

Moisés Rodrigues Cirilo do Monte

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA GENERALIZADO
DA COMPLEMENTARIDADE E ALGUMAS
DE SUAS APLICAÇÕES





1910001258



**RESOLUÇÃO DO PROBLEMA GENERALIZADO
DA COMPLEMENTARIDADE E ALGUMAS
DE SUAS APLICAÇÕES**

Moisés Rodrigues Cirilo do Monte

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 082

Rua Cristovão Colombo, 2265
Caixa Postal 136
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

Resolução do Problema Generalizado da Complementaridade e Algumas de suas Aplicações

Moisés Rodrigues Cirilo do Monte

Dissertação apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Andreani



L. 1258/04

São José do Rio Preto

18 de Dezembro de 2003



+519.0
M772r

10104003

Monte, Moisés Rodrigues Cirilo do.

Resolução do problema generalizado da complementaridade e
algumas de suas aplicações / Moisés Rodrigues Cirilo do Monte – São
José do Rio Preto : [s.n.], 2003
65 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Roberto Andreani

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Programação não-linear. 2. Complementaridade (Matemática). 3.
Cone (Matemática). 4. Perturbação (Matemática). I. Andreani, Roberto.
II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 519.853

A Deus.

Aos meus pais, Leobino e Eliete.

Aos meus irmãos, Matheus e Elizabete.

A minha esposa, Carina.

Dedico



Agradecimentos

A Deus, por tudo. A todos os que me ajudaram e me incentivaram de várias maneiras nas dificuldades deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Roberto Andreani, pela paciência e por todas as orientações e incentivos que me tem dispensado. Aos professores e funcionários do DCCE que indiretamente participaram também deste trabalho.

Aos meus pais, irmãos e esposa que me apoiaram e me sustentaram de alguma maneira. Aos amigos pós-graduandos.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.



Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas estratégias para resolução do problema de complementaridade não-linear generalizada sobre cones poliédricos e cones de segunda ordem, denotados por $GNCP(F, G, K)$ e $SOCCP(F, G, K)$ respectivamente.

Para isso, estabelecemos relações entre estes problemas e o problema de inequações variacionais denotado por $VIP(F, \Omega)$. Este problema tem muitas aplicações em economia, teoria dos jogos, etc. Fizemos alguns experimentos numéricos, testando a teoria desenvolvida.

Palavras-chave: Complementaridade, Cones, Perturbação.



Abstract

In this work we study strategies to solve the generalized nonlinear complementary problem defined on a polyhedral cone and on a second order cone, denoted by $GNCP(F, G, K)$ and $SOCCP(F, G, K)$ respectively.

These problems are associated the variational inequality problem, denoted as $VIP(F, \Omega)$. This problem has many interesting applications, for example in economy and game theory. Computational experiments to confirm the theoretical results are reported.

Keywords: Complementarity, Cones, Perturbations.



Sumário

1	Introdução	2
1.1	Notações	4
1.2	Condições de Otimalidade	6
1.3	Condições Karush-Kuhn-Tucker	6
2	Cones Poliédricos	9
2.1	A Reformulação	10
2.2	Minimizadores Globais	15
2.3	Pontos Estacionários	16
3	Cones de Segunda Ordem	21
3.1	Diferenciabilidade	21
3.1.1	Minimizadores Globais	24
3.1.2	Pontos Estacionários	27
3.2	Perturbação	30
3.2.1	Minimizadores Globais	31
3.2.2	Pontos Estacionários	33
4	Experimentos Numéricos	36
4.1	Cones Poliédricos	36
4.2	Cones de Segunda Ordem	41
5	Considerações Finais	45



Capítulo 1

Introdução

O problema de complementaridade não-linear generalizado, denotado por $GNCP(F, G, K)$, consiste em encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x) \in K, \quad G(x) \in K^\circ, \quad F(x)^t G(x) = 0 \quad (1.1)$$

onde F e G são funções contínuas de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, K é um cone convexo, fechado e não vazio em $\mathbb{R}^n$, e K° denota o cone polar de K que é definido por

$$K^\circ = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in K\} \quad (1.2)$$

Em nosso contexto, assumiremos que $n = m$, $F, G \in C^1$ e trabalharemos com diferentes formas para o cone K .

Este problema será reformulado como um problema de otimização equivalente. Para isto, nos basearemos no fato de que, se x^* é solução de (1.1), então $F(x^*)$ é solução do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & G(x^*)^t x \\ \text{s.a.} \quad & x \in K \end{aligned} \quad (1.3)$$

e usaremos as condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema (1.3) a fim de formular o nosso problema de otimização equivalente.

Primeiramente, tomaremos K como um cone poliedral em $\mathbb{R}^n$. Neste caso, o ponto (KKT) solução do problema (1.3) existe, dado que K é formado por restrições lineares.

Faremos uso da função de Fischer-Burmeister, introduzida primeiramente por Fisher [7] em 1992, que facilitará escrever o nosso problema de otimização como um problema irrestrito, e que definiremos no capítulo 2, mostrando as vantagens teóricas para usá-la.

Trataremos do problema da complementaridade sobre cones de segunda ordem, que será denotado por $SOCCP(F, G, K)$, e definido posteriormente. Este problema tem várias aplicações e, em particular, engloba uma grande classe de problemas com restrições quadráticas como casos especiais [9,10]. Notaremos alguns problemas de diferenciabilidade e regularidade relativos a este cone, e proporemos duas formas para contorná-los.

A primeira, é descrever K com restrições diferenciáveis e colocar restrições sobre as funções associadas para superar o problema da não regularidade das restrições do cone associado.

A segunda, é a proposta de perturbar o cone de segunda ordem, a fim de obter a diferenciabilidade e a regularidade de uma só vez. Provamos dois teoremas que mostram que esta proposta é teoricamente aceitável.

Em todos estes casos, estabeleceremos equivalências entre o problema original e o problema de otimização e daremos condições teóricas suficientes para que pontos estacionários do problema de otimização equivalente sejam minimizadores globais e, em consequência, soluções do problema inicial.

Finalmente, apresentaremos alguns experimentos numéricos que serão descritos no último capítulo. Usaremos o método de Levenberg-Marquardt ([9]) para resolver problemas de complementaridade sobre cones poliédricos.

Com este método, testamos dois exemplos. No segundo exemplo, testamos trezentos e sessenta problemas, gerados randômicamente, e fizemos uma comparação entre taxas de resolução, baseando-nos na teoria desenvolvida.

Para cones de segunda ordem, testamos seis problemas que podem ou não cumprir as condições suficientes para que pontos estacionários sejam soluções e usamos o `easy.for` para resolvê-los. O `easy.for` [6] é um programa matemático,



desenvolvido pelo grupo de otimização da Unicamp, usado para resolução de problemas de otimização com ou sem restrições.

Concluimos com um resumo da teoria desenvolvida e dos resultados numéricos obtidos.

1.1 Notações

Nesta seção, apresentaremos algumas notações necessárias e alguns conceitos relacionados com os temas discutidos nesta dissertação.

(1) $\mathbb{R}^n$ é o espaço vetorial real e, se x é um elemento pertencente a $\mathbb{R}^n$, então $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ e $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

(2) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O produto interno usual de x por y é dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t y.$$

(3) Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Denotamos $\|x\| = \sqrt{x^t x}$ a norma de x que será usada em todo o contexto.

(4) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se $x \leq y$, então isto significa que, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i \leq y_i$. A definição é análoga para $x \geq y$ e $x = y$.

(5) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ denota uma matriz A com m linhas e n colunas.

(6) I_n denota a matriz identidade com n linhas e n colunas.

(7) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A norma da matriz A é definida e denotada por

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0.$$

(8) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. O gradiente de f no ponto x é definido por $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})^t$ onde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é a derivada parcial de f em relação a x_i , $i = 1, \dots, n$.

- (9) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. Se $f \in C^n(\Omega)$ significa que f é diferenciável e tem derivada contínua até a ordem n , no conjunto Ω .
- (10) Denotaremos por $\nabla^2 f(x)$ a hessiana da função f . Também, denotaremos o jacobiano da função f por $Jf(x)$. Assim, temos a relação entre hessiana e Jacobiano: $Jf(x) = \nabla^t f(x)$.
- (11) Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Denotando as entradas de A por $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$, então a matriz transposta $A^t = [a_{ji}]$.
- (12) A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita simétrica se $A = A^t$.
- (13) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita semi-definida positiva se $x^t A x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- (14) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita definida positiva se $x^t A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$.
- (15) A distância euclideana entre dois elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$ é definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.
- (16) Uma bola de centro $y \in \mathbb{R}^n$ e raio ϵ corresponde ao seguinte conjunto:

$$B(y, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq \epsilon\}$$

- (17) Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de cone se $ax \in K$ para todo $a \geq 0$ e $x \in K$.
- (18) Seja K um cone. Chamamos cone polar negativo de K ao conjunto

$$K^o = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \geq 0, \forall u \in K\}$$

- (19) Um cone K é finitamente gerado, se tem a forma

$$K = \{x \mid x = \sum_{j=1}^r \mu_j a_j, \mu_j \geq 0, j = 1, \dots, r\}$$

onde $a_1, \dots, a_r$ são vetores quaisquer.

1.2 Condições de Otimalidade

Vamos considerar o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{s.a } x \in \Omega \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^n(\mathbb{R}^n)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto da restrições do problema de minimização. Definiremos agora minimizadores locais e globais do problema inicial.

Definição 1.2.1 (i) Dizemos que x^* é um minimizador global de (1.4) se $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $x \neq x^*$.

(ii) Dizemos que x^* é um minimizador local de (1.4) se $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in B(x^*, \epsilon)$ e $x \neq x^*$.

Em (i) e (ii), se $f(x^*) < f(x)$, então diremos que x^* é um minimizador estrito de f (global ou local).

1.3 Condições Karush-Kuhn-Tucker

Consideremos, ainda, o problema (1.4) com as seguintes características:

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0 \text{ e } c(x) \leq 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^t$ e $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, g_i diferenciável para todo $i = 1, \dots, m$, $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $c(x) = (c_1(x), \dots, c_p(x))^t$, $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e c_i diferenciável para todo $i = 1, \dots, p$.

Definição 1.3.1 Chamamos de conjunto de restrições ativas em x do problema (1.4) às restrições cujos índices pertencem ao conjunto $J = \{i \in \{1, \dots, p\} | c_i(x) = 0\}$.

