

RESSALVA

Atendendo solicitação da autora,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 28/02/2026



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Karina Sevierio Rampazzi

**Equações de diferenças satisfeitas por
coeficientes de Verblunsky**

São José do Rio Preto
2024

Karina Seviero Rampazzi

**Equações de diferenças satisfeitas por
coeficientes de Verblunsky**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali

Coorientadora: Profa. Dra. Luana de Lima Silva Ribeiro

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2024

R177e

Rampazzi, Karina Seviero

Equações de diferenças satisfeitas por coeficientes de Verblunsky / Karina Seviero Rampazzi. -- São José do Rio Preto, 2024
107 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Cleonice Fátima Bracciali

Coorientadora: Luana de Lima Silva Ribeiro

1. Polinômios ortogonais na circunferência unitária. 2. Equações de diferenças. 3. Função peso semiclássica. 4. Equação de Pearson. 5. Problema de Riemann-Hilbert. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Karina Sevierio Rampazzi

**Equações de diferenças satisfeitas por
coeficientes de Verblunsky**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
Orientadora

Prof. Dr. Daniel Oliveira Veronese
UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
28 de fevereiro de 2024

*Aos meus pais, Carlos e Sueli,
à minha avó, Aurélia,
à minha irmã, Karla,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de iniciar agradecendo a minha orientadora Cleonice F. Bracciali, que sempre esteve disponível em todos os momentos que precisei, não só profissionais, como também pessoais. Sua orientação foi de extrema importância para a conclusão deste trabalho. Sou grata por todos os conselhos e ensinamentos que recebi durante a pós-graduação.

À minha coorientadora Luana L. Silva Ribeiro, que foi essencial durante toda a minha pesquisa, aconselhando-me, não só no projeto, mas em várias decisões tomadas durante este período. Foi um privilégio ter sua motivação constante e encorajamento para seguir os estudos. Fico muito feliz de tê-la como minha coorientadora e, também, grande amiga.

Um agradecimento muito especial à minha supervisora Ana Pilar Foulquié Moreno da Universidade de Aveiro e ao professor Amílcar Branquinho da Universidade de Coimbra, que foram incríveis durante todo o tempo que estive em Portugal para a realização do estágio na Universidade de Aveiro e até os dias de hoje. Com a competência científica deles, aprendi novas abordagens e técnicas atuais que foram fundamentais para o enriquecimento deste trabalho e, também, para a minha formação. Agradeço por todo amparo, disponibilidade e paciência que sempre dedicaram-me. Em Portugal, fizeram com que eu me sentisse parte da família, apresentaram-me Aveiro, Coimbra e muita cultura, portuguesa e espanhola. Muito obrigada, Ana e Amílcar, vocês foram excepcionais desde o primeiro dia que os conheci, não tenho palavras para expressar tamanha gratidão.

Ao professor Alagacone Sri Ranga pelos ensinamentos. Seu incentivo, assistência e sabedoria tiveram um papel muito importante, tanto no mestrado, quanto no doutorado. Muito obrigada!

À todos os integrantes do grupo de pesquisa, por seminários enriquecedores e conselhos valiosos.

A minha mais profunda gratidão à minha família, meus pais, Carlos e Sueli, que

deram-me a vida, o amor e o exemplo de serem seres humanos maravilhosos. À minha amada avó Aurélia que coloca-me em todas as suas orações. À minha irmã, Karla, que sempre está ao meu lado, minha melhor amiga, companheira e confidente. Estendo os agradecimentos ao meu cunhado, Fernando, agora, meu irmão e amigo. Este trabalho não teria sido possível sem receber todo o amor, apoio incondicional e suporte familiar. Eu amo muito cada um de vocês.

Aos meus amigos em São José do Rio Preto que viraram família. Ana Clara, Enrico, João, Maycon, Paulo, Rodrigo Barbosa e Rodrigo Ishizaka. Meu muito obrigada por todas as conversas, caronas e parceria. Torço muito e quero o bem de cada um de vocês. Obrigada por todo o companheirismo!

Aos amigos que conheci em Aveiro, aqueles que mostraram-me que eu não estava sozinha, mesmo estando tão longe do meu país. Ana Maria, Brenda, Bruno, Claudia, Dayane, Eduardo, Gabriel, Haroldo, João Miguel, Juan, Marietta, Lidiane, Matheus e Michelle. Fizeram-me entender o verdadeiro sentido de "O que Aveiro une, ninguém separa". Vocês estão nas minhas melhores lembranças. Muito obrigada!

À todos aqueles que permanecem presentes, estando longe ou perto. Meus sinceros agradecimentos ao Fabiano, Fabiola, Giovana, Gustavo, Jonathan, Livea, Lucas, Mariane, Marcela, Marcos, Plínio, Rafaela, Samanta, Tauana, Thiago, Vinicius e Yen. Vocês me ajudam mais do que podem imaginar. Obrigada pelo apoio de cada um.

À todos os professores do Departamento de Matemática do Ibilce/Unesp, da Universidade de Aveiro e da FCT/Unesp, agradeço pelos ensinamentos.

