UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Polinômios Palindrômicos com Zeros somente Reais

Eloiza do Nascimento Fazinazzo

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Julho de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Polinômios Palindrômicos com Zeros somente Reais

Eloiza do Nascimento Fazinazzo

Orientador: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Julho de 2016

Aos meus pais, Roberto e Maria
família e amigos
Dedico

FICHA CATALOGRÁFICA

F296p

Fazinazzo, Eloiza do Nascimento.
Polinômios palindrômicos com zeros somente reais / Eloiza do Nascimento Fazinazzo. - Presidente Prudente : [s.n.], 2016
76 f.

Orientadora: Vanessa Avansini Botta Pirani
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Polinômios palindrômicos. 2. Zeros reais. 3. Transformada de Chebyshev. I. Botta Pirani, Vanessa Avansini. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI
ORIENTADORA

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
UNESP/FCT

Fernando R. Rafaeli
Prof. Dr. FERNANDO RODRIGO RAFAELI
UFU

Eloiza do Nascimento Fazinazzo
ELOIZA DO NASCIMENTO FAZINAZZO

Presidente Prudente (SP), 28 de julho de 2016.

Resultado: **APROVADA**.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mostrar o melhor caminho a percorrer.

Aos meus pais Roberto e Maria que nunca mediram esforços para me manter nos estudos.

À minha família, irmãos, cunhados, sobrinha e namorado, por palavras de apoio que sempre me deram e por me acolher nos momentos difíceis.

À minha orientadora, Prof. Dra. Vanessa, pela amizade, sabedoria, ensinamento, compreensão e por me acolher como sua orientanda de mestrado. Parabéns por ser a excelente profissional que é.

A todos os amigos que convivo desde a graduação, que sempre me apoiaram e incentivaram a não desistir dos meus desejos.

Ao Prof. Dr. Fernando Rafaeli, pela orientação durante a graduação e pelos ensinamentos que me proporcionou.

Aos professores da graduação e da pós-graduação, pelos ensinamentos durante toda a caminhada.

Aos meus amigos do mestrado pelo incentivo, dicas e momentos de estudos.

À FAPESP/CAPES processo n° 2014/06785-2, pelo auxílio financeiro.

"Para aqueles que tem fé,
nenhuma explicação é necessária.
Para aqueles sem fé,
nenhuma explicação é possível."
São Tomás de Aquino

Resumo

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre o comportamento dos zeros de polinômios palindrômicos, com foco nos zeros reais. Condições necessárias e suficientes para que um polinômio palindrômico com coeficientes reais tenha somente zeros reais são estabelecidas.

Palavras-Chave: *Polinômios Palindrômicos, Zeros Reais, Transformada de Chebyshev.*

Abstract

In this work is presented a study of the behavior of the zeros of palindromic polynomials, focusing on real zeros. Necessary and sufficient conditions for a palindromic polynomial with real coefficients has only real zeros are established.

Keywords: *Palindromic Polynomials, Real Zeros, Chebyshev Transform.*

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O comportamento dos zeros dos polinômios algébricos é uma das subáreas clássicas da Análise. Tal assunto é muito abordado na Matemática e atualmente as funções polinomiais são temas de muita investigação, tanto na área computacional quanto na teórica.

Considere o polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_n \neq 0$ com $a_i \in \mathbb{C}$, e associado a $P(z)$ seja $P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i z^{n-i}$. Se existir $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, tal que $P^*(z) = uP(z)$, então $P(z)$ é dito *self-inversive*.

Em particular, se $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$, então $P(z)$ é um polinômio palindrômico. Neste caso, os coeficientes de $P(z)$ satisfazem $a_{n-i} = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Se $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, observe que $P^*(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$.

No decorrer do texto será utilizada a nomeclatura polinômio palindrômico (um histórico sobre o uso deste termo pode ser encontrado em [11]) para representar a classe de polinômios $P(z)$ tal que $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$. Porém, alguns autores utilizam outras nomeclaturas, como, por exemplo, Kim e Park [12] referem-se a polinômios auto-recíprocos e Kwon [13] e Lakatos [14] utilizam polinômios recíprocos.

O comportamento dos zeros de polinômios palindrômicos no círculo unitário é um assunto muito abordado na literatura ([14], [15], [21]). Porém, quando se trata do comportamento dos zeros reais, tal assunto é pouco explorado. Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar condições necessárias e suficientes para que um polinômio palindrômico com coeficientes reais tenha todos os seus zeros reais.

Para alcançar tal objetivo, foi necessário o estudo de vários resultados preliminares, organizados em capítulos, cujo detalhamento é apresentado a seguir.

No segundo capítulo são apresentados resultados clássicos de polinômios, resultados sobre o comportamento dos zeros de polinômios *self-inversive*, além da transformada de Chebyshev.

O terceiro capítulo explora como assunto principal zeros reais de polinômios. Para isso, foi estudada a regra de sinais de Descartes, que dá a estimativa do número de zeros positivos de um polinômio, e também os teoremas de Sturm, Hermite e dos menores principais, onde foram utilizadas as matrizes de Hankel e Hurwitz.

No quarto capítulo, através da transformada de Chebyshev, é apresentado um novo resultado, assim como resultados obtidos através da aplicação dos polinômios palindrômicos na teoria estudada anteriormente. Assim, foram encontradas condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes de um polinômio palindrômico para se obter somente zeros reais.

No quinto e último capítulo são apresentadas as considerações finais do trabalho, juntamente com uma proposta de trabalho futuro, que está relacionada ao resultado encontrado, mudando apenas a necessidade de não encontrar somente os zeros reais ou zeros no círculo unitário, mas sim, encontrar zeros complexos fora do círculo unitário.

O software utilizado para realizar alguns cálculos e plotar os gráficos foi o *Mathematica*.

Capítulo

2

Resultados Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados básicos sobre a teoria de polinômios, definições de polinômios *self-inversive* e palindrômicos, resultados sobre zeros de polinômios *self-inversive* e a transformada de Chebyshev. Tais resultados e definições encontram-se principalmente nas referências [10], [14], [16] e [17].

2.1 Resultados Básicos

Nesta seção serão apresentados alguns resultados básicos sobre a teoria de polinômios, que podem ser encontrados em [8], [10] e [18].

Dada uma sequência de números complexos $(a_0, a_1, ..., a_n)$, $n \geq 1$, considere a função $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$. A função P é denominada função polinomial ou polinômio associado a sequência dada. Os números $a_0, a_1, ..., a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1 z, ..., a_n z^n$ são chamadas termos do polinômio P. Considerando $a_n \neq 0$, a_n recebe o nome de coeficiente dominante.

Proposição 1 *Seja* $P(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *um polinômio de grau* n*,* $n \geq 1$*, com coeficientes complexos* a_i*,* $i = 0, 1, ..., n$*.*

(i) α *é zero de* $P(z)$ *se, e somente se,* $(z - \alpha)$ *divide* $P(z)$*.*

(ii) *Se* α *é zero de* $P(z)$*, então existe um* $m \geq 1$ *tal que* $(z - \alpha)^m$ *divide* $P(z)$*. Assim,* $P(z) = (z - \alpha)^m Q(z)$ *com* $Q(z)$ *um polinômio complexo de grau* $n - m$ *onde* $Q(\alpha) \neq 0$*. Neste caso, diz-que* α *é zero de* $P(z)$ *de multiplicidade* m*. Se* $m = 1$*,* α *é dito zero simples de* $P(z)$*.*

(iii) *Se* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *forem zeros de* $P(z)$ *dois a dois distintos, então o polinômio* $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_k)$ *divide* $P(z)$*.*

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio não-nulo* $P(z)$ *de grau* n*,* $n \geq 1$*, com coeficientes complexos* a_i*, i=0,1,...,n, tem exatamente* n *zeros complexos,* $z_1, ..., z_n$*.*

Este teorema garante que toda equação polinomial não constante com coeficientes complexos possui todas as soluções em $\mathbb{C}$. A seguir será apresentado um resultado como consequência imediata do Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 2 (Teorema da Decomposição) *Seja* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *um polinômio de grau* n*,* $n \geq 1$*, com coeficientes complexos* a_i*,* $i = 0, 1, ..., n$*. O polinômio* $P(z)$ *pode ser unicamente representado por* $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$*, onde* $z_1, z_2, ..., z_n$ *são zeros complexos do polinômio* $P(z)$*.*

Demonstração. A prova deste teorema será dada através de indução sobre o grau n de $P(z)$.

Considerando $n = 1$ o resultado é imediato, pois se $P(z) = a_1 z + a_0$ então $z_1 = -\dfrac{a_0}{a_1}$ é zero de $P(z)$.

Desta forma, $P(z)$ pode ser escrito como $P(z) = a_1\left(z - \left(-\dfrac{a_0}{a_1}\right)\right) = a_1(z - z_1)$.

Suponha que o resultado vale para $n - 1$. Será provada a validade para n. De fato, se $z_1 \in \mathbb{C}$ é um zero de $P(z)$, a Proposição 1 garante a existência de um polinômio $Q(z)$, com coeficientes complexos, tal que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$. Note que $Q(z)$ tem grau $n - 1$ com coeficiente dominante a_n. Portanto, por hipótese de indução, existem $z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tais que $Q(z) = a_n(z - z_2)\ldots(z - z_n)$.

Portanto, $P(z) = (z - z_1)Q(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$. ■

2.2 Relação entre Coeficientes e Raízes

Por volta do século XVI, muitos matemáticos ocidentais desenvolveram estudos a fim de estabelecer relações entre as raízes e coeficientes de uma equação quadrática. Em 1579, na obra *Canon Mathematicus seu ad triangula cum appendicibus*, Viète[1] apresentou as fórmulas de Viète, no qual trabalhava com relações entre coeficientes e raízes e então determinava raízes para essas equações, porém as raízes encontradas eram apenas números positivos. O problema para essas relações era a presença de números negativos encontrados como raízes, o que não era aceito pelos estudiosos. Foi Girard[2] que desenvolveu um método capaz de determinar as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial, no caso geral. Maiores detalhes históricos podem ser encontrados em [6], fonte da qual foram obtidas tais informações.

Dada a equação polinomial

$$P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 = 0,$$

com $a_n \neq 0$, cujas raízes são $z_1, ..., z_n$. Pelo Teorema da Decomposição segue que:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n(z - z_1)... + (z - z_n) \\ &= a_n z^n - a_n \underbrace{(z_1 + ... + z_n)}_{S_1} z^{n-1} \\ &\quad + a_n \underbrace{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + ... + z_{n-1} z_n)}_{S_2} z^{n-2} \\ &\quad + ... + (-1)^h a_n S_h z^{n-h} + ... + (-1)^n a_n \underbrace{(z_1 z_2 ... z_n)}_{S_n}. \end{aligned}$$

[1]François Viète (1540-1603) nasceu em Fontenay-le-Comte, na França. Cursou advocacia na Universidade de Poitiers. Embora nunca tenha trabalhado como cientista ou matemático profissional, sempre esteve envolvido em estudos matemáticos ou astronômicos. Viète trabalhou com trigonometria, álgebra e geometria.

[2]Albert Girard (1595-1632), matemático francês que aos 22 anos entrou para a Universidade de Leiden. Girard desenvolveu estudos na álgebra, trigonometria e aritmética.

Logo, comparando a expansão anterior com os coeficientes a_i, $i = 0, 1, ..., n$, de $P(z)$, segue que

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 + ... + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sigma_1 \\
S_2 &= z_1z_2 + z_1z_3 + ... + z_{n-1}z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sigma_2 \\
S_3 &= z_1z_2z_3 + z_1z_3z_4 + ... + z_{n-2}z_{n-1}z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} = \sigma_3 \\
&\vdots \\
S_h &= z_1z_2 \dots z_h + z_1z_3 \dots z_h z_{h+1} + \dots + z_{n-(h-1)} \dots z_{n-1}z_n = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} = \sigma_h \\
&\vdots \\
S_n &= z_1z_2...z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = \sigma_n
\end{aligned}$$

e então encontra-se as relações entre coeficientes e raízes da equação polinomial $P(z) = 0$.

2.3 Polinômios *Self-Inversive* e Palindrômicos

Nesta seção serão apresentadas definições de polinômios *self-inversive* e palindrômicos, além de exemplificações para a melhor compreensão destas teorias. Estes resultados podem ser encontrados na referência [17].

Seja $z \mapsto P(z)$ um polinômio de grau n, $n \geq 1$, dado por

$$P(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j),$$

cujos zeros são $z_1, z_2, ..., z_n$ e $a_i \in \mathbb{C}$.

Definição 1 *Associado ao polinômio P(z), considere o polinômio $P^*(z)$, dado por*

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + ... + \bar{a}_n = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i z^{n-i} = \bar{a}_0 \prod_{k=1}^{n} (z - z_k^*),$$

cujos zeros $z_k^* = \dfrac{1}{\bar{z}_k}$ são os inversos conjugados dos zeros de z_k de $P(z)$.

Exemplo 1 *Seja $P(z) = z^2 + 2z + 2$, cujos zeros são $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1 - i$. Logo, o polinômio $P^*(z)$ será dado por*

$$P^*(z) = z^2 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = 1 + 2z + 2z^2,$$

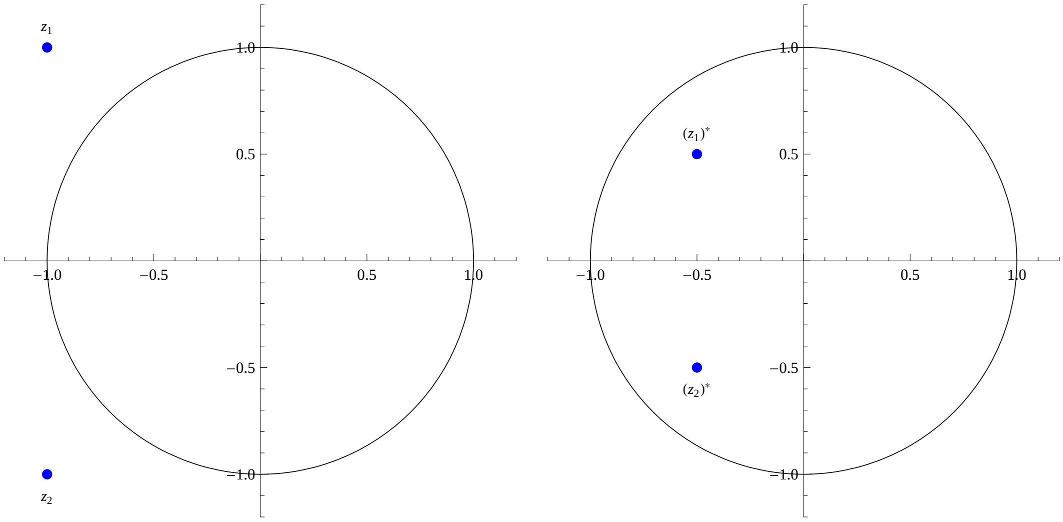
cujos zeros são $z_1^* = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$ e $z_2^* = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$.

Observe que

$$z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \;\; e \;\; z_2^* = \frac{1}{\bar{z}_2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2},$$

ou seja, satisfaz $z_k^* = \dfrac{1}{\bar{z}_k}$, conforme a definição de $P^*(z)$.

Vale observar que realmente os zeros do polinômio $P(z)$ são os inversos conjugados aos zeros de $P^*(z)$ com relação ao círculo unitário, como mostram as Figuras 2.1 (a) e (b).



(a) (b)

Figura 2.1: Representação dos zeros dos polinômios **(a)** $P(z) = z^2 + 2z + 2$ e **(b)** $P^*(z) = 2z^2 + 2z + 1$.

Definição 2 (Polinômio *Self-Inversive*) *Dado* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *um polinômio de grau* n*. Se existir* $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, *tal que* $P^*(z) = uP(z)$, *então* $P(z)$ *é dito self-inversive.*

Exemplo 2 *Sejam* $P(z) = ((1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i)z^2 + (3\sqrt{3} - 3i)z + (2+2i)$ *um polinômio e* $u = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. *Será provado que* $P(z)$ *é um polinômio self-inversive.*

Observe que

$$|u| = \left|\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1.$$

Assim,

$$P^*(z) = z^2 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = (2-2i)z^2 + (3\sqrt{3} + 3i)z + ((1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i),$$

e, além disso,

$$\begin{array}{rcl} uP(z) & = & (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)\left[((1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i)z^2 + (3\sqrt{3} - 3i)z + (2+2i)\right] \\ & = & (2-2i)z^2 + (3\sqrt{3} + 3i)z + ((1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i). \end{array}$$

Logo, $|u| = 1$ *e* $P^*(z) = uP(z)$. *Portanto,* $P(z)$ *é self-inversive.*

Vale observar na Figura 2.2 a simetria entre os zeros do polinômio self-inversive $P(z)$ *com relação ao círculo unitário, onde* $z_1 = -0,37 - 1,37i$ *e* $z_2 = -0,18 - 0,68i$.

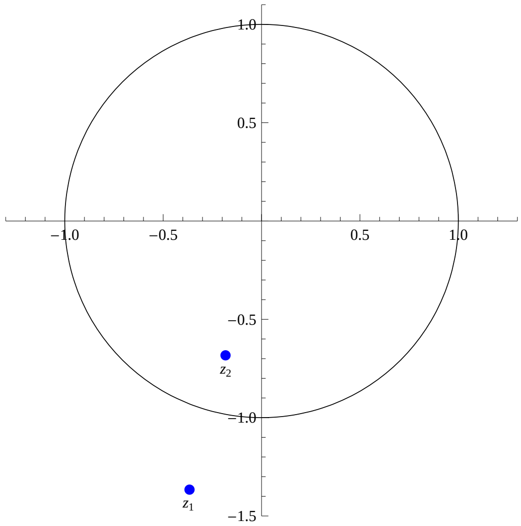


Figura 2.2: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = ((1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i)z^2 + (3\sqrt{3} - 3i)z + (2+2i)$.

Observação 1 *Se um polinômio $P(z)$ de grau n com zeros $z_1, z_2, ..., z_n$ é self-inversive então*

$$\{z_1, z_2, ..., z_n\} = \left\{\frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}, ..., \frac{1}{\bar{z}_n}\right\}.$$

Exemplo 3 *Seja $Q(z) = 2z^4+6z^3+9z^2+6z+2$ um polinômio cujos zeros são $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$, $z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ e $z_4 = -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$.*

Seja

$$Q^*(z) = z^4\overline{Q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = 2z^4+6z^3+9z^2+6z+2.$$

Observe que $Q(z) = Q^*(z)$. Logo $z_1^* = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$, $z_2^* = -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$, $z_3^* = -1+i$ e $z_4^* = -1-i$. Segue ainda que

$$\begin{aligned} z_1^* &= \frac{1}{\bar{z}_1} = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ z_2^* &= \frac{1}{\bar{z}_2} = -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} \\ z_3^* &= \frac{1}{\bar{z}_3} = -1+i \\ z_4^* &= \frac{1}{\bar{z}_4} = -1-i, \end{aligned}$$

ou seja, $Q(z)$ e $Q^*(z)$ são polinômios que satisfazem $\{z_1, z_2, ..., z_n\} = \left\{\frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}, ..., \frac{1}{\bar{z}_n}\right\}$, onde $z_1 = z_3^* = \frac{1}{\bar{z}_3}$, $z_2 = z_4^* = \frac{1}{\bar{z}_4}$, $z_3 = z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1}$ e $z_4 = z_2^* = \frac{1}{\bar{z}_2}$.

Portanto, $Q(z)$ é self-inversive.

A figura abaixo representa os zeros do polinômio self-inversive $Q(z)$, ressaltando a simetria entre os zeros do polinômio tanto em relação à reta real quanto ao círculo unitário.

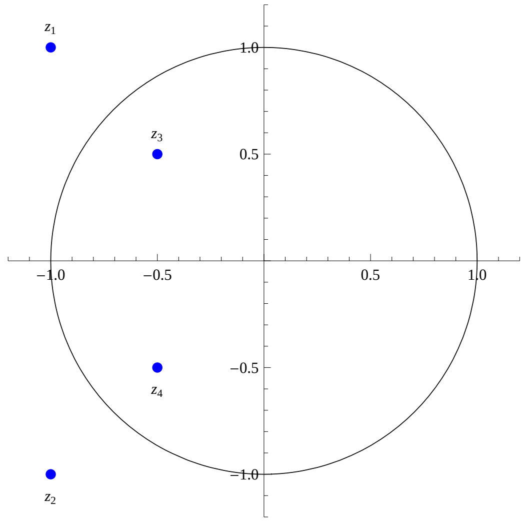


Figura 2.3: Representação dos zeros do polinômio $Q(z) = 2z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 6z + 2$.