Teorema 1.3.1 Se x^* é um minimizador local de (1.4) e $\{\nabla c_i(x^*) | i \in J\} \cup \{\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_m(x^*)\}$ é um conjunto linearmente independente, então existem

únicos $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i \geq 0$, $i \in J$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in J} \mu_i \nabla c_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

Dessa forma, se x é um ponto regular e minimizador local de (1.4), definindo $\mu_i = 0$ quando i não pertencer a J , podemos escrever as condições K.K.T. gerais da seguinte forma:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in J} \mu_i \nabla c_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$g(x^*) = 0$$

$$\mu_i c_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

$$c_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

Se $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ satisfaz as equações acima, então x será chamado de ponto estacionário de (1.4).

Teorema 1.3.2 Condições necessárias de segunda ordem

Seja x^* ponto regular e minimizador local de (1.4). Seja A a matriz cujas linhas são os gradientes das restrições ativas em x^* , excluindo os gradientes daquelas restrições cujos multiplicadores são nulos. Então, se λ e μ são os vetores multiplicadores de Lagrange, temos

$$y^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda, \mu) y \geq 0, \quad \forall y \in N(A)$$

$$\text{onde } L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x).$$

Teorema 1.3.3 Condições suficientes de segunda ordem

Se x^* satisfaz a condição necessária de primeira ordem para (1.4) e, além disso, $y^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda, \mu) y > 0$, $\forall y \in N(A), y \neq 0$, então x^* é um minimizador local estrito do problema (1.4).

Proposição 1.3.1 Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification

Seja x^* um mínimo local do problema (1.4) com o conjunto restrição Ω o mesmo do início desta seção, com f , g e c funções continuamente diferenciáveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Assuma que os gradientes de $\nabla g_i, i = 1, \dots, m$ são linearmente independentes e que existe um vetor d tal que

$$\nabla g_i(x^*)^t d = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \nabla c_j(x^*)^t d < 0, \quad \forall j \in J$$

Então, x^* satisfaz as condições necessárias do teorema 1.3.1.

Para mais detalhes, ver [5].



Capítulo 2

Cones Poliédricos

Considere o problema de complementaridade não-linear generalizado, $GNCP(F, G, K)$, dado em (1.1) com $F, G \in C^1$ e K o cone poliédrico em $\mathbb{R}^n$ definido a seguir: dados $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$, temos que

$$K = \{v \in \mathbb{R}^n | Av \geq 0, Bv = 0\} \quad (2.1)$$

Assim, pela definição de cone polar de K dada em (1.2), o cone polar do cone poliédrico em $\mathbb{R}^n$ será

$$K^o = \{u \in \mathbb{R}^n | u = A^t \lambda + B^t \mu, \lambda \in \mathbb{R}_+^q, \mu \in \mathbb{R}^s\} \quad (2.2)$$

Exemplo 2.0.1 Para exemplificar, tome $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $B \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ tais que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (1 \quad -1).$$

Assim, para $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2)$, temos que

$$Av \geq 0 \Rightarrow v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$$

e também

$$Bv = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

e, pela definição de cone polar, temos que $\langle u, v \rangle \geq 0$. Geometricamente, K é a semi-reta $y = x$ com $x \geq 0$ e K^o é o conjunto dos vetores contidos no semi-espaço $y \geq -x$.

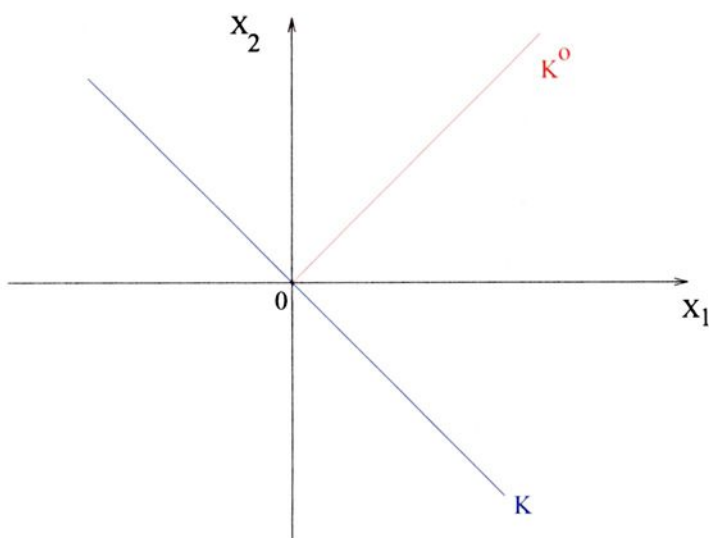


Figura 2.1: Cone e Cone Polar negativo.

2.1 A Reformulação

Visto que (1.1) não é um problema de otimização, queremos estabelecer equivalências entre o problema da complementaridade e um problema de otimização a fim de que, ao resolver o problema de otimização, também estaremos encontrando uma solução do $GNCP(F, G, K)$. Para isso, considere a definição abaixo.

Definição 2.1.1 *O Problema de Inequações Variacionais consiste em dada uma função $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, fechado e não-vazio, achar $x^* \in \Omega$ tal que*

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in \Omega \quad (2.3)$$

Denotamos este problema por $VIP(G, \Omega)$.

Esta definição nos leva a estabelecer uma equivalência entre o $GNCP(F, G, K)$ e o $VIP(G, K)$.

Lema 2.1.1 *Se F^{-1} existe, então x^* é solução do $GNCP(F, G, K)$ se, e somente se, $F(x^*)$ é solução do $VIP(G \circ F^{-1}, K)$.*

Demonstração 2.1.1 Se x^* é solução do $GNCP(F, G, K)$, então

$$F(x^*) \in K, \quad G(x^*) \in K^o \quad \langle G(x^*), F(x^*) \rangle = 0$$

Como F^{-1} existe, então

$$\langle G(x^*), F(x^*) \rangle = \langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), F(x^*) \rangle = 0 \quad (2.4)$$

Sendo $G(x^*) \in K^o$,

$$\langle G(x^*), y \rangle \geq 0, \forall y \in K \quad (2.5)$$

Assim,

$$\langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), y \rangle \geq 0, \forall y \in K \quad (2.6)$$

Logo, por (2.6) e (2.4),

$$\begin{aligned} \langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), y \rangle - 0 &\geq 0 \Rightarrow \langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), y \rangle - \langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), F(x^*) \rangle \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), y - F(x^*) \rangle \geq 0, \forall y \in K \end{aligned} \quad (2.7)$$

Então, por (2.7), $F(x^*)$ é solução do $VIP(G \circ F^{-1}, K)$.

Reciprocamente, se $F(x^*)$ é solução do $VIP(G \circ F^{-1}, K)$, então

$$F(x^*) \in K \quad (2.8)$$

Assim, para $0 \leq \epsilon \leq 1$,

$$(1 + \epsilon)F(x^*) \in K \quad e \quad (1 - \epsilon)F(x^*) \in K$$

e dado que (2.7) se cumpre para todo $y \in K$, temos que

$$\langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), F(x^*) \rangle \leq 0, \text{ com } y = 0 \in K$$

e

$$\langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), F(x^*) \rangle \geq 0, \text{ com } y = 2F(x^*) \in K$$

que implicam que

$$\langle G \circ F^{-1}(F(x^*)), F(x^*) \rangle = 0 = \langle G(x^*), F(x^*) \rangle \quad (2.9)$$

De (2.9) e (2.8), obtemos que $G(x^*) \in K^o$. Logo, x^* é solução do $GNCP(F, G, K)$.

Este lema é essencial no estabelecimento da equivalência entre o $GNCP(F, G, K)$ e um problema de otimização equivalente, visto que o $VIP(G \circ F^{-1}, K)$ pode ser escrito como um problema de minimização (lema 2.1.1) e, para mais, ver [13,15]. De fato, note na definição do $VIP(G, \Omega)$ que

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle = G(x^*)^t x - G(x^*)^t x^* \geq 0 \Leftrightarrow G(x^*)^t x \geq G(x^*)^t x^*, \quad \forall x \in \Omega$$

ou seja, devemos encontrar o minimizador global de

$$\begin{aligned} \min \quad & G(x^*)^t x \\ \text{s.a} \quad & x \in K \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, formulamos o próximo lema, que é consequência do lema anterior.

Lema 2.1.2 *x^* é solução do $GNCP(F, G, K)$ se e somente se $F(x^*)$ é mínimo global de (2.10) com $G(x^*)^t F(x^*) = 0$.*

Demonstração 2.1.2 *Se x^* é solução do $GNCP(F, G, K)$, então*

$$F(x^*) \in K, \quad G(x^*) \in K^\circ \quad \langle G(x^*), F(x^*) \rangle = 0$$

Da definição de K° , temos que $G(x^)^t F(x^*) \geq 0$ e como $G(x^*)^t F(x^*) = 0$, temos que $F(x^*) \in K$ é minimizador global de (2.10). Reciprocamente, como $G(x^*)^t F(x^*) = 0$ e $F(x^*) \in K$, temos que $G(x^*) \in K^\circ$ pela definição de K° .*

Na reformulação de nosso problema equivalente de otimização, usaremos a função de Fischer-Burmeister a fim de obtermos um problema sem restrições e mais eficiente computacionalmente falando.

Definição 2.1.2 *A função $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi(a, b) := \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$$

é chamada função de Fischer-Burmeister.

Essa função tem como propriedade principal que

$$\varphi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab = 0$$

Para vetores arbitrários $a, b \in \mathbb{R}^n$, definimos a função de Fischer-Burmeister como

$$\varphi(a, b) = \begin{pmatrix} \varphi(a_1, b_1) \\ \vdots \\ \varphi(a_n, b_n) \end{pmatrix}$$

obviamente,

$$\varphi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a^t b = 0$$

Proposição 2.1.1 *Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Fischer-Brumeister definida acima. Então*

$$D(\varphi^2(a, b)) = \begin{cases} 0 & \text{se } (a, b) = (0, 0) \\ 2\nabla\varphi(a, b)\varphi(a, b) & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $D(\cdot)$ é a notação de Diferencial.

Demonstração 2.1.3 *Para $(a, b) \neq (0, 0)$, temos que*

$$D(\varphi^2(a, b)) = 2 \left(\frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial a} \quad \frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial b} \right) \varphi(a, b) = 2\nabla^t \varphi(a, b) \varphi(a, b)$$

Para $t = (a, b) = (0, 0) = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi^2(t) - \varphi^2(0)}{\|t - 0\|} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi^2(t)}{\|t\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - (a + b))^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ab - 2(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}(a + b)}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} - \lim_{t \rightarrow 0} 2(a + b) \end{aligned}$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0} 2(a + b) = 0$ e observando que $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$,

temos que

$$0 \leq \left| \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \right| \leq \left| \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \right| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e como $\lim_{t \rightarrow 0} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Logo,

$$D(\varphi^2(0, 0)) = 0$$

Observação 2.1.1 Note que $\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a} \leq 0$ pois temos que

$$\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 1$$

e

$$b^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + a^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a| \Leftrightarrow 1 \geq \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Analogamente, $\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \leq 0$ pois $1 \geq \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Assim,

$$\left(\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \right) \geq 0$$

Este é um fato muito importante que será usado mais adiante.