À todos os funcionários da Unesp e da Universidade de Aveiro que sempre me atenderam quando solicitei.

Aos que não citei, meus sinceros pedidos de desculpas, mas agradeço a todos.

À Deus, por sempre me guiar para o melhor caminho.

À Pró-Reitoria de Pós-Graduação (PROPG) da Unesp, pelo apoio financeiro durante o estágio na Universidade de Aveiro em Portugal.

Ao programa de bolsas da UNIVESP, pelo apoio financeiro no primeiro ano do curso de doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

*“Educação não transforma o mundo.
Educação muda as pessoas.
Pessoas transformam o mundo.”*
Freire, 1979, p. 84

RESUMO

O principal objetivo desta tese foi investigar os polinômios ortogonais na circunferência unitária associados a certas funções peso semiclássicas. Determinamos todas as funções peso semiclássicas cujas equações diferenciais do tipo Pearson, satisfeitas por elas, envolvem polinômios de grau menor do que ou igual a 2 e, isso também incluiu, uma extensão da função peso de Jacobi na circunferência unitária. Foram estabelecidas relações de estrutura para os polinômios ortogonais e equações de diferenças não lineares para os coeficientes de Verblunsky complexos associados. Como aplicação, apresentamos diversas relações de estruturas e equações de diferenças associadas a algumas dessas funções peso semiclássicas. Além disso, a fim de obter outras propriedades diferenciais, utilizando uma abordagem conhecida como problema de Riemann-Hilbert, encontramos equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para alguns polinômios ortogonais na circunferência unitária.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais na circunferência unitária, Equações de diferenças, Função peso semiclássica, Equação de Pearson, Problema de Riemann-Hilbert.

ABSTRACT

The main objective in this thesis is to study the orthogonal polynomials on the unit circle associated with certain semiclassical weight functions. We determine all semiclassical weight functions such that the Pearson-type differential equations satisfied by them involve polynomials of degree at most 2, and this also includes an extension of the Jacobi weight function on the unit circle. General structure relations for the orthogonal polynomials and non-linear difference equations for the associated complex Verblunsky coefficients are established. As application, we present several new structure relations and difference equations associated with some of these semiclassical weight functions. Furthermore, in order to obtain other differential properties, using an approach known as Riemann-Hilbert problem, we found first and second order differential equations for some orthogonal polynomials on the unit circle.

Keywords: Orthogonal polynomials on the unit circle, Difference equations, Semiclassical weight function, Pearson equation, Riemann-Hilbert problem.

Sumário

Introdução	19
1 Preliminares	24
1.1 Polinômios ortogonais na reta real	24
1.2 Polinômios ortogonais na circunferência unitária	25
1.3 Polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos	28
1.3.1 Polinômios ortogonais clássicos na reta real	29
1.3.2 Polinômios ortogonais semiclássicos na reta real	33
1.3.3 Polinômios ortogonais semiclássicos na circunferência unitária	34
1.4 Equações de Painlevé	35
1.5 Problema de Riemann-Hilbert	39
1.5.1 Problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais na reta real	39
1.5.2 Problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais na circunferência unitária	42
2 Determinação das funções peso semiclássicas	43
2.1 Com $A(z)$ polinômio de grau 0	44
2.2 Com $A(z)$ polinômio de grau 1	45
2.3 Com $A(z)$ polinômio de grau 2	50
2.4 Funções peso semiclássicas encontradas	61
3 Relações de estrutura e equações de diferenças	63
3.1 Relações de estrutura para os polinômios ortogonais na circunferência unitária	63
3.2 Equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky	67
3.3 Aplicações	68
4 Relações diferenciais derivadas do problema de Riemann-Hilbert	78
4.1 Análise de Riemann-Hilbert e desenvolvimentos assintóticos	79
4.2 Caso Bessel modificado	85
4.2.1 Matriz de estrutura	86
4.2.2 Fórmula de curvatura nula	89
4.2.3 Equações diferenciais de primeira e de segunda ordem	91
4.3 Caso Jacobi modificado	93
4.3.1 Matriz de estrutura	94
4.3.2 Fórmula de curvatura nula	97
4.3.3 Equações diferenciais de primeira e de segunda ordem	98

5	Considerações finais	101
5.1	Resultados principais	101
5.2	Trabalhos futuros	102
	Referências	104

Introdução

Sejam (a, b) um intervalo real e μ uma medida de Borel positiva. Considere $C(a, b) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ contínua}\}$, isto é, o espaço das funções contínuas definidas no intervalo (a, b) . Um produto interno entre $f_1, f_2 \in C(a, b)$ pode ser definido por uma integral de Riemann-Stieltjes como

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) d\mu(x).$$

Se μ é absolutamente contínua, ou seja, $d\mu(x) = w(x)dx$, então a integral torna-se

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) w(x) dx,$$

onde w é uma função integrável definida em (a, b) . Como $w(x) \geq 0$ e é não identicamente nula em (a, b) , então w é chamada função peso.

