unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

ESTUDO HÍBRIDO ANALÍTICO/NUMÉRICO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM SÓLIDOS COM PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA

FÁBIO YUKIO KUROKAWA

MESTRADO

1210001726

Ilha Solteira - SP

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

ESTUDO HÍBRIDO ANALÍTICO/NUMÉRICO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM SÓLIDOS COM PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA

FÁBIO YUKIO KUROKAWA

ORIENTADOR: PROF. DR. ANTONIO JOÃO DINIZ

Ilha Solteira, Novembro de 2003.

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Cursos: Agronomia, Ciências Biológicas, Eng. Civil, Eng. Elétrica, Eng. Mecânica, Física, Matemática e Zootecnia.
Avenida Brasil Centro, 56 Caixa Postal 31 CEP 15385-000 Ilha Solteira São Paulo Brasil
pabx (18) 3743 1000 fax (18) 3742 2735 scom@adm.feis.unesp.br www.feis.unesp.br

UNESP
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO HÍBRIDO ANALÍTICO/NUMÉRICO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM SÓLIDOS COM PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA

1210001726

Fábio Yukio Kurokawa

NRD 143/06

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
11.09.06	29.09.06
REGISTRADO POR	TOMBO
Ailza	Te. 1726
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Doação Autor R$ 10,00	K96e

CO
pyp - 475138
pyp - 60442

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**

Orientador: PROF. DR. ANTONIO JOÃO DINIZ

Ilha Solteira, Novembro de 2003.

ESTUDO HÍBRIDO ANALÍTICO/NUMÉRICO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM SÓLIDOS COM PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA

FÁBIO YUKIO KUROKAWA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM CIÊNCIAS TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. João Antonio Pereira – Coordenador do Curso

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Antonio João Diniz – Orientador (FEIS/UNESP)

Prof. Dr. Edson Luiz Zaparoli (ITA/CTA)

Prof. Dr. João Batista Campos Silva (FEIS/UNESP)

Ilha Solteira – SP, novembro de 2003

03/11/03

DEDICATÓRIA

À minha Família,

em especial aos meus pais

Massuo Kurokawa e Tomoko Nakamura Kurokawa

e em memória aos meus avôs

Hisayoshi Kurokawa e Saiti Nakamura.

"Porque o mandamento é lâmpada,
e a lei é luz:
e as repreensões da correção
são o caminho da vida"
(Provérbios 6:23).

AGRADECIMENTOS

- *À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio concedido, através do financiamento deste projeto, na forma de bolsa de mestrado e auxílio financeiro, que possibilitou a realização desta pesquisa.*
- *À Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa (PROPP) pelo auxílio financeiro, que auxiliou a participação em reuniões científicas.*
- *Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) pelo auxílio à pesquisa.*
- *Ao Professor Dr. Antonio João Diniz pelo estímulo, discussões e orientação deste projeto de pesquisa. Agradeço ainda pela valiosa contribuição à minha formação profissional, que desde a graduação incentivou e possibilitou o envolvimento com a pesquisa.*
- *Ao Professor Dr. João Batista Campos Silva pelas discussões e valiosa contribuição no campo analítico e numérico.*
- *Ao Professor Dr. João Batista Aparecido e ao Professor Pesquisador Dr. José Bezerra Pessoa Filho pelas contribuições e sugestões na revisão deste trabalho.*
- *Aos(às) amigos(as) Ângelo, Davi, Márcio, Reginaldo, Roger, Carla, Kátia pelo companheirismo e apoio durante o curso.*
- *Às(ao) secretárias(o) Vânia, Sandra, Elaine e Alex pela paciência e ajuda.*
- *A todos(as) amigos(as) que direta ou indiretamente apoiaram e contribuíram durante o curso e na realização deste trabalho.*
- *A Deus por permitir a realização de mais este objetivo.*

SÚMARIO

Lista de Ilustrações ..... *viii*

Lista de Tabelas ..... *xiii*

Lista de Símbolos ..... *xiv*

Resumo ..... *xxi*

Abstract ..... *xxii*

Capítulo 1 **– INTRODUÇÃO 1**

1.1 – OBJETIVOS 1

1.2 – CONSIDERAÇÕES SOBRE AERODINÂMICA DE ALTA VELOCIDADE 1

Capítulo 2 **– PROCESSO DE ABLAÇÃO 10**

2.1 – CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DE PROTEÇÃO TÉRMICA 10

2.2 – ABLAÇÃO 10

2.3 – TEORIAS ABLATIVAS 11

2.4 – DESCRIÇÃO DO FENÔMENO ABLATIVO 13

2.5 – APLICAÇÕES DOS MATERIAIS ABLATIVOS 16

Capítulo 3 **– PROPOSTA 18**

3.1 – MODELAGEM DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO BIDIMENSIONAL 18

Capítulo 4 **– MÉTODOS DE SOLUÇÃO 21**

4.1 – TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA (TTIC) 25

4.2 – TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (TTIG)..... 26

***Capítulo 5* – MODELO UNIDIMENSIONAL 29**

5.1 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO UNIDIMENSIONAL..... 30

5.2 – SOLUÇÃO ANALÍTICA 33

5.3 – SOLUÇÃO NUMÉRICA 36

***Capítulo 6* – MODELO BIDIMENSIONAL 40**

6.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL 40

6.2 – SOLUÇÃO ANALÍTICA 42

6.3 – SOLUÇÃO NUMÉRICA 48

***Capítulo 7* – DISCUSSÃO 66**

***Capítulo 8* – CONCLUSÃO 70**

***Capítulo 9* – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 72**

***Apêndice A* – DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO UNIDIMENSIONAL..... 78**

***Apêndice B* – DESENVOLVIEMENTO ANALÍTICO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO BIDIMENSIONAL..... 90**

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

CAPÍTULO 1

Figura 1.1 Região quente cobrindo o corpo em velocidades hipersônicas 2

Figura 1.2 Comparação de dados para altitude e velocidade simulados e dados experimentais 2

Figura 1.3 Trajetória típica de reentrada do SARA e sua variação de velocidade 3

Figura 1.4 Escoamento ao redor do microsátelite na reentrada 4

Figura 1.5 Fluxo de calor no ponto de estagnação do SARA calculado por três métodos ... 4

Figura 1.6 Materiais utilizados no sistema de proteção térmica de um ônibus espacial 6

Figura 1.7 Aquecimento causado pelo sistema de propulsão de foguetes 7

Figura 1.8 Desenho esquemático do processo de ablação observado na Sonda Galileo 8

Figura 1.9 Veículo recuperável intacto com proteção térmica ablativa 8

Figura 1.10 Escudo térmico ablativo carbonizado após a reentrada na atmosfera 9

CAPÍTULO 2

Figura 2.1 Dissipação de energia de um composto de vidro fenólico ablatado 14

Figura 2.2 Representação física do processo de ablação envolvendo fusão do material

ablativo 15

Figura 2.3 Localização dos diferentes tipos de materiais de proteção térmica num veículo espacial 17

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 Esquema do fenômeno ablativo aplicado na região do ponto de estagnação de um corpo rombudo 19

Figura 3.2 Descrição do período pré-ablativo do problema de ablação bidimensional..... 19

Figura 3.3 Esquema do período ablativo do problema de ablação bidimensional..... 20

CAPÍTULO 4

Figura 4.1 Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 2$ 22

Figura 4.2 Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 10\tau$ 22

Figura 4.3 Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 10\tau^2$ 23

Figura 4.4 Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 0{,}1.e^{\tau/\tau_r}$ 23

CAPÍTULO 5

Figura 5.1 Esquema simplificado do processo de ablação unidimensional na região do ponto de estagnação 29

Figura 5.2 Esboço da geometria utilizada no modelamento do problema de ablação unidimensional 30

Figura 5.3 Variação da espessura ablativa em função da diferença de tempos para um fluxo de calor especificado $Q = 2$ 37

Figura 5.4 Variação da velocidade ablativa em função da diferença de tempos para um fluxo de calor especificado $Q = 2$ 37

Figura 5.5 Perfil de temperatura da fase pré-ablativa do problema unidimensional para a condição de contorno $Q = 2$ 39

Figura 5.6 Perfil de temperatura da fase ablativa do problema unidimensional para a condição de contorno $Q = 2$ 39

CAPÍTULO 6

Figura 6.1 Comparação de $\phi(0,\tau)$ obtida por três metodologias diferentes para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$ 50

Figura 6.2 Comparação de $\phi(0,\tau)$ obtida por três metodologias diferentes para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$ 50

Figura 6.3 Determinação do tempo de ablação, τ_f, para a condição de contorno $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$ 51

Figura 6.4 Determinação do tempo de ablação, τ_f, para a condição de contorno $Q_1 = 1 + \tau^2$

e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$ 51

Figura 6.5 Determinação do tempo de ablação, τ_f, para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$ 53

Figura 6.6 Determinação do tempo de ablação, τ_f, para a condição de contorno $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 0$ 53

Figura 6.7 Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$ 54

Figura 6.8 Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$ 56

Figura 6.9 Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$ 57

Figura 6.10 Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 1 + \tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$ 58

Figura 6.11 Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$ 60

Figura 6.12 Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 0$ 62

Figura 6.13 Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$ 64

Figura 6.14 Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$ 64

Figura 6.15 Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$ 65

Figura 6.16 Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 1 + \tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$ 65

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 4

Tabela 4.1 Comparação do tempo de início do período ablativo para vários métodos, Chung & Hsiao (1985) 24

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 Comparação do tempo de início da ablação obtido por diferentes métodos 38

CAPÍTULO 6

Tabela 6.1 Comparação do tempo de ablação para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$ 49

Tabela 6.2 Comparação do tempo de ablação para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$ 52

Tabela 6.3 Comparação dos tempos de ablação para diferentes condições de contorno ... 52

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A_i	Parâmetro dependente do índice i definido pela Eq. B.40
$A_{ij}(\tau)$	Matriz de coeficiente do problema unidimensional
A_{ij}	Matriz de coeficientes do problema bidimensional definido pela Eq. B.135
B_m	Parâmetro dependente do índice m definido pela Eq. B.52
B_{ij}	Matriz de coeficientes do problema bidimensional definido pela Eq. B.135
E_{ijmk}	Matriz de coeficientes do problema bidimensional
H	Calor de ablação por unidade do tempo
$K_i(\eta,\tau)$	Autofunção normalizada do problema unidimensional para a fase ablativa
$K_i(\eta,y,\tau)$	Autofunção normalizada para o problema bidimensional da fase ablativa
L	Operador matemático adimensional
L_1, L_2	Dimensão do retângulo nas direções x e y respectivamente [m]
M	Número de Mach
$M_k(y,\tau)$	Autofunção normalizada para o problema bidimensional da fase ablativa
N_i	Norma das autofunções do problema unidimensional da fase pré-ablativa
N_i^*	Norma das autofunções do problema unidimensional da fase ablativa
$N_i(y,\tau)$	Norma das autofunções do problema bidimensional da fase ablativa
N_k	Norma das autofunções do problema bidimensional da fase ablativa
$P_1(x,y,\tau)$	Parâmetro definido pela Eq. B.32

$P_2(x, y, \tau)$	Parâmetro definido pela Eq. B.65
$\widetilde{P}_i(x, \tau)$	Parâmetro definido pela Eq. B.44
$\widetilde{\widetilde{P}}_{im}(\tau)$	Parâmetro definido pela Eq. B.86
$Q(\tau)$	Fluxo de calor adimensional do problema unidimensional
$Q_1(\tau) = \frac{q_1}{q_0}$	Fluxo de calor adimensional absorvido do problema bidimensional
$\dot{Q}_1$	Derivada primeira do fluxo de calor absorvido
$Q_2(\tau) = \frac{q_2}{q_0}$	Fluxo de calor adimensional rejeitado do problema bidimensional
$\dot{Q}_2$	Derivada primeira do fluxo de calor rejeitado
R	Raio de curvatura do corpo rombudo (revolução)
$S(\tau)$	Posição da fronteira móvel do problema unidimensional
$S(y, \tau)$	Posição da fronteira móvel do problema bidimensional
$S_t = \frac{c(T_m - T_0)}{H}$	Número de Stefan
$\widetilde{S}_i(x, \tau)$	Parâmetro definido pela Eq. B.77
$\widetilde{\widetilde{S}}_{im}(\tau)$	Parâmetro definido pela Eq. B.87
T	Temperatura [K]
T_0	Temperatura inicial [K]
T_m , T_f	Temperatura de fusão [K]
$\widetilde{Z}_i(x, \tau)$	Transformada integral do problema bidimensional da fase pré-ablativa segundo a direção y
$\widetilde{\widetilde{Z}}_{im}(\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional da fase pré-ablativa segundo a direção x

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

c	Capacidade calorífica por unidade de volume
$f_1(x,y,\tau)$	Condição inicial do problema bidimensional da fase pré-ablativa definida pela Eq. B.33
$f_2(x,y,\tau)$	Condição inicial do problema bidimensional da fase pré-ablativa definida pela Eq. B.66
$\widetilde{f}_i(x,\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase pré-ablativa com relação a y
$\widetilde{f}_i(y,\tau)$	Parâmetro da condição de contorno do problema bidimensional da fase ablativa definido pela Eq. B.138
$\hat{\widetilde{f}}_{ik}(\tau)$	Parâmetro definido pela Eq. B.159
$\hat{\widetilde{f}}_{im}(\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase pré-ablativa com relação a x
$g_i(\tau)$	Parâmetro definido pela Eq. A.14
$\widetilde{h}_i(x,\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase pré-ablativa com relação a y
$\hat{\widetilde{h}}_{im}(\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase pré-ablativa com relação a x
i	Índice dos autovalores e autofunções
j	Índice dos autovalores e autofunções
k	Índice dos autovalores e autofunções

k	Condutividade térmica
$l = \frac{L_1}{L_2}$	Comprimento adimensional
m	Índice dos autovalores e autofunções
$q_0 = \frac{k(T_m - T_0)}{L_1}$	Fluxo de calor de referência [W/m^2]
q_1	Fluxo de calor absorvido [W/m^2]
q_2	Fluxo de calor rejeitado [W/m^2]
r	Raio de revolução [m]
t	Tempo [s]
t_m, t_f	Tempo de início da ablação [s]
x	Eixo de coordenadas cartesianas
y	Eixo de coordenadas cartesianas
$w(x)$	Função peso

LETRAS GREGAS

$\alpha = \frac{k}{c}$	Difusividade térmica [m^2/s]
$\tau = \frac{t\alpha}{L_1}$	Tempo adimensional
τ_f, τ_m	Tempo de início da ablação adimensional
ν	Inverso do número de Stefan
$\delta(\tau)$	Espessura do material ablativo
δ_{ij}	Delta de Kronecker

δ_{km}	Delta de Kronecker
η	Eixo de coordenada espacial
$\eta_b(\tau)$	Material virgem do problema unidimensional
μ_i	Autovalor do problema unidimensional da fase pré-ablativa
μ_i	Autovalor do problema bidimensional da fase pré-ablativa
μ_k	Autovalor do problema bidimensional da fase ablativa
μ_i^*	Autovalor do problema bidimensional da fase pré-ablativa definido pela Eq. B.92
$\lambda_i(\tau)$	Autovalor do problema unidimensional da fase ablativa
$\lambda_i(y,\tau)$	Autovalor do problema bidimensional da fase ablativa
λ_m	Autovalor do problema bidimensional da fase pré-ablativa
$\phi_i(\eta,\tau)$	Autofunção do problema unidimensional da fase ablativa
$\phi_i(\eta,y,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional da fase ablativa
$\phi_m(x,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional da fase pré-ablativa
$\psi_i(x)$	Autofunção do problema unidimensional da fase pré-ablativa
$\psi_i(x,y,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional da fase pré-ablativa
$\psi_k(y,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional da fase ablativa
$\varphi(x,\tau)$	Parâmetro dependente da coordenada espacial x e do tempo τ definido para homogeneizar as condições de contorno do problema bidimensional
$\widetilde{\varphi}_i(y,\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase ablativa segundo a direção η
$\hat{\widetilde{\varphi}}_{ik}(\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase ablativa segundo a direção y

$\gamma(y,\tau)$	Parâmetro dependente da coordenada espacial y e do tempo τ definido para homogeneizar as condições de contorno do problema bidimensional
$\widetilde{\gamma}_i(y,\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase ablativa segundo a direção η
$\hat{\widetilde{\gamma}}_{ik}(\tau)$	Condição inicial transformada do problema bidimensional da fase ablativa segundo a direção y
$\xi(\tau)$	Espessura de material ablativo
$\theta(x,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do problema unidimensional
$\widetilde{\theta}_i(\tau)$	Transformada integral do problema unidimensional da fase pré-ablativa
θ_{av}	Potencial médio adimensional do problema unidimensional da fase pré-ablativa
$\theta^*(\eta,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do problema unidimensional da fase ablativa
$\widetilde{\theta}_i^*(\tau)$	Transformada integral do problema unidimensional da fase ablativa
$\theta(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do problema bidimensional
$\theta_1(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional da fase pré-ablativa do problema bidimensional definida para se aplicar o princípio da superposição
$\theta_2(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional da fase pré-ablativa do problema bidimensional definida para se aplicar o princípio da superposição
$\theta_1^*(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional definida para homogeneizar as condições de contorno do problema bidimensional
$\theta_2^*(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional definida para homogeneizar as condições de contorno do problema bidimensional



$\widetilde{\theta}_i(x,\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional da fase pré-ablativa segundo a direção y
$\hat{\widetilde{\theta}}_{im}(\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional da fase pré-ablativa segundo a direção x
$\theta^*(\eta,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional da fase ablativa definida para homogeneizar as condições de contorno
$\widetilde{\theta}_i^*(y,\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional da fase ablativa segundo a direção η
$\hat{\widetilde{\theta}}_{ik}^*(\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional da fase ablativa
$\phi(x,\tau)=\int_0^l \theta(x,y,\tau)dy$	

OPERADORES MATEMÁTICOS

$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial em relação ao tempo
$\frac{\partial}{\partial \tau}$	Derivada parcial em relação ao tempo adimensional
$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$	Derivada primeira parcial em relação às coordenadas espaciais
$\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2}$	Derivada segunda parcial em relação às coordenadas espaciais
$\int_0^1 dx,\int_0^l dy$	Operador integral
$\sum$	Operador soma

unesp

RESUMO

***Kurokawa, F. Y.**, Estudo Híbrido Analítico/Numérico da Equação de Difusão Bidimensional em Sólidos com Proteção Térmica Ablativa, **Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)**, Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil, pp. 134, 2003.*

A transferência de calor com mudança de fase e perda de massa está presente em muitos problemas da engenharia e é de grande importância tecnológica. Exemplos deste fenômeno incluem a fundição de metais, o aquecimento aerodinâmico e operação com reator nuclear. Problemas deste tipo são inerentemente não lineares devido ao movimento da fronteira. Um fenômeno que tem ganhado a atenção dos pesquisadores nas últimas décadas é o aquecimento causado pelo atrito entre o ar e a estrutura de um veículo espacial na reentrada atmosférica, produzindo a perda de material da superfície. Este fenômeno é conhecido como ablação no meio aeroespacial. Neste trabalho foi realizada uma análise do problema de ablação transiente em um prisma retangular que foi modelado como um problema de difusão bidimensional. A Técnica da Transformada Integral Generalizada foi usada para se resolver o sistema de equações resultantes. Esta técnica transformar o sistema de equações diferenciais parciais original em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Foi implementado um programa de computador em Linguagem FORTRAN para resolver este sistema de equações usando rotinas disponíveis na IMSL Library. As variáveis de interesse tais como a distribuição de temperatura, a espessura e a velocidade ablativas foram obtidas para diferentes fluxos de calor no contorno.

***Palavras-chaves**: escoamento hipersônico, ablação, aquecimento aerodinâmico, mudança de fase, proteção térmica, técnica da transformada integral generalizada.*

ABSTRACT

***Kurokawa, F. Y.**, Analytical/Numerical Hibrid Study of the Two-Dimensional Difusion Equation in Solid with Ablative Thermal Protection, **Dissertation (M. Sc. in Mechanical Engineering)**, State University of São Paulo, Department of Mechanical Engineering, Ilha Solteira, São Paulo, Brazil, pp. 134, 2003.*

The heat transfer with phase change and mass loss is present in many engineering problems and is of great technological importance. Examples of this phenomenon include the metal melting, the aerodynamic heating and operation with nuclear reactor. Problems of this type are inherently nonlinear due to the moving boundary. A phenomenon that has been gainning the researchers' attention in the last decades is the heating caused by the friction between the air and space vehicle structure in the re-entered atmospheric, producing the material loss of the surface. This phenomenon is known as ablation in the aerospace area. In this work an analysis of the transient ablation problem in a rectangular prism that was modeled as a two-dimensional diffusion problem, was accomplished in order to obtain the thickness and the ablative speed. The Generalized Integral Transformed Technique was used to solve the resultant equations. This technique transforms the original partial differential equation system into an ordinary differential equation system. A computer program was implemented using the FORTRAN Language to solve this equation system and IMSL Libraries routines. The variables of interest such as the temperature distribution, the thickness, and the speed ablative were obtained for heat fluxes different in the boundary.

***Keywords**: hypersonic flow, ablation, aerodinamic heating, phase change, thermal protection, generalized integral transform technique.*

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivos principais formular e resolver problemas bidimensionais transientes de fronteiras móveis. Um fato que se deve salientar é que este trabalho visa à aplicação de uma técnica matemática num problema físico, no caso o fenômeno de ablação, que pode ser modelado por uma equação de difusão, com fronteira móvel decorrente do desgaste da proteção térmica ablativa, que a priori é desconhecida. A posição da fronteira é parte da solução. Problemas que envolvem fronteiras móveis são extremamente complexos e pela aplicação desta técnica matemática pode-se obter soluções analíticas mais precisas.

1.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE AERODINÂMICA DE ALTA VELOCIDADE

Um fenômeno que está em estudo nos dias atuais é aquele que trata do aquecimento aerodinâmico de veículos espaciais na reentrada na atmosfera. O aquecimento aerodinâmico é o aquecimento de um objeto como resultado do escoamento de um fluido em alta velocidade sobre o mesmo, van Driest (1956). O estudo deste fenômeno é complexo, envolvendo conhecimentos multidisciplinares tais como: mecanismos de transferência de calor, aerodinâmica de alta velocidade, ciências dos materiais, cálculos de trajetórias, cálculo do fluxo de calor incidente e ensaios aerodinâmicos para simular as condições de reentrada, Pessoa-Filho (1997).

O cisalhamento das camadas de fluido, quando eles escoam ao longo do corpo, e a compressão que ocorre quando se aproximam de regiões de estagnação de superfícies frontais, convertem a energia cinética do movimento em calor dentro de uma fina camada de ar que cobre o corpo, van Driest (1956). Na Figura 1.1 é mostrada tal região.

unesp

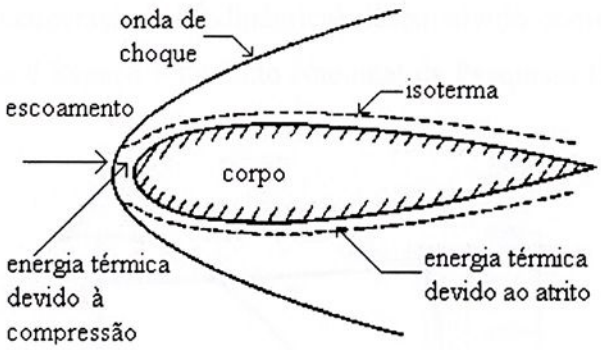


Figura 1.1 – Regiões de aquecimento sobre um corpo em velocidades supersônicas, van Driest (1956).

A predição do aquecimento aerodinâmico de um veículo espacial é essencial para uma missão espacial bem sucedida e um retorno seguro, Meese & Norstrud (2002). Um método predominante de análise aerotermodinâmica tem sido baseado na combinação de técnicas teóricas e numéricas. A Figura 1.2 apresenta uma comparação de simulação com dados experimentais para um ônibus espacial típico na reentrada. São apresentadas a trajetória e a velocidade de reentrada. Com base nas informações disponíveis, notamos uma divergência nos resultados, daí a importância de uma combinação dos resultados para uma predição mais realístíca.

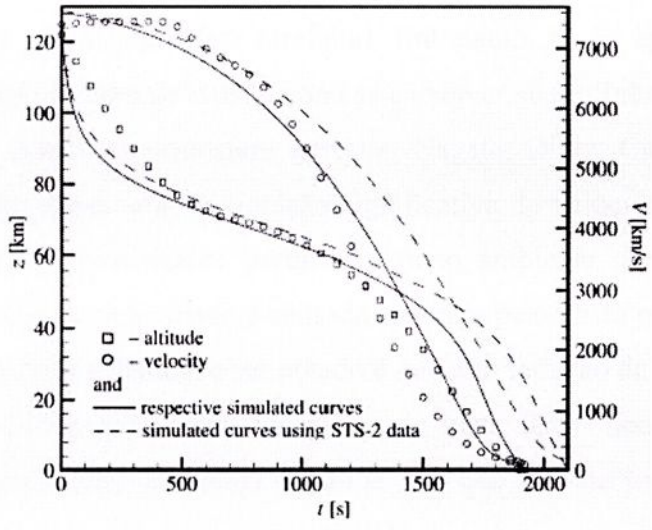


Figura 1.2 – Comparação de dados para altitude e velocidade simulados e dados experimentais, Meese & Norstrud (2002).

A análise do aquecimento aerodinâmico se tornou uma necessidade com o advento do Programa Espacial Brasileiro. A Figura 1.3 ilustra a trajetória de reentrada de um microsátelite recuperável, Loures da Costa & Moraes (2000) e Pessoa-Filho (1997), denominado SARA

(Sistema Auxiliar de Recuperação Aerodinâmica) desenvolvido conjuntamente pelo IAE-INPE (Instituto de Aeronáutica e Espaço – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) para o estudo de microgravidade.

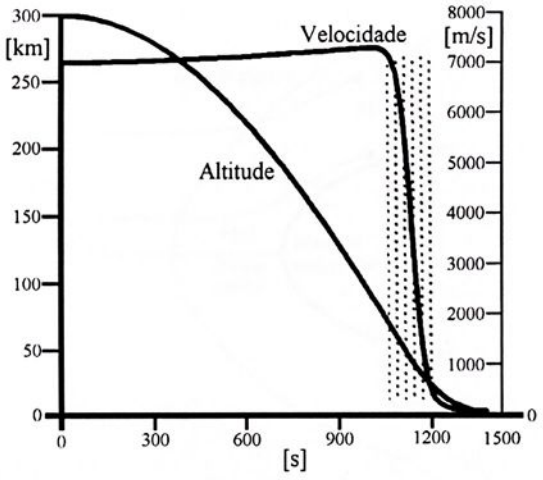


Figura 1.3 – Trajetória típica de reentrada do SARA e sua variação de velocidade, Loures & Moraes (2000).

O microsátelite entra na atmosfera terrestre de uma altitude de 300 Km quando está com uma velocidade de aproximadamente 7630 m/s, Pessoa-Filho (1997). Um fato que se nota através da Figura 1.3 é que inicialmente o microsátelite sofre um acréscimo de velocidade devido à ação gravitacional do meio (atmosfera rarefeita). Entretanto, ao se aproximar da atmosfera terrestre (cerca de 90 Km) a força de arrasto começa a exercer sua influência, devido à interação com as camadas mais densas da atmosfera terrestre, Nagata; Diniz; Campos-Silva & Pessoa-Filho (1999). Este efeito causa uma diminuição significativa da velocidade. Neste processo de redução de velocidade, o microsátelite perturba o meio ambiente que o cerca e é por ele influenciado. Esta redução de velocidade é causada somente pelo atrito entre o microsátelite e a atmosfera terrestre. Um dado relevante a ser notado é que esta redução de velocidade ocorre num intervalo de tempo relativamente curto. Do ponto de vista físico ocorre uma conversão de energia cinética em energia térmica (calor). Então se tem que há transformação de uma enorme quantidade de energia cinética em calor num intervalo de tempo muito pequeno, Hatori (1999). Parte desta energia é transferida para o microsátelite e parte segue com o escoamento.

Sob o ponto de vista do microsátelite, ocorre à formação de uma onda de choque destacada a frente do microsátelite devido ao fato do escoamento sobre o mesmo ser hipersônico, como ilustrado na Figura 1.4. Atrás da onda de choque, próximo à região do ponto de estagnação, o escoamento torna-se subsônico devido a uma redução significativa da velocidade e

com um conseqüente aumento de temperatura e pressão. Devido a estas condições ambientais ocorre um elevado aquecimento do microsátelite principalmente na região do nariz onde o choque é normal.

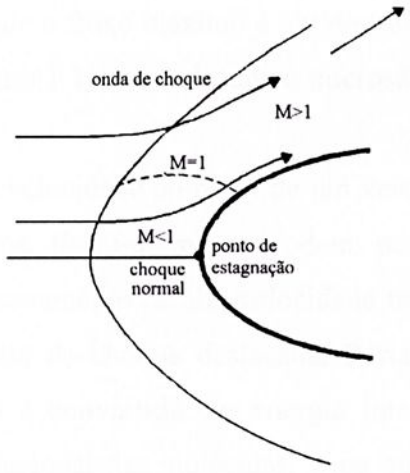


Figura 1.4 – Escoamento ao redor do microsátelite na reentrada, Loures da Costa & Moraes (2000).

Apenas para ilustrar este aumento de temperatura, a 90 Km de altitude a temperatura do meio é da ordem de $T_\infty = 194K$ e na região do ponto de estagnação do microsátelite a temperatura é da ordem de $T = 5820K$, Pessoa-Filho (1997).

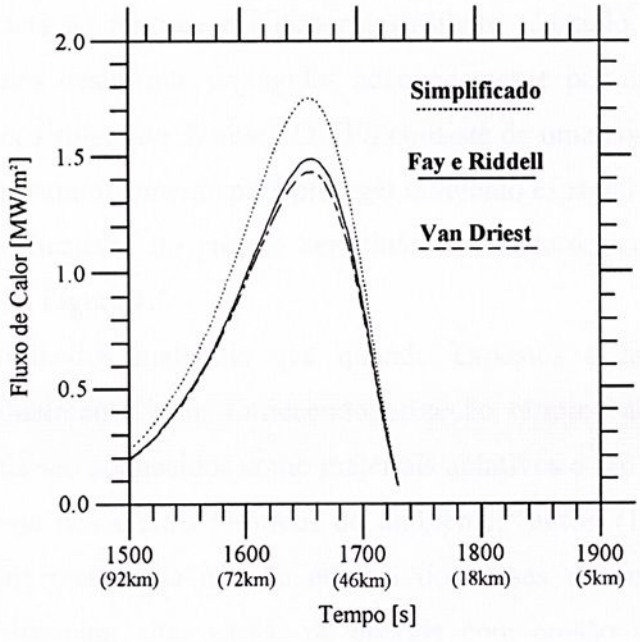


Figura 1.5 – Fluxo de calor no ponto de estagnação do SARA calculado por três métodos, Pessoa-Filho (1997).

Uma estimativa do fluxo de calor no ponto de estagnação para a trajetória de reentrada do SARA é apresentada na Figura 1.5 que foi determinada por Pessoa-Filho (1997), no qual o autor estima o fluxo de calor por três metodologias diferentes. Observa-se que o fluxo de calor máximo encontrado é aproximadamente 2 MW/m^2. Um fato que se deve salientar é que observando a Figura 1.5 temos que o fluxo máximo é obtido numa altitude de aproximadamente 65 Km e comparando com a Figura 1.3, nessa altitude o microsátelite está na fase de diminuição da velocidade.

Um escoamento de alta velocidade ao redor de um veículo espacial terá regiões de alta temperatura nas quais processos físico-químicos podem ocorrer e podem influenciar no escoamento. Uma vez que um escoamento de alta velocidade transforma-se em um escoamento de alta entalpia ao cruzar a onda de choque destacada. Portanto uma grande quantidade de energia cinética do escoamento é convertida em energia interna do gás. Esta energia pode transformar-se em energia translacional das moléculas. Uma outra possibilidade é a ocorrência de reações químicas como a dissociação de componentes do ar, ionização ou emissão de radiação, Loures da Costa & Moraes (2000).

Tanto os avanços no vôo atmosférico hipersônico quanto em sistemas de propulsão de foguetes e em outras áreas da tecnologia de alta temperatura têm resultado em ambientes de temperaturas extremamente altas, Schmidt (1964). Nesses e em outros ambientes de hipertemperatura, o uso de materiais convencionais de engenharia está grandemente restrito por causa de possível degradação térmica e falhas catastróficas. Contudo, estes materiais podem servir aos seus propósitos desde que protegidos adequadamente por um Sistema de Proteção Térmica (TPS – *Thermal Protection System*). O TPS consiste de uma combinação de materiais e tecnologia que trabalham conjuntamente para proteger o veículo espacial e sua tripulação. O TPS representa avanços significativos no projeto aerodinâmico, metalúrgico, e no entendimento e manufatura dos materiais, Figura 1.6.

Existem determinados materiais que quando expostos a ambientes hipertérmicos comportam-se excepcionalmente bem, fornecendo proteção térmica através do "processo de ablação". Esses materiais são conhecidos como materiais ablativos e são aplicados externamente nas estruturas isolando-as dos efeitos térmicos do ambiente, Sutton (1982), podendo também proporcionar uma maior resistência à ação erosiva dos gases de combustão. Os materiais ablativos absorvem e dissipam altas cargas de energia com erosão mínima da superfície e fornecem excelente isolação térmica do substrato.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

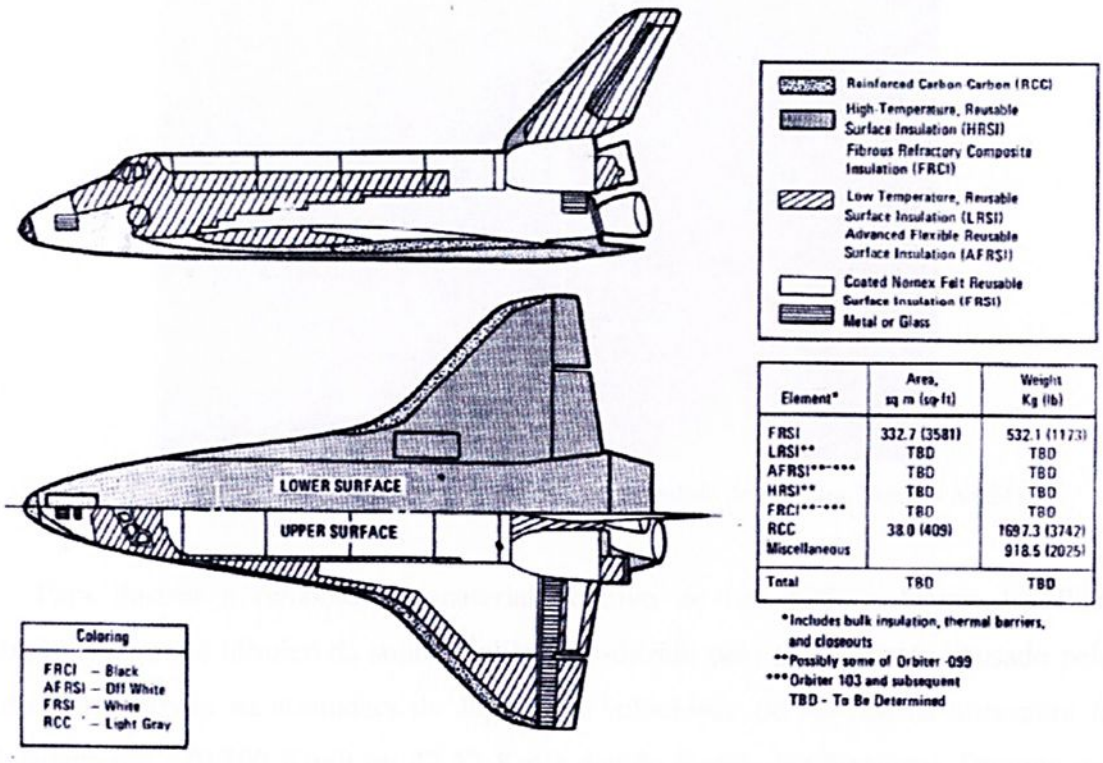


Figura 1.6 – Materiais utilizados no sistema de proteção térmica de um ônibus espacial (Fonte – *NASA*).
(www.1903to2003.gov/essay/Evolution_of_Technology/TPS/Tech41G2)

Nos poucos anos que se passaram, o impulso dos programas de mísseis balísticos tem conduzido a enormes progressos no campo da ablação. A proteção térmica ablativa condiciona em grande parte os progressos que acompanham os campos dos mísseis e dos veículos espaciais bem como em sistemas de propulsão, Figura 1.7. A transferência de calor transiente em sólidos com proteção térmica por ablação é de grande importância tecnológica e em numerosas aplicações de engenharia. Problemas deste tipo são inerentemente não lineares e envolvem o movimento da fronteira ablativa, cuja posição, a priori, é desconhecida.

O fenômeno ablativo pode ser representado por um modelo matemático envolvendo variáveis espaciais e temporais. Este tipo de problema é um caso especial de uma ampla classe de problemas de mudança de fase, no qual podem ocorrer os fenômenos de evaporação física ou "pirólise", sublimação, fusão, entre outros. O processo de ablação é complexo, envolvendo uma perda parcial ou total de massa da fronteira ablativa, Lacaze (1967).

unesp



Figura 1.7 – Aquecimento causado pelo sistema de propulsão de foguetes (Fonte – *NASA*).

