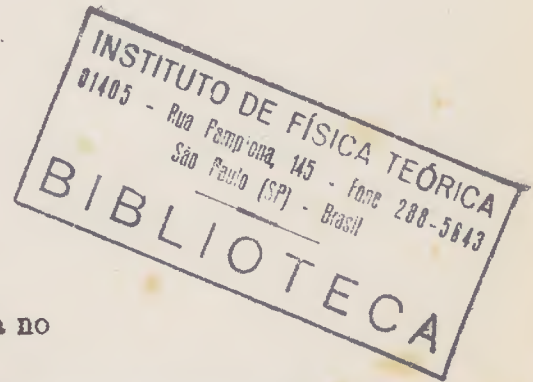


**O MÉTODO ITERATIVO PARA A RESOLUÇÃO DA
EQUAÇÃO DE BOLTZMANN NÃO LINEAR**



Tese de doutorado apresentada no
Instituto de Física Teórica

Salomón Sylvain Mizrahi
Orientador

Darcy Hiroe Fujii



São Paulo, 1988

ABSTRACT

We define an iterative scheme to solve the Nonlinear Boltzmann Equation. We apply this method to a spatially uniform and isotropic velocity distribution function on the Maxwell and VHP (Very Hard Particle) models. We also compare our results for VHP model with the exact solution. We find that our iterative scheme converges fastly.

AGRADECIMENTOS

-Aos professores Carlos Roberto Garibotti e Raúl O. Barrachina pela orientação , possibilitando a minha permanência no Centro Atômico Bariloche, onde grande parte deste trabalho foi realizado.

-Ao professor Salomón S.Mizrahi por ter acompanhado a difícil etapa de finalização da tese, cuja leitura crítica do manuscrito e o apoio pessoal tornaram possível esta apresentação .

-Ao professor Valdir C. Aguilera-Navarro pela contínua orientação durante minha vida "IFTeana".

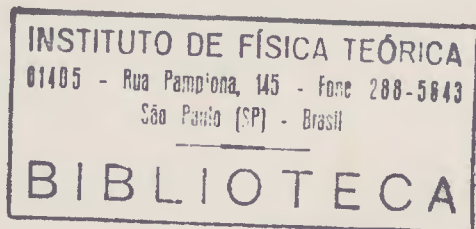
-Aos Amigos do Centro Atômico Bariloche pela acolhida calorosa e em especial aos de Colisiones Atómicas e aos da convivência diária no "Pabellón 6".

-A todos os colegas do Instituto de Física Teórica pelas críticas, sugestões e amizade.

-Aos meus professores do Instituto de Física Teórica, que participaram na minha formação .

-À UNESP pelo afastamento parcial concedido.

-Ao CNPq e à CAPES pelas Bolsas de Estudo.



RESUMO

Nesta tese estudamos a equação de Boltzmann não linear. Introduzimos um esquema iterativo para a sua resolução . Aplicamos o método a uma função distribuição espacialmente homogênea e isotrópica na velocidade, nos modelos de Maxwell e VHP (Partícula Muito Dura). Mostramos o resultado da aplicação ao modelo VHP comparado com a solução exata, onde observamos uma rápida convergência para a solução .

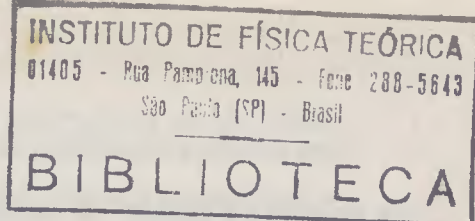
1. Introdução	1
2. Metodologia	2
3. Resultados	3
4. Conclusões	4
5. Referências	5
6. Anexos	6
7. Bibliografia	7
8. Índice	8
9. Apêndice	9
10. Glossário	10
11. Siglas	11
12. Notas	12
13. Comentários	13
14. Conclusões	14
15. Referências	15
16. Anexos	16
17. Bibliografia	17
18. Índice	18
19. Apêndice	19
20. Glossário	20
21. Siglas	21
22. Notas	22
23. Comentários	23