Dizemos que duas funções são ortogonais entre si, se o produto interno entre elas for zero. Portanto, uma família de funções, $\{f_n\}$, forma um sistema ortogonal em um intervalo (a, b) com relação a uma função peso w se, para quaisquer duas funções distintas da família, tem-se $\langle f_n, f_m \rangle = 0$, $n \neq m \in \mathbb{N}$.

No caso de polinômios, considera-se $\{P_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma função peso w em (a, b) quando $\langle P_n, P_m \rangle = 0$, $n \neq m$ e P_n é um polinômio de grau exatamente n . Dizemos que uma sequência de polinômios ortogonais, $\{p_n\}_{n \geq 0}$, é ortonormal, se $\langle p_n, p_n \rangle = 1$. Estes polinômios satisfazem uma relação de recorrência de três termos dada por

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $p_{-1}(x) = 0$, $a_n = \langle xp_n, p_{n-1} \rangle$ e $b_n = \langle xp_n, p_n \rangle$ e chamamos a_n e b_n de coeficientes da relação de recorrência. Estudos bem detalhados sobre esses polinômios podem ser encontrados em Chihara [14], Ismail [32] e Szegő [49].

A teoria dos polinômios ortogonais chama a atenção de muitos pesquisadores devido às suas várias aplicações, tais como em Física Matemática, Análise Numérica, Análise Funcional, processamento de sinais, entre outras. Entre os polinômios ortogonais, alguns são classificados como clássicos ou semiclássicos. Os polinômios ortogonais clássicos são os polinômios de Jacobi, de Laguerre, de Hermite e de Bessel e são muito conhecidos na literatura, ver [14] e [34].

Uma das caracterizações mais conhecidas dos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos é que a função peso associada, w , satisfaz uma equação de Pearson do tipo

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)w(x)] = \rho(x)w(x),$$

onde σ e ρ são polinômios. Se σ é um polinômio de grau menor do que ou igual a 2 e ρ é um polinômio de grau 1, então a função peso é chamada de clássica e os polinômios ortogonais associados são polinômios ortogonais clássicos. Se σ é um polinômio de grau maior que 2 ou ρ é um polinômio de grau diferente de 1, a função peso é conhecida como função peso semiclássica. Se σw se anula nos pontos extremos do intervalo de ortogonalidade, os polinômios ortogonais associados à função peso clássica ou semiclássica, satisfazem relações de recorrência diferenciais, também conhecidas como relações de estrutura, no Capítulo 1 detalhamos este assunto. Ver, por exemplo, [5, 7, 40, 41] e [53].

Um exemplo de função peso semiclássica é a função peso de Freud [29], isto é,

$$w_s(x) = e^{-x^4+sx^2}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real. Os polinômios ortonormais associados a esta função peso satisfazem a relação de estrutura

$$p'_n(x) = \frac{n}{a_n(s)} p_{n-1}(x) + 4a_n(s)a_{n-1}(s)a_{n-2}(s)p_{n-3}(x), \quad n \geq 2.$$

Os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais associados a função peso de Freud dependem de s e satisfazem a seguinte equação de diferenças

$$a_{n+1}^2(s) + a_n^2(s) + a_{n-1}^2(s) = \frac{n}{4a_n^2(s)} + \frac{s}{2}, \quad n \geq 1,$$

com $a_0(s) = 0$ e

$$a_1^2(s) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_s(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} w_s(x) dx}.$$

Essa equação diz-se discreta de Painlevé, dP_I, ver [29, 36] e [53]. Na Seção 1.4 descrevemos as equações de Painlevé.

Os polinômios ortogonais na circunferência unitária vêm despertando grande interesse dos pesquisadores nas últimas décadas devido a sua vasta aplicação em várias áreas da Matemática como, por exemplo, em Teoria da Aproximação, Teoria Espectral, Teoria de Probabilidades e, recentemente, em problemas de Riemann-Hilbert, ver, por exemplo, [42, 45] e [46]. Seguindo os trabalhos de Stieltjes, Hamburger, Toeplitz e outros, Szegő investigou a ortogonalidade na circunferência unitária em uma série de artigos por volta de 1920, ver [47] e [48], onde introduziu os polinômios ortogonais na circunferência unitária, conhecidos na literatura também como polinômios de Szegő. Essa classe de polinômios, quando associada a função peso semiclássica, é o elemento principal de estudo desta tese.

Considere w uma função peso definida na circunferência unitária $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, então o produto interno entre Ψ_n e Ψ_m é dado por

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_{\mathbb{T}} = \int_0^{2\pi} \Psi_n(e^{i\theta}) \overline{\Psi_m(e^{i\theta})} w(\theta) d\theta,$$

e $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_{\mathbb{T}} = 0$ para $n \neq m$, caracteriza a ortogonalidade na circunferência unitária da sequência $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$.