Para ilustrar a remoção de material ablativo de um TPS, a Figura 1.8 ilustra a degradação no escudo térmico da sonda Galileo, produzido pelo aquecimento causado pela alta velocidade de entrada na atmosfera de Júpiter. A velocidade de entrada na atmosfera foi de aproximadamente 170.700 Km/h ou 47,42 Km/s devido à ação gravitacional. Durante os dois primeiros minutos da entrada, a temperatura do ambiente próximo a sonda era de duas vezes mais quente do que a da superfície do Sol sendo produzido uma temperatura de aproximadamente 14.300 K. Estes dados foram registrados por sensores alocados entre o escudo protetor e a estrutura.

Um dado relevante é que a massa total da sonda, Figura 1.8, inicialmente era de 335 Kg e somente a proteção térmica apresentava uma massa de 152 Kg, ou seja, aproximadamente metade da massa total era material de proteção. Isto significa que a carga útil que se pode transportar está grandemente restrita.

Em situações espaciais, a análise do aquecimento cinético se torna ainda mais crítica visto que o aumento da proteção térmica representa a diminuição direta da capacidade de transporte de carga útil e/ou aumento de combustível embarcado para colocá-lo em órbita, Hatori (1999).

Para demonstrar o aquecimento cinético causado na reentrada atmosférica temos na Figura 1.9 um veículo recuperável intacto, antes de ser colocado em órbita. Já a Figura 1.10 exibe um escudo térmico ablativo carbonizado de um veículo recuperável, utilizado na missão *CORONA* do programa da agência espacial norte-americana *NASA (National Aeronautics and Space Administration)*, após a reentrada na atmosfera da Terra, na década de 60, onde se pode observar a degradação térmica causada pelo aquecimento aerodinâmico. Esta missão colocou em

órbita satélites fotográficos de vigilância Norte-Americanos. Estes satélites foram projetados para avaliar a produção de bombas de longo alcance e mísseis balísticos pela antiga União Soviética e onde estavam sendo produzidas. Estes satélites retornavam a Terra para avaliação das imagens feitas.

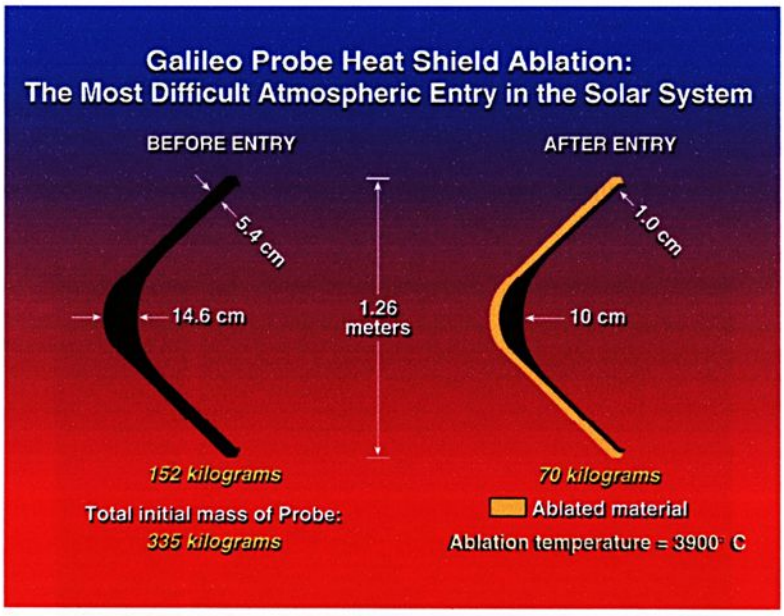


Figura 1.8 – Desenho esquemático do processo de ablação observado na Sonda Galileo (Fonte – *NASA*) (http://spaceprojects.arc.nasa.gov/Space_Projects/galileo_probe/htmls/Heat_Shield).

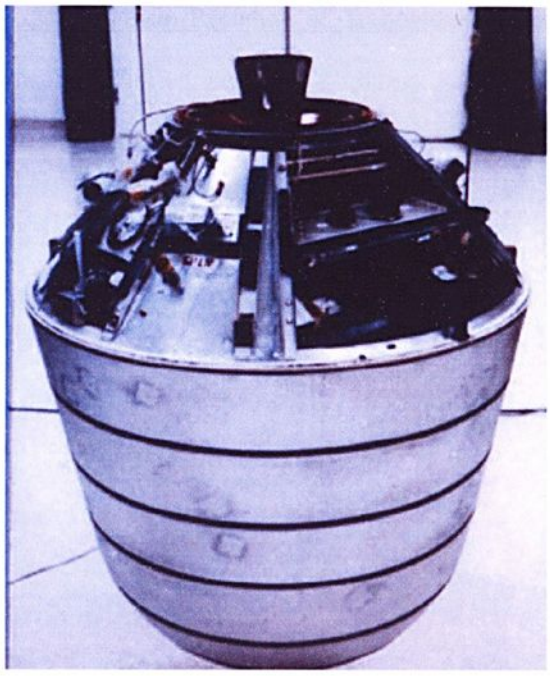


Figura 1.9 – Veículo recuperável intacto com proteção térmica ablativa (Fonte – *NASA*) (www.1903to2003.gov/essay/Evolution_of_Technology/reentry/Tech19G5).

Dentro do que foi apresentado, no tocante ao efeito da hipertemperatura ocorrida na reentrada, o presente trabalho tem por objetivo principal formular e resolver problemas bidimensionais transientes de mudança de fase com perda de massa, que é um esquema simplificado do processo de ablação. Onde o processo pode ser modelado pela equação de difusão aplicada a uma geometria bidimensional cartesiana com fluxos de calor prescritos no contorno. Equação esta que modela o processo de mudança de fase com movimento de fronteira, que fisicamente pode representar um problema de ablação simplificado. Pela aplicação de uma técnica matemática, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG), torna-se possível obtermos a solução deste problema, ou seja, determinar a espessura e a velocidade ablativas.

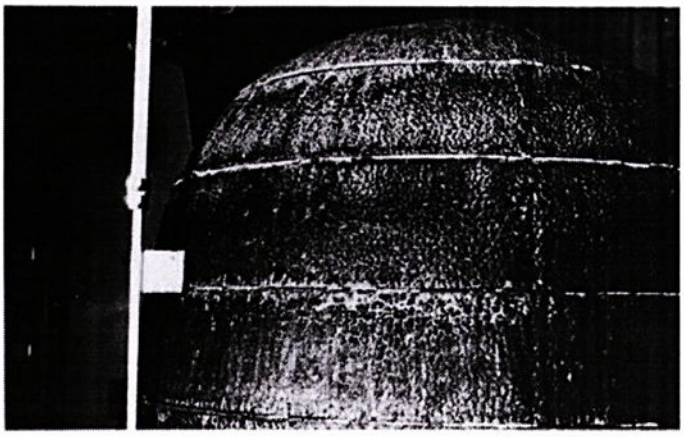


Figura 1.10 – Escudo térmico ablativo carbonizado após a reentrada na atmosfera (Fonte – *NASA*) (www.1903to2003.gov/essay/Evolution_of_Technology/reentry/Tech19G8).

CAPÍTULO 2

PROCESSO DE ABLAÇÃO

2.1 CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DE PROTEÇÃO TÉRMICA

Durante a reentrada atmosférica uma parte da energia total do veículo, que é convertida pelo aquecimento aerodinâmico, é dissipada ou transferida para o meio ao seu redor por dois mecanismos de transferência de calor, convecção e radiação, Krischke; Lorenzini & Sabath (1995). Valores típicos para cargas de calor incidente na reentrada estão entre 1.3 a 4.0 MW/m^2. Essas cargas de calor requerem uma proteção especial que consiste de um escudo de calor e uma isolação térmica.

É conveniente classificar os diferentes tipos de sistemas de proteção térmica externos como absorvitivo ou radiativo, que dependem do método primário utilizado para dissipar a energia incidente, Sherman (1968). Os sistemas absorvitivos são subdivididos como sumidouro de calor, resfriamento por filme ou transpiração, ablativo e convectivo.

Atualmente existem quatro tipos de tecnologias mais utilizadas como TPS para reentrada atmosférica sendo: a proteção térmica ablativa, a re-radiativa, o sistema ativo e o método de poço de calor, Loures da Costa & Moraes (2000).

Materiais ablativos são os mais utilizados como sistemas de proteção térmica. Isso é por causa de seu desempenho satisfatório, relativa simplicidade e baixo custo, Sherman (1968). Diversas pesquisas estão atualmente sendo conduzidas para ganhar entendimento adicional dos mecanismos de ablação e para moldar materiais para aplicações especificas.

2.2 ABLAÇÃO

Ablação é um termo geológico de pelo menos 120 anos atrás. Este termo é derivado do Latin *"au ferre"* que significa remover ou transportar para fora, Schmidt (1971). Louis Agassiz, um ilustre naturalista, foi o primeiro a utilizar o termo para descrever o processo combinado de

como ocorre o desgaste de uma geleira. O processo dominante foi atribuído aos efeitos térmicos.

O termo ablação denota a perda de matéria da superfície exposta a ação de uma corrente de gás quente a alta velocidade. Essa perda de massa em materiais ablativos pode ocorrer através de diversos mecanismos tais como: fusão, vaporização, pirólise, combustão e erosão mecânica, podendo todos estar presentes ou apenas um, que dependerá do tipo de material as condições impostas pelo meio.

Os primeiros materiais conhecidos, que sofreram o processo ablativo, foram os meteoritos. Estes corpos são objetos de grande curiosidade, pois quando estes corpos entram na atmosfera da Terra vindo do espaço, sofrem grande degradação térmica e até mesmo se desintegram completamente. Eles têm demonstrado a utilidade do processo de ablação para proteção térmica de objetos atmosféricos hipersônicos.

A compressão do processo de ablação de um dado material em um dado ambiente é necessária para o entendimento das razões que levam o material a comportar-se de uma determinada forma e para a seleção e otimização do material, para se obter melhoramentos no seu desempenho. Portanto, teorias ablativas são necessárias de modo a se obter uma compreensão básica do processo em si, identificando as propriedades físicas e químicas importantes e a influência das variáveis dos materiais e do ambiente, prevendo o desempenho dos materiais e orientando futuras pesquisas.

2.3 TEORIAS SOBRE ABLAÇÃO

Do ponto de vista termofísico, ablação é um processo de transferência de calor e massa ordenados, em que uma grande quantidade de energia térmica é desprendida pela perda de material da região superficial. Essa perda de massa em materiais ablativos pode ocorrer através de diversos mecanismos.

Para fins de engenharia, ablação pode ser definida como um processo complexo de dissipação de energia pelo qual os materiais sofrem degradação térmica, mecânica e química, combinada com uma remoção simultânea de material da superfície durante a interação deste com o ambiente em elevada temperatura, resultando na proteção térmica do substrato.

O termo "regressão da superfície", Thimoteo (1986), é um termo adotado para descrever os vários modos de perda de material da superfície, que incluem reações químicas da superfície (oxidação dos resíduos carbonáceos); erosão devido às forças de cisalhamento e pressão agindo

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

sobre a camada de resíduo; falha estrutural do resíduo em conseqüência das tensões térmicas e erosão mecânica resultantes da pressão que se desenvolve dentro da zona de decomposição e combinação dos fenômenos químico e mecânico agindo sobre a superfície exposta.

Segundo Vojvodich (1971), o processo de ablação pode ser descrito em um sentido amplo como a remoção de material da superfície para proteger estruturas sujeitas a altas taxas de transferência de calor. Duas aproximações para o estudo do processo de ablação têm evoluído nos últimos anos através de extensivas pesquisas: uma é a utilização de programas computacionais que fornecem soluções numéricas para as complexas equações diferenciais acopladas que descrevem o processo. A segunda é conduzir experimentos em laboratório para caracterizar empiricamente os mecanismos de ablação individualmente e suas interações com o meio exterior.

Devido à complexidade do problema, que envolve várias áreas, tais como: química, física, termodinâmica, mecânica dos fluidos e dos sólidos, nenhuma das aproximações é suficiente para uma correta avaliação do problema. Na realidade, uma combinação dos estudos experimentais e analíticos é necessária para possibilitar o entendimento da física da ablação e, assim, construir uma base racional que possibilite o desenvolvimento de novos materiais.

Adams (1959) classifica a ablação segundo três aspectos: ablação de fusão, ablação de sublimação e a combinação de fusão e sublimação. A ablação de fusão ocorre em materiais que se fundem e escoam sem que ocorra evaporação. A ablação de sublimação representa o outro extremo da mudança de fase e a ausência de líquido escoando simplifica a modelagem do problema, diferindo da fusão onde a interação entre o material em ablação e o gás da camada limite é muito importante. A transferência de calor já não é independente da ablação, uma vez que o vapor injetado leva à redução no aquecimento pelo fenômeno da transpiração, Gross, Masson e Grazley (1958). Na combinação de fusão e sublimação atenção tem sido dada à combinação de vidro e plástico e vidros de alta viscosidade. Os materiais vítreos têm atrativos por causa de sua alta viscosidade, baixa condutividade térmica, alto calor de sublimação e boa resistência à tensão térmica.

Steg (1960) estudou o fenômeno ablativo em aplicações relacionadas à reentrada de satélites, na atmosfera terrestre. Quatro categorias de materiais são discutidas, tais como: materiais que se gaseificam, mas não se liquefazem; materiais que reagem em sua superfície com o ar dissociado; materiais que se fundem e se vaporizam; e finalmente, materiais que se gaseificam parcialmente sendo o restante removido pela combustão superficial.

Uma revisão de trabalhos em ablação hipersônica foi realizada por Steg & Lew (1962),

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

onde os materiais de interesse podem ser agrupados como:

- ✓ plásticos que despolimerizam mas não se liquefazem (Teflon);
- ✓ materiais que sublimam e reagem com os constituintes do ar dissociado (grafite);
- ✓ materiais que inicialmente fundem e então vaporizam (vidro);
- ✓ materiais compostos que sofrem pirólise e carbonizam (*Nylon* fenólico).

Dimitrienko (1997) cita a existência de diferença de terminologia adotada nos trabalhos científicos sobre os materiais ablativos. Para ele o processo de diminuição (perda) irreversível de massa do material devido à ação de fluxos de calor e carregamentos termomecânicos do escoamento de um fluido é usualmente chamado de processo de ablação do material. O processo de ablação, quando a densidade do material muda e o volume permanece constante, é chamado de processo de ablação volumétrica ou pirólise. Já quando o volume do material muda e a densidade permanece constante, é chamado de ablação superficial. O processo de ablação é chamado combinado se ocorrer decréscimo irreversível de densidade e volume simultaneamente.

2.4 DESCRIÇÃO DO FENÔMENO ABLATIVO

O processo de ablação é iniciado pela interação do material com o ambiente e o principal efeito é a remoção de material da superfície. Essa perda de massa durante a ablação ocorre através de vários mecanismos complexos que podem estar relacionados com a natureza térmica, termoquímica e termomecânica do meio (Schmidt, 1968; Strauss, 1978). A quantidade relativa de material removida por mecanismo depende muito da composição do material e das condições na superfície. O material sofre uma degradação complexa que depende da distribuição da temperatura interna, das propriedades dos materiais, da presença e velocidade de reações térmicas competitivas, da velocidade de difusão dos produtos. O grau de decomposição sofrido pelo material dependerá da velocidade de aquecimento e do tempo de exposição ao fluxo de calor. Sob essas condições é muito difícil indicar um mecanismo preciso para cobrir as diversas reações possíveis.

O calor incidente do ambiente é absorvido, bloqueado, dissipado e transformado por inúmeros mecanismos. Esses mecanismos são ilustrados na Figura 2.1 para um composto de resina fenólica reforçada com fibra de vidro e envolvem:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

- ✓ condução de calor para o substrato do material e armazenagem pela sua capacidade calorífica efetiva;
- ✓ mudança de fase do material tais como: fusão, vaporização e sublimação;
- ✓ absorção de calor pelos gases no substrato quando eles se infiltram no resíduo em direção a superfície;
- ✓ convecção de calor na camada líquida;
- ✓ transpiração de gases da superfície ablatada na camada limite com conseqüente absorção de calor;
- ✓ radiação da superfície;
- ✓ reações químicas endotérmicas e exotérmicas.

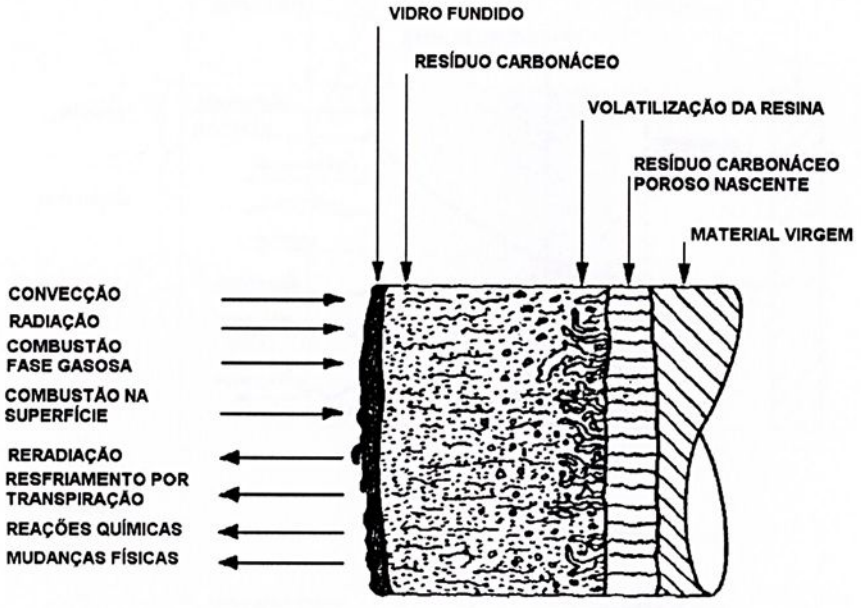


Figura 2.1 – Dissipação de energia de um composto de vidro fenólico ablatado.

Tais processos que absorvem energia tomam lugar automaticamente, controlando a temperatura da superfície e restringindo grandemente o fluxo de calor incidente.

Um processo de ablação física de um material composto, mais geral, que envolve transferência de massa, momentum e energia simultaneamente é ilustrado na Figura 2.2, Diniz (1996). O polímero virgem é inicialmente degradado pela ação de aquecimento imposto para produzir uma camada carbonizada de carbonatos através do qual os produtos de degradação gasosos são infiltrados e conduzidos pelo gradiente de pressão para a superfície. O sistema idealizado pode então ser caracterizado por três zonas distintas: uma carbonizada, uma camada

de degradação e o material virgem, cada qual com propriedades termofísicas e mecânicas distintas. A função primária do material ablativo é limitar a transferência de calor através dessas zonas e assim restringir o aumento de temperatura associada da estrutura primária do veículo.

O processo de ablação envolve uma evaporação física ou "pirólise", Kreith (1973), na superfície de um material exposto a um gás em elevadas temperaturas. O aquecimento, atribuído ao atrito, eleva a temperatura do material sólido, para seu ponto de fusão ou sublimação e, a ablação que aparece na superfície produz uma camada líquida ou gasosa que é transportada, por convecção, da interface para a camada limite. Sob as condições de reentrada na atmosfera o material em ablação usualmente é vaporizado, se mistura e é aspergido no meio do gás da camada limite.

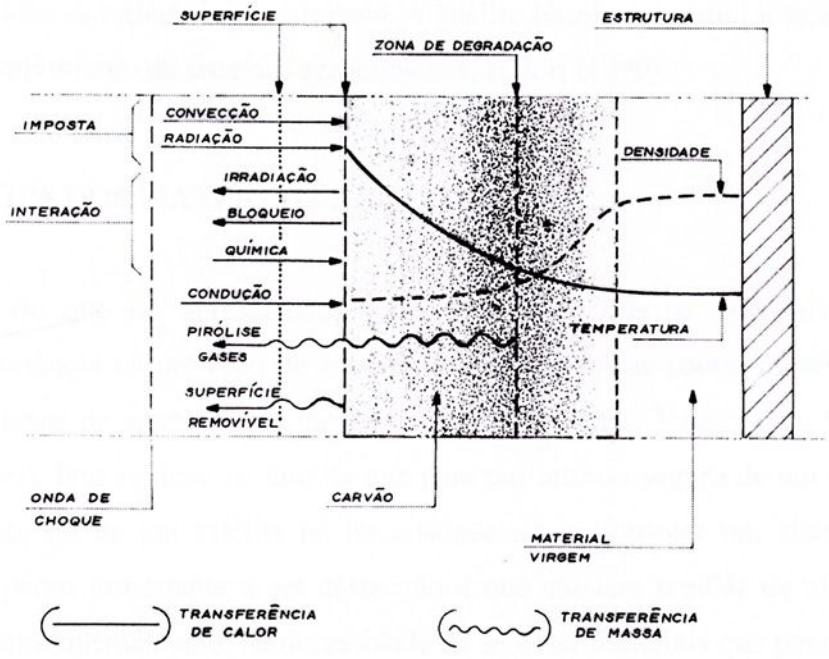


Figura 2.2 – Representação física do processo de ablação envolvendo fusão do material ablativo.

A mudança de fase do material em ablação aumenta a espessura da camada limite, com este aumento ocorre uma redução do gradiente de temperatura no gás, entre a superfície em ablação e a aresta da camada limite. Com isto, a transmissão de calor por convecção para a superfície em processo de ablação é reduzida. O efeito combinado da redução do fluxo de calor convectivo e a absorção de calor por evaporação podem provocar uma absorção de calor efetiva deste material.

Os sistemas de proteção térmica operando em ambientes de severo aquecimento

aerodinâmico estão freqüentemente sujeitos a ataques de partículas, na forma sólida ou na forma de gotículas de líquido, ou ambas, que são carregadas pela corrente de gás quente, Zien (2002). As partículas e gotículas transportam grandes energias térmica e cinética e seus efeitos no processo de ablação não podem ser ignorados.

Devido à sua complexidade o processo de ablação pode ser definido considerando-se vários aspectos. Uma proposta conveniente para a definição de ablação é a remoção da massa (matéria) causada pelos processos mecânicos e termoquímicos. Dentro deste contexto distingui-se a ablação dimensional, que é caracterizada pela remoção parcial da superfície, e a ablação total, em que há perda total de massa.

Com respeito ao dimensionamento da camada de proteção térmica ablativa, um cálculo mais preciso é necessário. Para isto, um modelo mais realístico e o conhecimento das cargas térmicas envolvidas se tornam indispensáveis. A análise térmica constitui a fase fundamental no projeto e desenvolvimento de sistemas aeroespaciais, Hatori (1999).

2.5 APLICAÇÕES DOS MATERIAIS ABLATIVOS

Diante do que foi apresentado, pode-se observar que os materiais ablativos estão adquirindo importância na proteção de superfícies aerodinâmicas contra os severos efeitos das temperaturas e taxas de aquecimento incidentes muito elevadas, Vaia; Price; Ruth; Nguyen & Lichtenhan (1999). Isto se deve ao fato de que para um retorno seguro de um veículo espacial, tripulado ou não, ou de um satélite há necessidade de se fornecer um sistema de proteção adequado. Um ponto importante a ser destacado é que existem regiões de maior e de menor aquecimento. Conseqüentemente, há necessidade de se obter materiais que possam atender estas exigências, Figura 2.3.

Uma outra aplicação tem sido a utilização em estruturas de propulsão de foguetes (Vaia et al., 1999; Thimoteo, 1986; Schmidt, 1971). Durante a queima de combustível (propelente sólido) do motor de um foguete, a isolação interna posicionada entre a carcaça e o propelente está sujeito a temperaturas que podem exceder 2.273 K e pressões de 6,9 MPa ou maiores, Vaia et al. (1999). Além disso, a isolação experimenta uma variedade de tensões de operação e uma atmosfera quimicamente oxidante com velocidades dos gases e partículas que podem variar de Mach 0,01 a 10 ou mais. O sucesso de uma missão pode ser comprometido devido a estes ambientes severos que podem ocasionar falha no sistema de propulsão.

Nos sistemas de propulsão que utilizam propelente líquido raramente se empregam

unesp

materiais ablativos, isto por causa da freqüente necessidade de se realizar testes com estes materiais no ambiente de trabalho. Uma vez que ablatores presentes são geralmente não reusáveis bem como as altas taxas de perda de material devido à longa duração da queima e as altas taxas de escoamento de massa combinadas, Schmidt (1971). Já para motores de propulsão sólida os materiais ablativos têm conseguido ganhos mais expressivos. Os motores de foguetes a propelente sólido são operados sem resfriamento porque a utilização de circuitos para esse fim aumentaria a complexidade do sistema pela adição de bombas, motores, válvulas e o líquido de resfriamento, Thimoteo (1986). Daí a necessidade de se utilizar um sistema de proteção térmica em sistemas de propulsão sólida.

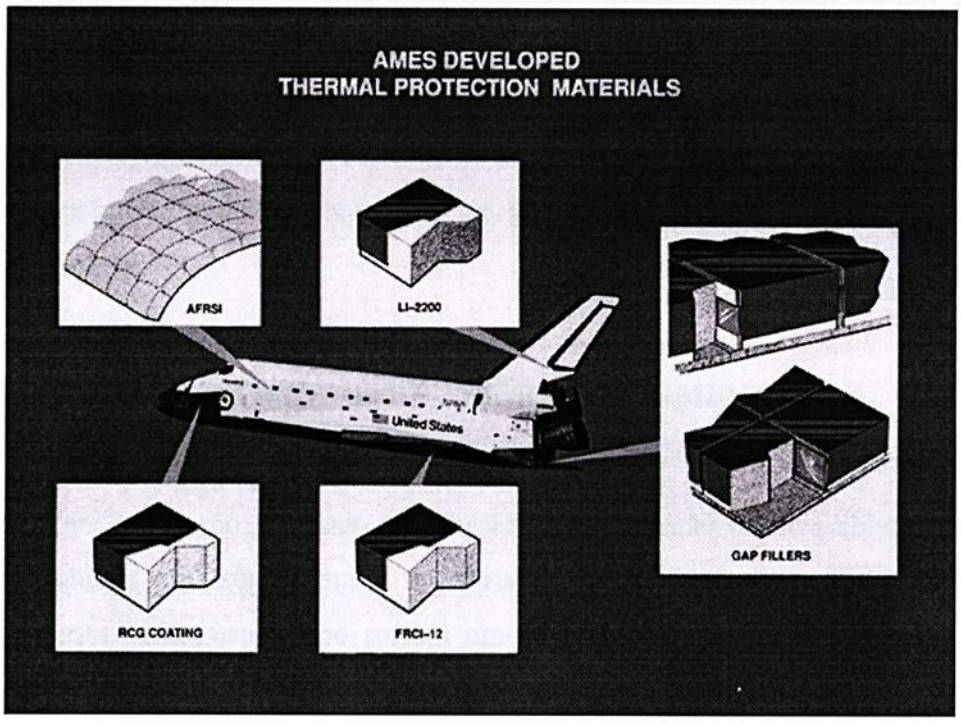


Figura 2.3 – Localização dos diferentes tipos de materiais de proteção térmica num veículo espacial. (Fonte: *NASA/Ames Research Center*)

Os materiais ablativos também têm sido empregados como proteção térmica, para ambas as superfícies interna e externa, de sistema de propulsão de mísseis da *U.S. Navy* (Marinha dos Estados Unidos), Koubec (1971). Os propelentes sólidos são usualmente preferidos devido ao risco associado com o manuseio do propelente líquido em porta-aviões. Sólidos, contudo, tem o inconveniente de que eles não apresentam um líquido refrigerante para as paredes da câmara de combustão. Devido a esses problemas e também o aquecimento aerodinâmico, devido ao atrito, há necessidade de se proteger este sistema para se evitar falhas que possam causar desastres.

CAPÍTULO 3

PROPOSTA

O presente trabalho tem como proposta o estudo da proteção térmica ablativa em sólidos que pode ser modelada pela equação de difusão bidimensional. Este estudo envolve desenvolvimento híbrido analítico/numérico da equação de difusão. A equação de difusão, equação diferencial parcial, que modela o problema será transformada num sistema de equações diferenciais ordinárias acoplada a equação de restrição no contorno. Pelas matrizes obtidas na solução analítica obteve-se uma solução numérica deste sistema através da implementação computacional em Linguagem FORTRAN. Na análise analítica foi utilizada a TTIG no qual objetivamos transformar o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

3.1 MODELAGEM DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO BIDIMENSIONAL

Considere um corpo rombudo (revolução) com proteção térmica ablativa movendo-se com uma velocidade hipersônica numa trajetória de reentrada na atmosfera terrestre. Como comentado anteriormente, este corpo sofrerá um aquecimento devido à conversão de energia cinética em energia térmica (calor). Desde que este corpo esteja protegido termicamente a degradação ocorrerá somente no escudo térmico.

A geometria considerada é apresentada na Figura 3.1. Na modelagem deste problema é considerado uma simplificação do problema onde o processo de ablação é abordado apenas como um fenômeno de mudança de fase com movimento de fronteira e perda de massa. A análise é feita na região próxima ao ponto de estagnação de um corpo rombudo. Nessa região, o problema pode ser simplificado, diante da espessura da proteção térmica ser pequena e o raio de curvatura do corpo ser muito grande, na região próxima do ponto de estagnação. Devido a essa simplificação é considerada uma transferência de calor bidimensional num prisma retangular, Figura 3.1.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

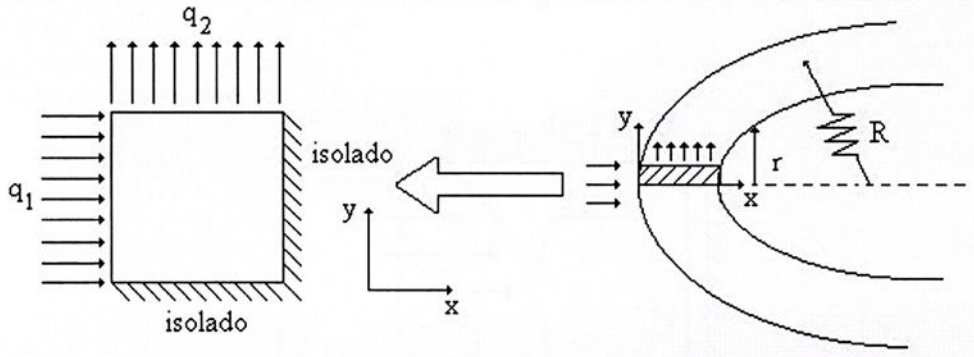


Figura 3.1 – Esquema do fenômeno ablativo aplicado na região do ponto de estagnação de um corpo rombudo.

O modelo em questão apresenta a forma de um prisma retangular no qual o comprimento longitudinal é muito grande comparado com as outras dimensões e, portanto os efeitos da transferência de calor nessa direção podem ser negligenciados. O modelo está sujeito a um aquecimento em uma das faces, com perda de calor em outra e isolado nas demais, Figura 3.2. Inicialmente o prisma se encontra a uma temperatura uniforme T_0.

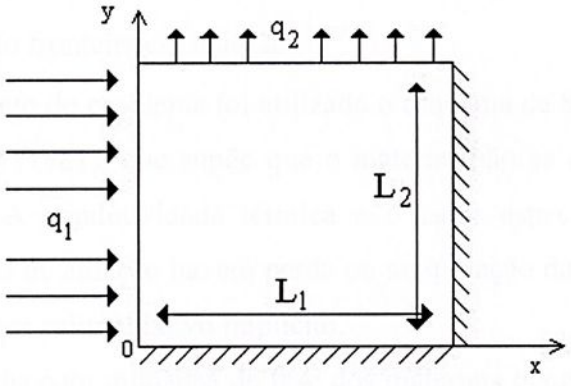


Figura 3.2 – Descrição do período pré-ablativo do problema de ablação bidimensional.

Os fluxos de calor aplicados na fronteira são variantes no tempo, ou seja, trata-se de um problema transiente. Para um melhor entendimento da transferência de calor transiente em sólidos com proteção térmica ablativa, o processo pode ser dividido em duas fases sendo, um período chamado de pré-ablativo, em que a temperatura da superfície aquecida está abaixo da temperatura de fusão ou sublimação do material e, portanto não ocorre mudança de fase do mesmo, Figura 3.2. E o outro chamado de ablativo, em que a temperatura da superfície atingiu a temperatura de fusão ou sublimação do material que ocasiona a mudança de fase do material ablativo que é sacrificado, Figura 3.3. O instante em que a temperatura da fronteira atinge a

temperatura de fusão ou sublimação é chamado de t_m, tempo de início da ablação.

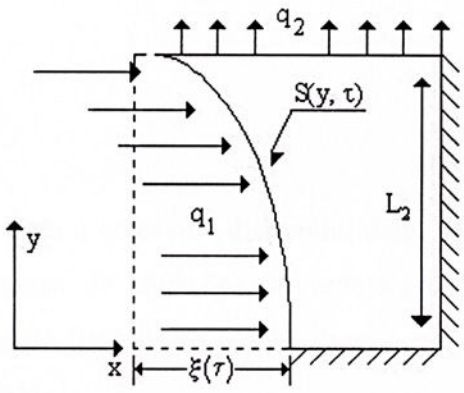


Figura 3.3 – Esquema do período ablativo do problema de ablação bidimensional.

Nas Figuras 3.2 e 3.3 tem-se que:

q_1 e q_2 são os fluxos de calor dimensionais absorvido e perdido, respectivamente.

L_1 e L_2 são as dimensões do modelo nas direções x e y, respectivamente.

$\xi(\tau)$ representa o material ablatado.

$S(y,\tau)$ representa a posição fronteira em ablação.

Para o modelamento do problema foi utilizado o esquema de Stefan, descrito por Lacaze (1967) e Gupta & Kumar (1981), que supõe que o material não se decompõe abaixo de uma temperatura de ablação. A condutividade térmica e o calor específico foram considerados constantes. Na temperatura de ablação haverá perda ou aniquilação da matéria, este processo de mudança de fase absorve um calor ablativo implícito.

Processos difusivos com mudança de fase dos materiais ocorrem em muitos problemas científicos e de engenharia. Eles são conhecidos como problemas de Stefan ou problemas de fronteiras livres (móveis), Tao (1978). Por causa da presença de uma fronteira móvel entre duas fases, o problema é não linear. Vários métodos matemáticos e técnicas têm sido usados para estudar os problemas de fronteira livre.

Segundo Tao (1978), os problemas de fronteiras livres tem sido estudados desde o século XIX por Lamé e Clapeyron em 1831, Neumann em 1860 e Stefan em 1889. Alguns exemplos deste tipo de problemas podem ser enumerados, entre eles: a fusão ou o congelamento de uma combinação de gelo e água, a cristalização de uma liga metálica binária e os problemas de ablação ou dissolução de uma bolha de gás em um líquido.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Á partir dos anos 60, com a crescente disponibilidade de computadores mais potentes, soluções aproximadas de sistemas de equações diferenciais ordinárias puderam ser obtidas. Desde então grandes esforços estão focados no desenvolvimento de soluções numéricas para esta classe de problemas, Cotta (1993).

Em vista disso, métodos analíticos foram, durante anos, preferidos em relação aos métodos numéricos de solução. Se por um lado, soluções numéricas podem ser obtidas mais rapidamente, por outro lado, as soluções analíticas são mais exatas.

Soluções de problemas envolvendo transferência de calor em sólidos com proteção térmica ablativa são apresentados na literatura através de diversos métodos e técnicas tais como: Método de Diferenças Finitas (MDF), Método de Elementos Finitos (MEF), Método Integral do Balanço de Calor (MIBC), entre outros (Chung & Hsiao, 1985; Zien, 1978; Chung, Chang, Hsiao, Chang, 1983). Todas as soluções consideram uma simplificação onde o processo ablativo é considerado um processo de mudança de fase. As Figuras 4.1 a 4.4 exibem uma comparação dos resultados obtidos por Chung & Hsiao (1985), para o problema de ablação unidimensional com diferentes fluxos de calor no contorno. Uma comparação do tempo de início da ablação é exibida na Tabela 4.1.

No caso da ablação, dentre estes vários métodos uma técnica que vem sendo utilizada é a abordagem entálpica, que evita o problema da não linearidade introduzida no problema pelo movimento da fronteira em ablação, Leite (1999).

O problema de fronteira móvel clássico está interessado com a fusão ou congelamento de um material semi-infinito, inicialmente em temperatura constante e existindo o contato com uma temperatura diferente na sua superfície, onde uma mudança de fase toma lugar imediatamente, Tao (1984). A solução deste tipo de problemas tem sido objeto de investigação por muitos pesquisadores.

