



86  
Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.003/94

Equivalência a nível de árvore dos acoplamentos  
mínimos e não-mínimos em teorias  $\xi R\phi^2$

Kwok Sau Fa

Orientador

*Antônio José Accioly*



Maio 1994

DECLARATION

I, the undersigned, declare that the contents of this work are original and have not been published elsewhere in any language.

The author, *Kwok Ai Tsu*, is the sole author of this work.

I, the undersigned, declare that I have read the work and that it is a true and correct copy of the original.

Dedico este trabalho à  
minha querida irmã

*Kwok Ai Tsu*

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Antônio José Accioly pela orientação e colaboração durante a elaboração deste trabalho.

Aos colegas do IFT pelos bons momentos de convívio.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Mostra-se que o funcional  $S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} [-R(\frac{1}{k^2} + \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi]$  descreve a mesma teoria a nível de árvore qualquer que seja o valor da constante de acoplamento  $\xi$ . Portanto, para estas teorias, os acoplamentos mínimo e não-mínimo são indistinguíveis a nível de árvore.

**Palavras-chaves:** acoplamento mínimo, acoplamento não-mínimo, nível de árvore, teorias  $\xi R\phi^2$ .

**Áreas de conhecimento:** 1.05.01.03-7, 1.05.03.01-3.

## ABSTRACT

It is shown that the action functional  $S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} [-R(\frac{1}{k^2} + \xi\phi^2) + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi]$  describes one and the same theory at tree level whatever may be the value of the coupling constant  $\xi$ . Thus, as far as these theories are concerned, both the minimal and nonminimal couplings are indistinguishable at tree level.

**Key words:** minimal coupling, nonminimal coupling, tree level,  $\xi R\phi^2$  theories.

## CONVENÇÕES

Adotamos a assinatura  $(+, -, -, -)$  para a métrica. As unidades são escolhidas de modo tal que  $\hbar = c = 1$ .

Índices gregos  $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$  vão de 0 a 3.

Índices latinos  $(i, j, k, \dots)$  vão de 1 a 3.

### Tensores

tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  :

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$$

onde  $R_{\alpha\mu\beta\nu}$  é o tensor de Riemann dado por

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\gamma}$$

curvatura escalar  $R$ :

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$$

tensor  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$  :

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

## INTRODUÇÃO

Tem sido sugerido por muitos autores que a ação correspondente à gravitação deveria conter, além da ação de Einstein, certos funcionais não-mínimos do campo escalar. As razões para tanto são múltiplas: a necessidade de manter a renormalizabilidade em teorias de campo no espaço curvo (Davies and Birrel,1982); a possibilidade de uma explicação teórica para o princípio de Mach (Lord,1976); a incorporação do mecanismo de quebra espontânea de simetria na gravitação (Zee,1979); a necessidade de abrandar as divergências do tensor de energia-momento (Callan et al.,1970); a construção de modelos não-singulares para o universo (Deng and Mannheim,1988); aplicação em cosmologia quântica (Hartle and Hawking,1983) e assim por diante (Amendola,1993).

Em geral, as candidatas a tais ações não-minimamente acopladas contém um termo da forma  $\xi R\phi^2$ , que é o único termo local possível envolvendo um acoplamento *adimensional* entre o campo  $\phi$  e a curvatura escalar  $R$  (Davies and Birrel,1982). Consequentemente iremos concentrar nossa atenção em teorias descritas pelo funcional

$$S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] \quad (1)$$

com  $k^2 = 8\pi G$  em unidades naturais.

O parâmetro de acoplamento  $\xi$  que comparece em (1) é usualmente escolhido como sendo zero ou  $(-1/6)$  por questões de simplicidade. Não existe, no entanto, nenhuma razão *a priori* para que este não possa tomar qualquer outro valor real. Isto nos leva a uma questão embaraçosa: que valor de  $\xi$  devemos, pelo menos em princípio, utilizar em nossos cálculos ordinários? *Responder a esta indagação a nível de árvore constitui à motivação do presente trabalho.*

Na parte I desta investigação é feita uma breve revisão sobre a teoria clássica da gravitação, na qual são ressaltadas alguns aspectos importantes das equações de Einstein: não-linearidade, invariância de calibre da teoria linearizada e a solução de onda. Em

sequência apresentamos a quantização canônica do campo gravitacional linearizado via método de Gupta-Bleuler e calculamos o propagador do gráviton pelo método das integrais de trajetória. Com o objetivo de mostrar as técnicas envolvidas nos cálculos dos processos de espalhamentos que serão utilizadas para responder ao questionamento básico deste trabalho, analisamos o espalhamento de partículas escalares não-massivas com troca de grávitons a nível de árvore.

Na parte II mostramos que a resposta à pergunta-chave desta investigação é bastante surpreendente: *a ação (1) descreve a mesma teoria a nível de árvore independentemente do valor da constante de acoplamento  $\xi$* . Demonstramos este resultado inicialmente para o caso de espaços conformemente planos (Accioly et al., preprint IFT-P.057/93), uma vez que em tais espaços as complicações matemáticas ficam bastante reduzidas, permitindo assim uma análise mais clara e direta dos processos e resultados envolvidos. Em seguida apresentamos uma demonstração desta asserção para espaços riemanniano arbitrários (Accioly et al., preprint IFT-P.058./93).

Na conclusão discutimos como estender este resultado a nível clássico (Accioly et al., preprint IFT-P.052/93). Apresentamos também um esboço relativo à equivalência quântica destas teorias.

## PARTE I

# QUANTIZAÇÃO DO CAMPO GRAVITACIONAL: APROXIMAÇÃO LINEAR

## ÍNDICE

Convenções .....	pag.ii
Introdução .....	pag.1
I - Quantização do campo gravitacional: aproximação linear .....	pag.3
I.I - Gravitação clássica .....	pag.6
I.II - Quantização canônica .....	pag.13
I.III - Quantização .....	pag.15
I.IV - Quantização via integral de Feynman .....	pag.25
I.V - Aplicação .....	pag.27
II - Espalhamentos com termo não mínimo $\xi R\phi^2$ .....	pag.32
II.I - Teoria de gravitação de Einstein no espaço conformemente plano .....	pag.33
II.II - Espaço riemanniano geral .....	pag.36
Epílogo .....	pag.42
Apêndices .....	pag.46
Apêndice A .....	pag.47
Apêndice B .....	pag.49
Apêndice C .....	pag.53
Apêndice D .....	pag.54
Apêndice E (FIGURAS) .....	pag.55
Referências .....	pag.59

Nesta primeira parte, faremos uma breve revisão da gravitação clássica, na qual ressaltamos apenas aspectos que vão nos interessar para o passo seguinte que é a sua quantização. Uma das características fundamentais da teoria de Einstein é sua natureza não linear. A não linearidade das equações de Einstein implica na existência de auto-interações dos próprios campos; conseqüentemente, o princípio de superposição não é mais válido. Essa característica não aparece por exemplo nos campos eletromagnético, de Dirac e Klein-Gordon, pois esses três últimos são lineares. Outro aspecto importante que vamos analisar é a invariância das equações de Einstein por transformações de coordenadas gerais. Essa invariância é também conhecida como invariância de calibre. A invariância de calibre da teoria é um aspecto essencial para a sua quantização. A quantização só será bem sucedida no caso de uma teoria de calibre se os graus espúrios da teoria forem eliminados (veja Nash, 1978).

Aqui, a quantização será feita com relação ao campo gravitacional fraco  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu}$ , onde  $\eta_{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço de Minkowski,  $k$  é uma constante que está relacionada com a constante de Newton e  $h_{\mu\nu}$  é um termo de perturbação. Essa expansão nos permite separar a lagrangeana de Einstein em duas partes: termos lineares e não lineares. A parte linear do campo gravitacional será considerada como campo "livre", enquanto que os termos não-lineares serão tratados como interações diretas entre os grávitons. Para quantizar o campo gravitacional, dois métodos serão empregados. O primeiro é o da quantização canônica. Nele, vamos mostrar como se deriva o propagador do gráviton passo a passo. As condições suplementares que definirão as partículas físicas serão tratadas com o formalismo de Gupta-Bleuler como no eletromagnetismo (veja Mandl and Shaw, 1984). O segundo método de quantização será via integral de Feynman. A dedução do propagador via integral de trajetória será feita heurísticamente, ou seja, o rigor matemático será deixado de lado.

Para fins de estudo e comparação, usaremos o calibre de De donder para o termo de fixação em ambos os métodos.

Basearemos fortemente a quantização do campo gravitacional no espaço de Minkowski

no artigo de Gupta, 1952.

Como aplicação, analisamos o espalhamento de partículas escalares sem massa com troca de grávitons a nível de árvore. O objetivo é mostrar as técnicas envolvidas nos cálculos dos processos de espalhamento.

## I.1 - GRAVITAÇÃO CLÁSSICA

A densidade lagrangeana de Einstein é dada da seguinte forma,

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{k^2}R = -\frac{\sqrt{-g}}{k^2}g^{\mu\nu} [\partial_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\gamma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\mu\gamma}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\gamma] \quad (1)$$

ou

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{k^2} \left\{ \partial_\gamma [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\gamma + g^{\mu\gamma} \Gamma_{\mu\nu}^\nu)] - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\Gamma_{\mu\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\nu\delta}^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\delta] \right\} \quad (2)$$

onde  $k^2 = 16\pi G$  e  $G$  é a constante de Newton.

As quadri-divergências totais não contribuem para as equações de movimento devido ao teorema de Gauss (Barut, 1980), portanto, os dois primeiros termos da equação (2) podem ser desprezados, e segue daí que

$$\mathcal{L}^* = -\frac{\sqrt{-g}}{k^2}W \equiv \frac{\sqrt{-g}}{k^2}g^{\mu\nu} [\Gamma_{\mu\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\nu\delta}^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\delta] \quad (3)$$

Existem vários métodos para se obter as equações de Einstein (veja Landau e Lifshitz, 1980 e Weinberg, 1972), mas aqui nós vamos apenas reproduzi-las

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4)$$

ou

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}T \right)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci simétrico.

Como podemos observar as equações (4) são não-lineares, pois  $R_{\mu\nu}$  contém produtos de  $\Gamma$ .

Temos também a seguinte relação

$$T_{\mu;\nu}^\nu = 0 ; G_{\mu;\nu}^\nu = 0 \quad (5)$$

---

\* - Posteriormente, usaremos essa lagrangeana para a quantização

Em princípio, as equações de Einstein (4) são em número de 10, com 10 componentes do tensor métrico independentes, no entanto, essas equações estão relacionadas com as quatro identidades de Bianchi (5). Então, dessas 10 equações 6 são independentes e 4 são equações de vínculo. Esses vínculos correspondem ao fato que, se  $g_{\mu\nu}$  é uma solução das equações de Einstein, então  $g'_{\mu\nu}$  transformado ( $x \rightarrow x'$ ) também o será. Esse tipo de problema é bastante similar ao problema que aparece no eletromagnetismo de Maxwell (veja Gupta, 1954). Para resolver esse tipo de problema, a solução é eliminar a ambiguidade no tensor métrico, adotando algum sistema particular. Uma escolha conveniente de um sistema de coordenadas é dada por

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (6)$$

Vamos verificar agora se é sempre possível escolher um sistema em que as condições dadas acima se conservem. A transformação de um sistema de coordenadas ao outro, para os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \Gamma_{\tau\sigma}^\rho \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (7)$$

Contraindo os índices  $(\mu\nu)$  com  $g'^{\mu\nu}$ , vem

$$\Gamma'^\lambda = \Gamma^\rho \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} - g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (8)$$

Supondo que  $\Gamma^\lambda$  não se anule, então podemos sempre escolher um novo sistema de coordenadas  $x'^\lambda$  tal que

$$g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \Gamma^\rho \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \quad (9)$$

e da equação (8) obtemos que  $\Gamma'^\lambda = 0$  no sistema  $x'$ . Assim, justificamos a escolha do sistema de coordenadas (6).

A equação (6) pode ser colocada na seguinte forma

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0 \quad (10)$$

Este sistema é conhecido como condições de coordenadas harmônicas ou calibre de De donder (Fock, 1959).

Um dos resultados mais impressionante das equações de Einstein (4) é sem dúvida a solução de ondas. Mas, até o presente momento nenhuma onda gravitacional foi detectada, apesar da intensa pesquisa realizada nesta área nessas últimas décadas (veja Blair, 1991). Vamos mostrar agora a solução de onda linearizada e paralelamente mostramos também a invarância de calibre linearizada. Dada a seguinte métrica para o campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (11)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (11.a)$$

onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . desprezando termos superiores à primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$ , o tensor de Ricci pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} \approx \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} [-\square h_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha + \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h] \quad (12)$$

Substituindo na equação (4) temos que

$$-\square h_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha + \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h = 16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} T \right) \quad (13)$$

De acordo com a discussão feita no início desta seção, dada uma solução da equação (13), podemos sempre gerar uma outra solução através de transformações de coordenadas. A transformação mais geral é dada por

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (14)$$

onde  $\xi^\mu$  é uma grandeza pequena.

A transformação de  $g_{\mu\nu}$  para  $g'_{\mu\nu}$  é dada pela seguinte relação

$$g'^{\mu\nu} = \partial_\lambda x'^\mu \partial_\rho x'^\nu g^{\lambda\rho} \quad (15)$$

Usando a relação (11.a), obtemos

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial_\lambda \xi^\mu \eta^{\lambda\nu} - \partial_\rho \xi^\nu \eta^{\rho\mu}$$

ou

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \quad (16)$$

Podemos verificar facilmente que  $h'_{\mu\nu}$  mantém a equação (13) invariante. Isso significa que tanto  $h_{\mu\nu}$  como  $h'_{\mu\nu}$  são soluções da equação (13). E essa propriedade é conhecida como invariância de calibre.

Substituindo a equação (11.a) na relação (10) obtemos o seguinte calibre de De donder linearizado

$$\partial_\mu h'_\nu{}^\mu = \frac{1}{2} \partial_\nu h \quad (17)$$

A análise feita anteriormente sobre o calibre de De donder também pode ser feita usando a equação (17). Supondo que  $h_{\mu\nu}$  não satisfizesse a equação (17), então podemos encontrar  $h'^{\mu\nu}$  que satisfaça às condições (17) no sistema  $x'$ , tal que

$$\partial_\mu h'_\nu{}^\mu = \frac{1}{2} \partial_\nu h' \quad (18)$$

com as seguintes equações diferenciais a serem resolvidas

$$\square \xi_\nu = \partial_\mu h'_\nu{}^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h' \quad (19)$$

Vemos que a equação (19) ainda possui 4 valores arbitrários  $\xi_\mu$ ; portanto as condições (17) não fixam ainda a escolha de um referencial. Essa situação só pode ser resolvida com a escolha dos  $\xi_\mu$ .