*Dedico aos meus pais
Yoshihira e Tomeko*

ÍNDICE

I - Introdução	1
II - Conceitos Básicos	6
III- Métodos Aproximativos	18
1.Métodos dos Momentos	18
2.Método da Transformada de Fourier	20
3.Método da Transformada de Laplace	25
4.Método da Transformada em Temperatura	27
IV - Método Iterativo	30
V - Aplicações e Discussões	42
VI - Bibliografia	51
Apêndice A	53
Apêndice B	55
Apêndice C	58
Apêndice D	60
Apêndice E	64

I- INTRODUÇÃO



A teoria cinética dos gases é a parte da física estatística que trata da dinâmica do não equilíbrio, da dependência temporal e em particular se preocupa em formular as equações com as propriedades de transporte da matéria. A função distribuição do conjunto das moléculas de um gás diluído se propaga de acôrdo à equação de Boltzmann.

A equação de Boltzmann é uma equação integro-diferencial não linear em derivadas parciais, proposta por Ludwig Boltzmann em 1872 e é desta equação que trataremos neste trabalho. Sua obtenção está baseada na hipótese de que o gás é suficientemente diluído de maneira que somente as colisões binárias são consideradas importantes. Em termos de interação intermolecular significa que o tempo que uma molécula leva numa interação com outras, é pequeno comparado com o tempo que gasta no movimento retilíneo livre.

Considerando $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, uma função distribuição na representação das velocidades (Ernst, 1981), expressamos a equação de Boltzmann como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = B[f, f] \quad (I.1)$$

onde $\vec{r}, \vec{v}, \vec{F}$ são respectivamente, a posição, a velocidade e a força externa atuando sobre o gás. O termo $B[f, f]$ é o termo bilinear de colisão. A forma explícita deste termo será discutida posteriormente.

A ausência de uma solução exata explícita desta equação até a presente data tem fornecido uma forte motivação para os pesquisadores estudarem este tema, como pode ser visto no grande número de trabalhos conhecidos na literatura. Ver, por exemplo a referência (Ernst, 1981).

Um estudo sistemático da bibliografia mostra contribuições , principalmente no sentido de indicar os caminhos — métodos aproximativos — que podem levar à obtenção de soluções aproximadas para a equação de Boltzmann, de acôrdo com as condições de contorno consideradas.

Dentre os métodos aproximativos conhecidos na física teórica, destacamos os métodos variacionais, o método das transformações integrais, os métodos perturbativos e iterativos, o método dos momentos, o método da solução numérica direta e o da expansão em autofunções . Estes métodos são aplicados à equação de Boltzmann (Cercignani, 1975; Ernst, 1981).

Aqui, daremos ênfase aos métodos das transformadas integrais e aos métodos perturbativos.

Em 1976, Bobylev (Bobylev, 1976) e Krook e Wu (Krook e Wu, 1976) em trabalhos independentes publicaram uma interessante solução da equação de Boltzmann, conhecida hoje por "solução BKW". Chamamos a atenção que foi Bobylev quem introduziu na ocasião o método da Transformada de Fourier. Apesar dos interessantes resultados da solução BKW, a aplicabilidade ficou restrita a casos especiais, às "equações de Boltzmann-modelo". Com relação a esta denominação , é sabido que devido à complicada estrutura do termo de colisão, $B[f, f]$, são introduzidos os chamados modelos matemáticos (Ernst, 1981) que dão origem a equações simplificadas, não deixando porém de obedecer às leis de conservação (do número de partículas, do momentum linear e da energia), no entanto, estas equações não são necessariamente obtidas a partir de um potencial de interação . Uma discussão a respeito será feita no Capítulo II. Outras transformações integrais de igual importância que a de Bobylev e com restrições também devido à estrutura de $B[f, f]$ foram propostas: a Transformada de Laplace introduzida por Ernst (Ernst, 1979), a de Alexanian (Alexanian, 1979)

e a Transformada em Temperatura (Barrachina, 1985; Barrachina et al., 1986).