O problema de ablação por aquecimento de atrito em um sólido semi-infinito foi estudado por Tao (1984). Este estudo incluiu todos os movimentos convectivos causados pela diferença de densidade das várias fases do material.

unesp

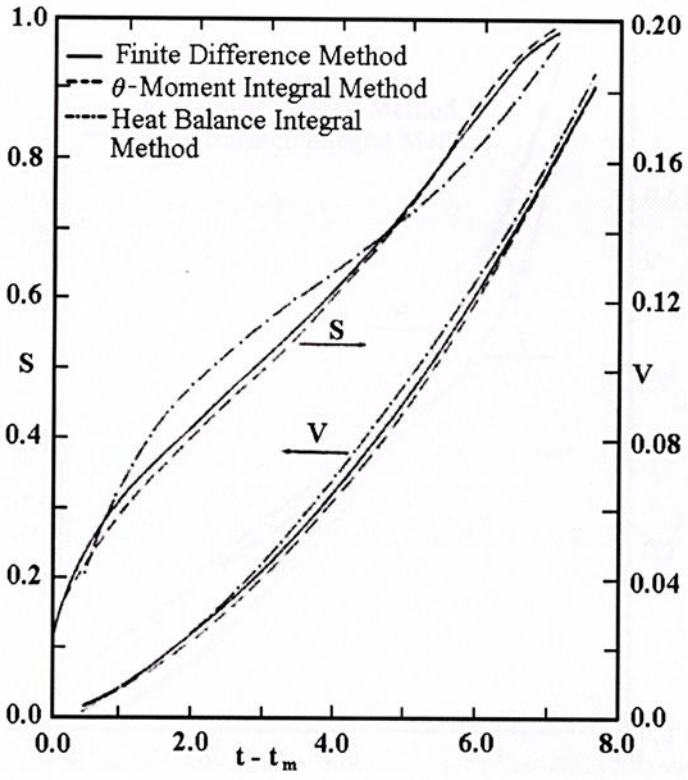


Figura 4.1 – Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 2$, Chung & Hsiao (1985).

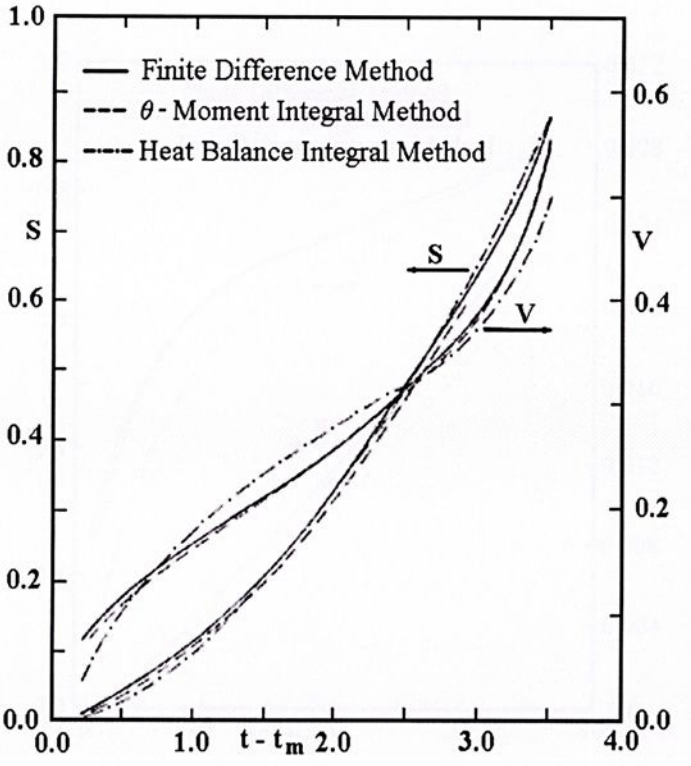


Figura 4.2 – Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 10\tau$, Chung & Hsiao (1985).

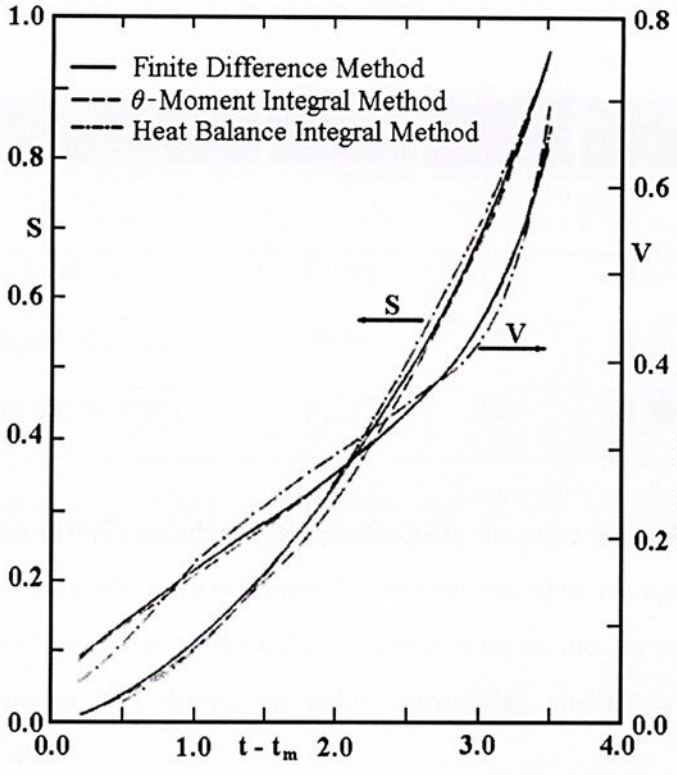


Figura 4.3 – Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 10\tau^2$, Chung & Hsiao (1985).

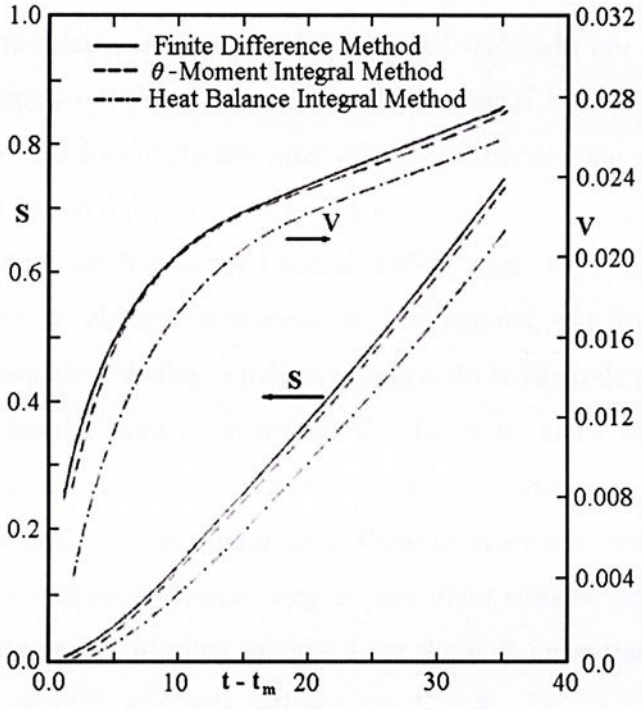


Figura 4.4 – Comparação da espessura e da velocidade ablativas de vários métodos para $Q = 0{,}1.e^{\tau/\tau_r}$, Chung & Hsiao (1985).

Tabela 4.1 – Comparação do tempo de início do período ablativo para vários métodos, Chung & Hsiao (1985).

	$Q=2$	$Q=10\tau$	$Q=10\tau^2$	$Q=0{,}1.e^{\tau/\tau_r}$
	τ_m			
Finite Difference Method	0.195	0.26	0.487	6.50
θ - Moment Integral Method	0.20	0.26	0.485	6.60
Heat Balance Integral Method	0.211	0.26	0.486	6.05

Chung & Hsiao (1985) estudaram a transferência de calor com ablação em placa finita sujeita a fluxos de calor variando com o tempo. Foram empregadas três aproximações diferentes a saber: método integral do balanço de calor, método integral do momento-θ e método de diferenças finitas implícito. Os fluxos de calor transientes considerados foram constante, exponencial e polinomial.

Chung et al. (1983) consideram a condução unidimensional num sólido semi-infinito envolvendo ablação. São consideradas três condições de contorno de fluxo de calor diferentes. Para solução do problema os autores utilizaram o método integral do balanço de calor e o método integral do momento-θ.

Um estudo do problema de fronteiras móveis foi realizado por Tao (1978), no qual é considerado um corpo semi-infinito com uma condição inicial e uma condição de contorno prescritas numa face, no qual é estabelecida uma solução analiticamente exata do problema, que é expressa em termos do tempo e de variáveis similares.

Baseado no modelo idealizado por Landau (1950), Zien (1978) apresentou uma solução integral para o problema de ablação transiente unidimensional, sujeito a um fluxo de calor dependente do tempo. Naquele trabalho, o método integral do balanço de calor é empregado para fornecer soluções aproximadas para o problema. Os fluxos de calor são funções potencial e exponencial por se acreditar que estes simulam mais realisticamente o fenômeno ablativo no ambiente de reentrada atmosférica que o modelo de fluxo de calor constante.

Vallerani (1974) aplicou a técnica integral para obter solução de problemas de ablação simples envolvendo sólidos semi-infinitos sujeitos a um fluxo de calor transiente. A equação que governa o problema é simplificada pela adimensionalização das variáveis com relação aos valores obtidos da ablação e por introduzir valores assintóticos obtidos para tempos

suficientemente longos.

Sunderland & Grosh (1961) realizaram estudos sobre a distribuição de temperatura em regime transiente, em sólidos submetidos a um processo de mudança de fase. Um método de análise é proposto para determinar a distribuição de temperatura em um sólido homogêneo semi-infinito. Inicialmente a temperatura é constante e o sólido é submetido a um processo convectivo de aquecimento súbito, conduzindo-o a uma mudança de fase. O método consiste no cálculo da temperatura antes, durante e depois do processo de mudança de fase.

Goodman (1958) apresenta um método de solução que permite avaliar, para problemas de aquecimento com mudança de fase, a posição da linha de fusão, utilizando o método integral do balanço de calor. Expressões analíticas foram deduzidas para cinco condições:

a) temperatura da fronteira está fixada;
b) fluxo de calor na fronteira é dado;
c) fluxo de calor é gerado aerodinamicamente ou pela radiação;
d) fluxo de calor na fronteira é dado e o fundido é completamente removido;
e) fluxo de calor na fronteira é dado, e no instante t_0 o fundido começa a vaporizar.

Neumann e Stefan obtiveram soluções similares para problemas de fronteiras móveis, (Tao, 1978; Tao, 1984). As equações diferenciais parciais do problema são reduzidas a equações diferenciais ordinárias através de variáveis de similaridade. Mas esta redução é possível apenas em situações especiais. Por isso muitas técnicas matemáticas diferentes e métodos de aproximação têm sido concebidos e aplicados para encontrar a solução destes problemas.

Dentro deste contexto, técnicas de soluções híbridas analíticas-numéricas têm sido desenvolvidas e utilizadas em problemas de difusão-convecção de calor e massa. Dentre estas técnicas destacam-se a Técnica da Transformada Integral Clássica (TTIC) e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG).

4.1 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA (TTIC)

A TTIC consiste em adotar um problema auxiliar de autovalor apropriado, transformando a equação diferencial parcial original em um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias. Esta técnica constitui um procedimento direto e sistemático para a

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

obtenção de soluções exatas, mas é limitada para certas classes transformáveis de problemas que envolvem problemas auxiliares não complicados.

A solução exata de problemas de difusão linear pela TTIC foi relatada por Mikhailov & Özisik (1984), onde os autores apresentam sete classes diferentes de problemas de difusão de calor e massa com várias aplicações práticas.

Pode-se encontrar a solução de um problema particular pela aplicação da TTIC seguindo-se os seguintes passos:

- homogeneizar as equações representativas das fronteiras utilizando, se necessário, mudanças de direção dos eixos de coordenadas;
- adotar um problema auxiliar de autovalor compatível ao problema original, obtendo-se os autovalores e as autofunções;
- dentro das propriedades de ortogonalidade, obter o par transformada integral e inversa apropriado;
- fazer a transformação integral da equação diferencial parcial original e suas condições de contorno;
- resolver o sistema resultante da equação diferencial ordinária desacoplado;
- utilizar a fórmula de inversão estabelecida para construir o potencial completo desejado.

Essa aproximação clássica falha quando um problema de autovalor apropriado, que produz um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias, não pode ser obtido. Da mesma forma, uma solução exata formal pode ser de utilidade limitada quando o problema de autovalor é suficientemente complexo do ponto de vista computacional.

4.2 TÉCNICA DA TRANSFORMDA INTEGRAL GENERALIZADA (TTIG)

Desde o trabalho pioneiro de Özisik & Murray (1974), referindo-se a coeficientes da condição de contorno variável, diversas idéias tem avançado na direção de estender o procedimento da transformação integral para problemas mais complexos.

A partir do trabalho de Mikhailov & Özisik (1984) várias idéias tem conduzido para uma extensão da técnica clássica, que é a TTIG, aplicável a uma classe mais geral de problemas. Por esta técnica escolhe-se um problema auxiliar de autovalor e desenvolve-se um par de

transformada integral apropriado. A equação diferencial parcial original é transformada em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas. Assim a TTIG pode ser aplicada a problemas das seguintes categorias:

- ✓ problemas com coeficientes da equação variável;
- ✓ problemas com coeficientes da condição de contorno variável;
- ✓ problemas com contorno variável;
- ✓ problemas que envolvem dificuldades na solução do problema auxiliar;
- ✓ problemas não lineares.

Diante destas situações os passos básicos para a aplicação da TTIG são:

- escolher um problema auxiliar adaptável que estabeleça uma relação tratável com a equação original, evitando problemas computacionais;
- desenvolver um par transformada integral apropriado;
- aplicar a transformação integral da equação diferencial parcial original que resulte em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acoplado;
- truncar o sistema infinito em uma ordem suficientemente grande, resolvendo-o através de procedimentos numéricos padrão;
- para a construção do potencial desejado utilize a fórmula de inversão.

A TTIG vem sendo utilizado para obter soluções exatas envolvendo problemas de difusão podendo citar (Cotta & Özisik, 1987; Aparecido, Cotta & Özisik, 1989; Diniz, Campos-Silva & Zaparoli, 1991; Diniz & Aparecido, 1990; Diniz, Maia & Zaparoli, 1996).

Cotta (1989) apresenta os procedimentos da transformada integral aplicada a problemas de difusão. A partir de considerações de um sistema básico, o autor utilizou a aproximação generalizada descrevendo a metodologia empregada. A solução numérica completa é obtida resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas.

Diniz (1996) aplicou a TTIG para obter a solução de problemas de difusão unidimensional para três geometrias diferentes. São mostrados os passos utilizados para aplicação da TTIG no qual são obtidas as grandezas de interesse tais como: espessura e velocidade ablativas e distribuição de temperatura.

O estudo de problemas envolvendo ablação com transferência de calor bidimensional

foi realizado por Hsiao & Chung (1984), no qual os autores utilizaram o método integral do balanço de calor modificado. Os dados obtidos foram comparados com uma solução pelo método de diferenças finitas, com boa concordância dos resultados.

A presente pesquisa está baseada no trabalho de Hsiao & Chung (1984). Os autores obtiveram a posição da fronteira ablativa para diferentes condições de contorno e também a perda de material total.

CAPÍTULO 5

MODELO UNIDIMENSIONAL

Para se analisar a física do processo de ablação, considere um modelo simplificado, no qual se tem uma transferência de calor na região do ponto de estagnação de um corpo rombudo (revolução), como ilustrado na Figura 5.1. Esse processo pode ser aproximado a uma transferência de calor unidimensional numa placa plana. Essa aproximação está baseada no fato de que a razão entre a espessura do material ablativo e o raio de curvatura do corpo rombudo ser pequena.

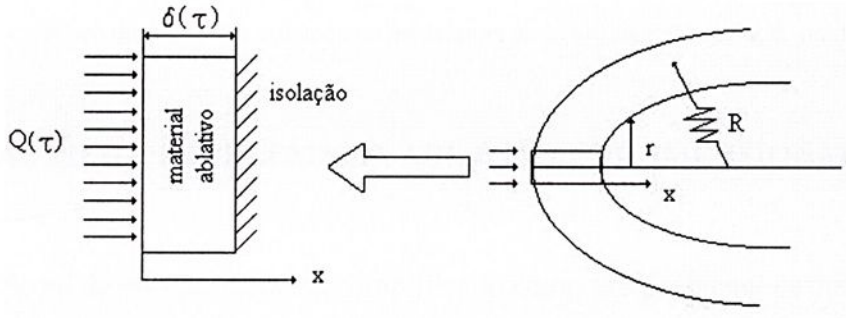


Figura 5.1 – Esquema simplificado do processo de ablação unidimensional na região do ponto de estagnação.

A placa está sujeita a um fluxo de calor transiente em uma das extremidades e isolada termicamente na outra face. Inicialmente a placa se encontra com uma temperatura uniforme T_0.

Devido ao fluxo de calor a placa vai se aquecendo até o instante t_m, onde a temperatura da superfície atinge a temperatura de fusão T_m do material. A partir deste instante inicia-se a fusão do material na fronteira sujeita ao fluxo de calor. O material fundido é arrastado para o meio ambiente pelas forças do escoamento aerodinâmico. Este processo de transferência de calor e massa pode ser modelado como um processo de ablação.

O processo de ablação é melhor descrito se for dividido em dois períodos: um chamado de pré-ablativo, onde o fluxo de calor incidente é conduzido internamente até que a temperatura do material atinja a temperatura de fusão, nesse período não ocorre perda de material; e outro chamado de ablativo que devido o material ter atingido a temperatura de fusão este sofre uma

mudança de fase (fusão ou sublimação).

Na Figura 5.2 é mostrado um esboço da geometria do modelo utilizado na modelagem do problema unidimensional.

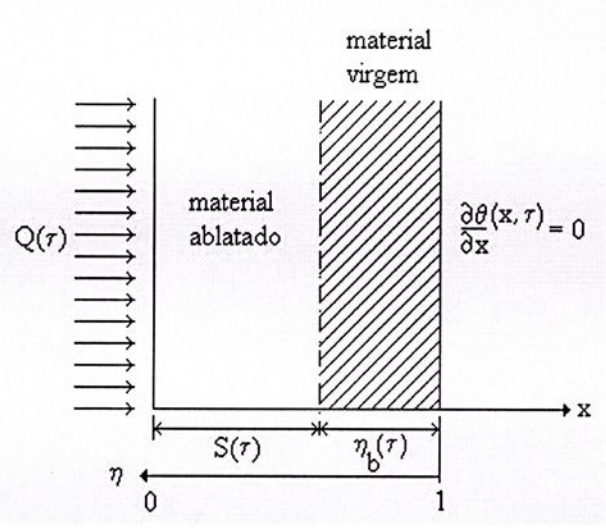


Figura 5.2 – Esboço da geometria utilizada no modelamento do problema de ablação unidimensional.

5.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO UNIDIMENSIONAL

O problema de ablação pode ser simplificado como um problema de condução de calor, no qual se distingue os dois períodos ablativos. Considere a equação na sua forma dimensional:

- ✓ Período pré-ablativo:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \qquad 0 < t < t_f \qquad 0 < x < L \tag{5.1}$$

com condições inicial e de contorno:

$$T(x,t) = T_0 \qquad t = 0 \qquad 0 < x < L \tag{5.2}$$

$$-k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = q_0(t) \qquad x = 0 \tag{5.3}$$

unesp

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad x = L \tag{5.4}$$

✓ Período ablativo:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \qquad t_f < t < \infty \qquad S(t) < x < 1 \tag{5.5}$$

com condições inicial e de contorno:

$$T(x,t) = T_{pa}(x,t_f) \qquad t = t_f \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad x = L \tag{5.7}$$

$$T(x,t) = T_f(x,t) \qquad x = S(t) \tag{5.8}$$

O processo de ablação modelado como mudança de fase produz uma equação de acoplamento da velocidade da fronteira com o gradiente de temperatura, que na sua forma dimensional é:

$$-k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \rho\overline{H}\frac{dS(t)}{dt} = q_0(t) \qquad x = S(\tau) \tag{5.9}$$

Define-se uma temperatura adimensional como:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \tag{5.10}$$

Portanto, tem-se que as equações governantes do problema de ablação unidimensional, na sua forma adimensional, são dadas como:

✓ Período pré-ablativo:



$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial\tau} + L\theta(x,\tau) = 0 \qquad \begin{matrix} 0 < \tau < \tau_f \\ 0 < x < 1 \end{matrix} \tag{5.11}$$

em que τ_f é o instante que se inicia a fusão.

Com condição inicial:

$$\theta(x,\tau) = 0 \qquad \tau = 0 \text{ e } 0 < x < 1 \tag{5.12}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x} = 0 \; ; \; x = 1 \tag{5.13}$$

$$\frac{-\partial\theta(x,\tau)}{\partial x} = Q(\tau) \; ; \; x = 0 \tag{5.14}$$

✓ Período ablativo:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial\tau} + L\theta(x,\tau) = 0 \qquad \begin{matrix} \tau_f < \tau < \infty \\ S(\tau) < x < 1 \end{matrix} \tag{5.15}$$

com condição inicial:

$$\theta(x,\tau) = \theta_{pa}(x,\tau) \qquad \tau = \tau_f \text{ e } 0 < x < 1 \tag{5.16}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x} = 0, \; \mathrm{x} = 1 \tag{5.17}$$

$$\theta(x,\tau) = 1, \; \mathrm{x} = \mathrm{S}(\tau) \tag{5.18}$$

em que $\theta_f(x,\tau)$ é a distribuição de temperatura para o instante τ_f que é determinado no período

pré-ablativo. A condição de acoplamento na interface, resultante do balanço de energia na fronteira em ablação, é:

$$\frac{-\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}+\nu\frac{dS(\tau)}{d\tau}=Q(\tau);\ x=\mathrm{S}(\tau) \tag{5.19}$$

em que $S(\tau)$ e ν são respectivamente a posição da fronteira móvel que é dependente do tempo e o inverso do número de Stefan.

5.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para o desenvolvimento analítico utilizou-se a TTIG, no qual se adotou um operador $L=-\partial(\ )/\partial x^2$ e definiu-se um problema auxiliar de autovalor apropriado. O desenvolvimento analítico detalhado pode ser obtido no apêndice A.

Obtém-se que para o período pré-ablativo, a Equação (5.11) transformada é:

$$\frac{d\widetilde{\theta}_i(\tau)}{d\tau}+\mu_i{}^2\widetilde{\theta}_i(\tau)=Q(\tau) \tag{5.20}$$

com condição inicial:

$$\widetilde{\theta}_i(0)=\int_0^1\psi_i(x)\theta(x,0)dx=0 \tag{5.21}$$

Utilizando um fluxo de calor polinomial do tipo $Q(\tau)=a+b\tau+c\tau^2$ tem-se que a solução da Equação (5.20) é:

$$\widetilde{\theta}_i(\tau)=\frac{1}{\mu_i{}^2}\left[a+b\left(\tau-\frac{1}{\mu_i{}^2}\right)+c\left(\tau^2-\frac{2\tau}{\mu_i{}^2}+\frac{2}{\mu_i{}^4}\right)-\left(a-\frac{b}{\mu_i{}^2}+\frac{2c}{\mu_i{}^4}\right)\exp(-\mu_i{}^2\tau)\right] \tag{5.22}$$

A distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é dada por:

$$\theta(x,\tau) = \theta_{av}(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{N_i} \widetilde{\theta}_i(\tau) \tag{5.23}$$

em que $\theta_{av}(\tau)$ é o potencial médio, por se tratar de um problema em que todas as condições de contorno são do 2° tipo correspondente ao índice $i = 0$, Mikhailov & Özisik (1984):

$$\theta_{av}(\tau) = a\tau + \frac{b\tau^2}{2} + \frac{c\tau^3}{3} \tag{5.24}$$

Portanto tem-se que a distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é:

$$\theta(x,\tau) = \left(a\tau + \frac{b\tau^2}{2} + \frac{c\tau^3}{3} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} 2\cos(\mu_i x) \frac{1}{\mu_i^{\,2}} \left\{ \left[a + b\left(\tau - \frac{1}{\mu_i^{\,2}} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c\left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\mu_i^{\,2}} + \frac{2}{\mu_i^{\,4}} \right) \right] - \left[a - \frac{b}{\mu_i^{\,2}} + \frac{2c}{\mu_{i^4}} \right] \exp(-\mu_i^{\,2}\tau) \right\} \tag{5.25}$$

Resolvida a fase pré-ablativa, inicia-se a solução da fase ablativa, que começa para o tempo $\tau > \tau_f$. A condição inicial do período ablativo é a distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para o instante $\tau = \tau_f$. Uma mudança de variável nas Equações (5.15) a (5.18) se faz necessária para se homogeneizar as condições de contorno. Definindo-se:

$$\theta^*(\eta,\tau) = \theta(x,\tau) - 1 \qquad \begin{matrix} \mathrm{S}(\tau) < \eta < 1 \\ \tau > \tau_f \end{matrix} \tag{5.26}$$

em que $\eta = 1 - x$ e $x_b = S(\tau)$ que indica a posição da fronteira, como mostrado na Figura 5.2. Portanto tem-se que a Equação (5.15) na nova variável é:

$$\frac{\partial \theta^*(\eta,\tau)}{\partial \tau} + L\theta^*(\eta,\tau) = 0 \qquad \tau > \tau_f,\ 0 < \eta < \eta_b(\tau) \tag{5.27}$$

com condição inicial:

$$\theta^*(\eta,\tau_f) = \theta(1-\eta,\tau_f) - 1 \tag{5.28}$$

e com condições de contorno:

$$\theta^*(\eta,\tau) = 0;\ \eta = \eta_b(\tau) \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta} = 0;\ \eta = 0 \tag{5.30}$$

A equação de restrição no acoplamento, Equação (5.19), na nova variável torna-se:

$$\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta} - \nu\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = Q(\tau);\ \eta = \eta_b(\tau) \tag{5.31}$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado na fase pré-ablativa obtém-se a equação transformada da fase ablativa:

$$\frac{d\tilde{\theta}_i^*(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(\tau)\tilde{\theta}_j^*(\tau) + \mu_i^2(\tau)\tilde{\theta}_i^*(\tau) = 0 \tag{5.32}$$

com condição inicial transformada:

$$\tilde{\theta}_i^*(\tau_f) = \frac{2\sqrt{2}}{(2i-1)\pi}(-1)^{i+1}\left[\theta_{av}(\tau_f) - 1\right] + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}(2i-1)(-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\theta}_k(\tau_f)}{(2i-1)^2 - 4k^2} \tag{5.33}$$

em que:

$$\tilde{\theta}_k(\tau_f) = \frac{1}{\mu_k^2}\left[a + b\left(\tau_f - \frac{1}{\mu_k^2}\right) + c\left(\tau_f^2 - \frac{2\tau_f}{\mu_k^2} + \frac{2}{\mu_k^4}\right) - \left(a - \frac{b}{\mu_k^2} + \frac{2c}{\mu_k^4}\right)\exp(-\mu_k^2\tau_f)\right]$$

$$A_{ij} = \begin{cases} 0;\ para\ i = j,\ (Diniz, 1996) \\ \dfrac{1}{2\eta_b(\tau)}\dfrac{\partial\eta_b(\tau)}{\partial\tau}\dfrac{(2j-1)(2i-1)(-1)^{i+j}}{(i^2-i)-(j^2-j)};\ para\ i \neq j \end{cases}$$

A equação de restrição transformada é obtida substituindo a equação da transformada inversa na equação de restrição, obtendo-se assim:

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = \frac{\sqrt{2}}{2\nu}\frac{\pi}{[\eta_b(\tau)]^{3/2}}\sum_{j=1}^{\infty}(2j-1)\tilde{\theta}_j^{*}(\tau)(-1)^j - \frac{Q(\tau)}{\nu} \tag{5.34}$$

O sistema formado pelas Equações (5.32) e (5.34) pode ser resolvido para se obter a solução para o problema de transferência de calor unidimensional em corpos com proteção térmica ablativa, no período ablativo. Estas equações formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas, sendo a Equação (5.33) a condição inicial.

5.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Foi realizada a implementação de um algoritmo em linguagem FORTRAN para a solução do sistema solução formado pelas Eqs. (5.32) e (5.34). Para tanto foi necessário o truncamento deste sistema infinito em um sistema finito de ordem N. Fazendo N suficientemente grande obtemos a solução do sistema.

Na análise numérica utilizou-se as sub-rotinas disponíveis do IMSL (1979), principalmente as rotinas DGEAR e DCADRE. Abaixo são apresentado os resultados obtidos para a condição de contorno $Q=2$, Kurokawa et al. (2002). A Figura 5.3 apresenta uma comparação dos resultados obtidos pela TTIG com outros métodos, Método de Diferenças Finitas (MDF), Método Integral do Balanço de Calor (MIBC) e Método Integral do Momento-θ (MIM-θ) para a espessura ablativa.

A Figura 5.3 representa o avanço da fronteira em ablação. A espessura ablativa está plotada em função da diferença de tempos. O escopo desta apresentação não é fazer uma comparação de métodos de solução e sim apresentar o comportamento da fronteira ablativa frente às altas taxas de aquecimento. Observando a Figura 5.3 nota-se que a fronteira é consumida numa forma quase linear.

A Figura 5.4 apresenta uma comparação dos valores obtidos pela TTIG com outros métodos para a velocidade ablativa. Como dito antes o objetivo de apresentar estes resultados não é comparar os métodos de solução. Na Figura 5.4 observa-se que a velocidade tende a aumentar com a retirada de material que pode estar relacionado com os diversos mecanismos que



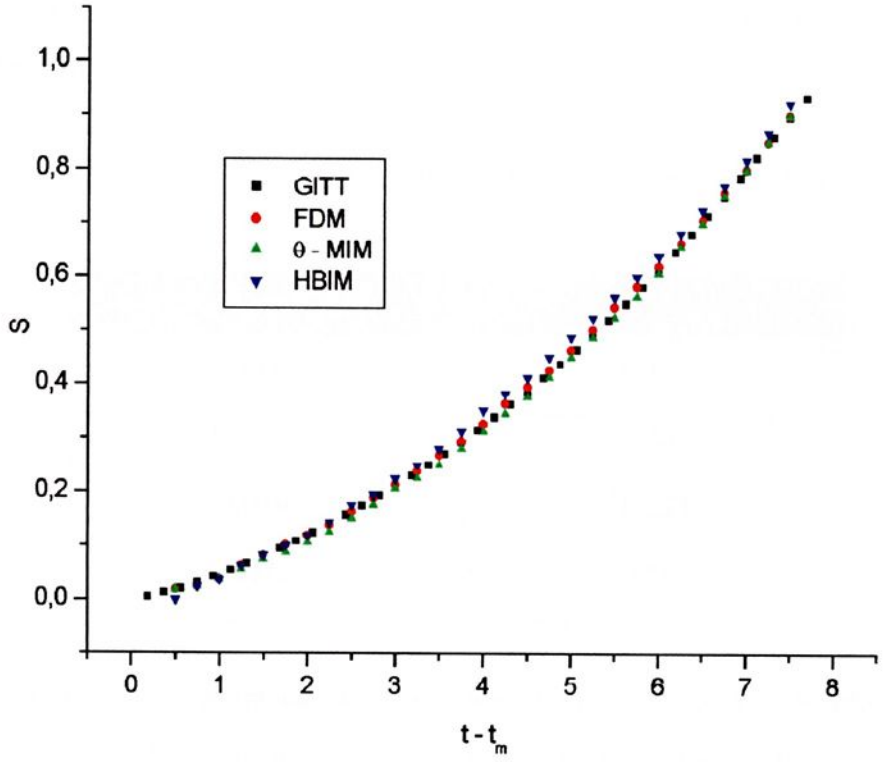


Figura 5.3 – Variação da espessura ablativa com a diferença de tempos para um fluxo de calor especificado $Q = 2$.

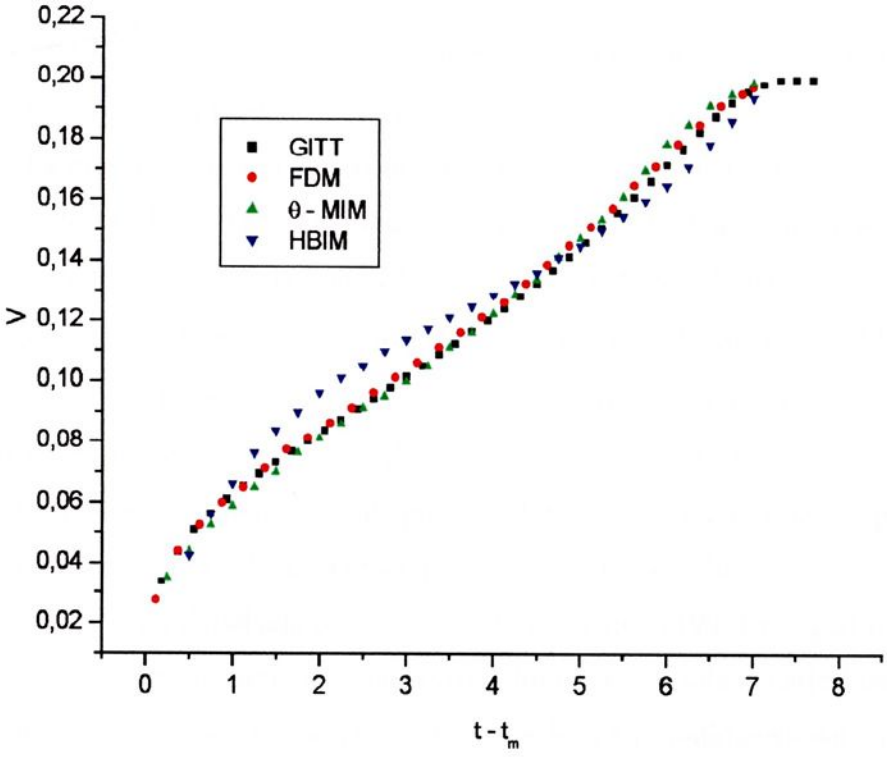


Figura 5.4 – Variação da velocidade ablativa em função da diferença de tempos para um fluxo de calor especificado $Q = 2$.

não foram englobados nesta análise uma vez que se considerou um processo de mudança de fase com perda de massa.

Tabela 5.1 – Comparação do tempo de início da ablação obtido por diferentes métodos.

Método de solução	τ_m
MDF	0,195
MIM-θ	0,20
MIBC	0,211
TTIG	0,197

Na Tabela 5.1 é apresentada uma comparação para o tempo de ablação τ_m obtido por metodologias diferentes. Notamos que os valores apresentam uma ligeira discordância.

Outros resultados podem ser obtidos em Kurokawa et al. (2001), onde é apresentado várias condições de contorno diferentes tais como um fluxo polinomial com $Q=2$, $Q=2+\tau$ e $Q=2+\tau+\tau^2$; e um fluxo exponencial. Neste artigo foi observado que com o aumento do fluxo de calor a velocidade ablativa tende a aumentar, como era esperado.

Os perfis de temperatura da fase pré-ablativa e da fase ablativa são apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente. Nas Figuras 5.5 e 5.6 tem-se a temperatura adimensional em função da coordenada $\eta=1-x$. Pela Figura 5.5 se observa uma tendência da temperatura atingir o valor 1, na posição $\eta=1$, ou seja, $x=0$. Portanto o tempo de início de ablação é obtido quando a temperatura adimensional atingir o valor 1 na fronteira aquecida, $x=0$. Este tempo como comentado anteriormente será utilizado como condição inicial do período ablativo. Já na Figura 5.6 a temperatura adimensional tende para o valor 1, ou seja temos que na posição $x=1$ a temperatura dimensional da face isolada tende para a temperatura de fusão.

Uma análise mais detalhada pode ser obtida em Diniz (1996) no qual o autor faz um estudo do fenômeno ablativo para três geometrias diferentes, a saber, cartesiana, cilíndrica e esférica. Nesta análise, é considerada uma transferência de calor unidimensional e utilizando-se a TTIG para se obter a solução deste problema. Os resultados obtidos foram comparados com a literatura disponível com boa concordância dos mesmos.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

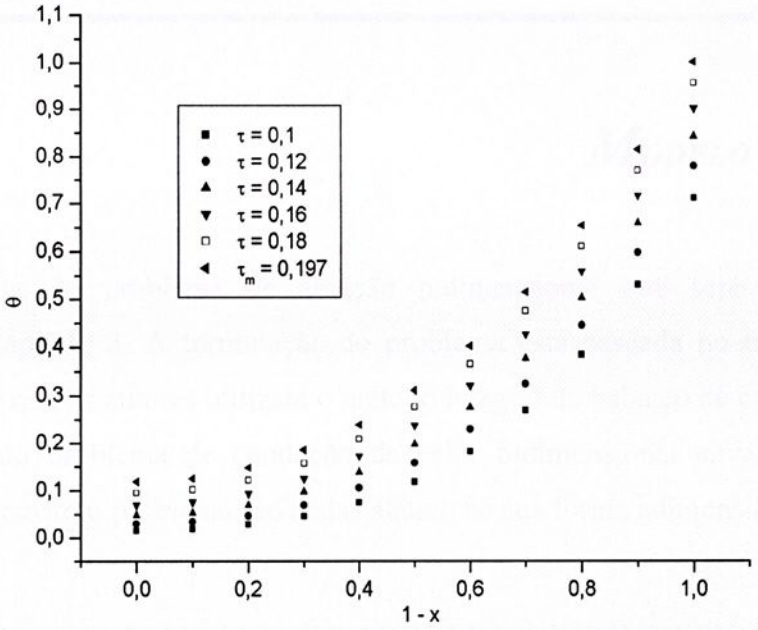


Figura 5.5 – Perfil de temperatura da fase pré-ablativa do problema unidimensional para a condição de contorno $Q = 2$.