Usando o calibre de De donder linearizado podemos reduzir a equação (13) sem fonte para

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (20)$$

A equação (20) é justamente uma equação de onda (veja Landau e Lifshitz, 1980), e a solução pode ser representada por ondas planas da forma

$$h_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu} \exp(-iqx) + a_{\mu\nu}^\dagger \exp(iqx) \quad (21)$$

Substituindo nas equações (17) e (20), obtemos

$$q_\mu q^\mu = 0 \quad (22)$$

$$q_\mu a_\nu^\mu = \frac{1}{2} q_\nu a_\mu^\mu \quad (23)$$

e os  $a_{\mu\nu}$  são chamados de vetores de polarização.

Vamos escolher agora a solução homogênea da equação (19) e escrever  $\xi^\mu$  sob a forma

$$\xi^\mu(x) = -i\xi^\mu \exp(-iqx) + i\xi^{\dagger\mu} \exp(iqx) \quad (24)$$

Aplicando o operador  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ , vem

$$\square \xi^\mu = q^2 = 0 \quad (25)$$

Usando a relação (16) temos que

$$h'_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu}(\vec{q}) \exp(-iqx) + a_{\mu\nu}^{\dagger'}(\vec{q}) \exp(iqx) \quad (26)$$

Fazendo

$$a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + q_\mu \xi_\nu + q_\nu \xi_\mu \quad (27)$$

e substituindo a equação (27) na equação (23), obtemos

$$q_\mu [a_\nu^{\prime\mu} - q^\mu \xi_\nu - q_\nu \xi^\mu] = \frac{1}{2} q_\nu [a_\mu^{\prime\mu} - 2q^\mu \xi_\mu]$$

$$q_\mu a_\nu^{\prime\mu} = \frac{1}{2} q_\nu a_\mu^{\prime\mu} \quad (28)$$

Vemos que o tensor de polarização  $a'_{\mu\nu}$  ainda satisfaz as condições de coordenadas (17), isso significa que  $a'_{\mu\nu}$  e  $a_{\mu\nu}$  representam a mesma situação física com 4 valores arbitrários  $\xi_\mu$  (veja equação 27). Vamos escolher agora o vetor de onda na direção z

$$q^1 = q^2 = 0 ; q^3 = q^0 = q > 0 \quad (29)$$

Neste caso, a equação (23) fica com as seguintes relações

$$\begin{aligned} a_{31} + a_{01} &= a_{32} + a_{02} = 0 \\ a_{33} + a_{03} &= -a_{03} - a_{00} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33} - a_{00}) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} a_{01} &= -a_{31} \\ a_{02} &= -a_{32} \\ a_{03} &= -\frac{1}{2}(a_{33} + a_{00}) \\ a_{22} &= -a_{11} \end{aligned} \quad (30)$$

Substituindo na equação (27), obtemos

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} & a'_{12} &= a_{12} \\ a'_{13} &= a_{13} - q\xi_1 & a'_{23} &= a_{23} - q\xi_2 \\ a'_{33} &= a_{33} - 2q\xi_3 & a'_{00} &= a_{00} + 2q\xi_0 \\ a'_{01} &= -a'_{13} & a'_{02} &= -a'_{23} \\ a'_{03} &= -\frac{1}{2}(a'_{00} + a'_{33}) & a'_{22} &= -a'_{11} \end{aligned} \quad (31)$$

Se escolhermos  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  como

$$\xi_1 = \frac{a_{13}}{q}, \xi_2 = \frac{a_{23}}{q}, \xi_3 = \frac{a_{33}}{2q}, \xi_0 = -\frac{a_{00}}{2q}$$

podemos anular  $a'_{13}, a'_{33}, a'_{23}$  e  $a'_{00}$  e automaticamente eliminamos também as componentes  $a'_{01}, a'_{02}$  e  $a'_{03}$  com exceção das componentes  $a'_{11} = -a'_{22}$  e  $a'_{12}$ . Isso significa que somente as

componentes  $a_{11}$  e  $a_{12}$  possuem significado físico. Este resultado está diretamente ligado com a parte quântica da teoria, onde essas duas componentes independentes correspondem aos grávitons reais.

Aqui, finalizamos a nossa discussão sobre a gravitação clássica. Passamos agora para parte quântica. Lembremos que, a quantização será feita no espaço de Minkowski.

## I.II - QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Consideramos que  $g_{\mu\nu}$  seja dado por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu} \quad (1)$$

Usando a seguinte propriedade,

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha} \quad (2)$$

O tensor contravariante  $g^{\mu\nu}$  fica

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - kh^{\mu\nu} + k^2 h_{\alpha}^{\mu} h^{\alpha\nu} + \mathcal{O}(k^3) \quad (3)$$

O determinante de  $g_{\mu\nu}$  é dado por

$$g = - \left[ 1 + kh_{\alpha}^{\alpha} + \frac{k^2}{2} ((h_{\alpha}^{\alpha})^2 - h^{\alpha\mu} h_{\alpha\mu}) \right] + \mathcal{O}(k^3) \quad (4)$$

Substituindo as equações (1), (3) e (4) na equação (I.I.3), obtemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{Ig} \quad (5)$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\delta} \eta^{\alpha\tau} [2\partial_{\alpha} h_{\nu\delta} \partial_{\gamma} h_{\mu\tau} - 2\partial_{\mu} h_{\nu\delta} \partial_{\gamma} h_{\alpha\tau} - \partial_{\delta} h_{\nu\alpha} \partial_{\gamma} h_{\mu\tau} + \partial_{\delta} h_{\nu\mu} \partial_{\gamma} h_{\alpha\tau}] \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{Ig} = \frac{k}{8} A^{\mu\nu\gamma\delta\alpha\beta\tau\rho} h_{\beta\rho} \{ [2\partial_{\alpha} h_{\nu\delta} - \partial_{\delta} h_{\nu\alpha}] \partial_{\gamma} h_{\mu\tau} - [2\partial_{\mu} h_{\nu\delta} - \partial_{\delta} h_{\nu\mu}] \partial_{\gamma} h_{\alpha\tau} \} + \mathcal{O}(k^2) \quad (7)$$

$$A^{\mu\nu\gamma\delta\alpha\beta\tau\rho} = \eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\delta} (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\tau\rho} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\tau\beta}) + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\tau} (\eta^{\gamma\beta} \eta^{\delta\rho} + \eta^{\gamma\rho} \eta^{\delta\beta}) + \eta^{\alpha\tau} \eta^{\gamma\delta} C^{\mu\nu\beta\rho} \quad (8)$$

e  $C^{\mu\nu\alpha\rho}$  é dado por

$$C^{\mu\nu\beta\rho} = \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\beta\rho} \quad (9)$$

$\mathcal{L}_0$  é a densidade lagrangeana livre , e  $\mathcal{L}_{I_g}$  será considerada como densidade lagrangeana de interação dos grávitons. Escolhendo o seguinte termo de fixação de calibre

$$\mathcal{L}_{f.g} = \frac{1}{2} \left( h_{,\mu}^{\mu\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} h_{\beta,\mu}^{\beta} \right) \left( h_{\nu\alpha}^{\alpha} - \frac{\eta_{\nu\alpha}}{2} h_{\eta}^{\eta,\alpha} \right) \quad (10)$$

teremos então que

$$\mathcal{L}'_g = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{f.g} = \frac{1}{4} \left[ \partial_{\alpha} h^{\mu\nu} \partial^{\alpha} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} h_{\lambda}^{\lambda} \partial^{\mu} h_{\gamma}^{\gamma} \right] \quad (11)$$

A densidade lagrangeana (11) é invariante pela seguinte transformação

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \gamma_{\gamma}^{\gamma} \\ h_{\lambda}^{\lambda} &= -\gamma_{\lambda}^{\lambda} \end{aligned} \quad (12)$$

isto é,

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{4} \left[ \partial_{\alpha} \gamma^{\mu\nu} \partial^{\alpha} \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \gamma_{\lambda}^{\lambda} \partial^{\mu} \gamma_{\alpha}^{\alpha} \right] \quad (13)$$

A densidade lagrangeana (13) pode ser colocada sob a seguinte forma,

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{8} C^{\lambda\beta\mu\nu} \partial_{\alpha} \gamma_{\lambda\beta} \partial^{\alpha} \gamma_{\mu\nu} . \quad (14)$$

E a densidade hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \Pi^{\gamma\delta} \dot{h}_{\gamma\delta} - \mathcal{L}_g = \frac{1}{4} \left[ 2\dot{\gamma}^{\mu\nu} \dot{\gamma}_{\mu\nu} - \dot{\gamma}_{\lambda}^{\lambda} \dot{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} - \partial_{\alpha} \gamma^{\mu\nu} \partial^{\alpha} \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \gamma_{\lambda}^{\lambda} \partial^{\mu} \gamma_{\alpha}^{\alpha} \right] \quad (15)$$

### I.III - QUANTIZAÇÃO

A quantização do campo gravitacional torna-se mais fácil se considerarmos  $\gamma_{\mu\nu}$  e  $\gamma$  como variáveis independentes. Neste caso, a densidade lagrangeana livre assume a seguinte forma

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{4} \left[ \partial_\alpha \gamma^{\mu\nu} \partial^\alpha \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \gamma \partial^\mu \gamma \right] \quad (16)$$

e a densidade hamiltoniana é escrita como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \left[ 2\dot{\gamma}^{\mu\nu} \dot{\gamma}_{\mu\nu} - \dot{\gamma}\dot{\gamma} - \partial_\alpha \gamma^{\mu\nu} \partial^\alpha \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \gamma \partial^\mu \gamma \right] \quad (17)$$

A concordância entre as densidades hamiltonianas (15) e (17) será assegurada pela condição suplementar, onde o valor esperado de  $\gamma$  será colocado igual ao valor de  $\gamma_\lambda^\lambda$ . As equações de movimento de  $\gamma$  e  $\gamma_{\mu\nu}$  são

$$\square \gamma = 0 \quad (17.a)$$

$$\square \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad (17.b)$$

Estas são as equações de onda, que admitem as seguintes soluções

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{(+)} + \gamma_{\mu\nu}^{(-)} = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{p}}}} [a_{\mu\nu}(\vec{p}) \exp(-ipx) + a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p}) \exp(ipx)] \quad (18.a)$$

$$\gamma = \gamma^{(+)} + \gamma^{(-)} = \sum_{\vec{p}} \frac{2}{\sqrt{2V\omega_{\vec{p}}}} [a(\vec{p}) \exp(-ipx) + a^\dagger(\vec{p}) \exp(ipx)] \quad (18.b)$$

onde  $\omega_{\vec{p}} = |\vec{p}|$  (Gupta, 1977).

A prescrição usual para quantização é dada pelas seguintes relações de comutação a tempos iguais,

$$[\gamma(x), \Pi(x')]_{x^0=x'^0} = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (19.a)$$

$$[\gamma_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu}(x')]_{x^0=x'^0} = \frac{i}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (19.b)$$

Os momentos conjugados de  $\gamma$  e  $\gamma_\nu^\mu$  são

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{\gamma}} = -\frac{\dot{\gamma}}{4}$$

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{\gamma}_{\alpha\beta}} = \frac{\dot{\gamma}^{\alpha\beta}}{2} \quad (20)$$

Substituindo as relações (20) nas equações (19), vem

$$[\gamma(x), \dot{\gamma}(x')]_{x^0=x'^0} = -4i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (21.a)$$

$$[\gamma_{\alpha\beta}(x), \dot{\gamma}^{\mu\nu}(x')]_{x^0=x'^0} = i \left( \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu \right) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (21.b)$$

e

$$[\gamma(x), \gamma(x')]_{x^0=x'^0} = [\dot{\gamma}(x), \dot{\gamma}(x')]_{x^0=x'^0} = 0 \quad (21.c)$$

$$[\gamma_{\alpha\beta}(x), \gamma_{\mu\nu}(x')]_{x^0=x'^0} = [\dot{\gamma}_{\alpha\beta}(x), \dot{\gamma}_{\delta\lambda}(x')]_{x^0=x'^0} = 0 \quad (21.d)$$

Para calcular o propagador do gráviton, precisamos em primeiro lugar achar as relações de comutação covariantes de  $\gamma$  e  $\gamma_{\mu\nu}$ . Aqui, vamos apenas calcular o propagador de  $\gamma_{\mu\nu}$ , pois o campo  $\gamma$  segue a mesma linha de raciocínio; portanto não há necessidade de expor novamente todas as técnicas. Substituindo a relação (18.a) na equação (21.d), temos

$$\begin{aligned} & [\gamma_{\mu\nu}(x), \gamma_{\lambda\rho}(x')]_{x^0=x'^0} = \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \times \\ & \times \left[ [a_{\mu\nu}(\vec{p}), a_{\lambda\rho}(\vec{p}')] e^{[-i(\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'})t + i(\vec{p}\vec{x} + \vec{p}'\vec{x}')] } + [a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p}), a_{\lambda\rho}^\dagger(\vec{p}')] e^{[i(\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'})t - i(\vec{p}\vec{x} + \vec{p}'\vec{x}')] } \right] \\ & + \left[ [a_{\mu\nu}(\vec{p}), a_{\lambda\rho}^\dagger(\vec{p}')] e^{[-i(\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'})t + i(\vec{p}\vec{x} - \vec{p}'\vec{x}')] } + [a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p}), a_{\lambda\rho}(\vec{p}')] e^{[i(\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'})t - i(\vec{p}\vec{x} - \vec{p}'\vec{x}')] } \right] = 0 \end{aligned}$$

Tendo em vista os  $\omega$ 's são positivos e o tempo é arbitrário, segue-se que

$$[a_{\mu\nu}(\vec{p}), a_{\lambda\rho}(\vec{p}')] = [a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p}), a_{\lambda\rho}^\dagger(\vec{p}')] = 0 \quad (22.a)$$

$$[a_{\mu\nu}(\vec{p}), a_{\lambda\rho}^\dagger(\vec{p}')] = D_{\mu\nu\lambda\rho}(\vec{p}) \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \quad (22.b)$$

Introduzindo a seguinte definição

$$\Delta^+(x) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\omega_{\vec{p}}} \exp(-ipx) \quad (27)$$

obtemos

$$[\gamma_{\mu\nu}^{(+)}(x), \gamma_{\lambda\rho}^{(-)}(x')] = i(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) \Delta^+(x - x') \quad (28)$$

Vamos introduzir também o  $\Delta^-(x)$  da seguinte forma.

$$\Delta^-(x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\omega_{\vec{p}}} \exp(ipx) \quad (29)$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mu\nu}^{(-)}(x), \gamma_{\lambda\rho}^{(+)}(x')] &= -\sum_{\vec{p}} \frac{(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda})}{2V\omega_{\vec{p}}} \exp[ip(x - x')] \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\omega_{\vec{p}}} (\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) \exp[ip(x - x')] \\ [\gamma_{\mu\nu}^{(-)}(x), \gamma_{\lambda\rho}^{(+)}(x')] &= i(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) \Delta^{(-)}(x - x') \end{aligned} \quad (30)$$

Substituindo as equações (28) e (30) na equação (26), obtemos

$$[\gamma_{\mu\nu}(x), \gamma_{\lambda\rho}(x')] = i(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) \Delta(x - x') \quad (31)$$

onde

$$\Delta(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\omega_{\vec{p}}} [\exp(ipx) - \exp(-ipx)] = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\sin(px)}{\omega_{\vec{p}}}$$

Um meio útil de representar as funções- $\Delta$  é colocá-las como integrais de contorno no plano complexo  $p_0$ , isto é

$$\Delta^\pm(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4p \frac{\exp(-ipx)}{p^2} \quad (32)$$

Com os contornos  $C^+$  para  $\Delta^+$  e  $C^-$  para  $\Delta^-$ . A função  $\Delta$  pode ser representada pela mesma integral (32) com o contorno  $C$  (veja a seguinte figura).