Teorema 3 *Se* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *P é self-inversive;*

(ii) $\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ *para cada número complexo z;*

(iii) $\bar{a}_k = u a_{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n$, *onde* $|u| = 1$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Note que

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = z^n \overline{a}_n \prod_{j=1}^{n} \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} - z_j\right)},$$

isto é,

$$\begin{aligned} P^*(z) &= \overline{a}_n \prod_{j=1}^{n} \overline{\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}} - \bar{z} z_j\right)} = \overline{a}_n \prod_{j=1}^{n} (1 - z\overline{z}_j) \\ &= \overline{a}_n (1 - z\overline{z}_1)(1 - z\overline{z}_2)...(1 - z\overline{z}_n) \\ &= \overline{a}_n \left(\overline{z}_1 \left(\frac{1}{\overline{z}_1} - z\right)\right)\left(\overline{z}_2 \left(\frac{1}{\overline{z}_2} - z\right)\right)...\left(\overline{z}_n \left(\frac{1}{\overline{z}_n} - z\right)\right) \\ &= \overline{a}_n (\overline{z}_1 \overline{z}_2 ... \overline{z}_n)\left(\frac{1}{\overline{z}_1} - z\right)\left(\frac{1}{\overline{z}_2} - z\right)...\left(\frac{1}{\overline{z}_n} - z\right). \end{aligned}$$

Agora, utilizando a Observação 1 segue que,

$$\begin{aligned} P^*(z) &= \frac{\bar{a}_n}{z_1 z_2 ... z_n}(z_1 - z)(z_2 - z)...(z_n - z) \\ &= \frac{(-1)^n \bar{a}_n}{z_1 z_2 ... z_n}(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n). \end{aligned}$$

Através da fórmula de Viète segue que

$$P^*(z) = \frac{\bar{a}_n}{a_0} P(z),$$

e assim,

$$\bar{a}_n P(z) = a_0 P^*(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Para pontos em $|z| = 1$ segue que $|P^*(z)| = |P(z)|$. Desta forma, de

$$|\bar{a}_n P(z)| = \left| a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right|,$$

pode-se concluir que $|\bar{a}_n| = |a_0|$. Tem-se que $u = \dfrac{\bar{a}_n}{a_0}$ onde $|u| = 1$. Como $\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, segue que

$$u\,[a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n] = [\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + ... + \bar{a}_0 z^n].$$

Logo, $\bar{a}_k = u a_{n-k}$, para $k = 0, 1, ...n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Note que $P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_0 z^n + ... + \bar{a}_{n-1} z + \bar{a}_n$. Como $\bar{a}_k = u a_{n-k}$ para $k = 0, 1, ...n$, tem-se

$$P^*(z) = u a_n z^n + ... + u a_1 z + u a_0 = u P(z).$$

Sendo $|u| = 1$, segue pela Definição 2 que P é *self-inversive*. ∎

A classe de polinômios definida a seguir será o principal objeto de estudo deste trabalho.

Definição 3 (Polinômio Palindrômico) *$P(z)$ é palindrômico se, e somente se,* $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$.

Exemplo 4 *Seja $P(z) = 3z^3 - 2z^2 - 2z + 3$. Note que*

$$z^3 P\left(\frac{1}{z}\right) = 3 - 2z - 2z^2 + 3z^3.$$

Logo, $z^3 P\left(\frac{1}{z}\right) = 3z^3 - 2z^2 - 2z + 3$, ou seja, $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$. Portanto, $P(z)$ é um polinômio palindrômico.

A partir da Definição 3 determina-se algumas consequências para um polinômio palindrômico $P(z)$.

(i) Considerando $a_i \in \mathbb{R}$, então $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = P^*(z)$, ou seja, $P(z) = P^*(z)$ e, segundo a Definição 2, considerando $u = 1$, segue que $P(z)$ é *self-inversive*. Em outras palavras, todo polinômio palindrômico com coeficientes reais é *self-inversive*.

(ii) Se $P(z)$ é de grau n, tem-se $a_{n-i} = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

(iii) Seja $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, com $a_n \neq 0$. Observe que $z = 0$ não é zero de nenhum polinômio palindrômico. De fato, suponha que $z = 0$ seja um zero de $P(z)$, isto é,

$$P(0) = 0 \Leftrightarrow P(0) = a_n 0^n + \ldots + a_1 0 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0.$$

Porém, pelo item anterior, $a_n = a_0$ e, por hipótese, $a_n \neq 0$. Então, $a_0 \neq 0$. Logo $z = 0$ não é zero de $P(z)$.

(iv) Se z_1 é zero de $P(z)$, então $\dfrac{1}{z_1}$ também será. De fato, suponho z_1 zero de $P(z)$ e utilizando $P(z) = z^n P\left(\dfrac{1}{z}\right)$, segue que

$$P(z_1) = 0 \Rightarrow z_1^n P\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0.$$

Como, pelo item anterior, $z_1 \neq 0$, então $P\left(\dfrac{1}{z_1}\right) = 0$, ou seja, $\dfrac{1}{z_1}$ é zero de $P(z)$.

(v) Se $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, então z_1 e $\bar{z}_1$ são zeros de $P(z)$. Logo, pelo item anterior, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{1}{\bar{z}_1}$ também são zeros de $P(z)$.

2.4 Zeros de Polinômios *Self-Inversive*

Nesta seção serão apresentados resultados sobre zeros de polinômios *self-inversive*. As demonstrações de alguns teoremas, omitidas aqui, podem ser encontradas em [16] e [17].

Teorema 4 *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, um polinômio self-inversive. Então,*

$$\bar{a}_n[nP(z) - zP'(z)] = a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

e $\left|\dfrac{nP(z)}{zP'(z)} - 1\right| = 1$ para cada z em $|z| = 1$.

Teorema 5 *Se $P(z)$ é um polinômio self-inversive, então $P'(z)$ não tem zeros no círculo unitário, exceto os zeros múltiplos de $P(z)$.*

Demonstração. Seja $P(z)$ um polinômio *self-inversive* de grau n com $z_1, z_2, ..., z_n$ zeros simples de $P(z)$. Suponha, por absurdo, que exista ξ um zero de $P'(z)$ de modo que $|\xi| = 1$ e $|\xi| \neq z_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Pelo Teorema 4,

$$\left|\frac{zP'(z)}{nP(z) - zP'(z)}\right| = 1$$

para z em $|z| = 1$. Assim, $1 = \left|\dfrac{\xi P'(\xi)}{nP(\xi) - \xi P'(\xi)}\right| = 0$, o que é absurdo. Portanto, $P'(z)$ não possui zeros em $|z| = 1$.

Agora supondo que $P(z)$ possua um zero r de multiplicidade $m > 1$,

$$P(z) = (z - r)^m Q(z),$$

então

$$P'(z) = m(z-r)^{m-1}Q(z) + (z-r)^m Q'(z).$$

Logo, $P'(z) = (z-r)^{m-1}[mQ(z)+(z-r)Q'(z)]$. Como $mQ(r)+(r-r)Q'(r) = mQ(r) \neq 0$, decorre que r é zero de multiplicidade $m-1$ de $P'(z)$. ■

Teorema 6 *Se o polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, é um polinômio self-inversive, então $P(z)$ tem o mesmo número de zeros em $|z| < 1$ que o polinômio*

$$H_1(z) = [P'(z)]^* = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\bar{a}_{n-k} z^k.$$

Isto é, $P(z)$ e $P'(z)$ possuem o mesmo número de zeros em $|z| > 1$.

Exemplo 5 *Seja $P(z) = 2z^6 - 4z^5 + 1,5z^4 + 2z^3 + 1,5z^2 - 4z + 2$ um polinômio self-inversive com dois zeros em $|z| < 1$, como mostra a Figura 2.4 (a). Segue ainda que $P'(z) = 12z^5 - 20z^4 + 6z^3 + 6z^2 + 3z - 4$ e, desta forma, $[P'(z)]^* = -4z^5 + 3z^4 + 6z^3 + 6z^2 - 20z + 12$. Observando a Figura 2.4 (b) segue que $[P'(z)]^*$ possui dois zeros em $|z| < 1$, isto é, $P(z)$ e $[P'(z)]^*$ possuem o mesmo número de zeros em $|z| < 1$. Os zeros de $P(z)$ são $z_1 = -0,77 - 0,63i$, $z_2 = -0,77 + 0,63i$, $z_3 = 0,64 - 0,39i$, $z_4 = 0,64 + 0,39i$, $z_5 = 1,13 - 0,69i$ e $z_6 = 1,13 + 0,69i$. Os zeros de $P'(z)$ são $z_1 = -1,16 - 1,06i$, $z_2 = -1,16 + 1,06i$, $z_3 = 0,77 - 0,44i$, $z_4 = 0,77 + 0,44i$ e $z_5 = 1,52$.*

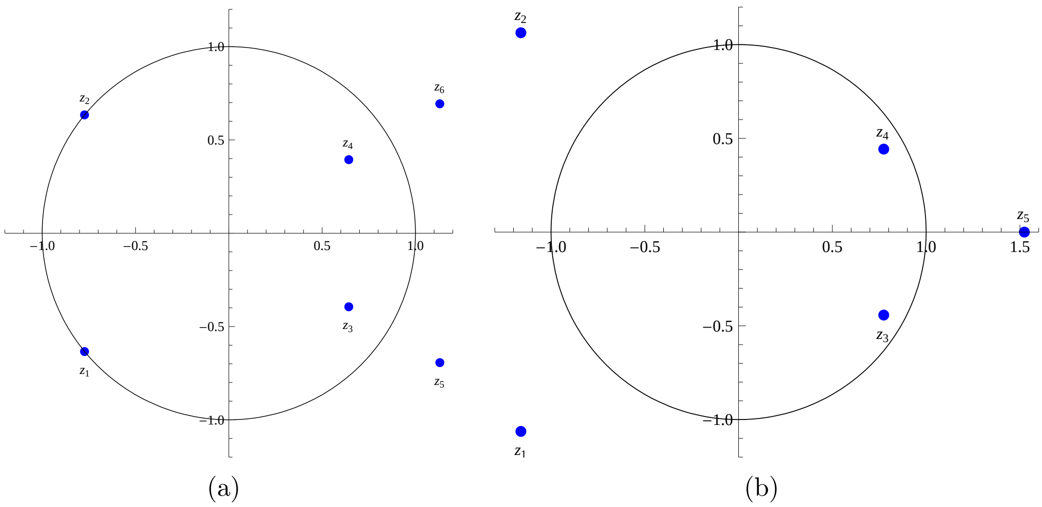


Figura 2.4: Representação dos zeros dos polinômios **(a)** $P(z) = 2z^6 - 4z^5 + 1,5z^4 + 2z^3 + 1,5z^2 - 4z + 2$ e **(b)** $[P'(z)]^* = -4z^5 + 3z^4 + 6z^3 + 6z^2 - 20z + 12$.

Teorema 7 (Cohn) *Seja $P(z)$ um polinômio self-inversive de grau n. Suponha que $P(z)$ tenha exatamente τ zeros no círculo unitário (contando a multiplicidade) e exatamente ν pontos críticos em $|z| = 1$ (contando a multiplicidade). Então*

$$\tau = 2(\nu + 1) - n.$$

Para maiores informações ver [12] apud [4]. Como consequência deste resultado, segue o Teorema 8.

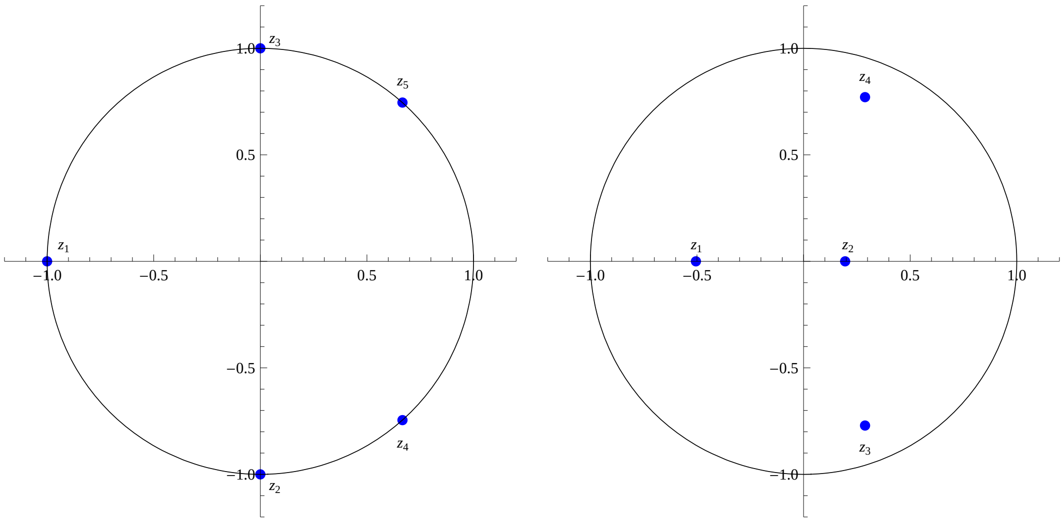
Teorema 8 *Seja* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$*,* $a_n \neq 0$*, um polinômio de grau* n*.* $P(z)$ *possui todos os seus zeros em* $|z| = 1$ *se, e somente se,* $P(z)$ *é self-inversive e todos os zeros de* $P'(z)$ *estão em* $|z| \leq 1$*.*

Exemplo 6 *Seja* $P(z) = 3z^5 - z^4 + 2z^3 + 2z^2 - z + 3$ *um polinômio que possui todos os seus zeros em* $|z| = 1$*, como mostra a Figura 2.5 (a). Segue que* $P(z)$ *é self-inversive, cujos zeros são* $z_1 = -1$*,* $z_2 = -i$*,* $z_3 = i$*,* $z_4 = 0,67 - 0,75i$ *e* $z_5 = 0,67 + 0,75i$*. De fato,*

$$P^*(z) = z^5 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = 3 - z + 2z^2 + 2z^3 - z^4 + 3z^5,$$

ou seja, $P^*(z) = uP(z)$ *com* $u = 1$*.*

Note que $P'(z) = 15z^4 - 4z^3 + 6z^2 + 4z - 1$*, sendo que todos os seus zeros estão em* $|z| \leq 1$*, como mostra a Figura 2.5 (b), exemplificando o teorema anterior. Os zeros de* $P'(z)$ *são* $z_1 = -0,5$*,* $z_2 = 0,19$*,* $z_3 = 0,29 - 0,77i$ *e* $z_4 = 0,29 + 0,77i$*.*



(a) (b)

Figura 2.5: Representação dos zeros dos polinômios **(a)** $P(z) = 3z^5 - z^4 + 2z^3 + 2z^2 - z + 3$ e **(b)** $P'(z) = 15z^4 - 4z^3 + 6z^2 + 4z - 1$.

Convém ressaltar que todos os resultados sobre zeros de polinômios *self-inversive* apresentados nessa seção são também válidos para polinômios palindrômicos com coeficientes reais.

2.5 Transformada de Chebyshev

Nesta seção será apresentada uma técnica de encontrar zeros de um polinômio palindrômico através da transformada de Chebyshev. Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [3] e [14].

Definição 4 (Sequência de Polinômios Ortogonais) *A sequência de polinômios* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) com relação à função peso* $\omega(x)$ *no intervalo* (a, b) *se*

(i) *$P_n(x)$ é de grau exatamente n, $n \geq 0$.*

(ii) $\langle P_n, P_m\rangle = \displaystyle\int_a^b P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \rho_n \neq 0, & n = m \end{cases}.$

Note que, neste caso, $\rho_n > 0$, pois $P_n^2(x)\omega(x) \geq 0$ em (a,b).

Definição 5 (Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie) *O polinômio de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ é dado por*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.1}$$

Os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Usando a seguinte relação trigonométrica

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

e fazendo $x = \cos\theta$ na equação (2.1), obtém-se a relação de recorrência de três termos

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

Definição 6 *Seja $P(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2n} a_j z^j$, onde $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{R}$ e $a_j = a_{2n-j}$, $j = 0,1,\ldots,n-1$. P(z) é definido como um polinômio semi-recíproco real de grau no máximo $2n$. Segundo [14], se $a_{2n} \neq 0$, $P(z)$ é chamado polinômio recíproco real de grau $2n$, ou seja, é um polinômio palindrômico real de grau $2n$.*

Denota-se por $\mathcal{R}_{2n}$ o conjunto de todos os polinômios semi-recíprocos reais de grau no máximo $2n$.

Se $P(z) \in \mathcal{R}_{2n}$, com $P(z)$ não nulo, então existe $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, tal que

$$a_{2n} = a_{2n-1} = \ldots = a_{n+k+1} = 0 = a_{n-k-1} = \ldots = a_0, \text{ mas } a_{n+k} = a_{n-k} \neq 0. \tag{2.2}$$

Consequentemente,

$$P(z) = \sum_{j=0}^{2n} a_j z^j = z^n \left[a_{n+k}\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right) + \ldots + a_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a_n\right]. \tag{2.3}$$

Seja T_j o $j-$*ésimo* polinômio de Chebyshev de 1ª espécie, definido por

$$T_j(\cos x) = \cos jx, \; j = 0,1,\ldots.$$

Com $z + \dfrac{1}{z} = x$, segue que $z^j + \dfrac{1}{z^j} = C_j(x)$, $j = 1,2,\ldots$ (maiores detalhes em [20], p. 224), onde

$$C_j(x) := 2T_j\left(\frac{x}{2}\right),$$

com $x \in \mathbb{C}$ e $j = 1, 2, \ldots$, são os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie normalizados.

De fato, por indução, para $j = 1$, segue que $z + \dfrac{1}{z} = x = C_1(x)$.

Para $j = 2$, usando a fórmula de recorrência $C_{n+1}(x) = xC_n(x) - C_{n-1}(x)$, têm-se

$$C_2(x) = xC_1(x) - C_0(x) = x^2 - 2.$$

Por outro lado, usando a mudança de variável $z + \dfrac{1}{z} = x$,

$$x^2 - 2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2},$$

ou seja, $C_2(x) = z^2 + \dfrac{1}{z^2}$.

Assumindo que $z^j + \dfrac{1}{z^j} = C_j(x)$ vale para $j = n$, então

$$z^n + \frac{1}{z^n} = C_n(x).$$

Para $j = n+1$, novamente usando $C_{n+1}(x) = xC_n(x) - C_{n-1}(x)$, têm-se

$$\begin{aligned} C_{n+1}(x) &= x\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n-1}} + z^{n-1} + \frac{1}{z^{n+1}} - z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}} \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, $z^j + \dfrac{1}{z^j} = C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$.

Consequentemente, de (2.3),

$$P(z) = z^n \sum_{j=0}^{k} a_{n+j} C_j(x) = a_{n+k} z^n \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j), \tag{2.4}$$

onde $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$ são os zeros do polinômio $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_{n+j} C_j(x)$. A equação (2.4) continua valendo no caso em que $k = 0$, isto é, $P(z) = a_n z^n$, se for adotado que

$$\prod_{j=1}^{0} b_j := 1. \tag{2.5}$$

Voltando para a variável z, obtém-se que

$$P(z) = a_{n+k} z^{n-k} \prod_{j=1}^{k} z\left(z + \frac{1}{z} - \alpha_j\right) = a_{n+k} z^{n-k} \prod_{j=1}^{k} (z^2 - \alpha_j z + 1),$$

que é a demonstração do próximo resultado.

Proposição 2 *Todo polinômio não nulo $P(z) \in \mathcal{R}_{2n}$ tem a decomposição*

$$P(z) = a_{n+k} z^{n-k} \prod_{j=1}^{k} (z^2 - \alpha_j z + 1) \tag{2.6}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, $a_{n+k} \neq 0$ para algum k com $0 \leq k \leq n$ (assumindo a validade da equação (2.5)). Se $P(z) \in \mathcal{R}_{2n}$ é um polinômio palindrômico de grau $2n$, então (2.6) vale para $k = n$.

Definição 7 *Assumindo a validade de* (2.5), *a transformada de Chebyshev de um polinômio não nulo $P(z) \in \mathcal{R}_{2n}$, representado por (2.6), é definida por*

$$\mathcal{T}P(x) = a_{n+k} \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j). \tag{2.7}$$

Se $P(z) \equiv 0$ então

$$\mathcal{T}0(x) = 0. \tag{2.8}$$

Proposição 3 *A transformada de Chebyshev $\mathcal{T}$ é um isomorfismo do espaço vetorial real $\mathcal{R}_{2n}$ em $\mathcal{P}_n$, onde $\mathcal{P}_n$ representa o espaço dos polinômios de grau no máximo n.*

Demonstração.