Esses polinômios não satisfazem uma relação de recorrência de três termos, porém na forma mônica, Φ_n , satisfazem uma relação muito interessante, conhecida como recorrência de Szegő, dada por,

$$\Phi_n(z) = z\Phi_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1,$$

onde $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(1/\bar{z})}$ é o polinômio recíproco e

$$\alpha_{n-1} = -\overline{\Phi_n(0)}$$

são conhecidos como coeficientes de Verblunsky. Além disso, Φ_n é definido por

$$\Phi_n(z) = \frac{\Psi_n(z)}{\kappa_n},$$

onde κ_n é o coeficiente que acompanha o termo de maior grau de Ψ_n , ou seja,

$$\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathbb{T}} = \int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} w(\theta) d\theta = \frac{1}{\kappa_n^2}.$$

Uma função peso na circunferência unitária, w , é chamada semiclássica se satisfaz a equação

$$\frac{d}{d\theta} [A(e^{i\theta})w(\theta)] = B(e^{i\theta})w(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

onde as funções A e B são polinômios de Laurent e $A(e^{i\theta}) = 0$ nos pontos singulares de $1/w$. Essa definição é devido a Magnus [37]. A equação (1) será chamada equação diferencial do tipo Pearson. Neste trabalho analisamos relações de estrutura satisfeitas por polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária e os coeficientes de Verblunsky, α_n , associados a uma função peso semiclássica na circunferência unitária. Em [44] são tratadas as famílias Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária que incluem as semiclássicas como casos particulares.

Para a ortogonalidade na circunferência unitária, o problema de classificação dos polinômios ortogonais semiclássicos foi estudado em [11, 44, 51] e [52] considerando funcionais lineares que satisfazem uma equação do tipo Pearson, ou seja, dado um funcional linear, regular e hermitiano, u , diz-se que u é semiclássico se existem polinômios A e B , com $A(z) \neq 0$, que satisfaçam a equação

$$D(A(z)u) = B(z)u,$$

onde o operador derivada é definido por

$$d u(g(z)) = -i u(zg'(z)) = -i \int_0^{2\pi} z g'(z) w(\theta) d\theta, \quad e^{i\theta} = z, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Se $\deg A(z) = p$ e $\max\{p-1, \deg((p-1)A(z) + iB(z))\} = q$, diz-se que u pertence a classe (p, q) . Nos artigos [11, 51] e [52], os funcionais lineares semiclássicos foram divididos em classes, essa abordagem pode ser adaptada à equação (1) considerando que, se

$$\deg A(z) = p \text{ e } \max\{p-1, \deg((p-1)A(z) + iB(z))\} = q,$$

então w pertence a classe (p, q) de funções peso semiclássicas. Uma função peso que pertence a classe (p, q) também pertence a classe $(p+1, q+1)$.

Um exemplo conhecido de função peso semiclássica na circunferência unitária é

$$w_t(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{t \cos(\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

com $t > 0$, ver [32]. A sequência associada de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária satisfazem a relação de estrutura

$$\Phi'_n(z) = n\Phi_{n-1}(z) + \frac{t\kappa_{n-2}^2}{2\kappa_n^2} \Phi_{n-2}(z), \quad n \geq 2. \quad (2)$$

Os coeficientes de Verblunsky são reais e dependem do parâmetro t . Da relação de estrutura, é possível mostrar que os coeficientes de Verblunsky satisfazem a equação de diferenças não linear

$$\alpha_n(t) + \alpha_{n-2}(t) = -\frac{2n}{t} \frac{\alpha_{n-1}(t)}{1 - \alpha_{n-1}^2(t)}, \quad n \geq 2. \quad (3)$$

Essa equação é bem conhecida e foi apresentada por Periwal e Shevitz [43]. Ela corresponde a uma equação discreta de Painlevé dP_{II}, ver [53]. Estudos sobre funções peso semiclássicas na circunferência unitária também podem ser encontrados em [10] e [37]. Em [2] a equação (3) foi encontrada usando uma abordagem conhecida como Problema de Riemann-Hilbert, que é uma ferramenta que vem sendo muito utilizada quando se trata da análise do comportamento assintótico de funções.

O método de Riemann-Hilbert tem grande importância na teoria de problemas de contorno para funções holomorfas (analíticas). O principal objetivo é encontrar uma função que seja holomorfa em uma determinada região, levando em conta certas relações de salto entre os valores de seus limites sobre os pontos de um contorno dado. Essa abordagem para polinômios ortogonais foi formulada por Fokas, Its e Kitaev em [27] em 1992 e um método para calcular assintóticas com problemas de Riemann-Hilbert foi apresentado em [22] por Deift e Zhou em 1993, primeiro no contexto de sistemas integráveis. A aplicação mais abrangente a polinômios ortogonais ocorreu em 1999, graças aos trabalhos de Deift, Kriecherbauer, McLaughlin, Venakides e Zhou, ver [17, 20] e [21]. Essas descobertas foram fortemente influenciadas pela relação entre polinômios ortogonais e a teoria de matrizes aleatórias [15] e [19].

Essa técnica tem sido muito utilizada na teoria de polinômios ortogonais para obtenção de assintóticas e propriedades diferenciais. Mais detalhes sobre o Problema de Riemann-Hilbert podem ser encontrados em [1, 3] e [18]. Para resultados mais recentes sobre essa teoria ver [8, 9, 12] e [13].