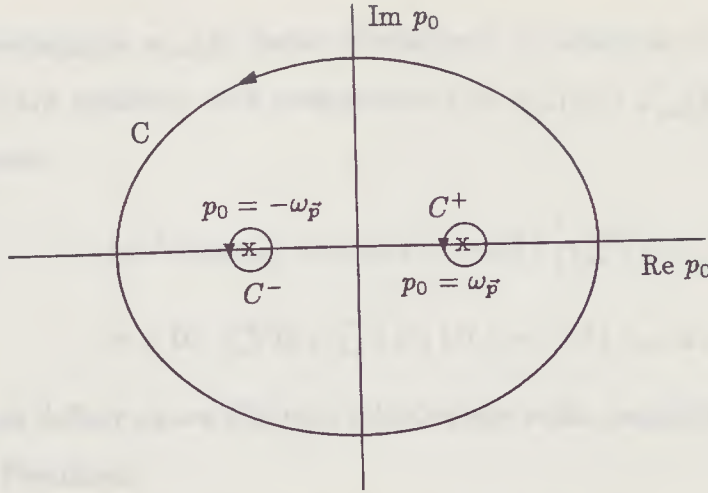


Fig.1 - Os contornos  $C$ ,  $C^+$  e  $C^-$  para funções  $\Delta$ ,  $\Delta^+$  e  $\Delta^-$ , respectivamente.

Para  $\Delta^+$  temos que

$$\Delta^+(x) = - \int_{C^+} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ipx)}{(p_0 + \omega_{\vec{p}})(p_0 - \omega_{\vec{p}})} = - \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\exp(-ipx)}{\omega_{\vec{p}}} \quad (33)$$

E para  $\Delta^-$ , temos

$$\Delta^-(x) = - \int_{C^-} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ipx)}{(p_0 + \omega_{\vec{p}})(p_0 - \omega_{\vec{p}})} = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i(\omega_{\vec{p}}x_0 + \vec{p}\vec{x})]}{\omega_{\vec{p}}}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável ( $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ ) segue-se que

$$\Delta^-(x) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i(\omega_{\vec{p}}x_0 - \vec{p}\vec{x})]}{\omega_{\vec{p}}} = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\exp(ipx)}{\omega_{\vec{p}}} \quad (34)$$

Vemos que as funções- $\Delta$  dadas pelas relações (32) são equivalentes às definições (27) e (29).

Note-se que a função- $\Delta^+$  é "C-number" e pode ser escrita como o valor esperado do vácuo de um produto de dois operadores do campo, isto é

$$i\Delta^+(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) = \langle 0 | [\gamma_{\mu\nu}^{(+)}(x), \gamma_{\lambda\rho}^{(-)}(x')] | 0 \rangle \quad (35)$$

onde o vácuo é definido como o estado no qual não está presente gráviton de nenhuma espécie,

$$a_{\mu\nu}(\vec{p}) | 0 \rangle = 0, \quad \text{para todos os } \vec{p} \quad (36)$$

Consideramos  $a_{\mu\nu}(\vec{p})$  como operadores de absorção e  $a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p})$  como operadores de criação. Para justificar essa interpretação de  $a_{\mu\nu}(\vec{p})$  e  $a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p})$ , veja a equação (51). Consequentemente,

$$\begin{aligned} i\Delta^+(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) &= \langle 0 | [\gamma_{\mu\nu}^{(+)}(x), \gamma_{\lambda\rho}^{(-)}(x')] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \gamma_{\mu\nu}^{(+)}(x)\gamma_{\lambda\rho}^{(-)}(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \gamma_{\mu\nu}(x)\gamma_{\lambda\rho}(x') | 0 \rangle \end{aligned} \quad (37)$$

Vamos definir agora algumas relações que serão importantes para obtenção do propagador de Feynman:

1 - O produto-T cronológico é definido da seguinte forma

$$T \{ \gamma_{\mu\nu}(x)\gamma_{\lambda\rho}(x') \} \equiv \begin{cases} \gamma_{\mu\nu}(x)\gamma_{\lambda\rho}(x'), & \text{se } t > t' \\ \gamma_{\mu\nu}(x')\gamma_{\lambda\rho}(x), & \text{se } t' > t \end{cases} \quad (38)$$

2 - A função-passo é definida como

$$\theta(t) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (39)$$

3 - Definimos também a função- $\Delta$  de Feynman ( $\Delta_F$ ) como o valor esperado do vácuo do produto-T

$$\frac{i}{2}\Delta_F(x-x')(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) \equiv \langle 0 | T \{ \gamma_{\mu\nu}(x)\gamma_{\lambda\rho}(x') \} | 0 \rangle \quad (40)$$

O produto-T pode ser escrito em termos da função-passo  $\theta(t)$  da seguinte maneira,

$$T \{ \gamma_{\mu\nu}(x)\gamma_{\lambda\rho}(x') \} = \gamma_{\mu\nu}(x)\gamma_{\lambda\rho}(x')\theta(x-x') + \theta(x'-x)\gamma_{\lambda\rho}(x')\gamma_{\mu\nu}(x) \quad (41)$$

Usando a relação (37), a função  $\Delta_F$  fica assim

$$\Delta_F(x) = \pm 2\Delta^\pm(x), \text{ se } x_0 \gtrless 0 \quad (43)$$

Além disso, a função- $\Delta_F$  pode ser representada pela seguinte integral

$$\Delta_F(x) = \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4p \frac{\exp(-ipx)}{p^2} \quad (44)$$

onde  $C_F$  é o contorno mostrado pela seguinte figura,

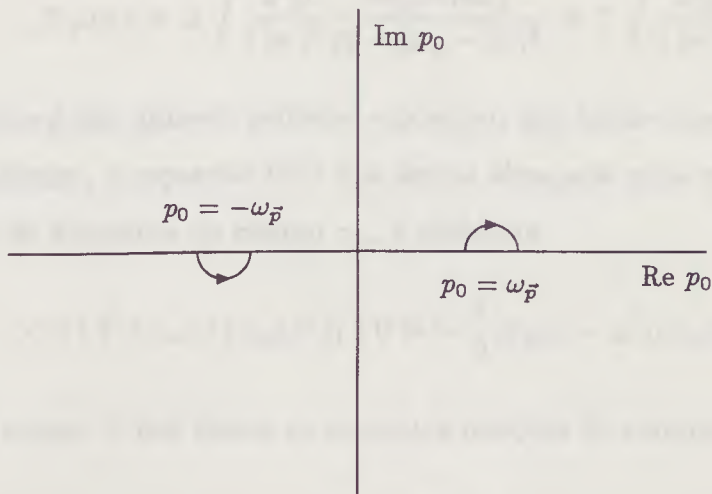


Fig.2 - Contorno  $C_F$ , equação (44).

Para  $x_0 > 0$ , escolhemos o contorno  $C_F$  da parte inferior do plano- $p_0$  e para  $x_0 < 0$ , escolhemos o contorno  $C_F$  da parte superior do plano- $P_0$ .

Em vez de deformar o contorno, podemos mover os pólos a uma distância infinitesimal  $\eta$  fora do eixo real e integrar no próprio eixo real.

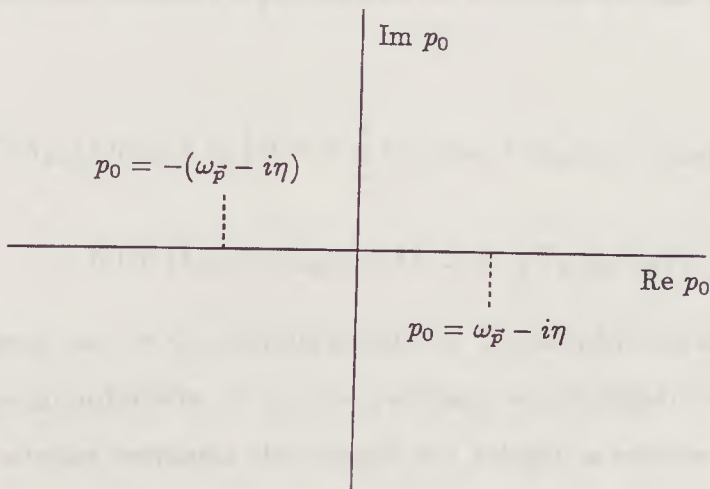


Fig.3 - Contorno e pólos deslocados a uma distancia infinitesimal  $\eta$  fora do eixo real, equação (45).

Neste caso, a função- $\Delta_F(x)$  é representada pela seguinte integral

$$\Delta_F(x) = 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ipx)}{p_0^2 - (\omega_{\vec{p}} - i\eta)^2} = 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ipx)}{p^2 - i\epsilon} \quad (45)$$

onde  $\epsilon = 2\eta\omega_{\vec{p}}$  é um número pequeno e positivo que tende a zero após a integração.

E finalmente, a equação (45) é a forma desejada para a função  $\Delta_F$ . Portanto, o propagador de Feynman do campo  $\gamma_{\mu\nu}$  é dado por

$$\langle 0 | T \{ \gamma_{\mu\nu}(x) \gamma_{\lambda\varrho}(x') \} | 0 \rangle = \frac{i}{2} \Delta_F(x - x') (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\varrho} + \eta_{\mu\varrho} \eta_{\nu\lambda}) \quad (46)$$

Para o campo  $\gamma$  nós temos as seguintes relações de comutação

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = -\delta_{\vec{p}\vec{p}'} \quad (47.a)$$

$$[\gamma(x), \gamma(x')] = -4i \Delta(x - x') \quad (47.b)$$

E o propagador de Feynman do campo  $\gamma$  definimos como

$$\langle 0 | T \{ \gamma(x) \gamma(x') \} | 0 \rangle = -2i \Delta_F(x - x') \quad (48)$$

Podemos calcular também o propagador de Feynman de  $h_{\mu\nu}$  usando as equações (12), (46) e (48)

$$\langle 0 | T \{ h_{\mu\nu}(x) h_{\lambda\varrho}(x') \} | 0 \rangle = \frac{i}{2} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\varrho} + \eta_{\mu\varrho} \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\varrho}) \Delta_F(x - x')$$

$$\langle 0 | T \{ h_{\mu\nu}(x) h_{\lambda\varrho}(x') \} | 0 \rangle = \frac{i}{2} C_{\mu\nu\lambda\varrho} \Delta_F(x - x') \quad (49)$$

onde consideramos que  $\gamma$  e  $\gamma_{\mu\nu}$  comutam entre si. De acordo com as relações de comutação (25) e (47.a), os comutadores de  $a_{i0}$  e  $a$  possuem sinais negativos. Embora, esses sinais negativos não causam nenhuma dificuldade em relação a energia de cada gráviton, eles podem gerar probabilidades negativas. Vamos analisar este fato calculando a hamiltoniana do campo gravitacional.

A hamiltoniana do campo gravitacional é dada por,

$$H = N \int d^3x \mathcal{H} = N \left\{ -\frac{\dot{\gamma}^2}{4} + \frac{\dot{\gamma}_{\mu\nu}^2}{2} - \frac{1}{4} \left[ (\partial_\alpha \gamma_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \gamma)^2 \right] \right\}$$

$N$  denota o produto normal, onde todos os operadores de criação são colocados à esquerda dos operadores de absorção. Substituindo as equações (18.a) e (18.b), temos

$$\begin{aligned} H = & - \sum_{\vec{p}} \int \frac{d^3 p'}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} N \left( \frac{p_0 p'_0}{2} - \frac{p p'}{4} \right) \times \\ & \times [-2a(\vec{p})a(\vec{p}')\delta(\vec{p} + \vec{p}') \exp(-2ip_0 x_0) + 2a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}')\delta(\vec{p} - \vec{p}') + 2a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}')\delta(\vec{p} - \vec{p}') \\ & - 2a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}')\delta(\vec{p} + \vec{p}') \exp(2ip_0 x_0) + a^{\mu\nu}(\vec{p})a_{\mu\nu}(\vec{p}')\delta(\vec{p} + \vec{p}') \exp(-2ip_0 x_0) \\ & - a^{\mu\nu}(\vec{p})a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p}')\delta(\vec{p} - \vec{p}') - a^{\dagger\mu\nu}(\vec{p})a_{\mu\nu}(\vec{p}')\delta(\vec{p} - \vec{p}') + a^{\dagger\mu\nu}(\vec{p})a_{\mu\nu}^\dagger(\vec{p}')\delta(\vec{p} + \vec{p}') \exp(2ip_0 x_0)] \end{aligned}$$

Usando a relação  $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = 0$  e  $p_0 = |\vec{p}|$ , obtemos

$$H = \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \left[ \frac{1}{2} a^{\dagger\mu\nu}(\vec{p})a_{\mu\nu}(\vec{p}) - a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) \right] \quad (50)$$

Vamos escolher agora um estado com um gráviton do tipo  $a(\vec{p})$ . Atuando  $H$  sobre esse estado temos que

$$\begin{aligned} H |1_{\vec{q}}\rangle &= \sum_{\vec{p}} \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} \left[ \frac{1}{2} a^{\dagger\mu\nu}(\vec{p})a_{\mu\nu}(\vec{p}) - a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) \right] a^\dagger(\vec{q}) |0\rangle \\ &= - \sum_{\vec{p}} \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} a^\dagger(\vec{p}) [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] |0\rangle = \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} a^\dagger(\vec{q}) |0\rangle \end{aligned} \quad (51)$$

Vemos que a energia tem valor positivo. Mas, a dificuldade aparece quando calculamos a normalização do estado do gráviton  $a(\vec{q})$

$$\langle 1_{\vec{q}} | 1_{\vec{q}} \rangle = \langle 0 | a(\vec{q})a^\dagger(\vec{q}) | 0 \rangle = - \langle 0 | 0 \rangle = -1$$

desde que  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ .

Esse tipo de problema pode ser resolvido usando o formalismo de Gupta-Bleuler. As probabilidades negativas que aparecem em alguns dos estados dos grávitons podem ser eliminados através de condições suplementares que são dadas pelo termo de fixação de calibre e a equivalência das hamiltonianas (15) e (17). Como nós podemos observar através da hamiltoniana (50), temos 11 tipos de grávitons; 10 provém de  $\gamma_{\mu\nu}$  que é simétrico e um provém de  $\gamma$ . Mas, nem todos esses grávitons são reais. As condições suplementares permitem-nos eliminar nove tipos de grávitons; portanto, no campo gravitacional puro existe apenas dois tipos de grávitons  $a_{12}(\vec{p})$  e  $a'_{11} = \frac{1}{2} [a_{11}(\vec{p}) - a_{22}(\vec{p})]$ .