(i) $\mathcal{T}$ preserva a adição e a multiplicação por uma constante real.

De (2.2) e (2.4), é possível escrever $\mathcal{T}P$ da forma

$$\mathcal{T}P(x) = a_{n+k} \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j) = \sum_{j=0}^{k} a_{n+j} C_j(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n+j} C_j(x),$$

sendo válida para o polinômio nulo.

Tomando agora $Q \in \mathcal{R}_{2n}$ com $Q(z) = \sum_{j=0}^{2n} b_j z^j$ e considerando α e β constantes reais, segue que

$$(\alpha P + \beta Q)(z) = \sum_{j=0}^{2n} (\alpha a_j + \beta b_j) z^j.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\alpha P + \beta Q)(x) &= \sum_{j=0}^{n} (\alpha a_{n+j} + \beta b_{n+j}) C_j(x) \\
&= \alpha \sum_{j=0}^{n} a_{n+j} C_j(x) + \beta \sum_{j=0}^{n} b_{n+j} C_j(x) \\
&= \alpha(\mathcal{T}P(x)) + \beta(\mathcal{T}Q(x)).
\end{aligned}$$

(ii) $\mathcal{T}$ é sobrejetora. Todo polinômio $\tilde{R} \in \mathcal{P}_n$ pode ser unicamente escrito como uma combinação linear de $C_0, \ldots, C_n$, ou seja, $\tilde{R}(x) = \sum_{j=0}^{n} A_{n+j} C_j(x)$, $A_{n+j} \in \mathbb{R}$. Com $R(z) = \sum_{j=0}^{2n} A_j z^j$, onde $A_j = A_{2n-j}$, para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, segue que $R \in \mathcal{R}_{2n}$ e

$$\mathcal{T}R = \tilde{R},$$

provando a afirmação.

(iii) $\mathcal{T}$ é injetora. Se $\mathcal{T}P = \mathcal{T}Q$ para $P, Q \in \mathcal{R}_{2n}$, então $\mathcal{T}P - \mathcal{T}Q = \mathcal{T}(P-Q) = 0$. Por (2.7) e (2.8) segue que

$$P - Q = 0 \Leftrightarrow P = Q.$$

Portanto, $\mathcal{T}$ é único. ■

Lema 1 *Seja $P(z)$ um polinômio palindrômico real de grau $2n$.*

i) *Todos os zeros de $P(z)$ estão no círculo unitário se, e somente se, todos os zeros da transformada de Chebyshev $\mathcal{T}P(x)$ estão localizados em $[-2, 2]$.*

ii) *Além disso, se todos os zeros α_j de $\mathcal{T}P(x)$ estão em $[-2, 2]$, escritos como $\alpha_j = 2\cos u_j$ com $u_j \in [0, \pi]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, então todos os zeros de $P(z)$ são dados por*

$$e^{\pm i u_j},\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

A multiplicidade de $\alpha_j \neq \pm 2$ é a mesma que as multiplicidades de e^{iu_j} e e^{-iu_j}, enquanto que no caso de $\alpha_j = \pm 2$, a multiplicidade dos correspondentes zeros $e^{iu_j} = \pm 1$ de $P(z)$ são o dobro.

Demonstração.

i) Condição necessária. Suponha que todos os zeros de $P(z)$ estão localizados no círculo unitário. Assim, podem ser arranjados em pares conjugados $(\beta_1, \bar{\beta}_1), \ldots, (\beta_n, \bar{\beta}_n)$. Por hipótese, $|\beta_j|^2 = \beta_j \bar{\beta}_j = 1$, $\bar{\beta}_j = \dfrac{1}{\beta_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$P(z) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} (z - \beta_j)\left(z - \bar{\beta}_j\right) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} \left(z^2 - \left(\beta_j + \bar{\beta}_j\right) z + 1\right)$$

e

$$\mathcal{T}P(x) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} \left(x - \left(\beta_j + \bar{\beta}_j\right)\right),$$

onde $\left|\beta_j + \bar{\beta}_j\right| = |2\mathrm{Re}(\beta_j)| \leq 2\,|\beta_j| = 2$.

i) Condição suficiente. Assuma que a transformada de Chebyshev de $P(z)$ tem a forma

$$\mathcal{T}P(x) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j),$$

onde $a_{2n} \neq 0$ e $\alpha_j \in [-2, 2]$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Então,

$$P(z) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} \left(z^2 - \alpha_j z + 1\right).$$

Como $\alpha_j \in [-2, 2]$, segue que $z^2 - \alpha_j z + 1 = (z - \beta_j)(z - \bar{\beta}_j)$ com $\beta_j \bar{\beta}_j = 1 = |\beta_j|^2$, provando que todos os zeros $\beta_1, \bar{\beta}_1, \ldots, \beta_n, \bar{\beta}_n$ de $P(z)$ estão no círculo unitário.

ii) Têm-se $\alpha_j = 2\cos u_j = \beta_j + \bar{\beta}_j$. Escrevendo β_j como e^{iq_j} (supondo que $0 \leq q_j < \pi$), obtém-se que $2\cos u_j = e^{iq_j} + e^{-iq_j} = 2\cos q_j$, onde $u_j = q_j$, $j = 1, \ldots, n$.

A afirmação em relação às multiplicidades é óbvia. ■

Exemplo 7 *Seja $P(z) = z^4 - z^2 + 1$ um polinômio palindrômico, cujos zeros são $z_1 = -0,87 - 0,5i$, $z_2 = -0,87 + 0,5i$, $z_3 = 0,87 - 0,5i$ e $z_4 = 0,87 + 0,5i$, estando todos no círculo unitário, como mostra a Figura 2.6. Pelo item i) do Lema 1, os zeros da transformada de Chebyshev $\mathcal{T}P(x)$ estão localizados em $[-2, 2]$.*

De fato, $P(z) = z^4 - z^2 + 1 = z^2 \left[-1 + \left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)\right]$ e a transformada de Chebyshev será

$$\begin{aligned} \mathcal{T}P(x) &= -1 + C_2(x) \\ \mathcal{T}P(x) &= -1 + (x^2 - 2) \\ \mathcal{T}P(x) &= x^2 - 3. \end{aligned}$$

Desta forma, os zeros da transformada de Chebyshev $\mathcal{T}P(x) = x^2 - 3$ serão $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$, onde $x_1, x_2 \in [-2, 2]$.

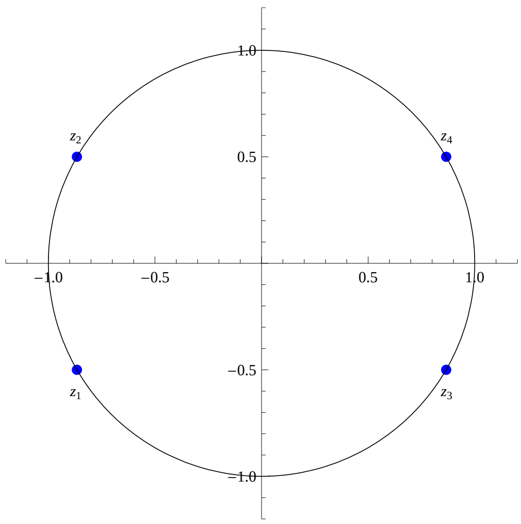


Figura 2.6: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - z^2 + 1$.

Capítulo 3

Zeros Reais de Polinômios

Neste capítulo serão apresentados resultados sobre zeros reais de polinômios, como a regra de sinais de Descartes, o Teorema de Sturm, o Teorema de Hermite e o Teorema dos menores principais através do determinante de Hurwitz. Tais resultados e definições encontram-se principalmente nas referências [7], [9] e [19].

3.1 Regra de Sinais de Descartes

Nesta seção serão apresentados resultados básicos sobre mudanças de sinal de sequência, a regra de sinais de Descartes e alguns resultados de aplicações desta regra. Estes resultados podem ser encontrados nas referências [18] e [19].

3.1.1 Resultados Preliminares

Definição 8 *Sejam* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *números reais. Será utilizada a notação*

$$var(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

para denotar o número de mudanças de sinal da sequência $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$*.*

Em outras palavras, determinar $var(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ será designar o número de pares da forma $(+,-)$ ou $(-,+)$ onde na sequência $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ foi substituido todo número positivo a_i por "+", todo número negativo a_i por " - " e ainda descartados os zeros da sequência.

Seja $\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, com $p \leq n$, a sequência obtida de $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ após serem eliminados os elementos nulos. Se $\{b_p, b_{p-1}, \ldots, b_0\}$ é a sequência obtida de $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\}$, então

$$\begin{aligned} var\left(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\right) &= var\left(b_0, b_1, \ldots, b_p\right) \\ &= var\left(b_0, b_1\right) + var\left(b_1, b_2\right) + \ldots + var\left(b_{p-1}, b_p\right). \end{aligned}$$

Considerando agora b_l, $l \leq m$, o elemento correspondente a $a_m \neq 0$ e omitindo a_m da sequência $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, segue que

$$\begin{aligned} var\left(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n\right) &= var\left(b_0, \ldots, b_{l-1}, b_{l+1}, \ldots, b_p\right) \\ &= var\left(b_0, b_1\right) + \ldots + var\left(b_{l-1}, b_{l+1}\right) \\ &\quad + \ldots + var\left(b_{p-1}, b_p\right). \end{aligned}$$

Observe que:

1. Se $var(b_{l-1}, b_{l+1}) = 1$, então $var(b_{l-1}, a_m) + var(a_m, b_{l+1}) = 1$.
   Portanto, neste caso, $var\,(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n) = var\,(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

2. Se $var(b_{l-1}, b_{l+1}) = 0$, logo $var(b_{l-1}, a_m) + var(a_m, b_{l+1}) = 0$ ou $var(b_{l-1}, a_m) + var(a_m, b_{l+1}) = 2$.
   Portanto, $var\,(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n) \leq var\,(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Portanto, conforme os casos acima, conclui-se que

$$var\,(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n) \leq var\,(a_0, a_1, \ldots, a_n)\,,$$

isto é, mesmo ao ser omitido termos de uma sequência não há aumento no número de mudanças de sinal.

Considerando agora as sequências $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ e $\{a_0, \ldots, a_k, b, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ tem-se as seguintes situações:

1. Se $b = 0$, então $var(a_1, \ldots, a_k, b, a_{k+1}, \ldots, a_n) = var(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, ou seja, inserir um termo zero na sequência não altera o número de mudanças de sinal.

2. Se $var(a_k, a_{k+1}) = 1$ e $sinal(a_k) = sinal(b)$ ou $sinal(a_{k+1}) = sinal(b)$, então $var(a_k, b) + var(b, a_{k+1}) = 1$.

3. Se $var(a_k, a_{k+1}) = 0$, segue que $var(a_k, b) + var(b, a_{k+1}) = 0$ quando $sinal(a_k) = sinal(b) = sinal(a_{k+1})$.

Portanto, não há alteração no número de mudanças de sinal quando é inserido um termo na sequência cujo sinal é o mesmo de um dos termos vizinhos.

Agora será mostrado que

$$var(a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n) \leq var(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{3.1}$$

Considere os termos genéricos a_{k-1}, a_k e a_{k+1}. Tem-se as seguintes possibilidades:

1. Se $sinal(a_{k-1}) = sinal(a_k) = sinal(a_{k+1}) > 0\ (< 0)$, então $sinal(a_{k-1} + a_k) = sinal(a_k + a_{k+1}) > 0\ (< 0)$.

2. Se $sinal(a_{k-1}) = sinal(a_k) > 0\ (< 0)$ e $sinal(a_{k+1}) < 0\ (> 0)$, então $sinal(a_{k-1} + a_k) > 0\ (< 0)$ e $sinal(a_k + a_{k+1}) > 0$ ou < 0.

   Observe que $var(a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) = 1$. Logo,

$$var(a_{k-1} + a_k, a_k + a_{k+1}) = \begin{cases} 0, & se \quad sinal(a_k + a_{k+1}) > 0 (< 0) \\ 1, & se \quad sinal(a_k + a_{k+1}) < 0 (> 0) \end{cases}.$$

3. Se $sinal(a_{k-1}) = sinal(a_{k+1}) > 0\ (< 0)$ e $sinal(a_k) < 0\ (> 0)$, então $sinal(a_{k-1} + a_k) > 0$ ou < 0 e $sinal(a_k + a_{k+1}) > 0$ ou < 0. Observe que $var(a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) = 2$. Logo,

$$var(a_{k-1} + a_k, a_k + a_{k+1}) = \begin{cases} 0, & se \quad sinal(a_{k-1} + a_k) = sinal(a_k + a_{k+1}) \\ 1, & se \quad sinal(a_{k-1} + a_k) \neq sinal(a_k + a_{k+1}) \end{cases}.$$

4. Se $sinal(a_{k-1}) < 0\ (> 0)$ e $sinal(a_k) = sinal(a_{k+1}) > 0\ (< 0)$, então $sinal(a_{k-1} + a_k) < 0$ ou > 0 e $sinal(a_k + a_{k+1}) > 0\ (< 0)$.

Observe que $var(a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) = 1$. Logo,

$$var(a_{k-1} + a_k, a_k + a_{k+1}) = \begin{cases} 0, & se \quad sinal(a_{k-1} + a_k) > 0(< 0) \\ 1, & se \quad sinal(a_{k-1} + a_k) < 0(> 0) \end{cases}.$$

Portanto, de todos os casos analisados,

$$var(a_{k-1} + a_k, a_k + a_{k+1}) \leq var(a_{k-1}, a_k, a_{k+1}).$$

Da equação (3.1) segue imediatamente que

$$var(a_0, a_0 + a_1, \ldots, a_{l-1} + a_l, a_l + a_{l+1}, \ldots) \leq var(a_0, a_1, \ldots, a_l, \ldots).$$

Sejam os números $p_i > 0$ para $i = 0, 1, ...$ Então,

$$var(a_0 p_0, a_1 p_1, \ldots) = var(a_0, a_1, a_2, \ldots). \tag{3.2}$$

De (3.1) segue que as sequências $\{a_0, a_0 + a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, $\{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_3, \ldots\}$, ..., $\{a_0, a_0 + a_1, \ldots, a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ldots\}$ possuem no máximo $var(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ mudanças de sinal.

Portanto,

$$var(a_0, a_0 + a_1, \ldots, a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ldots) \leq var(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Teorema 9 *Seja $f(x)$ uma função real contínua com $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$. Então, o intervalo (a, b) contém um número par ou nenhum (ou ímpar) de zeros de $f(x)$ se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).*

Demonstração. Suponha que existe z em (a, b) tal que $f(z) = 0$. Tem-se dois casos a considerar:

1° caso) Suponha que f não muda de sinal em uma vizinhança de z, então z é um zero de f de multiplicidade par. De fato, suponha que z seja um zero de f de multiplicidade m, ou seja,

$$f(z) = f'(z) = \ldots = f^{(m-1)}(z) = 0 \text{ e } f^{(m)}(z) \neq 0.$$

Então, para todo h positivo suficientemente pequeno tal que f não muda de sinal entre $z - h$ e $z + h$ tem-se, usando a expansão em série de Taylor nos pontos $z + h$ e $z - h$, respectivamente, que

$$f(z + h) = \frac{f^{(m)}(z)}{m!} h^m + \frac{f^{(m+1)}(z + \alpha_1 h)}{(m + 1)!} h^{m+1}$$

e

$$f(z - h) = \frac{f^{(m)}(z)}{m!} (-h)^m + \frac{f^{(m+1)}(z - \alpha_2 h)}{(m + 1)!} (-h)^{m+1},$$

onde α_1 e α_2 são constantes com $0 < \alpha_1 < 1$ e $0 < \alpha_2 < 1$. Portanto, para h suficientemente pequeno, o resíduo não influência o sinal do lado direito das igualdades (pois quando $h \to 0$, $h^{m+1} \to 0$ muito mais rápido que h^m). Desta forma,

$$sinal(f(z + h)) \quad = \quad sinal\left(\frac{f^{(m)}(z)}{m!} h^m\right)$$

e

$$sinal(f(z - h)) \quad = \quad sinal\left(\frac{f^{(m)}(z)}{m!} (-h)^m\right),$$

e por hipótese $sinal(f(z + h)) = sinal(f(z - h))$. Logo, m é par.

2° caso) Suponha que f muda de sinal em uma vizinhança de z, então z é um zero de f de multiplicidade ímpar. A demonstração é análoga, uma vez que para h positivo suficientemente pequeno

$$sinal(f(z+h)) \quad = \quad sinal\left(\frac{f^{(m)}(z)}{m!}h^m\right)$$

e

$$sinal(f(z-h)) \quad = \quad sinal\left(\frac{f^{(m)}(z)}{m!}(-h)^m\right),$$

mas $sinal\,(f(z+h)) \neq sinal(f(z-h))$, de onde segue que m é ímpar.

Portanto, se $f(a)$ e $f(b)$ têm mesmo sinal então ou f não possui zero em (a,b) ou f tem n zeros em (a,b), sendo que o número de zeros de multiplicidade ímpar aparece em uma quantidade par de vezes. No caso de $f(a)$ e $f(b)$ possuírem sinais opostos, o número de zeros de multiplicidade ímpar aparece em uma quantidade ímpar. Dessas observações segue o resultado. ■

Corolário 1 *Sejam $a_j, a_k \neq 0$. Então a sequência $\{a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k\}$ tem um número par (ou ímpar) de mudanças de sinal se a_j e a_k têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).*

Sejam $j+1$ e $k+1$ índices sucessivos de mudanças de sinal da sequência $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Então

$$sinal(a_{j+1}) = sinal(a_{j+1} - a_j) \text{ e } sinal(a_{k+1}) = sinal(a_{k+1} - a_k).$$

Se $a_{j+1}, a_{k+1} \neq 0$ e $sinal(a_{j+1}) = -sinal(a_{k+1})$, obtém-se

$$sinal(a_{j+1} - a_j) \neq sinal(a_{k+1} - a_k).$$

Como $a_{j+1} - a_j$ e $a_{k+1} - a_k$ possuem sinais opostos, pelo Corolário 1 segue que a sequência $\{a_{j+1} - a_j, \ldots, a_{k+1} - a_k\}$ tem um número ímpar de mudanças de sinal.

Sejam, agora, $0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_c \leq n$ índices sucessivos de mudança de sinal da sequência $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Segue que

$$sinal(a_{j_2} - a_{j_1}) \neq sinal(a_{j_3} - a_{j_2}) \neq \ldots \neq sinal(a_{j_c} - a_{j_{c-1}}).$$

Utilizando o fato da sequência das diferenças ter um número ímpar de mudanças de sinal, obtém-se

$$var(a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}) \geq var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - 1. \tag{3.3}$$

Mas $sinal(a_{j_1}) \neq sinal(a_{j_2} - a_{j_1})$ e $sinal(a_{j_c} - a_{j_{c-1}}) \neq sinal(-a_{j_c})$.

Portanto,

$$var(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}, -a_n) \geq var(a_0, a_1, \ldots, a_n) + 1. \tag{3.4}$$

Como consequência imediata de (3.2) e (3.3), se $\alpha > 0$ segue que

$$var(\alpha a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha a_2 - a_1, \ldots) \geq var(a_0, a_1, a_2, \ldots). \tag{3.5}$$

3.1.2 Regra de Sinais de Descartes

De acordo com [2], René Descartes foi um filósofo, físico e matemático francês, que nasceu em La Haye en Touraine, uma comunidade francesa, e viveu entre os anos de 1596 e 1650. Descartes é um matemático conhecido por sugerir a fusão da álgebra com a geometria, fato este que gerou a geometria analítica e o sistema de coordenadas. Descartes era também conhecido como “o fundador da filosofia moderna” e o “pai da matemática moderna”.

No ano de 1637, Descartes escreveu um tratado matemático e filosófico sob o título de *Discours de la Méthode pour Bien Conduire as Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*, traduzido como “Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências”. Este trabalho vinha acompanhado por três apêndices, sendo eles *La Dioptrique*, *Les Météores* e *La Géométrie*. Com o *La Géométrie* o mais famoso deles.