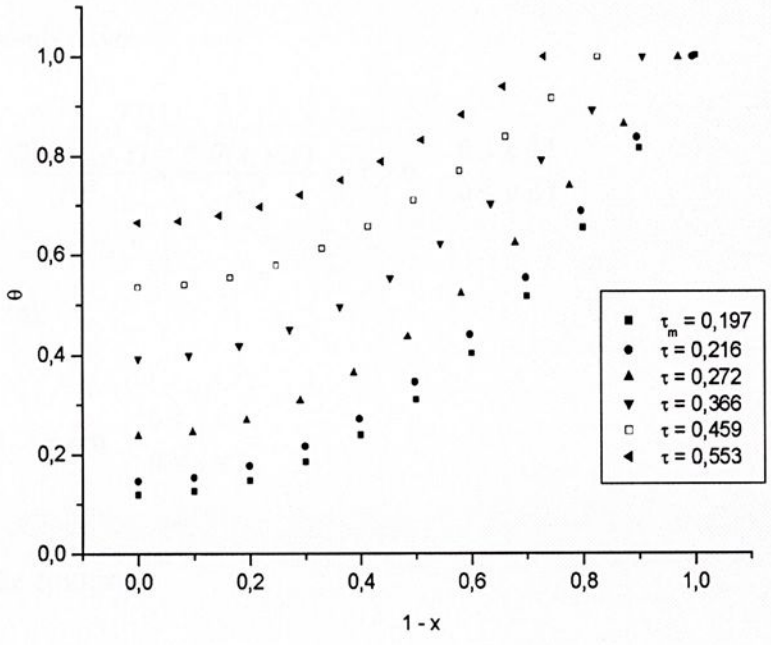


Figura 5.6 – Perfil de temperatura da fase ablativa do problema unidimensional para a condição de contorno $Q = 2$.

CAPÍTULO 6

MODELO BIDIMENSIONAL

O modelo do problema de ablação bidimensional que será utilizado é aquele apresentado no Capítulo 3. A formulação do problema está baseada no trabalho de Hsiao & Chung (1984), em que os autores utilizam o método integral do balanço de calor modificado para obter a solução do problema de condução de calor bidimensional envolvendo ablação. As equações que governam o problema são dadas abaixo na sua forma adimensional.

6.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA BIDIMENSIONAL

Um ponto que se deve salientar é que neste trabalho foi utilizado o esquema de Stefan, no qual o material não se decompõe abaixo de uma certa temperatura. Portanto tem-se que a formulação matemática do problema é dada por:

✓ Período pré-ablativo:

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial y^2} \qquad \tau>0 \qquad \begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le l\end{matrix} \tag{6.1}$$

com condição inicial:

$$\theta(x,y,\tau)=0 \qquad \tau=0 \qquad \begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le l\end{matrix} \tag{6.2}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial x}=-Q_1 \qquad x=0 \qquad 0\le y\le l \tag{6.3}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial x}=0 \qquad x=1 \qquad 0\le y\le l \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=0 \qquad y=0 \qquad 0\le x\le 1 \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=-Q_2 \qquad y=l \qquad 0\le x\le 1 \tag{6.6}$$

✓ Período ablativo:

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial y^2} \qquad \tau>\tau_f \qquad \begin{matrix} S\le x\le 1 \\ 0\le y\le l \end{matrix} \tag{6.7}$$

com condição inicial:

$$\theta(x,y,\tau)=\theta_{in}(x,y,\tau) \qquad \tau=\tau_f \qquad \begin{matrix} S\le x\le 1 \\ 0\le y\le l \end{matrix} \tag{6.8}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial x}=0 \qquad x=1 \qquad 0\le y\le l \tag{6.9}$$

$$\theta(x,y,\tau)=1 \qquad x=S(y,\tau) \qquad 0\le y\le l \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=0 \qquad y=0 \qquad S\le x\le 1 \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=-Q_2 \qquad y=l \qquad S\le x\le 1 \tag{6.12}$$

em que $\theta_{in}(x,y,\tau)$ é a distribuição de temperatura, obtida no período pré-ablativo, no tempo ablativo τ_f. Devido ao movimento da fronteira pelo processo de mudança de fase tem-se uma

equação da velocidade da fronteira, chamada equação de restrição no acoplamento, definida como:

$$-\left[1+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}+\nu\frac{\partial S}{\partial \tau}=Q_1 \qquad x=S(y,\tau) \tag{6.13}$$

que é a equação de balanço de calor na fronteira ablativa obtida por Hsiao (1983), que é descrito por Hsiao & Chung (1984). $S(y,\tau)$ e ν são respectivamente a posição da fronteira em ablação e o inverso do número de Stefan.

6.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Na solução analítica foi utilizada a TTIG. Nesta seção, apresenta-se apenas a solução final sem detalhamento, o desenvolvimento completo encontra-se no Apêndice B. O potencial de temperatura do período pré-ablativo é considerado como uma superposição do tipo:

$$\theta(x,y,\tau)=\theta_1(x,y,\tau)+\theta_2(x,y,\tau) \tag{6.14}$$

Substituindo a Equação (6.14) na Equação (6.1) obteve-se dois problemas: um em $\theta_1(x,y,\tau)$ e outro em $\theta_2(x,y,\tau)$. Para se aplicar a TTIG, há necessidade de se homogeneizar as condições de contorno para os dois potenciais e foi realizado o procedimento descrito no Capítulo 4. Para tanto se define um problema auxiliar de autovalor apropriado e através da definição do par transformada integral e inversa se obtêm a solução. Portanto, tem-se que para $\theta_1(x,y,\tau)$ a solução é:

$$\theta_1(x,y,\tau)=Q_1\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+A_1B_1\tilde{\tilde{\theta}}_{11}(\tau)+A_1\sum_{m=2}^{\infty}B_m\cos(\lambda_m x)\tilde{\tilde{\theta}}_{1m}(\tau) \tag{6.15}$$

em que:

$$A_i=\sqrt{\frac{2}{l(1+\delta_{i1})}}$$

$$B_m = \sqrt{\frac{2}{(1+\delta_{m1})}}$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ é o delta de Kronecker.

Para se obter os valores de $\hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)$ deve-se resolver a equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)}{\partial \tau} + (\mu_i{}^2 + \lambda_m{}^2)\hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) = \hat{\tilde{P}}_{im}(\tau) \tag{6.16}$$

com condição inicial:

$$\hat{\tilde{\theta}}_{im}(0) = \hat{\tilde{f}}_{im} \tag{6.17}$$

em que:

$$\hat{\tilde{P}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{P}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1 \int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)P_1(x,y,\tau)dydx$$

$$\hat{\tilde{f}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{f}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1 \int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)f_1(x,y)dydx$$

Cuja solução da Equação (6.16) resulta em:

$$\hat{\tilde{\theta}}_{11}(\tau) = \exp[-(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]\left\{\frac{\sqrt{l}}{3}Q_1(0) + \sqrt{l}\left[\int_0^\tau Q_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3}\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]d\tau\right]\right\} \tag{6.18}$$

$$\hat{\tilde{\theta}}_{1m}(\tau) = \exp[-(\mu_1{}^2 + \lambda_m{}^2)\tau]\left[-\sqrt{2l}Q_1(0)\frac{1}{\lambda_m{}^2} - \frac{\sqrt{2l}}{\lambda_m{}^2}\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_m{}^2)\tau]d\tau\right] \tag{6.19}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Para $\theta_2(x,y,\tau)$ a solução é do tipo:

$$\theta_2(x,y,\tau) = Q_2\frac{y^2}{2l} + A_1B_1\hat{\tilde{Z}}_{11}(\tau) + B_1\sum_{i=2}^{\infty}A_i\cos(\mu_i y)\hat{\tilde{Z}}_{i1}(\tau) \tag{6.20}$$

em que os coeficientes A_i e B_i são iguais aos definidos para $\theta_1(x,y,\tau)$

Para se obter os valores de $\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau)$ deve-se resolver a equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau)}{\partial\tau} + ({\mu_i}^2 + {\lambda_m}^2)\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau) = \hat{\tilde{S}}_{im}(\tau) \tag{6.21}$$

com condição inicial:

$$\hat{\tilde{Z}}_{im}(0) = \hat{\tilde{h}}_{im}(\tau) \tag{6.22}$$

em que:

$$\hat{\tilde{S}}_{im}(\tau) = \int_0^1\tilde{S}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1\int_0^l P_2(x,y,\tau)\psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)dydx$$

$$\hat{\tilde{h}}_{im}(\tau) = \int_0^1\tilde{h}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1\int_0^l f_2(x,y)\psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)dydx$$

Cuja solução da Equação (6.21) resulta:

$$\hat{\tilde{Z}}_{11}(\tau) = \exp[-({\mu_1}^2 + {\lambda_1}^2)\tau]\left\{\sqrt{l}Q_2(0)\frac{l}{6} + \sqrt{l}\left[-\frac{1}{l}\int_0^\tau Q_2(\tau)\exp[({\mu_1}^2 + {\lambda_1}^2)\tau]d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{l}{6}\int_0^\tau\dot{Q}_2(\tau)\exp[({\mu_1}^2 + {\lambda_1}^2)\tau]d\tau\right]\right\} \tag{6.23}$$

$$\hat{\tilde{Z}}_{i1}(\tau) = \exp[-(\mu_i^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]\left[\sqrt{2l}Q_2(0)\frac{l}{\mu_i^{\,2}}\cos(\mu_i^{\bullet}) + \sqrt{2l}\,\frac{l}{\mu_i^{\,2}}\cos(\mu_i^{\bullet})\int_0^{\tau}\dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_i^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau\right] \tag{6.24}$$

Portanto tem-se que a distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é dada por:

$$\begin{aligned}\theta(x,y,\tau) &= Q_1(\tau)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - Q_2(\tau)\frac{y^2}{2l} + \frac{1}{\sqrt{l}}\exp[-(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]\left\{\frac{\sqrt{l}}{3}Q_1(0) + \sqrt{l}Q_2(0)\frac{l}{6} + \right.\\ &+ \sqrt{l}\left[\int_0^{\tau}Q_1(\tau)\exp[(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau + \frac{1}{3}\int_0^{\tau}\dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau\right] +\\ &\left. + \sqrt{l}\left[-\frac{1}{l}\int_0^{\tau}Q_2(\tau)\exp[(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau + \frac{l}{6}\int_0^{\tau}\dot{Q}_2(\tau)e^{(\mu_1^{\,2}+\lambda_1^{\,2})\tau}d\tau\right]\right\} +\\ &- \frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{m=2}^{\infty}\sqrt{2}\cos(\lambda_m x)\exp[-(\mu_1^{\,2} + \lambda_m^{\,2})\tau]\frac{\sqrt{2l}}{\lambda_m^{\,2}}\left[Q_1(0) + \int_0^{\tau}\dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1^{\,2} + \lambda_m^{\,2})\tau]d\tau\right] +\\ &+ \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{i=2}^{\infty}\cos(\mu_i y)\exp[-(\mu_i^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]\frac{l\sqrt{2l}}{\mu_i^{\,2}}\cos(\mu_i^{\bullet})\left[Q_2(0) + \int_0^{\tau}\dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_i^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau\right]\end{aligned} \tag{6.25}$$

Compactando a Equação (6.25) tem-se:

$$\begin{aligned}\theta(x,y,\tau) &= \left[\frac{Q_1(0)}{3} + \frac{l}{6}Q_2(0) + I_{1\tau} + \frac{1}{3}I_{2\tau} - \frac{1}{l}I_{4\tau} + \frac{l}{6}I_{5\tau}\right]\exp[-(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau] +\\ &- 2\sum_{m=2}^{\infty}\cos(\lambda_m x)\frac{1}{\lambda_m^{\,2}}\exp[-(\mu_1^{\,2} + \lambda_m^{\,2})\tau][Q_1(0) + I_{3\tau}] + Q_1(\tau)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - Q_2(\tau)\frac{y^2}{2l} +\\ &+ 2l\sum_{i=2}^{\infty}\cos(\mu_i^{\bullet})\frac{1}{\mu_i^{\,2}}\cos(\mu_i y)\exp[-(\mu_i^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau][Q_2(0) + I_{6\tau}]\end{aligned} \tag{6.26}$$

em que:

$$\mu_i^{\bullet} = \mu_i l$$

$$I_{1\tau} = \int_0^{\tau}Q_1(\tau)\exp[(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$I_{2\tau} = \int_0^{\tau} \dot{Q}_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau$$

$$I_{3\tau} = \int_0^{\tau} \dot{Q}_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_m^2)\tau] d\tau$$

$$I_{4\tau} = \int_0^{\tau} Q_2(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau$$

$$I_{5\tau} = \int_0^{\tau} \dot{Q}_2(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau$$

$$I_{6\tau} = \int_0^{\tau} \dot{Q}_2(\tau) \exp[(\mu_i^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau$$

Os fluxos de calor podem ser polinomiais, exponenciais ou constantes, por isso foram deixados genéricos.

Concluído o período pré-ablativo passa-se a resolver o período ablativo, no qual um dos parâmetros determinado no período pré-ablativo, o tempo ablativo $\tau = \tau_f$, é a condição inicial do período ablativo.

Foi realizada uma mudança de variável nas Equações (6.7) a (6.12) a fim de se homogeneizar as condições de contorno. Desta forma define-se uma nova variável como:

$$\theta^*(x, y, \tau) = \theta(x, y, \tau) - 1 \qquad \begin{matrix} S(y,\tau) \le x \le 1 \\ \tau > \tau_f \end{matrix} \tag{6.27}$$

e também foi realizado uma mudança de direção no eixo x, sendo a nova variável:

$$\eta = 1 - x \tag{6.28}$$

em que a posição da fronteira ablativa, definida por Hsiao & Chung (1984), é denotado por $x = S(y, \tau)$, sendo:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$S = S(y,\tau) = \xi\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\frac{y}{l}\right) \tag{6.29}$$

em que ξ representa a espessura ablativa ao longo do eixo x, e é uma função apenas do tempo.

Pela aplicação da TTIG obtém-se que a equação diferencial ordinária, obtida pela transformação da equação diferencial parcial, é:

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau)}{\partial \tau} + {\mu_k}^2 \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l A_{ij} M_k(y,\tau) M_m(y,\tau) dy \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) +$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l B_{ij} M_k(y,\tau)\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial y} dy \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l {\lambda_i}^2(y,\tau) M_k(y,\tau) M_m(y,\tau) dy \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} M_k(l,\tau) M_m(l,\tau) B_{ij}(l,\tau) \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{ij}(0,\tau) M_k(0,\tau) M_m(0,\tau) \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) +$$

$$+ M_k(l,\tau) f_i(l,\tau) Q_2(\tau) \tag{6.30}$$

Compactando a Equação (6.30), na forma matricial, tem-se:

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E_{ijkm} \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) = \hat{\tilde{f}}_{ik} \tag{6.31}$$

em que:

$$E_{ijkm} = \delta_{ij}\delta_{km}{\mu_k}^2 + \int_0^l \left[A_{ij} M_k(y,\tau) M_m(y,\tau) - B_{ij} M_k(y,\tau)\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial y}\right] dy +$$

$$+ \delta_{ij}\int_0^l {\lambda_i}^2(y,\tau) M_k(y,\tau) M_m(y,\tau) dy + \frac{1}{2} B_{ij}(l,\tau) M_k(l,\tau) M_m(l,\tau) - \frac{1}{2} B_{ij}(0,\tau) M_k(0,\tau) M_m(0,\tau)$$

$$\hat{\tilde{f}}_{ik} = M_k(l,\tau) f_i(l,\tau) Q_2(\tau)$$

A equação de restrição no acoplamento transformada é:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\left[1+\left(\frac{\xi}{l}\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2\right]\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}}\frac{\lambda_i^{\bullet}}{\overline{\eta}_b^{3/2}}(-1)^i\hat{\hat{\theta}}_{i1}^{\bullet}(\tau)-\nu\frac{d\overline{\eta}_b}{d\tau}=Q_1 l \tag{6.32}$$

em que:

$$\overline{\eta}_b(\tau)=\int_0^l \eta(y,\tau)dy$$

Sendo a condição inicial transformada:

$$\hat{\hat{\theta}}_{ik}^{\bullet}(\tau)=\hat{\hat{\varphi}}_{ik}(\tau)-\hat{\hat{\gamma}}_{ik}(\tau) \tag{6.33}$$

em que:

$$\hat{\hat{\varphi}}_{ik}(\tau)=\int_0^l M_k(y,\tau)\tilde{\varphi}_i(y,\tau)dy$$

$$\hat{\hat{\gamma}}_{ik}(\tau)=\int_0^l M_k(y,\tau)\tilde{\gamma}_i(y,\tau)dy$$

Portanto, tem-se que as Equações (6.31) e (6.32) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas que é a solução para o problema de difusão bidimensional em corpos com proteção térmica ablativa. A Equação (6.33) é a condição inicial do sistema solução.

6.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Foi implementado um programa computacional em linguagem FORTRAN para solução do sistema solução. Inicialmente foi implementado a fase pré-ablativa no qual objetiva-se determinar uma condição inicial para $\theta(x,y,\tau)$ no período ablativo, ou seja, o tempo de início da ablação $\tau=\tau_f$ e também a distribuição de temperatura do período pré-ablativo.



O período pré-ablativo continua até que temperatura adimensional média, definida pela Equação 6.34, seja igual a 1. O instante em que isto ocorre é o tempo de início da ablação $\tau = \tau_f$, como é mostrado nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4. A distribuição de temperatura $\theta(x,y,\tau)$ no tempo $\tau = \tau_f$ é a condição inicial do período ablativo.

$$\phi(x,\tau) = \int_0^l \theta(x,y,\tau)dy \tag{6.34}$$

Sendo $\phi(x,\tau)$ a distribuição de temperatura média, tem-se que o período ablativo inicia-se no instante em que $\theta(x,y,\tau)$ é igual a 1. Portanto, considerando apenas o valor de $\phi(x,\tau)$ em $x = 0$, na superfície aquecida, como sendo de interesse para se determinar o tempo de início da ablação.

Considerando um fluxo de calor polinomial, $Q_1(\tau) = a + b\tau + c\tau^2$ e $Q_2(\tau) = p + q\tau + r\tau^2$, as integrais que aparecem na distribuição de temperatura são obtidas através de uma simples integração por partes.

As Figuras 6.1 e 6.2 comparam o valor de $\phi(x,\tau)$ obtido pela TTIG com o método integral do balanço de calor e a transformada de Laplace. A Figura 6.1 representa o caso em que as condições de contorno são $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$. Já na Figura 6.2, as condições de contorno são $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$. Isto significa que o fluxo de calor perdido foi diminuído pela metade, ou seja, uma parte do calor está sendo armazenada ou transformada.

As Tabelas 6.1 e 6.2 apresentam uma comparação do tempo de ablação obtido pela TTIG com outras técnicas para as duas condições de contorno.

Tabela 6.1 – Comparação dos tempos de ablação para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$.

Método de solução	τ_f x 100
Solução Integral do Balanço de Calor	25,36
Solução pela Transformada de Laplace	24,65
Técnica da Transformada Integral Generalizada	24,70

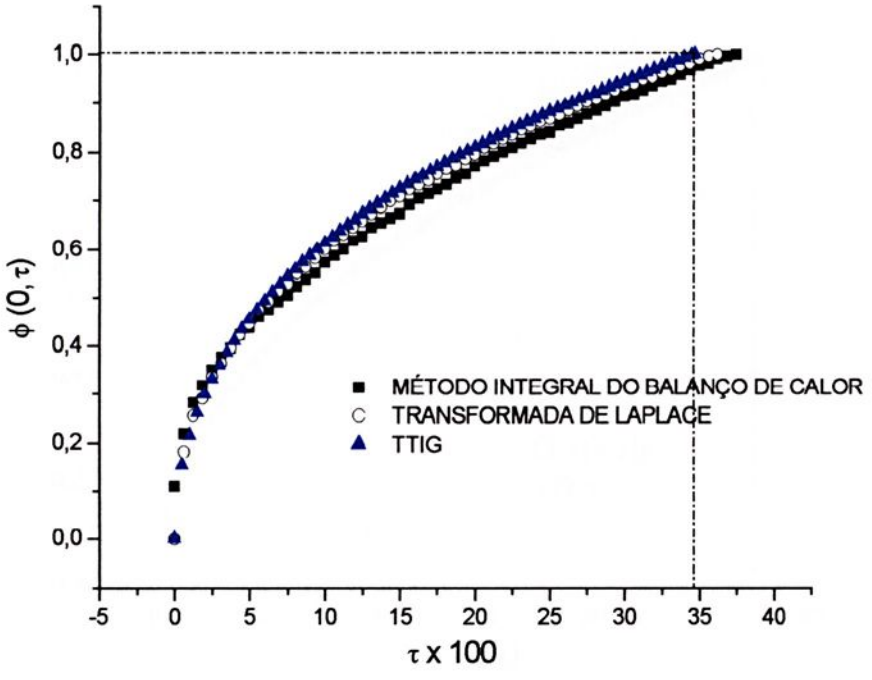


Figura 6.1 – Comparação de ϕ obtida por três metodologias diferentes para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$.

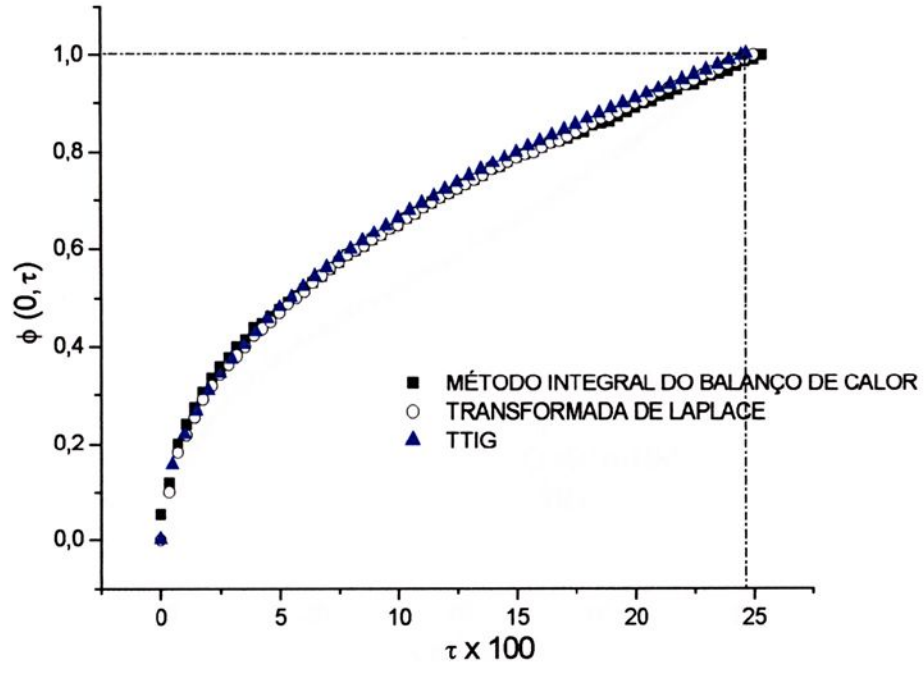


Figura 6.2 – Comparação de ϕ obtida por três metodologias diferentes para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$.

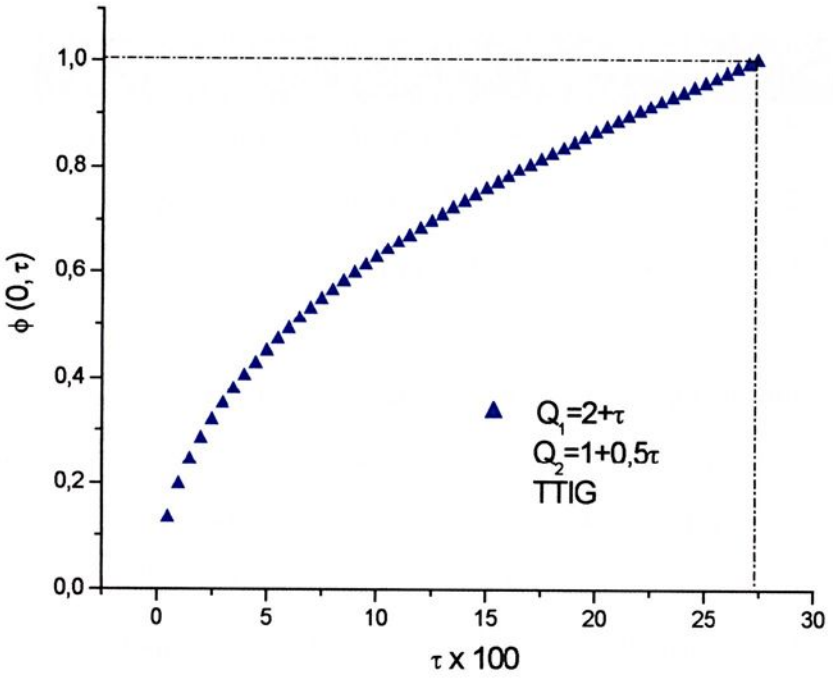


Figura 6.3 – Determinação do tempo de ablação para a condição de contorno $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$.

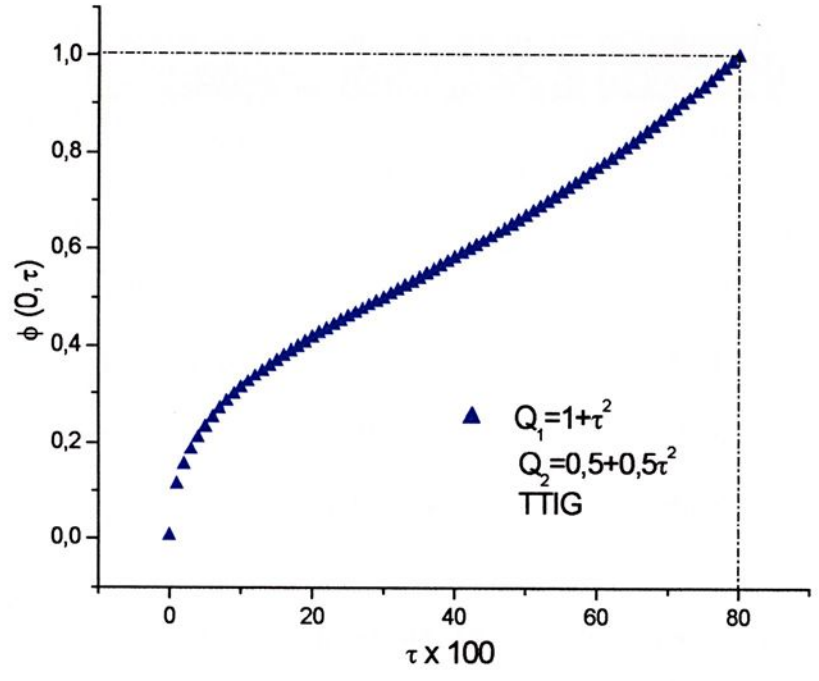


Figura 6.4 – Determinação do tempo de ablação para a condição de contorno $Q_1 = 1 + \tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$.

Tabela 6.2 – Comparação dos tempos de ablação para $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$.

Método de solução	τ_f x 100
Solução Integral do Balanço de Calor	37,50
Solução pela Transformada de Laplace	36,25
Técnica da Transformada Integral Generalizada	34,70

As Figuras 6.3 e 6.4 ilustram a determinação do tempo de ablação τ_f para duas condições de contorno variáveis no tempo. Na Figura 6.3 tem-se que os fluxos de calor são $Q_1 = 2+\tau$ e $Q_2 = 1+0{,}5\tau$, e na Figura 6.4 $Q_1 = 1+\tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5+0{,}5\tau^2$.

Considerando o fluxo de calor $Q_2 = 0$, tem-se o problema de ablação unidimensional. Na Figura 6.5 é apresentado o caso em que as condições de contorno são $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$. Já na Figura 6.6 tem-se o caso $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 0$. Na Tabela 6.3 é feita uma comparação entre os tempos de início da ablação com as diferentes condições de contorno obtidas pela TTIG.

Tabela 6.3 – Comparação dos tempos de ablação para diferentes condições de contorno.

Condições de contorno	τ_f x 100
$Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$	34,70
$Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$	24,70
$Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$	19,60
$Q_1 = 4$ e $Q_2 = 0$	5,00
$Q_1 = 2+\tau$ e $Q_2 = 1+0{,}5\tau$	27,40
$Q_1 = 1+\tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5+0{,}5\tau^2$	80,00

Comparando o tempo de início da fase ablativa obtida considerando $Q_2 = 0$ é praticamente o mesmo obtido no caso unidimensional, o que era de se esperar, uma vez que com essa condição de contorno recai-se no problema unidimensional.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

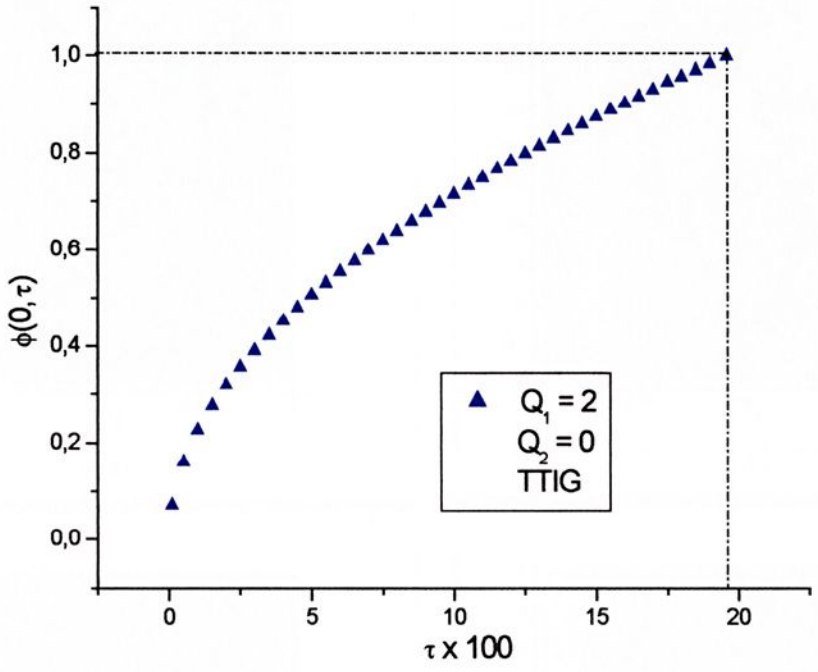


Figura 6.5 – Determinação do tempo de ablação para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$.

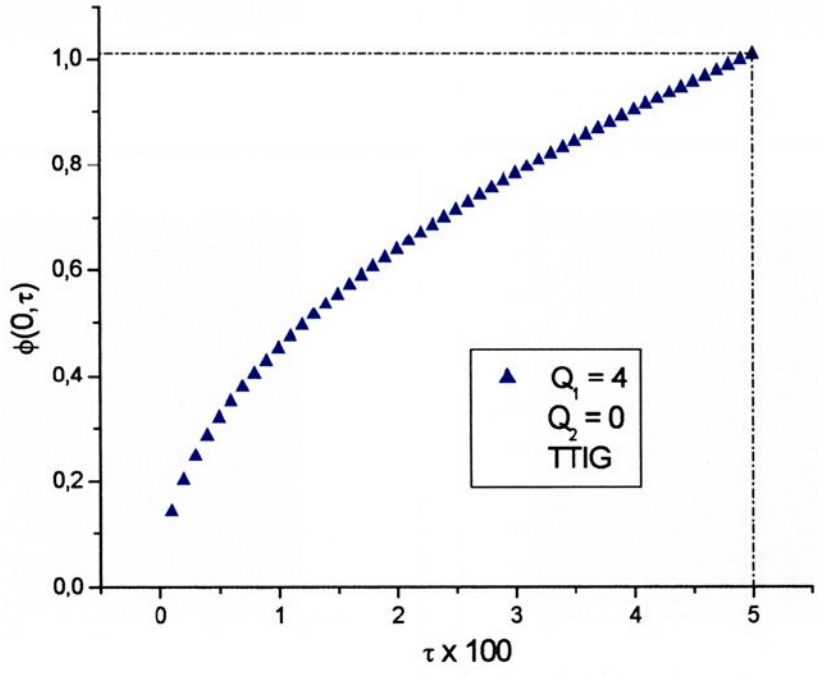


Figura 6.6 – Determinação do tempo de ablação para a condição de contorno $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 0$.

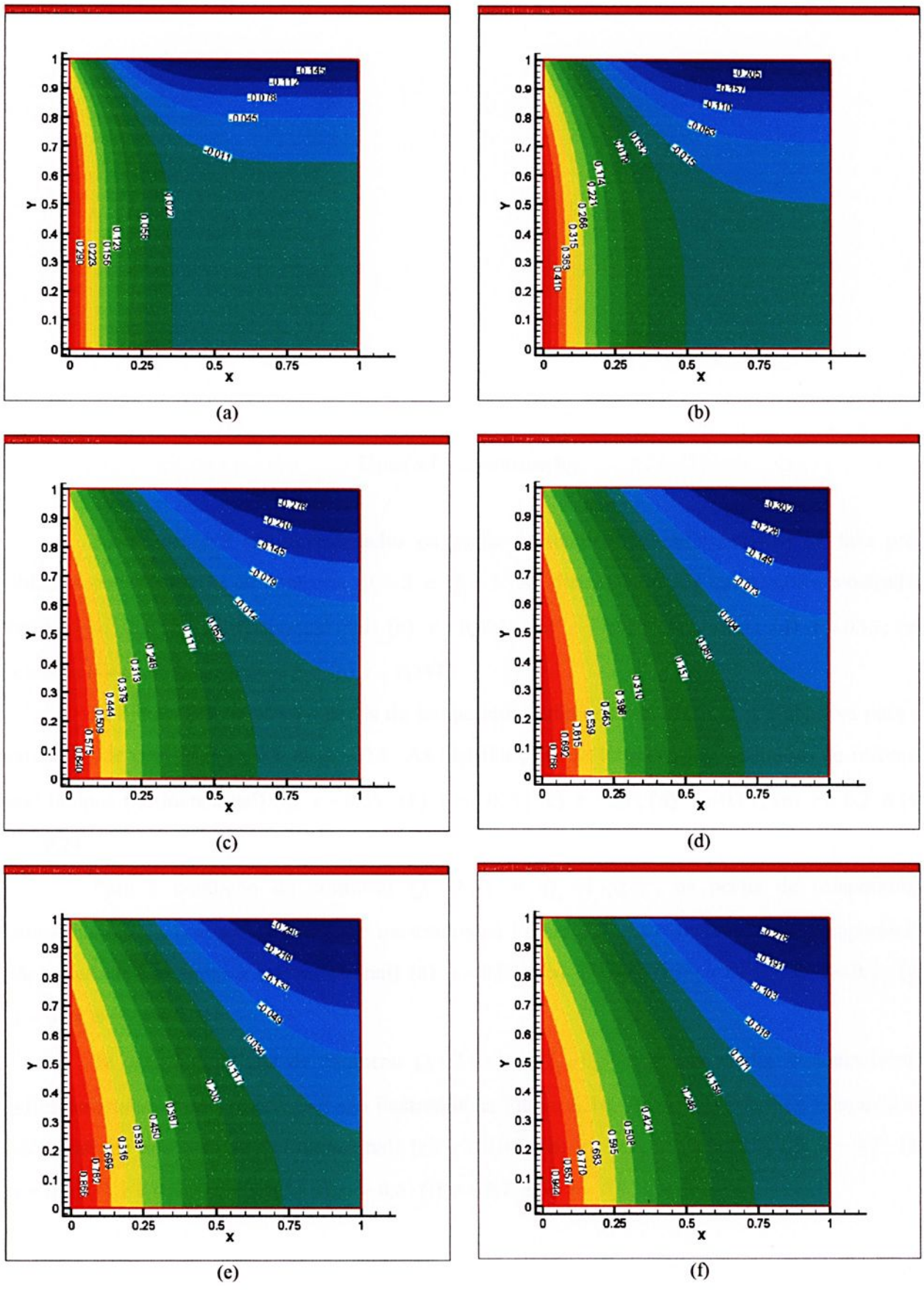
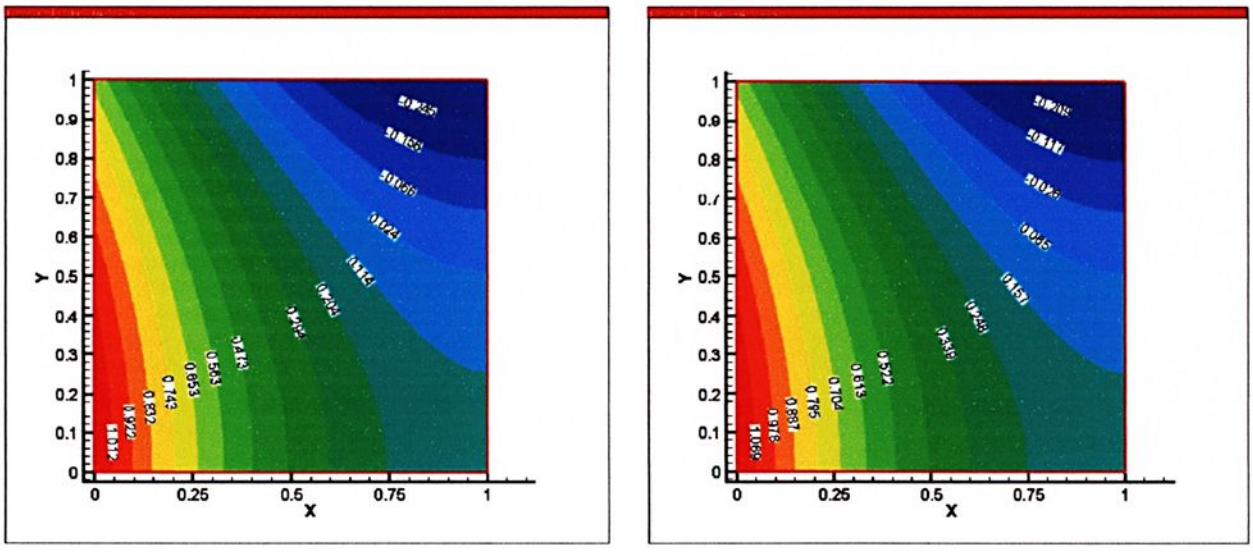


Figura 6.7 – Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$.