Um objetivo deste trabalho foi investigar funções peso semiclássicas na circunferência unitária cujos polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária tenham coeficientes de Verblunsky complexos, para determinar que tipo de equações de diferenças esses coeficientes satisfazem. Desenvolvemos essa investigação para funções peso semiclássicas em que os polinômios A e B em (1) são polinômios de grau menor do que ou igual a 2. Como resultado determinamos todas as funções peso semiclássicas que satisfazem as condições estabelecidas e encontramos as relações de estrutura para os polinômios ortogonais na circunferência unitária e as equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky associadas a tais funções peso na circunferência unitária. Esses resultados foram publicados em [6]. Outro objetivo foi encontrar equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para polinômios ortogonais na circunferência unitária, utilizando o problema de Riemann-Hilbert.

Para alcançar os objetivos citados anteriormente, este texto está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1 apresentamos definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. Este capítulo foi dividido em cinco seções, na primeira são definidos, brevemente, conceitos básicos referentes a polinômios ortogonais na reta real. Na segunda seção são apresentados conceitos importantes sobre a ortogonalidade na circunferência unitária. Na Seção 1.3 apresentamos a classificação dos polinômios ortogonais como clássicos e semiclássicos na reta real e uma equação do tipo Pearson para a classificação de polinômios ortogonais semiclássicos na circunferência unitária. Na quarta seção descrevemos

as equações diferenciais e algumas equações discretas de Painlevé. E, por fim, na última seção, é apresentado, de forma breve, o problema de Riemann-Hilbert e, ainda, o problema de Riemann-Hilbert para os polinômios ortogonais na reta real e na circunferência unitária.

No Capítulo 2 determinamos todas as funções peso semiclássicas, w , na circunferência unitária, onde os polinômios A e B em (1) são polinômios de grau menor do que ou igual a 2. O método utilizado foi considerar todas as possibilidades de zeros do polinômio A , tal que w seja positiva. Muitas funções peso semiclássicas conhecidas foram encontradas. Além disso, determinamos a função peso semiclássica

$$w(\theta) = \tau(\lambda, \beta, \eta) e^{-\eta\theta} [\sin^2(\theta/2)]^\lambda [\cos^2(\theta/2)]^\beta,$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$, $\beta > -1/2$ e $\tau(\lambda, \beta, \eta)$ é uma constante. Casos particulares desta função peso, recuperam a maioria das funções peso semiclássicas conhecidas na literatura, ver Observação 2.6. No entanto, como mencionado na Observação 2.6, o caso geral, $\lambda\beta\eta \neq 0$, até onde sabemos, não foi considerado anteriormente.

No Capítulo 3 encontramos relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária, associados a uma função peso semiclássica, estes resultados estão no Teorema 3.4. Além disso, utilizando as relações de estrutura, determinamos equações de diferenças não lineares associadas aos coeficientes de Verblunsky complexos, que é um dos resultados principais deste trabalho. Como aplicação, ainda no Capítulo 3, apresentamos relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária e equações de diferenças para os coeficientes de Verblunsky para as funções peso descritas no Capítulo 2.

No Capítulo 4 são apresentadas equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para os polinômios ortogonais na circunferência unitária associados a funções peso semiclássicas específicas. Também mostramos que algumas das equações diferenciais de primeira ordem são equivalentes a relações de estruturas encontradas no Capítulo 3. Gostaríamos de ressaltar que os resultados do Capítulo 4 foram desenvolvidos durante um estágio no exterior, realizado na Universidade de Aveiro, em Portugal, sob orientação da Profa. Dra. Ana Pilar Foulquié Moreno da Universidade de Aveiro e do Prof. Dr. Amílcar Branquinho da Universidade de Coimbra.

No Capítulo 5 uma síntese dos principais resultados encontrados durante o doutorado é apresentada. Também descrevemos os trabalhos futuros que poderão ser realizados, dando continuidade a investigação iniciada com esta tese.

Como mencionado anteriormente, os principais resultados contidos nos Capítulos 2 e 3 foram publicados em

[6] C. F. Bracciali, K. S. Rampazzi, L. L. Silva Ribeiro, On semi-classical weight functions on the unit circle. *Journal of Approximation Theory*, 295, art. 105957, 2023.

Os resultados do Capítulo 4 estão sendo organizados em forma de artigo científico para ser submetido para publicação.

5 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos os principais resultados deste trabalho e as perspectivas futuras que visam a continuidade desta investigação.

5.1 Resultados principais

O principal objetivo desta tese foi o estudo de funções peso semiclássicas definidas na circunferência unitária que satisfazem uma equação do tipo Pearson, ou seja,

$$\frac{d}{d\theta} [A(e^{i\theta})w(\theta)] = B(e^{i\theta})w(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z = e^{i\theta}, \quad (5.1)$$

onde $A(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ e $B(z) = b_2 z^2 + b_1 z + b_0$, com $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{C}$.