O *La Géométrie* é dividido em três partes. A primeira parte contém uma explicação de alguns dos princípios da álgebra geométrica. A segunda parte traz, entre outras coisas, uma classificação de curvas e um método interessante de construir tangentes à curvas. A terceira e última parte trata da resolução de equações de grau maior que dois e descreve a famosa regra de sinais de Descartes.

A seguir serão apresentados alguns resultados preliminares e o teorema que descreve a regra de sinais de Descartes.

Sejam $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ e $\alpha > 0$. Segue que as sequências dos coeficientes dos polinômios $P(z)$ e $P(\alpha z)$ têm o mesmo número de mudanças de sinal, já que

$$var(a_0, a_1, \ldots, a_n) = var(a_0, \alpha a_1, \ldots, \alpha^n a_n). \tag{3.6}$$

Como $P(-z) = a_0 - a_1 z + \ldots + (-1)^n a_n z^n$, então

$$var(a_0, a_1, \ldots, a_n) + var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n. \tag{3.7}$$

De fato, observe que $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leq n$, e

$$var(a_0, a_1, \ldots, a_n) = var(a_0, a_1) + \ldots + var(a_{n-1}, a_n) \leq n.$$

Assim, se $var(a_k, a_{k+1}) = 1$ segue $var((-1)^k a_k, (-1)^{k+1} a_{k+1}) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} var(a_0, a_1, \ldots, a_n) + var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) &= var(a_0, a_1) + var(a_0, -a_1) + \\ &\quad + \ldots + var(a_{n-1}, a_n) + \\ &\quad + var((-1)^{n-1} a_{n-1}, (-1)^n a_n) \leq n. \end{aligned}$$

Aplicando (3.4) sobre os coeficientes de $P(\alpha z)$, obtém-se

$$\begin{aligned} var(a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha(\alpha a_2 - a_1), \ldots, -\alpha^n a_n) &> var(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^n a_n) \\ &= var(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Como $\alpha > 0$, de (3.2) e (3.6) conclui-se que

$$var(a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha(\alpha a_2 - a_1), \ldots, -\alpha^n a_n) = var(\alpha a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha a_2 - a_1, \ldots, -a_n).$$

Logo,

$$var(a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha a_2 - a_1, \ldots, -a_n) > var(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{3.8}$$

Teorema 10 (Regra de Sinais de Descartes) *Seja Z^+ o número de zeros positivos de $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Então $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+$ é um número par não negativo.*

Demonstração. O início da demonstração será provar que $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ \geq 0$. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_{Z^+}$ os zeros positivos de $P(z)$. Então

$$\begin{aligned} P(z) &= R(z)(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{Z^+}) \\ &= R(z)(-1)^{Z^+}(z_1 - z)(z_2 - z)\ldots(z_{Z^+} - z) \\ &= Q(z)(z_1 - z)(z_2 - z)\ldots(z_{Z^+} - z), \end{aligned}$$

onde $Q(z)$ é um polinômio de grau $n - Z^+$ com coeficientes reais.

De acordo com a equação (3.8), como

$$(\alpha - z)(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n) = \alpha a_0 + (\alpha a_1 - a_0)z + \ldots - a_n z^{n+1},$$

segue que o número de mudanças de sinal de $Q(z)$ é maior ou igual a zero, o de $Q(z)(z_1 - z)$ é maior ou igual a um, o de $Q(z)(z_1 - z)(z_2 - z)$ é maior ou igual a dois, e assim por diante, chegando que o número de mudanças de sinal de $Q(z)(z_1 - z)(z_2 - z)\ldots(z_{Z^+} - z) = P(z)$ é maior ou igual a Z^+. Portanto,

$$var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ \geq 0.$$

Resta agora demonstrar que $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ \geq 0$ é um número par. Sejam a_α o primeiro e a_ω o último coeficiente não nulo de $P(z)$, $\alpha < \omega$ e $0 < \xi < z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_{Z^+} < \psi < \infty$.

Considerando ξ suficientemente próximo de 0 e ψ tendendo a infinito, segue que

$$sinal(P(\xi)) = sinal(a_\alpha) \neq 0 \quad , \quad sinal(P(\psi)) = sinal(a_\omega) \neq 0.$$

Pelo Teorema 9 e Corolário 1, Z^+ é par (ou ímpar) se $P(\xi)$ e $P(\psi)$ têm o mesmo sinal (ou sinais opostos) e $var(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é par (ou ímpar) se a_α e a_ω têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).

Como diferença entre números pares é par e diferença entre números ímpares é também par, segue que $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+$ é um número par. ■

Exemplo 8 *Considere $P(z) = 5z^4 - 10,5z^3 + z^2 - 0,5z + 1$ um polinômio com quatro zeros $z_1 = \dfrac{-1-2i}{5}$, $z_2 = \dfrac{-1+2i}{5}$, $z_3 = 0,5$ e $z_4 = 2$, como mostra a Figura 3.1. Logo, $Z^+ = 2$. Segundo a Regra de Sinais de Descartes, $var(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) - Z^+$ é um número par.*

De fato, segue que $var(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = 4$ e então $var(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) - Z^+ = 4 - 2 = 2$, que é um número par.

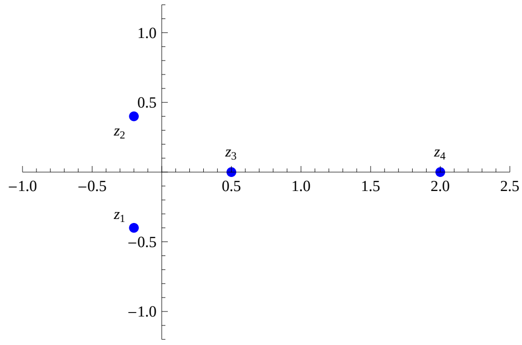


Figura 3.1: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 5z^4 - 10,5z^3 + z^2 - 0,5z + 1$.

3.1.3 Aplicações da Regra de Sinais de Descartes

Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações da regra de sinais de Descartes, acompanhadas de exemplos para um melhor entendimento da teoria.

Corolário 2 *Se $P(z)$ é um polinômio não constante com coeficientes reais e Z^- é o número de zeros negativos de $P(z)$, então $var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) - Z^-$ é par não negativo.*

Exemplo 9 *Seja $P(z) = z^5 + 2,5z^4 + 2z^3 + 0,5z^2 - 4z - 2$ um polinômio, cujos zeros são $z_1 = -2$, $z_2 = -0,5 - 1,32i$, $z_3 = -0,5 + 1,32i$, $z_4 = -0,5$ e $z_5 = 1$, como mostra a Figura 3.2. Logo $Z^- = 2$. O número de mudanças de sinal da sequência dos coeficientes de $P(-z) = -z^5 + 2,5z^4 - 2z^3 + 0,5z^2 + 4z - 2$ é dado por $var(a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5) = 4$. Desta forma, $var(a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5) - Z^- = 4 - 2 = 2$, que é um número par não negativo, exemplificando assim o corolário anterior.*

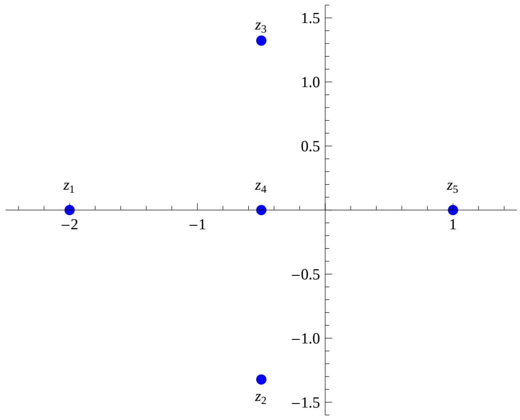


Figura 3.2: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + 2,5z^4 + 2z^3 + 0,5z^2 - 4z - 2$.

Proposição 4 *Se o polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ tem somente zeros reais, então $Z^+ = var(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.*

Demonstração. Sejam Z^- o número de zeros negativos de $P(z)$ e Z^+ o número de zeros positivos de $P(z)$. Sabe-se que $Z^+ + Z^- = n$.

Suponha que $Z^+ = m$, $0 \leq m \leq n$, então $Z^- = n - m$. Pelo Teorema 10,

$$var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - m \geq 0 \tag{3.9}$$

e pelo Corolário 2, $var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) - (n - m) \geq 0$. Então,

$$var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) + m \geq n. \tag{3.10}$$

Somando as equações (3.9) e (3.10), tem-se

$$var(a_0, a_1, \ldots, a_n) + var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \geq n. \tag{3.11}$$

Por outro lado, pela equação (3.7), $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) + var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n$. Logo, $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) + var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) = n = Z^+ + Z^-$.

Portanto,

$$(var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+) + (var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) - Z^-) = 0.$$

Como $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ \geq 0$ e $var(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) - Z^- \geq 0$, segue que $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ = 0$, ou seja, $var(a_0, a_1, \ldots, a_n) = Z^+$. ∎

Exemplo 10 *Seja* $P(z) = z^4 - 3,5z^3 - z^2 + 6,5z + 3$ *um polinômio com quatro zeros reais* $z_1 = -1$, $z_2 = -0,5$, $z_3 = 2$ *e* $z_4 = 3$, *como mostra a Figura 3.3. De acordo com a proposição anterior,* $Z^+ = var(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$. *De fato,* $var(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = 2 = Z^+$.

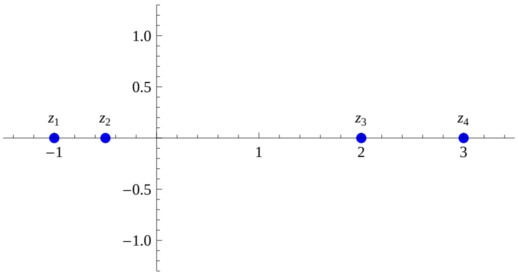


Figura 3.3: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - 3,5z^3 - z^2 + 6,5z + 3$.

3.2 Zeros Reais

Nesta seção serão apresentadas teorias que envolvem zeros reais de polinômios reais, como o Teorema de Sturm, matrizes de Hankel e Hurwitz e o Teorema de Hermite. Estes resultados podem ser encontrados nas referências [7] e [9].

3.2.1 Teorema de Sturm

Definição 9 (Sequência de Sturm) *Considere a sequência de polinômios reais* $Q_i(z)$ *de grau* i, $i = 0, 1, \ldots, n$, *isto é,*

$$Q_n(z), Q_{n-1}(z), \ldots, Q_1(z), Q_0(z), \tag{3.12}$$

que possui as duas seguintes propriedades em relação ao intervalo (a, b):

1. *Para todo valor de* $z \in (a, b)$, *se algum* $Q_m(z)$ *se anula, então os dois polinômios adjacentes* $Q_{m-1}(z)$ *e* $Q_{m+1}(z)$ *têm valores diferentes de zero e sinais opostos, isto é, para* $z \in (a, b)$, *se* $Q_m(z) = 0$, *então*

$$Q_{m-1}(z)Q_{m+1}(z) < 0.$$

2. *A função* $Q_0(z)$ *em* (3.12) *não se anula em* (a, b).

A sequência de polinômios (3.12) *é chamada de sequência de Sturm no intervalo* (a, b).

Teorema 11 *Seja* $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$. *Aplicando o algoritmo de Euclides para encontrar o maior fator comum entre* $P(z)$ *e* $P'(z)$, *obtém-se*

$$\begin{array}{rcl} P(z) & = & P'(z)A_0(z) - Q_{n-2}(z) \\ P'(z) & = & Q_{n-2}(z)A_1(z) - Q_{n-3}(z) \\ Q_{n-2}(z) & = & Q_{n-3}(z)A_2(z) - Q_{n-4}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{n-r-1}(z) & = & Q_{n-r}(z)A_{r-1}(z) - Q_{n-r+1}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_2(z) & = & Q_1(z)A_{n-2}(z) - Q_0(z). \end{array}$$

Quando $P(z)$ não possui zeros múltiplos, a sequência $P(z), P'(z), Q_{n-2}(z) \ldots, Q_1(z), Q_0(z)$ forma uma sequência de Sturm.

De fato, será preciso verificar se a sequência

$$P(z), P'(z), Q_2(z), \ldots, Q_1(z), Q_0(z),$$

gerada pelo agoritmo de Euclides, satisfaz as duas condições citadas na definição de sequência de Sturm, que será mostrado mais adiante.

Observação 2 *Observe que, no processo de Euclides, toma-se os restos da divisão com sinal negativo.*

Nota-se também que os graus dos polinômios $Q_{n-r-1}(z)$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$, decrescem estritamente. A divisão é repetida até obter o resto $Q_0(z)$ de grau zero, isto é, uma constante. Se esta constante é nula, então $Q_1(z)$ é o fator comum entre $P(z)$ e $P'(z)$.

Se esta constante é não nula, então $P(z)$ e $P'(z)$ não têm fator comum diferente de constante. Por exemplo, se $P(z)$ não tem zeros múltiplos, então $P(z)$ e $P'(z)$ não tem fator comum diferente de constante, e consequentemente, o algoritmo de Euclides produz a sequência $P(z), P'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_0(z)$, com $Q_0(z) = constante \neq 0$.

Lema 2 *Seja P uma função que tem derivadas contínuas até ordem k em uma vizinhança δ do ponto c. Sejam*

$$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0 \text{ e } P^{(k)}(c) \neq 0.$$

Então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que

$$P(c+\epsilon)P'(c+\epsilon) > 0,$$
$$P(c-\epsilon)P'(c-\epsilon) < 0.$$

A seguir será demonstrado o Teorema 11.

Demonstração. Seja (a, b) um intervalo dado. Primeiramente, suponha que $P(z)$ não tem zeros múltiplos no intervalo (a, b). Será mostrado que $Q_0(z) \neq 0$ em (a, b) se, e somente se, $P(z)$ não tem zeros múltiplos em (a, b).

De fato, se $P(z)$ tivesse um zero ξ com multiplicidade t em (a, b), então ξ seria um zero com multiplicidade $(t-1)$ de $P'(z)$ e, consequentemente, $P(z)$ e $P'(z)$ teriam um fator comum $(x-\xi)^{t-1}$, com $\xi \in (a, b)$. Reciprocamente, se $P(z)$ não tem zeros múltiplos em (a, b), então o fator comum entre $P(z)$ e $P'(z)$ não tem zeros em (a, b), pois $Q_0(z)$ é uma constante não nula.

Seja $P(c) = 0$, pelo Lema 2, $P(c-\epsilon)$ e $P'(c-\epsilon)$ têm sinais opostos para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Considerando $Q_{n-r}(c) = 0$ para algum $r = 2, \ldots, n-1$, então $Q_{n-r-1}(c)$ e $Q_{n-r+1}(c)$ são diferentes de zero e, além disso, $Q_{n-r-1}(c)$ e $Q_{n-r+1}(c)$ têm sinais opostos.

Estas afirmações são consequências imediatas da relação

$$Q_{n-r-1}(z) = Q_{n-r}(z)A_{r+1}(z) - Q_{n-r+1}(z),$$

pois para $z = c$, como $Q_{n-r}(c) = 0$, segue que $Q_{n-r-1}(c) = -Q_{n-r+1}(c)$.

Supondo que um destes dois números é zero, então pela relação de recorrência gerada pelo algoritmo de Euclides, obtém-se

$$Q_{n-r-1}(c) = Q_{n-r+1}(c) = \ldots = Q_{n-2}(c) = P'(c) = P(c) = 0.$$

Assim, c seria zero múltiplo de $P(z)$, o que leva a uma contradição.

O fato de $Q_0 \neq 0$ em (a,b) é uma consequência da observação feita de que se $P(z)$ não tem zeros múltiplos em (a,b), então $Q_0(z)$ é uma constante diferente de zero.

Isto mostra que a sequência

$$P(z), P'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_1(z), Q_0(z),$$

gerada pelo algoritmo de Euclides, é uma sequência de Sturm.

Agora, se $Q_0(z)$ é uma constante nula, isto é, $P(z)$ tem zeros múltiplos no intervalo (a,b), então $Q_m(z)$ é o fator comum não somente de $P(z)$ e $P'(z)$, mas também de toda a sequência $P(z), P'(z), Q_{n-2}(z) \ldots, Q_m(z)$ gerada pelo algoritmo de Euclides. Desta forma, a sequência gerada pelo algoritmo de Euclides não gera uma sequência de Sturm. Para resolver este problema basta dividir toda a sequência pelo seu fator comum $Q_m(z)$ e considerar a nova sequência

$$\frac{P(z)}{Q_m(z)}, \frac{P'(z)}{Q_m(z)}, \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_m(z)}, \ldots, \frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)}, 1,$$

que é uma sequência de Sturm.

Portanto, o algoritmo de Euclides sempre gera uma sequência de Sturm independente do polinômio $P(z)$ possuir ou não zeros múltiplos. ■

Será denotado por $var(z)$ o número das mudanças de sinal na sequência de Sturm, isto é,

$$var(z) := var(P(z), P'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_0(z)).$$

Por $var(a)$ e $var(b)$ entende-se como sendo, respectivamente, $var(a+\epsilon)$ e $var(b-\epsilon)$ com ϵ tal que nenhum elemento da sequência $P(z), P'(z), \ldots, Q_1(z), Q_0(z)$ se anula no intervalo $(a, a+\epsilon]$ e $[b-\epsilon, b)$.

O teorema a seguir dá o número de zeros reais de um polinômio em um intervalo (a,b), desde que este não tenha zeros múltiplos.

Teorema 12 (Sturm) *Seja $P(z)$ um polinômio de grau n, que não tem zeros múltiplos em (a,b). Então, o número de zeros de $P(z)$ em (a,b) é igual a*

$$var(a) - var(b).$$

Demonstração. Primeiro será analisado o que acontece quando z se move de a até b passando por um zero de $P(z)$. Suponha que $c \in (a,b)$ e $Q_n(c) = 0$. Então, para $\epsilon > 0$ e suficientemente pequeno, pelo Lema 2 segue que $P(c-\epsilon)$ e $P'(c-\epsilon)$ têm sinais opostos, e $P(c+\epsilon)$ e $P'(c+\epsilon)$ têm o mesmo sinal. Consequentemente, entre $P(z)$ e $P'(z)$ existe uma mudança de sinal antes de c e esta mudança desaparece depois de c. Em outras palavras, o número $var(z)$ diminui de um quando z movendo-se no intervalo (a,b) passa por um zero de $P(z)$.

Observe agora o que acontece quando z passa por um zero de $Q_{n-r}(z)$ para $r = 2, 3, \ldots, n-1$. Suponha então que $Q_{n-r}(c) = 0$. Pelo item 1 da Definição 9, $Q_{n-r-1}(c) \neq 0$, $Q_{n-r+1}(c) \neq 0$ e $Q_{n-r-1}(c)Q_{n-r+1}(c) < 0$. Isso significa que $Q_{n-r-1}(c)Q_{n-r+1}(c) < 0$ para todo z em uma vizinhança suficientemente pequena de c. Portanto,

$$var(Q_{n-r-1}(z), Q_{n-r}(z), Q_{n-r+1}(z)) = 1.$$

Isso mostra que quando z passa por um zero de uma função intermediária da sequência de Sturm, o número de mudanças de $var(z)$ não muda.

Com isso mostra-se que $var(z)$ diminui de um somente quando z passa por um zero de $P(z)$. Consequentemente, o número de mudanças de sinal que se perde quando z percorre o intervalo (a, b) é exatamente o número de zeros de $P(z)$ em (a, b). Suponha que $var(a) = m$ e que $P(z)$ possua k zeros no intervalo (a, b). Pelas conclusões anteriores, quando z estiver em b, a sequência $var(z)$ perde k mudanças de sinal, ou seja, $var(b) = m - k$. Assim, $var(a) - var(b) = k$, completando a demonstração. ■

Exemplo 11 *Sejam $P(z) = z^5 - 5z^3 + 4z = Q_5(z)$ e $P'(z) = 5z^4 - 15z^2 + 4 = Q_4(z)$. Construindo a sequência de Sturm através do Algoritmo de Euclides, segue:*

$$Q_3(z) = 2z^3 - \frac{16}{5}z$$
$$Q_2(z) = 7z^2 - 4$$
$$Q_1(z) = \frac{72}{35}z$$
$$Q_0(z) = 4.$$

Para calcular o número de zeros de $P(z)$ no intervalo $(-5, 5)$, seja $\epsilon = 1$. Logo,

$$var(a + \epsilon) = var(-4) \text{ e } var(b - \epsilon) = var(4).$$

Desta forma,

$$var(-4) = var(P(-4), P'(-4), Q_3(-4), Q_2(-4), Q_1(-4), Q_0(-4)) = 5$$

e

$$var(4) = var(P(4), P'(4), Q_3(4), Q_2(4), Q_1(4), Q_0(4)) = 0.$$

Logo, pelo Teorema 12, tem-se que $var(-4) - var(4) = 5$ e então $P(z)$ tem cinco zeros reais no intervalo $(-5, 5)$. De fato, exitem cinco zeros reais no intervalo $(-5, 5)$, sendo eles $z_1 = -2$, $z_2 = -1$, $z_3 = 0$, $z_4 = 1$ e $z_5 = 2$ como mostra a Figura 3.4.

