprimento do semi-eixo entenderemos a distância atual que o quasar, que definiu a direção deste semi-eixo, se encontra de nós. Desta maneira os parâmetros característicos a_x , a_y e a_z , serão determinados pela equação (3.16) calculando-se a distância que cada imagem (fantasma) da nossa Galáxia está de nós, na direção dos eixos x , y e z respectivamente.

3.8. O Tempo de Vida dos Quasares e a Permanência Simultânea das Imagens no Céu

Como os quasares têm um tempo de vida finito, que supomos ser da ordem de 3×10^9 anos conforme indicado na seção 3.6, isto implica em que duas imagens do mesmo quasar que estão a distâncias diferentes de nós, D_1 e D_2 , só poderão ser vistas simultaneamente se:

$$\frac{2}{3H_0} \left| \left(1 - \frac{D_1 H_0}{2c} \right)^3 - \left(1 - \frac{D_2 H_0}{2c} \right)^3 \right| \lesssim 3 \times 10^9 \text{ anos} \quad (3.17)$$

onde: H_0 = é o valor atual da constante de Hubble
(cf. Apênd. B)

c = é a velocidade da luz ($c = 2.998 \times 10^5$ Km/s)

Para se chegar à equação (3.17), levamos em conta a diferença dos tempos de emissão das duas imagens.

CAPÍTULO 4

PROCEDIMENTOS E RESULTADOS

4.1. Introdução

No Capítulo anterior foram colocadas as propostas que fazemos no sentido de corroborar a hipótese de um Universo que tenha como seção espacial o 3-toro e, ao mesmo tempo, determinar os parâmetros característicos a_x , a_y e a_z .

Neste Capítulo serão colocados os procedimentos utilizados para levar a cabo tal pesquisa, bem como os primeiros resultados obtidos.

4.2. O Catálogo de Quasares

O primeiro passo que tivemos que dar no sentido de pesquisar as posições de quasares no céu foi o de escolher um catálogo que nos fornecesse a posição, o redshift e se possível as linhas espectrais, que foram utilizadas para a determinação deste redshift, dos quasares.

O catálogo mais adequado que tivemos à disposição, foi o *A revised optical catalog of quasi-stellar objects* (Hewitt e Burbidge 1980), onde existem 1549 quasares e objetos afins.

De antemão sabíamos que este catálogo não era o mais completo mas, devido a não disponibilidade de outros catálogos mais completos, decidimos trabalhar com este contando, entretanto, com dois atenuantes: em primeiro lugar os catálogos mais completos, com aproximadamente 1700 quasares, não chegam a ser dez por cento maiores do que o que foi utilizado; e em segundo lugar o fato de que mais alguns quasares presentes na literatura posteriormente a este catálogo e, portanto, não incluídos, foram levados em conta.

Em geral nos catálogos a posição de quasares e galáxias é dada por duas coordenadas angulares: a ascensão reta (AR ou α) medida em horas, minutos e segundos ($0 \leq AR < 24$); e a declinação (DE ou δ) medida em graus, minutos e segundos ($-90^\circ \leq DE \leq 90^\circ$).†

No caso do catálogo que utilizamos, estas coordenadas se referem ao ano de 1950 (veja Apênd. C). Além disto, o catálogo que utilizamos fornece os redshifts associados a cada quasar, tanto de emissão quanto o de absorção, quando possível e as respectivas linhas espectrais utilizadas para a determinação destes redshifts.

No que diz respeito à identificação dos quasares, isto é, ao nome de cada um deles, o que usualmente se

† Por conveniência na apresentação dos resultados vamos escrever a ascensão reta na forma de horas e frações decimais, e a declinação na forma de graus e frações decimais.

Como não foi possível encontrar tal versão, não tivemos outra alternativa senão confeccioná-la nós mesmos.

Desta maneira todo o catálogo de Hewitt e Burbidge, no que diz respeito a nome, posição e redshift de emissão dos quasares foi colocado em um arquivo de dados, através da linguagem Pascal, em disquete. Chamamos esta versão do catálogo em disquete de QSO-CAT. Para facilitar a identificação dos quasares, além do nome, no QSO-CAT atribuímos um número inteiro NC ($NC \geq 1$) a cada quasar, de maneira que este número indique a posição do quasar, neste catálogo.

A linguagem Pascal foi escolhida, entre outras coisas, pela facilidade que ela oferece na utilização de arquivos em nível científico, o que é essencial no nosso caso.

4.3. O Programa Varredura

O Programa Varredura foi criado para se procurar os quasares opostos no catálogo e, depois se encontra - dos, selecionar os eixos por eles definidos de maneira que tenhamos conjuntos com três eixos mutuamente ortogounais.

O programa trabalha da seguinte maneira:

A esfera celeste é dividida em duas metades em função da ascensão reta, isto é, na primeira metade tere-mos $0 \leq AR < 12$ e na segunda metade $12 \leq AR < 24$, sendo que para as duas metades teremos $-90^\circ \leq DE \leq 90^\circ$ (veja Fig. 4.1).

faz é identificá-los em função das coordenadas de posição que possuem, por exemplo, suponha um quasar com as seguintes coordenadas de posição:

AR = 10h 20 min 16.42 seg

DE = 54° 30' 10.8"

O nome deste quasar será 1020+545, ou seja, tomam-se as horas e os minutos da ascensão reta, o sinal da declinação e a declinação transformando-se os minutos e segundos em décimos de grau, omitindo-se o ponto decimal.

Baseado no que foi colocado na seção 3.6 do Capítulo anterior, a partir dos quasares existentes no catálogo, devemos procurar três pares de quasares opostos, com redshifts próximos, que definam as direções de três eixos mutuamente ortogonais.

Por si só a tarefa de tentar identificar pares de quasares opostos, com redshifts próximos, manualmente no catálogo já seria por demais trabalhosa e demorada. Fazer esta identificação e procurar entre todos os eixos, que por ventura sejam encontrados ser definidos por tais pares, conjuntos de três eixos mutuamente ortogonais seria praticamente impossível de se fazer em tempo hábil.

Em vista disto, optou-se por utilizar uma versão do *A revised optical catalog of quasi-stellar objects* que estivesse arquivada eletronicamente, isto é, em disquete de microcomputador.

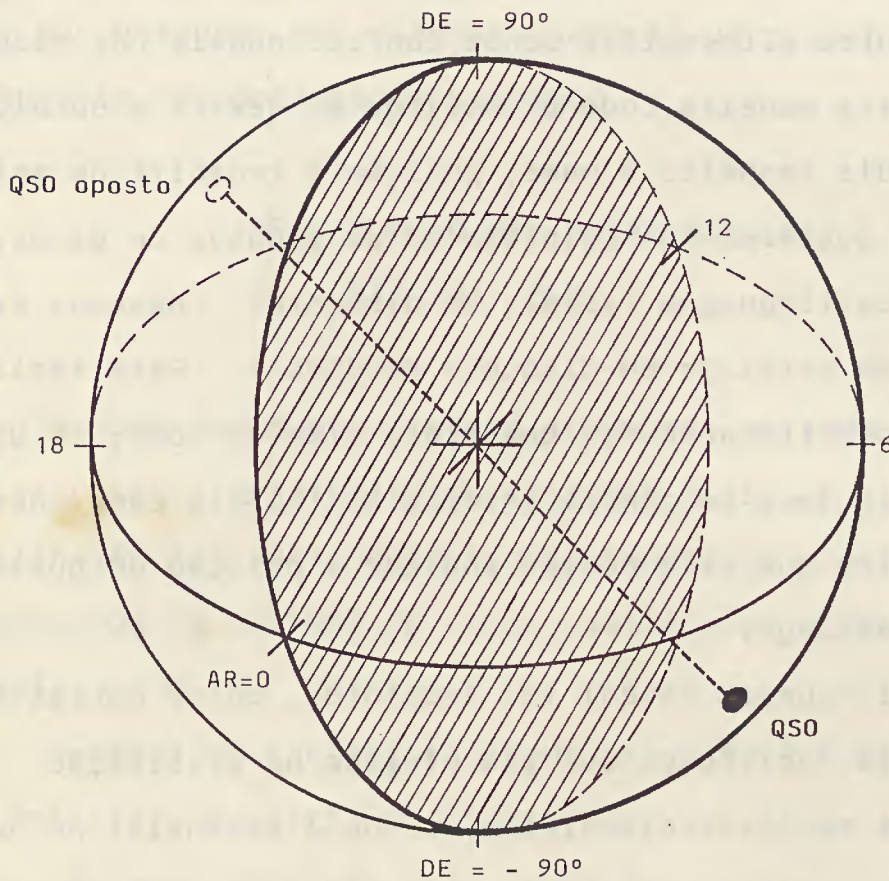


Fig. 4.1 - A esfera celeste é dividida em duas metades em função da ascensão reta. É mostrada a posição de um quasar na primeira metade e o quasar oposto a ele na segunda metade.

Os valores iniciais da ascensão reta e da declinação são respectivamente $AR = 0h$, $DE = -90^\circ$. A ascensão reta é incrementada de um valor δAR até que $AR + \delta AR \geq 12h$, ou seja, até que a primeira metade da esfera celeste seja varrida na declinação $DE = -90^\circ$. Quando isto acontece, a ascensão reta volta ao valor inicial e a declinação é incrementada de δDE . O processo continua até

que toda primeira metade da esfera celeste tenha sido completamente varrida, ou seja, até que $DE + \delta DE \geq 90^\circ$

Ao lado disso, para cada posição (AR, DE) e para todas elas o programa procura no arquivo o QSOCAT se existe algum quasar que satisfaça as condições,

$$AR - \Delta AR \leq AR_q \leq AR + \Delta AR \quad (4.1)$$

$$DE - \Delta DE \leq DE_q \leq DE + \Delta DE \quad (4.2)$$

onde AR_q e DE_q designam a ascensão reta e a declinação do quasar se encontrado respectivamente, ΔAR é a margem de erro permitida para a ascensão reta e ΔDE é a margem de erro permitida para a declinação.

Se existir, as coordenadas de posição (AR_q, DE_q) e o redshift Z do quasar encontrado são guardados na memória. O programa então procura no catálogo QSOCAT se existe algum quasar oposto cujas coordenadas de posição satisfaçam as condições,

$$(AR_q + 12) - \Delta AR \leq AR_{q0} \leq (AR_q + 12) + \Delta AR \quad (4.3)$$

$$- DE_q - \Delta DE \leq DE_{q0} \leq - DE_q + \Delta DE, \quad (4.4)$$

onde AR_{q0} e DE_{q0} designam a ascensão reta e a declinação do quasar oposto procurado respectivamente. Caso exista, o redshift Z_0 deste quasar é comparado com o redshift Z do quasar da posição (AR_q, DE_q) correspondente.

Sendo satisfeita a condição,

$$\left| \frac{Z - Z_0}{Z} \right| < \Delta Z \quad (4.5)$$

onde ΔZ é a margem de erro permitida para o redshift, o par é selecionado. Note que (AR_q, DE_q) sempre diz respeito a primeira metade da esfera celeste e (AR_{q_0}, DE_{q_0}) à segunda metade. Devemos também ter o cuidado de fazer $\delta AR < \Delta AR$ e $\delta DE < \Delta DE$, a fim de que não haja "buracos" na busca.

Selecionados os pares, o programa faz o produto escalar de cada eixo, que é definido pelas coordenadas dos dois quasares que compõem o par, com todos os outros, distinguindo aqueles cujos ângulos entre eles estejam dentro da faixa $90^\circ \pm \Delta PE$, onde ΔPE é a tolerância dada. Escolhemos ΔPE de tal maneira que: $\Delta PE = \Delta DE$ (veja sec. 4.4), com isto selecionam-se conjuntos de dois eixos aproximadamente ortogonais.

Em seguida o programa faz o produto vetorial, entre os dois eixos de cada conjunto selecionado, com o objetivo de calcular as posições do par de quasares que definiriam o terceiro eixo. Os resultados de cada uma destas etapas são impressos.

Cabe-nos agora fazer uma observação com respeito ao incremento e a tolerância na ascensão reta.

Como estamos trabalhando com um sistema de coordenadas angulares sobre a esfera, é necessário compensar a tendência dos pequenos retângulos de busca $\Delta AR \times \Delta DE$, irem ficando cada vez menores, e da mesma maneira, o passo δAR ir ficando cada vez menor, na medida em que o valor absoluto da declinação cresce. Para tanto é suficiente determinarmos que:

$$\Delta AR_c = \Delta AR / \cos(DE) \quad (4.6)$$

$$\delta AR_c = \delta AR / \cos(DE) \quad (4.7)$$

$$|DE| < 90^\circ$$

onde ΔAR_c é a margem de erro permitida para a ascensão reta corrigida e δAR_c é o passo corrigido para o incremento da ascensão reta.