Este trabalho foi dividido em três grandes tópicos: a determinação de funções peso semiclássicas que satisfazem uma equação do tipo Pearson com determinadas condições, equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblusnky e equações diferenciais de primeira e de segunda ordem satisfeitas por alguns polinômios ortogonais na circunferência unitária através de uma análise envolvendo o Problema de Riemann-Hilbert. Estes tópicos são encontrados nos Capítulos 2, 3 e 4, respectivamente. Os principais resultados destes capítulos podem ser sintetizados por

- uma nova função peso foi apresentada no Capítulo 2, tal função peso generaliza várias outras funções peso conhecidas. Essa função peso é dada por

$$w(\theta) = e^{-\eta\theta} [\sin^2(\theta/2)]^\lambda [\cos^2(\theta/2)]^\beta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad \eta, \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

- no Capítulo 3 apresentamos a relação de estrutura (3.1) satisfeita pelos polinômios ortogonais na circunferência unitária, ou seja,

$$A(z)\Phi'_n(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z), \quad n \geq 2,$$

onde os coeficientes $\mathfrak{t}_n$, $\mathfrak{s}_{n,n-1}$ e $\mathfrak{s}_{n,n}$ são dados em (3.2), (3.3) e (3.4), respectivamente. E como aplicação, também mostramos que os coeficientes de Verblusnky complexos satisfazem as equações de diferenças não lineares (3.9) e (3.10), isto é,

$$[(n-1)\bar{a}_2 + i\bar{b}_2]\alpha_n + [(n-1)\bar{a}_0 - i\bar{b}_0]\alpha_{n-2} = -(n\bar{a}_1 - \gamma_n\bar{a}_0 - \bar{\gamma}_n\bar{a}_2) \frac{\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geq 2$$

e

$$\begin{aligned} & [(n-1)\bar{a}_2 + i\bar{b}_2] \frac{\alpha_n}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} + [(n-1)\bar{a}_0 - i\bar{b}_0]\alpha_{n-2} \\ & = -\left\{ [i\bar{b}_0 - (n+1)\bar{a}_0]\alpha_{n-1}\bar{\alpha}_n - i\bar{b}_1 + (n+1)\bar{a}_1 - 2\gamma_n\bar{a}_0 \right\} \frac{\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

onde γ_n é dado em (1.7).

- no Capítulo 4 foram apresentadas relações diferenciais para os polinômios ortogonais na circunferência unitária associados as funções peso (1.21) e (1.25), este estudo foi realizado utilizando o problema de Riemann-Hilbert, esta abordagem tem muitas vantagens, uma delas é de determinar estes operadores sem recorrer à ortogonalidade, pois ela está implícita no método. Considerando a função peso (1.25) e Y_n a única solução do problema de Riemann-Hilbert na circunferência unitária, temos os seguintes operadores diferenciais de primeira e de segunda ordem, respectivamente,

$$z(1-z)Y'_n = \tilde{M}_n Y_n - z(1-z)Y_n C'_n C_n^{-1}$$

e

$$z(1-z)Y''_n + Y'_n[2z(1-z)C'_n C_n^{-1} + (1-2z)I_2] + Y_n[z(1-z)C''_n C_n^{-1} + (1-2z)C'_n C_n^{-1}] = \left[\tilde{M}'_n + \frac{\tilde{M}_n^2}{z(1-z)} \right] Y_n,$$

onde C_n e $\tilde{M}_n$ são dadas em (4.18) e (4.32), associadas a esta função peso. Como consequência direta destes operadores, sejam $\{G_n\}_{n \geq 0}$ funções introduzidas por Deift, Its e Krasowsky em [18], dadas por (4.4), então a equação diferencial de primeira ordem satisfeita por estas funções é dada por

$$z(1-z)G'_n(z) = -[bz + (\bar{b} + n)|\alpha_{n-1}|^2]G_n(z) + (\bar{b} + n)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\bar{\alpha}_{n-1}G_{n-1}^*(z)$$

e a equação diferencial de segunda ordem

$$z(1-z)G''_n(z) + [(b-n-2)z + (1+n+\bar{b})]G'_n(z) + b(1+n)G_n(z) = 0.$$

Além disso, são apresentadas, no Capítulo 4, equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para Φ_n , Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^* .

5.2 Trabalhos futuros

Nesta seção são apresentadas direções para dar continuidade ao trabalho.

Relação de estrutura e equações de diferenças

Como trabalho futuro pretendemos estender os resultados apresentados nos Capítulos 2 e 3, ou seja, investigar funções peso semiclássicas na circunferência unitária que satisfazem uma equação do tipo Pearson em que os polinômios A e B em (5.1) são polinômios de grau maior que ou igual a 3. Quando A e B são polinômios de grau 3, a relação de estrutura satisfeita pelos polinômios ortogonais mônicos terá seis termos. Como aplicação, é esperado encontrar equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky e, se possível, relacionar com as equações de Painlevé. Desta forma, temos os seguintes problemas em aberto.

- Determinar as funções peso semiclássicas na circunferência unitária que satisfazem a equação do tipo Pearson (5.1) com A e B polinômios de grau maior que ou igual a 3.