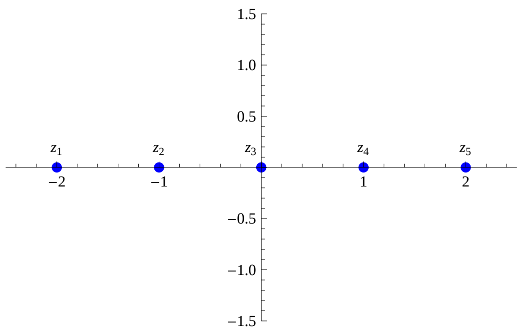


Figura 3.4: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 - 5z^3 + 4z$.

Vale observar que a demonstração do Teorema de Sturm foi baseada nas duas condições para que uma sequência seja sequência de Sturm. Assim, o teorema sempre será válido toda vez que dois polinômios gerarem uma sequência de Sturm.

Caso o polinômio tenha zeros múltiplos no intervalo (a, b), uma modificação natural do teorema é válida.

De fato, se $P(z)$ tem zeros múltiplos em (a, b), então $P(z)$ e $P'(z)$ tem um fator comum $Q_m(z)$, que não é constante e também é fator comum de $Q_{n-2}(z), \dots, Q_1(z)$. Como foi visto anteriormente a sequência

$$\frac{P(z)}{Q_m(z)}, \frac{P'(z)}{Q_m(z)}, \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_m(z)}, \dots, \frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)}, 1,$$

é uma sequência de Sturm. Assim, pelo Teorema de Sturm,

$$S := var\left(\frac{P(a)}{Q_m(a)}, \frac{P'(a)}{Q_m(a)}, \ldots, \frac{Q_{m-1}(a)}{Q_m(a)}, 1\right) - var\left(\frac{P(b)}{Q_m(b)}, \frac{P'(b)}{Q_m(b)}, \ldots, \frac{Q_{m-1}(b)}{Q_m(b)}, 1\right),$$

é o número de zeros de $\dfrac{P(z)}{Q_m(z)}$ em (a,b), isto é, o número de zeros de $P(z)$ em (a,b) sem contar suas multiplicidades.

3.2.2 Polinômios Hiperbólicos

Nesta seção serão estudadas condições necessárias e suficientes para que $P(z)$ seja um polinômio hiberbólico (ver [5], p. 1045), ou seja, $P(z)$ possua somente zeros reais. Para isso, serão apresentados o Teorema de Hermite e dos menores principais, sendo necessário um conhecimento sobre as matrizes de Hermite e Hurwitz.

Teorema 13 (Newton) *Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ os zeros do polinômio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ e $S_m = z_1^m + z_2^m + \ldots + z_n^m$, $m \in \mathbb{N}$ as somas de Newton dos zeros de $P(z)$. Então, para todo inteiro positivo k, $k = 1, 2, \ldots, n$, segue que*

$$S_k = -a_1 S_{k-1} - a_2 S_{k-2} - \ldots - a_{k-1} S_1 - k a_k \tag{3.13}$$

e

$$S_{n+j} = -a_1 S_{n+j-1} - a_2 S_{n+j-2} - \ldots - a_n S_j, j = 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

A demonstração pode ser encontrada em [1], p. 56.

As somas de Newton também podem ser representadas através dos coeficientes de $P(z)$. Segundo o Teorema de Newton, $a_0 = 1$. Então,

$$\begin{aligned} S_1 = -a_1 \quad &\Rightarrow \quad S_1 = \sigma_1 \\ S_2 = -a_1 S_1 - 2a_2 \quad &\Rightarrow \quad S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ S_3 = -a_1 S_2 - a_2 S_1 - 3a_3 \quad &\Rightarrow \quad S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \end{aligned}$$

Por indução, obtém-se que

$$S_k = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 2\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & \ldots & 3\sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \ldots & 1 & (k-1)\sigma_{k-1} \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \ldots & \sigma_1 & k\sigma_k \end{vmatrix}.$$

Uma matriz quadrada A é chamada de positiva definida se $\langle z, Az\rangle > 0$ para todo vetor $z \neq 0$ e que A é não negativa definida se $\langle z, Az\rangle \geq 0$ para todo vetor z.

Outras condições podem ser encontradas para que uma matriz seja positiva definida. Uma delas está em função dos autovalores da matriz, a outra em função do seus menores principais (para cada $k = 1, \ldots, n$, o menor principal de ordem k da matriz A é o determinante da submatriz principal $A_k = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq k$). Para que uma matriz seja positiva definida os seus menores principais devem ser todos positivos (Critério de Silvester).

O teorema a seguir dá condições necessárias e suficientes para que um polinômio tenha somente zeros reais.

Teorema 14 (Hermite) *Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ os zeros do polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Então, $P(z)$ tem somente zeros reais se, e somente se, a matriz de Hankel*

$$H_n = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-2} \end{pmatrix}$$

é não negativa definida. Além disso, $P(z)$ tem somente zeros reais e distintos se, e somente se, H_n é positiva definida.

Demonstração. Será mostrado primeiramente que $P(z)$ tem somente zeros reais se, e somente se, H_n é não negativa definida.

Supondo que $P(z)$ tem somente zeros reais, deve-se mostrar que $\langle y, H_n y\rangle \geq 0$, para todo vetor y.

Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_m$ os zeros de $P(z)$ com suas respectivas multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, onde $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$. Então,

$$\begin{aligned} \langle y, H_n y\rangle &= y^t H_n y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \vdots & S_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} S_{j+k-2} y_j y_k = \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} z_l^{j+k-2} \right) y_j y_k \\ &= \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \left[\left(\sum_{j=1}^{n} z_l^{j-1} y_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n} z_l^{k-1} y_k \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \left(\sum_{r=1}^{n} z_l^{r-1} y_r \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como $\langle y, H_n y\rangle \geq 0$ para todo y, segue que H_n é não negativa definida.

Agora, suponha que H_n é não negativa definida. Logo, os menores principais de H_n são não negativos. Assim,

$$0 \leq \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = S_0 S_2 - S_1^2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (z_j - z_k)^2.$$

Se $\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (z_j - z_k)^2 = 0$, segue que $z_j - z_k = 0$, ou seja, $z_j = z_k$, para todo j e k.

Se $\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (z_j - z_k)^2 > 0$, então para algum j e k, $(z_j - z_k)^2 > 0$, ou seja, $z_j \neq z_k$. Suponha que esses dois zeros sejam complexos conjugados, isto é, $z_j = a + ib$, a, $b \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $z_k = a - ib$. Logo,

$$0 < (z_j - z_k)^2 = (2bi)^2 = -4b^2,$$

chegando a um absurdo. Logo, todos os zeros de $P(z)$ são reais.

Será mostrado, agora, que $P(z)$ tem somente zeros reais e distintos se, e somente se, H_n é positiva definida.

Considere que $P(z)$ possua somente zeros reais e distintos. Neste caso, as multiplicidades dos n zeros são todas iguais a um.

Logo,

$$\langle y, H_n y\rangle = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} z_l^{r-1} y_r\right)^2 \geq 0.$$

Suponha que $\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} z_l^{r-1} y_r\right)^2 = 0$. Então,

$$\begin{cases} y_1 + z_1 y_2 + \ldots + z_1^{n-1} y_n & = 0 \\ y_1 + z_2 y_2 + \ldots + z_2^{n-1} y_n & = 0 \\ \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ y_1 + z_n y_2 + \ldots + z_n^{n-1} y_n & = 0 \end{cases}$$

ou

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que A é a matriz de Vandermonde. Como $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são distintos, segue que $det(A) \neq 0$. Portanto, A é não singular. Então existe uma única solução para o sistema acima, que é $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo, $\langle y, H_n y\rangle > 0$ para todo vetor $y \neq 0$, ou seja, H_n é positiva definida.

Suponha, agora, que H_n é positiva definida.

Usando o mesmo argumento da demonstração do caso em que H_n é não negativa definida, prova-se que os zeros de $P(z)$ são reais.

Deve-se mostrar, agora, que esses zeros são distintos. Como H_n é positiva definida, segue que existe um número l, $1 \leq l \leq n$, tal que $y_1 + z_l y_2 + \ldots + z_l^{n-1} y_n \neq 0$, para todo $y \neq 0$. Se existir $z_i = z_j$, então $det(A) = 0$. Logo, o sistema linear $Az = 0$ tem solução diferente da solução trivial, isto é, existe um vetor y não nulo tal que $Ay = 0$, isto é, $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} z_l^{r-1} y_r = 0$, $l = 1, \ldots, n$. Mas, $y^t H_n y = \displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} z_l^{r-1} y_r\right)^2 > 0$. Portanto, $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$. ∎

Exemplo 12 *Seja* $P(z) = z^3 - 2z^2 - z + 2$ *um polinômio de grau* 3. *Através das equações (3.13) e (3.14), segue que*

- $k = 0$, $S_0 = 3$,
- $k = 1$, $S_1 = -a_1 = 2$,
- $k = 2$, $S_2 = -a_1 S_1 - 2a_2 = 6$,

- $k = 3,\ S_3 = -a_1S_2 - a_2S_1 - 3a_3 = 8,$
- $k = 4,\ S_4 = -a_1S_3 - a_2S_2 - a_3S_1 = 18.$

Desta forma, os menores principais são

$$|S_0| = |3| = 3 > 0, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14 > 0, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

Como H_3 é positiva definida, o polinômio $P(z)$ têm três zeros reais e distintos. De fato, $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ e $z_3 = 2$ são zeros reais de $P(z)$, como mostra a Figura 3.5.

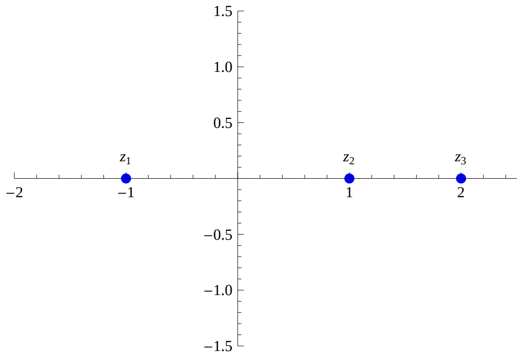


Figura 3.5: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^3 - 2z^2 - z + 2$.

Exemplo 13 *Seja $P(z) = z^3 + 4z^2 + 5z + 2$ um polinômio. Através das equações (3.13) e (3.14), segue que*

- $k = 0,\ S_0 = 3,$
- $k = 1,\ S_1 = -a_1 = -4,$
- $k = 2,\ S_2 = -a_1S_1 - 2a_2 = 6,$
- $k = 3,\ S_3 = -a_1S_2 - a_2S_1 - 3a_3 = -10,$
- $k = 4,\ S_4 = -a_1S_3 - a_2S_2 - a_3S_1 = 18.$

Desta forma, os menores principais são

$$|S_0| = |3| = 3 \geq 0, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \geq 0, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & -10 \\ 6 & 8 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

Como H_3 é não negativa definida, o polinômio $P(z)$ tem 3 zeros reais, sendo um deles de multiplicidade dois. De fato, $z_1 = -1 = z_2$ e $z_3 = -2$ são zeros reais de $P(z)$, como mostra a Figura 3.6.

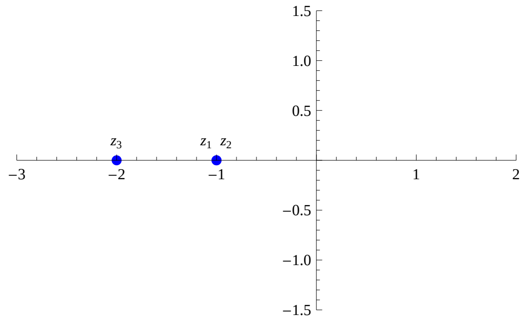


Figura 3.6: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^3 + 4z^2 + 5z + 2$.

Definição 10 (Matriz de Hurwitz) *Sejam* $P(z) = q_0^{(1)} z^n + \ldots + q_{n-1}^{(1)} z + q_n^{(1)}$ *um polinômio com coeficientes reais e* $P'(z) = q_0^{(2)} z^{n-1} + \ldots + q_{n-2}^{(2)} z + q_{n-1}^{(2)}$ *a sua derivada. A matriz*

$$H_{2n-1}(P'(z), P(z)) = \begin{bmatrix} q_0^{(2)} & q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q_0^{(1)} & q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & \ldots & q_n^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_0^{(2)} & q_1^{(2)} & \ldots & q_{n-1}^{(2)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_0^{(1)} & q_1^{(1)} & \ldots & q_{n-1}^{(1)} & q_n^{(1)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q_0^{(1)} & q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & \ldots & q_n^{(1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & q_0^{(2)} & q_1^{(2)} & \ldots & q_{n-1}^{(2)} \end{bmatrix},$$

é chamada matriz de Hurwitz de $P(z)$ *e* $P'(z)$ *de ordem* $2n - 1$.

Será denotado por ∇_{2r-1} o determinante do menor principal de ordem $2r-1$ da matriz $H_{2n-1}(P'(z), P(z))$.

Teorema 15 *Seja* $\{Q_{n+1-r}\}_{r=1}^{n+1}$ *uma sequência de polinômios obtidos a partir do algoritmo de Sturm, com* $Q_n(z) = P(z)$, $Q_{n-1}(z) = P'(z)$ *e* $P(z)$ *não tendo zeros múltiplos, onde* Q_{n+1-r} *são polinômios de grau exatamente* $n + 1 - r$. *Isto é,*

$$Q_{n+1-r}(z) = \sum_{j=0}^{n+1-r} q_j^{(r)} z^{n+1-r-j}, r = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Então,

$$q_0^{(r)} = [\nabla_{2r-5}]^{-2} [\nabla_{2r-7}]^2 [\nabla_{2r-9}]^{-2} [\nabla_{2r-11}]^2 \ldots [\nabla_3]^{2(-1)^{r-1}} [\nabla_1]^{2(-1)^r} \nabla_{2r-3}$$

para $r = 2, 3, \ldots, n + 1$.

Teorema 16 (Menores Principais) *O polinômio* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} q_j^{(1)} z^{n-j}$ *com* $q_0^{(1)} = 1$ *tem somente zeros reais se, e somente se, todos os menores principais de ordem ímpar da matriz de Hurwitz* $H_n(P'(z), P(z))$ *são maiores ou iguais a zero.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)Suponha inicialmente que $P(z)$ possua somente zeros reais. Pelo Teorema 12, o número de zeros do polinômio $P(z)$ no intervalo (a, b) é igual a

$$var(a) - var(b),$$

ou seja,

$$var(P(a), P'(a), Q_{n-2}(a), \ldots, Q_0(a)) - var(P(b), P'(b), Q_{n-2}(b), \ldots, Q_0(b)).$$

Como o polinômio $P(z)$ tem somente zeros reais, considere $a = -\infty$ e $b = \infty$. Neste caso, observe que $sinal(P(-\infty))$ e $sinal(P(\infty))$ são, respectivamente, $(-1)^n q_0^{(1)}$ e $q_0^{(1)}$, visto que,

$$P(z) = z^n \left(q_0^{(1)} + \frac{q_1^{(1)}}{z^{n-1}} + \frac{q_2^{(1)}}{z^{n-2}} + \ldots + \frac{q_n^{(1)}}{z^n} \right).$$

Assim, segue que

$$var(P(-\infty), P'(-\infty), \ldots, Q_0(-\infty)) - var(P(\infty), P'(\infty), \ldots, Q_0(\infty))$$

é igual a

$$var((-1)^n q_0^{(1)}, (-1)^{n-1} q_0^{(2)}, \ldots, q_0^{(n+1)}) - var(q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, \ldots, q_0^{(n+1)}). \qquad (3.15)$$

Pelo Teorema 15,

$$q_0^{(r)} = [\nabla_{2r-5}]^{-2}[\nabla_{2r-7}]^2[\nabla_{2r-9}]^{-2}[\nabla_{2r-11}]^2 \ldots [\nabla_3]^{2(-1)^{r-1}}[\nabla_1]^{2(-1)^r}\nabla_{2r-3}.$$

Observando que apenas ∇_{2r-3} na expressão acima não está elevado ao quadrado, segue que

$$sinal(q_0^{(r)}) = sinal(\nabla_{2r-3}).$$

Portanto, substituindo os $q_0^{(r)}$ na expressão (3.15), obtém-se

$$var((-1)^n, (-1)^{n-1}n, (-1)^{n-2}\nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) - var(1, n, \nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}).$$

Como o polinômio $P(z)$ de grau n tem somente zeros reais, segue do Teorema de Sturm que

$$n = var((-1)^n, (-1)^{n-1}n, (-1)^{n-2}\nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) - var(1, n, \nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}).$$

Assim, para satisfazer a igualdade acima, deve-se ter $var(1, n, \nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) = 0$, ou seja,

$$\nabla_1 = n \geq 0, \nabla_3 \geq 0, \ldots, \nabla_{2n-1} \geq 0.$$

($\Leftarrow$)Se todos os determinantes de ordem ímpar são maiores ou iguais a zero, segue diretamente do Teorema 12 que o polinômio $P(z)$ tem somente zeros reais, visto que

$$var((-1)^n, (-1)^{n-1}n, (-1)^{n-2}\nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) = n$$

e

$$var(1, n, \nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) = 0.$$

Portanto, $n = var(-\infty) - var(\infty)$. ■

Exemplo 14 *Sejam $P(z) = z^3 - 1,5z^2 - 1,5z + 1$ e $P'(z) = 3z^2 - 3z - 1,5$. A matriz de Hurwitz é dada por:*

$$H_5(P', P) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1,5 & 0 & 0 \\ 1 & -1,5 & -1,5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1,5 & 0 \\ 0 & 1 & -1,5 & -1,5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -1,5 \end{bmatrix}.$$

Calculando os determinantes dos menores principais de ordem ímpar, segue que

$$\nabla_1 = 3,\ \nabla_3 = 13,5\ \textit{e}\ \nabla_5 = 45,5625,$$

ou seja, todos os determinantes dos menores principais de ordem ímpar são maiores que zero.

Logo, pelo teorema anterior, $P(z)$ têm somente zeros reais. De fato, como mostra a Figura 3.7, os zeros de $P(z)$ são $z_1 = -1$, $z_2 = 0,5$ e $z_3 = 2$.

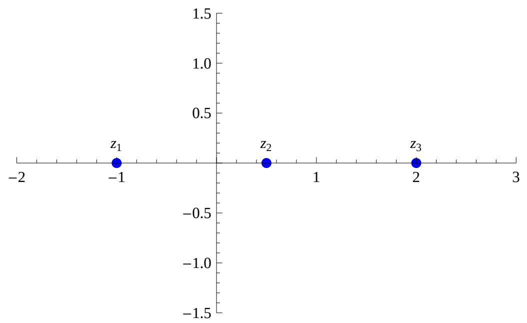


Figura 3.7: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^3 - 1,5z^2 - 1,5z + 1$.

Capítulo

4

Resultados Principais

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados sobre zeros reais de polinômios palindrômicos reais, através da teoria estudada nos capítulos anteriores.

4.1 Aplicação da Regra de Sinais de Descartes

Se $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ é um polinômio palindrômico real, então $a_i = a_{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Logo, $sinal(a_n) = sinal(a_0)$. Portanto, segundo o Corolário 1 (p. 33), segue que $var(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é um número par para todo n. Além disso, pelo Teorema 10,

$$var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ = 2k,\ k \geq 0 \text{ e } k \in \mathbb{N} \Rightarrow Z^+ = var(a_0, a_1, \ldots, a_n) - 2k,$$

ou seja, Z^+ é a diferença entre dois números pares, e consequentemente, é par e não negativo.

Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ um polinômio palindrômico de grau n. Para que $P(z)$ tenha somente zeros reais segue que:

- se n for par e pelo fato de $n = Z^+ + Z^-$, segue que Z^- é um número par e não negativo, já que Z^+ e n são pares não negativos;
- se n for ímpar e pelo fato de $n = Z^+ + Z^-$, segue que Z^- é um número ímpar e não negativo, já que n é ímpar e Z^+ é par e não negativo. Observe que $z = -1$ é sempre zero de um polinômio palindrômico de grau ímpar.