Particularmente no equador ($DE \equiv 0$), teremos:

$$\Delta AR_c = \Delta AR \quad (4.8)$$

$$\delta AR_c = \delta AR \quad (4.9)$$

Nas condições (4.1) a (4.4) por ΔAR entendamos então, ΔAR_c . Nas seções seguintes, ΔAR significa o valor de ΔAR_c no equador.

.4. As Tolerâncias ΔZ , ΔAR e ΔDE

Como estamos procurando imagens da nossa própria Galáxia, ou seja, pontos situados nas geodésicas principais (cf. sec. 3.6), deveríamos esperar que as imagens fossem exatamente antipodais.

Porém, devido a efeitos de lentes gravitacionais (Gunn 1967) do espalhamento da luz proveniente dos quasares, por halos de galáxias e pela poeira intergaláctica, de velocidades randômicas e de efeitos ainda desconhecidos podemos supor desvios da posição exata.

Também é importante levarmos em conta o erro que pode estar embutido na determinação dos redshifts dos quasares mesmo porque alguns são obtidos através de uma só linha espectral (Hewitt e Burbidge 1980). Este erro acarreta um desvio das posições exatamente opostas (veja Demianski e Lysik 1986).

Outra fonte de imprecisão está na própria determinação da posição exata dos quasares no céu. De qualquer maneira, é muito difícil estabelecer uma margem de erro segura para cada um dos parâmetros.

A nossa proposta vai em duas direções: a primeira é a de levar em conta os valores que constam na literatura, aplicando-os nos nossos cálculos; a segunda é a de obter estes parâmetros diretamente dos resultados, isto é, minimizar estes parâmetros de maneira a limitarmos ao máximo o número de resultados selecionados.

Para a ascensão reta e a declinação, decidimos por

um "quadrado" $\Delta AR \times \Delta DE$ de busca tal que:

$$\Delta AR = 0.13333 \ h \quad (= 2^\circ) \quad (4.10)$$

$$\Delta DE = 2^\circ \quad (4.11)$$

No caso do redshift há duas considerações a serem feitas: a primeira é a de que só levaremos em conta os quasares que tenham $Z > 0.005$, pois para valores menores do que este estaríamos supondo que o Universo, em pelo menos uma direção, seria menor do que o parâmetro de colagem mínimo l que é de 10Mpc (veja Cap. 3); a segunda consideração é sobre o valor da margem de erro permitida para o redshift que escolheremos de maneira que:

$$\Delta Z = 5\% \quad (4.12)$$

4.5. Resultados

Como já foi dito, o programa Varredura procura dois quasares opostos, definindo a partir deles a direção de um eixo. Os eixos assim encontrados são dados na Tabela 4.1 em função dos quasares que o definem.

TABELA 4.1

QUASARES OPOSTOS

QSO			QSO oposto		
NOME:	0002 - 387	NC = 10	NOME:	1207 + 398	NC = 831
NOME:	0014 - 392	NC = 40	NOME:	1207 + 398	NC = 831
NOME:	0100 - 270	NC = 132	NOME:	1306 + 274	NC = 938
NOME:	0102 - 389	NC = 136	NOME:	1255 + 372	NC = 903
NOME:	0113 - 392	NC = 155	NOME:	1308 + 382	NC = 944
NOME:	0117 - 380	NC = 160	NOME:	1308 + 382	NC = 944
NOME:	0117 - 380	NC = 160	NOME:	1311 + 362	NC = 951
NOME:	0117 - 400	NC = 161	NOME:	1308 + 382	NC = 944
NOME:	0402 - 362	NC = 467	NOME:	1611 + 343	NC = 1133
NOME:	0407 - 199	NC = 472	NOME:	1601 + 184	NC = 1111
NOME:	0407 - 199	NC = 472	NOME:	1604 + 181	NC = 1117
NOME:	0407 - 199	NC = 472	NOME:	1604 + 183	NC = 1123
NOME:	0407 - 199	NC = 472	NOME:	1605 + 179	NC = 1125
NOME:	0414 - 189	NC = 474	NOME:	1613 + 170	NC = 1136
NOME:	0414 - 189	NC = 474	NOME:	1613 + 173	NC = 1140
NOME:	0438 - 166	NC = 486	NOME:	1634 + 176	NC = 1162
NOME:	1148 - 171	NC = 803	NOME:	2353 + 154	NC = 1537
NOME:	0003 - 003	NC = 21	NOME:	1205 - 008	NC = 828
NOME:	0004 + 024	NC = 24	NOME:	1157 + 014	NC = 815
NOME:	0032 - 086	NC = 71	NOME:	1237 - 101	NC = 878
NOME:	0129 - 021	NC = 187	NOME:	1328 - 034	NC = 972
NOME:	0130 + 038	NC = 193	NOME:	1328 - 034	NC = 972
NOME:	0129 - 021	NC = 187	NOME:	1335 + 023	NC = 979
NOME:	0130 + 038	NC = 193	NOME:	1335 + 023	NC = 979
NOME:	0131 + 009	NC = 203	NOME:	1335 + 023	NC = 979
NOME:	0135 + 056	NC = 225	NOME:	1335 - 061	NC = 980
NOME:	0138 + 030	NC = 234	NOME:	1331 + 025	NC = 974
NOME:	0141 + 024	NC = 240	NOME:	1335 + 023	NC = 979
NOME:	0143 + 020	NC = 244	NOME:	1337 - 013	NC = 983
NOME:	0143 + 020	NC = 244	NOME:	1351 + 021	NC = 993
NOME:	0151 + 048	NC = 283	NOME:	1359 - 058	NC = 1007
NOME:	0504 + 030	NC = 502	NOME:	1705 + 018	NC = 1183
NOME:	0906 + 015	NC = 640	NOME:	2059 + 034	NC = 1243
NOME:	0945 + 114	NC = 668	NOME:	2146 - 133	NC = 1279
NOME:	1045 + 128	NC = 732	NOME:	2252 + 129	NC = 1448
NOME:	1054 - 034	NC = 742	NOME:	2254 + 024	NC = 1451
NOME:	1126 + 101	NC = 774	NOME:	2328 + 107	NC = 1496
NOME:	1148 - 001	NC = 802	NOME:	2341 + 010	NC = 1518
NOME:	1148 - 001	NC = 802	NOME:	2345 + 003	NC = 1521
NOME:	1150 + 094	NC = 805	NOME:	2344 + 092	NC = 1519
NOME:	0848 + 155	NC = 616	NOME:	2044 - 168	NC = 1238
NOME:	0848 + 163	NC = 617	NOME:	2044 - 168	NC = 1238
NOME:	0812 + 367	NC = 571	NOME:	2020 - 370	NC = 1229
NOME:	0921 + 347	NC = 650	NOME:	2116 - 358	NC = 1254
NOME:	1123 + 434	NC = 773	NOME:	2315 - 424	NC = 1478
NOME:	1123 + 434	NC = 773	NOME:	2315 - 423	NC = 1479
NOME:	1058 + 726	NC = 750	NOME:	2302 - 713	NC = 1458
TOTAL: 47 pares			NC = nº do quasar no QSOCAT		

A partir dos eixos dados na Tabela 4.1, são selecionados pares de eixos aproximadamente ortogonais (levando-se em conta a margem ΔPE , cf. sec. 4.3). Os resultados são apresentados na Tabela 4.2, novamente em função dos quasares que o definem:

TABELA 4.2

CASOS SELECIONADOS

CASO 1	QSO	QSO oposto
	NOME : 0407 - 199	NOME : 1601 + 184
	NC = 472	NC = 1111
EIXO 1	AR = 4.1245	AR = 16.0297
	DE = - 19.9305	DE = 18.4262
	Z = 1.986	Z = 1.940
	NOME = 0945 + 114	NOME : 2146-133
	NC = 668	NC = 1279
EIXO 2	AR = 9.7515	AR = 21.7795
	DE = 11.4611	DE = -13.3074
	Z = 1.760	Z = 1.800

CASO 2		
	NOME : 0407 - 199	NOME : 1604 + 181
	NC = 472	NC = 1117
EIXO 1	AR = 4.1245	AR = 16.0698
	DE = - 19.9305	DE = 18.1793
	Z = 1.986	Z = 1.900
	NOME : 0945 + 114	NOME : 2146 - 133
	NC = 668	NC = 1279
EIXO 2	AR = 9.7515	AR = 21.7795
	DE = - 11.4611	DE = 13.3074
	Z = 1.760	Z = 1.800

NC = nº do quasar no QSOCAT

AR = Ascensão reta em horas

DE = Declinação em graus

Z = redshift (representado no texto por Z)

CASOS SELECIONADOS (Continuação)

CASO 3	QSO	QSO oposto
	NOME : 0407 - 199	NOME : 1604 + 183
	NC = 472	NC = 1123
EIXO 1	AR = 4.1245	AR = 16.0827
	DE = - 19.9305	DE = 18.3880
	Z = 1.986	Z = 2.000
	NOME = 0945 + 114	NOME = 2146 - 133
	NC = 668	NC = 1279
EIXO 2	AR = 9.7515	AR = 21.7795
	DE = 11.4611	DE = - 13.3074
	Z = 1.760	Z = 1.800
CASO 4	QSO	QSO oposto
	NOME : 0407 - 199	NOME : 1605 + 179
	NC = 472	NC = 1125
EIXO 1	AR = 4.1245	AR = 16.0866
	DE = - 19.9305	DE = 17.9713
	Z = 1.986	Z = 1.900
	NOME = 0945 + 114	NOME = 2146 - 133
	NC = 668	NC = 1279
EIXO 2	AR = 9.7515	AR = 21.7795
	DE = -11.4611	DE = - 13.3074
	Z = 1.760	Z = 1.800
CASO 5	QSO	QSO oposto
	NOME = 0414 - 189	NOME = 1613 + 170
	NC = 474	NC = 1136
EIXO 1	AR = 4.2398	AR = 16.2181
	DE = - 18.9749	DE = 17.0509
	Z = 1.536	Z = 1.520
	NOME = 0921 + 347	NOME = 2116 - 358
	NC = 650	NC = 1254
EIXO 2	AR = 9.3550	AR = 21.2728
	DE = 34.7333	DE = - 35.8183
	Z = 2.250	Z = 2.341

NC = nº do quasar no QSOCAT

AR = Ascensão reta em horas

DE = Declinação em graus

Z = Redshift (representado no texto por Z)

CASOS SELECIONADOS (Continuação)

CASO 6	QSO	QSO oposto
	NOME : 0414 - 189	NOME : 1613 + 173
	NC = 474	NC = 1140
EIXO 1	AR = 4.2398	AR = 16.2289
	OE = - 18.9749	OE = 17.3958
	Z = 1.536	Z = 1.600
	NOME : 0921 + 347	NOME : 2116-358
	NC = 650	NC = 1254
EIXO 2	AR = 9.3550	AR = 21.2728
	DE = 34.7333	OE = - 35.8183
	Z = 2.250	Z = 2.341

CASO 7	QSO	QSO oposto
	NOME = 0151 + 048	NOME : 1359 - 058
	NC = 283	NC = 1007
EIXO 1	AR = 1.8548	AR = 13.9844
	DE = 4.8042	DE = - 5.8990
	Z = 1.903	Z = 1.986
	NOME = 0812 + 367	NOME : 2020 - 370
	NC = 571	NC = 1229
	AR = 8.2029	AR = 20.3422
	DE = 36.7414	OE = - 37.0841
	Z = 1.025	Z = 1.048

NC = nº do quasar no QSOCAT

AR = Ascensão reta em horas

OE = Declinação em graus

Z = Redshift (representado no texto por Z)

Em vista dos casos selecionados na Tabela 4.2, são calculadas as posições em que devem estar os quasares que vão determinar o terceiro eixo. Estas posições são apresentadas, para cada caso, na Tabela 4.3.

TABELA 4.3

COORDENADAS PARA O TERCEIRO EIXO

	QSO	QSO oposto
CASO 1	AR = 1.7 $\pm$ 0.2 DE = 66.8 $\pm$ 1.0	AR = 13.7 $\pm$ 0.2 OE = - 66.8 $\pm$ 1.0
CASO 2	AR = 1.7 $\pm$ 0.2 DE = 66.7 $\pm$ 1.0	AR = 13.7 $\pm$ 0.2 DE = - 66.7 $\pm$ 1.0
CASO 3	AR = 1.7 $\pm$ 0.2 OE = 66.7 $\pm$ 1.0	AR = 13.7 $\pm$ 0.2 DE = 66.7 $\pm$ 1.0
CASO 4	AR = 1.7 $\pm$ 0.2 DE = 66.9 $\pm$ 1.0	AR = 13.7 $\pm$ 0.2 OE = - 66.9 $\pm$ 1.0
CASO 5	AR = 11.7 $\pm$ 0.2 OE = - 48.9 $\pm$ 1.0	AR = 23.7 $\pm$ 0.2 OE = 48.9 $\pm$ 1.0
CASO 6	AR = 11.7 $\pm$ 0.2 DE = - 48.8 $\pm$ 1.0	AR = 23.7 $\pm$ 0.2 DE = 48.8 $\pm$ 1.0
CASO 7	AR = 7.4 $\pm$ 0.2 DE = - 52.4 $\pm$ 1.0	AR = 19.4 $\pm$ 0.2 DE = 52.4 $\pm$ 1.0

As incertezas na Tabela 4.3 se devem ao fato de que seus eixos não são exatamente ortogonais. Como o número de casos é relativamente pequeno (sete), a busca por estes eixos é feita manualmente na Tabela 4.1. Note que além das incertezas que constam na Tabela acima, ao procurarmos o terceiro eixo, para cada caso, na Tabela 4.1,

automaticamente estamos levando em conta o "quadrado" de busca $\Delta AR_c \times \Delta DE$ (cf. sec. 4.4) em torno das posições procuradas.