Para garantir a existência de pontos K.K.T. no minimizador global do problema (2.10), pediremos que $F(x^*)$ cumpra com alguma constraint qualification. Exemplos de constraint qualification são: as restrições do problema são lineares, o minimizador global do problema é regular ou o minimizador global cumpra com a constraint qualification de Mangasarian-Fromovitz [5].

Agora, considerando $F(x^*)$ um minimizador global e regular do problema (2.10) (pois as restrições são lineares e garantem a verificação das condições no minimizador global), temos que $F(x^*)$ satisfaz as condições Karush-Kuhn-Tucker para este problema, ou seja, existem $\lambda^* \in \mathbb{R}^q$, $\mu^* \in \mathbb{R}^s$ e $z^* \in \mathbb{R}^q$ tais que

$$(1) \quad G(x^*) - A^t \lambda^* - B^t \mu^* = 0$$

$$(2) \quad AF(x^*) - z^* = 0$$

$$(3) \quad BF(x^*) = 0$$

$$(4) \quad (\lambda^*)^t z^* = 0, \lambda^* \geq 0, z^* \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda_i^*, z_i^*) = 0, \forall i = 1, \dots, q$$

Definindo

$$0 \leq \varphi(\lambda, z) = \sum_{i=1}^q \varphi^2(\lambda_i, z_i), \quad l = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

podemos escrever o problema de otimização sem restrições associado ao $GNCP(F, G, K)$ como

$$\min f(x, l, z) \quad (2.11)$$

onde

$$f(x, l, z) = \|G(x) - R^t l\|^2 + \|AF(x) - z\|^2 + \|BF(x)\|^2 + \varphi(\lambda, z)$$

que é a soma do quadrado das normas de cada condição K.K.T. do problema equivalente.

2.2 Minimizadores Globais

Nesta seção, provaremos que o minimizador global de (2.11) é também a solução do $GNCP(F, G, K)$.

Teorema 2.2.1 *Se (x^*, l^*, z^*) é um minimizador global de (2.11), com $f(x^*, l^*, z^*) = 0$, então x^* é uma solução do $GNCP(F, G, K)$. Reciprocamente, se x^* é uma solução do $GNCP(F, G, K)$, então existem l^* e z^* tais que (x^*, l^*, z^*) é um minimizador global de (2.11) com $f(x^*, l^*, z^*) = 0$.*

Demonstração 2.2.1 *Se $f(x^*, l^*, z^*) = 0$, então*

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda^*, z^*) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^q \varphi^2(\lambda_i^*, z_i^*) = 0, \forall i = 1, \dots, q \Rightarrow \varphi(\lambda_i^*, z_i^*) = 0, \forall i = 1, \dots, q \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_i^* \geq 0, z_i^* \geq 0, \lambda_i^* z_i^* = 0, \forall i = 1, \dots, q \Rightarrow \lambda^* \geq 0, z^* \geq 0, (\lambda^*)^t z^* = 0 \end{aligned}$$

Então, temos que

$$G(x^*) = A^t \lambda^* + B^t \mu, \lambda^* \geq 0 \Rightarrow G(x^*) \in K^o$$

$$AF(x^*) = z^* \geq 0, BF(x^*) = 0 \Rightarrow F(x^*) \in K$$

e

$$\langle F(x^*), G(x^*) \rangle = \langle F(x^*), R^t l^* \rangle = \langle RF(x^*), l^* \rangle =$$

$$= \langle AF(x^*), \lambda^* \rangle + \langle BF(x^*), \mu^* \rangle = \langle z^*, \lambda^* \rangle = 0.$$

Portanto, x^* é uma solução do $GNCP(F, G, K)$.

Reciprocamente, se x^* é uma solução do $GNCP(F, G, K)$, como as restrições são lineares, e pelo lema 2.1.2, existem $\lambda^* \geq 0, \mu^*$ e $z^* \geq 0$ tais que

$$G(x^*) = A^t \lambda^* + B^t \mu^* \Rightarrow G(x^*) - R^t l^* = 0$$

$$AF(x^*) - z^* = 0, \quad BF(x^*) = 0$$

e

$$0 = F(x^*)^t G(x^*) = F(x^*)^t (A^t \lambda^* + B^t \mu^*) = (AF(x^*))^t \lambda^* + (BF(x^*))^t \mu^* = (\lambda^*)^t z^*$$

o que implica que $\varphi(\lambda^*, z^*) = 0$. Consequentemente, $f(x^*, l^*, z^*) = 0$.

2.3 Pontos Estacionários

Nesta seção, estabeleceremos condições para que pontos estacionários do problema (2.11) sejam soluções do $GNCP(F, G, K)$, visto que minimizadores globais são muito difíceis de serem obtidos, especialmente em problemas de grande porte.

Os algoritmos eficientes para resolver problemas de otimização, garantem convergência a pontos estacionários. Por isso, propomos o seguinte teorema.

Teorema 2.3.1 *Seja $F(x^*), G(x^*) \in C^1$. Se (x^*, l^*, z^*) é um ponto estacionário de (2.11) e $G'(x^*)[F'(x^*)]^{-1}$ for definida positiva no espaço nulo de B , então x^* é uma solução do $GNCP(F, G, K)$.*

Demonstração 2.3.1 *Sejam*

$$H^* = G'(x^*)[F'(x^*)]^{-1}$$

$$w^* = AF(x^*) - z^*$$

$$u^* = BF(x^*)$$

$$v^* = G(x^*) - R^t l^*$$

Se x^* é um ponto estacionário de (2.11), então

(i) Derivando em relação a x temos:

$$2(G'(x^*))^t v^* + 2(AF'(x^*))^t w^* + 2(BF'(x^*))^t u^* = 0$$

ou

$$G'(x^*)^t v^* + F'(x^*)^t A^t w^* + F'(x^*)^t B^t u^* = 0$$

Pré-multiplicando esta igualdade por $[F'(x^*)^t]^{-1}$, obtemos

$$(H^*)^t v^* + A^t w^* + B^t u^* = 0 \quad (2.12)$$

(ii) Derivando em relação a l , temos:

$$-2Av^* + 2J\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = 0$$

ou

$$Av^* = J\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) \quad (2.13)$$

onde

$$J = \text{diag} \left(\frac{\partial \varphi(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial \lambda_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi(\lambda_q^*, z_q^*)}{\partial \lambda_q} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial \lambda_i} = \frac{\lambda_i^*}{\sqrt{(\lambda_i^*)^2 + (z_i^*)^2}} - 1, \quad \forall i = 1 \dots q$$

e

$$\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1^*, z_1^*) \\ \dots \\ \varphi(\lambda_q^*, z_q^*) \end{pmatrix}$$

e também

$$Bv^* = 0 \quad (2.14)$$

(iii) Derivando em relação a z temos

$$-2w^* + 2K\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = 0 \Leftrightarrow w^* = K\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) \quad (2.15)$$

onde

$$K = \text{diag} \left(\frac{\partial \varphi(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial z_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi(\lambda_q^*, z_q^*)}{\partial z_q} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial z_i} = \frac{z_i^*}{\sqrt{(\lambda_i^*)^2 + (z_i^*)^2}} - 1, \forall i = 1 \dots q$$

Note que $J = J^t$ e $K = K^t$. Agora, multiplicando à esquerda (2.12) por $(v^*)^t$, obtemos

$$(v^*)^t (H^*)^t v^* + (v^*)^t A^t w^* + (v^*)^t B^t u^* = 0 \quad (2.16)$$

Também, multiplicando à esquerda (2.13) por $(w^*)^t$ e transpondo ambos membros, temos

$$(v^*)^t A^t w^* = \tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*)^t J w^*$$

Substituindo (2.15) nesta expressão, conseguimos

$$(v^*)^t A^t w^* = \tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*)^t J K \tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) \quad (2.17)$$

Multiplicando (2.14) à esquerda por $(u^*)^t$ e transpondo ambos membros, obtemos

$$(v^*)^t B^t u^* = 0 \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16), temos

$$(v^*)^t (H^*)^t v^* = -\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*)^t J K \tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) \quad (2.19)$$

A matriz JK é semi-definida positiva pois

$$JK = \text{diag} \left[\left(\frac{\partial \varphi(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial \lambda_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial z_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial \varphi(\lambda_q^*, z_q^*)}{\partial \lambda_q} \right) \left(\frac{\partial \varphi(\lambda_q^*, z_q^*)}{\partial z_q} \right) \right]$$

e pela observação 2.1.1, vemos que

$$\left(\frac{\partial \varphi(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial \lambda_i} \right) \left(\frac{\partial \varphi(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial z_i} \right) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, q$$

Então, por (2.19) temos que $(v^*)^t (H^*)^t v^* \leq 0$. Mas, por hipótese, H^* é definida positiva no núcleo de B . Por isso,

$$v^* = 0 \quad (2.20)$$

Em (2.13), substituindo (2.20), obtemos

$$Av^* = J\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) \Rightarrow \varphi(\lambda_i^*, z_i^*) \left(\frac{\partial \varphi(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial \lambda_i} \right) = 0, \quad \forall i = 1..q$$

Se $\varphi(\lambda_i^*, z_i^*) = 0$, temos o que queríamos. Se $\frac{\partial \varphi(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial \lambda_i} = 0$, então

$$\frac{\lambda_i^*}{\sqrt{(\lambda_i^*)^2 + (z_i^*)^2}} - 1 \Leftrightarrow \lambda_i^* > 0, z_i^* = 0$$

Isto implica que $\varphi(\lambda_i^*, z_i^*) = 0$. Logo, em qualquer um dos casos, temos que

$$\varphi(\lambda^*, z^*) = 0 \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.15) temos que

$$w^* = 0 \quad (2.22)$$

Substituindo (2.20) e (2.22) em (2.12), e multiplicando à esquerda por $F(x^*)^t$, obtemos

$$B^t u^* = 0 \Leftrightarrow F(x^*)^t B^t B F(x^*) = \|BF(x^*)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|u^*\|^2 = 0$$

que é equivalente a

$$u^* = 0 \quad (2.23)$$

Por (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) e pelo teorema 2.2.1, temos que x^* é solução do $GNCP(F, G, K)$.

Observe que, neste teorema, obtemos apenas condições necessárias para um ponto estacionário do problema de otimização (2.11).