(g) (h)

Figura 6.7 – ... continuação.

Na Figura 6.7 são apresentados os perfis de temperatura adimensional da fase pré-ablativa com condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$. As distribuições de temperatura mostradas referem-se aos tempos (adimensional) (a) $\tau = 0{,}025$; (b) $\tau = 0{,}05$; (c) $\tau = 0{,}1$; (d) $\tau = 0{,}15$; (e) $\tau = 0{,}2$; (f) $\tau = 0{,}25$; (g) $\tau = 0{,}3$ e (h) $\tau = 0{,}347$.

A Figura 6.8 mostra os perfis de temperatura adimensional da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$. As distribuições de temperatura mostradas se referem aos tempos (adimensional) (a) $\tau = 0{,}05$; (b) $\tau = 0{,}075$; (c) $\tau = 0{,}1$; (d) $\tau = 0{,}15$; (e) $\tau = 0{,}2$ e (f) $\tau = 0{,}247$.

Para a condição de contorno $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$, os perfis de temperatura adimensional da fase pré-ablativa são mostrados na Figura 6.9. As distribuições de temperatura são relativas aos tempos (adimensional) (a) $\tau = 0{,}05$; (b) $\tau = 0{,}1$; (c) $\tau = 0{,}15$; (d) $\tau = 0{,}2$; (e) $\tau = 0{,}25$ e (f) $\tau = 0{,}274$.

Já para a condição de contorno $Q_1 = 1 + \tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$, os perfis de temperatura adimensional da fase pré-ablativa são ilustrados na Figura 6.10. As distribuições de temperatura são relativas aos tempos (adimensional) (a) $\tau = 0{,}05$; (b) $\tau = 0{,}1$; (c) $\tau = 0{,}15$; (d) $\tau = 0{,}2$; (e) $\tau = 0{,}3$; (f) $\tau = 0{,}4$; (g) $\tau = 0{,}5$; (h) $\tau = 0{,}6$; (i) $\tau = 0{,}7$ e (j) $\tau = 0{,}8$.

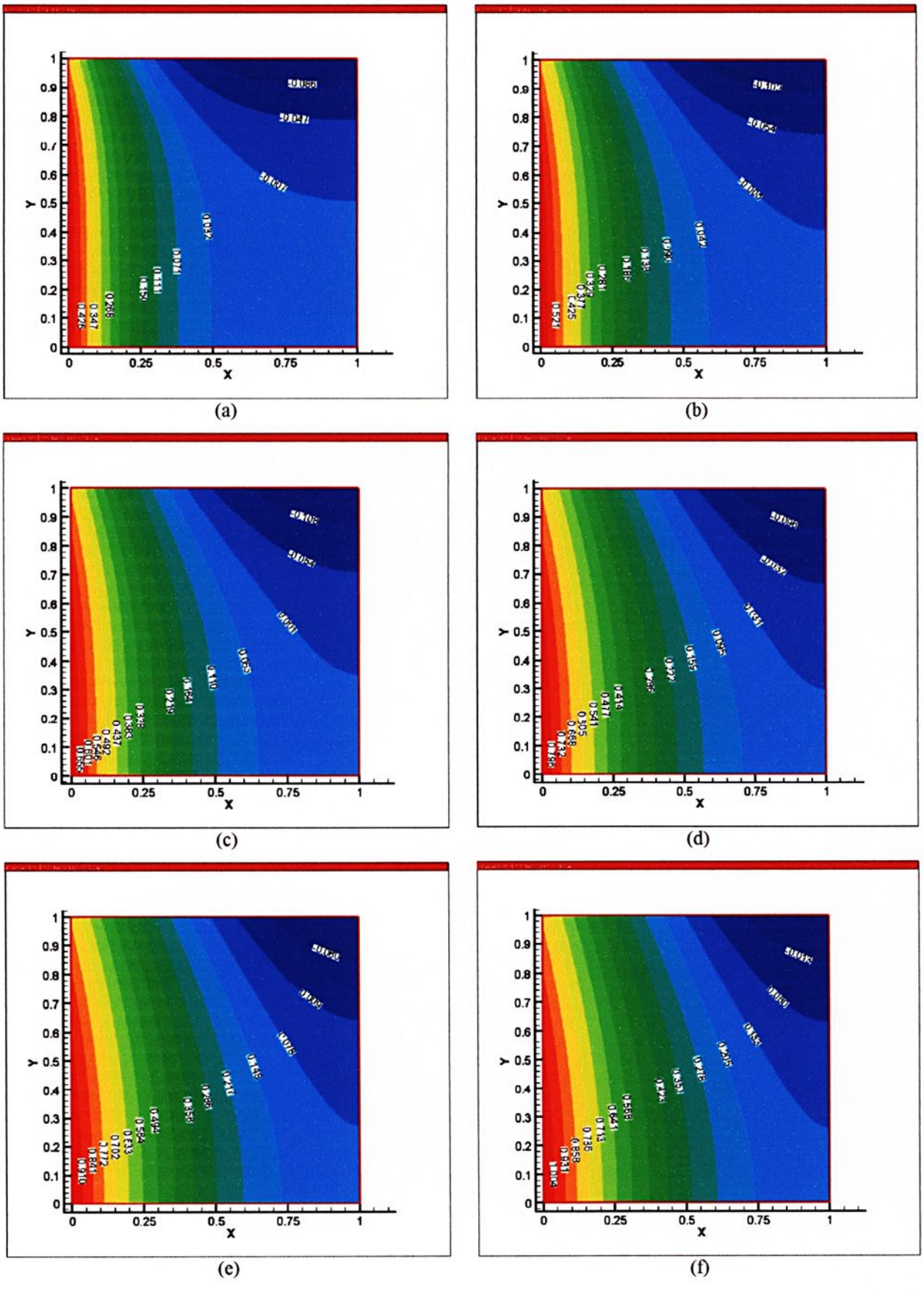


Figura 6.8 – Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$.

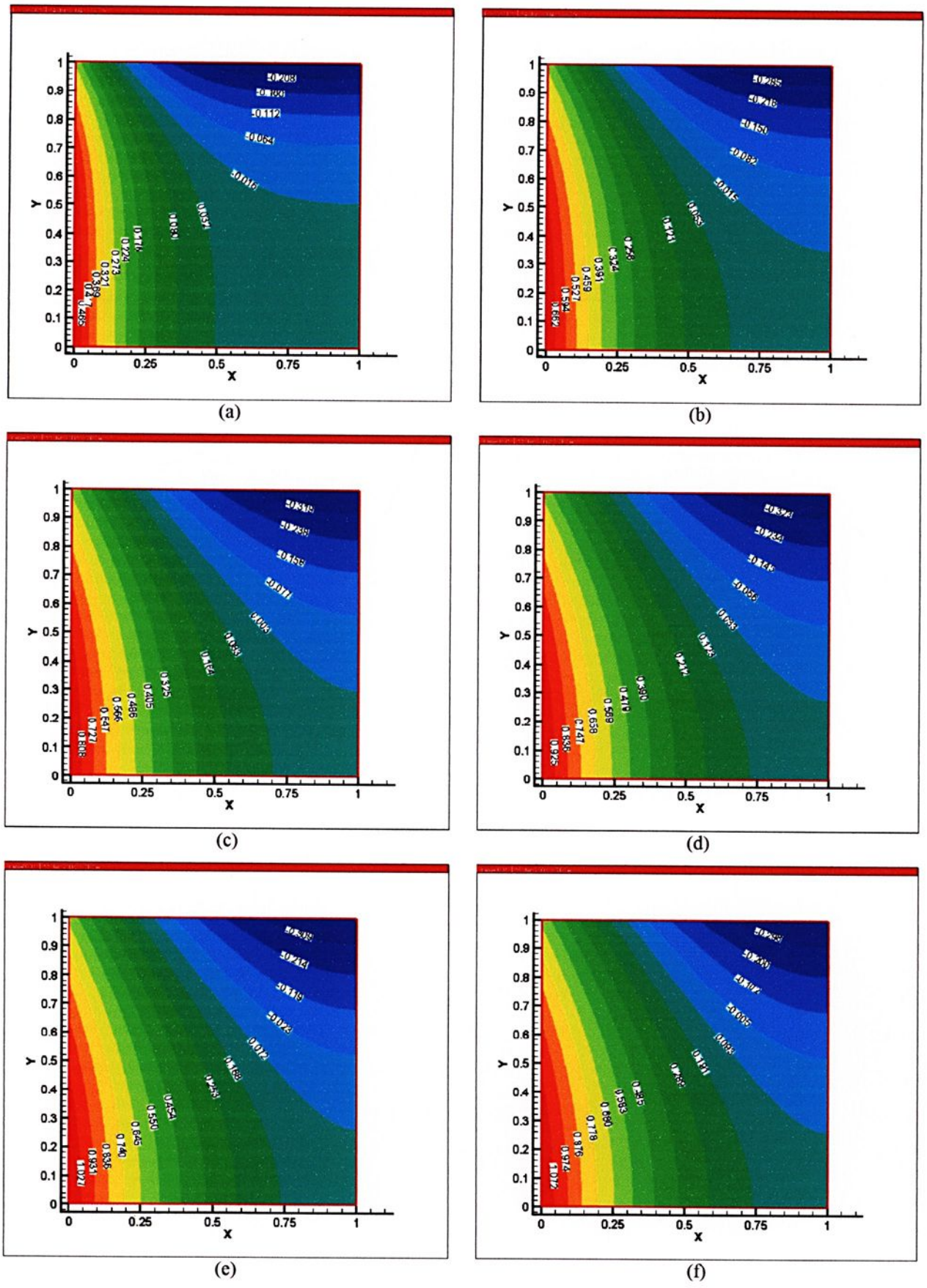


Figura 6.9 – Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$.

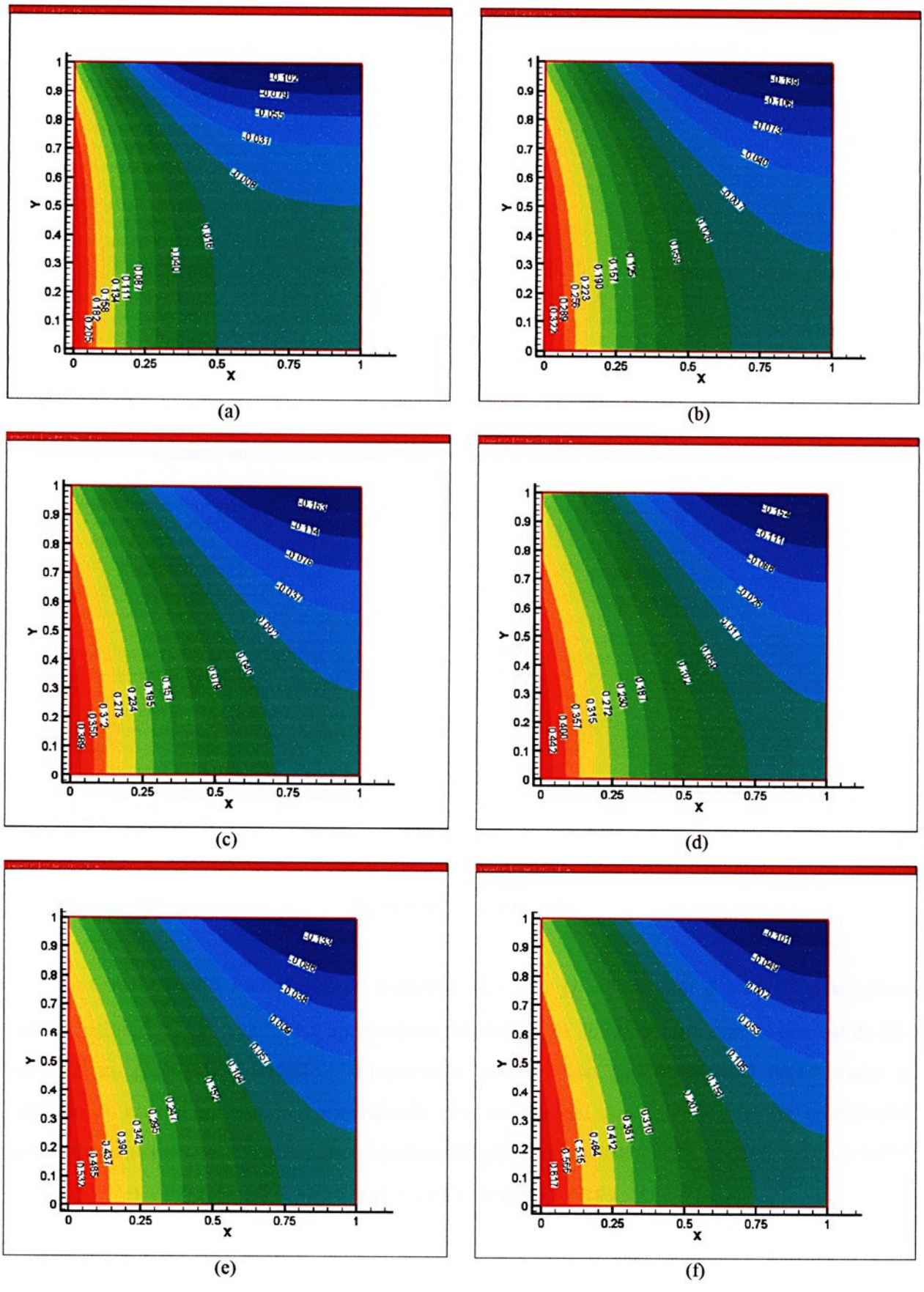


Figura 6.10 – Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 1 + \tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$.

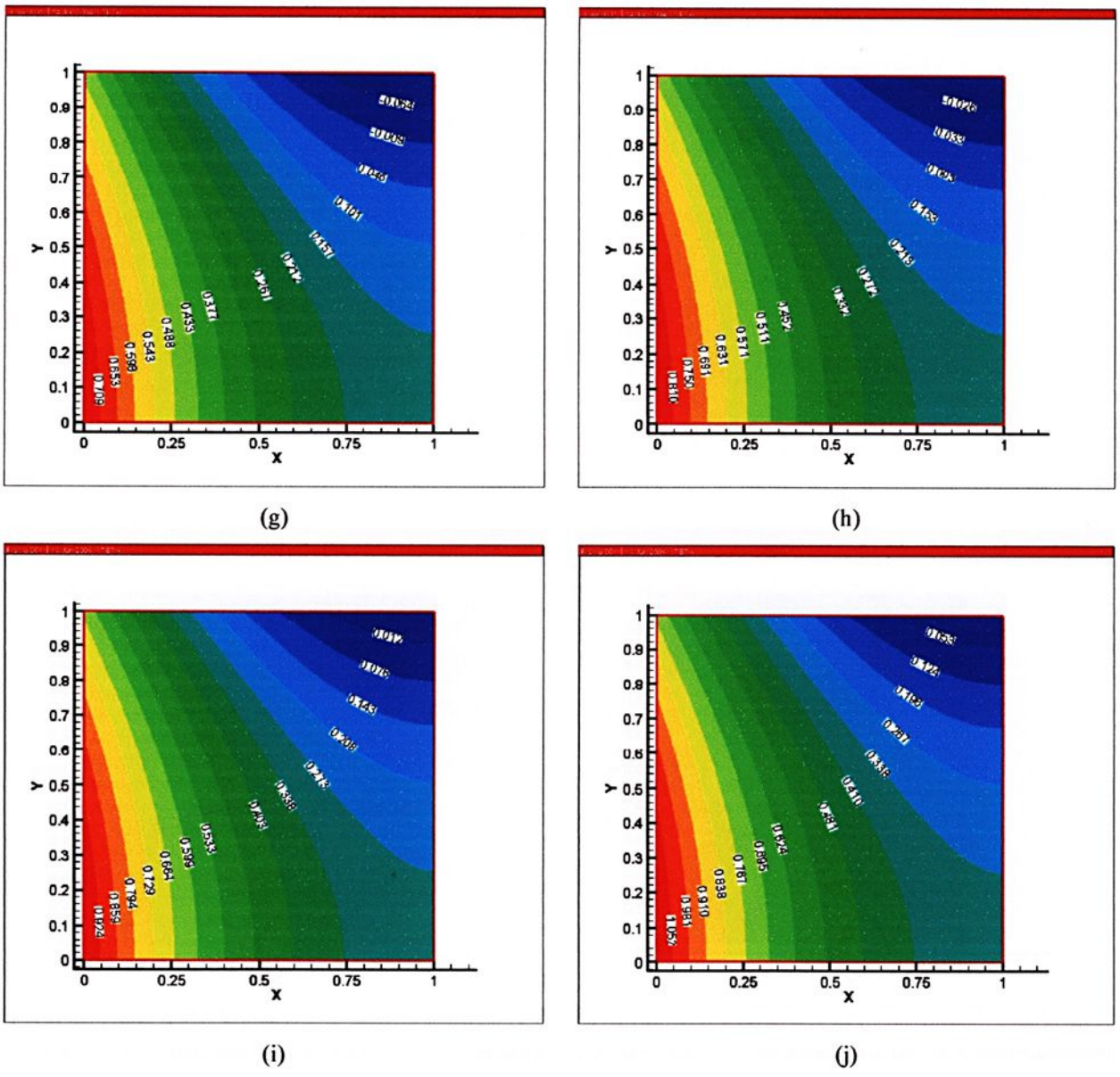


Figura 6.10 – ... continuação.

Considerando a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$ se tem o caso da placa plana unidimensional. Na Figura 6.11 é apresentada a distribuição de temperatura adimensional da fase pré-ablativa para esta condição. Comparando com o caso unidimensional apresentado no Capítulo 5 nota-se uma boa concordância dos resultados. As distribuições de temperatura apresentada são referentes aos tempos (adimensional) (a) $\tau = 0{,}025$; (b) $\tau = 0{,}05$; (c) $\tau = 0{,}075$; (d) $\tau = 0{,}1$; (e) $\tau = 0{,}125$; (f) $\tau = 0{,}15$; (g) $\tau = 0{,}175$ e (h) $\tau = 0{,}196$.

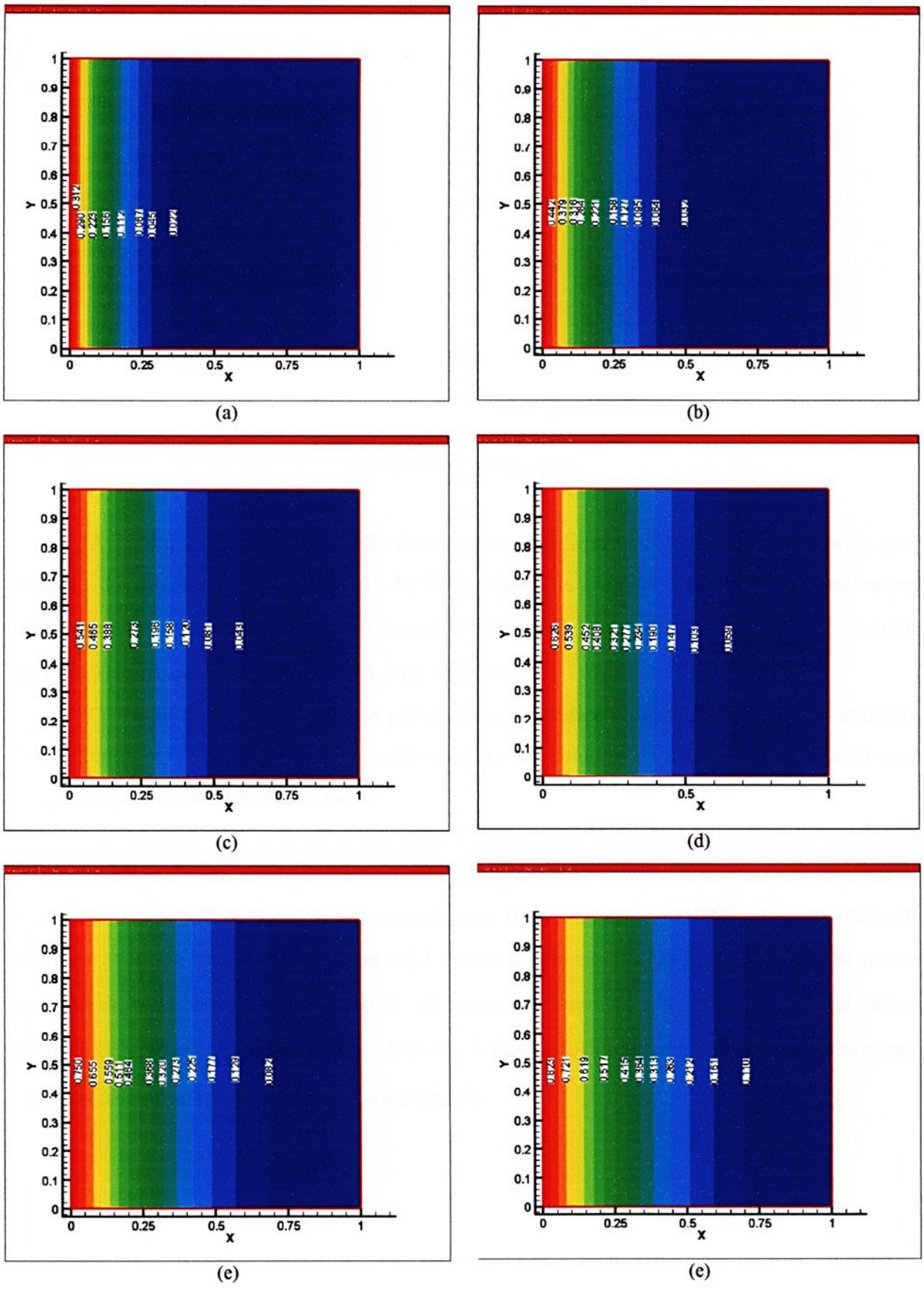
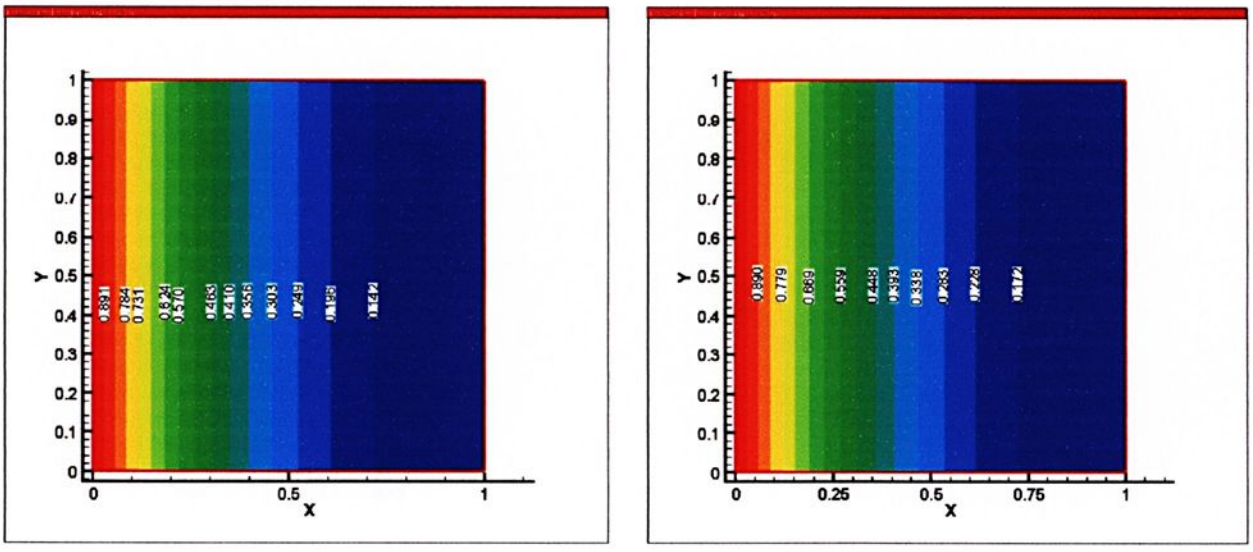


Figura 6.11 – Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$.



(f) (g)

Figura 6.11 – ... continuação.

A Figura 6.12 ilustra os perfis de temperatura adimensional da fase pré-ablativa para condição de contorno $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 0$. As distribuições de temperatura se referem aos tempos (adimensional) (a) $\tau = 0{,}005$; (b) $\tau = 0{,}01$; (c) $\tau = 0{,}015$; (d) $\tau = 0{,}02$; (e) $\tau = 0{,}025$; (f) $\tau = 0{,}03$; (g) $\tau = 0{,}035$; (h) $\tau = 0{,}04$; (i) $\tau = 0{,}045$ e (j) $\tau = 0{,}05$.

O tempo de início do período pré-ablativo é condição inicial para o período ablativo. Considerando-se os tempos obtidos anteriormente na solução da fase ablativa, obtém-se a solução do problema de fronteira móvel.

As Figuras 6.13 a 6.16 apresentam a perda total de material em função do tempo adimensional para cada condição de contorno. A Figura 6.13 mostra a comparação da perda de material obtida pela TTIG com os apresentados por Hsiao and Chung (1984) para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$. Já a Figura 6.14 ilustra a comparação da perda de material para a condição de contorno $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0.5$. A Figura 6.15 apresenta a perda de material para a condição de contorno $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$. A Figura 6.16 mostra a perda de material para a condição de contorno $Q_1 = 1 + \tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$.

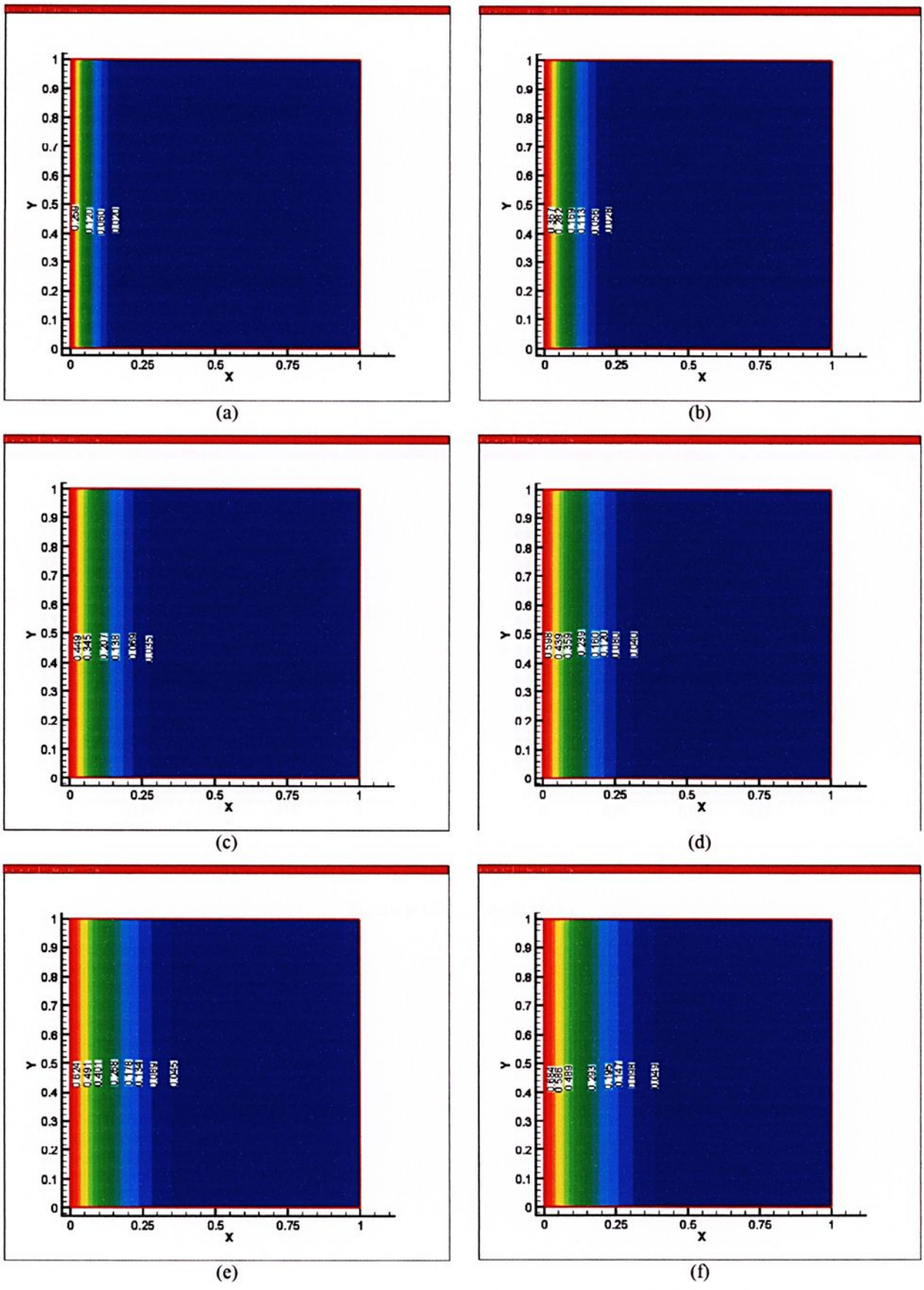


Figura 6.12 – Distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para a condição de contorno $Q_1 = 4$ e $Q_2 = 0$.

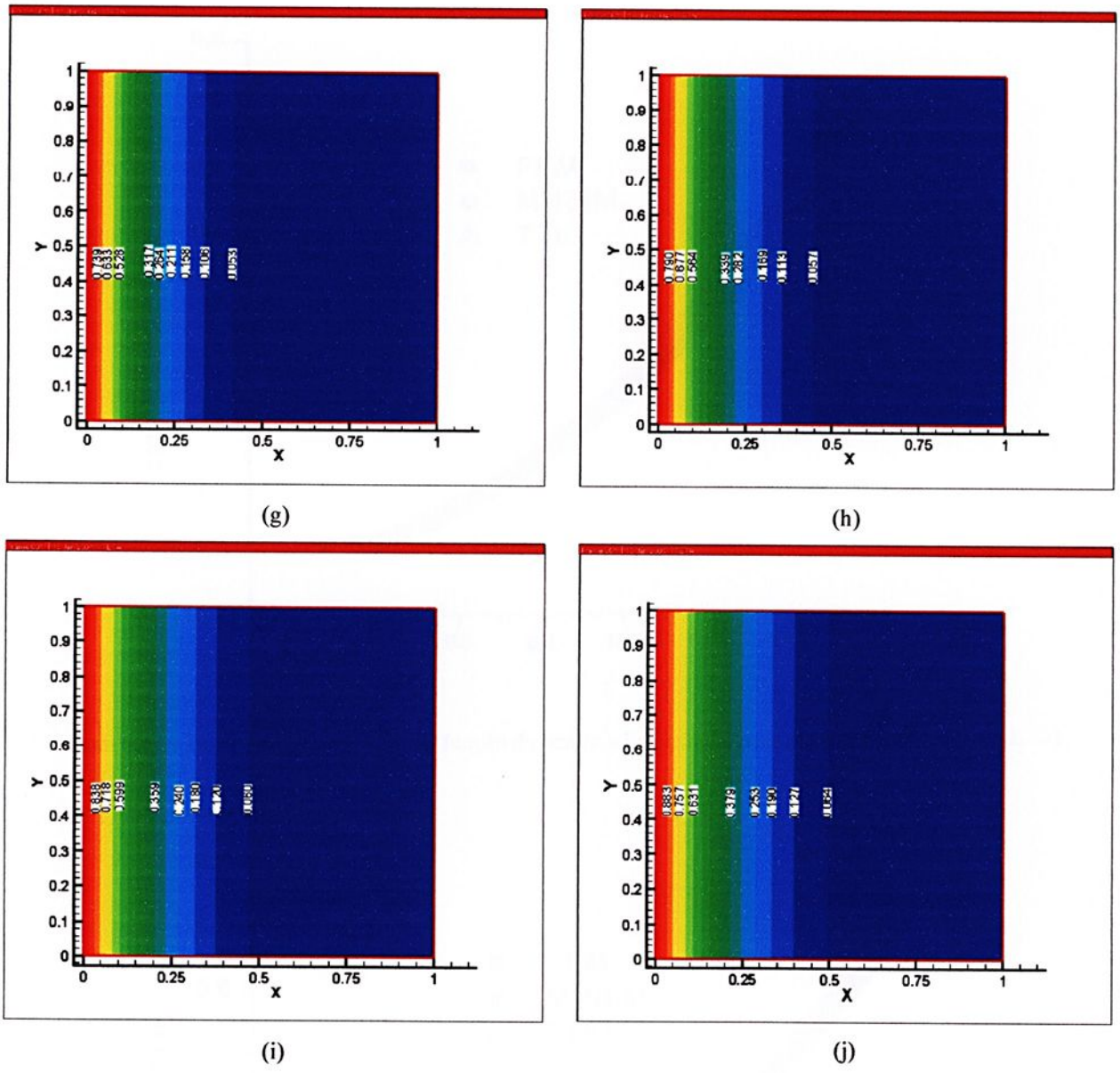


Figura 6.12 – ... continuação.

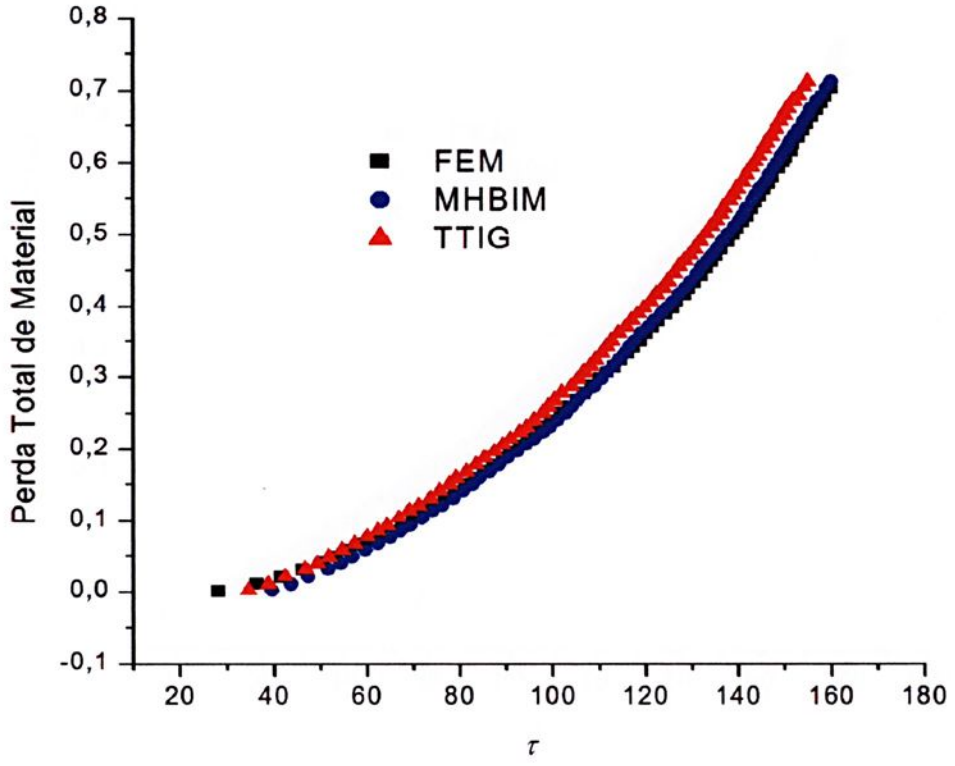


Figura 6.13 – Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 1$.