Infelizmente para nenhum dos casos foi encontrado algum eixo na Tabela 4.1 cujos quasares estivessem dentro das previsões da Tabela 4.3.

Por isso fomos levados a uma busca individual de cada um dos quasares, que definiriam o terceiro eixo, para cada um dos casos.

O único quasar encontrado, dentro das incertezas da Tabela 4.3 e do "quadrado" de busca $\Delta AR_c \times \Delta DE$, no QSOCAT, foi o seguinte:

Nome: 2332 + 489

NC = 1506

AR = 23.5383 h

DE = 48.9772 °

Z = 1.534

onde a notação está de acordo com a usada na Tabela 4.2.

Como podemos constatar, este quasar está dentro das previsões dos casos 5 e 6.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1. Introdução

A Tabela 4.2 do Capítulo anterior nos apresenta se te casos de interesse, selecionados conforme já discuti mos, pelo programa Varredura. Cada um dos casos é ca- racterizado por quatro quasares, cujas coordenadas de posição definem dois eixos aproximadamente ortogonais.

Se levarmos em conta as semelhanças entre os con- juntos de quasares que compõem cada caso, poderemos a- grupar os sete casos em três grupos da seguinte maneira:

Como os casos de um a quatro possuem três quasares em comum, o que também garante que os quartos quasares de cada conjunto sejam próximos, chamaremos o grupo constituído por estes quatro casos de Grupo 1.

O mesmo ocorre com os casos cinco e seis, desta ma neira chamaremos o grupo constituído por estes dois ca- sos de Grupo 2.

Finalmente o Grupo 3 fica sendo constituído pelo caso sete.

Em vista de ter-se encontrado somente um quasar,

correspondente a uma das posições previstas para quasares, que definiriam o terceiro eixo para cada um dos casos, na Tabela 4.3, poderíamos privilegiar nesta análise o grupo que contém este quasar a mais, no caso, o Grupo 2.

Porém, não nos parece prudente eliminar desde já os outros grupos, mesmo porque, como veremos no decorrer da nossa análise, outras propriedades estão em jogo. A decisão seria outra se, ao invés de um só quasar, fossem encontrados os dois quasares o que nos permitira definir o terceiro eixo de maneira inequívoca.

É certo contudo, que poderemos fazer uma análise bem mais completa do Grupo 2. Por isso dividiremos a nossa análise inicial em duas partes. Na primeira trataremos do Grupo 2 e na segunda dos Grupos 1 e 3.

5.2. Análise para o Grupo 2

No Capítulo 3, obtivemos a equação (3.16) que relaciona o redshift com a distância atual do objeto em relação a nós:

$$D = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{(1+Z)^{1/2}} \right) \quad (5.1)$$

de maneira que:

$$D = \alpha(t_0) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.2)$$

onde: $H_0 = 75 \text{ Km/s/Mpc}$

$$c = 2.998 \times 10^5 \text{ Km/s}$$

x, y e z = são as coordenadas co-móveis do objeto (cf.sec. 3.7)

A partir desta equação, poderemos estimar as dimensões. a , b e c da célula fundamental nas direções dos eixos 1, 2 e 3 respectivamente. Os resultados estão apresentados na Tabela 5.1 a seguir:

TABELA 5.1

DIMENSÕES MÍNIMAS E MÁXIMAS DA CÉLULA FUNDAMENTAL

	Z MIN	Z MAX	D MIN	D MAX
EIXO 1	1.520	1.600	2958	3036
EIXO 2	2.250	2.341	3560	3621
EIXO 3	1.534	1.534	2972	2972

Z MIN = redshift mínimo no grupo para o eixo em questão

Z MAX = redshift máximo no grupo para o eixo em questão

D MIN = "comprimento" correspondente ao redshift mínimo em Mpc

D MAX = "comprimento" correspondente ao redshift máximo em Mpc

(1Mpc = 3.262×10^6 anos-luz = 3.086×10^{19} Km)

É interessante que, por simplicidade, escolhamos um dos dois casos que constituem o Grupo 2 para representá-lo. Como o quasar encontrado para o terceiro eixo é previsto pelos dois casos, não há como distinguí-los desta maneira que seria a mais imediata.

O caso escolhido será aquele que apresentar uma melhor relação entre estes dois aspectos:

Em primeiro lugar que os ângulos entre os semi-eixos de eixos diferentes estejam mais próximos de 90 graus; e em segundo lugar que apresente uma diferença percentual menor entre os redshifts dos quasares opostos que definem os eixos.

Nas Tabelas 5.2 e 5.3 estes resultados são apresentados de maneira que cada semi-eixo está representado pelo quasar que o define.

TABELA 5.2

ÂNGULOS ENTRE SEMI-EIXOS

		CASO 5		CASO 6	
NC	NC	474	1136	474	1140
650		90.39	90.51	90.39	90.43
1274		90.10	88.95	90.10	89.04

(os ângulos estão em graus)

NC = nº do quasar no QSOCAT

TABELA 5.3

DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE REDSHIFTS DE QUASARES OPOSTOS

	QSO/NC	QSO oposto/NC	Dif.perc.
CASO 5	474	1136	1.0
	650	1254	3.9
CASO 6	474	1140	4.2
	650	1254	3.9

NC = nº do quasar no QSOCAT

Ponderando os resultados das Tabelas 5.2 e 5.3, escolhemos como representante do Grupo 2 o caso 5. Deste ponto em diante, entenderemos por Grupo 2 o caso 5.

Definamos agora, a partir dos semi-eixos que compõem o grupo, um sistema de coordenadas dextrógiro

Este sistema deve satisfazer a condição de poder ser obtido por uma rotação a partir do sistema cartesiano original, isto é, o sistema no qual o eixo z está na direção do polo norte celeste e o plano xy é o plano do equador celeste, sendo que o semi-eixo x positivo deve conter o ponto γ (veja Apênd. C), a partir do qual são contadas as ascensões retas; a declinação é o ângulo entre o vetor posição do astro e o plano xy (veja Fig. 5.1)..

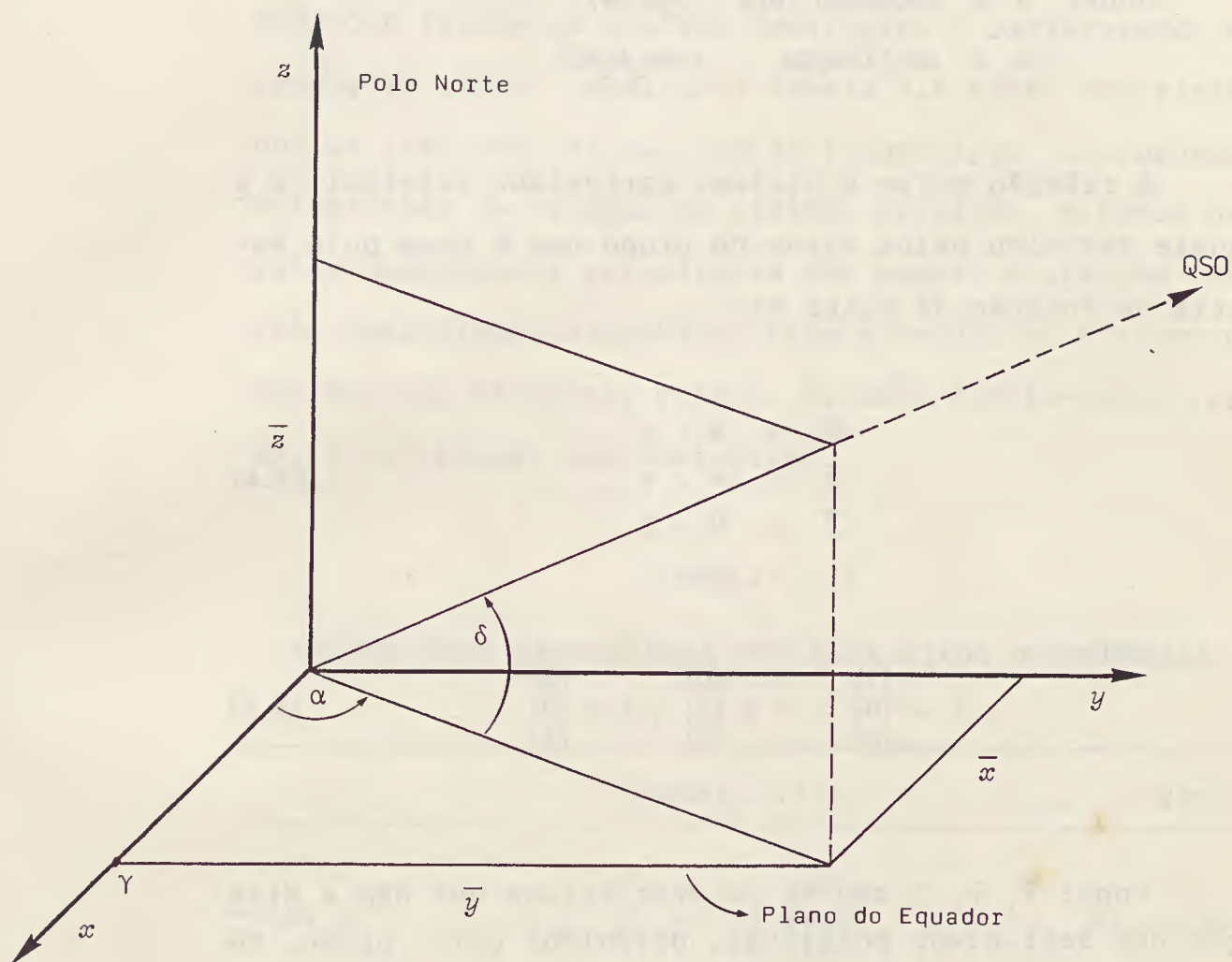


Fig. 5.1 - Relação entre o sistema de coordenadas equatorial (α, δ) e o sistema cartesiano original (x, y, z). α e δ representam a ascensão reta e a declinação respectivamente.

A relação entre as coordenadas do quasar no sistema equatorial e no sistema cartesiano original são dadas a seguir:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \cos\alpha \cos\delta \\ \bar{y} &= \sin\alpha \cos\delta \\ \bar{z} &= \sin\delta\end{aligned}\tag{5.3}$$

onde: α = ascensão reta ($0 \leq \alpha < 24$)

δ = declinação ($-90 \leq \delta \leq 90$)

A relação entre o sistema cartesiano original e a
aquele definido pelos eixos do grupo nos é dada pela ma-
triz de rotação de Euler M:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= M \cdot X \\ \bar{Y} &= M \cdot Y \\ \bar{Z} &= M \cdot Z\end{aligned}\tag{5.4}$$

com:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\tag{5.5}$$

onde: $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ são os vetores coluna que dão a dire-
ção dos semi-eixos positivos, definidos pelo grupo, em
relação ao semi-eixo positivo do sistema de coordenadas
original (X,Y,Z).

$$M = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}\tag{5.6}$$

onde: θ , φ , ψ são os ângulos de Euler que definem
a rotação (cf. Goldstein 1950, pg. 109).

Dentre os semi-eixos que constituem o grupo, lem-
brando que um deles é somente uma previsão, foram escolhidos

três que formam um sistema dextrógiro satisfazendo as condições (5.4). Abaixo, na Tabela 5.4 estão discriminados os três semi-eixos, com as respectivas coordenadas cartesianas em relação ao sistema original. Notemos que estas coordenadas cartesianas dão apenas a direção dos três semi-eixos, escolhidos para o grupo, no sistema de coordenadas original, isto é, estamos considerando vetores na direção dos semi-eixos.

TABELA 5.4
COORDENADAS CARTESIANAS DOS SEMI-EIXOS ORTONORMAIS

COORD. CART.			QSO
EIXO x	$\overline{x}$	= 0.42051	NC = 474
	$\overline{y}$	= 0.84702	
	$\overline{z}$	= - 0.32515	
EIXO y	$\overline{x}$	= 0.66835	NC = 1506
	$\overline{y}$	= - 0.04682	
	$\overline{z}$	= 0.74237	
EIXO z	$\overline{x}$	= 0.61283	NC = 1254
	$\overline{y}$	= - 0.53100	
	$\overline{z}$	= - 0.58522	

NC = nº do quasar no QSO CAT

Na Tabela 5.4 não chamamos mais eixo 1 e eixo 2 a-queles que são definidos por dois quasares, ou seja, os eixos encontrados a partir da Tabela 4.1, como na Tabela anterior.