Pela análise da solução de onda do final da seção (I.I), já era esperado a existência de apenas dois grávitons reais.

Aqui, nós não reproduzimos os cálculos para obtenção desses grávitons reais. Os detalhes e as discussões completas sobre o assunto podem ser encontrados nos artigos de Gupta (1950 e 1952).

E finalmente, o spin do gráviton pode ser calculado através da densidade do momento angular (Gupta, 1952) ou através da análise da solução de onda plana (Weinberg, 1972). O resultado mostra que o spin do gráviton é 2.

## I.IV - QUANTIZAÇÃO VIA INTEGRAL DE FEYNMAN

Nesta seção, deduziremos o propagador do gráviton via integral de Feynman, mas o procedimento será heurístico; isto é, não discutiremos sobre os problemas que ocorrem nesse formalismo e nem nos preocuparemos com o rigor matemático. O nosso ponto de partida é a ação funcional  $Z[J]$ . Os detalhes do formalismo de integral de trajetória podem ser encontrados nos livros de Ramond (1981) e Ryder (1985).

Seja a seguinte ação funcional gravitacional,

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \int \mathcal{D}h^{\eta\rho} \exp \left[ i \int d^4x \left( \frac{1}{8} C^{\lambda\beta\delta\gamma} \partial_\mu h_{\lambda\beta} \partial^\mu h_{\delta\gamma} + J^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \right) \right] \quad (1)$$

onde  $N$  é o fator de normalização.

Agora, passamos a equação (1) para o espaço dos momentos e usamos as seguintes transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x \exp(ipx) h_{\mu\nu}(x) \\ h_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \exp(-ipx) \tilde{h}_{\mu\nu}(p) \end{aligned} \quad (2)$$

e

$$\delta(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \exp(-ipx)$$

Temos então,

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \int \mathcal{D}h^{\eta\rho} \exp \left[ i \int d^4p \left( \frac{1}{8} C^{\lambda\beta\delta\gamma} \tilde{h}_{\lambda\beta}(p) p^2 \tilde{h}_{\delta\gamma}(-p) + \tilde{J}^{\mu\nu}(p) \tilde{h}_{\mu\nu}(-p) \right) \right] \quad (3)$$

Fazendo a seguinte transformação

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(p) \longrightarrow \tilde{h}'_{\mu\nu}(p) - \frac{C_{\mu\nu\delta\theta}}{p^2} \tilde{j}^{\delta\theta}(p) \quad (4)$$

a nova variável  $\tilde{h}'$  difere de  $\tilde{h}$  por uma constante segue-se que então

$$\mathcal{D}\tilde{h}_{\mu\nu} = \mathcal{D}\tilde{h}'_{\mu\nu} \quad (5)$$

Substituindo a transformação (4) na ação funcional (3), temos

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \int \mathcal{D}\tilde{h}'^{\eta\rho} \exp \left[ i \int d^4p \left( \frac{1}{8} C^{\lambda\beta\epsilon\gamma} \tilde{h}'_{\lambda\beta}(p) p^2 \tilde{h}'_{\epsilon\gamma}(-p) - \tilde{J}^{\mu\nu}(p) \frac{C_{\mu\nu\delta\theta}}{2p^2} \tilde{J}^{\delta\theta}(-p) \right) \right]$$

Transformamos o primeiro termo da exponencial para o espaço das coordenadas, vem

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \int \mathcal{D}\tilde{h}'^{\eta\rho} e^{[ \frac{i}{8} \int d^4x C^{\lambda\beta\epsilon\gamma} \partial_\alpha \tilde{h}'_{\lambda\beta} \partial^\alpha \tilde{h}'_{\epsilon\gamma} ]} e^{[ -\frac{i}{2} \int d^4p \tilde{J}^{\mu\nu}(p) \frac{C_{\mu\nu\delta\theta}}{2p^2} \tilde{J}^{\delta\theta}(-p) ]}$$

Vemos que o termo dependente de  $\tilde{h}'$  possui a mesma forma do termo dependente de  $h$ . A exponencial sem o termo da fonte pode ser absorvida pela constante  $N$ , temos então

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4p \tilde{J}^{\mu\nu}(p) \frac{C_{\mu\nu\delta\theta}}{2p^2} \tilde{J}^{\delta\theta}(-p) \right]$$

Passando novamente para o espaço das coordenadas, obtemos

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{\mu\nu}(x) \Delta_{F(\mu\nu\delta\theta)}(x-y) J^{\delta\theta}(y) \right]$$

onde

$$\Delta_{F(\mu\nu\delta\theta)}(x-y) = C_{\mu\nu\delta\theta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp[-ip(x-y)]}{p^2}$$

que é o propagador de Feynman.

Além disso, o propagador de Feynman satisfaz a seguinte identidade

$$\square_x \Delta_{F(\mu\nu\delta\theta)}(x-y) = -C_{\mu\nu\delta\theta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x-y)] = -C_{\mu\nu\delta\theta} \delta(x-y)$$

ou

$$\square_x \Delta_F(x) = -\delta(x)$$

onde

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ipx)}{p^2}$$

Vemos que o propagador obtido pelo formalismo de integral de trajetória é o mesmo do formalismo canônico (veja equação I.III.49).

Substituindo a transformação (4) na ação funcional (3), temos

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \int \mathcal{D}\tilde{h}'^{\eta\rho} \exp \left[ i \int d^4p \left( \frac{1}{8} C^{\lambda\beta\epsilon\gamma} \tilde{h}'_{\lambda\beta}(p) p^2 \tilde{h}'_{\epsilon\gamma}(-p) - \tilde{J}^{\mu\nu}(p) \frac{C_{\mu\nu\delta\theta}}{2p^2} \tilde{J}^{\delta\theta}(-p) \right) \right]$$

Transformamos o primeiro termo da exponencial para o espaço das coordenadas, vem

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \int \mathcal{D}h'^{\eta\rho} e^{\left[ \frac{i}{8} \int d^4x C^{\lambda\beta\epsilon\gamma} \partial_\alpha h'_{\lambda\beta} \partial^\alpha h'_{\epsilon\gamma} \right]} e^{\left[ -\frac{i}{2} \int d^4p \tilde{J}^{\mu\nu}(p) \frac{C_{\mu\nu\delta\theta}}{2p^2} \tilde{J}^{\delta\theta}(-p) \right]}$$

Vemos que o termo dependente de  $h'$  possui a mesma forma do termo dependente de  $h$ . A exponencial sem o termo da fonte pode ser absorvida pela constante  $N$ , temos então

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4p \tilde{J}^{\mu\nu}(p) \frac{C_{\mu\nu\delta\theta}}{2p^2} \tilde{J}^{\delta\theta}(-p) \right]$$

Passando novamente para o espaço das coordenadas, obtemos

$$Z[J^{\eta\rho}] = N \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{\mu\nu}(x) \Delta_{F(\mu\nu\delta\theta)}(x-y) J^{\delta\theta}(y) \right]$$

onde

$$\Delta_{F(\mu\nu\delta\theta)}(x-y) = C_{\mu\nu\delta\theta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp[-ip(x-y)]}{p^2}$$

que é o propagador de Feynman.

Além disso, o propagador de Feynman satisfaz a seguinte identidade

$$\square_x \Delta_{F(\mu\nu\delta\theta)}(x-y) = -C_{\mu\nu\delta\theta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x-y)] = -C_{\mu\nu\delta\theta} \delta(x-y)$$

ou

$$\square_x \Delta_F(x) = -\delta(x)$$

onde

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ipx)}{p^2}$$

Vemos que o propagador obtido pelo formalismo de integral de trajetória é o mesmo do formalismo canônico (veja equação I.III.49).

## I.V - APLICAÇÃO

Como aplicação, vamos analisar o espalhamento de partículas escalares \* sem massa com troca de grávitons a nível de árvore. O objetivo é mostrar as técnicas envolvidas nos cálculos dos processos de espalhamentos.

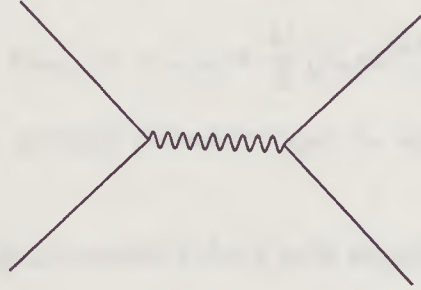


Fig.4 - Linhas retas representam partículas escalares e linha ondulada representa gráviton.

A densidade lagrangeana para o processo acima é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} + \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \right] + \mathcal{L}_{f.g} \quad (1)$$

O acoplamento dado pela equação (1) é conhecido como acoplamento mínimo. Usando as relações (I.II.3), (I.II.4) e (I.II.11), temos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{esc} + \mathcal{L}_{int}. \quad (2)$$

onde

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{4} \left[ \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\alpha h \partial^\alpha h \right] \quad (2.a)$$

$$\mathcal{L}_{esc} = \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \quad (2.b)$$

$$\mathcal{L}_{int.} = -\frac{k}{2} h_{\mu\nu} \left[ \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} \right] \quad (2.c)$$

---

\* Algumas fórmulas importantes relativas ao campo escalar estão listadas no Apêndice C.

A densidade hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_g + \mathcal{H}_{esc} + \mathcal{H}_{int}. \quad (3)$$

onde

$$\mathcal{H}_g = \frac{1}{2} \Pi^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \Pi^{\gamma\eta} - \frac{1}{8} C^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_i h_{\alpha\beta} \partial^i h^{\alpha\beta} \quad (3.a)$$

$$\mathcal{H}_{esc} = \frac{1}{2} [\Pi_\phi \Pi_\phi - \phi_{,i} \phi^{,i}] \quad (3.b)$$

$$\mathcal{H}_{int.} = -\mathcal{L}_{int.} + \frac{k^2}{8} (h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 0\mu} \phi_{,\mu})^2 + \mathcal{O}(k^3) \quad (3.c)$$

Os detalhes dos cálculos para obtenção da equação (3) podem ser encontrados no apêndice A.

A matriz-S de espalhamento é dada pela seguinte relação

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \} \quad (4)$$

Quando as equações (2.c) e (3.c) são substituídas na equação (4), as contrações dos campos escalares :  $\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}$  : aparecem devido ao teorema de Wick, e são dadas por

$$: \partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x') : = i \partial_\mu \partial'_\nu \Delta_F(x - x') - i \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 \delta(x - x') \quad (5)$$

onde  $\partial'_\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$ . Veja apêndice B para os detalhes dos cálculos para obtenção da equação (5).

Como podemos observar, as equações (3.c) e (5) possuem termos não covariantes. Aparentemente, esses termos violam a covariância da matriz-S, mas se substituíssemos as expressões (3.c) e (5) na relação (4) veríamos que os termos não covariantes se cancelarão. Vamos considerar a contribuição de segunda ordem da matriz-S ( $S_2$ ) devido ao termo de ordem  $k$  da densidade hamiltoniana (3.c),

$$S_2 = -\frac{k^2}{32} \int d^4 x d^4 y T \left\{ [C^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}]_x [C^{\delta\eta\gamma\rho} h_{\delta\eta} \phi_{,\gamma} \phi_{,\rho}]_y \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{k^2}{32} \int d^4x d^4y N \{ 4C^{\mu\nu\alpha\beta} C^{\delta\eta\gamma\rho} h_{\mu\nu}(x) h_{\delta\eta}(y) \phi_{,\alpha}(x) \phi_{,\rho}(y) : \phi_{,\beta}(x) \phi_{,\gamma}(y) : + \dots \} \\
&= \frac{ik^2}{8} \int d^4x d^4y N \{ C^{\mu\nu\alpha\beta} C^{\delta\eta\gamma\rho} h_{\mu\nu}(x) h_{\delta\eta}(y) \phi_{,\alpha}(x) \phi_{,\rho}(y) \delta_\beta^0 \delta_\gamma^0 \delta(x-y) \} + \dots \\
&= \frac{ik^2}{8} \int d^4x N \{ C^{\mu\nu\alpha 0} C^{\delta\eta\rho 0} h_{\mu\nu} h_{\delta\eta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\rho} \} + \dots \tag{6}
\end{aligned}$$

que cancela obviamente com a contribuição de primeira ordem da matriz-S ( $S_1$ ) devido ao segundo termo da equação (3.c)

$$S_1 = -\frac{ik^2}{8} \int d^4x (h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 0\mu} \phi_{,\mu})^2 \tag{7}$$

Da mesma maneira, podemos mostrar que as outras contribuições devidos aos termos não covariantes também se cancelam. Então, por questão prático usamos a hamiltoniana efetiva dada por

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_{int.} = \frac{k}{4} C^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \tag{8}$$

junto com a contração efetiva

$$: \partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x') : = i \partial_\mu \partial'_\nu \Delta_F(x-x') \tag{9}$$

Agora, temos todas as ferramentas necessárias para calcular o espalhamento dado pela fig.4. Como o espalhamento será calculado apenas a nível de árvore, então nós temos somente a contribuição de segunda ordem da matriz-S

$$\begin{aligned}
S_2 &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y T \{ \mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(y) \} \\
&= -\frac{k^2}{32} \int d^4x d^4y T \left\{ C^{\mu\nu\alpha\beta} (h_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta})_x C^{\gamma\eta\delta\rho} (h_{\gamma\eta} \phi_{,\delta} \phi_{,\rho})_y \right\} \tag{10}
\end{aligned}$$

Para o nosso processo contribui somente o seguinte termo da expressão (10)

$$S_2 = -\frac{k^2}{32} \int d^4x d^4y N \left\{ C^{\mu\nu\alpha\beta} C^{\gamma\eta\delta\rho} (\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta})_x (\phi_{,\delta} \phi_{,\rho})_y \right\} : h_{\mu\nu}(x) h_{\gamma\eta}(y) : \tag{11}$$

E a matriz de transição é dada da seguinte forma,

$$\langle f | S_2 | i \rangle = -ik^2 \Pi \left( \frac{1}{2VE_i} \right)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') \times \\ \times \left\{ \frac{(q \cdot q')^2 + (p \cdot q')^2 - (p \cdot q)^2}{(p + q)^2} + \frac{(p \cdot q)^2 + (p \cdot q')^2 - (q \cdot q')^2}{(q' - q)^2} + \frac{(p \cdot q)^2 + (q \cdot q')^2 - (p \cdot q')^2}{(p - q')^2} \right\} \quad (12)$$

No sistema de centro de massa os momentos são dados por

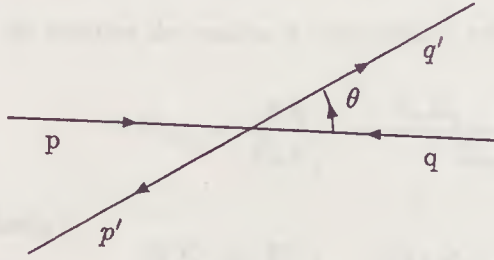


Fig.5 - Espalhamento de partículas escalares de massa  $m$  no sistema centro de massa.