No capítulo 4, resolveremos alguns problemas do $GNCP(F, G, K)$ e apresentaremos o método de Levenberg-Marquardt que nos ajudará a encontrar a solução do mesmo. Para isso, escreveremos a função objetivo de (2.11) da seguinte forma:

$$f(x, l) = \frac{1}{2} \Psi^t(x, l) \Psi(x, l) = \frac{1}{2} \|\Psi(x, l)\|^2 \quad (2.24)$$

onde $\Psi : \mathbb{R}^{n+q+s} \rightarrow \mathbb{R}^{n+q+s}$ e $l \in \mathbb{R}^{q+s}$ são definidos como

$$\Psi(x, l) = \begin{pmatrix} \varphi(AF(x), \lambda) \\ BF(x) \\ G(x) - R^t l \end{pmatrix} \quad e \quad l = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Note que, aqui, denotamos $z = AF(x)$.

Dessa forma, calculando o gradiente de (2.24), obtemos

$$\nabla f(x, l) = \nabla \Psi(x, l) \Psi(x, l) = V^t \Psi(x, l)$$

onde $V^t \in \partial(\Psi(x, l))$ é a matriz

$$V^t = \begin{pmatrix} \nabla F(x) A^t D_a & \nabla F(x) B^t & \nabla G(x) \\ D_b & 0 & -A \\ 0 & 0 & -B \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

onde

$$D_a = \text{diag}(a_1, \dots, a_q), \quad a_i = \frac{[AF(x)]_i}{\sqrt{\lambda_i^2 + [AF(x)]_i^2}} - 1, \quad i = 1, \dots, q$$

e

$$D_b = \text{diag}(b_1, \dots, b_q), \quad b_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2 + [AF(x)]_i^2}} - 1, \quad i = 1, \dots, q$$

Esta matriz V terá um papel fundamental como direção de descida para o método de Levenberg-Marquardt que será apresentado no capítulo 4, pois têm propriedades importantes que viabilizam o método [9].



Capítulo 3

Cones de Segunda Ordem

Consideraremos aqui o problema de complementaridade (1.1) sobre cones de segunda ordem, que será denotado por $SOCCP(F, G, K)$, com F e G contínuas e K o cone de segunda ordem definido por

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq (\sum_{i=2}^n a_i^2 x_i^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

e seu cone polar negativo é definido da seguinte forma

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq (\sum_{i=2, i \neq I}^n \frac{1}{a_i^2} x_i^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

onde $I = \{j \in \{1, \dots, n\} | a_j = 0\}$.

O cone K é chamado Cone de Lorentz se $a_i = 1, \forall i$. Dessa forma, o cone polar negativo coincide com o cone de Lorentz. O cone K está representado graficamente na figura 3.1. Os resultados teóricos aqui desenvolvidos baseia-se na idéia do paper de Andreani, Friedlander e Santos [1], e os resultados aqui apresentados acrescentam algo de novo para o problema da complementaridade sobre cones de segunda ordem.

3.1 Diferenciabilidade

Usando o lema 2.1.2, vamos escrever o problema de otimização equivalente ao $GNCP(F, G, K)$, só que agora com o cone de segunda ordem. Para isso, deno-



taremos $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\phi(x) = x_1 - R(x)$, onde

$$R(x) = \left(\sum_{i=2}^n a_i^2 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, o gradiente de $\phi(x)$ será

$$\nabla \phi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \left[\frac{-a_i^2 x_i}{R(x)} \right]_i \end{pmatrix} \quad i = 2, \dots, n$$

que é um vetor coluna com 1 na primeira coordenada e $\left[\frac{-a_i^2 x_i}{R(x)} \right]$ na i-ésima coordenada.

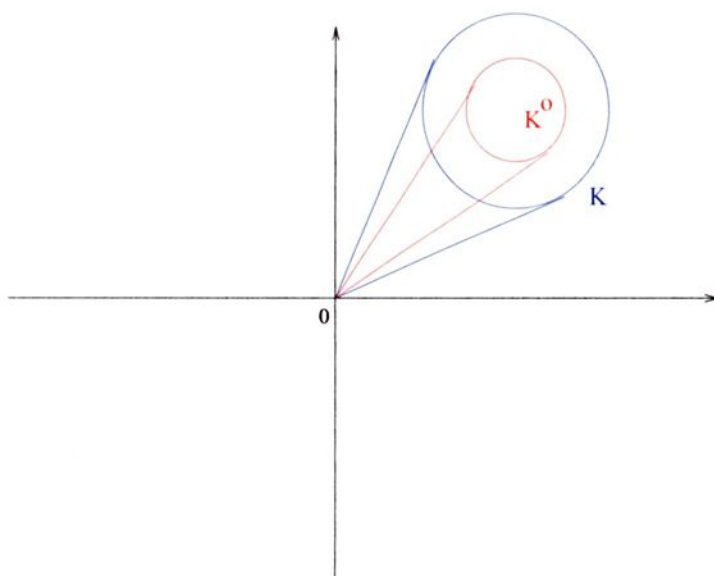


Figura 3.1: O Cone Perturbado.

Com esta notação, e considerando $F(x^*)$ um minimizador global regular do problema de minimização dado no lema 2.21, vamos escrever as condições Karush-Kuhn-Tucker(KKT) do problema (2.10):

(1) $G(x^*) - \lambda^* \nabla \phi(F(x^*)) = 0.$

(2) $\phi(F(x^*)) - z^* = 0.$

$$(3) \lambda^* z^* = 0, \lambda^* \geq 0, z^* \geq 0$$

Observe que estas condições pedem a diferenciabilidade de ϕ e a regularidade das restrições. Mas, como vemos, ϕ não é diferenciável no vetor nulo. Logo, teremos problemas se $F(x^*) = 0$.

Uma proposta para contornar este problema é reescrevermos o nosso cone K da forma

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1^2 \geq \sum_{i=2}^n a_i^2 x_i^2, x_1 \geq 0\}$$

onde agregamos uma restrição de positividade para x_1 e conseguimos um cone diferenciável. Assim, o cone polar ficará

$$K^o = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1^2 \geq \sum_{i=2, i \neq 1}^n \frac{1}{a_i^2} x_i^2, x_1 \geq 0\}$$

Para simplificar a notação e também nossos cálculos, vamos escrever K e K^o na forma matricial. Sejam

$$A = \text{diag}(1, -a_2^2, \dots, -a_p^2, 0, \dots, 0)$$

onde supomos, sem perda de generalidade, que $a_i = 0$, $p < i \leq n$ e $a_i \neq 0$, $2 \leq i \leq p$. Da mesma forma, seja

$$\bar{A} = \text{diag}(1, -\frac{1}{a_2^2}, \dots, -\frac{1}{a_p^2}, 0, \dots, 0).$$

Sejam também $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ e $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, onde $m_i = 0$, $1 \leq i \leq p$, $m_i = 1$, $p < i \leq n$. Assim, obtemos

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n / \frac{1}{2} x^t A x \geq 0, e_1^t x \geq 0\}$$

$$K^o = \{x \in \mathbb{R}^n / \frac{1}{2} x^t \bar{A} x \geq 0, e_1^t x \geq 0, Mx = 0\}$$

Note que $A\bar{A} = \text{diag}(1_p, 0, \dots, 0)$, onde $1_p = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$, $MA = AM = \bar{A}M = M\bar{A} = 0$.

Ainda, para reescrevermos as condições (KKT) do problema (2.10) em relação a este cone diferenciável, pedimos que $F(x^*)$ seja um ponto regular, ou

seja, que os vetores

$$AF(x^*) = \begin{pmatrix} F_1(x^*) \\ [-a_i^2 F_i(x^*)]_i \end{pmatrix} \quad i = 2, \dots, n \quad e \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

cumpram com alguma hipótese sobre as restrições (constraint qualification).

Observe que, se $F(x^*) = 0$ então $AF(x^*) = 0$, e teremos uma dependência linear das restrições do problema (2.10). Se $F_1(x^*) \neq 0$ e $F_i(x^*) = 0, i = 2, \dots, n$, também teríamos o mesmo problema. Mas, neste caso, como $F_1(x^*) > 0$, este ponto cumpre com a condição de Mangasarian-Fromovitz [5] e, em consequência, é um ponto (KKT) do problema (2.10).

Em resumo, se $F(x^*) > 0$, não teremos problemas com regularidade. Se $F(x^*) = 0$, teríamos que verificar se $G(x^*) \in K^o$. Se assim ocorrer, x^* é solução do problema da complementaridade sobre cones de segunda ordem. Caso contrário, nada podemos afirmar.

3.1.1 Minimizadores Globais

No próximo teorema, mostraremos a equivalência entre o problema de otimização equivalente e o GNCP(F,G,K). Também faremos uso da função de Fischer-Burmeister utilizada no capítulo 2. Para isso, defina

$$\varphi(\lambda, z) := \sum_{i=1}^2 \varphi_i^2(\lambda_i, z_i)$$

e sejam também

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad \phi_1(x) = \frac{1}{2} x^t A x, \quad \phi_2(x) = e_1^t x$$

$$\nabla \phi(x) = (\nabla \phi_1(x) \quad \nabla \phi_2(x)), \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Então, o problema equivalente de otimização será

$$\text{minimizar } f(x, \lambda, z) \quad (3.1)$$

onde $f(x, \lambda, z) = \| G(x) - \nabla \phi(x) \lambda \|^2 + \| \phi(x) - z \|^2 + \varphi(\lambda, z)$.

Teorema 3.1.1 *Se (x^*, λ^*, z^*) é um minimizador global do problema (3.1), com $f(x^*, \lambda^*, z^*) = 0$, então x^* é solução do SOCCP(F, G, K). Reciprocamente, se x^* é solução do SOCCP(F, G, K), com $F_i(x^*) \neq 0$ para algum i , então existem λ^*, z^* tais que (x^*, λ^*, z^*) é um minimizador global de (3.1), com $f(x^*, \lambda^*, z^*) = 0$.*

Demonstração 3.1.1 *Supondo $f(x^*, \lambda^*, z^*) = 0$, e observando que a função objetivo é uma soma de quadrados de normas, temos*

$$(1) \quad G(x^*) - \lambda_1^* A F(x^*) - \lambda_2^* e_1 = 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} F(x^*)^t A F(x^*) - z_1^* = 0$$

$$(3) \quad e_1^t F(x^*) - z_2^* = 0$$

$$(4) \quad \varphi(\lambda^*, z^*) = 0$$

Usando (4), e como φ é a função de Fisher-Burmeister, temos as seguintes equivalências

$$\varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*) = 0 \Rightarrow \lambda_1^* \geq 0, \quad z_1^* \geq 0, \quad \lambda_1^* z_1^* = 0$$

$$\varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*) = 0 \Rightarrow \lambda_2^* \geq 0, \quad z_2^* \geq 0, \quad \lambda_2^* z_2^* = 0$$

Observe que, como $z_1^* \geq 0$ e $z_2^* \geq 0$, de (3) e (2) obtemos que

$$F_1(x^*) = z_2^* \geq 0 \quad (3.2)$$

$$F(x^*)^t A F(x^*) = z_1^* \geq 0 \quad (3.3)$$

Se $F_1(x^*) = 0$, então por (3.3),

$$F_i(x^*) = 0, \quad \forall i \Rightarrow F(x^*) = 0$$

Portanto, $z_1 = z_2 = 0$ e $F(x^*) \in K$. Logo, por (1),

$$G(x^*) = \lambda_2^* e_1 \Rightarrow \begin{cases} G_1(x^*) = \lambda_2^* \geq 0 \\ G_i(x^*) = 0, \forall i = 2, \dots, n \end{cases} \Rightarrow G(x^*)^t \bar{A} G(x^*) \geq 0$$

Como $MG(x^*) = 0$, $G(x^*) \in K^\circ$ e $F(x^*)^t G(x^*) = 0$. Logo, x^* é solução do GNCP(F, G, K).