Exemplo 15 *Seja* $P(z) = z^6 - 9z^5 + 29z^4 - 42z^3 + 29z^2 - 9z + 1$.

Observe que $P(z) = z^6 P\left(\dfrac{1}{z}\right)$, *logo* $P(z)$ *é um polinômio palindrômico.*

Segue que $var(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 6$. *Logo, pelo Teorema 10, o número de zeros reais positivos* Z^+ *será 6, 4, 2 ou 0.*

Por outro lado, calculando a mudança de sinal da sequência dos coeficientes de $P(-z)$, *segue que* $var(a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5, a_6) = 0$. *Logo, pelo Corolário 2, o número de zeros reais negativos* Z^- *de* $P(z)$ *será 0.*

De fato, $P(z)$ *é um polinômio palindrômico com todos zeros reais, sendo* $Z^- = 0$ *e* $Z^+ = 6$, *cujos zeros são* $z_1 = 0,27$, $z_2 = 0,38$, $z_3 = z_4 = 1$, $z_5 = 2,62$ *e* $z_6 = 3,73$, *conforme mostra a Figura 4.1.*

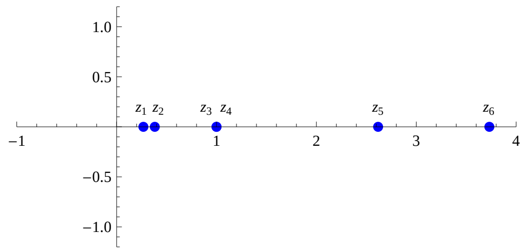


Figura 4.1: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^6 - 9z^5 + 29z^4 - 42z^3 + 29z^2 - 9z + 1$.

Exemplo 16 *Seja* $P(z) = z^7 + 10z^6 + 38z^5 + 71z^4 + 71z^3 + 38z^2 + 10z + 1$. *Observe que* $P(z) = z^7 P\left(\frac{1}{z}\right)$, *logo* $P(z)$ *é palindrômico.*

Segue que $var(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = 0$. *Logo, pelo Teorema 10, o número de zeros reais positivos* Z^+ *será 0.*

Por outro lado, calculando a mudança de sinal da sequência dos coeficientes de $P(-z)$, *segue que* $var(a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5, a_6, -a_7) = 7$. *Logo, pelo Corolário 2, o número de zeros reais negativos* Z^- *de* $P(z)$ *será 7, 5, 3 ou 1.*

De fato, $P(z)$ *é um polinômio palindrômico com todos zeros reais, sendo* $Z^- = 7$ *e* $Z^+ = 0$, *cujos zeros são* $z_1 = -3,73$, $z_2 = -2,62$, $z_3 = z_4 = z_5 = -1$, $z_6 = -0,38$ *e* $z_7 = -0,27$, *conforme mostra a Figura 4.2.*

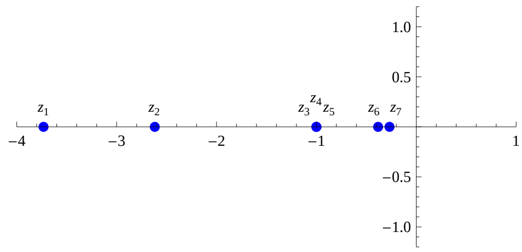


Figura 4.2: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^7 + 10z^6 + 38z^5 + 71z^4 + 71z^3 + 38z^2 + 10z + 1$.

4.2 Transformada de Chebyshev

Nesta seção será abordada a transformada de Chebyshev aplicada em polinômios palindrômicos para se obter zeros reais. Inicialmente serão apresentadas algumas definições preliminares, na sequência resultados para um polinômio de grau par e posteriormente para um de grau ímpar.

Seja $P(z) = a_{2n}z^{2n} + \ldots + a_1 z + a_0$ um polinômio palindrômico, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$. Então,

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0\left(1 + z^{2n}\right) + a_1\left(z + z^{2n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(z^{n-1} + z^{n+1}\right) + a_n z^n \\ &= z^n\left[a_n + a_{n-1}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \ldots + a_1\left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) + a_0\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{T}P(x) = a_n + a_{n-1}C_1(x) + \ldots + a_1 C_{n-1}(x) + a_0 C_n(x).$$

A seguir será apresentado o teorema que é o principal resultado deste trabalho. No teorema abaixo será mostrado como é possível encontrar somente zeros reais de polinômios palindrômicos através da transformada de Chebyshev. Este resultado foi obtido através do Lema 1.

Teorema 17 *Seja $P(z)$ um polinômio palindrômico com coeficientes reais de grau $2n$. Então todos os zeros de $P(z)$ são reais se, e somente se, todos os zeros da transformada de Chebyshev $\mathcal{T}P(x)$ estão em $(-\infty, -2\,] \cup [2\,, \infty\,)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que todos os zeros de $P(z)$ são reais. Como $P(z)$ é um polinômio palindrômico, se z_j é um zero de $P(z)$ então o seu inverso $\dfrac{1}{z_j}$ também será. Logo,

$$P(z) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)\left(z - \frac{1}{z_j}\right) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} \left(z^2 - \left(z_j + \frac{1}{z_j}\right) z + 1\right)$$

e a transformada de Chebyshev será

$$\mathcal{T}P(x) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} \left(x - \left(z_j + \frac{1}{z_j}\right)\right).$$

Como $z_j, \dfrac{1}{z_j} \in \mathbb{R}$, segue que $\left|z_j + \dfrac{1}{z_j}\right| \geq 2$, para $j = 1, \ldots, n$.
Portanto, todos os zeros de $\mathcal{T}P(x)$ estão em $(-\infty, -2\,] \cup [2\,, \infty\,)$.
($\Leftarrow$) Assuma que a transformada de Chebyshev tem a forma

$$\mathcal{T}P(x) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j),$$

onde $a_{2n} \neq 0$ e $\alpha_j \in (-\infty, -2\,] \cup [2\,, \infty)$, $j = 1, \ldots, n$. Então,

$$P(z) = a_{2n} \prod_{j=1}^{n} \left(z^2 - \alpha_j z + 1\right).$$

Os zeros de $P(z)$ serão da forma $z = \dfrac{\alpha_j \pm \sqrt{\alpha_j^2 - 4}}{2}$. Sabendo que $\alpha_j \in (-\infty, -2\,] \cup [2\,, \infty)$, logo $\alpha_j^2 - 4 \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, ou seja, todos os zeros de $P(z)$ serão reais. ■

Observe que através da mudança de variável utilizada, obtém-se um polinômio de menor grau em relação ao polinômio original, ou seja, ao aplicar a transformada de Chebyshev em um polinômio $P(z)$ de grau $2n$, o polinômio obtido é de grau n.

Para o caso em que $P(z)$ é um polinômio palindrômico de grau ímpar, segue que

$$P(z) = a_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Como $z = -1$ é zero de $P(z)$, então

$$P(z) = (z + 1) Q(z),$$

onde $Q(z)$ é um polinômio palindrômico de grau $2n$.

Além disso,

$$Q(z) = q_{2n}z^{2n} + \ldots + q_1 z + q_0$$

com $q_l = (-1)^{l+2n}a_{2n+1} + (-1)^{l+2n-1}a_{2n} + \ldots + (-1)^{2l+1}a_{l+2} + (-1)^{2l}a_{l+1}$, $l = 0, 1, \ldots, 2n$.

Portanto, como $Q(z)$ é um polinômio palindrômico de grau par, basta aplicar a transformada de Chebyshev em $Q(z)$ e utilizar o Teorema 17 para encontrar os zeros reais de $P(z)$.

Assim que forem encontrados os zeros da transformada de Chebyshev $\mathcal{T}P(x)$, basta aplicar a relação abaixo para determinar os zeros reais do polinômio palindrômico $P(z)$: considere x_k um zero de $\mathcal{T}P(x)$; de $x_k = z_k + \dfrac{1}{z_k}$ segue que $z_{k,1} = \dfrac{x_k - \sqrt{x_k^2 - 4}}{2}$ e $z_{k,2} = \dfrac{x_k + \sqrt{x_k^2 - 4}}{2}$, onde $z_{k,1}$ e $z_{k,2}$ são os zeros de $P(z)$.

Se $x_k \neq \pm 2$, as multiplicidades de $z_{k,1}$ e $z_{k,2}$ são as mesmas que a multiplicidade de x_k. No caso em que $x_k = \pm 2$, tem-se $z_{k,1} = z_{k,2}$, gerando um zero z_k de multiplicidade dois, onde $z_k = z_{k,1} = z_{k,2} = \dfrac{x_k}{2}$.

Observe que $sinal(x_k) = sinal(z_{k,1}) = sinal(z_{k,2})$.

A função $z_{k,1}$ é uma função crescente de x_k para $x_k \in (-\infty, -2)$ e uma função decrescente de x_k para $x_k \in (2, \infty)$. Já a função $z_{k,2}$ é uma função decrescente de x_k para $x_k \in (-\infty, -2)$ e uma função crescente de x_k para $x_k \in (2, \infty)$.

De fato, analisando o sinal da derivada de $z_{k,1}$, em função da variável x_k, segue que

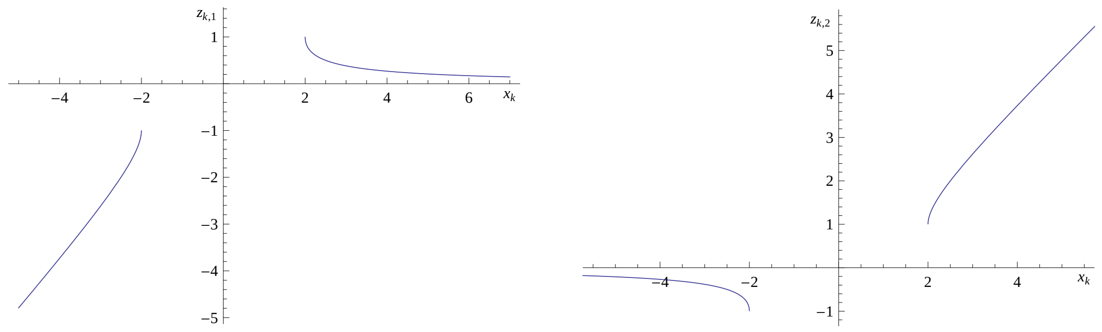
$$(z_{k,1})' = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 - 4}}\right].$$

Para $x_k \in (-\infty, -2)$ segue que $(z_{k,1})' > 0$ e quando $x_k \in (2, +\infty)$ é fácil observar que $(z_{k,1})' < 0$. Assim, $z_{k,1}$ é uma função crescente em $(-\infty, -2)$ e uma função decrescente em $(2, +\infty)$. Tal fato pode ser observado na Figura 4.3 (a).

No caso da função $z_{k,2} = \dfrac{x_k + \sqrt{x_k^2 - 4}}{2}$, segue que

$$(z_{k,2})' = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 - 4}}\right].$$

É fácil observar que $(z_{k,2})' < 0$ para $x_k \in (-\infty, -2)$ e $(z_{k,2})' > 0$ para $x_k \in (2, +\infty)$. Logo, $z_{k,2}$ é uma função decrescente para $x_k \in (-\infty, -2)$ e uma função crescente para $x_k \in (2, +\infty)$, como pode ser visto na Figura 4.3 (b).



(a) (b)

Figura 4.3: Gráficos das funções **(a)** $z_{k,1} = \frac{x_k - \sqrt{x_k^2 - 4}}{2}$ e **(b)** $z_{k,2} = \frac{x_k + \sqrt{x_k^2 - 4}}{2}$.

Se o grau de $P(z)$ é pequeno, facilmente é possível obter condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes de $P(z)$ para que todos os zeros de $P(z)$ sejam reais. A seguir serão apresentadas tais condições para $P(z)$ de graus $2, 3, 4$ e 5, assumindo sem perda de generalidade que $P(z)$ é um polinômio mônico, ou seja, $a_{2n} = a_0 = 1$.

a) Se $P(z)$ tem grau 2, então

$$P(z) = z^2 + a_1 z + 1 = z\left[a_1 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\right].$$

Tomando $x = z + \dfrac{1}{z}$, segue que

$$\mathcal{T}P(x) \quad = \quad a_1 + C_1(x).$$

Substituindo $C_1(x) = x$ segue que $\mathcal{T}P(x) = a_1 + x = 0$ se, e somente se, $x = -a_1$. Portando, pelo Teorema 17, os zeros do polinômio palindrômico $P(z) = z^2 + a_1 z + 1$ são todos reais se, e somente se, $-a_1 \in (\,-\infty, -2\,] \cup [2\,, \infty\,)$.

Exemplo 17 *Para exemplificar o item anterior, considere* $a_1 = -\dfrac{7}{2}$. *Logo,* $P(z) = z^2 - \dfrac{7}{2}z + 1$, *cujos zeros são* $z_1 = 0,31$ *e* $z_2 = 3,19$.

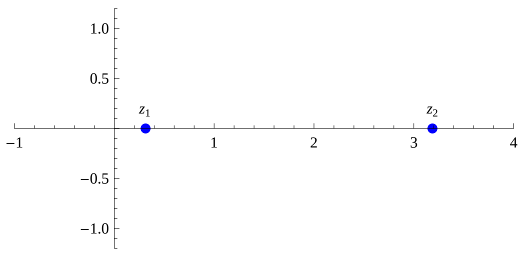


Figura 4.4: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^2 - \dfrac{7}{2}z + 1$.

b) Se $P(z)$ tem grau 3, então

$$P(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_1 z + 1 = (z+1)[z^2 + (a_1 - 1)z + 1].$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, $\mathcal{T}P(x) = a_1 - 1 + x = 0$ se, somente se, $x = -a_1 + 1$. Aplicando o Teorema 17, segue que todo polinômio palindrômico $P(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_1 z + 1$ possui zeros reais se, e somente se,

$$-a_1 + 1 \leq -2 \text{ ou } -a_1 + 1 \geq 2,$$

ou, equivalentemente,

$$a_1 \geq 3 \text{ ou } a_1 \leq -1.$$

Exemplo 18 *Para exemplificar o item anterior, considere* $a_1 = \dfrac{11}{3}$. *Logo,* $P(z) = z^3 + \dfrac{11}{3}z^2 + \dfrac{11}{3}z + 1$, *cujos zeros são* $z_1 = -2,22$, $z_2 = -1$ *e* $z_3 = -0,45$.

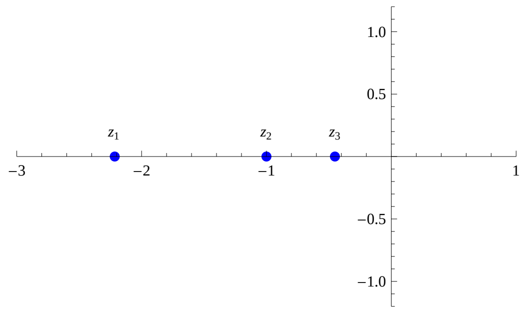


Figura 4.5: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^3 + \frac{11}{3}z^2 + \frac{11}{3}z + 1$.

c) Se $P(z)$ tem grau 4, então

$$P(z) = z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_1z + 1 = z^2\left[a_2 + a_1\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\right].$$

A transformada de Chebyshev será

$$\begin{aligned}\mathcal{T}P(x) &= a_2 + a_1C_1(x) + C_2(x)\\ \mathcal{T}P(x) &= a_2 + a_1x + x^2 - 2\\ \mathcal{T}P(x) &= x^2 + a_1x + (a_2 - 2).\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 17, os zeros da transformada de Chebyshev, representados por

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}}{2},$$

devem estar no intervalo $(-\infty, -2\,] \cup [2\,, \infty\,)$.
Para que tais zeros sejam reais, $\Delta \geq 0$. Assim,

$$\Delta = a_1^2 - 4(a_2 - 2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1^2 \geq 4(a_2 - 2). \tag{4.1}$$

Dessa forma têm-se três casos a considerar, conforme a representação na Figura 4.6.

1° caso) $2 \leq x_2 \leq x_1$;

2° caso) $x_2 \leq -2$ e $x_1 \geq 2$;

3° caso) $x_2 \leq x_1 \leq -2$.

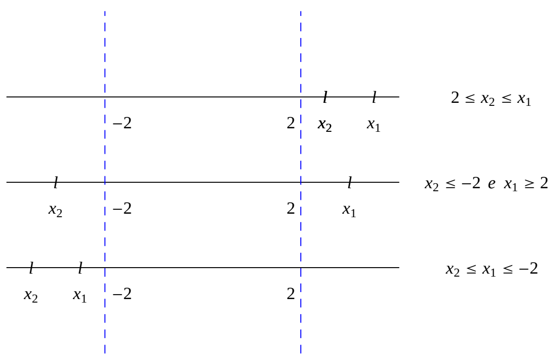


Figura 4.6: Representação dos possíveis casos para x_1 e x_2.

Analisando cada caso separadamente segue que:

1° caso) A desigualdade (4.1) deve ser satisfeita e $2 \leq x_2 \leq x_1$. Isto é, $2 \leq x_2$ e $a_2 \leq \dfrac{a_1^2}{4} + 2$. Então, se $x_2 \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}}{2} &\geq 2 \\ -a_1 - 4 &\geq \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)} \geq 0, \end{aligned}$$

e então $-a_1 - 4 \geq 0$, ou seja, $a_1 \leq -4$.

Tomando $a_1 \leq -4$, têm-se que $-a_1 - 4 \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned} (-a_1 - 4)^2 &\geq a_1^2 - 4(a_2 - 2) \\ 2a_1 + 2 &\geq -a_2 \\ a_2 &\geq -2a_1 - 2. \end{aligned}$$

Portanto, $a_1 \leq -4$ e $-2 - 2a_1 \leq a_2 \leq 2 + \frac{a_1^2}{4}$. Logo, para que os zeros de $P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1$ sejam todos reais, os coeficientes de $P(z)$ devem estar localizados na região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \leq -4 \text{ e } -2 - 2a_1 \leq a_2 \leq 2 + \frac{a_1^2}{4}\right\}$, como pode ser visto na figura abaixo.

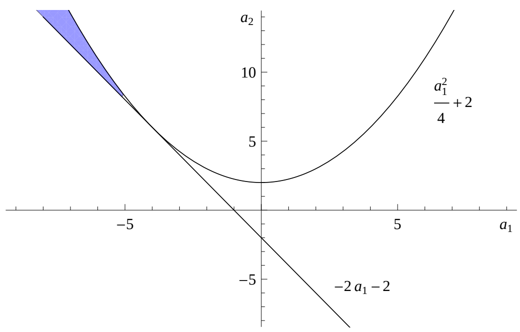


Figura 4.7: Região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \leq -4 \text{ e } -2 - 2a_1 \leq a_2 \leq 2 + \frac{a_1^2}{4}\right\}$.

2° caso) Por (4.1) segue que $a_2 \leq \dfrac{a_1^2}{4} + 2$. Para $x_1 \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}}{2} &\geq 2 \\ a_1 + 4 &\leq \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}. \end{aligned}$$

Para $x_2 \leq -2$,

$$\begin{aligned} \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}}{2} &\leq -2 \\ -a_1 + 4 &\leq \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}. \end{aligned}$$

Logo, têm-se que $max\,\{-a_1 + 4, a_1 + 4\} \leq \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}$ e assim:

- Se $a_1 \geq 0$, então $a_1 + 4 = max\{-a_1 + 4, a_1 + 4\} \leq \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}$. Logo,

$$\begin{aligned}(a_1+4)^2 &\leq a_1^2 - 4(a_2-2)\\ 2a_1 + 2 &\leq -a_2\\ a_2 &\leq -2a_1 - 2.\end{aligned}$$

- Se $a_1 < 0$, então $-a_1 + 4 = max\{-a_1 + 4, a_1 + 4\} \leq \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}$. Logo,

$$\begin{aligned}(-a_1+4)^2 &\leq a_1^2 - 4(a_2-2)\\ -2a_1 + 2 &\leq -a_2\\ a_2 &\leq 2a_1 - 2.\end{aligned}$$

Portanto, se $a_1 \geq 0$ então $a_2 \leq -2a_1 - 2$ e se $a_1 < 0$ então $a_2 \leq 2a_1 - 2$. Assim, para que os zeros de $P(z)$ sejam todos reais, os coeficientes devem estar localizados na região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; 1 + \frac{a_2}{2} \leq a_1 \leq -\frac{a_2}{2} - 1\right\}$, conforme a representação na figura abaixo.