$$\vec{p} = -\vec{q}; \quad \vec{p}' = -\vec{q}' \\ p_0 = q_0 = p'_0 = q'_0 = E \\ |\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{p}'| = |\vec{q}'| = \sqrt{E^2 - m^2} \\ p_\mu q^\mu = p' \cdot q' = E^2 + |\vec{p}|^2 \\ p_\mu p'^\mu = q \cdot q' = E^2 + |\vec{p}|^2 \cos \theta \\ p_\mu q'^\mu = q \cdot p' = E^2 - |\vec{p}|^2 \cos \theta \quad (13)$$

Temos então a matriz de transição no sistema de centro de massa a seguinte relação

$$\langle f | S_2 | i \rangle = i \left( \frac{k}{V} \right)^2 (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{8} + \frac{\tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{2} + \frac{\cot^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{2} \right\} \quad (14)$$

A fórmula de seção de choque é dada por

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) |\vec{p}'_1|^2 \left| \frac{\partial(E'_1 + E'_2)}{\partial |\vec{p}'_1|} \right|^{-1} d\Omega \quad (15)$$

colocando

$$f(p'_1, p'_2) = \frac{|M|^2}{64\pi^2 V_{rel} E_1 E_2 E'_1 E'_2} \quad (15.a)$$

onde M é a amplitude de Feynman. A amplitude de Feynman do nosso processo é dada por

$$M = 2ik^2 \Pi(E_p)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{4} + \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \cot^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\}$$

No sistema de centro de massa a velocidade relativa é

$$V_{rel} = \frac{p \cdot q}{E_p E_q} = \frac{E_p E_q + |\vec{p}| |\vec{q}|}{E_p E_q} = 2 \quad (16)$$

Temos também

$$\frac{\partial(E'_{p'} + E'_{q'})}{\partial |\vec{p}'|} = \frac{\partial(|\vec{p}'| + |\vec{q}'|)}{\partial |\vec{p}'|} = 2 \quad (17)$$

Substituindo essas fórmulas na equação (15), obtemos

$$d\sigma = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \frac{E^2}{16} \left| \frac{\sin^2 \theta}{4} + \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \cot^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right|^2 d\Omega \quad (18)$$

A equação (18) fornece o mesmo resultado dado pelo artigo de Peet, 1970.



Nesta segunda parte, vamos mostrar que a ação

$$S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{2} \right]$$

descreve a mesma teoria a nível de árvore independentemente do valor da constante de acoplamento  $\xi$ . A demonstração será feita inicialmente em espaços conformemente planos a fim de que as complicações matemáticas não mascarem os resultados obtidos. A seguir estenderemos este resultado para o caso de espaço riemanniano geral.

## II.1 - TEORIA DE GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN NO ESPAÇO CONFORMEMENTE PLANO

Discutimos nesta primeira seção a teoria de gravitação de Einstein no espaço conformemente plano. É bem conhecido que essa teoria não fornece resultados adequados para os seguintes famosos testes da gravitação: ela fornece valor errado para a rotação do periélio do planeta mercúrio, e além disso, não prediz a deflexão da luz pelo Sol (Lord, 1976). Mas, os cálculos de espalhamentos a nível quântico neste espaço são bem mais simples quando comparados com os do espaço riemanniano geral; esse é o motivo pelo qual vamos usar esta geometria particular para nossa análise sobre a questão da equivalência das teorias  $\xi R \phi^2$ .

A métrica do espaço conformemente plano é dada por

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} \quad (1)$$

$$g^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x) \eta^{\mu\nu} \quad (1.a)$$

onde  $\Omega(x)$  é uma função arbitrária que escolheremos como sendo dada por

$$\Omega(x) = 1 + \kappa f \quad (2)$$

com  $\kappa^2 = 4\pi G$ .

Como podemos observar a métrica (1) possui apenas uma única componente independente que é dada pela função  $f(x)$ .

As equações do campo podem ser obtidas através da seguinte ação funcional

$$S = - \int \sqrt{-g} AR dV + \int \sqrt{-g} L dV \quad (3)$$

onde  $A$  é uma constante e  $L$  é a lagrangeana de matéria.

Aplicando o princípio da ação mínima  $\delta S = 0$ , obtemos

$$\delta S = - \int \left\{ A \left[ R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R \right] - \frac{T_{\mu\nu}}{2} \right\} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} dV = 0$$

Substituindo a equação (1.a) temos que

$$\delta S = -2 \int \left\{ AR + \frac{T}{2} \right\} \Omega^{-1} \delta \Omega \sqrt{-g} dV = 0$$

Por causa da arbitrariedade de  $\delta \Omega$  segue-se que

$$AR = -\frac{T}{2} \quad (4)$$

Esta é a equação do campo procurada. O valor da constante  $A$  é obtido através da comparação do limite não relativístico da teoria com a lei de Newton. Neste caso, o valor da constante é dado por

$$A = -\frac{1}{48\pi G}$$

Portanto, a ação do campo fica agora assim

$$S = \int \frac{\partial_\mu f \partial^\mu f}{2} dV \quad (5)$$

## Espalhamentos

Calculamos a seguir os espalhamentos de partículas escalares com grávitons a nível de árvore dada pela seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \frac{g_{\mu\nu}}{2} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \xi R \phi^2 \right] \quad (6)$$

Substituindo as equações (1), (1.a) e (2), vem

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{esc} + \mathcal{L}_{int} \quad (7)$$

colocando

$$\mathcal{L}_{esc} = \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\nu} - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (7.a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \kappa [\phi_{,\mu} \phi^{,\nu} - 2m^2 \phi^2 + 6\xi \phi^2 \square] f \\ & + \kappa^2 \left[ \frac{f^2}{2} (\phi_{,\mu} \phi^{,\nu} - 6m^2 \phi^2) + 6\xi f \square f \phi^2 \right] \end{aligned} \quad (7.b)$$

O propagador do gráviton é dado por

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e^{-il(x_1 - x_2)}}{l^2}$$

A amplitude de Feynman do espalhamento escalar-escalar (fig.4) com troca de gráviton fornece o seguinte resultado

$$\mathcal{M} = -4i\kappa^2 m^2 \left\{ 4(1 - 3\xi)(1 - 12\xi) + m^2 \left[ \frac{1}{(p+q)^2} + \frac{1}{(p-q')^2} + \frac{1}{(p-p')^2} \right] \right\} \quad (8)$$

e o espalhamento escalar-gráviton (fig.6) é dado por

$$\mathcal{M} = -2i\kappa^2 m^2 \left[ \frac{m^2(pq' - pq) + (pq)(pq')}{(pq)(pq')} \right] \quad (9)$$

onde  $p$  e  $q$  são momentos antes do choque e  $p'$  e  $q'$  são momentos após o choque. O processo de aniquilamento pode ser obtido através do espalhamento escalar-gráviton (Barker et al., 1969), portanto não há necessidade de calculá-lo.

Observando os resultados (8) e (9) podemos esboçar a seguinte conclusão: os processos de espalhamentos a nível de árvore são independentes do parâmetro  $\xi$  para  $m = 0$  (Accioly et al., preprint IFT.P057/93). Esta conclusão não se restringe apenas ao espaço conformemente plano. A extensão deste resultado para o espaço riemanniano geral será feita nas próximas seções.

## II.II - ESPAÇO RIEMANNIANO GERAL

Calculamos agora os processos de espalhamentos com o acoplamento não mínimo  $\xi R\phi^2$  no espaço riemanniano geral. Temos três processos básicos a nível de árvore: espalhamentos escalar-escalar, escalar-gráviton e processo de aniquilamento. O processo de aniquilamento pode ser obtido através do espalhamento escalar-gráviton (Barker et al., 1969). A seguir, calculamos apenas os processos de espalhamentos.

### Espalhamento escalar-escalar

A densidade lagrangeana de interação do acoplamento  $\xi R\phi^2$  é dada por

$$\mathcal{L}_{G\phi} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2 - \xi R\phi^2) \quad (1)$$

Note-se que  $\xi$  é uma constante adimensional para  $\hbar = c = 1$ . Podemos observar que a ação possui a dimensão do momento angular  $ML^2T^{-1}$  ou equivalente a unidade de  $\hbar$ . Mas, para  $\hbar = 1$ ,  $S$  fica adimensional e a densidade lagrangeana quadridimensional assume neste caso a dimensão de  $L^{-4}$ .  $g_{\mu\nu}$  não tem dimensão, conseqüentemente  $R$  tem a dimensão de  $L^{-2}$ , e além disso,  $\phi(x)$  tem dimensão de  $L^{-1}$ . Portanto,  $R\phi^2$  tem a dimensão de  $L^{-4}$ . Logo, encontramos que  $\xi$  é adimensional.

Usando as relações (I.II.1), (I.II.3) e (I.II.4), obtemos a seguinte relação até ordem  $k$

$$\mathcal{L}_{G\phi} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{int} \quad (2)$$

colocando

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2) \quad (2.a)$$

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{k}{2} \left\{ \left( h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \right) \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{m^2}{2} h \phi^2 + \xi (\partial^\alpha \partial^\nu h_{\alpha\nu} - \square h) \phi^2 \right\} \quad (2.b)$$

ou

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{k}{2} \left\{ \frac{h}{2} (1 + 4\xi) \phi_\mu \phi^\mu - \frac{m^2}{2} h \phi^2 - h^{\mu\nu} (1 + 2\xi) \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2\xi h^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu} \phi + 2\xi h \phi_{,\mu}^\mu \phi \right\} \quad (2.c)$$

Substituindo na matriz-S temos que

$$S_2 = -\frac{k^2}{8} \int d^4x d^4y$$

$$\times T \left[ \frac{h}{2} (1 + 4\xi) \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{m^2}{2} h \phi^2 - h^{\mu\nu} (1 + 2\xi) \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2\xi (h^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu} - h \phi^{,\mu}_{,\mu}) \phi \right]_x$$

$$\times \left[ \frac{h}{2} (1 + 4\xi) \phi_\beta \phi^\beta - \frac{m^2}{2} h \phi^2 - h^{\alpha\beta} (1 + 2\xi) \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - 2\xi (h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha\beta} - h \phi^{,\alpha}_{,\alpha}) \phi \right]_y \quad (3)$$

Para o espalhamento escalar-escalar (fig.4) contribui apenas os seguintes termos

$$S_2 = -\frac{k^2}{8} \int d^4x d^4y$$

$$N \left[ \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} ((1 + 4\xi) \phi_\alpha \phi^\alpha - m^2 \phi^2) - (1 + 2\xi) \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - 2\xi (\phi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \phi^{,\alpha}_{,\alpha}) \phi \right]_x$$

$$\times \left[ \frac{\eta^{\delta\eta}}{2} ((1 + 4\xi) \phi_\beta \phi^\beta - m^2 \phi^2) - (1 + 2\xi) \phi^{,\delta} \phi^{,\eta} - 2\xi (\phi^{,\delta\eta} - \eta^{\delta\eta} \phi^{,\beta}_{,\beta}) \phi \right]_y : h_{\mu\nu}(x) h_{\delta\eta}(y) :$$

$$(4)$$

E a matriz de transição fica assim

$$\langle f | S | i \rangle = ik^2 (2\pi)^4 \Pi \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\vec{p}}}} \delta(p + q - p' - q') \times$$

$$\times \left\{ \frac{m^4 + 2(q \cdot q')(q \cdot p')}{(p + q)^2} + \frac{m^4 - 2(q \cdot q')(q \cdot p)}{(p' - q)^2} + \frac{m^4 - 2(p \cdot q')(q \cdot p)}{(q' - q)^2} + 2\xi m^2 (5 + 6\xi) \right\} \quad (5)$$

Usando as fórmulas (I.V.13) temos que

$$\langle f | S | i \rangle = \frac{ik^2 (2\pi)^4}{4(2V)^2} \delta(p + q - p' - q') \left[ \frac{(1 + 3v^2)(1 - v^2) + 4v^2(1 + v^2) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{v^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \right.$$

$$\left. + \frac{(1 + 3v^2)(1 - v^2) + 4v^2(1 + v^2) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{v^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} + (3 + v^2)(1 - v^2) + 2v^2 \sin^2 \theta + 8\xi(5 + 6\xi)(1 - v^2) \right]$$

$$(6)$$

A seção de choque neste caso fica da seguinte forma (Huggins and Toms.1987)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{C.M.} = \left[\frac{k^2 E}{2^6 \pi}\right]^2 \left| \frac{(1+3v^2)(1-v^2) - 4v^2(1+v^2)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{v^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right|^2 + \frac{(1+3v^2)(1-v^2) + 4v^2(1+v^2)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{v^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + (3+v^2)(1-v^2) + 2v^2 \sin^2\theta + 8\xi(5+6\xi)(1-v^2) \quad (7)$$

### Espalhamento escalar-gráviton

No caso de espalhamento escalar-gráviton precisamos expandir a densidade lagrangeana (1) até ordem  $k^2$  e incluir também os termos de auto-interação dos grávitons (I.II.7).

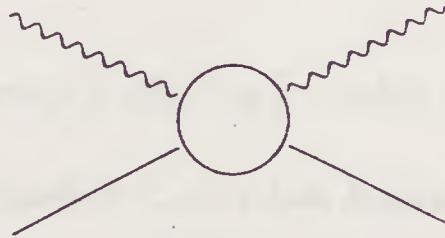


Fig.6 - Espalhamento escalar-gráviton. Linha ondulada representa gráviton e Linha reta representa partícula escalar.