Por outro lado, os métodos perturbativos têm importantes antecedentes, tais como os trabalhos de Chapman (Chapman, 1917), Enskog (Enskog, 1916) e Hilbert (Hilbert, 1912), que deram os primeiros passos nesta direção. Fundamentalmente, eles expandiram a função distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ como uma série de potências do número de Knudsen (Cercignani, 1983). Esta expansão leva, em ordem zero às equações de Euler para um gás ideal e em primeira ordem às equações de Navier-Stokes da hidrodinâmica. Nas ordens seguintes, mais altas, obtém-se as equações de Burnett.

Recentemente, usando um modelo simplificado, Bobylev (Bobylev, 1982) mostrou que as equações de segunda ordem de Burnett não melhoram, como seria esperado, os resultados obtidos com as equações de primeira ordem (Navier-Stokes), este é um ponto de discussão em torno das propriedades de convergência da aproximação. Deve-se ressaltar, no entanto, os importantes resultados obtidos com relação aos coeficientes de transporte utilizando as aproximações em primeira ordem para gases diluídos (Truesdell, 1980; Chapman e Cowling, 1970). Mais tarde, o trabalho de Carleman (Carleman, 1957) mostrou a existência de soluções da equação de Boltzmann para um gás isotrópico de esferas elásticas. No momento este é considerado um dos casos mais simples, contudo a solução geral não é conhecida (Ernst, 1981). A função distribuição expandida em polinômios de Hermite, apresentada por Grad (Grad, 1949) leva a soluções especiais da equação de Boltzmann, assumindo que $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ depende de treze momentos (isto é, $1, \bar{v}, v^2, v_x^2, v_y^2, v_x v_z, v_y v_x, v_y v_z$ e $v^2 \bar{v}$) ou seja, quando termos de segunda ordem são mantidos na expansão, a função distribuição fica determinada pelos treze momentos. Usando os oito momentos além dos cinco utilizados na teoria de Chapman-Enskog-Hilbert (que chamaremos de CEH, para facilitar), Grad mostrou que a solução especial obtida decai exponencialmente num

tempo da ordem do tempo associado ao caminho livre médio, tempo este calculado diretamente com base na teoria CEH com os cinco momentos de onde se pode ver que é possível simplificar a descrição do gás após um tempo $t \gg t_{clm}$ ($t_{clm} = \text{caminho livre médio}$), pois a contribuição dos oito momentos adicionais desaparece para $t \gg t_{clm}$, assim a solução especial de Grad generaliza a solução CEH.

Em 1951, Wild (Wild, 1951) transformou a equação de Boltzmann numa equação integral solúvel via iterações sucessivas. Ele aplicou o método para um gás com moléculas interagindo de forma tal que a seção de choque diferencial é inversamente proporcional às suas velocidades relativas. A convergência do método requer um corte para pequenos ângulos de espalhamento. A aplicação deste método se restringe exclusivamente ao modelo de interação pseudo-Maxwelliana (Ernst, 1981). Posteriormente, Arkeryd (Arkeryd, 1972) generalizou esta aproximação para provar a convergência das soluções da equação para interações mais gerais.

Nos Capítulos II e III, procuramos fazer uma breve revisão de uma forma geral do tema tratado.

No Capítulo IV propomos e descrevemos um método alternativo para a resolução da equação de Boltzmann, baseado em um esquema iterativo. Fundamentalmente, seguimos o seguinte raciocínio: o método iterativo é uma extensão de um método de resolução aproximado já conhecido — a equação linearizada — no qual são desprezados os termos quadráticos de correção, em relação ao equilíbrio, na equação não linear. Em geral a solução da equação linearizada é uma boa aproximação para a função distribuição, mas em casos em que o desvio inicial do equilíbrio é importante, esta não descreve bem a evolução do sistema. Neste caso, pode-se calcular o termo bilinear. A este método assim orig-

inado, que chamaremos de Método Iterativo, é avaliado através de sua aplicação a problemas específicos — Maxwell e VHP, (Fujii et al., 1986)

O Capítulo V é dedicado à discussão dos resultados. Apresentamos na última parte cinco Apêndices, contendo algumas deduções matemáticas que podem ser necessárias em estudos futuros sobre este tema.