Se $F_1(x^*) > 0$, então por (3), $z_2^* > 0$ e $\lambda_2^* = 0$. Logo, de (2), $F(x^*) \in K$. Por (1), $G(x^*) = \lambda_1^* AF(x^*)$. Daí,

$$G(x^*)^t \bar{A} G(x^*) = \lambda_1^* F(x^*)^t \bar{A} A F(x^*) \geq 0$$

pois $\bar{A}A$ é uma matriz semi-definida positiva. Também, $G_1(x^*) = \lambda_1^* \geq 0$ e $MG(x^*) = 0$. Logo, $G(x^*) \in K^\circ$ e

$$F(x^*)^t G(x^*) = \lambda_1^* AF(x^*) = \lambda_1^* z_1^* = 0$$

Dessa maneira, x^* é solução do GNCP(F, G, K).

Reciprocamente, seja x^* solução do SOCCP(F, G, K). Como o lema 2.1.2 é generalizado para qualquer cone, então vale também para o cone de segunda ordem. Ainda, como $F_i(x^*) \neq 0$ para algum i , temos que $F(x^*)$ é um ponto (KKT) do problema (2.10) e portanto, existem $\lambda_1^*, \lambda_2^*, z_1^*, z_2^*$ tais que

$$(1) \quad G(x^*) - \lambda_1^* AF(x^*) - \lambda_2^* e_1 = 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} F(x^*)^t AF(x^*) - z_1^* = 0$$

$$(3) \quad e_1^t F(x^*) - z_2^* = 0$$

$$(4) \quad \lambda_1^* z_1^* = 0, \quad \lambda_1^* \geq 0, \quad z_1^* \geq 0, \quad \lambda_2^* z_2^* = 0, \quad \lambda_2^* \geq 0, \quad z_2^* \geq 0$$

De (4), tiramos que

$$\varphi(\lambda_1^*, z_1^*) = 0 \quad e \quad \varphi(\lambda_2^*, z_2^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(\lambda^*, z^*) = 0$$

pois esta é uma característica da função de Fischer-Burmeister. Logo, (x^*, λ^*, z^*) é mínimo global de (3.1), com valor da função objetivo zero e $F_i(x^*) \neq 0$, $i = 2, \dots, n$.

3.1.2 Pontos Estacionários

Neste teorema, vamos mostrar que pontos estacionários do problema equivalente são soluções do GNCP(F,G,K) se adicionarmos algumas hipóteses, que são dadas logo abaixo.

Teorema 3.1.2 *Sejam $F, G \in C^1$. Se (x^*, λ^*, z^*) é um ponto estacionário de 3.1, com $F_i(x^*) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, n$ e $G'(x^*)[F'(x^*)]^{-1} - \lambda_1^* A$ é definida positiva, então x^* é solução do SOCCP(F, G, K).*

Demonstração 3.1.2 Denote por

$$H^* = G'(x^*)[F'(x^*)]^{-1}$$

$$u^* = e_1^t F(x^*) - z_2^*$$

$$v^* = G(x^*) - \lambda_1^* A F(x^*) - \lambda_2^* e_1$$

$$w^* = \frac{1}{2} F(x^*)^t A F(x^*) - z_1^*$$

Assim, se (x^*, λ^*, z^*) é ponto estacionário de (3.1), então

(i) Derivando em relação a x temos

$$2(G'(x^*) - \lambda_1^* A F'(x^*))^t v^* + 2(F(x^*)^t A F'(x^*))^t w^* + 2(e_1^t F'(x^*))^t u^* = 0$$

Multiplicando ambos membros por $[F'(x^*)^{-1}]^t$, obtemos

$$[(H^*)^t - \lambda_1^* A] v^* + A F(x^*) w^* + e_1 u^* = 0 \quad (3.4)$$

(ii) Derivando em relação a λ , temos

$$-2 (A F(x^*) \quad e_1)^t v^* + D_\lambda(\varphi(\lambda^*, z^*)) = 0$$

onde $D_\lambda(\varphi(\lambda^*, z^*)) = 2B\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*)$, com

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial \lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial \lambda_2} \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*) \\ \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*) \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial \lambda_1} = \frac{\lambda_1^*}{((\lambda_1^*)^2 + (z_1^*)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \quad \frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial \lambda_2} = \frac{\lambda_2^*}{((\lambda_2^*)^2 + (z_2^*)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1$$

Então

$$(v^*)^t (AF(x^*) - e_1) = \tilde{\varphi}^t(\lambda^*, z^*)B \quad (3.5)$$

(iii) Derivando em relação a z , temos

$$\begin{pmatrix} w^* \\ u^* \end{pmatrix} = C\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) \quad (3.6)$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial z_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial z_2} \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*) \\ \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*) \end{pmatrix}$$

com

$$\frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial z_1} = \frac{z_1^*}{((\lambda_1^*)^2 + (z_1^*)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \quad \frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial z_2} = \frac{z_2^*}{((\lambda_2^*)^2 + (z_2^*)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1$$

Multiplicando (3.4) por $(v^*)^t$ à esquerda, obtemos

$$(v^*)^t [(H^*)^t - \lambda_1^* A]v^* + (v^*)^t (AF(x^*) - e_1) \begin{pmatrix} w^* \\ u^* \end{pmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.7) temos

$$(v^*)^t [(H^*)^t - \lambda_1^* A]v^* = -\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*)^t (BC)\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*)$$

Note que (BC) é semi-definida positiva pois

$$BC = \text{diag} \left(\left(\frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial \lambda_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial z_1} \right), \left(\frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial \lambda_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial z_2} \right) \right)$$

e

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial \lambda_i} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i(\lambda_i^*, z_i^*)}{\partial z_i} \right) = \left(\frac{\lambda_i^*}{((\lambda_i^*)^2 + (z_i^*)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \left(\frac{z_i^*}{((\lambda_i^*)^2 + (z_i^*)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \geq 0,$$

$i = 1, 2$, como já citamos na observação 2.1.1. Logo,

$$(v^*)^t [(H^*)^t - \lambda_1^* A]v^* \leq 0$$

Mas, por hipótese, $(H^*) - \lambda_1^* A$ é definida positiva. Então, concluímos que

$$v^* = 0 \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.4), e com $F_i(x^*) \neq 0$ para algum $i = 2, \dots, n$, temos que

$$AF(x^*)w^* = -e_1 u^* \Rightarrow -2a_i^2 F_i(x^*)w^* = 0 \quad i = 2, \dots, n$$

e como $a_i^2 \neq 0$, temos que

$$w^* = 0 = u^* \quad (3.9)$$

Agora, como $v^* = w^* = u^* = 0$, de (3.5) e (3.6) obtemos

$$B\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = 0, \quad C\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = 0$$

Se B e C forem inversíveis, então

$$\tilde{\varphi}(\lambda^*, z^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*) = 0 \\ \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*) = 0 \end{cases}$$

Se B e C não forem inversíveis, então

$$\left(\frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial \lambda_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial \lambda_2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_1^*}{((\lambda_1^*)^2 + (z_1^*)^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 \Leftrightarrow z_1^* = 0, \lambda_1^* > 0 \\ \frac{\lambda_2^*}{((\lambda_2^*)^2 + (z_2^*)^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 \Leftrightarrow z_2^* = 0, \lambda_2^* > 0 \end{cases}$$

e

$$\left(\frac{\partial \varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*)}{\partial z_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*)}{\partial z_2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z_1^*}{((\lambda_1^*)^2 + (z_1^*)^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 \Leftrightarrow z_1^* > 0, \lambda_1^* = 0 \\ \frac{z_2^*}{((\lambda_2^*)^2 + (z_2^*)^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 \Leftrightarrow z_2^* > 0, \lambda_2^* = 0 \end{cases}$$

Em qualquer um dos casos teremos

$$\varphi_1(\lambda_1^*, z_1^*) = 0 \quad e \quad \varphi_2(\lambda_2^*, z_2^*) = 0 \quad (3.10)$$

Portanto, por (3.8), (3.9), (3.10) e pelo teorema 3.1.1, x^* é solução do $SOCCP(F, G, K)$.

Como observamos nesta seção, adicionamos uma restrição ao cone ($x_1 \geq 0$) a fim de obter a diferenciabilidade do mesmo e conseguimos garantir a existência de pontos K.K.T. no minimizador global usando a constraint qualification de Mangasarian-Fromovitz. Outras estratégias de resolução são usadas para cones de segunda ordem [10].

3.2 Perturbação

Neste capítulo vamos propor uma estratégia de perturbação em nosso cone de segunda ordem, e trabalharemos com o problema de complementaridade (1.1), mas agora sobre este cone de segunda ordem perturbado. Este cone pode ser escrito como

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq (\sum_{i=2}^n a_i^2 x_i^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

Note que esta perturbação é feita somente no cone K , já que não precisamos da diferenciabilidade do cone polar. Assim, o cone K^o continua o mesmo:

$$K^o = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq (\sum_{i=2, i \neq I}^n \frac{1}{a_i^2} x_i^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

onde $I = \{j \in \{1, \dots, n\} | a_j = 0\}$. Note que $K_\epsilon \subset K$ e quando ϵ tende a zero, K_ϵ tende a K .