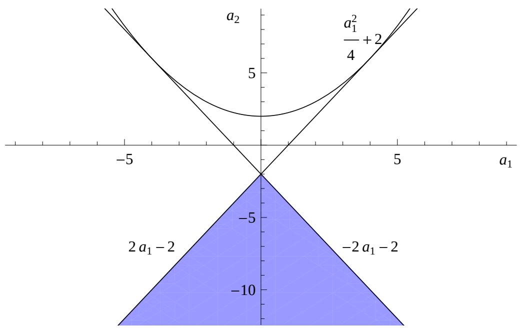


Figura 4.8: Região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; 1 + \frac{a_2}{2} \leq a_1 \leq -\frac{a_2}{2} - 1\right\}$.

3° caso) Para $x_2 \leq x_1 \leq -2$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2-2)}}{2} &\leq -2\\ \sqrt{a_1^2 - 4(a_2-2)} &\leq a_1 - 4.\end{aligned}$$

Tomando $a_1 - 4 \geq 0$, ou seja, $a_1 \geq 4$, obtêm-se

$$\begin{aligned}a_1^2 - 4(a_2-2) &\leq (a_1+4)^2\\ -4a_2 &\leq -8a_1 + 8\\ a_2 &\geq 2a_1 - 2.\end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação (4.1), segue que $a_2 \leq \dfrac{a_1^2}{4} + 2$.

Portanto, $a_1 \geq 4$ e $-2+2a_1 \leq a_2 \leq 2+\frac{a_1^2}{4}$. Assim, para que todos os zeros de $P(z)$ sejam todos reais, seus coeficientes devem estar localizados em $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \geq 4 \text{ e } 2a_1 - 2 \leq a_2 \leq 2 + \frac{a_1^2}{4}\right\}$, como pode ser visto na Figura 4.9.

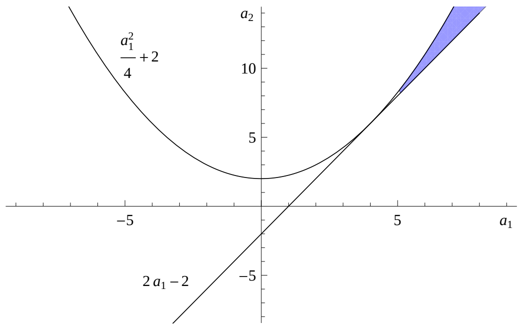


Figura 4.9: Região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \geq 4 \text{ e } 2a_1 - 2 \leq a_2 \leq 2 + \frac{a_1^2}{4}\right\}$.

Observação 3 *Para determinar quatro zeros reais de $P(z)$, onde dois a dois têm o mesmo módulo, $a_1 = 0$ e $a_2 \leq -2$.*

Observação 4 *Em alguns casos, quando nas desigualdades de a_1 ou a_2 for utilizada a igualdade, segue que os zeros $z = -1$ e\ou $z = 1$ de $P(z)$ terão multiplicidade dois.*

Exemplo 19 *Considerando $a_1 = -6$ e $a_2 = 10,5$, obtém-se $P(z) = z^4 - 6z^3 + 10,5z^2 - 6z + 1$.*

Os zeros de $P(z)$ são: $z_1 = 0,30$, $z_2 = 0,59$, $z_3 = 1,71$ e $z_4 = 3,41$.

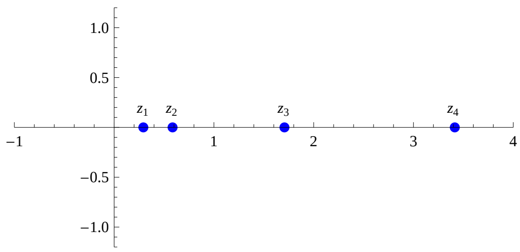


Figura 4.10: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - 6z^3 + 10,5z^2 - 6z + 1$.

Exemplo 20 *Considerando $a_1 = 4$ e $a_2 = -12$, obtém-se $P(z) = z^4 + 4z^3 - 12z^2 + 4z + 1$.*

Os zeros de $P(z)$ são: $z_1 = -6,08$, $z_2 = -0,16$, $z_3 = 0,61$ e $z_4 = 1,63$.

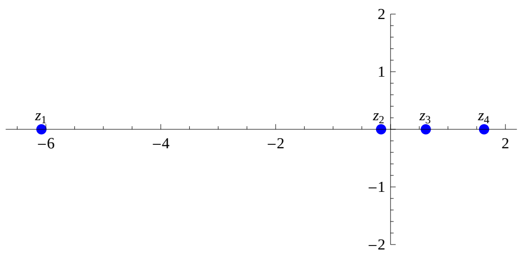


Figura 4.11: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 + 4z^3 - 12z^2 + 4z + 1$.

Exemplo 21 *Considerando $a_1 = 0$ e $a_2 = -5$, obtém-se $P(z) = z^4 - 5z^2 + 1$.*

Os zeros de $P(z)$ são: $z_1 = -2,19$, $z_2 = -0,46$, $z_3 = 0,46$ e $z_4 = 2,19$. Observe que $|z_1| = |z_4|$ e $|z_2| = |z_3|$.

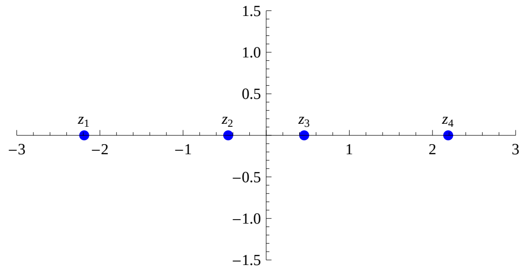


Figura 4.12: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - 5z^2 + 1$.

Neste caso, observe que os zeros de $P(z)$ são simétricos em relação ao eixo y, propriedade de um polinômio par.

d) Se $P(z)$ tem grau 5, então

$$\begin{aligned} P(z) &= z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \\ &= (z+1)[z^4 + (a_1 - 1)z^3 + (a_2 - a_1 + 1)z^2 + (a_1 - 1)z + 1]. \end{aligned}$$

Considerando as relações sobre os coeficientes encontradas para $P(z)$ de grau 4, substituindo nas relações a_1 por $(a_1 - 1)$ e a_2 por $(a_2 - a_1 + 1)$, então os zeros de $\mathcal{T}P(x) = x^2 + (a_1 - 1)x + (a_2 - a_1 - 1)$ são

$$x_1 = \frac{-(a_1 - 1) + \sqrt{(a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 - 1)}}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{-(a_1 - 1) - \sqrt{(a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 - 1)}}{2}.$$

Para que tais zeros sejam reais, $\Delta \geq 0$. Logo,

$$\Delta = (a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 - 1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 \leq \frac{a_1^2 + 2a_1 + 5}{4}. \tag{4.2}$$

Dessa forma, têm-se três casos a considerar, conforme a representação dos casos na Figura 4.13.

1° caso) $2 \leq x_2 \leq x_1$;

2° caso) $x_2 \leq -2$ e $x_1 \geq 2$;

3° caso) $x_2 \leq x_1 \leq -2$.

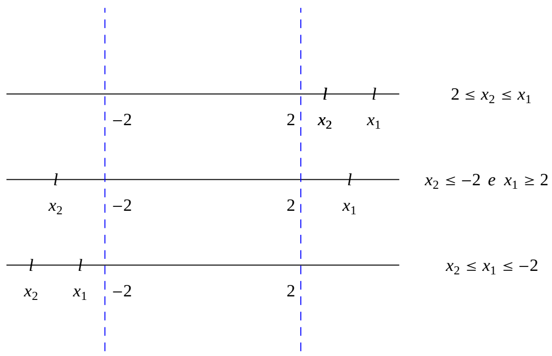


Figura 4.13: Representação dos casos possíveis para x_1 e x_2.

A seguir serão analisados cada caso separadamente.

1° caso) Para $2 \leq x_2 \leq x_1$,

$$\begin{aligned} \frac{-(a_1-1)-\sqrt{(a_1-1)^2-4(a_2-a_1-1)}}{2} &\geq 2 \\ -(a_1-1)-4 &\geq \sqrt{(a_1-1)^2-4(a_2-a_1-1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando $-(a_1-1)-4 \geq 0$, ou seja, $a_1 \leq -3$, obtêm-se

$$\begin{aligned} (-(a_1-1)-4)^2 &\geq (a_1-1)^2-4(a_2-2) \\ 4a_2 &\geq -4a_1-4 \\ a_2 &\geq -a_1-1. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação (4.2), segue que $a_2 \leq \dfrac{a_1^2+2a_1+5}{4}$.

Portanto, $a_1 \leq -3$ e $-a_1-1 \leq a_2 \leq \dfrac{a_1^2+2a_1+5}{4}$. Logo, para que todos os zeros de $P(z)$ sejam reais, seus coeficientes devem estar localizados na região $R = \left\{(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \leq -3 \text{ e } -a_1-1 \leq a_2 \leq \dfrac{a_1^2+2a_1+5}{4}\right\}$, conforme a representação na figura abaixo.

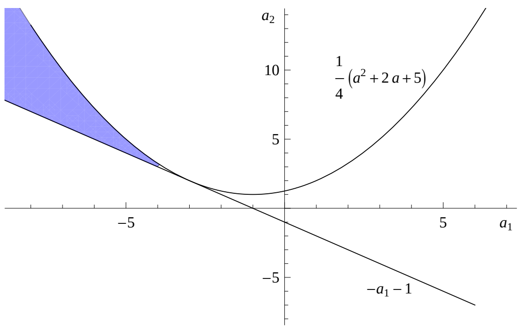


Figura 4.14: Região $R = \left\{(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \leq -3 \text{ e } -a_1-1 \leq a_2 \leq \dfrac{a_1^2+2a_1+5}{4}\right\}$.

2° caso) Por (4.2), segue que $a_2 \leq \dfrac{a_1^2+2a_1+5}{4}$. Para $x_1 \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{-(a_1-1)+\sqrt{(a_1-1)^2-4(a_2-a_1-1)}}{2} &\geq 2 \\ (a_1-1)+4 &\leq \sqrt{(a_1-1)^2-4(a_2-a_1-1)}. \end{aligned}$$

Para $x_2 \leq -2$,

$$\begin{aligned} \frac{-(a_1-1)-\sqrt{(a_1-1)^2-4(a_2-a_1-1)}}{2} &\leq -2 \\ -(a_1-1)+4 &\leq \sqrt{(a_1-1)^2-4(a_2-a_1-1)}. \end{aligned}$$

Logo têm-se que $max\,\{-(a_1-1)+4, (a_1-1)+4\} \leq \sqrt{(a_1-1)^2-4(a_2-a_1-1)}$, tendo dois casos para considerar:

- Se $a_1 \geq 1$, então $(a_1 - 1) + 4 = max\{-(a_1 - 1) + 4, (a_1 - 1) + 4\}$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} ((a_1 - 1) + 4)^2 & \leq & (a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 - 1) \\ 4a_2 & \leq & -4a_1 - 4 \\ a_2 & \leq & -a_1 - 1. \end{array}$$

- Se $a_1 < 1$, então $-(a_1 - 1) + 4 = max\{-(a_1 - 1) + 4, (a_1 - 1) + 4\}$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} ((a_1 - 1) + 4)^2 & \leq & (a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 - 1) \\ 4a_2 & \leq & 12a_1 - 20 \\ a_2 & \leq & 3a_1 - 5. \end{array}$$

Portanto, se $a_1 \geq 1$ então $a_2 \leq -a_1 - 1$ e se $a_1 < 1$ então $a_2 \leq 3a_1 - 5$. Assim, a condição para que $P(z)$ tenha todos os seus zeros reais é que seus coeficientes estejam localizados na região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; \frac{a_2+5}{3} \leq a_1 \leq a_2 - 1\right\}$, conforme a representação na figura abaixo.

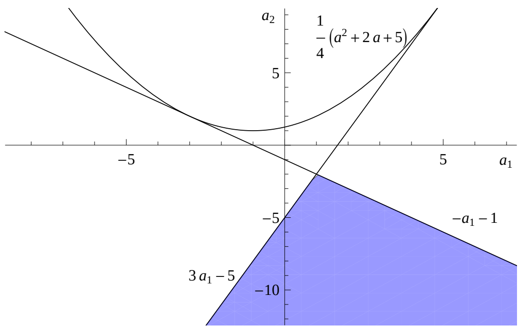


Figura 4.15: Região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; \frac{a_2+5}{3} \leq a_1 \leq a_2 - 1\right\}$.

3° caso) Para $x_2 \leq x_1 \leq -2$ segue que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{-(a_1 - 1) + \sqrt{(a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 1)}}{2} & \leq & -2 \\ (a_1 - 1) - 4 & \geq & \sqrt{(a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 - 1)}. \end{array}$$

Tomando $(a_1 - 1) - 4 \geq 0$, ou seja, $a_1 \geq 5$, obtêm-se

$$\begin{array}{rcl} ((a_1 - 1) - 4)^2 & \geq & (a_1 - 1)^2 - 4(a_2 - a_1 - 1) \\ 4a_2 & \geq & 12a_1 - 20 \\ a_2 & \geq & 3a_1 - 5. \end{array}$$

Por outro lado, pela equação (4.2), segue que $a_2 \leq \dfrac{a_1^2 + 2a_1 + 5}{4}$.

Portanto, $a_1 \geq 5$ e $3a_1 - 5 \leq a_2 \leq \dfrac{a_1^2 + 2a_1 + 5}{4}$.

Assim, quando os coeficientes de $P(z)$ estiverem localizados na região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \geq 5 \text{ e } 3a_1 - 5 \leq a_2 \leq \dfrac{a_1^2 + 2a_1 + 5}{4}\right\}$, conforme a representação na Figura 4.16 todos os seus zeros são reais.

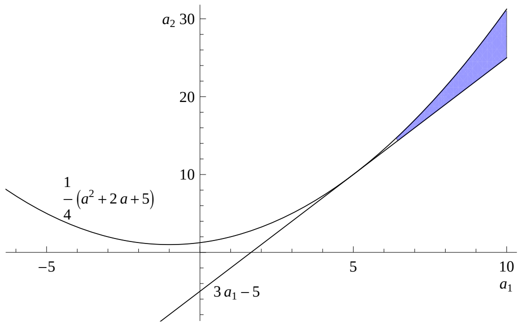


Figura 4.16: Região $R = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \geq 5 \text{ e } 3a_1 - 5 \leq a_2 \leq \dfrac{a_1^2 + 2a_1 + 5}{4}\right\}$.

Observação 5 *Para encontrar cinco zeros de $P(z)$, sendo -1 um deles e os outros quatro sendo dois a dois de mesmo módulo, $a_1 = 1$ e $a_2 \leq -2$.*

Observação 6 *Em alguns casos, quando nas desigualdades de a_1 ou a_2 for utilizada a igualdade, o zero $z = -1$ de $P(z)$ terá multiplicidade três e\ou o zero $z = 1$ terá multiplicidade dois.*

Exemplo 22 *Considerando $a_1 = -6$ e $a_2 = 6,5$, obtém-se* $P(z) = z^5 - 6z^4 + 6,5z^3 + 6,5z^2 - 6z + 1$.

Os zeros de $P(z)$ são: $z_1 = -1$, $z_2 = 0,24$, $z_3 = 0,46$, $z_4 = 2,17$ e $z_5 = 4,12$.

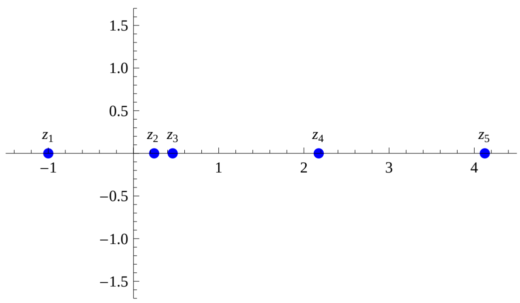


Figura 4.17: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 - 6z^4 + 6,5z^3 + 6,5z^2 - 6z + 1$.

Exemplo 23 *Considerando $a_1 = 2$ e $a_2 = -4$, obtém-se* $P(z) = z^5 + 2z^4 - 4z^3 - 4z^2 + 2z + 1$.

Os zeros de $P(z)$ são: $z_1 = -2,84$, $z_2 = -1$, $z_3 = -0,35$, $z_4 = 0,65$ e $z_5 = 1,55$.

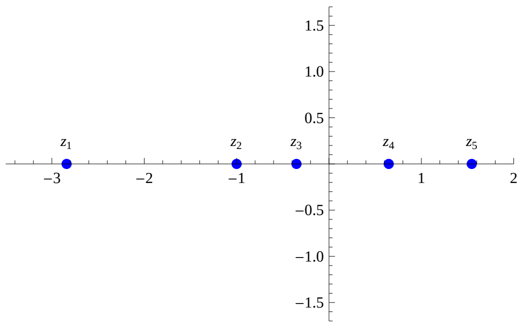


Figura 4.18: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + 2z^4 - 4z^3 - 4z^2 + 2z + 1$.

Exemplo 24 *Considerando* $a_1 = 8$ *e* $a_2 = 20$, *obtém-se* $P(z) = z^5 + 8z^4 + 20z^3 + 20z^2 + 8z + 1$.

Os zeros de $P(z)$ *são:* $z_1 = -4,39$, $z_2 = -1,84$, $z_3 = -1$, $z_4 = -0,54$ *e* $z_5 = -0,23$.

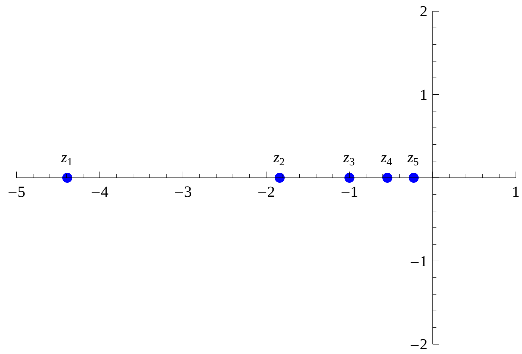


Figura 4.19: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + 8z^4 + 20z^3 + 20z^2 + 8z + 1$.

Exemplo 25 *Considerando* $a_1 = 1$ *e* $a_2 = -4$, *obtém-se* $P(z) = z^5 + z^4 - 4z^3 - 4z^2 + z + 1$.

Os zeros de $P(z)$ *são:* $z_1 = -1,93$, $z_2 = -1$, $z_3 = -0,52$, $z_4 = 0,52$ *e* $z_5 = 1,93$. *Observe que* $|z_1| = |z_5|$ *e* $|z_3| = |z_4|$.

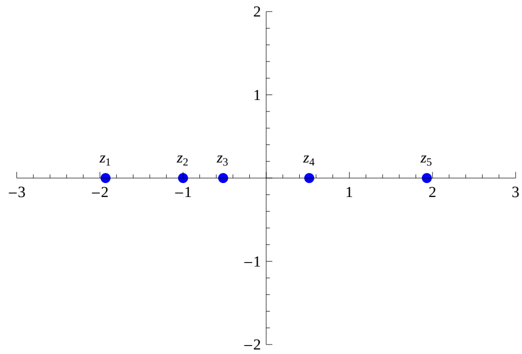


Figura 4.20: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + z^4 - 4z^3 - 4z^2 + z + 1$.

4.3 Resultados sobre Zeros Reais de Polinômio Palindrômico

Nesta seção serão apresentadas aplicações de polinômios palindrômicos no Teorema da Decomposição, Hermite e Menores Principais. Foram encontrados resultados para grau menores, como dois, três e quatro, devido à complicação em encontrar condições para os coeficientes dos polinômios na medida em que aumenta-se o grau. Porém, pode-se perceber que os resultados encontrados são os mesmos para os coeficientes, independente do teorema utilizado.

4.3.1 Teorema da Decomposição

Inicialmente serão apresentadas relações entre os coeficientes de um polinômio palindrômico $P(z)$ para se obter somentos zeros reais através da aplicação do Teorema da Decomposição. Seja n o grau de $P(z)$. Se

- $n = 2$, tem-se $P(z) = z^2 + a_1 z + 1$. Sabe-se que se z_1 é um zero de $P(z)$, então $\dfrac{1}{z_1}$ também será. Pelo Teorema da Decomposição,

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(z - \frac{1}{z_1}\right)(z - z_1) \\ &= z^2 + z\left(-\frac{1}{z_1} - z_1\right) + 1. \end{aligned}$$

Assim, $a_1 = -\dfrac{1}{z_1} - z_1$. Para z_1 e $\dfrac{1}{z_1}$ serem reais, $a_1 \geq 2$ ou $a_1 \leq -2$.
Com isso segue que $a_1 \neq 0$.