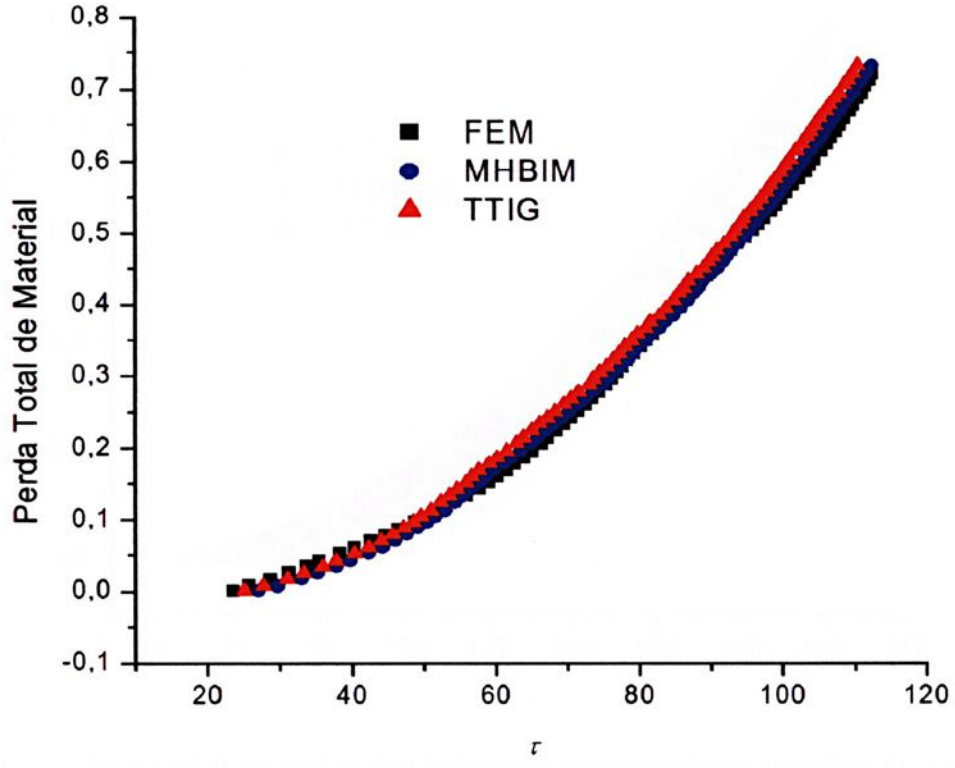


Figura 6.14 – Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0{,}5$.

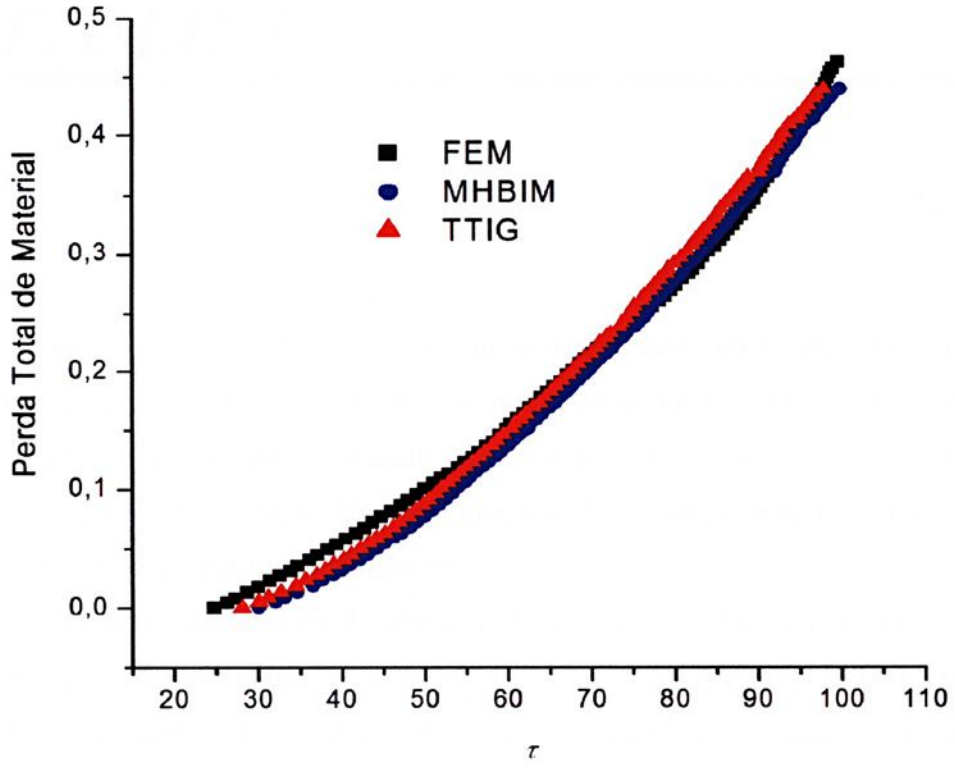


Figura 6.15 – Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 2 + \tau$ e $Q_2 = 1 + 0{,}5\tau$.

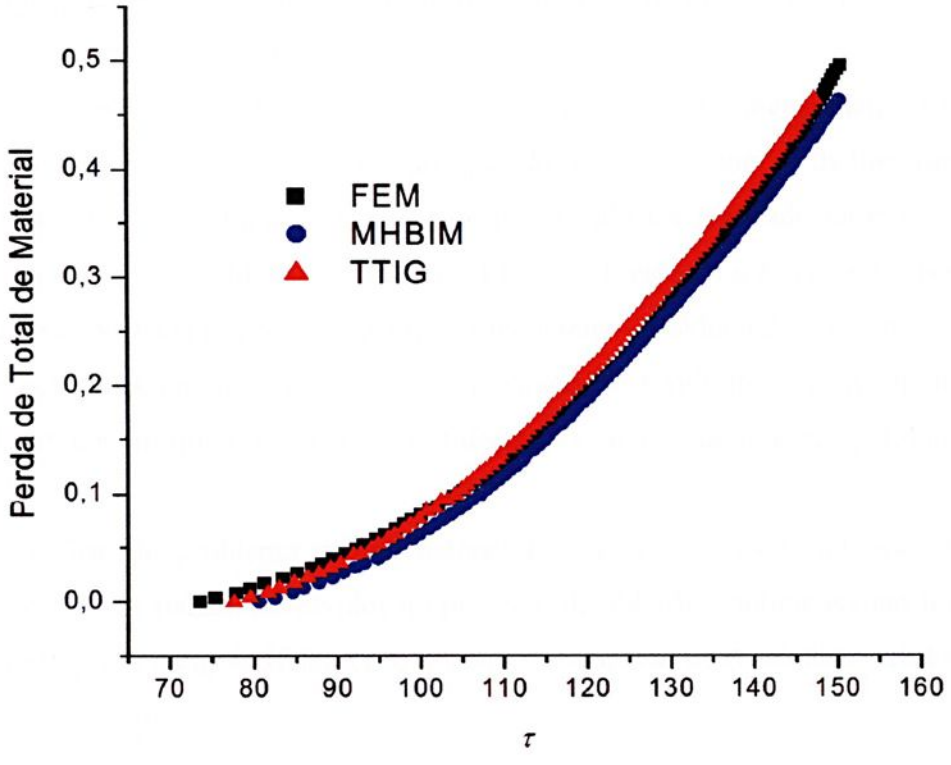


Figura 6.16 – Perda total de material em função do tempo adimensional para a condição $Q_1 = 1 + \tau^2$ e $Q_2 = 0{,}5 + 0{,}5\tau^2$.

CAPÍTULO 7

DISCUSSÃO

Um ponto a ser destacado nas análises unidimensional e bidimensional é que o processo ablativo é tratado apenas como um processo de mudança de fase. Numa análise mais realística outros processos poderiam estar atuando concorrentemente, tais como: pirólise, reações químicas, irradiação, entre outros. Um dos motivos desta simplificação é que não se sabe precisamente o que ocorre em uma situação real.

Um outro ponto de destaque é que este trabalho não visa obter resultados quantitativos e sim qualitativos, no sentido de que a análise realizada tem por objetivo principal a utilização de uma ferramenta analítica, a TTIG, para solução de um problema complexo. A complexidade deste problema está na não linearidade da condição de contorno. Contudo resultados quantitativos podem ser obtidos a partir dos resultados apresentados, ou seja, considerando um material ablativo no qual se podem identificar suas propriedades físicas e observar o seu comportamento numa situação real.

Como observado no Capítulo 5, análise do problema unidimensional, a TTIG apresenta uma boa concordância dos resultados obtidos quando comparado com os da literatura.

Na análise do problema unidimensional o estudo foi realizado na região do ponto de estagnação de um corpo rombudo (revolução). Em que, devido à razão entre a espessura e o raio de curvatura ser pequena pode-se simplificar o fenômeno considerando um problema de difusão em uma placa plana unidimensional, como mostrado no Capítulo 5. Também foi utilizada a hipótese de Stefan em que o material não se decompõe abaixo de uma temperatura de fusão ou sublimação.

A análise do problema unidimensional foi baseada numa formulação adimensional. Todos os parâmetros físicos envolvidos no processo de ablação unidimensional foram adotados como definido por Chung & Hsiao (1985) para se comparar os resultados obtidos pela TTIG. Sendo estes parâmetros:

- Difusividade térmica $\alpha = 0{,}1 ft^2 / s$;

- Tempo característico $t_c = 10s$;
- Comprimento característico $l = 1ft$;
- Fluxo de calor de referência $q_r = 10Btu/s.ft^2$;
- Diferença de temperatura $T_f - T_0 = 100°F$;
- Inverso do número de Stefan $\nu = 1$;
- Tempo de referência $t_r = 100s$.

No período pré-ablativo o interesse maior esta em se determinar o tempo de início da ablação e o perfil de temperatura, pois estes parâmetros são necessários para se obter a condição inicial do período ablativo. O tempo de início da ablação é obtido quando a temperatura adimensional é igual a 1 em $x = 0$. Observa-se que os resultados apresentados apresentam uma boa concordância com os da literatura.

Pela solução analítica da fase ablativa, o sistema resultante é composto por um sistema de equações diferenciais ordinária de primeira ordem acoplado a equação de restrição no contorno. Após o desenvolvimento analítico foi realizada a implementação numérica para se obter a solução deste sistema resultante em que se utilizou a rotina DGEAR (IMSL, 1979). Como a solução envolve séries infinitas houve a necessidade de se truncar o sistema num número suficientemente grande para se obter a solução com uma boa precisão.

As grandezas de interesse tais como posição da fronteira ablativa $S(t)$ e velocidade de ablação $V(t)$ foram obtidos para um fluxo de calor prescrito no contorno de $Q = 2$. Observa-se uma boa concordância dos resultados apresentados. Resultados utilizando-se outros fluxos de calor prescrito no contorno podem ser obtidos nos trabalhos de Diniz (1996) e Kurokawa et al. (2001).

Como observado o desenvolvimento analítico do problema unidimensional é obtido de forma relativamente simples em comparação com o problema bidimensional. O mesmo acontece com sua implementação numérica, o qual requer menos trabalho, uma vez que se deseja obter a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Como comentado anteriormente utilizou-se a rotina DGEAR (IMSL, 1979) e há necessidade de se definir duas funções externas FCN e FCNJ. Todo o detalhamento para se obter estas funções pode ser encontrado em Diniz (1996) e no manual do IMSL (1979).

A solução do problema de ablação bidimensional está embasada no trabalho de Hsiao & Chung (1984) em que os autores empregaram o Método Integral do Balanço de Calor



Modificado para solução do problema. A análise foi feita em termos de parâmetros adimensionais, no qual definiu-se uma temperatura adimensional. Todos os parâmetros utilizados nesta análise foram definidos pelos autores em seu trabalho. Sendo estes:

- Difusividade térmica $\alpha = 0{,}1 ft^2 / s$;
- Diferença de temperatura $\Delta T = T_m - T_0 = 100°F$;
- Número de Stefan $S_t = 1$;
- Comprimento característico $l = 1 ft$;
- Tempo característico $t_c = 10 s$;
- Fluxo de calor de referência $q_0 = 10 Btu / s.ft^2$.

Tanto no período pré-ablativo quanto no período ablativo aplicou-se a TTIG para se obter a solução analítica do problema. Na fase pré-ablativa determinou-se o tempo de início da ablação bem como o perfil de temperatura, O início da ablação se dá quando a temperatura adimensional média é igual a 1 em $x = 0$. Observa-se que os resultados obtidos por esta técnica apresentam bons resultados quando comparados com os da literatura.

Para se validar os resultados obtidos, considerou-se a condição em que os fluxos de calor prescritos são $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 0$. Por esta análise tem-se a condição do problema unidimensional obtido no Capítulo 5. Os resultados apresentados para o problema bidimensional quando comparados com do problema unidimensional apresentam bons resultados como observado.

Pela análise da Tabela 6.3, nota-se que para uma mesma condição de fluxo de calor imposto e redução pela metade do fluxo de calor perdido há uma redução 28,8% no tempo de início da ablação. Já para o caso sem fluxo de calor perdido (caso unidimensional) esta redução é de 43,5%. E quando se dobra o fluxo de calor imposto e sem fluxo de calor perdido esta redução está em torno de 85,5%. Ou seja, mais rápido se dará o início da ablação.

De posse do tempo de início da fase ablativa, partiu-se para solução da fase ablativa. Pela análise analítica obteve-se a solução do problema, composto por um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado a equação de restrição no contorno. Implementou-se um programa para se obter a solução numérica deste sistema resultante utilizando-se as bibliotecas do IMSL (1979). Como no problema unidimensional, a solução envolve séries infinitas, houve a necessidade de se truncar o sistema num número suficientemente grande para se obter a solução



do problema com uma boa precisão numérica.

O sistema resultante é composto por uma matriz de quatro índices obtida no desenvolvimento analítico, como demonstrado no Capítulo 6. Houve a necessidade de se reduzir os índices a dois que foi feito através de uma lei de formação. Através desta lei de formação transformamos a matriz de quatro índices em uma matriz de apenas dois índices.

Como no problema unidimensional há a necessidade de se definir duas funções externas FCN e FCNJ para se utilizar às rotinas do IMSL (1979).

Os resultados apresentados no Capítulo 6 referem-se a perda total de material em função do tempo. Os resultados apresentam bons resultados quando comparados com os da literatura.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram estudados os problemas de ablação unidimensional e bidimensional, com fluxos de calor transiente aplicados numa placa plana e num prisma respectivamente. Os problemas foram analisados considerando que o material sofre apenas uma mudança de fase. O fenômeno físico se caracteriza por apresentar fronteiras móveis que introduz uma não linearidade no contorno.

Dois objetivos foram enfocados neste trabalho: estudar o fenômeno físico de ablação, no que se refere aos processos envolvidos na transferência de calor e massa, no qual se deve ressaltar que foi realizado um estudo bibliográfico sobre o fenômeno mais realístico, e aplicou-se, devido a sua complexidade, apenas o tratamento de mudança de fase; outro foi o de estudar e aplicar a Técnica da Transformada Integral Generalizada, TTIG, em um problema complexo.

Dentro do estudo do fenômeno físico pode-se conclui que os problemas de ablação são muito complexos, nos quais têm-se diversos fenômenos envolvidos e uma análise que englobe todos estes fenômenos se torna muito complexo.

Com relação à Técnica da Transformada Integral Generalizada conclui-se que se trata de uma ferramenta matemática muito poderosa para solução de problemas complexos, uma vez que soluções analíticas para problemas complexos são praticamente inexistentes. Através desta técnica pode-se ter soluções mais precisas.

Por este trabalho pode-se enumerar algumas conclusões:

1) No estudo do problema unidimensional pode-se observar fisicamente o fenômeno de ablação através do movimento de fronteira. Devido o fluxo de calor imposto o material sofre um aquecimento com elevação da temperatura da superfície. Quando a temperatura da superfície atingir a temperatura de ablação (fusão ou sublimação), ocorre a mudança de fase de uma pequena porção de material que é arrastado pelo escoamento.
2) A análise do problema unidimensional foi realizada para se verificar a aplicabilidade da técnica, TTIG, aplicada a problemas complexos.



3) Comparando-se os resultados obtidos pela TTIG com os da literatura nota-se que há alguma discordância. Isto pode estar relacionado com o fato de que por se tratar de uma técnica híbrida analítica-numérica têm-se soluções mais precisas como apresentado em alguns trabalhos que utilizaram a técnica integral.

4) Pela solução do problema de ablação bidimensional os resultados obtidos são concordantes com os obtidos por Hsiao & Chung (1985). Neste trabalho foi assumida uma função linear na fronteira móvel.

5) A solução analítica apresenta um extenso desenvolvimento analítico e a solução numérica foi extremamente complexa a sua implementação.

6) Este trabalho pode ser estendido para uma situação mais realística onde exista a transferência de calor por radiação.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

CAPÍTULO 9

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, MAC C. (1959), Recent Advances in Ablation, Avco-Everett Research Laboratory Everett, **ARS Journal**, September, pp. 625-633.

APARECIDO, J. B., COTTA, R. M. AND ÖZISIK, M. N. (1989), Analytical Solutions to Two Dimensional Diffusion Type Problem in Irregular Geometries, **Journal of the Franklin Institute**, v. 326, pp. 421-434.

CHUNG, B. T. F. AND HSIAO, J. S. (1985), Heat Transfer with Ablation in a Finite Slab Subjected to Time-Variant Heat Fluxes, **AIAA Journal**, v. 23, n. 1, pp. 145-150.

CHUNG, B. T. F., CHANG, T. Y., HSIAO, J. S. and CHANG, C. I. (1983), Heat Transfer with Ablation in a Half Space Subjected to Time Variant Heat Fluxes, Transaction of the ASME, **Journal of Heat Transfer**, Feb., v. 105, pp. 200-203.

COTTA, R. M. and ÖZISIK, M. N. (1987), Diffusion Problems with General Time Dependent Coefficients, **Brazilian Journal Mechanical Sciences RBCM**, v. 9, n° 4, pp. 269-292.

COTTA, R. M. (1989), Hybrid Numerical Analytical Approach to Diffusion Convection Problems, Invited Lecture, **XV National Summer School**, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Varna – Bulgaria.

COTTA, R. M. (1983), Problems with Variable Boundaries, In:_. **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**, CRC Press, Inc 2000 Corporate Blvd, N. W. Boca Raton, Florida, pp. 109-155.

DIMITRIENKO, Y. I. (1997), Thermal Stresses in Ablative Composite Thin-Walled Structures



Under Intensive Heat Flows, **International Journal Engineering Sciences**, v. 35, n° 1, pp. 15-31.

DINIZ, A. J. (1996), Proteção Térmica por Ablação em Corpos de Várias Geometrias Aquecidos Cineticamente, **Tese** (Doutorado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica), Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA, São José dos Campos – SP, 137 págs.

DINIZ, A. J. e APARECIDO, J. B. (1990), Solução Analítica do Problema de Ablação com Fluxo de Calor Transiente, **III Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT)**, Itapema – SC, pp. 329-333.

DINIZ, A. J., CAMPOS-SILVA, J. B. e ZAPAROLI, E. L. (1991), Condução de Calor com Proteção Térmica em Corpos de Revolução, **XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM)**, São Paulo – SP, pp. 425-428.

DINIZ, A. J., MAIA, C. R. M. e ZAPAROLI, E. L. (1996), Solução Analítica para Problemas de Transferência de Calor com Mudança de Fase em Geometria Axi-Simétrica, **VI Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT)**, Florianópolis – SC, pp. 957-961.

GOODMAN, T. R. (1958), The Heat Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase, **Transactions of the ASME**, v. 80, pp. 335-342.

GROSS, J. J., MASSON, D. J. and GAZLEY, C. Jr. (1958), General Characteristics of Binary Boundary Layers with Applications to Sublimation Cooling, **Rand Rep. P-1371**.

GUPTA, R. S. and KUMAR, D. (1981), Variable Time Step Methods for One Dimensional Stefan Problems with Mixed Boundary Condition, **Journal Heat Mass Transfer**, v. 24, pp. 251-259.

HATORI, M. E. (1991), Solução Similar em Escoamentos Hipersônicos, **Trabalho de Conclusão de Curso**, Divisão de Engenharia Aeronáutica, ITA/CTA, São José dos Campos – SP.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

HSIAO, J. S. (1983), Numerical and Analytical Analysis of Heat Transfer with Ablation in a Two-Dimensional Region, **Ph.D Dissertation**, University of Akron.

HSIAO, J. S. and CHUNG, B. T. F. (1984), A Heat Balance Integral Approach for Two Dimensional Heat Transfer in Solids With Ablation, **AIAA Journal**, 22nd Aerospace Sciences Meeting, Reno Nevada, A84-18062, pp. 1-9.

IMSL LIBRARY (1979), Edition 7, In:_. **GNB Building**, 7500 Ballaire Blvd, Houston, Texas, 77036.

KOUBEC, F. J. (1971), A Review of Ablative Studies of Interest to Naval Applications, In:_. **Ablative Plastics**, Marcel Dekker, Inc., New York, pp. 1-39.

KREITH, F. (1973), Transmissão de Calor em Escoamento a Alta Velocidade, In:_. **Princípios da Transmissão de Calor**, Cap. 12, ed. Edgard Blucher Ltda, pp. 545-575.

KRISCHKE, M., LORENZINI, E. C. and SABATH, D. (1995), A Hypersonic Parachute for Low Temperature Re-Entry, **Acta Astronautica**, Elsevier Science, vol. 36, n° 5, pp. 271-278.

KUROKAWA, F. Y., DINIZ, A. J. e CAMPOS-SILVA, J. B. (2002), Transferência de Calor no Ponto de Estagnação em Corpos Rombudos com Proteção Térmica, **II National Congress of Mechanical Engineering (CONEM)**, João Pessoa – PB.

KUROKAWA, F. Y., DINIZ, A. J. y CAMPOS-SILVA, J. B. (2001), Transferencia de Calor con Proceso Ablativo en Cuerpos de Reentrada, **V Congreso Ibero Americano de Ingeniería Mecánica y IV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica**, Mérida – Venezuela, octubre 23 – 26, pp. 1339-1346.

LACAZE, H. (1967), La Protection Thermique par Ablation, **Doc-Air-Espace** n° 105, juillet, pp. 23-32.

LANDAU, H. G. (1950), Heat Conduction in a Melting Solid, **Quarterly of Applied**



Mathematics, vol. 8, n° 1, pp. 81-94.

LEITE, R. M. G. (1999), Cálculo de Ablação com uma Abordagem Entálpica para a Mudança de Fase, **Tese** (Doutorado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica), Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, São José dos Campos – SP, 96 págs.

LOURES DA COSTA, L. E. V. e MORAES JR., P. (2000), Sistema de Proteção Térmica da Plataforma Orbital SARA, **I Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM)**, Natal – RN.

MEESE, E. A. AND NORSTRUD, H. (2002), Simulation of Convective Heat Flux and Heat Penetration for a Spacecraft at Re-entry, **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, pp. 185-194.

MIKHAILOV, M. D. and ÖZISIK, M. N. (1984), In:_. **Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion**, John Wiley & Sons, New York, 524 pgs.

NAGATA, C., DINIZ, A. J., CAMPOS-SILVA, J. B. e PESSOA-FILHO, J. B. (1999), Proteção Térmica Ablativa no Ponto de Estagnação em Veículos de Reentrada, **XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM)**, Águas de Lindóia.

ÖZISIK, M. N. AND MURRAY, R. L. (1974), On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters, **Journal Heat Transfer**, v. 96, pp. 48-51.

PESSOA-FILHO, J. B. (1997), Aquecimento Cinético do Ponto de Estagnação do SARA durante Reentrada Atmosférica, **Relatório Técnico** NT-146/ASE-N/97, CTA/IAE.

SCHMIDT, D. L. (1964), Ablation, In:_. **Engineering Design for Plastics**, Chapter 13, New York, pp. 815-868.

SCHMIDT, D. L. (1968), Hypersonic Atmospheric Flight, In:_. **Environmental Effects on Polymeric Materials**, Wiley Interscience, New York, pp. 487-588.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

SCHMIDT, D. L. (1971), Ablative Polymers in Aerospace Technology, In:_. **Ablative Plastics**, Marcel Dekker, Inc., New York, pp. 1-39.

SHERMAN, N.M. (1968), Entry Thermal Protection, NASA SP-8014, **Monograph**, Langley Research Center, pp. 1-31.

STEG, L. (1960), Materials for Reentry Heat Protection of Satellites, **ARS Journal**, v. 30, pp. 815-822.

STEG, L. and LEW, H. (1962), Hypersonic Ablation, In:_. **Aspects of Hypersonic Fluid Dynamics**, Agard Meeting on High Temperature, vol. 68, chapter 32, pp. 629-980.

STRAUSS, E. L. (1978), Polymer Degradation Processes in Ablation, In:_. **Aspects of Degradation and Stabilization of Polymers**, Elsevier Sciences Publishing Co., New York, pp. 552.

SUNDERLAND, J. E. and GROSH, R. J. (1961), Transient Temperature in a Melting Solid, Transaction of the ASME, **Journal of Heat Transfer**, v. 83, pp. 409-414.

SUTTON, G. W. (1982), The Initial Development of Ablation Heat Protection, An Historical Perspective, **AIAA Journal Spacecraft**, vol. 19, n° 1, pp. 3-11.

TAO, L. N. (1978), The Stefan Problem with Arbitrary Initial and Boundary Conditions, **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 36, n° 10, pp. 223-233.

TAO, L. N. (1984), The Exact Solutions to an Ablation Problem with Arbitrary Initial an Boundary Conditions, Transactions of the ASME, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 51, n° 12, pp. 821-826.

THIMOTEO, H. P. C. A. (1986), Estudo do Comportamento Ablativo de Composições Fenólicas com Carga, **Dissertação** (Mestrado em Ciência e Tecnologia de Polímeros), Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, 172 págs.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

VAIA, R. A., PRICE, G., RUTH, P. N., NGUYEN, H. T. and LICHTENHAN, J. (1999), Polymer/ Layered Silicate Nanocomposites as High Performance Ablative Materials, **Applied Clay Science**, Elsevier, pp. 67-92.

VALLERANI, E. (1974), Integral Technique Solutions to a Class of Simple Ablations Problems, **Meccanica**, vol. 9, n° 6, pp. 94-101.

van DRIEST, E. R. (1956), The Problem of Aerodynamic Heating, **Aeronautical Engineering Review**, vol. 15, pp. 26-41.

VOJVODICH, N. S. (1971), Hypervelocity Heat Protection – A Review of Laboratory Experiments, In:_ **Ablative Plastics** edited by D´Alelio, F. G. and Parker, J. A., New York, pp. 41-68.

ZIEN, T. F. (1978), Integral Solutions of Ablation Problems with Time-Dependent Heat Flux, **AIAA Journal**, v. 16, n° 12, pp. 1287-1295.

ZIEN, T. F. (2002), Effects of Particles and Droplets on Hypersonic Ablation in Thermal Protection Systems, **11th AIAA/AAAF International Conference**, Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies, AIAA – 2002 – 5159.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

APÊNDICE A

DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO UNIDIMENSIONAL

As equações que governam o problema com variáveis na forma adimensional são:

✓ Período pré-ablativo:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial\tau} + L\theta(x,\tau) = 0 \qquad \begin{matrix} 0<\tau<\tau_f \\ 0<x<1 \end{matrix} \qquad \text{A.1}$$

com condição inicial:

$$\theta(x,\tau) = 0 \qquad \tau = 0 \text{ e } 0<x<1 \qquad \text{A.2}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x} = 0 \;;\; x = 1 \qquad \text{A.3}$$

$$\frac{-\partial\theta(x,\tau)}{\partial x} = Q(\tau) \;;\; x = 0 \qquad \text{A.4}$$

onde $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\,)$.

Para aplicarmos a TTIG define-se um problema auxiliar de autovalor na forma:

$$\mu^2\psi(x) = L\psi(x) \qquad \text{A.5}$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = 0 \qquad x = 0 \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = 0 \qquad x = 1 \tag{A.7}$$

Considerando as condições de contorno definidas pelas Equações A.6 e A.7, obtém-se que a solução da Equação A.5 são as autovalores e autofunções, respectivamente:

$$\mu_i = i\pi \qquad i = 1,....,\infty \tag{A.8}$$

$$\psi_i(x) = A_i \cos(\mu_i x) \qquad i = 1,....,\infty \tag{A.9}$$

Usando as propriedades de ortogonalidade do problema de autovalor obtém-se a norma das autofunções como:

$$N_i = \int_0^1 \cos^2(\mu_i x)dx = \frac{1}{2} \tag{A.10}$$

Para a autofunção normalizada $N_i = 1$, resulta que:

$$N_i = \int_0^1 A_i^2 \cos^2(\mu_i x)dx = 1$$

e portanto, $A_1 = 1$ e $A_i = \sqrt{2}$ $i = 2,...,\infty$, e conjuntamente pode-se escrever:

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{(1+\delta_{i1})}}$$

Multiplicando a Equação A.1 pela autofunção e a Equação A.5 por $\theta(x,\tau)$, somando-se as equações resultantes e aplicando o operador integral $\int_0^1 dx$ tem-se:

unesp

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^1 \psi_i(x)\theta(x,\tau)dx + \int_0^1 \left[\psi_i(x)L\theta(x,\tau) - \theta(x,\tau)L\psi_i(x)\right]dx + \mu_i{}^2\int_0^1 \psi_i(x)\theta(x,\tau)dx = 0 \qquad \text{A.11}$$

Definindo-se o par transformada integral e inversa como:

$$\widetilde{\theta}_i(\tau) = \int_0^1 \psi_i(x)\theta(x,\tau)dx \qquad \text{A.12}$$

$$\theta(x,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{N_i}\widetilde{\theta}_i(\tau) \qquad \text{A.13}$$

Substituindo a Equação A.12 na Equação A.11 obtém-se:

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}_i(\tau)}{\partial \tau} + \mu_i{}^2\widetilde{\theta}_i(\tau) = g_i(\tau) \qquad \text{A.14}$$

em que:

$$g_i(\tau) = \int_0^1 \left[\theta(x,\tau)L\psi_i(x) - \psi_i(x)L\theta(x,\tau)\right]dx$$

O valor de $g_i(\tau)$ é obtido utilizando-se as identidades a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi_i(x)\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x} + \psi_i(x)\frac{\partial^2\theta(x,\tau)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x,\tau)\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x}\right] = \frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x} + \theta(x,\tau)\frac{\partial^2\psi_i(x)}{\partial x^2}$$

aplicando o operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ )$ e subtraindo a segunda equação da primeira tem-se:

unesp

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi_i(x)\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x,\tau)\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x}\right]=\theta(x,\tau)L\psi_i(x)-\psi_i(x)L\theta(x,\tau)$$

e aplicando o operador integral $\int_0^1 dx$, obtém-se que:

$$g_i(\tau)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi_i(x)\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}\right]dx-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x,\tau)\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x}\right]dx$$

Considerando as condições de contorno, Equações A.3, A.4, A.6 e A.7, tem-se que:

$$g_i(\tau)=Q(\tau) \qquad \text{A.15}$$

Aplicando a transformada integral, Equação A.12, na condição inicial, Equação A.2, tem-se:

$$\widetilde{\theta}_i(0)=\int_0^1\psi_i(x)\theta(x,0)dx=0 \qquad \text{A.16}$$

Obtém-se assim uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em função do tempo, sendo a Equação A.16 a condição inicial:

$$\frac{\partial\widetilde{\theta}_i(\tau)}{\partial\tau}+\mu_i{}^2\widetilde{\theta}_i(\tau)=Q(\tau) \qquad \text{A.17}$$

$$\widetilde{\theta}_i(\tau)=0 \qquad \tau=0 \qquad \text{A.18}$$

Admitindo-se um fluxo de calor, na forma adimensional, aplicado na superfície da placa como sendo polinomial, $Q(\tau)=a+b\tau+c\tau^2$, tem-se que a solução da Equação A.17 é do tipo:

$$\widetilde{\theta}_i(\tau)=\frac{1}{\exp(\mu_i{}^2\tau)}\int_0^\tau(a+b\tau+c\tau^2)\exp(\mu_i{}^2\tau)d\tau+k\exp(-\mu_i{}^2\tau)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

com a condição inicial, Equação A.18, obtém-se que:

$$k = -\frac{1}{\mu_i^{\,2}}\left[a - \frac{b}{\mu_i^{\,2}} + \frac{2c}{\mu_i^{\,4}}\right]$$

Portanto a equação transformada em função dos parâmetros a,b e c é:

$$\widetilde{\theta}_i(\tau) = \frac{1}{\mu_i^{\,2}}\left[a + b\left(\tau - \frac{1}{\mu_i^{\,2}}\right) + c\left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\mu_i^{\,2}} + \frac{2}{\mu_i^{\,4}}\right) - \left(a - \frac{b}{\mu_i^{\,2}} + \frac{2c}{\mu_i^{\,4}}\right)\exp(-\mu_i^{\,2}\tau)\right] \qquad \text{A.19}$$

A distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é dada por:

$$\theta(x,\tau) = \theta_{av}(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i(x)}{N_i}\widetilde{\theta}_i(\tau) \qquad \text{A.20}$$

em que θ_{av} representa o potencial médio, correspondente ao índice $i = 0$, Mikhailov & Özisik (1984):

$$\theta_{av}(\tau) = \frac{1}{(1,1)}\left\{(1,f) + \int_0^{\tau}\left[\int_S \phi(x,\tau')dS + \int_V P(x,x')dV\right]d\tau\right\} \qquad \text{A.21}$$

como $\big(g(x),h(x)\big) = \int_0^1 w(x)g(x)h(x)dx$, onde $w(x)$ é a função peso e igual a 1, tem-se que:

$$(1,1) = \int_0^1 w(x).1.1.dx = 1$$

$$(1,f) = \int_0^1 w(x).1.f.dx = 0$$

em que f representa a condição inicial.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\int_V P(x,x')dV = 0$$

$$\int_S \phi(x,\tau)dS = \int_S Q(\tau)dS = Q(\tau)$$

Então se obtém que:

$$\theta_{av} = a\tau + \frac{b\tau^2}{2} + \frac{c\tau^3}{3}$$

Portanto a distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é:

$$\theta(x,\tau) = \left(a\tau + \frac{b\tau^2}{2} + \frac{c\tau^3}{3}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} 2\cos(\mu_i x)\frac{1}{\mu_i^{\,2}}\left\{\left[a + b\left(\tau - \frac{1}{\mu_i^{\,2}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c\left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\mu_i^{\,2}} + \frac{2}{\mu_i^{\,4}}\right)\right] - \left[a - \frac{b}{\mu_i^{\,2}} + \frac{2c}{\mu_{i^4}}\right]\exp(-\mu_i^{\,2}\tau)\right\} \qquad \text{A.22}$$

Concluída a fase pré-ablativa passa-se a resolver a parte ablativa. A distribuição de temperatura para $\tau = \tau_f$ é a condição inicial do período ablativo. As equações que governam o período ablativo, na forma adimensional, são:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial\tau} + L\theta(x,\tau) = 0 \qquad \begin{matrix}\tau_f < \tau < \infty \\ S(\tau) < x < 1\end{matrix} \qquad \text{A.23}$$

com condição inicial:

$$\theta(x,\tau) = \theta_f(x,\tau) \quad \tau = \tau_f \text{ e } 0 < x < 1 \qquad \text{A.24}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x} = 0, \ \text{x} = 1 \qquad \text{A.25}$$

$$\theta(x,\tau)=1,\ \mathrm{x}=\mathrm{S}(\tau) \qquad \text{A.26}$$

A condição de acoplamento na interface em ablação é:

$$\frac{-\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}+\nu\frac{dS(\tau)}{d\tau}=Q(\tau);\ x=\mathrm{S}(\tau) \qquad \text{A.27}$$

Uma mudança de variável nas Equações A.23 a A.27 se faz necessário, com o objetivo de se homogeneizar as condições de contorno. Define-se uma nova coordenada $\eta=1-x$. A posição da fronteira é designada por $x_b=S(\tau)$. Desta forma define-se:

$$\theta^*(\eta,\tau)=\theta(x,\tau)-1 \qquad \begin{matrix}\mathrm{S}(\tau)<\eta<1\\ \tau>\tau_f\end{matrix} \qquad \text{A.28}$$

Então se obtém:

$$\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\tau}+L\theta^*(\eta,\tau)=0 \qquad \tau>\tau_f,\ 0<\eta<\eta_{\mathrm{b}}(\tau) \qquad \text{A.29}$$

com condição inicial:

$$\theta^*(\eta,\tau_f)=\theta(1-\eta,\tau_f)-1 \qquad \text{A.30}$$

e com condições de contorno:

$$\theta^*(\eta,\tau)=0;\ \eta=\eta_{\mathrm{b}}(\tau) \qquad \text{A.31}$$

$$\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta}=0;\ \eta=0 \qquad \text{A.32}$$

e a equação de acoplamento:



$$\frac{\partial \theta^*(\eta,\tau)}{\partial \eta} - \nu \frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = Q(\tau);\ \eta = \eta_b(\tau) \qquad \text{A.33}$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado na fase pré-ablativa, define-se um problema auxiliar de autovalor do tipo:

$$\frac{\partial^2 \phi(\eta,\tau)}{\partial \eta^2} + \lambda^2 \phi(\eta,\tau) = 0 \qquad \text{A.34}$$

sujeito as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi(\eta,\tau)}{\partial \eta} = 0 \qquad \eta = 0 \qquad \text{A.35}$$

$$\phi(\eta,\tau) = 0 \qquad \eta = \eta_b(\tau) \qquad \text{A.36}$$

Aplicando as condições de contorno, Equações A.35 e A.36, a solução da Equação A.34 resulta nos autovalores e autofunções, respectivamente:

$$\lambda_i(\tau) = \frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b(\tau)} \qquad \text{A.37}$$

$$\phi_i(\eta,\tau) = B_i \cos[\lambda_i(\tau)\eta] \qquad \text{A.38}$$

A norma das autofunções é obtida:

$$N_i^*(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} \cos^2[\lambda_i(\tau)\eta] d\eta = \frac{\eta_b(\tau)}{2} \qquad \text{A.39}$$