Observe, que temos apenas uma restrição no nosso problema, o que nos garante a regularidade em todo ponto, dado que $x \in K_\epsilon$, $x_1 > 0$. Para facilitar os cálculos, vamos reescrever o cone perturbado da forma

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / e_1^t x - (\sum_{i=2}^n x^t A x + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0\}$$

onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ e $A = \text{diag}(0, a_2^2, \dots, a_p^2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, onde supomos, sem perda de generalidade, que $a_i = 0$, $p < i \leq n$ e $a_i \neq 0$, $2 \leq i \leq p$. Da mesma forma, sejam

$$\bar{A} = \text{diag}(0, \frac{1}{a_2^2}, \dots, \frac{1}{a_p^2}, 0, \dots, 0),$$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ e $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, onde $m_i = 0$, $1 \leq i \leq p$, $m_i = 1$, $p < i \leq n$, e

$$K^o = \{x \in \mathbb{R}^n | e_1^t x \geq (\sum_{i=1}^p x^t \bar{A} x)^{\frac{1}{2}}, e_1^t x \geq 0, Mx = 0\}$$

Definimos também

$$\phi_\epsilon(x) = e_1^t x - R_\epsilon(x)$$

onde $R_\epsilon(x) = (x^t Ax + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ e

$$\nabla \phi_\epsilon(x) = e_1 - \frac{Ax}{R_\epsilon(x)}$$

e tome $\varphi(\lambda, z)$ a função de Fischer-Brumeister definida anteriormente. Considere o seguinte problema (P_ϵ) de minimização sem restrição:

$$\text{minimizar } f_\epsilon(x, \lambda, z) \quad (3.11)$$

onde

$$f_\epsilon(x, \lambda, z) = \|G(x) - \lambda \nabla \phi_\epsilon(F(x))\|^2 + \|\phi_\epsilon(F(x)) - z\|^2 + \varphi^2(\lambda, z)$$

3.2.1 Minimizadores Globais

Neste teorema, vamos mostrar que ao resolvermos o problema de otimização equivalente, cuja restrição é a restrição do cone perturbado, encontraremos uma aproximação da solução do SOCCP(F,G,K).

Teorema 3.2.1 *Se $(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon))$ é um minimizador global de (3.11), com $f(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0$, então existe $\pi(\epsilon)$ tal que*

$$F(x(\epsilon)) \in K \quad G(x(\epsilon)) \in K^o \quad G^t(x(\epsilon))F(x(\epsilon)) = \lambda(\epsilon)\pi(\epsilon)$$

Demonstração 3.2.1 *Como $f(x^*, \lambda^*, z^*) = 0$, e usando a característica da função de Fischer-Brumeister, temos*

$$(1) \quad G(x(\epsilon)) - \lambda(\epsilon)\nabla \phi_\epsilon(F(x(\epsilon))) = 0$$

$$(2) \quad \phi_\epsilon(F(x(\epsilon))) - z(\epsilon) = 0$$

$$(3) \quad \varphi^2(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0$$

De (3), obtemos que $\varphi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0 \Rightarrow \lambda(\epsilon) \geq 0, z(\epsilon) \geq 0, \lambda(\epsilon)z(\epsilon) = 0$

Agora, usando (2) temos

$$\phi_\epsilon(F(x(\epsilon))) = z(\epsilon) \geq 0 \Rightarrow F_1(x(\epsilon)) \geq R_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^n a_i^2 F_i(x(\epsilon)) \Rightarrow F(x(\epsilon)) \in K$$

Por (1), obtemos que

$$G(x(\epsilon)) = \lambda(\epsilon) \nabla \phi_\epsilon(F(x(\epsilon))) = \lambda(x(\epsilon)) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a_i^2 F_i(x(\epsilon))}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))} \end{bmatrix} \right) \quad i = 2, \dots, n$$

Logo,

$$G_1(x(\epsilon)) - \left(\sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i^2} G_i^2(x(\epsilon)) \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda(x(\epsilon)) \left(1 - \frac{R(F(x(\epsilon)))}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))} \right) \geq 0$$

onde $R(x) = \left(\sum_{i=2}^n a_i^2 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Isto implica que $G(x(\epsilon)) \in K^\circ$. Agora,

$$\begin{aligned} F(x(\epsilon))^t G(x(\epsilon)) &= F_1(x(\epsilon)) G_1(x(\epsilon)) - \sum_{i=2}^n F_i(x(\epsilon)) G_i(x(\epsilon)) = \\ &= \lambda(x(\epsilon)) \left[R_\epsilon(F(x(\epsilon))) - \frac{R(F(x(\epsilon)))^2}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))} \right] = \lambda(x(\epsilon)) \left[\frac{\epsilon^2}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))} \right] \end{aligned}$$

Portanto, existe

$$\pi(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))}$$

Agora, analisemos

$$\pi(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))} = \frac{\epsilon^2}{\left(\sum_{i=2}^n a_i^2 F_i(x(\epsilon)) + \epsilon^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Se $F_i(x(\epsilon)) \neq 0$ para algum i , então quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $\pi_\epsilon \rightarrow 0$. Se $F_i(x(\epsilon)) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos então que

$$\pi_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{\left(\frac{\sum_{i=2}^n a_i^2 F_i(x(\epsilon))}{\epsilon^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

tende a zero, quando ϵ tende a zero. Com isso, $F(x(\epsilon))$ é livre de condições e obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.1 Se $(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon))$ é um minimizador global de (3.11), com $f(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0$ e $\lambda(\epsilon)$ é limitado, então quando $\epsilon \rightarrow 0$, $x(\epsilon) \rightarrow x^*$, onde x^* é solução do SOCCP(F, G, K).

Demonstração 3.2.2 Dado que $\pi_\epsilon \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, e como $\lambda(\epsilon)$ é limitado, temos que $F(x(\epsilon))^t G(x(\epsilon)) \rightarrow 0$, com $F(x(\epsilon)) \in K$ e $G(x(\epsilon)) \in K^\circ$. Portanto, quando $\epsilon \rightarrow 0$, $x(\epsilon) \rightarrow x^*$, onde x^* é solução do SOCCP(F, G, K).

3.2.2 Pontos Estacionários

O seguinte teorema mostra sob quais condições podemos encontrar um minimizador global do problema P_ϵ . Denotando

$$D(\epsilon) = \frac{-AR_\epsilon^2(F(x(\epsilon))) + AF(x(\epsilon))F(x(\epsilon))^t A}{R_\epsilon^3(F(x(\epsilon)))}$$

a derivada de $\nabla\phi_\epsilon(F(x(\epsilon)))$ em relação a x , no ponto $x(\epsilon)$, e

$$\phi'_\epsilon(F(x(\epsilon))) = \left(e_1^t - \frac{F(x(\epsilon))^t A}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))} \right) F'(x(\epsilon))$$

a derivada de $\phi_\epsilon(F(x))$ em relação a x , no ponto $x(\epsilon)$, e lembrando que

$$\frac{\partial\phi(\lambda, z)}{\partial\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + z^2}} - 1 \quad e \quad \frac{\partial\phi(\lambda, z)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{\lambda^2 + z^2}} - 1$$

escrevemos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.2 Sejam $F, G \in C^1$. Se $(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon))$ é um ponto estacionário de (3.11) e $G'(x(\epsilon))[F'(x(\epsilon))]^{-1} - D(\epsilon)\lambda(\epsilon)$ é definida positiva, então $f(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0$.

Demonstração 3.2.3 Do mesmo modo que anteriormente, definimos

$$H^* = G'(x(\epsilon))[F'(x(\epsilon))]^{-1} - D(\epsilon)\lambda(\epsilon)$$

$$L^* = e_1 - \frac{AF(x(\epsilon))}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))}$$

$$v^* = G(x(\epsilon)) - \lambda(\epsilon)\nabla\phi_\epsilon(F(x(\epsilon)))$$

$$w^* = \phi_\epsilon(F(x(\epsilon))) - z(\epsilon)$$

Como $(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon))$ é um ponto estacionário de (3.11), então

$$[(H^*)^t - \lambda(\epsilon)(D(\epsilon))^t]v^* + L^*w^* = 0 \quad (3.12)$$

$$(L^*)^t v^* = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \quad (3.13)$$

$$w^* = \phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \frac{\partial \phi}{\partial z}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \quad (3.14)$$

Multiplicando (3.12) por $(v^*)^t$ à esquerda, obtemos

$$(v^*)^t [(H^*)^t - \lambda^*(D(\epsilon))^t] v^* + (v^*)^t L^* w^* = 0 \quad (3.15)$$

Multiplicando (3.13) por w^* e transpondo ambos membros, obtemos

$$(v^*)^t L^* w^* = \phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) w^*$$

e substituindo (3.14) na igualdade anterior, temos

$$(v^*)^t L^* w^* = \phi^2(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \frac{\partial \phi}{\partial z}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.15), obtemos

$$(v^*)^t [(H^*)^t - \lambda(\epsilon)(D(\epsilon))^t] v^* = -\phi^2(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \frac{\partial \phi}{\partial z}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon))$$

Observando que $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \frac{\partial \phi}{\partial z}(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \geq 0$, temos que

$(v^*)^t [(H^*)^t - \lambda(\epsilon)(D(\epsilon))^t] v^* \leq 0$. Mas, por hipótese, $H^* - \lambda(\epsilon)D(\epsilon)$ é definida positiva. Portanto,

$$v^* = 0 \quad (3.17)$$

De (3.12) resulta

$$L^* w^* = 0 \quad (3.18)$$

Note que $L^* \neq 0$ pois

$$L^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \left[\frac{-a_i F_i(x(\epsilon))}{R_\epsilon(F(x(\epsilon)))} \right]_i \end{pmatrix} \quad i = 2, \dots, n$$

Logo,

$$w^* = 0 \quad (3.19)$$

Por (3.13),

$$\left(\frac{\partial \phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon))}{\partial \lambda} \right) \phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0$$

Suponha que $\phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) \neq 0$. Logo, $\frac{\partial \phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon))}{\partial \lambda} = 0$, ou seja,

$$\frac{\lambda(\epsilon)}{\sqrt{(\lambda(\epsilon))^2 + (z(\epsilon))^2}} \Leftrightarrow z^* \geq 0, \lambda(\epsilon) \geq 0, z(\epsilon)\lambda(\epsilon) = 0 \Leftrightarrow \phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0$$

que é uma contradição. Logo,

$$\phi(\lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0 \quad (3.20)$$

De (3.17), (3.19) e (3.20), temos que $f(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), z(\epsilon)) = 0$.