Isto se deve ao fato de que definindo o sistema de coordenadas ortonormal, fica também definido quem serão os eixos x , y e z . Note que em vista das condições (5.4) o terceiro eixo não é necessariamente o eixo z ; além do que, as dimensões dos semi-eixos (cf. sec. 3.7) serão de notadas pelos parâmetros característicos α_x , α_y e α_z res pectivamente aos eixos x , y e z .

O número NC, que aparece logo após as coordenadas dos eixos, se refere ao quasar que definiu o respectivo eixo.

Em relação aos resultados da Tabela 5.4, cabe-nos uma ressalva quanto às coordenadas cartesianas relativas ao terceiro eixo, no caso o eixo y . A ressalva é a de que "forçamos" a ortonormalização deste eixo, isto quer dizer que as coordenadas cartesianas consideradas para o eixo y na verdade são obtidas pelo produto vetorial entre os eixos x e z . A justificativa fica mais uma vez por conta do fato que só encontramos um quasar e não dois para definir este eixo, o que aumenta a incerteza quanto à sua posição.

De posse das coordenadas cartesianas normalizadas dos semi-eixos, podemos determinar os ângulos de rotação entre o sistema determinado por eles e o sistema de co-ordenadas cartesianas original. De maneira geral, podemos escrever que:

$$\bar{X} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Y} = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi \sin\psi \\ -\sin\psi \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi \cos\psi \\ -\sin\theta \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\bar{Z} = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi \sin\theta \\ \cos\psi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{z}_3 \end{pmatrix}$$

Em vista das relações (5.7) acima, temos que:

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos(\bar{z}_3) \\ \varphi &= \arcsen(\bar{z}_1 / \sin\theta) \\ \psi &= \arcsen(\bar{x}_3 / \sin\theta) \end{aligned} \quad (5.8)$$

No caso do Grupo 2 que estamos analisando, teremos:

$$\begin{aligned} \theta &= 125.82 \text{ graus} \\ \varphi &= - 23.84 \text{ graus} \\ \psi &= 49.09 \text{ graus} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Retomemos a Tabela 5.1. Lá encontramos os valores máximos e mínimos para as dimensões da célula fundamental. Vamos considerar aqui as dimensões da célula a partir do caso que representa o grupo. Escolhemos levar em conta um valor intermediário para o redshift, qual seja, aquele obtido da média entre os dois quasares que definem cada eixo. É claro que no caso do eixo y onde temos apenas um quasar o redshift deste foi considerado sozinho. Na Tabela 5.5 explicitamos estes valores.

Além das imagens da nossa Galáxia que procuramos para determinar os parâmetros característicos da célula fundamental, podemos pensar em procurar outras imagens,

agora com o objetivo de, se encontradas estas imagens, fortalecemos o modelo.

TABELA 5.5.

DIMENSÕES DETERMINADAS PARA A CÉLULA FUNDAMENTAL

PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS	DIMENSÃO
a_x	2966
a_y	2972
a_z	3591

(as dimensões estão em Mpc)

Sendo o paralelepípedo a célula fundamental, procuraremos imagens que estejam nas direções dos vértices do paralelepípedo e também aquelas que estejam na direção das arestas.

Enfatizamos que as imagens nestas direções só serão vistas simultaneamente com aquelas usadas para determinar os parâmetros a_x , a_y e a_z se a condição (3.17) (cf. sec. 3.8) for satisfeita.

Por outro lado em vista do "Universo pequeno", as previsões para estas direções ganham relevância na medida em que podem ser utilizadas para se procurar imagens da nossa Galáxia a distâncias menores de nós e que, portanto, poderiam já não serem vistas como quasares mas como

galáxias. Se estas imagens a uma distância menor de nós fossem encontradas, isto indicaria que os parâmetros a_x , a_y e a_z que consideramos na verdade seriam múltiplos dos parâmetros a_x , a_y e a_z reais, ou seja, estaríamos considerando o Universo maior do que realmente é.

Porém como neste trabalho limitamo-nos apenas ao estudo de quasares, procuraremos por pares de quasares nas posições previstas, por estas novas direções com redshifts tanto maiores quanto menores do que aqueles que calculamos a partir das dimensões da célula pela equação,

$$Z = \left(\frac{2c}{2c - H_0 D} \right)^2 - 1 \quad (5.10)$$

onde :

$$D = a(t_0) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ;$$

$$H_0 = 75 \text{ Km/s/Mpc}$$

$$c = 2.998 \times 10^5 \text{ Km/s}$$

mantendo-se é claro a tolerância de 5% para o redshift de quasares opostos.

Para o caso das previsões nas direções dos vértices do paralelepípedo, o cálculo é feito a partir do sistema original, rodado dos ângulos de Euler (cf. eqs 5.9), e das relações (5.7) tal que:

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= q_{xi} \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} M.X \\ \bar{Y}_i &= q_{yi} \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} M.Y \\ \bar{Z}_i &= q_{zi} \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} M.Z\end{aligned}\quad (5.11)$$

$$\text{e que portanto } V_i = \bar{X}_i + \bar{Y}_i + \bar{Z}_i \quad (5.12)$$

Onde: V_i é o vetor previsão na direção do vértice i ($i = 1, 2 \dots, 8$), de maneira que $q_{xi}, q_{yi}, q_{zi} = 1, -1$; dependendo do vértice em consideração (veja Fig. 5.2).

Consideraremos agora o caso em que os quasares são previstos nos planos xy , yz e zx nas direções das arestas do paralelepípedo.

Em vista das equações 5.11 e 5.12 acima teremos agora para o plano xy :

$$A_j = \bar{X}_j + \bar{Y}_j \quad (5.13)$$

tomando $a_z = 0$,
para o plano yz

$$A_j = \bar{Y}_j + \bar{Z}_j \quad (5.14)$$

tomando $a_x = 0$,

e finalmente para o plano zx

$$A_j = \bar{X}_j + \bar{Z}_j \quad (5.15)$$

tomando $a_y = 0$, onde nas equações de (5.13) a (5.14) A_j é o vetor previsão na direção da aresta j ($j = 1, \dots, 4$) (veja Fig. 5.3). Note que neste caso q_{xi} , q_{yi} , $q_{zi} = 1, -1$ dependendo do quadrante em consideração.

Para cada uma das previsões acima, as coordenadas equatoriais são dadas por:

$$\alpha = \frac{12}{\pi} \arctg(y'/x') \quad (5.16)$$

$$\delta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{\pi} \arccos(z') \quad (5.17)$$

onde: x' , y' e z' são as componentes dos vetores R_i ou A_j dependendo da previsão considerada.

Na Tabela 5.6 damos as posições previstas para os quasares nas direções dos vértices do paralelepípedo, bem como a distância padrão, isto é, a distância atual que os quasares teriam de nós, na direção dos vértices, se o Universo fosse tal como o modelo prevê e as dimensões fossem aquelas da Tabela 5.5.

TABELA 5.6

PREVISÕES NA DIREÇÃO DOS VÉRTICES DO PARALELEPÍPEDO

		COORD. CART.	AR	DE
PREVISÃO	1	$\bar{x}$ = 0.2659	22.2 ± 0.1	$- 72.6 \pm 1$
		$\bar{y}$ = - 0.1350		
		$\bar{z}$ = - 0.9545		
PREVISÃO	2	$\bar{x}$ = - 0.1878	6.9 ± 0.1	$- 37.2 \pm 1$
		$\bar{y}$ = 0.7735		
		$\bar{z}$ = - 0.6054		
PREVISÃO	3	$\bar{x}$ = 0.5306	3.8 ± 0.1	11.2 ± 1
		$\bar{y}$ = 0.8251		
		$\bar{z}$ = 0.1939		
PREVISÃO	4	$\bar{x}$ = 0.9846	23.7 ± 0.1	$- 8.9 \pm 1$
		$\bar{y}$ = - 0.0833		
		$\bar{z}$ = - 0.1553		
PREVISÃO	5	$\bar{x}$ = - 0.5306	15.8 ± 0.1	$- 11.2 \pm 1$
		$\bar{y}$ = - 0.8251		
		$\bar{z}$ = - 0.1939		
PREVISÃO	6	$\bar{x}$ = - 0.9846	11.7 ± 0.1	8.9 ± 1
		$\bar{y}$ = 0.0833		
		$\bar{z}$ = 0.1553		
PREVISÃO	7	$\bar{x}$ = - 0.2659	10.2 ± 0.1	72.6 ± 1
		$\bar{y}$ = 0.1350		
		$\bar{z}$ = 0.9545		
PREVISÃO	8	$\bar{x}$ = 0.1878	18.9 ± 0.1	37.2 ± 1
		$\bar{y}$ = - 0.7735		
		$\bar{z}$ = 0.6054		
Para todas as previsões: $z = 9.482$; Distância atual = 5525 Mpc				

AR = Ascensão Reta em horas

DE = Declinação em graus

z = Redshift (representado no texto por Z)

A Figura 5.2 ilustra as previsões:

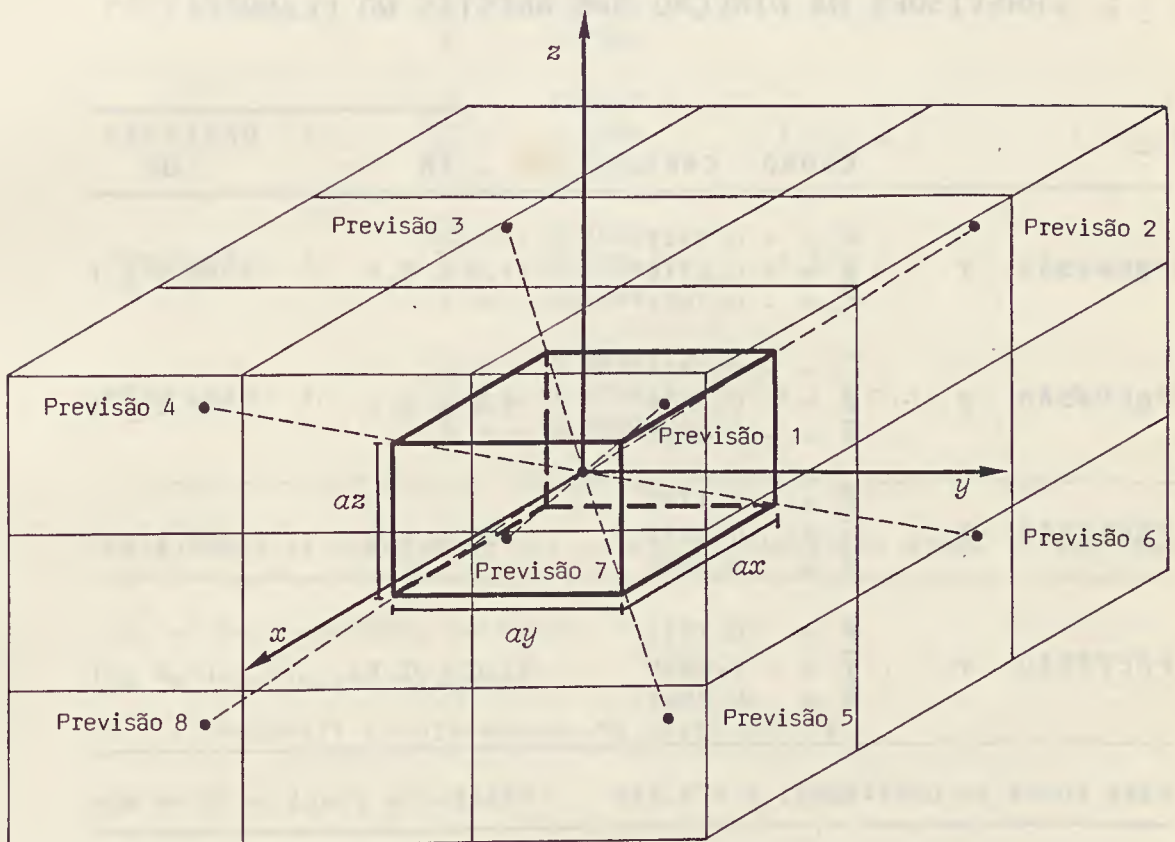


Fig. 5.2 - Previsões nas direções dos vértices do paralelepípedo, sendo que q_{xi} , q_{yi} , q_{zi} , onde i indica o vértice considerado, assumem o sinal do semi-eixo respectivo naquele octante. (veja texto). Os parâmetros característicos a_x , a_y e a_z são mostrados em função das arestas do paralelepípedo.

As Tabelas 5.7, 5.8 e 5.9 dão as posições previstas para quasares que estariam nos planos xy , yz e zx , respectivamente, com as distâncias padrão correspondentes.