- $n = 3$, tem-se $P(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_1 z + 1$. Sabe-se que z_1, $\dfrac{1}{z_1}$ e -1 são zeros de $P(z)$. Pelo Teorema da Decomposição

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(z - \frac{1}{z_1}\right)(z - z_1)(z+1) \\ &= \left[z^2 + z\left(-\frac{1}{z_1} - z_1\right) + 1\right](z+1) \\ &= z^3 + z^2\left(1 - \frac{1}{z_1} - z_1\right) + z\left(1 - \frac{1}{z_1} - z_1\right) + 1. \end{aligned}$$

Assim, $a_1 = 1 - \dfrac{1}{z_1} - z_1$. Então para z_1 e $\dfrac{1}{z_1}$ serem reais, $a_1 \geq 3$ ou $a_1 \leq -1$.
Consequentemente, $a_1 \neq 0$.

- $n = 4$, tem-se $P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1$. Sejam $z_1, \dfrac{1}{z_1}, z_2, \dfrac{1}{z_2}$ zeros de $P(z)$. Pelo Teorema da Decomposição,

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(z - \frac{1}{z_1}\right)(z - z_1)\left(z - \frac{1}{z_2}\right)(z - z_2) \\ &= \left[z^2 + z\left(-\frac{1}{z_1} - z_1\right) + 1\right]\left[z^2 + z\left(-\frac{1}{z_2} - z_2\right) + 1\right] \\ &= \left(z^2 + \alpha z + 1\right)\left(z^2 + \beta z + 1\right) \\ &= z^4 + z^3(\alpha + \beta) + z^2(2 + \alpha\beta) + z(\alpha + \beta) + 1, \end{aligned}$$

onde $\alpha = -\dfrac{1}{z_1} - z_1$ e $\beta = -\dfrac{1}{z_2} - z_2$. Assim, $a_1 = \alpha + \beta$ e $a_2 = \alpha\beta + 2$. Logo, para $z_1, \dfrac{1}{z_1}, z_2, \dfrac{1}{z_2}$ serem reais, $\alpha \geq 2$ ou $\alpha \leq -2$ e $\beta \geq 2$ ou $\beta \leq -2$.
Então, $a_2 \neq 0$.

4.3.2 Teorema de Hermite

O Teorema de Hermite será aplicado aos polinômios palindrômicos de graus 2 e 3 para se obter uma relação entre os coeficientes do polinômio e gerar somente zeros reais.

- Para $n = 2$, considerando $a_0 = a_2 = 1$, $P(z) = z^2 + a_1 z + 1$. Note que $\sigma_1 = -a_1$ e $\sigma_2 = 1$. Então, $S_0 = 2$, $S_1 = \sigma_1$ e $S_2 = \sigma_1^2 - 2$ e a matriz de Hermite será

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_1^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Os menores principais serão:

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= 2 \geq 0; \\ \nabla_2 &= \sigma_1^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \sigma_1 \leq -2 \text{ ou } \sigma_1 \geq 2 \Rightarrow a_1 \leq -2 \text{ ou } a_1 \geq 2. \end{aligned}$$

- Para $n = 3$, considerando $a_0 = a_3 = 1$, $P(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_1 z + 1$. Segue que $\sigma_1 = -a_1$, $\sigma_2 = a_1 = -\sigma_1$ e $\sigma_3 = -1$. Então, $S_0 = 3$, $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_1^2 + 2\sigma_1$, $S_3 = \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2 - 3$ e $S_4 = \sigma_1^4 + 4\sigma_1^3 + 2\sigma_1^2 - 4\sigma_1$. A matriz de Hermite será

$$H_3 = \begin{pmatrix} 3 & \sigma_1 & \sigma_1^2 + 2\sigma_1; \\ \sigma_1 & \sigma_1^2 + 2\sigma_1 & \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2 - 3; \\ \sigma_1^2 + 2\sigma_1 & \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2 - 3 & \sigma_1^4 + 4\sigma_1^3 + 2\sigma_1^2 - 4\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Os menores principais serão:

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= 3 \geq 0; \\ \nabla_2 &= 2\sigma_1^2 + 6\sigma_1 \geq 0 \Leftrightarrow \sigma_1 \leq -3 \text{ ou } \sigma_1 \geq 0 \Rightarrow a_1 \leq 0 \text{ ou } a_1 \geq 3; \\ \nabla_3 &= \sigma_1^4 + 8\sigma_1^3 + 18\sigma_1^2 - 27 \geq 0 \Leftrightarrow \sigma_1 \leq -3 \text{ ou } \sigma_1 \geq 1 \Rightarrow a_1 \leq -1 \text{ ou } a_1 \geq 3. \end{aligned}$$

Fazendo a intersecção entre os resultados anteriores segue que $a_1 \leq -1$ ou $a_1 \geq 3$.

4.3.3 Teorema dos Menores Principais

O Teorema dos Menores Principais será aplicado nos polinômios palindrômicos de graus 2 e 3 para se obter uma relação entre os coeficientes do polinômio e gerar somente zeros reais.

- Para $n = 2$ e $a_0 = a_2 = 1$, $P(z) = z^2 + a_1 z + 1$. Logo, $P'(z) = 2z + a_1$. Desta forma, a matriz de Hurwitz será

$$H_3(P', P) = \begin{pmatrix} 2 & a_1 & 0 \\ 1 & a_1 & 1 \\ 0 & 2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Os menores principais ímpares serão:

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= 2 \geq 0; \\ \nabla_3 &= a_1^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a_1 \leq -2 \text{ ou } a_1 \geq 2. \end{aligned}$$

- Para $n = 3$ e $a_0 = a_3 = 1$, $P(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_1 z + 1$. Logo, $P'(z) = 3z^2 + 2a_1 z + a_1$. Desta forma, a matriz de Hurwitz será

$$H_5(P', P) = \begin{pmatrix} 3 & 2a_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2a_1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2a_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Os menores principais ímpares serão:

$$\begin{aligned}
\nabla_1 &= 3 \geq 0; \\
\nabla_3 &= 2a_1^2 - 6a_1 \geq 0 \Leftrightarrow a_1 \leq 0 \text{ ou } a_1 \geq 3; \\
\nabla_5 &= a_1^4 - 8a_1^3 + 18a_1^2 - 27 \geq 0 \Leftrightarrow a_1 \leq -1 \text{ ou } a_1 \geq 3.
\end{aligned}$$

Fazendo a intersecção entre os resultados anterios segue que $a_1 \leq -1$ ou $a_1 \geq 3$.

Observe que, para $n = 2$ e 3, tanto aplicando o Teorema da Decomposição, quanto o Teorema de Hermite ou dos menores principais, a relação encontrada para o coeficiente a_1 é a mesma, ou seja, não importa qual a teoria utilizada para encontrar condições sobre os coeficientes de $P(z)$, todas as três apresentadas nesta seção geram a mesma relação entre os coeficientes para se obter somente zeros reais de polinômios palindrômicos.

4.4 Gerando Classes de Polinômios Palindrômicos com Zeros somente Reais

O objetivo desta seção é obter polinômios palindrômicos de graus par e ímpar, cujos zeros são todos reais e conhecidos. Ou seja, conhecendo os zeros de $P(z)$ (da forma $z_1, \dfrac{1}{z_1} \in \mathbb{R}$), como serão seus coeficientes? Para responder esta questão será utilizado o Teorema da Decomposição e serão considerados zeros com multiplicidades.

Sejam $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ um polinômio palindrômico de grau n e $a_0 = a_n = 1$. Sabe-se que se z_1 for zero de $P(z)$, então $\dfrac{1}{z_1}$ também será. Logo, $P(z)$ pode ser decomposto em relação aos seus zeros da seguinte forma.

Para n par, segue que

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z - z_1)^{\nu_1}\left(z - \frac{1}{z_1}\right)^{\nu_1}(z - z_2)^{\nu_2}\left(z - \frac{1}{z_2}\right)^{\nu_2}\ldots(z - z_j)^{\nu_j}\left(z - \frac{1}{z_j}\right)^{\nu_j} \\
&= \left[(z - z_1)\left(z - \frac{1}{z_1}\right)\right]^{\nu_1}\left[(z - z_2)\left(z - \frac{1}{z_2}\right)\right]^{\nu_2}\ldots\left[(z - z_j)\left(z - \frac{1}{z_j}\right)\right]^{\nu_j} \\
&= \left(z^2 + \lambda_1 z + 1\right)^{\nu_1}\left(z^2 + \lambda_2 z + 1\right)^{\nu_2}\ldots\left(z^2 + \lambda_j z + 1\right)^{\nu_j} \\
&= \prod_{l=1}^{j}\left(z^2 + \lambda_l z + 1\right)^{\nu_l},
\end{aligned}$$

com $j \leq \dfrac{n}{2}$, onde ν_i, $i = 1, \ldots, j$ representa as respectivas multiplicidades dos zeros z_i, $i = 1, \ldots, j$, sendo $2(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j) = n$ e $\lambda_j = \left(-z_j - \dfrac{1}{z_j}\right)$.

Será analisado o caso em que $\nu_1 = \dfrac{n}{2}$ e $\nu_2 = \ldots = \nu_j = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
P(z) &= z^n + \ldots + a_1 z + 1 \\
&= (z - z_1)^{\frac{n}{2}}\left(z - \frac{1}{z_1}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left[z^2 - \left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)z + 1\right]^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(z^2 + \lambda z + 1\right)^{\frac{n}{2}},
\end{aligned}$$

onde $\lambda = -z_1 - \dfrac{1}{z_1}$. Considerando $n = 2k$ segue que

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \left(z^2+\lambda z+1\right)^{\frac{n}{2}}\\
&= \left(z^2+\lambda z+1\right)^{\frac{2k}{2}}\\
&= \left(z^2+\lambda z+1\right)^{k}\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(z^2)^{k-j}(\lambda z+1)^j\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^{2k-2j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(\lambda z)^{j-l}1^l\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^{2k-2j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\lambda^{j-l}z^{j-l}\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^{2k-2j}\left[\binom{j}{0}\lambda^j z^j+\binom{j}{1}\lambda^{j-1}z^{j-1}+\ldots+\binom{j}{j}\right]\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\binom{j}{0}\lambda^j z^{n-j}+\binom{j}{1}\lambda^{j-1}z^{n-j-1}+\ldots+\binom{j}{j}z^{n-2j}\right]\\
&= \binom{k}{0}\binom{0}{0}z^n+\binom{k}{1}\left[\binom{1}{0}\lambda z^{n-1}+\binom{1}{1}z^{n-2}\right]\\
&\quad+\binom{k}{2}\left[\binom{2}{0}\lambda^2z^{n-2}+\binom{2}{1}\lambda z^{n-3}+\binom{2}{2}z^{n-4}\right]\\
&\quad+\ldots+\binom{k}{k}\left[\binom{k}{0}\lambda^k z^{n-k}+\ldots+\binom{k}{k-1}\lambda+\binom{k}{k}z\right]\\
&= \binom{k}{0}\binom{0}{0}z^n+\binom{k}{1}\binom{1}{0}\lambda z^{n-1}+z^{n-2}\left[\binom{k}{1}\binom{1}{1}+\binom{k}{2}\binom{2}{0}\lambda^2\right]\\
&\quad+\ldots+z^2\left[\binom{k}{k-1}\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k}\binom{k}{k-2}\lambda^2\right]+\binom{k}{k}\binom{k}{k-1}\lambda z+\binom{k}{k}\binom{k}{k}.
\end{aligned}
$$

Logo, para $i = 0, 1, \ldots, \dfrac{n}{2}$,

$$
a_{n-i} = a_i = \sum_{j=0}^{l}\binom{k}{i-j}\binom{i-j}{j}\lambda^{i-2j}, \tag{4.3}
$$

onde $l = \frac{i}{2} \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 26 *Sejam* $n = 12$ *e* $\lambda = 10$. *Calculando os coeficientes, segue que* $a_{12} = a_0 = 1$, $a_{11} = a_1 = 60$, $a_{10} = a_2 = 1506$, $a_9 = a_3 = 20300$, $a_8 = a_4 = 156015$, $a_7 = a_5 = 660600$ *e* $a_6 = 1309020$.

Assim,

$$
P(z) = 1 + 60z + 1506z^2 + 20300z^3 + 156015z^4 + 660600z^5 + 1309020z^6 + 660600z^7 + 156015z^8 + 20300z^9 + 1506z^{10} + 60z^{11} + z^{12}
$$

e seus zeros são $z_1 = -5 - 2\sqrt{6}$ *e* $z_2 = -5 + 2\sqrt{6}$ *ambos de multiplicidade* 6.

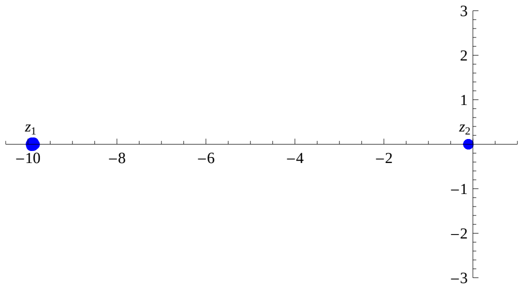


Figura 4.21: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 1 + 60z + 1506z^2 + 20300z^3 + 156015z^4 + 660600z^5 + 1309020z^6 + 660600z^7 + 156015z^8 + 20300z^9 + 1506z^{10} + 60z^{11} + z^{12}$.

Para $n+1$ ímpar, segue que

$$P(z) = (z+1)^{\nu_1}(z-z_1)^{\nu_2}\left(z-\frac{1}{z_1}\right)^{\nu_2}\ldots(z-z_j)^{\nu_{j+1}}\left(z-\frac{1}{z_j}\right)^{\nu_{j+1}},$$

com $2(\nu_2+\nu_3+\ldots+\nu_{j+1}) = t$, t par e ν_1 ímpar onde $\nu_1 + t = n+1$.

Considerando $\nu_1 = 1, \nu_2 = \dfrac{n}{2}$ e $\nu_3 = \ldots = \nu_{j+1} = 0$ e $b_{n+1} = b_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
P(z) &= z^{n+1} + b_n z^n + \ldots + b_1 z + 1\\
&= (z-z_1)^{\frac{n}{2}}\left(z-\frac{1}{z_1}\right)^{\frac{n}{2}}(z+1)\\
&= \left[(z-z_1)\left(z-\frac{1}{z_1}\right)\right]^{\frac{n}{2}}(z+1)\\
&= \left[z^2-\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)z+1\right]^{\frac{n}{2}}(z+1).
\end{aligned}$$

Para $\left(z^2+\lambda z+1\right)^{\frac{n}{2}}$, onde $\lambda = \left(-z_1-\dfrac{1}{z_1}\right)$ e $n = 2k$, os coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ são dados pela equação (4.3).

Desta forma, para encontrar uma expressão para os coeficientes de $P(z)$, basta multiplicar o resultado encontrado para n par por $(z+1)$. Logo,

$$\begin{aligned}
P(z) = {} & \binom{k}{0}\binom{0}{0}z^{n+1} + z^n\left[\binom{k}{0}\binom{0}{0} + \binom{k}{1}\binom{1}{0}\lambda\right]\\
&+z^{n-1}\left[\binom{k}{1}\binom{1}{1} + \binom{k}{1}\binom{1}{0}\lambda + \binom{k}{2}\binom{2}{0}\lambda^2\right]\\
&+\ldots+z^2\left[\binom{k}{k-1}\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k}\binom{k}{k-1}\lambda + \binom{k}{k}\binom{k}{k-2}\lambda^2\right]\\
&+z\left[\binom{k}{k}\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\binom{k}{k}\lambda\right] + \binom{k}{k}\binom{k}{k}.
\end{aligned}$$

Então, os coeficientes serão $b_{n+1-i} = b_i = a_i + a_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, \dfrac{n}{2}$.

Exemplo 27 *Sejam $n = 13$ e $\lambda = 10$. Calculando os coeficientes, segue que*

$$P(z) = 1 + 61z + 1566z^2 + 21806z^3 + 176315z^4 + 816615z^5 + 1969620z^6 + 1969620z^7 + 816615z^8 + 176315z^9 + 21806z^{10} + 1566z^{11} + 61z^{12} + z^{13},$$

cujos zeros são $z_1 = -5 - 2\sqrt{6}$ e $z_2 = -5 + 2\sqrt{6}$, ambos de multiplicidade seis, e $z_3 = -1$.

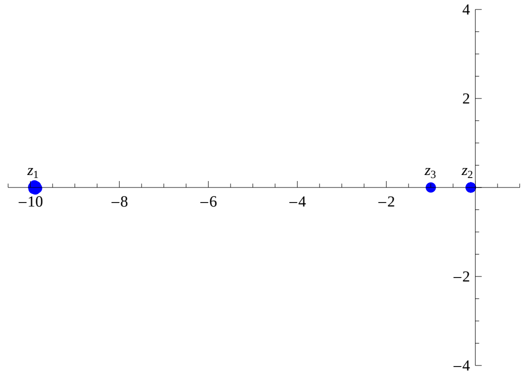


Figura 4.22: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 1 + 61z + 1566z^2 + 21806z^3 + 176315z^4 + 816615z^5 + 1969620z^6 + 1969620z^7 + 816615z^8 + 176315z^9 + 21806z^{10} + 1566z^{11} + 61z^{12} + z^{13}$.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho foram estabelecidas condições necessárias e suficientes para que polinômios palindrômicos de grau n, com coeficientes reais, tenham somente zeros reais. Tal teoria merece atenção, visto que não é muito explorada na literatura. O principal resultado deste trabalho, o Teorema 17, é um resultado inédito, sendo que está sendo elaborado um artigo com tal resultado para divulgar as principais contribuições deste trabalho.

Vale ressaltar que ainda podem ser retiradas informações, através da teoria estudada, sobre os zeros complexos de polinômios palindrômicos que estejam fora do círculo unitário. Esse tema então se torna uma proposta de trabalho futuro.

Referências

[1] V.A. Botta. Polinômios algébricos e trigonométricos com zeros reais. Master's thesis, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, Fevereiro 2003.

[2] C.B. Boyer. *História da Matemática.* Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

[3] T.S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[4] A. Cohn. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Mathematische Zeitschrift*, 14:110–148, 1922.

[5] K. Driver; K. Jordaan; A. Martínez-Finkelshtein . Pólya frequency sequences and real zeros of some ${}_3F_2$ polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 332:1045–1055, 2007.

[6] H.G. Funkhouser. A short account of the history of symmetric functions of roots od equations. *Amer. Math. Monthly*, 37(7):357–365, 1930.

[7] F.R. Gantmacher. *Aplications of the Theory of Matrices.* Wiley Classics Library, 1959.

[8] A. Hefez; M.L.T. Villela. *Polinômios e Equações Algébricas.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[9] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*, volume 1. Wiley Classics Library, 2 edition, 1988.

[10] G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 6. Atual, 2002.

[11] N. Ito; H.K. Wimmer. Self-inversive Hilbert space operator polynomials with spectrum on the unit cicle. *J. Math. Anal. Appl.*, 436:683–691, 2016.

[12] S.-H. Kim; C.W. Park. On the zeros of certain self-reciprocal polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 339:240–247, 2008.

[13] D.Y. Kwon. Reciprocal polynomials with all zeros on the unit circle. *Acta Math. Hungar.*, 131:285–294, 2011.

[14] P. Lakatos. On zeros of reciprocal polynomials. *Publ. Math. Debrecen*, 61:645–661, 2002.

[15] P. Lakatos; L. Losonczi. On zeros of reciprocal polynomials of odd degree. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 4:8–15, 2003.

[16] M. Marden. *Geometry of Polynomials.* American Mathematical Society, Providence, 1966.

[17] G.V. Milovanović; D.S. Mitrinović; Th.M. Rassias. *Topics in Polynomial: Extremal problems, inequalities, zeros.* World Scientific, Singapore, 1994.

[18] A.C.M. Neto. *Tópicos de Matemática Elementar*, volume 4. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[19] G. Pólya; G. Szegő. *Problems and Theorems in Analysis*, volume 2. Springer-Verlag, Berlim, 1976.

[20] T.J. Rivlin. *Chebyshev polynomials.* A Wiley-Interscience Publication, 1990.

[21] A. Schinzel. Self-inversive polynomials with all zeros on the unit circle. *Ramanujan J.*, 9:19–23, 2005.