Com este resultado, podemos escrever o seguinte corolário:

Corolário 3.2.2 *Seja ϵ_k uma sequência que converge para zero e tal que $\epsilon_k \geq 0, \forall k$. Se $(x(\epsilon_k), \lambda(\epsilon_k), z(\epsilon_k))$ é um ponto estacionário de (3.11) com $G'(x(\epsilon))[F'(x(\epsilon))]^{-1} - D(\epsilon)\lambda(\epsilon)$ definida positiva para todo ϵ_k , e $\lambda(\epsilon_k)$ é limitado, então $x(\epsilon_k) \rightarrow x^*$ quando $\epsilon_k \rightarrow 0$, com x^* solução do SOCCP(F, G, K).*

Demonstração 3.2.4 *A prova resulta diretamente dos teoremas 3.2.1, 3.2.2 e corolário 3.2.1.*

Capítulo 4

Experimentos Numéricos

4.1 Cones Poliédricos

Nesta seção, apresentaremos o método de Levenberg-Marquardt [12], fazendo uso da função objetivo f e da matriz $V \in \partial(\Psi(x, l))$ definidos em (2.24), (2.25) e (2.26). Este método foi implementado e testado no Matlab 5.2.0 e as matrizes dos problemas aqui testados foram geradas randômicamente com o comando "rand" do Matlab. Por conveniência, seja $z^k = (x^k, \lambda^k, \mu^k)$ o ponto da k -ésima iteração do algoritmo.

Algoritmo 4.1.1

Passo 1: Escolha um ponto inicial $z^0 \in \mathbb{R}^{n+q+s}$, parâmetros $\rho, \beta \in (0, 1)$ e $\epsilon \geq 0$.
Seja $k = 0$.

Passo 2: Se $\|\nabla f(z^k)\| \leq \epsilon$, parar; caso contrário, ir para o passo 3.

Passo 3: Escolha um elemento $V^k \in \partial\Psi(z^k)$. Seja $d^k \in \mathbb{R}^{n+q+s}$ a solução do sistema linear

$$((V^k)^t V^k + \nu^k I) d = -(V^k)^t \Psi(z^k)$$

onde $\nu^k = \|\Psi(z^k)\|$.

Passo 4: Seja m_k o menor inteiro não negativo m tal que

$$f(z^k + \rho^m d^k) \leq f(z^k) + \beta \rho^m \nabla f(z^k)^t d^k.$$

faça $z^{k+1} = z^k + \rho^{m_k} d^k$, $k := k + 1$ e vá ao passo 2.

Este algoritmo está bem definido, dado que $V \in \partial \Psi(x, l)$ sempre existe, $(V^k)^t V^k + \nu^k I$ é inversível e a direção d é de descida ([9]). Se $\nabla f(z^k) = 0$ então z^k é um ponto estacionário do problema (2.11) e assim x^k é solução do $GNCP(F, G, K)$. Na análise de convergência abaixo, assumiremos que $\epsilon = 0$ e que o algoritmo 4.1.1 gera uma sequência infinita.

Teorema 4.1.1 *Qualquer ponto de acumulação da sequência $\{z^k\}$ gerada pelo algoritmo 4.1.1 é um ponto estacionário de (2.11).*

Demonstração 4.1.1 Ver [9]

Agora, daremos dois exemplos que serão analisados em testes numéricos.

Exemplo 4.1.1 *Queremos encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$F(x^*) \geq 0, \quad x^* - m(x^*) \geq 0, \quad \langle F(x^*), x^* - m(x^*) \rangle = 0$$

onde

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $m(x) = \gamma(F(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é duas vezes diferenciável. Teremos duas opções para γ :

(1) $\gamma_i(t) = -0.5 - t_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$

(2) $\gamma_i(t) = -0.5 - 1.5t_i + 0.25t_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4$

Observe que, neste exemplo, temos $A = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B = 0 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Observe também que $G'(x)[F'(x)]^{-1}$ é definida positiva para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, portanto, também é definida positiva no espaço nulo de B .

Na tabela 1, temos a função γ utilizada (γ), os pontos iniciais usados (x^o), o valor da função objetivo na solução (f^*), o número de iterações executadas (it) e o tempo computacional empregado (tempo). Em todos os testes, as soluções encontradas foram $x^* = (-0.9, -1.2, -1.2, -0.9)^t$ quando usamos $\gamma_i(t) = -0.5 - t_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ e

$x^* = (-1.0021, -1.36, -1.36, -1.0021)^t$ quando usamos $\gamma_i(t) = -0.5 - 1.5t_i + 0.25t_i^2$, $i = 1, 2, 3, 4$. A precisão exigida foi $\epsilon \leq 10^{-7}$.

Tabela 1

γ	x^o	f^*	it	tempo (s)
(1)	$(0, \dots, 0)^t$	8.759×10^{-16}	8	0.06
(2)	$(0, \dots, 0)^t$	6.306×10^{-21}	9	0.06
(1)	$(-0.5, \dots, -0.5)^t$	4.296×10^{-21}	6	0.06
(2)	$(-0.5, \dots, -0.5)^t$	2.253×10^{-16}	6	0
(1)	$(-1, \dots, -1)^t$	3.089×10^{-18}	7	0
(2)	$(-1, \dots, -1)^t$	5.929×10^{-20}	7	0.05
(1)	$(0.5, \dots, 0.5)^t$	1.975×10^{-21}	13	0.05
(2)	$(0.5, \dots, 0.5)^t$	2.311×10^{-19}	14	0.06
(1)	$(1, \dots, 1)^t$	9.512×10^{-22}	19	0.11
(2)	$(1, \dots, 1)^t$	1.740×10^{-26}	21	0.05

Observando a tabela 1, vemos a eficácia do método em relação a precisão, iterações e tempo dispensado pela máquina e notamos que o Jacobiano da função inicial $F'(x)$ é inversível, simétrico e definida positivo. Dessa forma, este exemplo cumpre com a condição de que $G'(x)[F'(x)]^{-1}$ é definida positivo no núcleo de B (pois, aqui, $B = 0$) e, então, os pontos estacionários encontrados são soluções do $GNCP(F, G, K)$.



No próximo exemplo, vamos testar diferentes funções $G(x)$, geradas aleatoriamente. Isto nos dará uma idéia razoável da eficácia deste algoritmo.

Exemplo 4.1.2 Considere o problema de encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} x \in K = \{v \in \mathbb{R}^n | Av \geq 0\}, \\ Nx + d \in K^o = \{v \in \mathbb{R}^n | v = A^t \lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+^q\} \\ x^t(Nx + d) = 0 \end{cases}$$

onde o cone poliédrico K é gerado por s faces cujos lados são as seguintes arestas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\frac{2\pi}{s}i) \\ r \sin(\frac{2\pi}{s}i) \\ 1 \end{pmatrix} \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Sendo assim, a i -ésima linha da matriz $A \in \mathbb{R}^{s \times 3}$ pode ser computada como

$$\begin{pmatrix} \sin(\frac{2\pi}{s}i)(\cos\frac{2\pi}{s} - 1) - \cos(\frac{2\pi}{s}i)\sin\frac{2\pi}{s} \\ \cos(\frac{2\pi}{s}i)(1 - \cos\frac{2\pi}{s}) - \sin(\frac{2\pi}{s}i)\sin\frac{2\pi}{s} \\ r \sin(\frac{2\pi}{s}) \end{pmatrix}$$

Para cada família, escolhemos $r \in \{0.1, 1, 10\}$ e $s \in \{3, 5\}$. As componentes do vetor d são geradas randômicamente no intervalo $(-10, 10)$. Geramos a matriz N da seguinte maneira: denote a matriz ortogonal de Householder por $Q_{(\cdot)} = I - 2 \frac{u_{(\cdot)} u_{(\cdot)}^t}{\|u_{(\cdot)}\|^2}$, onde as componentes do vetor $u_{(\cdot)}$ são geradas randômicamente no intervalo $(-1, 1)$. Seja D_N a matriz diagonal cujos elementos de sua diagonal principal são gerados randômicamente no intervalo $(1, 10)$. Definimos, assim, $N = Q_{NL} D_N Q_{NR}$.

Para este exemplo, dividimos o conjunto de problemas testes em três famílias:

- (1) N é não-simétrica e indefinida.
- (2) N é simétrica e definida positiva.
- (3) N é simétrica e semi-definida positiva.

Obviamente, os problemas das famílias (1) e (3) não satisfazem as hipóteses do teorema 2.3.1. Para cada família com diferentes r e s , foram testados vinte problemas com o ponto inicial $z = (1, \dots, 1)^t$. Os resultados numéricos estão apresentados na tabela 2.

Tabela 2

s	família	r	Iter	SP	NF	tempo (s)
3	(1)	0.1	152	0.45	1.655×10^{-19}	0.88
		1	36.3	0.5	1.1495×10^{-20}	0.202
		10	13.21	0.7	5.8678×10^{-21}	0.17
	(2)	0.1	19.5	0.6	4.1151×10^{-20}	0.13
		1	13.4	1	5.2588×10^{-21}	0.09
		10	14.8	1	6.0342×10^{-19}	0.1
	(3)	0.1	20.3	0.65	3.4006×10^{-22}	0.13
		1	23.58	0.85	4.1999×10^{-19}	0.15
		10	192.1	0.3	2.4026×10^{-20}	0.22
5	(1)	0.1	169.6	0.45	3.4823×10^{-19}	1.44
		1	19.8	0.55	1.5815×10^{-19}	0.17
		10	21.6	0.7	1.6641×10^{-20}	0.17
	(2)	0.1	193.5	0.45	9.0739×10^{-20}	1.35
		1	35.7	1	6.9223×10^{-20}	0.29
		10	22.7	1	1.0112×10^{-21}	0.17
	(3)	0.1	225.6	0.8	1.3678×10^{-20}	1.62
		1	88.6	0.85	8.1465×10^{-20}	0.63
		10	191.6	0.25	3.1335×10^{-20}	1.34

Levando em conta a possibilidade de convergência para um ponto estacionário de $f(z)$ que não é solução do *GNCP*, chamamos de problema bem sucedido se o valor da f é menor do que 10^{-10} com até 1000 iterações e denotamos por **SP** a taxa de sucesso. Para todos os casos bem sucedidos, **Iter** denota a



média dos números de iterações e **NF** denota o maior valor para f alcançado entre os casos bem sucedidos. Também denotamos por **Speed** a velocidade média dispensada na resolução de cada problema.

Podemos ver, pelos resultados, que o algoritmo 4.1.1 tem uma boa performance para este conjunto de problemas, exceto para os casos onde $r = 0.1$, isto ocorre pois ao diminuirmos r , estamos diminuindo também a região de abrangência do cone, ou seja, aproximando sua arestas. Existe, também, o fato de que a matriz N fica mal condicionada quando $r = 0.1$, comprometendo a velocidade do algoritmo.

Observamos também que, quando temos N definida positiva, ou até mesmo, semi-definida positiva, a convergência é rápida com um número baixo de iterações.