- Encontrar relações de estrutura para polinômios ortogonais mônicos associados a essas funções peso. Acreditamos que, quando os polinômios A e B em (5.1) tiverem grau exatamente 3 e forem denotados por $A(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ e $B(z) = b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0$, a relação de estrutura terá a seguinte forma.

$$\begin{aligned} A(z)\Phi'_n(z) = & na_3\Phi_{n+2}(z) + \mathfrak{s}_{n,n+1}\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) \\ & + \mathfrak{p}_{n,n}z\Phi_n^*(z) + \mathfrak{t}_{n,n}\Phi_n^*(z), \quad n \geq 3, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{n,n} &= (ib_3 + 2a_3)\bar{\alpha}_n, \\ \mathfrak{t}_{n,n} &= (ib_3 + a_3)\bar{\alpha}_{n+1}(1 - |\alpha_n|^2) + (ib_2 + a_2 + a_3\gamma_{n+1})\bar{\alpha}_n, \\ \mathfrak{s}_{n,n-1} &= (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2), \\ \mathfrak{s}_{n,n} &= ib_1 + (n+1)a_1 - a_0\bar{\gamma}_n - (ib_0 + (n+1)a_0)\alpha_n\bar{\alpha}_{n-1}, \\ \mathfrak{s}_{n,n+1} &= na_2 + a_3[(n-1)\gamma_n - n\gamma_{n+2}] + (ib_3 + 2a_3)\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

- Encontrar as equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky.

Problema de Riemann-Hilbert na circunferência unitária

Um outro trabalho futuro que pretendemos realizar é continuar desenvolvendo a análise feita no Capítulo 4 para outras funções peso na circunferência unitária, em especial, para a nova função peso encontrada no Capítulo 2. Utilizando o método de Riemann-Hilbert, pretendemos encontrar equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para os polinômios ortogonais relativamente a essa função peso. Ademais, também pretendemos estender os resultados apresentados no Capítulo 4 à ortogonalidade matricial na circunferência unitária, na literatura existem poucos exemplos deste caso. Em síntese, temos os seguintes problemas em aberto.

- Encontrar operadores diferenciais de primeira e de segunda ordem associados a função peso (2.21), isto é,

$$w(\theta) = e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^\lambda[\cos^2(\theta/2)]^\beta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } \eta, \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Estender os resultados estudados no Capítulo 4 à ortogonalidade matricial na circunferência unitária.

Referências

- [1] M. Ablowitz, A. Fokas, Complex Variables: Introduction and Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1997
- [2] J. Baik, Riemann–Hilbert problems for last passage percolation, In: K. McLaughlin and X. Zhou, (ed.) Recent Developments in Integrable Systems and Riemann–Hilbert Problems. 2003 p. 1–21. (Contemporary Mathematics, v. 326).
- [3] P. Bleher, and A. Its, Double scaling limit in the random matrix model: the Riemann–Hilbert approach, Comm. Pure Appl. Math. 56, (2003), 433–516.
- [4] L. Boelen, W. Van Assche, Discrete Painlevé equations for recurrence coefficients of semiclassical Laguerre polynomials. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, v. 138, n. 4, p. 1317–1331, 2010.
- [5] S. Bonan, D. Lubinsky, P. Nevai, Orthogonal polynomials and their derivatives II, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987) 1163–1176.
- [6] C. F. Bracciali, K. S. Rampazzi, L. L. Silva Ribeiro, On semi-classical weight functions on the unit circle. J. Approx. Theory, 295, art. 105957, 2023.
- [7] A. Branquinho, A note on semi-classical orthogonal polynomials, Bull. Belg. Math. Soc., 3 (1996) 1–12.
- [8] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, A. Fradi, and M. Mañas, Matrix Jacobi bi-orthogonal polynomials via Riemann–Hilbert problem, Proc. Am. Math. Soc., (2022) 193–208.
- [9] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, A. Fradi, M. Mañas, Matrix orthogonal polynomials: a Riemann–Hilbert approach. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.19954>.
- [10] A. Branquinho, M. N. Rebocho, Structure relations for orthogonal polynomials on the unit circle, Linear Algebra Appl., 436 (2012) 4296–4310.
- [11] A. Cachafeiro, C. Suárez, About semiclassical polynomials on the unit circle corresponding to the class (2,2), J. Comput. Appl. Math., 85 (1997) 123–144.
- [12] G. Cassatella-Contra, M. Mañas, Riemann–Hilbert problem and matrix discrete Painlevé II systems, Stud. Appl. Math., (2019) 1–43.
- [13] G. A. Cassatella-Contra, M. Mañas, Matrix biorthogonal polynomials in the unit circle: Riemann–Hilbert problem and matrix discrete Painleve II system. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1601.07236>.