A bibliografia relacionada em ordem alfabética, contém os principais trabalhos consultados.

II - CONCEITOS BÁSICOS

Seja a função distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, função da posição \vec{r} , da velocidade \vec{v} e do tempo t . Considerando um gás diluído e uma dada forma de interação entre as partículas, vamos obter uma equação de evolução para $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, ou seja, a equação de Boltzmann.

Para a obtenção desta equação, definimos um volume arbitrário V e calculamos a taxa temporal da variação do número de partículas neste volume que tenham velocidades entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$. Supomos que somente colisões binárias ocorrem entre as partículas de tal maneira que a presença de uma em um dado ponto do espaço, não afeta a outra na mesma localização e também as possíveis correlações entre as partículas são desprezadas, isto significa que a probabilidade de achar duas partículas com velocidades \vec{v} e \vec{v}_1 simultaneamente em $d\vec{r}$ e dada simplesmente pelo produto:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) d\vec{r}$$

Essa suposição permite determinar a variação de $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ devido a eventuais colisões binárias.

Seja $I(g, \hat{g} \cdot \hat{g}')$ a seção de choque diferencial, sendo que \hat{g} , \hat{g}' e g são os versores e o módulo, respectivamente, das quantidades vetoriais \vec{g} e \vec{g}' definidas por,

$$\vec{g} = \vec{v} - \vec{v}_1 \quad e \quad \vec{g}' = \vec{v}' - \vec{v}'_1,$$

onde \vec{v} e \vec{v}_1 são as velocidades das partículas antes da colisão e \vec{v}' e \vec{v}'_1 as velocidades das partículas após a colisão. Na Figura (1), estamos representando graficamente \vec{g} e \vec{g}' .

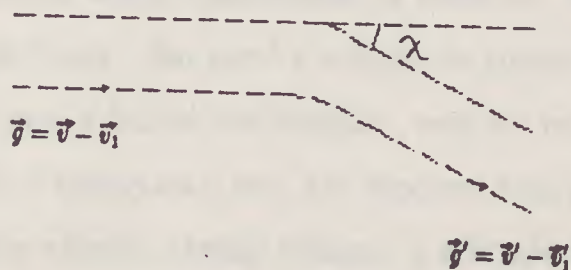


Fig.1.

Num volume V o número de partículas pode variar devido às colisões, ou seja, as partículas podem estar com velocidade v e deixarem V após uma colisão ou também sair de V sem sofrer nenhuma colisão. Por outro lado, podem estar "fora" de V com uma velocidade \vec{v}' e surgirem em V com velocidade \vec{v} após sofrerem uma colisão. Às partículas pertencentes ao primeiro caso, chamamos de partículas perdidas e o número dessas partículas é dado pelo termo

$$\int d\vec{v}_1 d\hat{g} g I(g, \hat{g} \cdot \hat{g}') f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t).$$

As partículas pertencentes ao segundo caso são as partículas ganhas para o volume V e o seu número é dado pelo termo

$$\int d\vec{v}_1 d\hat{g}' g' I(g', \hat{g} \cdot \hat{g}') f(\vec{r}, \vec{v}', t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t).$$

Portanto, a variação total do número de partículas em V no tempo t é dada por

$$\int d\vec{v}_1 d\hat{g}' g' I(g, \hat{g} \cdot \hat{g}') [f(\vec{r}, \vec{v}', t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)], \quad (II.1)$$

onde

$$d\vec{v}_1 d\hat{g} = |J| d\vec{v}_1' d\hat{g}';$$

$|J| = 1$ é o Jacobiano da transformação e pela conservação da energia temos $g = g'$.