TABELA 5.7

PREVISÕES NA DIREÇÃO DAS ARESTAS NO PLANO XY

		COORD. CART.	AR	DE
PREVISÃO	1	$\bar{x} = - 0.1742$ $\bar{y} = - 0.6316$ $\bar{z} = - 0.7555$	17.0 ± 0.1	$- 49.1 \pm 1$
PREVISÃO	2	$\bar{x} = - 0.7711$ $\bar{y} = 0.5636$ $\bar{z} = - 0.2961$	9.6 ± 0.1	$- 17.2 \pm 1$
PREVISÃO	3	$\bar{x} = 0.1742$ $\bar{y} = 0.6316$ $\bar{z} = 0.7555$	5.0 ± 1.0	49.1 ± 1
PREVISÃO	4	$\bar{x} = 0.7711$ $\bar{y} = - 0.5636$ $\bar{z} = 0.2961$	21.6 ± 0.1	17.2 ± 1
Para todas as previsões: $z = 3.435$			Distância atual = 4199 Mpc	

- AR = Ascensão Reta em horas
- DE = Declinação em graus
- z = Redshift (representado no texto por Z)

TABELA 5.8
PREVISÕES NA DIREÇÃO DAS ARESTAS NO PLANO YZ

	COORD. CART.	AR	DE
PREVISÃO 1	$\bar{x} = 0.0463$ $\bar{y} = 0.3784$ $\bar{z} = - 0.9245$	5.5 ± 0.1	$- 67.6 \pm 1$
PREVISÃO 2	$\bar{x} = 0.8979$ $\bar{y} = 0.4396$ $\bar{z} = 0.0229$	1.7 ± 0.1	1.3 ± 1
PREVISÃO 3	$\bar{x} = - 0.0463$ $\bar{y} = - 0.3784$ $\bar{z} = 0.9245$	17.5 ± 0.1	67.6 ± 1
PREVISÃO 4	$\bar{x} = - 0.8979$ $\bar{y} = - 0.4396$ $\bar{z} = - 0.0299$	13.7 ± 0.1	$- 1.3 \pm 1$

Para todas as previsões: $z = 4.749$; Distância atual = 4661 Mpc

AR = Ascensão Reta em horas
DE = Declinação em graus
 z = Redshift (representado no texto por Z)

TABELA 5.9

PREVISÕES NA DIREÇÃO DAS ARESTAS NO PLANO ZX

		COORD. CART.	AR	OE
PREVISÃO 1	$\bar{x}$	= 0.7416	23.3 ± 0.1	$- 41.2 \pm 1$
	$\bar{y}$	= - 0.1294		
	$\bar{z}$	= - 0.6583		
PREVISÃO 2	$\bar{x}$	= 0.2033	5.2 ± 0.1	$- 14.1 \pm 1$
	$\bar{y}$	= 0.9482		
	$\bar{z}$	= - 0.2441		
PREVISÃO 3	$\bar{x}$	= - 0.7416	11.3 ± 0.1	41.2 ± 1
	$\bar{y}$	= 0.1294		
	$\bar{z}$	= 0.6583		
PREVISÃO 4	$\bar{x}$	= - 0.2033	17.2 ± 0.1	14.1 ± 1
	$\bar{y}$	= - 0.9482		
	$\bar{z}$	= 0.2441		
Para todas as previsões: $z = 4.736$			Distância atual = 4658 Mpc	

AR = Ascensão Reta em horas

DE = Declinação em graus

z = Redshift (representado no texto por Z)

A Figura 5.3 ilustra a situação para o caso do Plano xy .

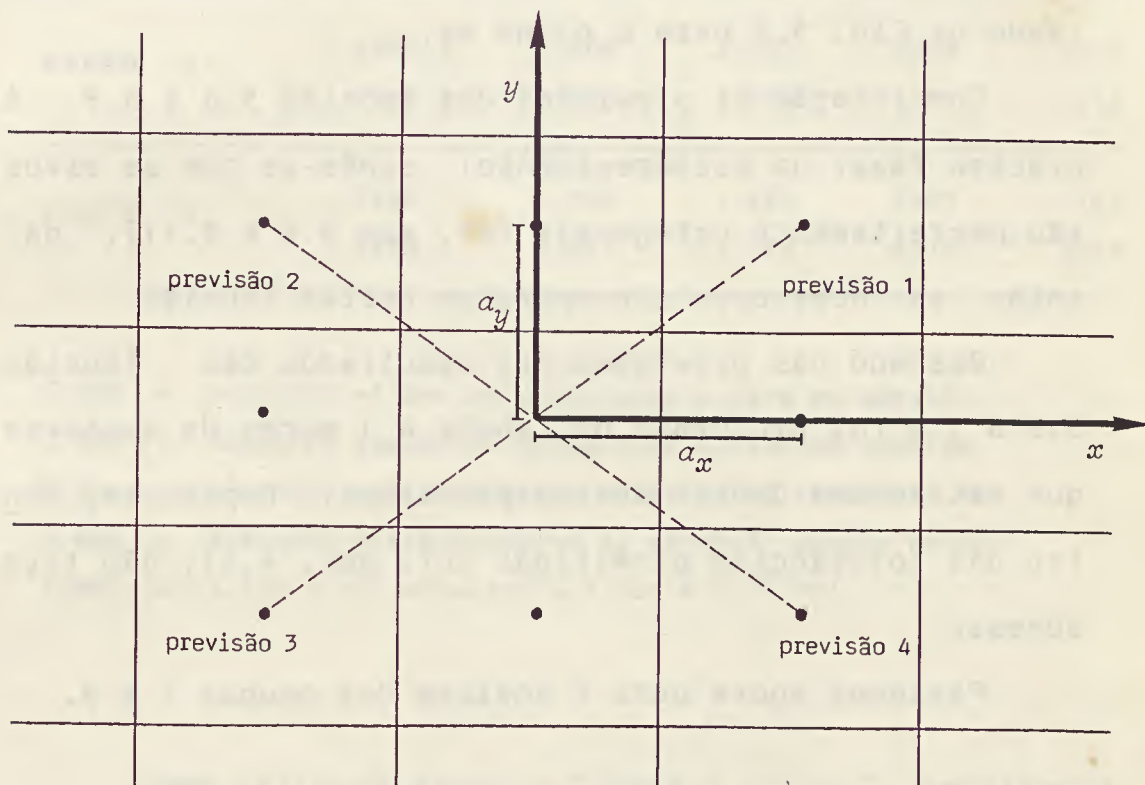


Fig. 5.3 - Corte xy do espaço de recobrimento universal
As previsões estão na direção das arestas que interceptam o plano xy .

Note que como as coordenadas cartesianas nas Tabelas 5.7 a 5.9 se referem ao sistema original, não é imediato perceber que as quatro previsões estão num mesmo plano, como seria no caso do sistema dos eixos definidos a partir dos quasares que, por sua vez, é o sistema mostrado na Fig. 5.3 para o plano xy .

Com relação às previsões das Tabelas 5.6 a 5.9 é preciso fazer um esclarecimento: supôs-se que os eixos são perfeitamente ortogonais (cf. eqs 5.4 e 5.11), daí então as incertezas que aparecem nestas Tabelas.

Baseado nas previsões nos resultados das Tabelas 5.6 a 5.9 foi procurado na Tabela 4.1 pares de quasares que estivessem dentro destas previsões. A procura, dentro das tolerâncias permitidas (cf. sec. 4.4), não teve sucesso.

Passemos agora para a análise dos grupos 1 e 3.

5.3. Análise para os Grupos 1 e 3

A partir da equação (5.1) podemos estimar as dimensões a e b da célula fundamental nas direções dos eixos 1 e 2 respectivamente, para cada grupo, como demonstrado na Tabela 5.10 a seguir.

TABELA 5.10

DIMENSÕES DA CÉLULA FUNDAMENTAL PARA OS GRUPOS 1 E 3

		Z MIN	Z MAX	D MIN	D MAX
GRUPO 1	EIXO 1	1.900	2.000	3299	3378
	EIXO 2	1.760	1.800	3181	3216
GRUPO 3	EIXO 1	1.903	1.986	3301	3367
	EIXO 2	1.025	1.048	2376	2407

Z MIN = redshift mínimo no grupo para o eixo em questão

Z MAX = redshift máximo no grupo para o eixo em questão

D MIN = Dimensão correspondente ao redshift mínimo em Mpc

D MAX = Dimensão correspondente ao redshift máximo em Mpc

(1Mpc = 3.262×10^6 anos-luz = 3.086×10^{19} Km)

Como feito na seção 5.2 para o Grupo 2, escolhemos no Grupo 1 um caso para representá-lo, o que não é necessário no Grupo 3 por haver só um caso. Nas tabelas 5.11 e 5.12 apresentamos os resultados para o Grupo 1 e nas Tabelas 5.13 e 5.14 para o Grupo 3, neste caso, com o intuito apenas de ilustrar os resultados.

TABELA 5.11

ÂNGULOS ENTRE SEMI-EIXOS PARA O GRUPO 1

	CASO 1		CASO 2		CASO 3		CASO 4	
NC \ NC	472	1111	472	1117	472	1123	472	1125
668	88.73	90.29	88.73	90.89	88.73	91.02	88.73	91.17
1279	90.23	90.71	90.23	90.09	90.23	89.96	90.23	89.81

(os ângulos estão em graus)

NC = nº do quasar no QSOCAT

TABELA 5.12

DIFERENÇA PERCENTUAL DE REDSHIFTS PARA QUASARES OPOSTOS DO GRUPO 1

	QSO/NC	QSO oposto/NC	Dif.perc.
CASO 1	472	1111	2.4
	668	1279	2.3
CASO 2	472	1117	4.5
	668	1279	2.3
CASO 3	472	1123	0.7
	668	1279	2.3
CASO 4	472	1125	4.5
	668	1279	2.3

NC = nº do quasar no QSOCAT

TABELA 5.13

ÂNGULOS ENTRE SEMI-EIXOS PARA O GRUPO 3

CASO 7		
NC \ NC	283	1007
571	91.29	90.91
1229	87.10	90.70

(os ângulos estão em graus)

NC = nº do quasar no QSOCAT

TABELA 5.14

DIFERENÇA PERCENTUAL DE REDSHIFTS PARA QUASARES OPOSTOS DO GRUPO 3

	QSO/NC	QSO oposto/NC	Def.perc
CASO 7	283	1007	4.4
	571	1229	2.2

NC = nº do quasar no QSOCAT

Ponderando os resultados das Tabelas 5.11 e 5.12, escolhemos como representante do Grupo 1 o caso 1 e, obviamente, o caso 7 como representante do grupo 3. Aqui também, deste ponto em diante, entenderemos por grupo o seu representante.

Definamos agora em cada grupo, a partir dos semi-eixos que o compõe, um sistema de coordenadas cartesianas dextrógiro.

Seguindo as condições dadas pelas equações 5.3 a 5.6 da mesma maneira que foi feita na seção anterior, chegamos aos resultados apresentados na Tabela 5.15, para os Grupos 1 e 3.

TABELA 5.15

COORDENADAS CARTESIANAS DOS SEMI-EIXOS ORTONORMAIS PARA OS GRUPOS 1 E 3

GRUPO 1	EIXO x	$\bar{x} = 0.81330$	NC = 1279
		$\bar{y} = -0.53438$	
		$\bar{z} = -0.23018$	
	EIXO y	$\bar{x} = -0.37300$	E30 = AR = 13.6774 h. DE = -65.6628°
		$\bar{y} = -0.17521$	
		$\bar{z} = -0.91114$	
GRUPO 3	EIXO z	$\bar{x} = 0.44328$	NC = 472
		$\bar{y} = 0.82904$	
		$\bar{z} = -0.34088$	
	EIXO x	$\bar{x} = 0.88129$	NC = 283
		$\bar{y} = 0.46510$	
		$\bar{z} = 0.08375$	
GRUPO 3	EIXO y	$\bar{x} = 0.45909$	NC = 1229
		$\bar{y} = -0.65241$	
		$\bar{z} = -0.60299$	
	EIXO z	$\bar{x} = -0.22658$	E3 = AR = 11.7328 h DE = -47.9337°
		$\bar{y} = 0.57178$	
		$\bar{z} = -0.78849$	

NC = nº do quasar no QSOCAT

Novamente na Tabela 5.15, como já havia acontecido na Tabela 5.4, não chamamos mais Eixo 1 e Eixo 2 aqueles definidos aqui por quasares. O número NC que aparece logo após as coordenadas dois eixos se refere ao quasar que definiu o respectivo eixo. Quando não aparece o número NC, aparecem no seu lugar as indicações E3 ou E30. Isto significa que nas posições que determinam o eixo definido por E3 e E30 não foi encontrado nenhum quasar. Obviamente o eixo definido por E3 e E30 corresponde às previsões dadas na Tabela 4.3 para quasares no terceiro eixo. A única ressalva a se fazer é que, como pode ser constatado por uma rápida comparação das Tabelas 4.3 e 5.15, as posições calculadas para cada grupo não correspondem exatamente, lembrando que os grupos 1 e 3 são representados pelos casos 1 e 7 respectivamente. Isto é devido ao fato de que na Tabela 4.3 as posições foram calculadas a partir de todas as combinações entre semi-eixos ortogonais entre os quatro semi-eixos que constituem cada caso. Já na Tabela 5.15 ao determinarmos quais são os três semi-eixos ortonormais que serão escolhidos, como o terceiro deles é calculado a partir dos outros dois, nada mais razoável do que calculá-lo levando-se em conta apenas aqueles dois, mesmo porque desta maneira garante-se que o terceiro semi-eixo seja exatamente ortogonal ao plano definido pelos outros dois. No caso da "ortonormalização" de que falamos na seção anterior, o procedimento utilizado foi o mesmo.