Temos então a seguinte densidade lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{I\phi} + \mathcal{L}_{IN} + \mathcal{L}_{I\zeta} \quad (8)$$

onde

$$\mathcal{L}_{I\phi} = -\frac{k}{4} [C^{\mu\nu\alpha\beta} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \eta^{\alpha\beta} m^2 \phi^2] h_{\alpha\beta} + \frac{k^2}{4} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\lambda} \left[ P_{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu} C^{\cdot\mu} \phi^{\cdot\nu} + \frac{m^2}{4} C^{\epsilon\lambda\alpha\beta} C^2 \right] \quad (8.a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{IN} = & \frac{k\xi}{2} (\square h - \partial^\delta \partial^\mu h_{\mu\delta}) \phi^2 + \frac{k^2\xi}{8} (C^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + 2h^{\mu\nu}) (2\partial^\delta \partial_\nu h_{\mu\delta} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \phi^2 \\
& + \frac{k^2\xi}{4} \left[ \left( \partial_\gamma h^{\gamma\delta} - \frac{\partial^\delta h}{2} \right) (2\partial^\mu h_{\delta\mu} - \partial_\delta h) - \partial_\mu h^{\gamma\delta} \partial^\mu h_{\gamma\delta} \right] \phi^2 \\
& + \frac{k^2\xi}{8} (\partial^\nu h^{\eta\delta} + \partial^\eta h^{\nu\delta} - \partial^\delta h^{\nu\eta}) (\partial_\nu h_{\eta\delta} + \partial_\delta h_{\nu\eta} - \partial_\eta h_{\nu\delta}) \phi^2 \quad (8.b)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{Ig} = \frac{k}{8} A^{\mu\nu\gamma\delta\alpha\beta\tau\rho} h_{\beta\rho} [(2\partial_\alpha h_{\nu\delta} - \partial_\delta h_{\alpha\nu}) \partial_\gamma h_{\mu\tau} - (2\partial_\mu h_{\nu\delta} - \partial_\delta h_{\mu\nu}) \partial_\gamma h_{\alpha\tau}] \quad (8.c)$$

e  $P_{\alpha\beta\epsilon\lambda\mu\nu}$  e  $A^{\mu\nu\gamma\delta\alpha\beta\tau\rho}$  são dados por

$$P_{\alpha\beta\epsilon\lambda\mu\nu} = \eta_{\nu\lambda} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\epsilon\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\epsilon\alpha}) - \frac{\eta_{\epsilon\lambda}}{2} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}) - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} C_{\alpha\beta\epsilon\lambda} \quad (8.d)$$

e

$$A^{\mu\nu\gamma\delta\alpha\beta\tau\rho} = \eta^{\mu\nu} [\eta^{\gamma\delta} (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\tau\rho} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\tau\beta}) + \eta^{\alpha\tau} (\eta^{\gamma\beta} \eta^{\delta\rho} + \eta^{\gamma\rho} \eta^{\delta\beta})] + \eta^{\gamma\delta} \eta^{\alpha\tau} C^{\mu\nu\beta\rho} \quad (8.e)$$

A decomposição de Fourier de  $h_{\mu\nu}(x)$  é dada da seguinte forma

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(+)} + h_{\mu\nu}^{(-)} = \sum_{\vec{q}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{\vec{q}}}} [d_{\mu\nu}(\vec{q}) \exp(-iqx) + d_{\mu\nu}^\dagger(\vec{q}) \exp(iqx)] \quad (9)$$

com

$$d^{\mu\nu}(\vec{q}) = e_{(+)}^{\mu\nu}(\vec{q}) a_+(\vec{q}) + e_{(-)}^{\mu\nu}(\vec{q}) a_-(\vec{q}) \quad (10)$$

$$e_{(\pm)}^{\mu\nu}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [\epsilon_1^\mu(\vec{q}) \epsilon_1^\nu(\vec{q}) - \epsilon_2^\mu(\vec{q}) \epsilon_2^\nu(\vec{q})] \pm i [\epsilon_1^\mu(\vec{q}) \epsilon_2^\nu(\vec{q}) + \epsilon_2^\mu(\vec{q}) \epsilon_1^\nu(\vec{q})] \} \quad (11)$$

onde  $a_+(\vec{q})$  e  $a_-(\vec{q})$  são operadores de aniquilação dos grávitons com eixos paralelo e anti-paralelo ao vetor  $\vec{q}$ .  $\vec{e}_1(\vec{q})$  e  $\vec{e}_2(\vec{q})$  são vetores unitários tais que  $\vec{q}$ ,  $\vec{e}_1(\vec{q})$  e  $\vec{e}_2(\vec{q})$  são perpendiculares entre si. As componentes  $\epsilon_1^0(\vec{q})$  e  $\epsilon_2^0(\vec{q})$  são iguais a zero (Barker et al.,1969 e Papini and Valluri,1977).

Calculamos a matriz de espalhamento no sistema de laboratório

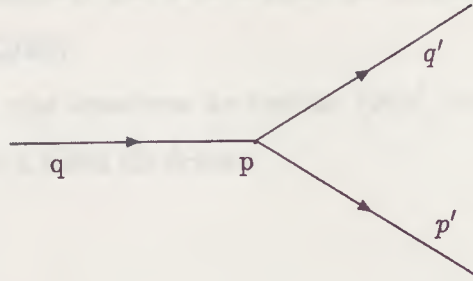


Fig.7 - Sistema de laboratório.

Os momentos no sistema de laboratório são dados por

$$q + p = q' + p'$$

$$\vec{p} = 0 \quad ; \quad \vec{q} = \vec{q}' + \vec{p}' \quad (12)$$

$$q_0 + m = q'_0 + p'_0 \quad ; \quad qq' = m(q_0 - q'_0)$$

Por questão de conveniência, escolhemos os vetores de polarização  $e^{\mu\nu}(\vec{q})$  associados aos grávitons da seguinte forma

$$\vec{e}_1(\vec{q}') = \vec{e}_1(\vec{q}) = \frac{\vec{q}' \times \vec{q}}{|\vec{q}' \times \vec{q}|}$$

$$\vec{e}_2(\vec{q}') = \frac{\vec{q}' \times \vec{e}_1(\vec{q}')}{|\vec{q}'|} \quad ; \quad \vec{e}_2(\vec{q}) = \frac{\vec{q} \times \vec{e}_1(\vec{q})}{|\vec{q}|} \quad (13)$$

O resultado da matriz de espalhamento é dado por

$$S = i \left( \frac{k}{V} \right)^2 \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{mq_0q'_0p'_0}} \frac{mq_0q'_0}{2(q_0 - q'_0)} \delta(q + p - q' - p') d_{ij}^\dagger(\vec{q}') d^{ij}(\vec{q}) a^\dagger(\vec{p}') a(\vec{p}) \quad (14)$$

Vemos que no limite  $m=0$ , as seções de choque anteriores são independentes do parâmetro  $\xi$ . Este resultado nos permite anunciar um teorema geral:

A nível de árvore, a ação  $S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]$  descreve a mesma teoria qualquer que seja o valor da constante de acoplamento  $\xi$ . (Accioly et al., preprint IFT.P052/93)

Portanto, no que concerne às teorias  $\xi R \phi^2$ , os acoplamentos mínimo e não-mínimo são indistinguíveis a nível de árvore.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] \quad (10)$$

... a nível de árvore, a ação  $S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]$  descreve a mesma teoria qualquer que seja o valor da constante de acoplamento  $\xi$ . (Accioly et al., preprint IFT.P052/93)

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]$$

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]$$

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]$$

... a nível de árvore, a ação  $S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{k^2} (1 + k^2 \xi \phi^2) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]$  descreve a mesma teoria qualquer que seja o valor da constante de acoplamento  $\xi$ . (Accioly et al., preprint IFT.P052/93)

## EPÍLOGO

Mostramos neste trabalho que as teorias descritas pelos funcionais

$$\bar{S}[\bar{g}, \bar{\phi}] = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ -\frac{\bar{R}}{\kappa^2} (1 + \xi \kappa^2 \bar{\phi}^2) + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} \right] \quad (15)$$

e

$$S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{R}{\kappa^2} + g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right] \quad (16)$$

são equivalentes a nível de árvore. A demonstração foi feita calculando-se explicitamente, via quantização canônica, os processos  $\phi - \phi$  e  $\phi - g$  para o sistema  $\bar{S}$  e verificando-se que os resultados encontrados eram os mesmos que aqueles obtidos usando-se o sistema  $S$ . Este resultado nos leva a uma indagação bastante interessante:  $S$  e  $\bar{S}$  descrevem a mesma teoria do ponto de vista clássico? A resposta será afirmativa se conseguirmos mostrar que a ação  $S$  pode ser obtida de  $\bar{S}$  por uma redefinição de campos, ou seja, se pudermos mostrar que

$$S[g, \phi] = \bar{S}[\bar{g}, \bar{\phi}]$$

onde

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\bar{g}, \bar{\phi}) = \bar{g}_{\mu\nu} + \dots$$

$$\phi = \phi(\bar{g}, \bar{\phi}) = \bar{\phi} + \dots$$

Para evitar complicações desnecessárias costuma-se admitir que estas mudanças de variáveis não envolvem derivadas dos campos e que os sistemas barrado e não-barrado coincidem no limite de campo fraco. Vamos demonstrar em sequência que *os sistemas  $S$  e  $\bar{S}$  são equivalentes no contexto clássico desde que  $1 + \xi \bar{\phi}^2 > 0$ . As condições de contorno sobre o campo não-barrado são determinadas a partir das condições impostas sobre o campo barrado.*

Seja a transformação conforme

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad (16.a)$$

onde  $\Omega(x)$  é uma função real, contínua, não nula e finita.

De (16.a) segue-se imediatamente que

$$\bar{g} = |\bar{g}_{\mu\nu}| = \Omega^8 g \quad (16.b)$$

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x)g^{\mu\nu} \quad (16.c)$$

A curvatura escalar transformada é dada por

$$\bar{R} = \Omega^{-2}R - 6\Omega^{-3}\square\Omega \quad (17)$$

onde

$$\square\Omega = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Omega] \quad (18)$$

A prova da relação (17) é dada no Apêndice D. Substituindo as relações (16.a), (16.b), (16.c) e (17) na ação (15), vem

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \Omega^4 [-[\Omega^{-2}R - 6\Omega^{-3}\square\Omega] (1 + \xi\bar{\phi}^2) + \Omega^{-2}g^{\mu\nu}\bar{\phi}_{,\mu}\bar{\phi}_{,\nu}]$$

consideramos que  $\kappa^2 = 1$ .

Fazendo  $\Omega^{-2} = (1 + \xi\bar{\phi}^2)$ , onde  $1 + \xi\bar{\phi}^2$  é suposto ser positivo, obtemos

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [-R + 6\Omega^{-1}\square\Omega + \Omega^2g^{\mu\nu}\bar{\phi}_{,\mu}\bar{\phi}_{,\nu}]$$

O segundo termo da ação pode ser colocado na seguinte forma

$$\sqrt{-g}\Omega^{-1}\square\Omega = \partial_\mu [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Omega^{-1}\partial_\nu\Omega] - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega^{-1}\partial_\nu\Omega$$

Desprezando o termo de derivada total segue-se que

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -R + g^{\mu\nu} [-6\partial_\mu\Omega^{-1}\partial_\nu\Omega + \Omega^2\bar{\phi}_{,\mu}\bar{\phi}_{,\nu}] \right\}$$

Substituindo  $\Omega(x)$  em função de  $\bar{\phi}$ , obtemos

$$\bar{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -R + g^{\mu\nu} \frac{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2}{(1 + \xi\bar{\phi}^2)^2} \bar{\phi}_{,\mu}\bar{\phi}_{,\nu} \right\}$$

Fazendo a seguinte transformação

$$\phi_{,\mu} = \frac{\sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2}}{(1 + \xi\bar{\phi}^2)} \bar{\phi}_{,\mu}$$

ou

$$\phi = \int \frac{\sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2}}{(1 + \xi\bar{\phi}^2)} d\bar{\phi} \quad (19)$$

Obtemos finalmente a nova ação que é dada por

$$S[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} [-R + g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}] \quad (20)$$

Vemos que  $\bar{S}[\bar{g}, \bar{\phi}]$  se reduz para  $S[g, \phi]$  através das transformações (16.a) e (19). Portanto,  $\bar{S}[\bar{g}, \bar{\phi}]$  e  $S[g, \phi]$  são teorias completamente equivalentes.

Considerando que  $(1 + \xi\bar{\phi}^2) > 0$ , obtemos as seguintes soluções da integral (19)

$$\begin{aligned} \phi = & \sqrt{\frac{1 + 6\xi}{\xi}} \ln \left[ \sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2} + \sqrt{\xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}} \right] \\ & - \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \frac{\left[ \sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2} + \sqrt{6\xi^2\bar{\phi}} \right]^2}{1 + \xi\bar{\phi}^2}, \quad \text{para } \xi > 0 \end{aligned} \quad (21.a)$$

$$\begin{aligned} \phi = & \sqrt{\frac{1 + 6\xi}{-\xi}} \left[ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2}}{\sqrt{-\xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}}} \right] \\ & + \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \frac{\left[ \sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2} + \sqrt{6\xi^2\bar{\phi}} \right]^2}{1 + \xi\bar{\phi}^2}, \quad \text{para } -\frac{1}{6} < \xi < 0 \end{aligned} \quad (21.b)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{6}\bar{\phi}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{6}\bar{\phi}}} \right], \quad \text{para } \xi = -\frac{1}{6} \quad (21.c)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{1 + 6\xi}{\xi}} \ln \left[ \sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}^2} - \sqrt{\xi(1 + 6\xi)\bar{\phi}} \right]$$

$$+ \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \frac{\left[ \sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)\phi^2} + \sqrt{6\xi^2\bar{\phi}} \right]^2}{1 + \xi\bar{\phi}^2}, \quad \text{para } \xi < -\frac{1}{6} \quad (21.d)$$

As figuras correspondentes a estas soluções se encontram no Apêndice E.

Uma aplicação bastante útil deste teorema de equivalência clássica seria tentar demonstrar a equivalência quântica dos sistemas  $S$  e  $\bar{S}$ . Evidentemente, calcular explicitamente as amplitudes de espalhamento na concha de massa, como fizemos a nível de árvore, seria extremamente complicado. Em vez disso poder-se-ia concentrar a atenção nas divergências na concha de massa. Em outras palavras, determinar-se-iam os contratermos  $\Delta S$  e  $\Delta \bar{S}$  em um “loop” da teoria quântica. Cálculos preliminares realizados por Accioly e colaboradores no caso especial  $\xi = -1/6$  (acoplamento conforme) utilizando a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt, levam a crer que  $\Delta S = \Delta \bar{S}$  quando  $\xi = -1/6$ .

Esperamos que pesquisas futuras venham a corroborar a idéia da equivalência quântica destas teorias.