Para a autofunção normalizada $N_i^* = 1$ obtém-se que:

$$N_i^* = \int_0^{\eta_b(\tau)} B_i{}^2 \cos^2(\mu_i y) dy = 1$$

e portanto:

$$B_i = \sqrt{\frac{2}{\eta_b(\tau)}}$$

Definindo-se uma autofunção normalizada como:

$$K_i(\eta,\tau) = \frac{\phi_i(\eta,\tau)}{\left[N_i^*(\tau)\right]^{1/2}} \qquad \text{A.40}$$

Multiplicando-se a Equação A.29 pela autofunção normalizada e a Equação A.34 pelo potencial de temperatura dividido pela raiz quadrada da norma, em seguida, soma-se as equações resultantes e aplicando o operador integral $\int_0^{\eta_b(\tau)} d\eta$, obtém-se:

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} K_i(\eta,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\tau}d\eta + \lambda^2\int_0^{\eta_b(\tau)} K_i(\eta,\tau)\theta^*(\eta,\tau)d\eta =$$

$$= \int_0^{\eta_b(\tau)}\left[K_i(\eta,\tau)\frac{\partial^2\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta^2} - \theta^*(\eta,\tau)\frac{\partial^2 K_i(\eta,\tau)}{\partial\eta^2}\right]d\eta \qquad \text{A.41}$$

Definindo-se o par transformada integral e inversa como:

$$\widetilde{\theta}_i^*(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} K_i(\eta,\tau)\theta^*(\eta,\tau)d\eta \qquad \text{A.42}$$

$$\theta^*(\eta,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\eta,\tau)\widetilde{\theta}_i^*(\tau) \qquad \text{A.43}$$

A integral:

$$I = \int_0^{\eta_b(\tau)}\left[K_i(\eta,\tau)\frac{\partial^2\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta^2} - \theta^*(\eta,\tau)\frac{\partial^2 K_i(\eta,\tau)}{\partial\eta^2}\right]d\eta$$

é simplificada utilizando-se as identidades abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_i(\eta,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right]=\frac{\partial K_i(\eta,\tau)}{\partial\eta}\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta}+K_i(\eta,\tau)\frac{\partial^2\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\theta^*(\eta,\tau)\frac{\partial K_i(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right]=\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta}\frac{\partial K_i(\eta,\tau)}{\partial\eta}+\theta^*(\eta,\tau)\frac{\partial^2 K_i(\eta,\tau)}{\partial\eta^2}$$

subtraindo a segunda equação da primeira e aplicando o operador integral $\int_0^{\eta_b(\tau)} d\eta$ obtém-se:

$$I=\int_0^{\eta_b(\tau)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_i(\eta,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right]d\eta-\int_0^{\eta_b(\tau)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\theta^*(\eta,\tau)\frac{\partial K_i(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right]d\eta$$

considerando as condições de contorno, Equações A.31, A.32, A.35 e A.36, tem-se:

$$I=0$$

Portanto a Equação A.41 torna-se:

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} K_i(\eta,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,\tau)}{\partial\tau}d\eta+\lambda_i^{\,2}(\tau)\tilde{\theta}_i^{\,*}(\tau)=0 \qquad \text{A.44}$$

No primeiro termo da Equação A.44 substitui-se a transformada inversa:

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} K_i(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\sum_{j=1}^{\infty}K_j(\eta,\tau)\tilde{\theta}_j^{\,*}(\tau)\right]d\eta+\lambda_i^{\,2}(\tau)\tilde{\theta}_i^{\,*}(\tau)=0$$

fazendo a derivação temporal, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\eta_b(\tau)} K_i(\eta,\tau)\left[\tilde{\theta}_j^{\,*}(\tau)\frac{\partial K_j(\eta,\tau)}{\partial\tau}+K_j(\eta,\tau)\frac{d\tilde{\theta}_j^{\,*}(\tau)}{d\tau}\right]d\eta+\lambda_i^{\,2}(\tau)\tilde{\theta}_i^{\,*}(\tau)=0$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{\theta}_j^{\,*}(\tau)\int_0^{\eta_b(\tau)}K_i(\eta,\tau)\frac{\partial K_j(\eta,\tau)}{\partial\tau}d\eta+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d\widetilde{\theta}_j^{\,*}(\tau)}{d\tau}\int_0^{\eta_b(\tau)}K_i(\eta,\tau)K_j(\eta,\tau)d\eta+\lambda_i^{\,2}(\tau)\widetilde{\theta}_i^{\,*}(\tau)=0 \qquad \text{A.45}$$

tem-se que:

$$\int_0^{\eta_b(\tau)}K_i(\eta,\tau)K_j(\eta,\tau)d\eta=\delta_{ij}\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$$

A Equação A.45 é escrita na forma:

$$\frac{d\widetilde{\theta}_i^{\,*}(\tau)}{d\tau}+\lambda_i^{\,2}\widetilde{\theta}_i^{\,*}(\tau)+\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}(\tau)\widetilde{\theta}_j^{\,*}(\tau)=0 \qquad \text{A.46}$$

em que:

$$A_{ij}(\tau)=\int_0^{\eta_b(\tau)}K_i(\eta,\tau)\frac{\partial K_j(\eta,\tau)}{\partial\tau}d\eta$$

Multiplicando-se a equação da condição inicial, Equação A.30, e aplicando-se o operador integral $\int_0^{\eta_b(\tau)}d\eta$ tem-se:

$$\int_0^{\eta_b(\tau)}K_i(\eta,\tau)\theta^*(\eta,\tau)d\eta=\int_0^{\eta_b(\tau)}K_i(\eta,\tau)\theta(1-\eta,\tau)d\eta-\int_0^{\eta_b(\tau)}K_i(\eta,\tau)d\eta$$

então tem-se que quando $\tau=\tau_f$, a condição inicial transformada é:

$$\widetilde{\theta}_i^{\,*}(\tau_f)=\frac{2\sqrt{2}}{(2i-1)\pi}(-1)^{i+1}\left[\theta_{av}(\tau_f)-1\right]+\frac{4\sqrt{2}}{\pi}(2i-1)(-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\theta}_k(\tau_f)}{(2i-1)^2-4k^2} \qquad \text{A.47}$$

em que:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\tilde{\theta}_k(\tau_f) = \frac{1}{\mu_k^{\,2}}\left[a + b\left(\tau_f - \frac{1}{\mu_k^{\,2}}\right) + c\left(\tau_f^{\,2} - \frac{2\tau_f}{\mu_k^{\,2}} + \frac{2}{\mu_k^{\,4}}\right) - \left(a - \frac{b}{\mu_k^{\,2}} + \frac{2c}{\mu_k^{\,4}}\right)\exp(-\mu_k^{\,2}\tau_f)\right]$$

$$A_{ij} = \begin{cases} 0;\ para\, i = j\ ,\ (Diniz, 1996) \\ \dfrac{1}{2\eta_b(\tau)}\dfrac{\partial \eta_b(\tau)}{\partial \tau}\dfrac{(2j-1)(2i-1)(-1)^{i+j}}{(i^2-i)-(j^2-j)};\ para\, i \neq j \end{cases}$$

Substituindo a transformada inversa na Equação A.33 tem-se a equação da restrição no acoplamento transformada:

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = \frac{\sqrt{2}}{2\nu}\frac{\pi}{[\eta_b(\tau)]^{3/2}}\sum_{j=1}^{\infty}(2j-1)\tilde{\theta}_j^{\bullet}(\tau)(-1)^j - \frac{Q(\tau)}{\nu} \qquad \text{A.48}$$

Um desenvolvimento mais detalhado pode ser obtido em Diniz (1996), onde o autor descreve o desenvolvimento analítico em coordenadas cartesiana, cilíndrica e esférica.

APÊNDICE B

DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO BIDIMENSIONAL

Este apêndice mostra detalhadamente o desenvolvimento analítico utilizado no problema de ablação bidimensional. As equações governantes do problema ablativo, na forma adimensional, são:

✓ Período pré-ablativo

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial y^2}\qquad \tau>0\qquad \begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le l\end{matrix} \tag{B.1}$$

com condição inicial:

$$\theta(x,y,\tau)=0\qquad \tau=0\qquad \begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le l\end{matrix} \tag{B.2}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial x}=-Q_1\qquad x=0\qquad 0\le y\le l \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial x}=0\qquad x=1\qquad 0\le y\le l \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=0\qquad y=0\qquad 0\le x\le 1 \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=-Q_2\qquad y=l\qquad 0\le x\le 1 \tag{B.6}$$

Na Equação B.1 o potencial de temperatura $\theta(x,y,\tau)$ pode ser obtido utilizando-se o princípio da superposição, com uma solução do tipo:

$$\theta(x,y,\tau) = \theta_1(x,y,\tau) + \theta_2(x,y,\tau) \qquad \text{B.7}$$

Substituindo a Equação B.7 na Equação B.1 obtêm-se o seguinte problema em $\theta_1(x,y,\tau)$:

$$\frac{\partial \theta_1(x,y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1(x,y,\tau)}{\partial y^2} \qquad \text{B.8}$$

com condição inicial:

$$\theta_1(x,y,\tau) = 0 \qquad \tau = 0 \qquad \text{B.9}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta_1(x,y,\tau)}{\partial x} = -Q_1 \qquad x = 0 \qquad \text{B.10}$$

$$\frac{\partial \theta_1(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 1 \qquad \text{B.11}$$

$$\frac{\partial \theta_1(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = 0 \qquad \text{B.12}$$

$$\frac{\partial \theta_1(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = l \qquad \text{B.13}$$

E o seguinte problema em $\theta_2(x,y,\tau)$:

$$\frac{\partial \theta_2(x,y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2(x,y,\tau)}{\partial y^2} \qquad \text{B.14}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

com condição inicial:

$$\theta_2(x,y,\tau) = 0 \qquad \tau = 0 \tag{B.15}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta_2(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 0 \tag{B.16}$$

$$\frac{\partial \theta_2(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 1 \tag{B.17}$$

$$\frac{\partial \theta_2(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = 0 \tag{B.18}$$

$$\frac{\partial \theta_2(x,y,\tau)}{\partial y} = -Q_2 \qquad y = l \tag{B.19}$$

Para homogeneizar as condições de contorno, define-se um novo potencial tal como:

$$\theta_1(x,y,\tau) = \theta_1^*(x,y,\tau) + \varphi(x,\tau) \tag{B.20}$$

em que:

$$\varphi(x,\tau) = a + bx + cx^2$$

Derivando em relação a variável espacial x se tem:

$$\frac{\partial \theta_1(x,y,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial \theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial x} + b + 2cx \tag{B.21}$$

e utilizando as condições de contorno definidas pelas Equações B.10 e B.11 obtêm-se que:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$b = -Q_1$$

$$c = \frac{Q_1}{2}$$

Substituindo estes valores na Equação B.20 tem-se que:

$$\theta_1(x,y,\tau) = \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau) - Q_1 x + \frac{Q_1}{2}x^2 = \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau) + Q_1\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \qquad \text{B.22}$$

Utilizando o mesmo procedimento anterior, obtêm-se:

$$\theta_2(x,y,\tau) = \theta_2^{\bullet}(x,y,\tau) + \gamma(y,\tau) \qquad \text{B.23}$$

em que:

$$\gamma(y,\tau) = p + qy + ry^2$$

Derivando-se em relação a variável espacial y:

$$\frac{\partial\theta_2(x,y,\tau)}{\partial y} = \frac{\partial\theta_2^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial y} + q + 2ry \qquad \text{B.24}$$

e utilizando as condições de contorno definidas pelas Equações B.18 e B19 tem-se que:

$$q = 0$$

$$r = -\frac{Q_2}{2l}$$

Então substituindo na Equação B.23 obtém-se:

$$\theta_2(x,y,\tau) = \theta_2^{\bullet}(x,y,\tau) - \frac{Q_2}{2l}y^2 \qquad \text{B.25}$$

Para se obter a solução para o potencial $\theta_1(x,y,\tau)$, utilizam-se as expressões abaixo e substitui-se na Equação B.8:

$$\frac{\partial\theta_1(x,y,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial x} - Q_1 + Q_1 x$$

$$\frac{\partial^2\theta_1(x,y,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial x^2} + Q_1$$

$$\frac{\partial^2\theta_1(x,y,\tau)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial\theta_1(x,y,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial\tau} - \dot{Q}_1 x + \dot{Q}_1\frac{x^2}{2} = \frac{\partial\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial\tau} + \dot{Q}_1\left(\frac{x^2}{2} - x\right)$$

obtêm-se um novo problema em $\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)$ com condições de contorno homogêneas:

$$\frac{\partial\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial y^2} + Q_1 + \dot{Q}_1\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{B.26}$$

com condição inicial:

$$\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau) = Q_1(0)\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \qquad \tau = 0 \qquad \text{B.27}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 0 \qquad \text{B.28}$$

$$\frac{\partial \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 1 \tag{B.29}$$

$$\frac{\partial \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = 0 \tag{B.30}$$

$$\frac{\partial \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = l \tag{B.31}$$

Portanto tem-se que:

$$\frac{\partial \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1^{\bullet}(x,y,\tau)}{\partial y^2} + P_1(x,y,\tau) \tag{B.32}$$

onde:

$$P_1(x,y,\tau) = Q_1 + \dot{Q}_1\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

com condição inicial:

$$\theta_1^{\bullet}(x,y,\tau) = f_1(x,y,\tau) = Q_1(0)\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \qquad \tau = 0 \tag{B.33}$$

Inicialmente transforma-se a Equação B.32 na direção y, onde para se aplicar a TTIG, define-se um problema auxiliar de autovalor do tipo:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,y,\tau)}{\partial y^2} + \mu^2 \psi(x,y,\tau) = 0 \tag{B.34}$$

com as seguintes condições de contorno:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\frac{\partial \psi(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = 0 \tag{B.35}$$

$$\frac{\partial \psi(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = l \tag{B.36}$$

A solução da Equação B.34 conduz aos autovalores e autofunções, respectivamente:

$$\mu_i = (i-1)\frac{\pi}{l} \qquad i = 1,2,...\infty \tag{B.37}$$

$$\psi_i(x,y,\tau) = A_i \cos(\mu_i y) \tag{B.38}$$

Neste caso o autovalor $\mu_1 = 0$ é parte da solução, pois todas as condições de contorno são do 2° tipo. Utilizando-se da propriedade de ortogonalidade das autofunções normalizadas é unitária, resulta que a norma das autofunções:

$$N_i = \int_0^l A_i^2 \psi_i^2(x,y,\tau)dy = 1$$

$$N_i = \int_0^l A_i^2 \psi_i^2(x,y,\tau)dy = \frac{l}{2} \tag{B.39}$$

e portanto:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{l}} \quad \text{e} \quad A_i = \frac{2}{\sqrt{l}} \qquad i = 2,3,...\infty$$

e conjuntamente pode-se escrever:

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{l(1+\delta_{i1})}} \tag{B.40}$$

em que $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, é o delta de Kronecker.

Multiplicando a Equação B.32 pela autofunção $\psi_i(x,y,\tau)$ e a Equação B.34 pelo potencial $\theta_1^*(x,y,\tau)$, tem-se:

$$\frac{\partial \theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial \tau}\psi_i(x,y,\tau) = \frac{\partial^2 \theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial x^2}\psi_i(x,y,\tau) + \frac{\partial^2 \theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y^2}\psi_i(x,y,\tau) + P_1(x,y,\tau)\psi_i(x,y,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y^2}\theta_1^*(x,y,\tau) + \mu^2 \psi_i(x,y,\tau)\theta_1^*(x,y,\tau) = 0$$

Define-se um operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\,)$ e aplica-se nas equação anteriores. Somando-se as duas equações resultantes e aplicando o operador integral $\int_0^l dy$, resulta em:

$$\int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial \theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial \tau}dy + \mu_i^2 \int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\theta_1^*(x,y,\tau)dy = \int_0^l \frac{\partial^2 \theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial x^2}\psi_i(x,y,\tau)dy +$$

$$+ \int_0^l P_1(x,y,\tau)\psi_i(x,y,\tau)dy + \int_0^l \left[\theta_1^*(x,y,\tau)L\psi_i(x,y,\tau) - \psi_i(x,y,\tau)L\theta_1^*(x,y,\tau)\right]dy \qquad \text{B.41}$$

Definindo-se o par Transformada Integral e Inversa, respectivamente:

$$\widetilde{\theta}_i(x,\tau) = \int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\theta_1^*(x,y,\tau)dy \qquad \text{B.42}$$

$$\theta_1^*(x,y,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x,y,\tau)\widetilde{\theta}_i(x,\tau) \qquad \text{B.43}$$

A integral:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\int_0^l \left[\theta_1^*(x,y,\tau) L\psi_i(x,y,\tau) - \psi_i(x,y,\tau) L\theta_1^*(x,y,\tau)\right] dy$$

é simplificada utilizando-se as identidades:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y} + \psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial^2\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\theta_1^*(x,y,\tau)\frac{\partial\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y} + \theta_1^*(x,y,\tau)\frac{\partial^2\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y^2}$$

aplicando o operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ )$ nas equações anteriores obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y} - \psi_i(x,y,\tau) L\theta_i^*(x,y,\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\theta_1^*(x,y,\tau)\frac{\partial\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y} - \theta_1^*(x,y,\tau) L\psi_i(x,y,\tau)$$

subtraindo a segunda equação da primeira e aplicando o operador integral $\int_0^l dy$:

$$I = \int_0^l \frac{\partial}{\partial y}\left[\psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial\theta_1^*(x,y,\tau)}{\partial y}\right] dy - \int_0^l \frac{\partial}{\partial y}\left[\theta_1^*(x,y,\tau)\frac{\partial\psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\right] dy$$

utilizando as condições de contorno, Equações B.30, B.31, B.35 e B.36, tem-se que:

$$I = \int_0^l \left[\theta_1^*(x,y,\tau) L\psi_i(x,y,\tau) - \psi_i(x,y,\tau) L\theta_1^*(x,y,\tau)\right] dy = 0$$

Substituindo a Equação B.42 na Equação B.41 tem-se o problema transformado:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial \tau} + \mu_i{}^2 \widetilde{\theta}_i(x,\tau) = \frac{\partial^2 \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x^2} + \widetilde{P}_i(x,\tau) \qquad \text{B.44}$$

com condição inicial:

$$\widetilde{\theta}_i(x,\tau) = \widetilde{f}_i(x,\tau) \quad \tau = 0 \qquad \text{B.45}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \qquad \text{B.46}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 1 \qquad \text{B.47}$$

em que:

$$\widetilde{P}_i(x,\tau) = \int_0^l \psi_i(x,y,\tau) P_1(x,y,\tau) dy$$

$$\widetilde{f}_i(x,\tau) = \int_0^l \psi_i(x,y,\tau) f_1(x,y) dy$$

Utilizando o mesmo procedimento anterior para se transformar o problema na direção x, onde define-se um problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{\partial^2 \phi(x,\tau)}{\partial x^2} + \lambda^2 \phi(x,\tau) = 0 \qquad \text{B.48}$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \qquad \text{B.49}$$

$$\frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 1 \tag{B.50}$$

A solução da Equação B.48 nos conduz aos autovalores e as autofunções, respectivamente:

$$\lambda_m = (m-1)\pi \qquad m = 1,2,...\infty \tag{B.51}$$

$$\phi_m(x,\tau) = B_m \cos(\lambda_m x) \tag{B.52}$$

em que:

$$B_m = \sqrt{\frac{2}{(1+\delta_{m1})}}$$

Multiplicando a Equação B.44 pela autofunção $\phi_m(x,\tau)$ e a Equação B.48 pelo potencial $\widetilde{\theta}_i(x,\tau)$, obtêm-se:

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial \tau}\phi_m(x,\tau) + {\mu_i}^2 \widetilde{\theta}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau) = \frac{\partial^2 \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x^2}\phi_m(x,\tau) + \widetilde{P}_i \phi_m(x,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_m(x,\tau)}{\partial x^2}\widetilde{\theta}_i(x,\tau) + {\lambda_m}^2 \phi_m(x,\tau)\widetilde{\theta}_i(x,\tau) = 0$$

Define-se um operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\,)$ e aplica-se nas equações acima. Somando-se as equações resultantes e aplicando o operador integral $\int_0^1 dx$, tem-se:

$$\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial \tau}\phi_m(x,\tau)dx + ({\mu_i}^2 + {\lambda_m}^2)\int_0^1 \widetilde{\theta}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1 \widetilde{P}_i \phi_m(x,\tau)dx +$$

$$+ \int_0^1 \left[\widetilde{\theta}_i(x,\tau)L\phi_m(x,\tau) - \phi_m(x,\tau)L\widetilde{\theta}_i(x,\tau)\right]dx \tag{B.53}$$

BCpIS FEIS - UNESP

Define-se o par Transformada Integral e Inversa, respectivamente:

$$\hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{\theta}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx \qquad \text{B.54}$$

$$\tilde{\theta}_i(x,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(x,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) \qquad \text{B.55}$$

A integral:

$$\int_0^1 \left[\tilde{\theta}_i(x,\tau)L\phi_m(x,\tau) - \phi_m(x,\tau)L\tilde{\theta}_i(x,\tau)\right]dx$$

é simplificada utilizando-se as identidades:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi_m(x,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial\phi_m(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x} + \phi_m(x,\tau)\frac{\partial^2\tilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{\theta}_i(x,\tau)\frac{\partial\phi_m(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial\tilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\phi_m(x,\tau)}{\partial x} + \tilde{\theta}_i(x,\tau)\frac{\partial^2\phi_m(x,\tau)}{\partial x^2}$$

aplicando o operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ )$ nas equações anteriores:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi_m(x,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial\phi_m(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x} - \phi_m(x,\tau)L\tilde{\theta}_i(x,\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{\theta}_i(x,\tau)\frac{\partial\phi_m(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial\tilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\phi_m(x,\tau)}{\partial x} - \tilde{\theta}_i(x,\tau)L\phi_m(x,\tau)$$

subtraindo a segunda equação da primeira e aplicando o operador integral $\int_0^1 dx$ obtém-se:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$II = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\phi_m(x,\tau)\frac{\partial \widetilde{\theta}_i(x,\tau)}{\partial x}\right]dx - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\widetilde{\theta}_i(x,\tau)\frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x}\right]dx$$

utilizando as condições de contorno, Equações B.46, B.47, B.49 e B.50, tem-se que:

$$II = \int_0^1 \left[\widetilde{\theta}_i(x,\tau)L\phi_m(x,\tau) - \phi_m(x,\tau)L\widetilde{\theta}_i(x,\tau)\right]dx = 0$$

Portanto substituindo a Equação B.54 na Equação B.53, tem-se a equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)}{\partial \tau} + (\mu_i{}^2 + \lambda_m{}^2)\hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) = \hat{\tilde{P}}_{im}(\tau) \qquad \text{B.56}$$

com condição inicial:

$$\hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) = \hat{\tilde{f}}_{im}(\tau) \quad \tau = 0 \qquad \text{B.57}$$

em que:

$$\hat{\tilde{P}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \widetilde{P}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1\int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)P_1(x,y,\tau)dydx$$

$$\hat{\tilde{f}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \widetilde{f}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1\int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)f_1(x,y)dydx$$

Para $i = m = 1$ se tem que:

$$\psi_1(x,y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

$$\phi_1(x,\tau) = 1$$

e para $i = m = 2,3,...,\infty$:

$$\psi_i(x,y,\tau) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\mu_i y) \qquad i = 2,3,...$$

$$\phi_m(x,\tau) = \sqrt{2}\cos(\lambda_m x) \qquad i = 2,3,...$$

Então se tem que:

$$\hat{\hat{P}}_{11}(\tau) = \int_0^1\int_0^l \frac{1}{\sqrt{l}}\left[Q_1 + \dot{Q}_1\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]dydx = \sqrt{l}\left(Q_1 + \frac{1}{3}\dot{Q}_1\right) \qquad \text{B.58}$$

$$\hat{\hat{f}}_{11}(\tau) = \int_0^1\int_0^l \frac{1}{\sqrt{l}}Q_1(0)\left(x - \frac{x^2}{2}\right)dydx = \frac{\sqrt{l}}{3}Q_1(0) \qquad \text{B.59}$$

$$\hat{\hat{P}}_{1m}(\tau) = \int_0^1\int_0^l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}}\left[Q_1 + \dot{Q}_1\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]\cos(\lambda_m x)dydx =$$

$$= \sqrt{2l}\left\{Q_1\frac{\text{sen}(\lambda_m x)}{\lambda_m}\Bigg|_0^1 + \dot{Q}_1\left[\frac{\cos(\lambda_m x)}{{\lambda_m}^2} + \frac{x\,\text{sen}(\lambda_m x)}{\lambda_m} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x\cos(\lambda_m x)}{{\lambda_m}^2} + \left(\frac{x^2}{\lambda_m} - \frac{2}{{\lambda_m}^3}\right)\text{sen}(\lambda_m x)\right)\right]\Bigg|_0^1\right\}$$

$$\hat{\hat{P}}_{1m}(\tau) = \sqrt{2l}\dot{Q}_1\left[\frac{\cos(\lambda_m)}{{\lambda_m}^2} - \frac{1}{{\lambda_m}^2} - \frac{\cos(\lambda_m)}{{\lambda_m}^2}\right] = -\sqrt{2l}\dot{Q}_1(\tau)\frac{1}{{\lambda_m}^2} \qquad \text{B.60}$$

$$\hat{\hat{f}}_{1m}(\tau) = \int_0^1\int_0^l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}}Q_1(0)\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\cos(\lambda_m x)dydx = -\sqrt{2l}Q_1(0)\frac{1}{{\lambda_m}^2} \qquad \text{B.61}$$

manteve-se $i = 1$, pois como definido anteriormente o potencial $\theta_1^*(x,y,\tau)$ é uma função de x, pelo princípio da superposição, então expandiu-se apenas as autofunções de x. Então se tem que a distribuição de temperatura é:

$$\theta_1(x,y,\tau) = \theta_1^*(x,y,\tau) + Q_1\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \qquad \text{B.62}$$

utilizando a equação de inversão resulta:

$$\theta_1(x,y,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) + Q_1\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \qquad \text{B.63}$$

Portanto:

$$\theta_1(x,y,\tau) = A_1B_1\hat{\tilde{\theta}}_{11}(\tau) + A_1\sum_{m=2}^{\infty}B_m\cos(\lambda_m x)\hat{\tilde{\theta}}_{1m}(\tau) + Q_1\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \qquad \text{B.64}$$

Para se obter a solução para o potencial $\theta_2(x,y,\tau)$ utiliza-se as expressões abaixo e substitui-se na Equação B.14:

$$\frac{\partial\theta_2(x,y,\tau)}{\partial y} = \frac{\partial\theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y} - \frac{Q_2}{l}y$$

$$\frac{\partial^2\theta_2(x,y,\tau)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y^2} - \frac{Q_2}{l}$$

$$\frac{\partial^2\theta_2(x,y,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta_2(x,y,\tau)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial\theta_2(x,y,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial\theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial\tau} - \dot{Q}_2\frac{y^2}{2l}$$

Obtêm-se assim o seguinte problema em $\theta_2^*(x,y,\tau)$ com condições de contorno homogêneas:

$$\frac{\partial\theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y^2} + P_2(x,y,\tau) \qquad \text{B.65}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

em que:

$$P_2(x,y,\tau) = -\frac{Q_2}{l} + \frac{\dot{Q}_2}{2l} y^2$$

com condição inicial:

$$\theta_2^*(x,y,\tau) = f_2(x,y,\tau) = Q_2(0)\frac{y^2}{2l} \quad \tau = 0 \qquad \text{B.66}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \qquad \text{B.67}$$

$$\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 1 \qquad \text{B.68}$$

$$\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \qquad \text{B.69}$$

$$\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \quad y = l \qquad \text{B.70}$$

Realizando o mesmo procedimento utilizado para se obter o potencial $\theta_1^*(x,y,\tau)$, transforma-se inicialmente na direção y, definindo-se um problema auxiliar:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,y,\tau)}{\partial y^2} + \mu^2 \psi(x,y,\tau) = 0 \qquad \text{B.71}$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial \psi(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \qquad \text{B.72}$$

$$\frac{\partial \psi(x,y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = l \tag{B.73}$$

cuja solução para Equação B.71 são os autovalores e as autofunções definidas pelas Equações B.37 e B.38.

Multiplicando a Equação B.65 pela autofunção $\psi_i(x,y,\tau)$ e a Equação B.71 pelo potencial $\theta_2^*(x,y,\tau)$, tem-se:

$$\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial \tau}\psi_i(x,y,\tau) = \frac{\partial^2 \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial x^2}\psi_i(x,y,\tau) + \frac{\partial^2 \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y^2}\psi_i(x,y,\tau) + P_2(x,y,\tau)\psi_i(x,y,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y^2}\theta_2^*(x,y,\tau) + \mu^2 \psi_i(x,y,\tau)\theta_2^*(x,y,\tau) = 0$$

Define-se um operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\,)$ e aplica-se nas equações acima. Somando-se as equações resultantes e aplicando o operador integral $\int_0^l dy$, tem-se:

$$\int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial \tau}dy + \mu_i^2 \int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\theta_2^*(x,y,\tau)dy = \int_0^l \frac{\partial^2 \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial x^2}\psi_i(x,y,\tau)dy +$$

$$+ \int_0^l P_2(x,y,\tau)\psi_i(x,y,\tau)dy + \int_0^l \left[\theta_2^*(x,y,\tau)L\psi_i(x,y,\tau) - \psi_i(x,y,\tau)L\theta_2^*(x,y,\tau)\right]dy \tag{B.74}$$

Define-se o par Transformada Integral e Inversa, respectivamente:

$$\tilde{Z}_i(x,\tau) = \int_0^l \psi_i(x,y,\tau)\theta_2^*(x,y,\tau)dy \tag{B.75}$$

$$\theta_2^*(x,y,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x,y,\tau)\tilde{Z}_i(x,\tau) \tag{B.76}$$

A integral:

$$\int_0^l \left[\theta_2^*(x,y,\tau) L\psi_i(x,y,\tau) - \psi_i(x,y,\tau) L\theta_2^*(x,y,\tau)\right] dy$$

é simplificada utilizando as identidades:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y} + \psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial^2 \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\theta_2^*(x,y,\tau)\frac{\partial \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y} + \theta_2^*(x,y,\tau)\frac{\partial^2 \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y^2}$$

aplicando o operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ )$ nas equações anteriores:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y} - \psi_i(x,y,\tau) L\theta_2^*(x,y,\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\theta_2^*(x,y,\tau)\frac{\partial \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\right] = \frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y}\frac{\partial \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y} - \theta_2^*(x,y,\tau) L\psi_i(x,y,\tau)$$

subtraindo a segunda equação da primeira e aplicando o operador integral $\int_0^l dy$:

$$III = \int_0^l \frac{\partial}{\partial y}\left[\psi_i(x,y,\tau)\frac{\partial \theta_2^*(x,y,\tau)}{\partial y}\right] dy - \int_0^l \frac{\partial}{\partial y}\left[\theta_2^*(x,y,\tau)\frac{\partial \psi_i(x,y,\tau)}{\partial y}\right] dy$$

Utilizando as condições de contorno, Equações B.69, B.70, B.72 e B73, tem-se que:

$$III = \int_0^l \left[\theta_2^*(x,y,\tau) L\psi_i(x,y,\tau) - \psi_i(x,y,\tau) L\theta_2^*(x,y,\tau)\right] dy = 0$$

Substituindo a Equação B.75 na Equação B.74, resulta na Equação B.65 transformada:

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial \tau} + \mu_i{}^2 \widetilde{Z}_i(x,\tau) = \frac{\partial^2 \widetilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x^2} + \widetilde{S}_i(x,\tau) \qquad \text{B.77}$$

com condição inicial:

$$\widetilde{Z}_i(x,\tau) = \widetilde{h}_i(x,\tau) \quad \tau = 0 \qquad \text{B.78}$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \qquad \text{B.79}$$

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 1 \qquad \text{B.80}$$

em que:

$$\widetilde{S}_i(x,\tau) = \int_0^l P_2(x,y,\tau)\psi_i(x,y,\tau)dy$$

$$\widetilde{h}_i(x,\tau) = \int_0^l f_2(x,y)\psi_i(x,y,\tau)dy$$

Para se transformar a Equação B.77 segundo a direção x, define-se um problema auxiliar do tipo:

$$\frac{\partial^2 \phi(x,\tau)}{\partial x^2} + \lambda^2 \phi(x,\tau) = 0 \qquad \text{B.81}$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \qquad \text{B.82}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 1 \tag{B.83}$$

cuja solução da Equação B.81 são os autovalores e as autofunções definidas pelas Equações B.51 e B.52

Multiplicando a Equação B.77 pela autofunção $\phi_m(x,\tau)$ e a Equação B.81 pelo potencial $\widetilde{Z}_i(x,\tau)$ resulta em:

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial \tau}\phi_m(x,\tau) + {\mu_i}^2 \widetilde{Z}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau) = \frac{\partial^2 \widetilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x^2}\phi_m(x,\tau) + \widetilde{S}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_m(x,\tau)}{\partial x^2}\widetilde{Z}_i(x,\tau) + {\lambda_m}^2 \phi_m(x,\tau)\widetilde{Z}_i(x,\tau) = 0$$

Define-se um operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ )$ e aplica-se nas equações anteriores. Somando-se as equações resultantes e aplicando-se o operador integral $\int_0^1 dx$, obtêm-se:

$$\int_0^1 \phi_m(x,\tau)\frac{\partial \widetilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial \tau}dx + ({\mu_i}^2 + {\lambda_m}^2)\int_0^1 \phi_m(x,\tau)\widetilde{Z}_i(x,\tau)dx = \int_0^1 \widetilde{S}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx +$$

$$+ \int_0^1 \left[\widetilde{Z}_i(x,\tau)L\phi_m(x,\tau) - \phi_m(x,\tau)L\widetilde{Z}_i(x,\tau)\right]dx \tag{B.84}$$

Define-se o par Transformada Integral e Inversa, respectivamente:

$$\hat{\widetilde{Z}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \phi_m(x,\tau)\widetilde{Z}_i(x,\tau)dx \tag{B.85}$$

$$\widetilde{Z}_i(x,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(x,\tau)\hat{\widetilde{Z}}_{im}(\tau) \tag{B.86}$$

A integral:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\int_0^1 \left[\tilde{Z}_i(x,\tau) L\phi_m(x,\tau) - \phi_m(x,\tau) L\tilde{Z}_i(x,\tau)\right] dx$$

é simplificada utilizando as seguintes identidades:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi_m(x,\tau)\frac{\partial \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x} + \phi_m(x,\tau)\frac{\partial^2 \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{Z}_i(x,\tau)\frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x} + \tilde{Z}_i(x,\tau)\frac{\partial^2 \phi_m(x,\tau)}{\partial x^2}$$

aplicando o operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ )$ nas equações anteriores:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi_m(x,\tau)\frac{\partial \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x} - \phi_m(x,\tau) L\tilde{Z}_i(x,\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{Z}_i(x,\tau)\frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x} - \tilde{Z}_i(x,\tau) L\phi_m(x,\tau)$$

e subtraindo a segunda equação da primeira e aplicando o operador integral $\int_0^1 dx$ obtém-se:

$$IV = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\phi_m(x,\tau)\frac{\partial \tilde{Z}_i(x,\tau)}{\partial x}\right] dx - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{Z}_i(x,\tau)\frac{\partial \phi_m(x,\tau)}{\partial x}\right] dx$$

Utilizando as condições de contorno, Equações B.79, B.80, B.82 e B.83, resulta que:

$$IV = \int_0^1 \left[\tilde{Z}_i(x,\tau) L\phi_m(x,\tau) - \phi_m(x,\tau) L\tilde{Z}_i(x,\tau)\right] dx = 0$$

Portanto substituindo a Equação B.85 na Equação B.84 obtêm-se a equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau)}{\partial \tau} + (\mu_i{}^2 + \lambda_m{}^2)\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau) = \hat{\tilde{S}}_{im}(\tau) \qquad \text{B.87}$$

com condição inicial:

$$\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau) = \hat{\tilde{h}}_{im}(\tau) \quad \tau = 0 \qquad \text{B.88}$$

em que:

$$\hat{\tilde{S}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{S}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1\int_0^l P_2(x,y,\tau)\psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)dydx$$

$$\hat{\tilde{h}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{h}_i(x,\tau)\phi_m(x,\tau)dx = \int_0^1\int_0^l f_2(x,y)\psi_i(x,y,\tau)\phi_m(x,\tau)dydx$$

Como $\theta_2^*(x,y,\tau)$ é uma função de y, expandiu-se apenas as autofunções em y. Portanto temos:

$$\hat{\tilde{S}}_{11}(\tau) = \int_0^1\int_0^l \frac{1}{\sqrt{l}}\left(-\frac{Q_2}{l} + \frac{\dot{Q}_2}{2l}y^2\right)dydx = \frac{1}{\sqrt{l}}\left(-Q_2 + \frac{\dot{Q}_2 l^2}{6}\right) = \sqrt{l}\left(-\frac{Q_2}{l} + \dot{Q}_2\frac{l}{6}\right) \qquad \text{B.89}$$

$$\hat{\tilde{h}}_{11}(\tau) = \int_0^1\int_0^l \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{Q_2(0)}{2l}y^2 dydx = \sqrt{l}Q_2(0)\frac{l}{6} \qquad \text{B.90}$$

$$\hat{\tilde{S}}_{i1}(\tau) = \int_0^1\int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}}\left(-\frac{Q_2}{l} + \frac{\dot{Q}_2}{2l}y^2\right)\cos(\mu_i y)dydx$$

$$\hat{\tilde{S}}_{i1}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left\{-\frac{Q_2}{l}\frac{\text{sen}(\mu_i y)}{\mu_i}\Bigg|_0^l + \frac{\dot{Q}_2}{2l}\left[\frac{2y}{\mu_i{}^2}\cos(\mu_i y) + \left(\frac{y^2}{\mu_i{}^2} - \frac{2}{\mu_i{}^3}\right)\text{sen}(\mu_i y)\right]_0^l\right\} = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\dot{Q}_2}{2l}\frac{2l}{\mu_i{}^2}\cos(\mu_i l)$$

$$\hat{\tilde{S}}_{i1}(\tau) = \sqrt{2l}\dot{Q}_2\frac{l}{\mu_i{}^2}\cos(\mu_i^*) \qquad \text{B.91}$$

$$\hat{\tilde{h}}_{i1}(\tau) = \int_0^1 \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{Q_2(0)}{2l} y^2 \cos(\mu_i y) dy dx = \sqrt{2l} Q_2(0) \frac{l}{\mu_i^{\,2}} \cos(\mu_i^*) \qquad \text{B.92}$$

em que:

$$\mu_i^* = \mu_i l = (i-1)\pi$$

Então se tem que a distribuição de temperatura é:

$$\theta_2(x,y,\tau) = \theta_2^{\,*}(x,y,\tau) - \frac{Q_2}{2l} y^2 \qquad \text{B.93}$$

utilizando a equação de inversão resulta:

$$\theta_2(x,y,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_i(x,y,\tau) \phi_m(x,\tau) \hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau) - \frac{Q_2}{2l} y^2 \qquad \text{B.94}$$

Portanto:

$$\theta_2(x,y,\tau) = A_1 B_1 \hat{\tilde{Z}}_{11} + B_1 \sum_{i=2}^{\infty} A_i \cos(\mu_i y) \hat{\tilde{Z}}_{i1}(\tau) - \frac{Q_2}{2l} y^2 \qquad \text{B.95}$$

Sendo:

$$\theta(x,y,\tau) = \theta_1(x,y,\tau) + \theta_2(x,y,\tau)$$

tem-se que:

$$\theta(x,y,\tau) = A_1 B_1 \hat{\tilde{\theta}}_{11}(\tau) + A_1 \sum_{m=2}^{\infty} B_m \cos(\lambda_m x) \hat{\tilde{\theta}}_{1m}(\tau) + A_1 B_1 \hat{\tilde{Z}}_{11}(\tau) + B_1 \sum_{i=2}^{\infty} A_i \cos(\mu_i y) \hat{\tilde{Z}}_{i1}(\tau) +$$

$$+ Q_1 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) - \frac{Q_2}{2l} y^2 \qquad \text{B.96}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

A solução da Equação B.56, juntamente com a condição inicial, Equação B.57, resulta em:

$$\hat{\tilde{\theta}}_{11}(\tau) = \exp[-(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]\left\{\frac{\sqrt{l}}{3}Q_1(0) + \sqrt{l}\left[\int_0^\tau Q_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3}\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]d\tau\right]\right\} \qquad \text{B.97}$$

$$\hat{\tilde{\theta}}_{1m}(\tau) = \exp[-(\mu_1{}^2 + \lambda_m{}^2)\tau]\left[-\sqrt{2l}Q_1(0)\frac{1}{\lambda_m{}^2} - \frac{\sqrt{2l}}{\lambda_m{}^2}\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_m{}^2)\tau]d\tau\right] \qquad \text{B.98}$$

pois a solução para uma equação diferencial ordinária do tipo:

$$\frac{\partial \tilde{X}_i(\tau)}{\partial \tau} + \mu_i{}^2\tilde{X}_i(\tau) = Q_1(\tau)$$

é obtida da seguinte forma:

$$\tilde{X}_i(\tau) = k\exp\left(-\int_0^\tau \mu_i{}^2 d\tau\right) + \exp\left(-\int_0^\tau \mu_i{}^2 d\tau\right)\int_0^\tau Q_1(\tau)\exp(\mu_i{}^2\tau)d\tau$$

em que k é obtido a partir da condição inicial.