Os ângulos de rotação obtidos a partir das equações (5.7) e (5.8) são dados para cada um dos grupos a seguir:

$$\begin{aligned} \theta &= 109.93 \text{ graus} \\ \text{GRUPO 1} \quad \varphi &= -14.17 \text{ graus} \\ \psi &= 28.13 \text{ graus} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \theta &= 142.04 \text{ graus} \\ \text{GRUPO 3} \quad \varphi &= 7.83 \text{ graus} \\ \psi &= -21.63 \text{ graus} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Da mesma maneira que na seção anterior os valores para as dimensões das células fundamentais em cada grupo são dados pela Tabela 5.16, sendo as distâncias obtidas através da equação (5.10).

TABELA 5.16

DIMENSÕES DETERMINADAS PARA A CÉLULA FUNDAMENTAL NOS GRUPOS 1 E 3

PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS		DIMENSÃO
GRUPO 1	a_x	3200
	a_z	3350
GRUPO 3	a_x	3336
	a_y	2392

(as dimensões estão em Mpc)

No que concerne às previsões, da maneira que discutimos na seção anterior, ficamos limitados a fazê-las apenas para o plano zx no Grupo 1 e para o plano xy no Grupo 3. Isto porque como não foi encontrado nenhum quasar no terceiro eixo, que reinteramos não ser necessariamente o eixo z , ficamos impossibilitados de saber a dimensão deste eixo e portanto de definir as previsões para os outros planos bem como as previsões na direção dos vértices do paralelepípedo para cada um dos grupos.

De acordo com as equações de (5.11) a (5.17), chegamos nos resultados apresentados pelas Tabelas 5.17 e 5.18 respectivamente para os Grupos 1 e 3.

TABELA 5.17

PREVISÕES NO PLANO ZX PARA O GRUPO 1

	COORD. CART.	AR	DE
PREVISÃO 1	$\bar{x} = 0.8839$	1.0 ± 0.1	$- 23.9 \pm 1$
	$\bar{y} = 0.2329$		
	$\bar{z} = - 0.4055$		
PREVISÃO 2	$\bar{x} = 0.2428$	18.9 ± 0.1	5.0 ± 1
	$\bar{y} = - 0.9661$		
	$\bar{z} = 0.0875$		
PREVISÃO 3	$\bar{x} = - 0.8839$	13.0 ± 0.1	23.9 ± 1
	$\bar{y} = - 0.2329$		
	$\bar{z} = 0.4055$		
PREVISÃO 4	$\bar{x} = - 0.2428$	6.9 ± 0.1	$- 5.0 \pm 1$
	$\bar{y} = 0.9661$		
	$\bar{z} = - 0.0875$		

Para todas as previsões: $z = 4.655$; Distância atual = 4633 Mpc

AR = Ascensão Reta em horas

DE = Declinação em graus

z = Redshift (representado no texto por Z)

TABELA 5.18

PREVISÕES NO PLANO XY PARA O GRUPO 3

	COORD. CART.	AR	DE
PREVISÃO 1	$\bar{x}$ = 0.9578		
	$\bar{y}$ = - 0.0163	23.9 ± 0.1	$- 16.7 \pm 1$
	$\bar{z}$ = - 0.2871		
PREVISÃO 2	$\bar{x}$ = 0.4748		
	$\bar{y}$ = 0.7717	3.9 ± 0.1	25.0 ± 1
	$\bar{z}$ = 0.4232		
PREVISÃO 3	$\bar{x}$ = - 0.9578		
	$\bar{y}$ = 0.0163	11.9 ± 0.1	16.7 ± 1
	$\bar{z}$ = 0.2871		
PREVISÃO 4	$\bar{x}$ = - 0.4748		
	$\bar{y}$ = - 0.7717	15.9 ± 0.1	$- 25.0 \pm 1$
	$\bar{z}$ = - 0.4232		

Para todas as previsões: $z = 3.224$; Distância atual = 4105 Mpc

AR = Ascensão Reta em horas

DE = Declinação em graus

z = Redshift (representado no texto por Z)

A situação das previsões também é ilustrada pela Fig. 5.3 da seção anterior.

A busca de eixos definidos por quasares na Tabela 4.1, nas posições previstas acima, também não teve sucesso.

É oportuno esclarecermos melhor o significado dos ângulos de Euler dados pelas equações (5.9), (5.18) e (5.19), respectivamente aos Grupos 2, 1 e 3.

Os ângulos de Euler nos dão a relação entre os eixos definidos pelo modelo, que seriam os "eixos preferenciais do Universo" para o observador considerado, e os eixos considerados aqui na Terra que compõem o sistema que definimos anteriormente ser o sistema de "coordenadas cartesianas original". Os eixos preferenciais têm a vantagem de que eixos preferenciais para observadores diferentes são equivalentes, isto é, a transformação de coordenadas de um sistema de eixos preferenciais, de um dado observador para outro, é a identidade a menos de constantes.

Isto é possível devido a homogeneidade do modelo. Quanto à isotropia é importante entendermos que ela só se dá em termos do espaço das imagens, pois no paralelepípedo as direções não são globalmente equivalentes.

5.4. Considerações Sobre os Espectros

Nas duas seções precedentes, tratamos de um dos aspectos da nossa proposta, que foi o de procurar quasares que seriam imagens da nossa Galáxia - a via Láctea - ou, em termos matemáticos, pontos equivalentes, do espaço de recobrimento universal da variedade cuja célula fundamental é o paralelepípedo, ao ponto que representa nossa Galáxia neste espaço.

Nesta seção trataremos do segundo aspecto da nossa proposta que é o de investigar se os espectros dos

quasares em cada grupo nos permitem afirmar que em primeiro lugar eles são o mesmo objeto e em segundo lugar que seriam imagem da nossa Galáxia. Aqui trataremos os três grupos ao mesmo tempo, notando que, em princípio, os grupos são independentes uns dos outros.

Esperamos então que, em geral, os quasares que estejam atualmente a uma mesma distância de nós nas direções dadas pelas Tabelas 5.6 a 5.9 para Grupo 2, 5.17 para o Grupo 1 e 5.18 para o Grupo 3, e particularmente os quasares opostos que definem os eixos em cada um dos grupos, tenham espectros de emissão semelhantes. Não exigimos que os espectros sejam exatamente iguais pois não podemos descartar a hipótese de algumas das linhas de emissão serem total ou parcialmente absorvidas durante seu trajeto.

A seguir nas Tabelas 5.19, 5.20 e 5.21, damos a relação das linhas espectrais para os quasares dos Grupos 1, 2 e 3, respectivamente.

Como veremos pelas Tabelas a seguir, alguns objetos não possuem nenhuma linha espectral. Para justificar a inclusão destes objetos, reportamo-nos ao catálogo onde é justificada sua presença, embora, com a restrição destes redshifts serem considerados com cautela (cf. Burbidge e Hewitt, 1981).

TABELA 5.19

LINHAS DE EMISSÃO PARA QUASARES DO GRUPO 1

QUASAR	LINHAS	QUASAR OPOSTO	LINHAS
0407-199	H I	1601+184	- -
	SI IV		- -
NC = 472	O IV	NC = 1111	- -
	C IV		- -
0945+114	H I	2146-133	H I
	SI IV		C IV
NC = 668	O IV	NC = 1279	HE II
	C IV		C III
	O III		

TABELA 5.20

LINHAS DE EMISSÃO PARA QUASARES DO GRUPO 2

QUASAR	LINHAS	QUASAR OPOSTO	LINHAS
0414-189	C IV	1613+170	C IV
	HE II		C III
NC = 474	C III	NC = 1136	- -
	MG II		- -
	MG V		- -
	NE V		- -
0921+347	- -	2116-358	H I
NC = 650	- -	NC = 1254	C IV
2332+489	C IV	-	- -
NC = 1506	C III	-	- -

NC = nº do quasar no QSOCAT

TABELA 5.21

LINHAS DE EMISSÃO PARA QUASARES DO GRUPO 3

QUASAR	LINHAS	QUASAR OPOSTO	LINHAS
0151+048	H I	1359-058	H I
	N V		N V
NC = 283	SI IV	NC = 1007	O I
	O IV		O IV
	C IV		C IV
	HE II		HE II
	O III		- -
	C III		- -
0812+367	C III	2020-370	C III
NC = 571	MG II	NC = 1229	MG II

NC = nº do quasar no QSOCAT

É importante esclarecer que se fossem escolhidos outros representantes para os grupos, a situação não se alteraria, uma vez que esta característica não se altera significativamente nos casos que constituem cada grupo.

Poderia-se pensar em exigir que os quatro quasares (ou cinco no caso do Grupo 2), tivessem linhas espectrais semelhantes. Esta hipótese não é viável pois, como fica evidente pelas dimensões dos eixos apresentados nas Tabelas 5.5 e 5.16, o espaço é anisotrópico em larga escala, ou seja, as diferentes direções do espaço não são equivalentes. Isto implicaria que quasares em eixos diferentes estariam em épocas diferentes, o que equivale a estágios de evolução diferentes.

Retomando as Tabelas 5.19 e 5.20 e 5.21, notamos que no Grupo 3 os quasares que definem o eixo x têm linhas de emissão muito semelhantes e por sua vez os que definem o eixo y têm linhas idênticas.

Nos outros grupos, embora algumas linhas de emissão sejam comuns aos dois quasares do par, não é possível ver nada que indique que estes quasares são o mesmo.

Ainda, analisando as linhas de emissão de outros quasares no catálogo, vemos que os espectros obtidos para os quasares nas Tabelas acima são comuns a quase todos eles.

Isto implica que infelizmente no atual estágio de observações nada podemos afirmar com respeito a nossa

proposta destes quasares serem o mesmo e, muito menos, que eles são imagens da nossa Galáxia.

De qualquer maneira, os resultados obtidos para o Grupo 3, deixam aberto o caminho que aponta que neste aspecto este é o grupo que melhor descreve o modelo, pelo menos em função dos espectros de emissão. Daí o porquê, no início do Capítulo, não privilegiarmos o Grupo 2, que em princípio era o que melhor correspondia às expectativas do modelo.

CONCLUSÃO

Pela análise dos resultados que obtivemos, vemos que não temos argumentos suficientes para corroborar o modelo.

Este fato fica claro na medida em que não pudemos escolher, com absoluta certeza, um dos três grupos para representar as expectativas do modelo. Como vimos, se por um lado algumas destas expectativas eram correspondidas por um determinado grupo, por outro lado este mesmo grupo não correspondia a outras expectativas, de modo que isto ocorrendo para todos os grupos, nos impediu de escolher um melhor dentre eles.

Uma maneira de se explicar a existência dos três grupos, supondo ser o modelo correto, é a de se considerar que em dois dos três grupos, os quasares ali presentes não são imagens da nossa Galáxia, mas imagens de galáxias que poderiam estar atualmente próximas de nós, ou mesmo quasares que estariam nos limites da célula fundamental em lados opostos. De qualquer maneira, a direção das imagens destes objetos poderia aparecer para nós como aproximadamente opostas no céu. Analogamente é possível explicar a existência de mais de um caso nos Grupos 1 e 2, admitindo-se que, dos quasares que não são comuns a todos os casos do grupo, apenas um seria imagem da nossa Galáxia.

Quanto à análise dos espectros, que poderia solucionar

muitas das dúvidas em relação a um objeto ser ou não imagem da nossa Galáxia, é importante ressaltar que além da falta de informações sobre estes espectros, esbarramos no fato de que a teoria da evolução dos quasares é incompleta, o que nos impede de fazer qualquer afirmação mais conclusiva neste sentido, com relação aos dados que temos.

Não podemos esquecer da possibilidade, que abordamos rapidamente na seção 5.2, de haverem imagens da nossa Galáxia mais próximas de nós, e que já não seriam mais vistas como quasares, mas como galáxias em estado evolutivo anterior ao atual estado de evolução da nossa Galáxia. Esta possibilidade, que é a reivindicada por aqueles que procuram um "Universo pequeno" (cf. sec.3.5), não pode ser verificada por nós, como já chamávamos a atenção na seção 5.2, por basearmos nossa pesquisa exclusivamente nos quasares. Fica, contudo, a sugestão para um outro trabalho teórico que, aproveitando as previsões desta pesquisa, no que diz respeito às direções principais, leve em conta também as galáxias.