O trabalho que o algoritmo faz para resolver este problema é maior quando aumentamos s . Aqui, exibimos até $s = 5$, mas aplicamos ainda $s = 9$ e verificamos que o algoritmo é mais exigido, o que é uma coisa normal.

4.2 Cones de Segunda Ordem

Para cones de segunda ordem, utilizamos o `easy.for` que é um algoritmo desenvolvido para minimização de funções não-lineares com ou sem restrições, e utiliza a linguagem FORTRAN.

Testamos cinco problemas cujas dimensões variam entre seis e dez, e a matriz Jacobiana da função f seja definida positiva ou semi-definida positiva.

Comparamos, na próxima tabela, o desenvolvimento do algoritmo usando, ou não usando, a função de Fischer-Burmeister. Para os casos em que não usamos a função de Fischer-Burmeister, obtemos um problema com restrições de positividade.

Os problemas usados estão descritos abaixo e, em todos os exemplos, usamos o cone de Lorentz, ou seja, com $A = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$.



Exemplo 4.2.1 Encontrar x tal que

$$F(x) \in K \quad G(x) \in K^o \quad F(x)^t G(x) = 0$$

onde

$$F(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ e^{x_2} \end{pmatrix} \quad G(x) = x$$

$$\text{e } K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^t A x \geq 0, x_1 \geq 0\}, \text{ com } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A solução desse problema é $x^* = (0, 0)^t$ com $\lambda^* = (0, 0)^t$ e $z^* = (0, 1)^t$. Observe que a matriz $G'(x^*)[F'(x^*)]^{-1} - \lambda_1^* A$ é definida positiva e satisfaz as condições do teorema 3.1.2. Isto nos garante que pontos estacionários são soluções do $GNCP(F, G, K)$.

Exemplo 4.2.2 Queremos resolver o $GNCP(F, G, K)$ com

$$F(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad G(x) = x, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A solução desse problema é $x^* = (0, 0, 0)^t$ com $\lambda^* = (0, 0)^t$ e $z^* = (0, 1)^t$. Observe que a matriz $G'(x^*)[F'(x^*)]^{-1} - \lambda_1^* A$ é semi-definida positiva e não satisfaz a hipótese do teorema 3.1.2, mas este ponto é solução do $SOCCP(F, G, K)$.

Exemplo 4.2.3 Queremos resolver o $GNCP(F, G, K)$ com

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G(x) = x$$

Observe que $F'(x)$ é uma matriz definida positiva e que o nosso problema de otimização terá oito variáveis.

Exemplo 4.2.4 Queremos resolver o $GNCP(F, G, K)$ tomando

$$F(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + 1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_4 + x_5 \end{pmatrix}, \quad G(x) = x$$

Aqui, $F'(x)$ é uma matriz definida positiva e o nosso problema de otimização terá nove variáveis.

A solução é $x^* = (0, 0, 0, 0, 0)^t$, $\lambda^* = (0, 0)^t$ e $z^* = (2, 2)^t$. Esta é uma solução para o $SOCCP(F, G, K)$.

Exemplo 4.2.5 Vamos resolver o $GNCP(F, G, K)$ com

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G(x) = x$$

Observe que $F'(x)$ é uma matriz semi-definida positiva e que o nosso problema de otimização terá dez variáveis.

Na tabela 3 descrevemos os resultados fornecidos pelo *easy.for* que são: a solução (z^*), o valor da função na solução encontrada (f^*), o número de iterações (*it*) e a velocidade da resolução do problema (*speed*). Também, comparamos as propostas usando e não usando a Função de Fischer-Burmeister, que denotaremos por (A) e (B), respectivamente, e os exemplos estão numerados de 1 a 6. O ponto inicial usado foi $z_0 = (1, \dots, 1)^t$ e a tolerância foi de $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$. Se obtivermos um valor para uma variável menor que ϵ , por exemplo, o valor $x_1 = 2.21 \times 10^{-9}$, então colocaremos na tabela $x_1 = 0$.

Tabela 3

Ex.	Prop.	z^*	f^*	It	tempo (s)
1	(A)	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$	2.622×10^{-13}	1	0
	(B)	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$	2.72×10^{-9}	1	0
2	(A)	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$	8.83×10^{-14}	1	0
	(B)	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$	2.26×10^{-14}	6	1.56
3	(A)	s_3	3×10^{-13}	1	0
	(B)	r_3	0.15	6	0
4	(A)	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2)^t$	3.73×10^{-13}	1	0
	(B)	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2)^t$	4.13×10^{-12}	6	0
5	(A)	s_5	1.5×10^{-2}	1	0
	(B)	r_5	0.43	6	1.56×10^{-2}

onde $s_3 = (0.31, 0.22, 0.08, -0.2, 0.2, 0, 0, 1.09)^t$, $r_3 = (-0.2, 0.05, -0.2, 0, 0, 0, 0, 0.8)^t$,
 $s_5 = (0.5, -0.4, -0.1, -0.22, -0.2, -0.29, -0.5, 0, 0, 1.09)$ e
 $r_5 = (-0.22, 0.06, 0.24, -3.74 \times 10^{-3}, -0.38, -0.24, 9.6 \times 10^{-2}, 0, 0, 0.84)$.

Para as funções (1), (2) e (4), as duas propostas foram bem, mesmo com a função (2) não satisfazendo a hipótese de ser definida positiva do teorema 3.1.2. Neste caso, o ponto estacionário encontrado é solução do SOCCP(F,G,K).

Por outro lado, na função (3), a proposta sem a função de Fischer-Burmeister encontrou dificuldades para sua resolução, fornecendo um valor para a função

objetivo maior do que o exigido. Para a função (5), as duas propostas foram ruins, devido a condição de semi-positividade do jacobiano da função $F(x)$, o que não nos garante que pontos estacionários sejam soluções do SOCCP(F,G,K).

Capítulo 5

Considerações Finais

Fizemos um estudo teórico para o problema de complementaridade não-linear generalizada para cones poliédricos, usando a estratégia de Andreani, Friedlander, Santos [1] para resolvê-los, mas acrescentando a função de Fischer-Burmeister à função objetivo, e provamos os mesmos resultados teóricos do paper citado, mas estabelecendo um problema de otimização equivalente sem restrições.

Usando o método de Levenberg-Marquardt, fizemos testes computacionais relacionados na seção 1 do capítulo 4. A convergência para pontos estacionários deste método está provada em Ma, Wang, Zhang [9], e também sua convergência super-linear.

Este método tem um bom comportamento para uma série de problemas testados e, analisando os dados fornecidos, observamos que a proposta de resolução do problema generalizado da complementaridade sobre cones poliédricos é numericamente aceitável, salvo os problemas que não satisfazem as condições do teorema para pontos estacionários.

Como o problema de complementaridade sobre cones de segunda ordem é um problema difícil de ser resolvido como um problema de otimização, trabalhamos com duas reformulações que têm viabilidade teórica e prática.

Provamos dois teoremas, tanto para a proposta com restrição adicional,



quanto para a proposta de perturbação do cone. Nestes dois casos, conseguimos escrever novos teoremas para este tipo de cone. Estes teoremas nos dizem respeito quanto a minimizadores globais e pontos estacionários do problema equivalente de otimização e soluções do $\text{SOCCP}(F,G,K)$.

Para testes numéricos, tomamos cinco problemas e usamos o `easy.for` para resolvê-los. Alguns destes problemas satisfazem as condições do teorema 3.1.2 e outros não. Trabalhamos estes cinco problemas usando a proposta com a função de Fischer-Brumeister e também a proposta usando a complementaridade com restrições.

Em geral, os resultados numéricos mostram que estas estratégias acham as soluções dos problemas, dependendo fortemente de condições adicionais impostas. Isto exige de nossa parte uma maior concentração em outras estratégias. Durante o decorrer desta dissertação, aprendemos vários conceitos que não nos eram conhecidos, e crescemos do ponto de vista da pesquisa científica. Continuando os estudos nesta área, uma opção seria estudar estratégias de projeção sobre cones de segunda ordem, dado que o cone K é convexo.



Referências Bibliográficas

- [1] R.Andreani,A.Friedlander and S.A.Santos [2001]. On the resolution of generalized nonlinear complementarity problem. In SIAM Journal on Optimization. Vol 12, (2), pp 303-321.
- [2] R.Andreani. Generalizações da Complementaridade [2001]. Tese de livre Docência. Departamento de Ciência da Computação e Estatística. Universidade Estadual Paulista - UNESP - São José do Rio Preto.
- [3] R.Andreani,A.Friedlander and J.M.Martínez [1997]. On the resolution of finite-dimentional variational inequalities, using smooth optimization with simple bounds, Journal of Optimization Theory and Applications. 94(3)pp. 635-657 .
- [4] R.Andreani and J.M.Martínez. On the reformulation of nonlinear complementary problems using the Fischer-Burmeister function, Applied Mathematics Letter 12, pp.7-12.
- [5] D.P. Bertsekas [1999], Nonlinear Programming, second edition, Athena Scientific, Massachusetts Institute of Technology .
- [6] EASY! [1999] Easy-to-use code for constrained minimization. Derivatives are optional. December. <http://www.ime.unicamp.br/martinez/software.htm>
- [7] F. Facchinei and J. Soares [1997], A new merit function for nonlinear complementary problems and a related algorithm, SIAM Journal on Optimization. Vol. 7, (1), pp. 225-247.



- [8] A. Fischer [1992], A special Newton-type optimization method, Optimization, 24, pp.269-284.
- [9] A. Friedlander [1994], Elementos de Programação não-linear, Editora da Unicamp, Universidade Estadual de Campinas.
- [10] M. Fukushima, Z. Luo and Paul Tseng [2001], Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems, SIAM Journal on Optimization. Vol. 12, (2), pp. 436-460.
- [11] M.S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret [1998], Applications of second-order cone programming, Linear Algebra Appl., 284, pp. 193-228.
- [12] F. Ma, Y. Wang and J. Zhang [2002], A nonsmooth L-M method for solving the generalized nonlinear complementary problem, relatório técnico.
- [13] O.L.Mangasarian and M.V.Solodov, Nonlinear Complementarity problem as unconstrained and constrained minimization [1993], Math.Program.,62,pp.277-297.
- [14] J.M. Martínez, S.A. Santos [1995], Métodos Computacionais de Otimização, Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP.
- [15] J.S. Pang, D. Sun, J. Sun [2003], Semismooth Homeomorphisms and Strong Stability of Semidefinite and Lorentz Complementary Problems, Mathematics of Operations Research 28, 39-63.
- [16] J.M. Peng, Equivalence of variational inequality problems to unconstrained optimization [1997], Math. Program.,78,pp.347-355.