E também da Equação B.87, utilizando a mesma definição, resulta em:

$$\hat{\tilde{Z}}_{11}(\tau) = \exp[-(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]\left\{\sqrt{l}Q_2(0)\frac{l}{6} + \sqrt{l}\left[-\frac{1}{l}\int_0^\tau Q_2(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{l}{6}\int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_1{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]d\tau\right]\right\} \qquad \text{B.99}$$

$$\hat{\tilde{Z}}_{i1}(\tau) = \exp[-(\mu_i{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]\left[\sqrt{2l}Q_2(0)\frac{l}{\mu_i{}^2}\cos(\mu_i^*) + \sqrt{2l}\frac{l}{\mu_i{}^2}\cos(\mu_i^*)\int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_i{}^2 + \lambda_1{}^2)\tau]d\tau\right]$$

B.100

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Portanto se tem que o potencial de temperatura do período pré-ablativo é:

$$\theta(x,y,\tau)=Q_1(\tau)\left(\frac{x^2}{2}-x\right)-Q_2(\tau)\frac{y^2}{2l}+\frac{1}{\sqrt{l}}\exp[-(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]\left\{\frac{\sqrt{l}}{3}Q_1(0)+\sqrt{l}Q_2(0)\frac{l}{6}+\right.$$

$$+\sqrt{l}\left[\int_0^\tau Q_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]d\tau+\frac{1}{3}\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]d\tau\right]+$$

$$\left.+\sqrt{l}\left[-\frac{1}{l}\int_0^\tau Q_2(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]d\tau+\frac{l}{6}\int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]d\tau\right]\right\}+$$

$$-\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{m=2}^{\infty}\sqrt{2}\cos(\lambda_m x)\exp[-(\mu_1{}^2+\lambda_m{}^2)\tau]\frac{\sqrt{2l}}{\lambda_m{}^2}\left[Q_1(0)+\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_m{}^2)\tau]d\tau\right]+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{i=2}^{\infty}\cos(\mu_i y)\exp[-(\mu_i{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]\frac{l\sqrt{2l}}{\mu_i{}^2}\cos(\mu_i^*)\left[Q_2(0)+\int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_i{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]d\tau\right] \qquad \text{B.101}$$

Compactando a Equação B.101 tem-se:

$$\theta(x,y,\tau)=\left[\frac{Q_1(0)}{3}+\frac{l}{6}Q_2(0)+I_{1\tau}+\frac{1}{3}I_{2\tau}-\frac{1}{l}I_{4\tau}+\frac{l}{6}I_{5\tau}\right]\exp[-(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]+$$

$$-2\sum_{m=2}^{\infty}\cos(\lambda_m x)\frac{1}{\lambda_m{}^2}\exp[-(\mu_1{}^2+\lambda_m{}^2)\tau][Q_1(0)+I_{3\tau}]+Q_1(\tau)\left(\frac{x^2}{2}-x\right)-Q_2(\tau)\frac{y^2}{2l}+$$

$$+2l\sum_{i=2}^{\infty}\cos(\mu_i^*)\frac{1}{\mu_i{}^2}\cos(\mu_i y)\exp[-(\mu_i{}^2+\lambda_1{}^2)\tau][Q_2(0)+I_{6\tau}] \qquad \text{B.102}$$

em que:

$$I_{1\tau}=\int_0^\tau Q_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]d\tau$$

$$I_{2\tau}=\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_1{}^2)\tau]d\tau$$

$$I_{3\tau}=\int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau)\exp[(\mu_1{}^2+\lambda_m{}^2)\tau]d\tau$$

$$I_{4\tau} = \int_0^{\tau} Q_2(\tau)\exp[(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau$$

$$I_{5\tau} = \int_0^{\tau} \dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau$$

$$I_{6\tau} = \int_0^{\tau} \dot{Q}_2(\tau)\exp[(\mu_i^{\,2} + \lambda_1^{\,2})\tau]d\tau$$

Os fluxos de calor foram deixados genéricos, pois estes são dependentes do tempo, podendo ser polinomiais, potenciais, exponenciais ou constantes. Estas integrais podem ser facilmente resolvidas pela aplicação de integração por partes, mas que dependem da especificação do fluxo de calor absorvido e rejeitado.

Concluído o período pré-ablativo passamos a resolver o período ablativo, a condição suficiente e necessária é o campo de temperatura obtido no período pré-ablativo como condição inicial para o período ablativo em $\tau = \tau_f$.

✓ Período ablativo:

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta(x,y,\tau)}{\partial y^2} \qquad \tau > \tau_f \qquad \begin{matrix} S \le x \le 1 \\ 0 \le y \le l \end{matrix} \qquad \text{B.103}$$

com condição inicial:

$$\theta(x,y,\tau) = \theta_{in}(x,y,\tau) \qquad \tau = \tau_f \qquad \begin{matrix} S \le x \le 1 \\ 0 \le y \le l \end{matrix} \qquad \text{B.104}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\theta(x,y,\tau) = 1 \qquad x = S(y,\tau) \qquad 0 \le y \le l \qquad \text{B.105}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial x} = 0 \qquad x = 1 \qquad 0 \le y \le l \qquad \text{B.106}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=0 \qquad y=0 \qquad S\le x\le 1 \tag{B.107}$$

$$\frac{\partial\theta(x,y,\tau)}{\partial y}=-Q_2 \qquad y=l \qquad S\le x\le 1 \tag{B.108}$$

em que $\theta_{in}(x,y,\tau)$ é a distribuição de temperatura no tempo ablativo τ_f, obtido no período pré-ablativo. A equação de acoplamento na interface ablativa é:

$$-\left[1+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial\theta}{\partial x}+\nu\frac{\partial S}{\partial\tau}=Q_1 \qquad x=S(y,\tau) \tag{B.109}$$

que é a equação de balanço de calor na fronteira ablativa obtida por Hsiao (1983), Hsiao & Chung (1984).

Uma mudança de variável nas Equações se faz necessário, no qual se objetiva homogeneizar as condições de contorno. Desta forma define-se:

$$\theta^*(x,y,\tau)=\theta(x,y,\tau)-1 \tag{B.110}$$

e uma mudança de eixo na direção x, onde a nova variável é definida $\eta=1-x$. Então se tem que as equações governantes do período ablativo, na nova variável, são:

$$\frac{\partial^2\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial y^2}=\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\tau} \qquad \begin{matrix}\tau\ge\tau_f\\ 0\le y\le l\\ 0\le\eta\le\eta_b(y,\tau)\end{matrix} \tag{B.111}$$

com condição inicial:

$$\theta^*(\eta,y,\tau)=\theta_{inicial}(x,y,\tau)-1 \qquad \tau=\tau_f \tag{B.112}$$

com as condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \eta} = 0 \qquad \eta = 0 \qquad 0 \le y \le l \tag{B.113}$$

$$\theta^*(\eta, y, \tau) = 0 \qquad \eta = \eta_b(y, \tau) \qquad 0 \le y \le l \tag{B.114}$$

$$\frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = 0 \qquad 0 \le \eta \le \eta_b(y, \tau) \tag{B.115}$$

$$\frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y} = -Q_2(\tau) \qquad y = l \qquad 0 \le \eta \le \eta_b(y, \tau) \tag{B.116}$$

Para se aplicar a TTIG transforma-se o problema inicial segundo a direção η, adotou-se o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{\partial^2 \phi(\eta, y, \tau)}{\partial \eta^2} + \lambda^2 \phi(\eta, y, \tau) = 0 \tag{B.117}$$

com as condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi(\eta, y, \tau)}{\partial \eta} = 0 \qquad \eta = 0 \tag{B.118}$$

$$\phi(\eta, y, \tau) = 0 \qquad \eta = \eta_b \tag{B.119}$$

Supondo que:

$$\phi(\eta, y, \tau) = A\,\mathrm{sen}(\lambda\eta) + B\cos(\lambda\eta) \tag{B.120}$$

derivando em relação a variável espacial η:

$$\frac{\partial \phi(\eta, y, \tau)}{\partial \eta} = A\lambda\cos(\lambda\eta) - B\lambda\,\mathrm{sen}(\lambda\eta)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

utilizando as condições de contorno tem-se:

$$\eta = 0 \rightarrow A = 0$$

$$\phi(\eta, y, \tau) = B\cos(\lambda\eta)$$

$$\eta = \eta_b \rightarrow B\cos(\lambda\eta_b) = 0$$

portanto obtêm-se que os autovalores e as autofunções são:

$$\lambda_i(y,\tau) = \frac{(2i-1)}{2\eta_b}\pi \qquad \text{B.121}$$

$$\phi_i(\eta, y, \tau) = B_i\cos(\lambda_i\eta) \qquad \text{B.122}$$

A norma das autofunções é definida como:

$$N_i = \int_0^{\eta_b} B_i^{\,2}\cos^2(\lambda_i\eta)d\eta = \frac{\eta_b}{2} \qquad \text{B.123}$$

para autofunção normalizada $N_i = 1$, obtêm-se que:

$$B_i = \sqrt{\frac{2}{\eta_b}}$$

aplicando o operador $L = -\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\ )$ nas Equações B.111 e B.117 tem-se:

$$-L\theta^*(\eta, y, \tau) + \frac{\partial^2\theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y^2} = \frac{\partial\theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial\tau} \qquad \text{B.124}$$

$$-L\phi(\eta, y, \tau) + \lambda_i^{\,2}(y,\tau)\phi(\eta, y, \tau) = 0 \qquad \text{B.125}$$

Definindo-se uma autofunção normalizada como:

$$K_i(\eta, y, \tau) = \frac{\phi_i(\eta, y, \tau)}{N_i^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}} \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}\eta\right] \qquad \text{B.126}$$

Tomando-se a Equação B.124 e multiplicando-se pela autofunção normalizada, e a Equação B.125 pelo potencial $\theta^*(x, y, \tau)$, dividido pela raiz quadrada da norma obtêm-se:

$$-K_i(\eta, y, \tau) L\theta^*(\eta, y, \tau) + K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial^2 \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y^2} = K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \tau}$$

$$-L\theta^*(\eta, y, \tau) \frac{\phi(\eta, y, \tau)}{N_i^{1/2}} + \lambda_i^2(y, \tau) \theta^*(\eta, y, \tau) \frac{\phi(\eta, y, \tau)}{N_i^{1/2}} = -LK_i(\eta, y, \tau)\theta^*(\eta, y, \tau) +$$

$$+\lambda_i^2(y, \tau) K_i(\eta, y, \tau)\theta^*(\eta, y, \tau) = 0$$

somando-se as duas equações acima e aplicando o operador integral $\int_0^{\eta_b} d\eta$:

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \tau} d\eta + \int_0^{\eta_b} \left[K_i(\eta, y, \tau) L\theta^*(\eta, y, \tau) - \theta^*(\eta, y, \tau) LK_i(\eta, y, \tau)\right] d\eta +$$

$$+\lambda_i^2(y, \tau) \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau)\theta^*(\eta, y, \tau) d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial^2 \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y^2} d\eta = 0 \qquad \text{B.127}$$

Definindo-se o par Transformada Integral e Inversa como:

$$\widetilde{\theta}_i^*(y, \tau) = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau)\theta^*(\eta, y, \tau) d\eta \qquad \text{B.128}$$

$$\theta^*(\eta, y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\eta, y, \tau)\widetilde{\theta}_i^*(y, \tau) \qquad \text{B.129}$$

A integral:

$$\int_0^{\eta_b}\left[K_i(\eta,y,\tau)L\theta^*(\eta,y,\tau)-\theta^*(\eta,y,\tau)LK_i(\eta,y,\tau)\right]d\eta = V$$

é simplificada utilizando-se as identidades:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\right]=\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}+K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial^2\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta^2} \qquad \text{B.130}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\theta^*(\eta,y,\tau)\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\right]=\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}+\theta^*(\eta,y,\tau)\frac{\partial^2 K_i(\eta,y,\tau)}{\partial\eta^2} \qquad \text{B.131}$$

subtraindo a Equação B.130 da Equação B.131, e aplicando o operador $L=-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\,)$, tem-se:

$$-\theta^*(\eta,y,\tau)LK_i(\eta,y,\tau)+K_i(\eta,y,\tau)L\theta^*(\eta,y,\tau)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\theta^*(\eta,y,\tau)\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\right]+$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\right] \qquad \text{B.132}$$

então tem-se que:

$$V=\int_0^{\eta_b}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\theta^*(\eta,y,\tau)\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\right]d\eta-\int_0^{\eta_b}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}\right]d\eta$$

considerando as condições de contorno definidas pelas Equações B.113, B.114, B.118 e B.119, resulta em:

$$V=0 \qquad \text{B.133}$$

A partir da equação de inversão, Equação B.129, derivando-se em relação as coordenadas espaciais e temporal, obtêm-se:

unesp

$$\frac{\partial \theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial \tau} \tilde{\theta}_j^*(y,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} \tilde{\theta}_j^*(y,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 K_i(\eta,y,\tau)}{\partial y^2} \tilde{\theta}_j^*(y,\tau) + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial y} + \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial y^2}$$

Substituindo estas equações na Equação B.127, tem-se:

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial \tau} \tilde{\theta}_j^*(y,\tau) d\eta + \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial \tau} d\eta +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau) \tilde{\theta}_j^*(y,\tau) d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 K_j(\eta,y,\tau)}{\partial y^2} \tilde{\theta}_j^*(y,\tau) d\eta +$$

$$- 2\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial y} d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial y^2} d\eta = 0 \quad \text{B.134}$$

Compactando a Equação B.134, tem-se:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial \tau} + \lambda_i^2(y,\tau) \tilde{\theta}_i^*(y,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \tilde{\theta}_j^*(y,\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \frac{\partial \tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{B.135}$$

em que:

$$A_{ij} = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial \tau} d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \frac{\partial^2 K_j(\eta,y,\tau)}{\partial y^2} d\eta$$

$$B_{ij} = 2\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau) \frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} d\eta$$

sabendo que:

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)K_j(\eta,y,\tau)d\eta = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

As condições de contorno transformadas são obtidas multiplicando a Equações B.115 e B.116 pela autofunção normalizada e utilizando a equação inversa, Equação B. 129, onde se obtém:

$$VI = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial y}d\eta = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau)\tilde{\theta}_j^*(y,\tau)d\eta$$

$$VI = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial K_j(\eta,y,\tau)}{\partial y}\tilde{\theta}_j^*(y,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_j^*(y,\tau)}{\partial y}\right]d\eta$$

$$VI = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}\tilde{\theta}_j^*(y,\tau) + \frac{\partial\tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y} = 0$$

então para $y = 0$:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}\tilde{\theta}_j^*(y,\tau) + \frac{\partial\tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y} = 0 \qquad \text{B.136}$$

Tem-se que:

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial y}d\eta = -\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)Q_2(\tau)d\eta$$

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta,y,\tau)\tilde{\theta}_j^*(y,\tau)d\eta = -Q_2(\tau)\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)d\eta \qquad \text{B.137}$$

mas:

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) d\eta = \int_0^{\eta_b} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}} \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}\eta\right] d\eta = \frac{2\sqrt{2\eta_b}}{(2i-1)\pi}(-1)^{i+1}$$

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau)\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial K_j(\eta, y, \tau)}{\partial y}\tilde{\theta}_j^*(y, \tau) + \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\eta, y, \tau)\frac{\partial \tilde{\theta}_j^*(y, \tau)}{\partial y}\right] d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}\tilde{\theta}_j^*(y, \tau) + \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial y}$$

substituindo estas equações na Equação B.137 tem-se que para $y = l$:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}_j^*(y, \tau) B_{ij} + \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial y} = f_i(y, \tau) Q_2(\tau) \qquad \text{B.138}$$

em que:

$$f_i(y, \tau) = \frac{2\sqrt{2\eta_b}}{(2i-1)\pi}(-1)^{i+2}$$

Para a transformação segundo a direção y, adota-se o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{\partial^2 \psi(y, \tau)}{\partial y^2} + \mu^2 \psi(y, \tau) = 0 \qquad \text{B.139}$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial \psi(y, \tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = 0 \qquad \text{B.140}$$

$$\frac{\partial \psi(y, \tau)}{\partial y} = 0 \qquad y = l \qquad \text{B.141}$$

Supondo que a solução da Equação B.139 seja do tipo:

$$\psi(y,\tau) = A\,\mathrm{sen}(\mu y) + B\cos(\mu y) \qquad \text{B.142}$$

derivando esta equação em relação a variável espacial y:

$$\frac{\partial \psi(y,\tau)}{\partial y} = A\mu\cos(\mu y) - B\mu\,\mathrm{sen}(\mu y)$$

utilizando as condições de contorno, obtém-se que:

$$y = 0 \rightarrow A = 0$$

$$\psi(y,\tau) = B\cos(\mu y)$$

$$y = l \rightarrow -B\mu\,\mathrm{sen}(\mu l) = 0$$

Cuja solução são os autovalores e as autofunções:

$$\mu_k = \frac{(k-1)}{l}\pi \qquad \text{B.143}$$

$$\psi_k(y,\tau) = \cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l}y\right] \qquad \text{B.144}$$

A norma das autofunções é definida como:

$$N_k = \frac{l}{2} \qquad \text{B.145}$$

Definindo-se uma autofunção normalizada:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$M_k(y,\tau)=\frac{\psi_k(y,\tau)}{N_k^{1/2}} \qquad \text{B.146}$$

Multiplicando a Equação B.135 pela autofunção normalizada e a Equação B.139 pelo potencial $\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)$ dividido pela raiz quadrada da norma, tem-se:

$$M_k(y,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{\partial\tau}+\lambda_i{}^2M_k(y,\tau)\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)+\sum_{j=1}^{\infty}M_k(y,\tau)A_{ij}\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)+$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}M_k(y,\tau)B_{ij}\frac{\partial\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{\partial y}-M_k(y,\tau)\frac{\partial^2\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{N_k^{1/2}}\frac{\partial^2\psi(y,\tau)}{\partial y^2}+\mu^2\frac{\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{N_k^{1/2}}\psi(y,\tau)=0$$

Define-se o operador $L=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ )$ e aplicando nas equações acima, obtém-se que:

$$M_k(y,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{\partial\tau}+\lambda_i{}^2M_k(y,\tau)\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)+\sum_{j=1}^{\infty}M_k(y,\tau)A_{ij}\tilde{\theta}_j^{\bullet}(y,\tau)+$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}M_k(y,\tau)B_{ij}\frac{\partial\tilde{\theta}_j^{\bullet}(y,\tau)}{\partial y}+M_k(y,\tau)L\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)=0 \qquad \text{B.147}$$

$$\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)\frac{\partial^2M_k(y,\tau)}{\partial y^2}+\mu^2\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)M_k(y,\tau)=-\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)LM_k(y,\tau)+$$

$$+\mu^2\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)M_k(y,\tau)=0 \qquad \text{B.148}$$

somando-se as Equações B.147 e B.148 resulta em:

$$\int_0^l M_k(y,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{\partial\tau}dy+\int_0^l\lambda_i{}^2M_k(y,\tau)\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)dy+\mu^2\int_0^l\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)M_k(y,\tau)dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^l M_k(y,\tau)A_{ij}\tilde{\theta}_j^{\bullet}(y,\tau)dy-\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^l M_k(y,\tau)B_{ij}\frac{\partial\tilde{\theta}_j^{\bullet}(y,\tau)}{\partial y}dy+$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$+\int_0^l \left[M_k(y,\tau)L\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau) - \tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)LM_k(y,\tau)\right]dy = 0 \qquad \text{B.149}$$

Definindo-se o par Transformada Integral e Inversa, respectivamente:

$$\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\bullet}(\tau) = \int_0^l \tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)M_k(y,\tau)dy \qquad \text{B.150}$$

$$\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(y,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\bullet}(\tau) \qquad \text{B.151}$$

Substituindo a equação inversa nas integrais:

$$\int_0^l M_k(y,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{\partial\tau}dy = \int_0^l M_k(y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{m=1}^{\infty} M_m(y,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{im}^{\bullet}(\tau)dy =$$

$$= \int_0^l M_k(y,\tau)\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial\tau}\hat{\tilde{\theta}}_{im}^{\bullet}(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} M_m(y,\tau)\frac{\partial\hat{\tilde{\theta}}_{im}^{\bullet}(\tau)}{\partial\tau}\right]dy =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l M_k(y,\tau)M_m(y,\tau)\frac{\partial\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\bullet}(\tau)}{\partial\tau}dy$$

pois:

$$\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial\tau} = 0$$

então:

$$\int_0^l M_k(y,\tau)\frac{\partial\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)}{\partial\tau}dy = \frac{\partial\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\bullet}(\tau)}{\partial\tau} \qquad \text{B.152}$$

sabendo-se que:

$$\int_0^l M_k(y,\tau)M_m(y,\tau)dy = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases}$$

$$\int_0^l M_k(y,\tau)A_{ij}\tilde{\theta}_j^{\bullet}(y,\tau)dy = \int_0^l M_k(y,\tau)A_{ij}\sum_{m=1}^{\infty} M_m(y,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau)dy =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau)\int_0^l A_{ij}M_k(y,\tau)M_m(y,\tau)dy \qquad \text{B.153}$$

$$\int_0^l M_k(y,\tau)B_{ij}\frac{\partial\tilde{\theta}_j^{\bullet}(y,\tau)}{\partial y}dy = \int_0^l M_k(y,\tau)B_{ij}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{m=1}^{\infty} M_m(y,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau)dy =$$

$$= \int_0^l M_k(y,\tau)B_{ij}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial y}\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} M_m(y,\tau)\frac{\partial\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau)}{\partial y}\right]dy =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l B_{ij}M_k(y,\tau)\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial y}\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau)dy$$

pois:

$$\frac{\partial\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau)}{\partial y} = 0$$

então tem-se:

$$\int_0^l M_k(y,\tau)B_{ij}\frac{\partial\tilde{\theta}_j^{\bullet}(y,\tau)}{\partial y}dy = \sum_{m=1}^{\infty}\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\bullet}(\tau)\int_0^l B_{ij}M_k(y,\tau)\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial y}dy \qquad \text{B.154}$$

A integral:

$$\int_0^l \left[M_k(y,\tau) L\tilde{\theta}_i^*(y,\tau) - \tilde{\theta}_i^*(y,\tau) L M_k(y,\tau) \right] dy$$

é obtida utilizando-se as identidades:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\tilde{\theta}_i^*(y,\tau) \frac{\partial M_k(y,\tau)}{\partial y} \right] = \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y} \frac{\partial M_k(y,\tau)}{\partial y} + \tilde{\theta}_i^*(y,\tau) \frac{\partial^2 M_k(y,\tau)}{\partial y^2} \qquad \text{B.155}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[M_k(y,\tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y} \right] = \frac{\partial M_k(y,\tau)}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y} + M_k(y,\tau) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y^2} \qquad \text{B.156}$$

subtraindo a Equação B.156 da Equação B.155 resulta em:

$$VII = \int_0^l \left[M_k(y,\tau) L\tilde{\theta}_i^*(y,\tau) - \tilde{\theta}_i^*(y,\tau) L M_k(y,\tau) \right] dy = \int_0^l \frac{\partial}{\partial y}\left[\tilde{\theta}_i^*(y,\tau) \frac{\partial M_k(y,\tau)}{\partial y} \right] dy +$$

$$- \int_0^l \frac{\partial}{\partial y}\left[M_k(y,\tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y} \right] dy = \tilde{\theta}_i^*(y,\tau) \frac{\partial M_k(y,\tau)}{\partial y}\bigg|_0^l - M_k(y,\tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y}\bigg|_0^l$$

mas como:

$$y = 0 \rightarrow \frac{\partial M_k(y,\tau)}{\partial y} = 0$$

$$y = l \rightarrow \frac{\partial M_k(y,\tau)}{\partial y} = 0$$

portanto:

$$VII = -M_k(y,\tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y,\tau)}{\partial y}\bigg|_0^l = \frac{1}{2} M_k(l,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}_j^*(l,\tau) B_{ij} - M_k(l,\tau) f_i(l,\tau) Q_2(\tau) +$$

$$- \frac{1}{2} M_k(0,\tau) \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \tilde{\theta}_j^*(0,\tau)$$

substituindo a equação inversa, tem-se:

$$VII = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} M_k(l,\tau)M_m(l,\tau)B_{ij}\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) - M_k(l,\tau)f_i(l,\tau)Q_2(\tau) +$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} M_k(0,\tau)M_m(0,\tau)B_{ij}\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) \qquad \text{B.157}$$

Portanto substituindo estes valores, Equações B.151, B.152, B.153, B.154 e B.157, na Equação B.149 resulta em:

$$\frac{\partial\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau)}{\partial\tau} + {\mu_k}^2\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l A_{ij}M_k(y,\tau)M_m(y,\tau)dy\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) +$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l B_{ij}M_k(y,\tau)\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial y}dy\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^l {\lambda_i}^2(y,\tau)M_k(y,\tau)M_m(y,\tau)dy\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} M_k(l,\tau)M_m(l,\tau)B_{ij}(l,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{ij}(0,\tau)M_k(0,\tau)M_m(0,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) +$$

$$+ M_k(l,\tau)f_i(l,\tau)Q_2(\tau) \qquad \text{B.158}$$

Compactando a Equação B.158, na forma matricial, tem-se:

$$\frac{\partial\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau)}{\partial\tau} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E_{ijkm}\hat{\tilde{\theta}}_{jm}^{\,*}(\tau) = \hat{\tilde{f}}_{ik} \qquad \text{B.159}$$

em que:

$$E_{ijkm} = \delta_{ij}\delta_{km}{\mu_k}^2 + \int_0^l\left[A_{ij}M_k(y,\tau)M_m(y,\tau) - B_{ij}M_k(y,\tau)\frac{\partial M_m(y,\tau)}{\partial y}\right]dy +$$

$$+ \delta_{ij}\int_0^l {\lambda_i}^2(y,\tau)M_k(y,\tau)M_m(y,\tau)dy + \frac{1}{2}B_{ij}(l,\tau)M_k(l,\tau)M_m(l,\tau) - \frac{1}{2}B_{ij}(0,\tau)M_k(0,\tau)M_m(0,\tau)$$

$$\hat{\tilde{f}}_{ik} = M_k(l,\tau)f_i(l,\tau)Q_2(\tau)$$

Para se determinar a equação de restrição no contorno transformada, tem-se as seguintes expressões:

$$\theta^{*}(\eta, y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} K_i(\eta, y, \tau) M_k(y, \tau) \hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau) \qquad \text{B.160}$$

em que:

$$M_k(y, \tau) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}} \cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l} y\right]$$

$$K_i(\eta, y, \tau) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}} \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b} \eta\right]$$

Sabendo-se que:

$$S = \xi(\tau)\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\frac{y}{l}\right) \qquad \text{B.161}$$

$$S(y, \tau) = 1 - \eta_b(y, \tau) \qquad \text{B.162}$$

A equação de acoplamento na nova variável:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial \theta^{*}(\eta, y, \tau)}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial S}{\partial \tau} = Q_1 \quad \eta = \eta_b \qquad \text{B.163}$$

então derivando-se as Equação B.161 em relação a coordenada espacial y e a temporal τ, tem-se:

$$\frac{\partial S(y, \tau)}{\partial y} = -\frac{\xi}{l}\frac{Q_2}{Q_1} \qquad \text{B.164}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$$\frac{\partial S(y,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial \eta_b(y,\tau)}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\xi\left(1-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{y}{l}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\xi - \xi\frac{Q_2}{Q_1}\frac{y}{l}\right] = -\left[\left(1-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{y}{l}\right)\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \xi\left(\frac{Q_1\dot{Q}_2 - Q_2\dot{Q}_1}{{Q_1}^2}\right)\frac{y}{l}\right] \quad \text{B.165}$$

Fazendo a derivação da Equação B.160 em relação a variável espacial η, obtém-se:

$$\frac{\partial \theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial K_i(\eta)}{\partial \eta} M_k(y,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau) \quad \text{B.166}$$

utilizando a definição da autofunção e derivando-a:

$$\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial \eta} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}}\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}\operatorname{sen}\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}\eta\right]$$

para $\eta = \eta_b(\tau)$:

$$\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial \eta} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}}\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}\operatorname{sen}\left[\frac{(2i-1)\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\partial K_i(\eta,y,\tau)}{\partial \eta} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}}\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}(-1)^{i+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}}\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}(-1)^{i+2}$$

Logo a Equação B.166 torna-se:

$$\frac{\partial \theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}}\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}(-1)^{i+2} M_k(y,\tau)\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau) \quad \text{B.167}$$

Substituindo as Equações B.164, B.165 e B.167 na Equação B.163, e também aplicando o operador integral $\int_0^l dy$ tem-se:

$$\left[1+\left(\frac{\xi}{l}\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2\right]\int_0^l \frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}dy - \nu\int_0^l \frac{\partial\eta}{\partial\tau}dy = Q_1\int_0^l dy \qquad \text{B.168}$$

em que:

$$\int_0^l \frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}dy = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\overline{\eta}_b^{3/2}}\frac{(2i-1)\pi}{2}(-1)^{i+2}\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau)\int_0^l M_k dy$$

mas $M_1 = \frac{1}{\sqrt{l}}$ e $M_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}}\cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l}y\right]$ $i = 2,...,\infty$, portanto:

$$\int_0^l M_k dy = 0 \text{ para } i = 2,...,\infty$$

$$\int_0^l \frac{\partial\theta^*(\eta,y,\tau)}{\partial\eta}dy = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}}\frac{1}{\overline{\eta}_b^{3/2}}\frac{(2i-1)\pi}{2}(-1)^{i+2}\hat{\tilde{\theta}}_{i1}^{\,*}(\tau) \qquad \text{B.169}$$

$$\int_0^l \frac{\partial\eta}{\partial\tau}dy = \frac{d\overline{\eta}_b}{d\tau} \qquad \text{B.170}$$

Utilizando as expressões definidas pelas Equações B.169 e B.170, e substituindo na Equação B.168, tem-se a equação de restrição no contorno transformada:

$$\left[1+\left(\frac{\xi}{l}\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2\right]\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}}\frac{\lambda_i^*}{\overline{\eta}_b^{3/2}}(-1)^{i+2}\hat{\tilde{\theta}}_{i1}^{\,*}(\tau) - \nu\frac{d\overline{\eta}_b}{d\tau} = Q_1 l \qquad \text{B.171}$$

em que:

$$\lambda_i^* = \frac{(2i-1)\pi}{2}$$

$$\overline{\eta}_b = \int_0^l \eta_b(y,\tau)dy$$

A condição inicial transformada, segundo a direção η, é obtida utilizando-se:

$$\theta^*(\eta,y,\tau) = \theta(\eta,y,\tau) - 1 \qquad \text{B.172}$$

multiplicando-se a equação pela autofunção normalizada $K_i(\eta,y,\tau)$ e aplicando o operador integral $\int_0^{\eta_b} d\eta$ tem-se:

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\theta^*(\eta,y,\tau)d\eta = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\theta(\eta,y,\tau)d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)d\eta$$

então a equação torna-se:

$$\widetilde{\theta}_i^*(y,\tau) = \widetilde{\varphi}_i(y,\tau) - \widetilde{\gamma}_i(y,\tau) \qquad \text{B.173}$$

em que:

$$\widetilde{\varphi}_i(y,\tau) = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)\theta(\eta,y,\tau)d\eta$$

$$\widetilde{\gamma}_i(y,\tau) = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,y,\tau)d\eta$$

A transformação segundo a direção y é realizada utilizando a Equação B.173, em que se multiplicou a Equação B.173 pela autofunção normalizada $M_k(y,\tau)$ e aplicou-se o operador integral $\int_0^l dy$, que resulta:

$$\int_0^l M_k(y,\tau)\tilde{\theta}_i^{\bullet}(y,\tau)dy = \int_0^l M_k(y,\tau)\left[\tilde{\varphi}_i(y,\tau) - \tilde{\gamma}_i(y,\tau)\right]dy$$

Portanto tem-se a condição inicial para o sistema infinito de equações diferenciais ordinárias como:

$$\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\bullet}(\tau) = \hat{\tilde{\varphi}}_{ik}(\tau) - \hat{\tilde{\gamma}}_{ik}(\tau) \qquad \text{B.174}$$

em que:

$$\hat{\tilde{\varphi}}_{ik}(\tau) = \int_0^l M_k(y,\tau)\tilde{\varphi}_i(y,\tau)dy$$

$$\hat{\tilde{\gamma}}_{ik}(\tau) = \int_0^l M_k(y,\tau)\tilde{\gamma}_i(y,\tau)dy$$

Portanto as Equações B.159 e B.171 formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas que é a solução para o problema de difusão bidimensional em corpos com proteção térmica ablativa. A Equação B.174 é a condição inicial do sistema infinito.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br