Embora que, de certa maneira, já soubéssemos que seria muito difícil obtermos resultados conclusivos, dada a diversidade e o alcance das hipóteses feitas e as incertezas quanto aos dados, ficamos com a convicção de que o método utilizado colabora, no sentido de integrar diferentes áreas de pesquisa na solução de um problema: a determinação da estrutura global do Universo; de maneira que mesmo os resultados negativos podem vir a colaborar nas pesquisas em algumas destas áreas.

Daí os resultados que obtivemos poderem ser usados para

análises mais profundas, seja num estudo mais detalhado por parte dos astrofísicos nos espectros dos quasares que destacamos, seja por parte dos astrônomos na procura de quasares, ou galáxias em posições que foram previstas neste trabalho.

APÊNDICE A

RESOLUÇÃO PARA O MODELO FRW COM CURVATURA NULA

Neste Apêndice procuraremos explicitar vários pontos que foram subentendidos no texto principal. Notemos que para se chegar a atribuir uma topologia não-trivial para a seção espacial do Universo é necessário que conheçamos a métrica (veja Cap. 3). Além disso, trataremos aqui do sistema de coordenadas co-móvel, que facilita sobremaneira a descrição de modelos de Universo em expansão como é o nosso modelo.

Como já foi mencionado no Capítulo 1, uma das possíveis maneiras de se descrever o Universo é considerá-lo em "larga escala". Ou seja, se por um lado sabemos que as estrelas estão distribuídas irregularmente no espaço, sabemos também que essas estrelas formam galáxias, que por sua vez formam aglomerados de galáxias.

Assim, considerar o Universo em "larga escala" significa considerar a distribuição desses aglomerados de galáxias ao invés de considerarmos a distribuição das estrelas.

O Universo quando olhado do ponto de vista dos aglomerados de galáxias é homogêneo. É claro que desse ponto de vista, as heterogeneidades locais são desprezadas e, portanto, as soluções que encontraremos para as equações de Einstein serão aproximadas.

Além de homogêneo, suporemos que o Universo não tem nenhuma direção preferencial, ou seja, vamos considerá-lo localmente isotrópico.

Se portanto, tomarmos o Universo como homogêneo e isotrópico, isto vai significar que a cada instante a métrica do espaço seja idêntica em todos os pontos e direções.

Com isto, poderemos definir seções espaciais acronais compactas para cada instante de tempo $t = \text{const}$, o que permitirá que nos ocupemos inicialmente com a métrica puramente espacial, deixando a questão da métrica do espaço-tempo para mais tarde.

Vamos indicar o tensor tridimensional por γ_{ij} , sendo que o elemento de distância espacial será dado por:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.1})$$

onde convecionaremos designar os índices tridimensionais que tomam os valores 1, 2 e 3 com letras latinas e os índices quadridimensionais que tomam os valores 0, 1, 2 e 3 com letras gregas.

A curvatura do espaço é determinada completamente pelo tensor de curvatura tridimensional que designaremos por P_{ijkl} e que devido a isotropia completa exprime-se somente em termos de tensor métrico γ_{ij} , e que em virtude das suas propriedades de simetria, deve ter a forma:

$$P_{ijkl} = K(\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}) \quad (\text{A.2})$$

onde k é uma constante.

O tensor de Ricci $P_{ij} = P_{ikj}^k$ é dado por:

$$\begin{aligned} P_{ikj}^k &= K(\gamma^{kl} \gamma_{kl} \gamma_{ij} - \gamma^{kl} \gamma_{lj} \gamma_{ik}) \Rightarrow \\ \Rightarrow P_{ij} &= 2K \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (A.3)$$

Contraindo-se P_{ij} em (A.3) chegamos na curvatura escalar:

$$P = 6K \quad (A.4)$$

Vemos pela equação acima que as propriedades da curvatura do espaço isótropo e homogêneo são determinadas por uma só constante.

Dessa maneira, em vista do que discutimos no Capítulo 2, o nosso espaço será uma variedade diferenciável 3-dimensional com curvatura constante.

Os valores desta constante K podem ser reduzidos a três casos distintos de geometrias, representados pela constante k , que é uma normalização de K , de maneira que:

$k = 1$, espaços com curvatura constante positiva

$k = 0$, espaços com curvatura nula (euclidiana)

$k = -1$, espaços com curvatura constante negativa.

Daqui em diante trataremos apenas dos espaços com curvatura constante nula ($k = 0$)

Substituindo $k = 0$ nas equações (A.2), (A.3) e (A.4) teremos respectivamente que:

$$P_{ijkl} = 0 \quad (A.5)$$

$$P_{ij} = 0 \quad (A.6)$$

$$P = 0 \quad (A.7)$$

Como com curvatura nula o espaço é euclidiano, a métrica espacial pode ser escrita como:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (A.8)$$

A métrica escrita na forma da equação (A.8) porém, não dá conta de descrever a expansão do Universo. Para tanto, passemos a estudar agora o sistema de referência co-móvel no espaço-tempo.

O sistema de referência co-móvel é aquele que se move com a matéria do espaço. Em outras palavras, o sistema de referência é a própria matéria que preenche o espaço; consequentemente a velocidade ("coordinate velocity") da matéria neste sistema é por definição zero, em todo o lugar.

Vemos que a escolha do referencial co-móvel é natural para o modelo isotrópico, pois, para qualquer outra escolha, a direção da velocidade da matéria levaria a uma não-equivalência aparente das direções do espaço.

A coordenada temporal deve ser escolhida de tal maneira que, conforme já dissemos anteriormente, a cada instante de tempo seja a mesma em todo o espaço.

Em vista da completa equivalência de todas as direções, as componentes g_{i0} do tensor métrico quadridimensional são iguais a zero neste sistema de referência. As três componentes g_{i0} podem ser consideradas como as componentes de um vetor tridimensional de maneira que, se fossem diferentes de zero, criariam uma não equivalência das direções.

Como em vista das hipersuperfícies 3-dimensionais serem acronais e portanto podemos ter uma função do tempo t de maneira que esta seja constante em toda a hipersuperfície, a componente X^0 dependerá apenas da coordenada X^0 ($X^0 = ct$) que, por sua vez, pode ser escolhida de maneira que $g_{00} = -1$ (o que caracteriza um referencial sincrônico, (veja Landau e Lifshitz 1980, pg 375). Isto significa que a coordenada $X^0 = ct$ representa o tempo próprio em cada ponto.

Desta maneira podemos escrever o elemento de linha para o espaço-tempo como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 \quad (A.9)$$

Definimos $a(t)$ ser o fator de expansão ou de escala do Universo que deve depender do tempo. Com isto podemos escrever a equação (A.9) da seguinte maneira:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (A.10)$$

Por semelhança com o método de Landau e Lifshitz para os modelos esférico e hiperbólico (cf. Landau e Lifshitz 1980, pg 464), faremos:

$$cdt = a d\eta \quad (A.11)$$

daí ficamos com:

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2)] \quad (A.12)$$

É imediato notar que as componentes do tensor métrico serão dadas por:

$$g_{00} = -a^2(\eta) \quad g^{00} = -\frac{1}{a^2(\eta)}$$

$$g_{11} = a^2(\eta) \quad g^{11} = \frac{1}{a^2(\eta)}$$

$$g_{22} = a^2(\eta) \quad g^{22} = \frac{1}{a^2(\eta)}$$

$$g_{33} = a^2(\eta) \quad g^{33} = \frac{1}{a^2(\eta)}$$

Em primeiro lugar, calcularemos a partir do tensor métrico a conexão para este espaço dada pelos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right) \quad (A.13)$$

Em vista dos componentes do tensor métrico e da equação (A.13), vem que:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{a'(\eta)}{a^3(\eta)} g_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \delta_j^i\end{aligned}\tag{A.14}$$

onde o símbolo "'" representa a derivação com respeito a η .

A partir do cálculo dos $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ dado acima, calculemos agora o tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta \Gamma_{\beta\delta}^\gamma\tag{A.15}$$

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{0\gamma}^\gamma}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{0\gamma}^\delta \Gamma_{0\delta}^\gamma$$

substituindo as relações (A.14) vem que:

$$R_{00} = \frac{3}{a^2(\eta)} (a'^2(\eta) - a(\eta) a''(\eta)) \quad ob$$

que pode ser escrito na forma:

$$R_0^0 = - \frac{3}{a^4(\eta)} (a'^2(\eta) - a''(\eta) a(\eta)) \quad (A.16)$$

da mesma maneira, como:

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{i\gamma}^j}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{i\gamma}^\delta \Gamma_{j\delta}^\gamma$$

obteremos:

$$R_i^j = \left(\frac{a'^2(\eta) + a(\eta) a''(\eta)}{a^4(\eta)} \right) \delta_i^j \quad (A.17)$$

Para encontrarmos as equações de Einstein para este modelo, ainda necessitamos calcular a curvatura escalar do espaço em termos de $a(\eta)$, como:

$$R = R_\alpha^\alpha = R_0^0 + R_i^i \quad (A.18)$$

utilizando as equações (A.16) e (A.17) teremos:

$$R = \frac{6}{a^4(\eta)} a''(\eta) a(\eta) \quad (A.19)$$

Seja a equação de Einstein:

$$R_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} R \delta_{\alpha}^{\beta} = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\alpha}^{\beta} \quad (\text{A.20})$$

onde T_{α}^{β} são as componentes do tensor energia - momento, c é a velocidade da luz no vácuo e κ é a constante gravitacional de Newton.

Calculemos em primeiro lugar a equação:

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_0^0 \quad (\text{A.21})$$

Como a matéria é imóvel no referencial que escolhemos, podemos escrever que (Landau e Lifshitz 1980, pg 471):

$$T_0^0 = \epsilon \quad (\text{A.22})$$

onde ϵ é a densidade de energia da matéria.

Substituindo (A.16), (A.19) e (A.22) em (A.21) vem que:

$$-\frac{8\pi\kappa}{c^2} \epsilon = \frac{3}{a^4(\eta)} a'^2(\eta) \quad (\text{A.23})$$

Como temos duas incógnitas na equação acima, ϵ e $a(t)$, devemos encontrar outra equação. Seja então a equação:

$$R_1^1 - \frac{1}{2} R = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_1^1 \quad (\text{A.24})$$

Usando os mesmos argumentos utilizados para se chegar na equação (A.22), podemos escrever que:

$$T_1^1 = -p \quad (A.25)$$

onde p é a pressão.

Substituindo (A.17), (A.19) e (A.25) em (A.24), vem:

$$-\frac{8\pi\kappa p}{c^4} = \frac{a'^2(\eta) - 2a'(\eta)a(\eta)}{a^4(\eta)} \quad (A.26)$$

Ficamos então com o sistema de equações:

$$-\frac{8\pi\kappa\epsilon}{c^2} = 3\frac{a'^2(\eta)}{a^4(\eta)}$$

$$-\frac{8\pi\kappa p}{c^4} = \frac{a'^2(\eta) - 2a'(\eta)a(\eta)}{a^4(\eta)}$$

Se desprezarmos a estrutura interna dos corpos macroscópicos singulares, nos quais esta concentrada praticamente toda a matéria do Universo e se considerarmos que as velocidades randômicas destes corpos são pequenas (se comparadas a c), é possível escrever simplesmente que:

$$\epsilon = \mu c^2 \quad (A.27)$$

onde μ é a densidade de matéria.

Da mesma forma, podemos considerar o "gás" formado pela matéria do Universo (desprezando as pressões internas dos corpos) como tendo pressão nula.

Nesta aproximação também podemos desprezar a energia e a pressão da radiação.

As considerações acima nos levam à equação de estado da matéria "tipo poeira", ou seja:

$$\epsilon = \mu c^2 \text{ e } p = 0$$

Resolvendo o sistema composto pelas equações (A.23) e (A.26) para o caso da matéria tipo poeira, vem que:

$$\alpha(\eta) = \frac{\alpha_0}{4} \eta^2 \quad (\text{A.28})$$

onde $\alpha_0 = \frac{8\pi\mu}{3c^2} \mu \alpha^3(\eta)$ é uma constante.

Daí substituindo a equação (A.28) na equação (A.11), segue que:

$$\eta^3 = \frac{12ct}{\alpha_0} \quad (\text{A.29})$$

Em termos de η a constante de Hubble é dada por (cf. A-pênd. B):

$$H(\eta) = c \frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} \quad (\text{A.30})$$

onde $a(\eta)$ é o fator de escala, que para o valor atual de η, η_0 , e em vista de (A.28) pode ser escrito como

$$H_0 = \frac{8c}{a_0 \eta_0^3} \quad (\text{A.31})$$

De (A.29) e (A.31) temos:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (\text{A.32})$$

Avaliando a constante a_0 , de maneira que

$$a_0 = ct_0 \quad (\text{A.33})$$

vem que:

$$a_0 = \frac{2}{3} \frac{c}{H_0} \quad (\text{A.34})$$

De (A.28), (A.29) e (A.34), concluímos que:

$$a(t) = \left(\frac{9a_0 c^2}{4} \right)^{1/3} t^{2/3} \quad (\text{A.35})$$

ou em termos da constante de Hubble H :

$$a(t) = \left(\frac{3}{2H_0} \right)^{1/3} c t^{2/3} \quad (\text{A.36})$$

Em vista do que foi exposto, podemos escrever o elemento de linha ds^2 , dado por (A.10), como:

$$ds^2 = - c^2 dt^2 + \left[\left(\frac{3}{2H_0} \right)^{1/3} c t^{2/3} \right]^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{A.37})$$

APÊNDICE B

PARÂMETROS OBSERVACIONAIS

Procuraremos neste Apêndice explicitar o significado de alguns parâmetros observacionais, mostrando as relações entre eles e o modelo Einstein - de Sitter por nós estudado.