-
- [14] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach, 1978.
 - [15] T. Claeys, A. B. J. Kuijlaars, M. Vanlessen, Multi-critical unitary random matrix ensembles and the general Painlevé II equation, *Ann. of Math.* 168 (2008), 601–642.
 - [16] P. Clarkson, K. Jordaan, A. Kelil, A generalized Freud weight. *Stud. Appl. Math*, Cambridge, v. 136, n. 3, p. 288–320, 2016.
 - [17] P. Deift, *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach*, Courant Lectures Notes 3, New York University, 1999.
 - [18] P. Deift, A. Its, I. Krasovsky, Asymptotics of Toeplitz, Hankel, and Toeplitz+Hankel determinants with Fisher-Hartwig singularities. *Ann. Math.*, 174 (2011) 1243–1299.
 - [19] P. Deift, A. R. Its, X. Zhou, A Riemann-Hilbert approach to asymptotic problems arising in the theory of random matrix models and also in the theory of integrable statistical mechanics, *Ann. of Math.* 146 (1997) 149–235.
 - [20] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights, *Comm. Pure Appl. Math.* 52 (12) (1999) 1491–1552.
 - [21] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Uniform asymptotics for orthogonal polynomials with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory, *Comm. Pure Appl. Math.* 52 (12) (1999) 1335–1425.
 - [22] P. A. Deift and X. Zhou, A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, *Ann. Math.*, 137 (1993) 295–368.
 - [23] P. Drazin, R. Johnson, *Solitons: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
 - [24] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, Classics in Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia, 2005
 - [25] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer–Verlag, New York, 2005.
 - [26] G. Filipuk, W. Van Assche, L. Zang, The recurrence coefficients of semi-classical Laguerre polynomials and the fourth Painlevé equation. *J. Phys. A Math. Theor.*, Bristol, v. 45, n. 20, p. 1–13, 2012.
 - [27] A.S. Fokas, A.R. Its, A.V. Kitaev, The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity, *Comm. Math. Phys.* 147 (1992), no. 2, 395–430.
 - [28] P. Freire, *Educação e mudança*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.
 - [29] G. Freud, On the coefficients in the recursion formulae of orthogonal polynomials. *Proc. R. Irish Acad. Sect., A* 76 (1976), 1–6.
 - [30] F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*. Pergamon Press, 1966.

-
- [31] E. Hendriksen, H. Van Rossum, Semi-classical orthogonal polynomials. In: C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni, A. Ronveaux, (ed.) *Polynômes orthogonaux et applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1985. p. 354–361. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1171).
 - [32] M.E.H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 98, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
 - [33] M.E.H. Ismail, N.S. Witte, Discriminants and functional equations for polynomials orthogonal on the unit circle, *J. Approx. Theory*, 110 (2001) 200–228.
 - [34] D. Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, The Carus Mathematical Monographs 6, Math. Assoc. Amer., 1941.
 - [35] R. Koekoek, P.A. Lesky, R.F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-Analogues*. 1 ed. Berlin: Springer Monographs in Mathematics , 2010.
 - [36] A. P. Magnus, On Freud’s equations for exponential weights. *J. Approx. Theory*, 46 (1986) 64–99.
 - [37] A. P. Magnus, Special Topics in Approximation Theory: semi-classical orthogonal polynomials on the unit circle, MAPA 3072A, Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgium. 2013 (manuscript).
 - [38] F. Marcellán, A. Branquinho, J Petronilho Classical orthogonal polynomials: A functional approach, *Acta Appl. Math.*, 34, (1994) 283–303.
 - [39] F. Marcellán, A. Sri Ranga, Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle and coherent pairs of measures of the second kind, *Results Math.*, 71 (2017) 1127–1149.
 - [40] P. Maroni, Sur quelques espaces de distributions qui sont des formes linéaires sur l’espace vectoriel des polynômes, (French), in *Orthogonal Polynomials and Applications* (Bar-le-Duc, 1984), 184–194, Lecture Notes in Math., 1171, Springer, Berlin, 1985.
 - [41] P. Maroni, Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques, in *Orthogonal Polynomials and their Applications* (Erice, 1990), 95–130, IMACS Ann. Comput. Appl. Math., 9, Baltzer, Basel, 1991.
 - [42] A. Martínez Finkelshtein, Szegő polynomials: a view from the Riemann-Hilbert window, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 25 (2006), 369–392.
 - [43] V. Periwal, D. Shevitz, Unitary-matrix models as exactly solvable string theories, *Phys. Rev. Letters*, 64 (1990) 1326–1329.
 - [44] M.N.V. Rebocho, Polinómios ortogonais do tipo Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 2008. Tese de doutorado.
 - [45] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

-
- [46] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2: Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 54, Part 2. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2005.
 - [47] G. Szegő. Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. Math. Z., 6:167–202, 1920.
 - [48] G. Szegő. Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen, II. Math. Z., 9:167–190, 1921.
 - [49] G. Szegő, Orthogonal Polynomials. Providence: American Mathematical Society, 1975. (American Mathematical Society Colloquium Publications).
 - [50] A. Sri Ranga, Szegő polynomials from hypergeometric functions, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (2010) 4259–4270.
 - [51] C. Suárez, About semiclassical orthogonal polynomials of the class $(2, 2)$, J. Comput. Appl. Math. 131 (2001) 457–472.
 - [52] C. Suárez, On a family of semiclassical orthogonal polynomials on the unit circle belonging to the class (p, p) , Integral Transforms Spec. Funct., 19 (2008) 333–349.
 - [53] W. Van Assche, Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations. Cambridge Univ. Press, 2018.