## Apêndice A

Dada a seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} C^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\gamma h_{\alpha\beta} \partial^\gamma h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \dot{\phi}_{,\mu} \phi^{,\mu} - \frac{k}{4} h_{\mu\nu} C^{\mu\nu\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \quad (A.1)$$

Os momentos conjugados dos campos  $\phi$  e  $h_{\mu\nu}$  são

$$\Pi_\phi = \dot{\phi} - \frac{k}{2} C^{\mu\nu 0\beta} \phi_{,\beta} h_{\mu\nu} = \left[ 1 - \frac{k}{2} C^{\mu\nu 00} h_{\mu\nu} \right] \dot{\phi} - \frac{k}{2} C^{\mu\nu 0i} h_{\mu\nu} \phi_{,i} \quad (A.2)$$

$$\Pi^{\gamma\eta} = \frac{1}{4} C^{\mu\nu\gamma\eta} \dot{h}_{\mu\nu} \quad (A.3)$$

Usando a seguinte propriedade

$$C_{\gamma\eta\delta\rho} C^{\gamma\eta\mu\nu} = 2 (\delta_\delta^\mu \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\mu \delta_\delta^\nu) \quad (A.4)$$

Temos então

$$\dot{h}_{\delta\rho} = C_{\delta\rho\gamma\eta} \Pi^{\gamma\eta} \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\Pi_\phi + \frac{k}{2} h_{\mu\nu} C^{\mu\nu 0i} \phi_{,i}}{\left[ 1 - \frac{k}{2} h_{\mu\nu} C^{\mu\nu 00} \right]} \\ &= \left[ \Pi_\phi + \frac{k}{2} h_{\mu\nu} C^{\mu\nu 0i} \phi_{,i} \right] \left[ 1 + \frac{k}{2} h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 00} + \frac{k^2}{4} (h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 00})^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (A.6)$$

A densidade hamiltoniana é dada pelo método usual

$$\mathcal{H} = \Pi^{\gamma\eta} \dot{h}_{\gamma\eta} + \Pi^\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (A.7)$$

Utilizando as equações (A.5) e (A.6) podemos passar a equação (A.7) para as variáveis canônicas, isto é

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_g + \mathcal{H}_{esc.} + \mathcal{H}_{int(H)} \quad (A.8)$$

onde

$$\mathcal{H}_g = \frac{1}{2} \Pi^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\eta} \Pi^{\gamma\eta} - \frac{1}{8} C^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_i h_{\alpha\beta} \partial^i h_{\mu\nu} \quad (A.9)$$

$$\mathcal{H}_{esc.} = \frac{1}{2} [\Pi_\phi \Pi_\phi - \phi_{,i} \phi^{,i}] \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int(H)} = & \frac{k}{4} h_{\mu\nu} [C^{\mu\nu 00} \Pi_\phi \Pi_\phi + 2C^{\mu\nu 0i} \phi_{,i} \Pi_\phi + C^{\mu\nu ij} \phi_{,i} \phi_{,j}] \\ & - \frac{k^2}{8} [\Pi_\phi h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 00} + h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 0i} \phi_{,i}]^2 \\ & + \frac{k}{4} h_{\mu\nu} [\Pi_\phi C^{\mu\nu 00} + C^{\mu\nu 0j} \phi_{,j}] [\Pi_\phi h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 00} + h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 0i} \phi_{,i}] + \mathcal{O}(k^3) \end{aligned} \quad (A.11)$$

A densidade hamiltoniana (A.11) está na representação de Heisenberg. A passagem da representação de Heisenberg para representação de interação pode ser obtida da equação (A.11) pelas substituições das variáveis canônicas dos campos livres (veja Gupta,1977 e Lurié,1968)

$$\Pi_{,\gamma\eta} = \frac{1}{4} C^{\gamma\eta\mu\nu} \dot{h}^{\mu\nu} = \Pi^{\gamma\eta} \quad (A.12)$$

$$\Pi_{,\phi} = \dot{\phi} \quad (A.13)$$

Segue daí que

$$\mathcal{H}_{int.} = \frac{k}{4} h_{\mu\nu} C^{\mu\nu\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{k^2}{8} (h_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta 0\mu} \phi_{,\mu})^2 \quad (A.14)$$

## Apêndice B

A definição da contração :  $\partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x')$  : é dada por

$$\begin{aligned} & : \partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x') : \equiv \langle 0 | T[\partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x')] | 0 \rangle = \\ & = i [\theta(t - t') \partial_\mu \partial'_\nu \Delta^+(x - x') - \theta(t' - t) \partial_\mu \partial'_\nu \Delta^-(x - x')] \end{aligned} \quad (B.1)$$

A função  $\theta(t - t')$  é dada pela equação (I.III.39).

As derivadas do propagador de Feynman  $\Delta_F$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial'_\nu \Delta_F(x - x') & \equiv \partial_\mu \partial'_\nu [\theta(t - t') \Delta^+(x - x') - \theta(t' - t) \Delta^-(x - x')] = \\ & = \partial_\mu \partial'_\nu \theta(t - t') \Delta^+(x - x') + \partial'_\nu \theta(t - t') \partial_\mu \Delta^+(x - x') + \partial_\mu \theta(t - t') \partial'_\nu \Delta^+(x - x') \\ & + \theta(t - t') \partial_\mu \partial'_\nu \Delta^+(x - x') - \partial_\mu \partial'_\nu \theta(t' - t) \Delta^-(x - x') - \partial'_\nu \theta(t' - t) \partial_\mu \Delta^-(x - x') \\ & - \partial_\mu \theta(t' - t) \partial'_\nu \Delta^-(x - x') - \theta(t' - t) \partial_\mu \partial'_\nu \Delta^-(x - x') \end{aligned} \quad (B.2)$$

O comutador dos operadores derivadas com a função  $\theta(t - t')$  atuando sobre  $\Delta^\pm$  pode ser colocado como

$$[\partial_\mu \partial'_\nu, \theta(t - t')] \Delta^\pm(x - x') = [\partial_\mu \partial'_\nu \theta(t - t') + \partial'_\nu \theta(t - t') \partial_\mu + \partial_\mu \theta(t - t') \partial'_\nu] \Delta^\pm(x - x') \quad (B.3)$$

Identificando os termos da equação (B.3) com a da equação (B.2), temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial'_\nu \Delta_F(x - x') & = \{\theta(t - t') \partial_\mu \partial'_\nu + [\partial_\mu \partial'_\nu, \theta(t - t')]\} \Delta^+(x - x') \\ & - \{\theta(t' - t) \partial_\mu \partial'_\nu + [\partial_\mu \partial'_\nu, \theta(t' - t)]\} \Delta^-(x - x') \end{aligned} \quad (B.4)$$

Consequentemente,

$$: \partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x') : = i[\partial_\mu \partial'_\nu \Delta_F(x - x') - [\partial_\mu \partial'_\nu, \theta(t - t')] \Delta^+(x - x')]$$

$$+ [\partial_\mu \partial'_\nu, \theta(t' - t)] \Delta^-(x - x') \quad (B.5)$$

Antes de prosseguir os cálculos da equação (B.5), vamos colocar a seguir algumas relações importantes

$$\frac{d\theta(x - x')}{dx} = \delta(x - x') \quad (B.6)$$

$$\delta(x - x') \Delta(x - x') = 0 ; \text{ pois } \Delta(x - x')|_{x_0=x'_0} = 0 \quad (B.7)$$

e

$$\delta(x_0 - x'_0) \partial_\mu \Delta(x - x') = -\delta_\mu^0 \delta(x - x') \quad (B.8)$$

As relações (B.7) e (B.8) serão provadas no final deste apêndice e a relação (B.6) é dada no livro de Byron and Fuller, 1969. A função  $\theta(x - x')$  pode ser colocada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \theta(t - t') &= \frac{1 + \epsilon(t - t')}{2} \\ \theta(t' - t) &= \frac{1 - \epsilon(t - t')}{2} \end{aligned} \quad (B.9)$$

onde  $\epsilon(t - t')$  é definido como

$$\epsilon(t - t') = \begin{cases} 1, & \text{se } t > t' \\ -1, & \text{se } t' > t \end{cases} \quad (B.10)$$

Derivando a função  $\theta(t - t')$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t - t')}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d\epsilon(t - t')}{dt} = \delta(t - t') \\ \frac{d\epsilon(t - t')}{dt} &= 2\delta(t - t') \end{aligned} \quad (B.11)$$

Usando as equações (B.7) e (B.11), obtemos a seguinte identidade

$$[\partial_\mu, \epsilon(t - t')] \Delta(x - x') = \partial_\mu \epsilon(t - t') \Delta(x - x') = 2\delta_\mu^0 \theta(t - t') \Delta(x - x') = 0 \quad (B.12)$$

Colocamos agora a equação (B.5) em termos de  $\epsilon(t - t')$ , temos

$$: \partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x') : = i \left[ \partial_\mu \partial'_\nu \Delta_F(x - x') - \frac{1}{2} [\partial_\mu \partial'_\nu, \epsilon(t - t')] \Delta(x - x') \right] \quad (B.13)$$

vamos usar agora as relações (B.6) à (B.12) para obter a forma final do comutador  $[\partial_\mu \partial'_\nu, \epsilon(t-t')] \Delta(x-x')$ . Usando a identidade (B.12), temos

$$\partial_\mu \{[\partial'_\nu, \epsilon(t-t')] \Delta(x-x')\} = \partial_\mu \partial'_\nu \epsilon(t-t') \Delta(x-x') + \partial'_\nu \epsilon(t-t') \partial_\mu \Delta(x-x') = 0$$

$$\partial'_\nu \{[\partial_\mu, \epsilon(t-t')] \Delta(x-x')\} = \partial_\mu \partial'_\nu \epsilon(t-t') \Delta(x-x') + \partial_\mu \epsilon(t-t') \partial'_\nu \Delta(x-x') = 0$$

Somando as duas relações acima, obtemos

$$\partial_\mu \partial'_\nu \epsilon(t-t') \Delta(x-x') + \frac{1}{2} [\partial'_\nu \epsilon(t-t') \partial_\mu \Delta(x-x') + \partial_\mu \epsilon(t-t') \partial'_\nu \Delta(x-x')] = 0$$

Substituindo na equação (B.3) trocando  $\Delta^+$  por  $\Delta$  segue-se que

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \partial'_\nu, \epsilon(t-t')] \Delta(x-x') &= \frac{1}{2} [\partial'_\nu \epsilon(t-t') \partial_\mu \Delta(x-x') + \partial_\mu \epsilon(t-t') \partial'_\nu \Delta(x-x')] \\ &= -\delta_\nu^0 \delta(t-t') \partial_\mu \Delta(x-x') + \delta_\mu^0 \delta(t-t') \partial'_\nu \Delta(x-x') \end{aligned}$$

Usando a relação (B.8) temos que

$$[\partial_\mu \partial'_\nu, \epsilon(t-t')] \Delta(x-x') = 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta(x-x') \quad (B.14)$$

Substituindo na equação (B.13), vem

$$:\partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x'):= i [\partial_\mu \partial'_\nu \Delta_F(x-x') - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta(x-x')] \quad (B.15)$$

Vamos provar agora as relações (B.7) e (B.8). Dada a função  $\Delta(x-x')$

$$\Delta(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \delta(p^2 - \mu^2) \epsilon(p_0) \exp[-ip(x-x')] \quad (B.16)$$

onde

$$\epsilon(p_0) = \frac{p_0}{|p_0|} = \begin{cases} 1, & \text{se } p_0 > 0 \\ -1, & \text{se } p_0 < 0 \end{cases} \quad (B.17)$$

Usando a seguinte propriedade da função  $\delta$  de Dirac

$$\delta(p^2 - \mu^2) = \delta(p_0^2 - \omega_{\vec{p}}^2) = \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} [\delta(p_0 + \omega_{\vec{p}}) + \delta(p_0 - \omega_{\vec{p}})] \quad (B.18)$$

Temos então,

$$\Delta(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p dp_0 \frac{\epsilon(p_0)}{2\omega_{\vec{p}}} [\delta(p_0 + \omega_{\vec{p}}) + \delta(p_0 - \omega_{\vec{p}})] \exp[-ip(x_0 - x'_0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')] \quad (B.19)$$

Integrando sobre  $p_0$ , vem

$$\Delta(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \{ \exp[-i\omega_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)] - \exp[i\omega_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)] \} \exp[i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')] \quad (B.20)$$

É obvio que  $\Delta(x-x')|_{x_0=x'_0} = 0$ . Temos provado então a relação (B.7).

Derivando a relação (B.19) e integrando em relação a  $p_0$ , vem

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - x'_0) \partial_\mu \Delta(x-x') &= -\frac{\delta(x_0 - x'_0)}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\exp[i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')] }{2\omega_{\vec{p}}} \times \\ &\times [p_i \delta_\mu^i (\epsilon(-\omega_{\vec{p}}) + \epsilon(\omega_{\vec{p}})) - \omega_{\vec{p}} \delta_\mu^0 (\epsilon(-\omega_{\vec{p}}) - \epsilon(\omega_{\vec{p}}))] \\ &= -\frac{\delta(x_0 - x'_0)}{(2\pi)^3} \int d^3p \exp[i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')] \delta_\mu^0 = -\delta_\mu^0 \delta(x-x') \end{aligned}$$

$$\delta(x_0 - x'_0) \partial_\mu \Delta(x-x') = -\delta_\mu^0 \delta(x-x') \quad (B.21)$$

É fácil verificar que

$$\delta(x_0 - x'_0) \partial'_\mu \Delta(x-x') = \delta_\mu^0 \delta(x-x') \quad (B.22)$$

## Apêndice C

A densidade lagrangeana de Klein-Gordon é dada por

$$\mathcal{L}_{esc} = \frac{1}{2} (\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - m^2 \phi^2) \quad (C.1)$$

A equação de movimento é dada da seguinte forma

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0 \quad (C.2)$$

As soluções da equação (C.2) podem ser escritas como

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (C.3)$$

colocando

$$\phi^+(x) = \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\vec{p}}}} a(\vec{p}) e^{-ipx} \quad (C.3.a)$$

$$\phi^-(x) = \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\vec{p}}}} a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \quad (C.3.b)$$

Relações de comutações são

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \quad (C.4.a)$$

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 0 \quad (C.4.a)$$

Essas relações são extraídas do livro de (Mandl e Shaw, 1984).

## Apêndice D

A transformação conforme da métrica é descrita como

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu} \quad (D.1)$$

O símbolo de Christoffel transformado fica

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\gamma} &= \frac{\bar{g}^{\gamma\delta}}{2} [\partial_{\mu}\bar{g}_{\nu\delta} + \partial_{\nu}\bar{g}_{\mu\delta} - \partial_{\delta}\bar{g}_{\mu\nu}] \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} + \Omega^{-1} [\delta_{\mu}^{\gamma}\partial_{\nu}\Omega + \delta_{\nu}^{\gamma}\partial_{\mu}\Omega - g^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}\partial_{\delta}\Omega] \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^{\gamma} = \Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma} + 4\Omega^{-1}\partial_{\mu}\Omega \quad (D.3)$$

O tensor de Ricci  $\bar{R}_{\mu\nu}$  é dado por

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \partial_{\gamma}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\gamma} - \partial_{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^{\gamma} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\gamma}\bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^{\delta} - \bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^{\delta}\bar{\Gamma}_{\nu\delta}^{\gamma} \quad (D.4)$$

Substituindo as equações (D.2) e (D.3) na relação acima, vem

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \Omega^{-1} \{ \partial_{\gamma} [g^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}\partial_{\delta}\Omega] + 2\Omega_{;\mu\nu} + \Gamma_{\gamma\eta}^{\eta}g^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}\partial_{\delta}\Omega \} \\ &+ \Omega^{-2} [4\partial_{\mu}\Omega\partial_{\nu}\Omega - g^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}\partial_{\gamma}\Omega\partial_{\delta}\Omega] + \Omega^{-1} [\Gamma_{\mu\delta}^{\gamma}g^{\delta\eta}g_{\nu\gamma}\partial_{\eta}\Omega + \Gamma_{\nu\delta}^{\gamma}g^{\delta\eta}g_{\mu\gamma}\partial_{\eta}\Omega] \end{aligned} \quad (D.5)$$

O tensor escalar de curvatura  $\bar{R}$  é obtido pela contração dos índices do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} \\ &= \Omega^{-2} \{ R - \Omega^{-1}g^{\mu\nu} [\partial_{\gamma} (g^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}\partial_{\delta}\Omega) + 2\Omega_{;\mu\nu} + 2\Gamma_{\mu\eta}^{\eta}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Omega] \} \end{aligned}$$

mas

$$g^{\mu\nu}\partial_{\gamma} [g^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}\partial_{\delta}\Omega] = -2\Gamma_{\gamma\eta}^{\eta}g^{\gamma\eta}\partial_{\delta}\Omega + 4\Box\Omega$$