Em primeiro lugar, tratemos da constante de Hubble da qual já fizemos uso neste texto.

A constante de Hubble é um parâmetro presente nos modelos de Universo com expansão que mede a taxa de expansão do Universo.

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (\text{B.1})$$

onde: $a(t)$ é o fator de escala.

Na equação acima e nas seguintes o ponto ('.') se referirá à derivação com relação ao tempo t .

O valor exato da constante de Hubble é muito difícil de ser determinado, de maneira que o valor atual de tal constante é:

$$H(t_0) \equiv H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad (\text{B.2})$$

onde: $a(t_0)$ é o fator de escala atual.

onde t_0 é o tempo de observação atual, é estimado estar na faixa de 50 Km/s/Mpc a 100 Km/s/Mpc (de Vancouleurs 1981). De nossa parte, adotaremos um valor intermediário para H_0 , ou seja,:

$$H_0 = 75 \text{ km/s/Mpc} \quad (\text{B.3})$$

Isto significa que a "velocidade de fuga" das galáxias aumenta de 75 Km/s a cada Megaparsec de distância (1 Mpc = 3.26×10^6 anos-luz).

Um outro parâmetro importante é o da desaceleração $q(t)$. Em modelos como o que estudamos, a expansão é desacelerada devido ao efeito de auto-gravitação. Exatamente por isso as medidas do parâmetro de desaceleração nos dão uma idéia da auto gravitação e portanto, da quantidade de matéria no Universo.

O parâmetro de desaceleração é definido como:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{H^2(t)} \quad (\text{B.4})$$

onde: $a(t)$ é o fator de escala

$H(t)$ é a constante de Hubble

Em geral o parâmetro de desaceleração varia com o tempo,

mas no caso particular do modelo de Einstein - de Sitter $q(t)$ é uma constante, de maneira que para o valor atual temos:

$$q(t) = q(t_0) \equiv q_0 = \frac{1}{2} \quad (\text{B.5})$$

Como podemos ver, substituindo as equações (A.32) e (A.36) do Apêndice anterior na equação (B.4) acima.

Substituindo (A.27) e (A.30) em (A.23), encontramos a chamada densidade crítica do Universo atual:

$$\mu_{\text{crit}} = \frac{3H_0}{8\pi\kappa} \sim 1.10^{29} \text{g/cm}^3 \quad (\text{B.6})$$

onde: H_0 é o valor atual da constante de Hubble e κ é a constante gravitacional de Newton.

A partir disso define-se o parâmetro Ω_0 , de tal maneira que:

$$\Omega_0 = \frac{\mu_0}{\mu_{\text{crit}}} \quad (\text{B.7})$$

onde o índice "o" indica o valor atual do parâmetro e μ_0 é a densidade atual do Universo.

Em relação aos modelos de FRW o valor de Ω_0 nos indica que:

$$\begin{array}{lll} \Omega_0 > 1 & \Leftrightarrow & k = 1 \\ \Omega_0 = 1 & \Leftrightarrow & k = 0 \\ \Omega_0 < 1 & \Leftrightarrow & k = -1 \end{array} \quad (\text{B.8})$$

Notemos ainda que nos modelos FRW com $\Lambda \neq 0$, é usual se usar o "parâmetro de densidade" adimensional σ , cujo valor atual pode ser expresso como (cf. Misner *et al.* 1973, pg. 772):

$$\sigma_0 = \frac{(4\pi/3) \mu_0}{(8\pi/3) \mu_0 - k/a_0 + \Lambda/3} \quad (\text{B.9})$$

onde: μ_0 é a densidade atual do Universo

k da o sinal da curvatura da seção espacial

a_0 é o fator de escala atual

Λ é a constante cosmológica



APÊNDICE C

SISTEMA EQUATORIAL DE COORDENADAS EM ASTRONOMIA

É interessante que nos catálogos de quasares e galáxias, as coordenadas de posição destes objetos sejam referidas a um sistema de coordenadas em que pelo menos uma das coordenadas destes objetos permaneça constante ao longo do movimento deles no céu. Daí então o sistema equatorial de coordenadas.

Basicamente o sistema equatorial consiste no seguinte: considera-se como plano horizontal, o plano horizontal de um observador postado no polo norte; com isso o zênite coincide com o polo norte e o nadir com o polo sul. As referências que o definem são a direção norte-sul do eixo de rotação da esfera celeste em torno da Terra.

Neste sistema as coordenadas que definem a posição da estrela são as seguintes:

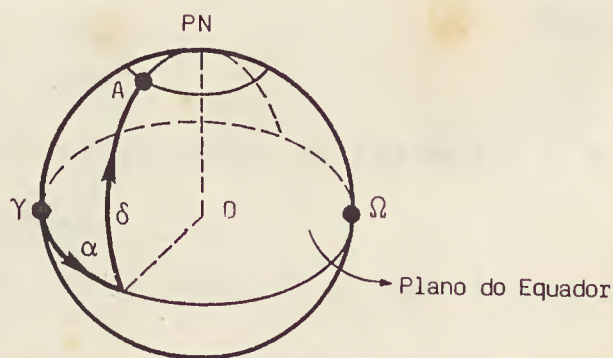


Fig. C.1 - São dadas as coordenadas equatoriais (α, δ) de um astro A, na esfera celeste. Os pontos γ e Ω também são destacados.

i) Ascensão Reta AR ou α : é o ângulo medido desde o ponto de referência γ até o plano que passa pelo observador e pelo astro, sendo perpendicular ao plano do equador. Olhando-se o polo norte, de fora da esfera celeste, a ascensão reta cresce no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. A ascensão reta é medida em horas ($0 \leq \alpha < 24$).

ii) Declinação DE ou δ : é o ângulo entre o equador e o astro medido desde aquele até esta. A declinação é positiva para astros no hemisfério norte e negativa para astros no hemisfério sul. A declinação é medida em graus ($-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$) (veja Fig. C.1).

O ponto γ que falamos acima ser referência para a contagem das ascensões retas é um dos dois pontos em que a trajetória do sol (eclíptica) intercepta o plano do equador celeste, conhecido também como ponto vernal ou equinócio da primavera no hemisfério norte. O outro ponto é o ponto Ω oposto a γ e conhecido também como equinócio de outono no hemisfério norte (ver Fig. C.1).

Desta maneira, as coordenadas de posição AR e DE são fixas para um dado astro durante o seu movimento no céu.

Outra vantagem do sistema equatorial é que as coordenadas AR e DE de um determinado astro são as mesmas para observadores em pontos distintos da Terra.

Finalizando, observamos apenas que no catálogo utilizado neste trabalho (cf. sec. 4.2), as coordenadas AR e DE são

referidas ao ano de 1950. Embora tivéssemos colocado que a ascensão reta e a declinação não variam para um determinado astro, isto não é exatamente verdade. Devido aos movimentos de precessão dos equinócios, as coordenadas equatoriais variam significativamente em grandes intervalos de tempo (da ordem de um século), em função do deslocamento do ponto γ . Daí a necessidade de as referirmos a um determinado ano. (veja por exemplo, Steiner 1978; Roy e Clarke 1977).

REFERÊNCIAS

- Adler,,R., Bazin,M., and Schiffer,M. 1975, *Introduction to General Relativity*(Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha).
- Boothby,W.M. 1975, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (New York: Academic).
- Burbidge,E.M., Burbidge,G., Solomon,P.M., and Strittmatter, P.A. 1971,*Astrophysical Journal* , 170, 233.
- Burbidge,G. 1968, *Astrophysical Journal Letters*, 154, L41.
- Burbidge,G., and O'Dell,S.L. 1972,*Astrophysical Journal* ,178, 583.
- Burbidge,G. 1978, *Physica Scripta*, 17, 237.
- Burbidge,G. 1981, in *10th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics* , ed. R.Ramaty and F.C. Jones (Ann. NY Acad. Sci., 375, 123).
- Chanan,G.A. 1982, *Astrophysical Journal*, 252, 32.
- Chu,Y., and Zhu,X. 1983, *Astrophysical Journal*, 271,507.
- Demianski,M., and Lysik,M. 1986, *preprint*.(Univ.Warsaw-Inst.Theor.Phys.)
- Ellis,G.F.R. 1971, *General Relativity and Gravitation*, 2, 7.
- Ellis,G.F.R. 1975, *Quart.J.Royal Astron. Soc.* , 16, 245.
- Ellis,G.F.R.,and Schereiber,G. 1986, *Physics Letters A*, 115, 97.
- Fagundes,H.V. 1983, *Physical Review Letters*, 51, 517
- Fagundes,H.V. 1985, *Astrophysical Journal*, 291, 450.
- Fang,L.Z., Chu,Y., Liu,Y., and Cao,Ch. 1982, *Astronomy and Astrophysics*, 106, 287.

- Fang, L.Z., and Sato, H. 1983, *Comm. Theoret. Phys. (China)*, 2, 1055.
- Geroch, R., and Horowitz, G.T. 1979, in *General Relativity - An Einstein centenary survey*, Cap.5, pg.212, ed. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press).
- Goldstein, H. 1950, *Classical Mechanics* (Addison Wesley).
- Gott, J.R. III 1980, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 193, 153.
- Gunn, J.E. 1967, *Astrophysical Journal*, 147, 61.
- Guth, A.H. 1981, *Physical Review - D*, 23, 347.
- Harrison, E.R. 1981, *Cosmology - The science of the Universe*, (Cambridge University Press).
- Hawking, S.W. 1969, *Proc. R. Soc. Lond.*, A308, 433.
- Hawking, S.W., and Ellis, G.F.R. 1973, *The Large Scale Structure of Space - Time* (Cambridge University Press).
- Hewitt, A., and Burbidge, G. 1980, *Astrophysical Journal Supplement* . 43, 57 .
- Hewitt, A., and Burbidge, G. 1981, *Astrophysical Journal Supplement*, 46, 113.
- Huchra, J.P. 1984, *Physics Today*, Jan., pg. S-9.
- Karlson, K.G. 1971, *Astronomy and Astrophysics*, 13, 333.
- Karlson, K.G. 1977, *Astronomy and Astrophysics*, 58, 237.
- Kreyszig, E. 1975, *Differential Geometry and Riemannian Geometry* (University of Toronto Press).
- Landau, L., and Lifshitz, E. 1980, *Teoria do Campo* (traduzido do russo por J.L.Cindra e J.N.T.Rabelo; Moscou. Mir).
- Lima, E.L. 1970, *Elementos de Topologia Geral* (Impa).
- Loh, E.D., and Spillar, E.J. 1986, *Astrophysical Journal Letters*, 307, L1.

- Misner, C.W., Thorne, K.S., and Wheeler, J.A. 1973, *Gravitation*.
(San Francisco, W.H. Freeman and Company).
- Paál, G. 1971, *Acta Phys. Sc. Hung.*, 30, 51.
- Petrosian, V., Salpeter, E., and Szekeres, P. 1967, *Astrophysical Journal*, 147, 1222.
- Piper, D.E. 1968, *Nature*, 219, 846
- Rees, M.J. 1972, *Physical Review Letters*, 28, 1669
- Roy, A.E., and Clarke, D. 1977, *Astronomy: Principles and Practice*
sec. 1.7 (Bristol, Adam Hilger Ltd.)
- Seldner, M., and Peebles, P.J.E. 1979, *Astrophysical Journal*,
227, 30.
- Sokolov, D.D., and Shvartzman, V.F. 1974, *Sov. Phys. JETP*, 39,
196.
- Solheim, J.E. 1968 a, *Nature*, 217, 41.
- Solheim, J.E. 1968 b, *Nature*, 219, 45
- Steiner, J. (organizador) e Boczko, R., 1978, in *Introdução à
Astronomia e Astrofísica* (IAG-USP).
- Thurston, W.P., and Weeks, J.R. 1984, *Scientific Amer.*, 251, 94.
- Vancouleurs, G. de 1981, in *10th Texas Symposium on Relativistic
Astrophysics* ed. R. Ramaty and F.C. Jones (Ann. NY Acad.
Sci., 375, 90).
- Wills, D., and Ricklefs, R.L. 1976, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*,
175, 81P.
- Wolff, J.A. 1967, *Spaces of constant curvature* (New York, Mc
Graw-Hill).