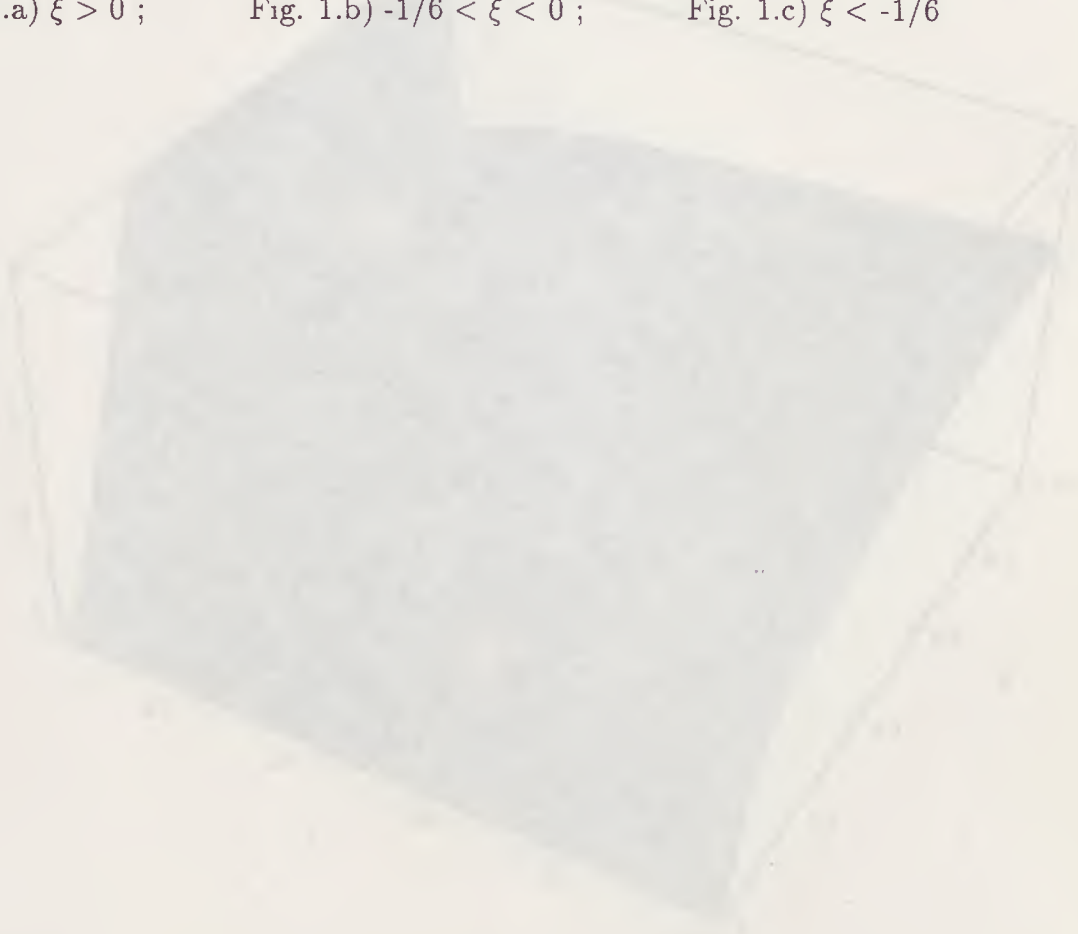
Consequentemente,

$$\bar{R} = \Omega^{-2}R - 6\Omega^{-3}\Box\Omega \quad (D.6)$$

## Apêndice E (FIGURAS)

As figuras (1.a), (1.b) e (1.c) dadas nas páginas seguintes mostram o campo  $\phi$  em função de  $\bar{\phi}$  e  $\xi$  das equações (II.II.21.a), (II.II.21.b) e (II.II.21.d), respectivamente. O valor de  $\kappa^2$  foi colocado igual a 1 ( $\kappa^2 = 1$ ) e os intervalos de  $\xi$  correspondentes são

Fig. 1.a)  $\xi > 0$  ;      Fig. 1.b)  $-1/6 < \xi < 0$  ;      Fig. 1.c)  $\xi < -1/6$



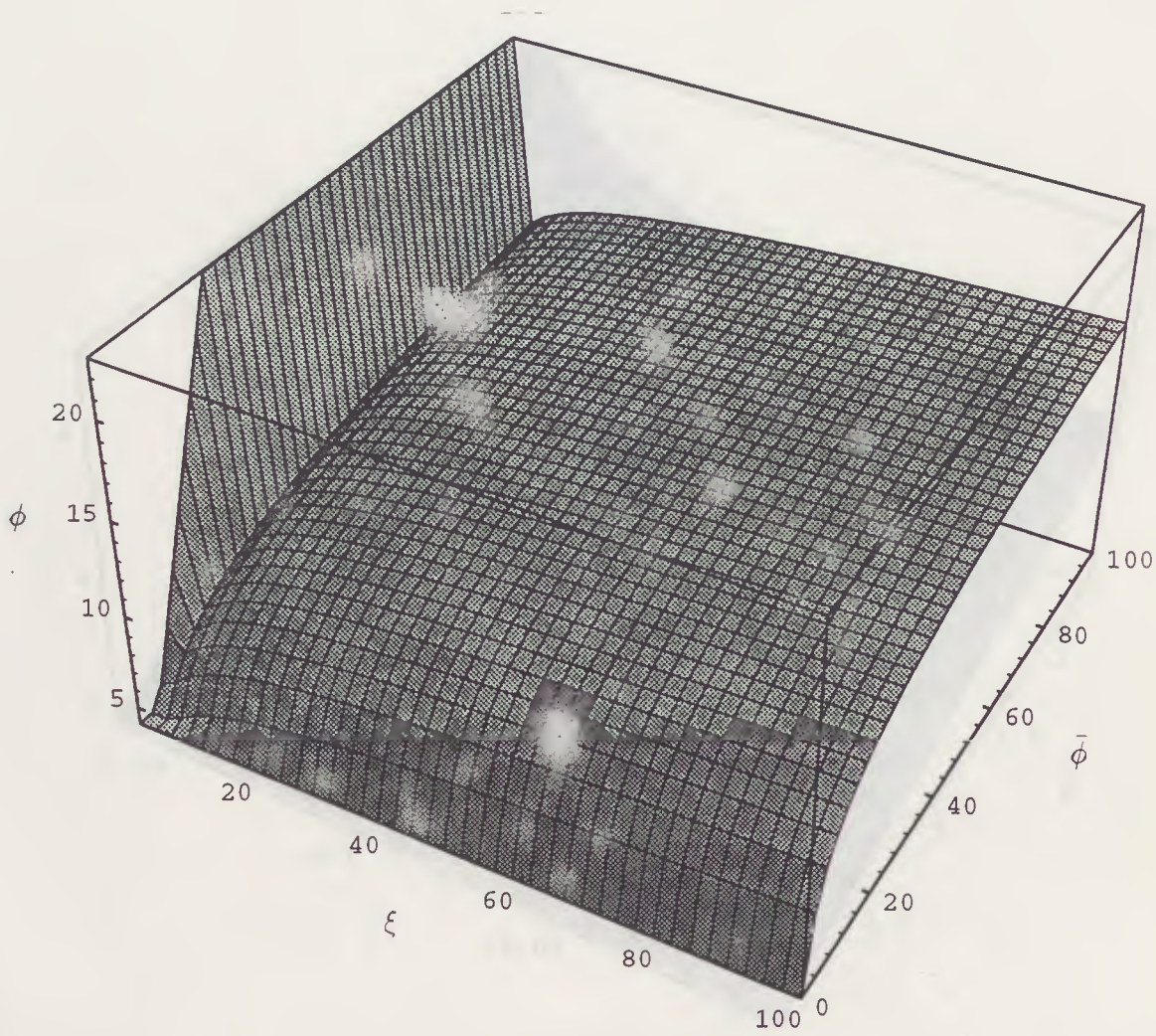


Fig. 1.a

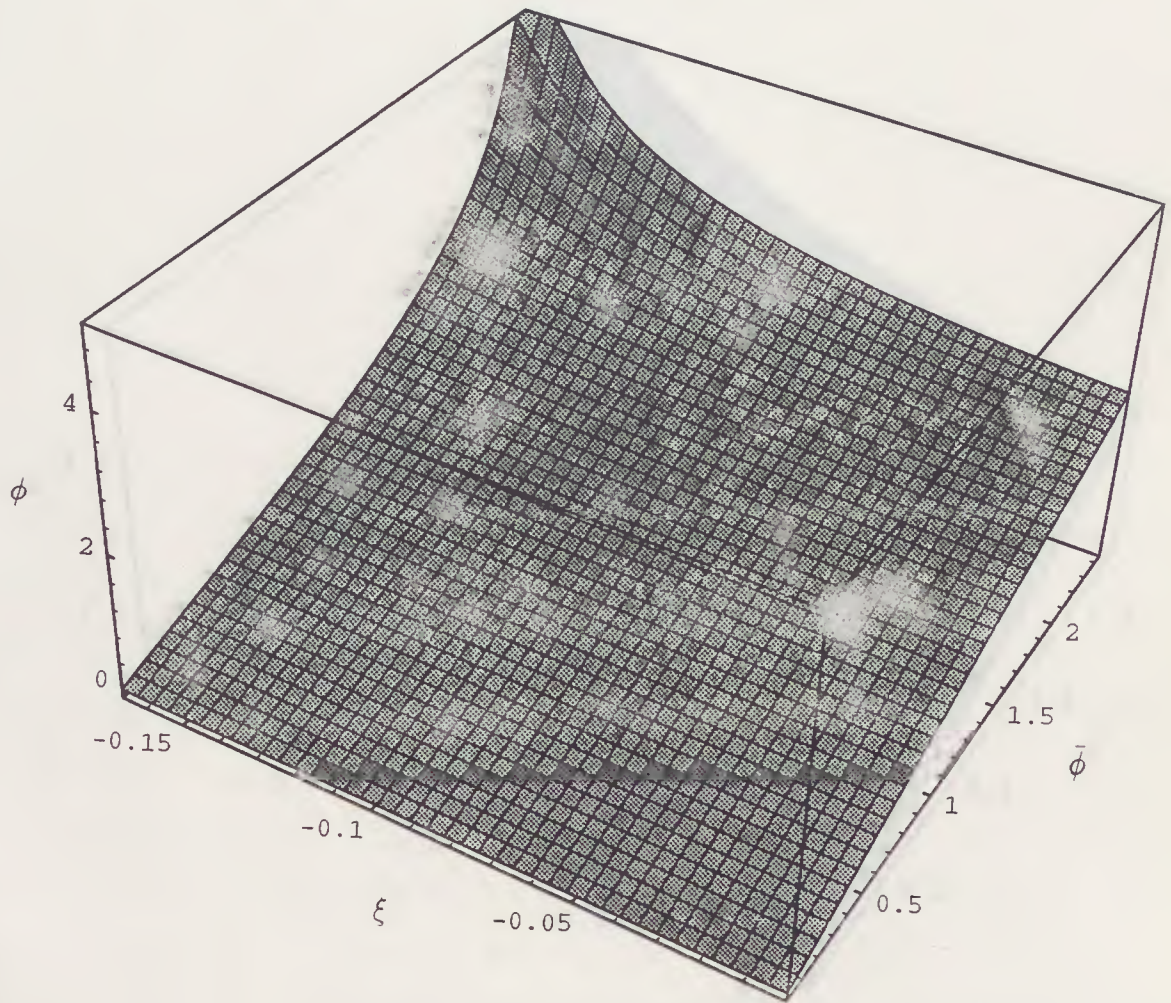


Fig. 1.b

## Referências

- Accioly,A.J., Kwok,S.F., Pereira da Silva,N.L.P. and Wichoski,U.F.. 1993. preprint: IFT-P.052/93 (*Class. Quantum Grav.*, 1993. 10. L215).
- Accioly,A.J., Kwok,S.F., Novaes,S.F., Spehler,D. and Mukai,H.. 1993. preprint: IFT-P.057/93.
- Accioly,A.J., Kwok,S.F., Novaes,S.F., Spehler,D. and Mukai,H., 1993. preprint: IFT-P.058/93.
- Amendola,L., 1993. *Phys. Lett. B.* 301. 175.
- Barker,B.M., Bhatia,M.S. and Gupta,S.N.. 1969. *Physical Review*. Vol.182. N<sup>o</sup> 5. 1387.
- Barut,A.O.. 1980. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. Dover Publications.
- Blair,D.G., 1991, *The Detection of Gravitational Waves*. Cambridge University Press.
- Byron,F.W. and Fuller,R.W.. 1969. *Mathematics of Classical and Quantum Physics* (Vol. II), Addison-Wesley.
- Callan,C.G., Coleman,S. and Jackiw,R.. 1970, *Ann. Phys.*, 59. 42.
- Davies,P.C.W. and Birrell,N.D.. 1982. *Quantum Fields in Curved Spaces*. Cambridge University Press.
- Deng,Y. and Mannheim,P.D.. 1988. *Astrophys. J.*, 324. 1
- Fock,V., 1959, *The Theory of Space Time and Gravitation*. Pergamon Press.
- Gupta,S.N., 1950. *The Proceedings of The Physical Society*. vol. 63. N<sup>o</sup> 367A. 46.
- Gupta,S.N., 1952. *The Proceedings of the Physical Society*, vol. 65. N<sup>o</sup> 387A. 161.
- Gupta,S.N., 1954, *Physical Review*. Vol. 96. N<sup>o</sup> 6. 1683.
- Gupta,S.N., 1977, *Quantum Electrodynamics*, Gordon and Breach.
- Hartle,J.B. and Hawking,S.W., 1983. *Phys. Rev.*, D28. 2960.
- Huggins,S.R. and Toms,D.J.. 1987. *Class. Quantum Grav.*, 4. 1509.
- Källen,G., 1972, *Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag.

- Landau,L. e Lifshitz,E., 1980, *Teoria do Campo*, Editora Mir.
- Lord,E.A., 1976, *Tensors Relativity and Cosmology*, Tata McGraw-Hill.
- Lurié,D., 1968, *Particles and Fields*, Interscience Publishers.
- Mandl,F. and Shaw,G., 1984, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons.
- Nash,C., 1978, *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press.
- Papini,G. and Valluri,S.R., 1977, *Physics Letters*, section C, 33, N<sup>o</sup>2, 51.
- Peet,F.G., 1970, *Canadian Journal of Phys.*, Vol.48, N<sup>o</sup>8, 923.
- Ramond,P., 1981, *Field Theory*, The Benjamin/Cummings.
- Ryder,L.H., 1986, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press.
- Weinberg,S., 1972, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons.
- Zee,A., 1979, *Phys. Rev. Lett.*, 72, 417.