Na Eq.(II.1) estão contidas as informações sobre a dinâmica do sistema de partículas em estudo e é o que chamamos de termo de colisão, $B[f, f]$ da Eq.(I.1), isto é :

$$B[f, f] = \int d\vec{v}_1 d\hat{g}' g' I(g, \hat{g} \cdot \hat{g}') [f(\vec{r}, \vec{v}', t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)] \quad (II.1')$$

Substituindo a Eq.(II.1') em (I.1), obtemos a equação de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int d\vec{v}'_1 d\vec{g} g I(g, \vec{g} \cdot \vec{g}') \\ [f(\vec{r}, \vec{v}', t) f(\vec{r}, \vec{v}'_1, t) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)]. \quad (II.2)$$

Vamos verificar algumas propriedades da Eq.(II.2) que são fundamentais. A solução desta equação é consistente com as leis de conservação do número de partículas, do momentum linear e da energia; isto é, respectivamente:

$$\int f d\vec{v} = N \\ \int f \vec{v} d\vec{v} = 0 \\ \int f v^2 d\vec{v} = \frac{Ndk_B T}{m}; \quad (II.3)$$

são constantes do movimento e onde d é a dimensão do espaço de configuração, T é a temperatura que pode ser considerada como uma medida de energia média por grau de liberdade e k_B é a constante de Boltzmann. Existe uma solução não trivial da Eq.(II.2). Supondo que a função distribuição é independente de \vec{r} e t e que a força externa é nula,

$$B[f, f] = 0,$$

resulta então que

$$f(\vec{v}') f(\vec{v}'_1) = f(\vec{v}) f(\vec{v}_1).$$

e a solução consistente com as leis de conservação

$$f_0(v) = \frac{e^{-mv^2/2k_B T}}{(2\pi k_B T/m)^{d/2}} N, \quad (II.4)$$

é a solução de equilíbrio da equação de Boltzmann. Qualquer solução da equação de Boltzmann tende a se aproximar de $f_0(v)$ para longos tempos, isto é

justamente o que afirma o teorema-II da teoria cinética (Cercignani,1975) o qual garante que qualquer função distribuição inicial $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ se aproxima da distribuição de equilíbrio $f_0(v)$ para longos tempos. Isto é , para $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, solução da Eq.(II.2), o funcional

$$H = \int d\vec{r}d\vec{v}f(\vec{r}, \vec{v}, t)\ln f(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (II.5)$$

satisfaz

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

com a igualdade valendo só quando $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{v})$. Assim, para condições iniciais arbitrárias temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{v}). \quad (II.6)$$

Outra propriedade é que se $f(\vec{r}, \vec{v}, t) \geq 0$ no instante inicial, então $f(\vec{r}, \vec{v}, t) \geq 0$ para todo o tempo t posterior (Ernst, 1981).

No estudo que segue, vamos nos restringir a uma função distribuição

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f(\vec{v}, t),$$

isto é, de um gás espacialmente homogêneo e com força externa nula, tal que a equação de Boltzmann se simplifica para a forma,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int d\vec{v}_1 d\hat{g}' g I(g, \hat{g} \cdot \hat{g}') [f(\vec{v}', t) f(\vec{v}_1', t) - f(\vec{v}, t) f(\vec{v}_1, t)]. \quad (II.7)$$

Sem perda de generalidade podemos reexpressar a Eq.(II.7) como

$$\frac{\partial f}{\partial t} - L[f] = A[f, f], \quad (II.8)$$

onde

$$L[f] = B[f, f_0] + B[f_0, f] \quad (II.8')$$

e

$$A[f, f] = B[f, f] - B[f, f_0] - B[f_0, f]. \quad (II.8'')$$

O teorema- H garante que o funcional

$$H \equiv \int f(\vec{v}, t) \ln \frac{f(\vec{v}, t)}{f_0(\vec{v})} d\vec{v}$$

é uma função não crescente do tempo t não crescente, ou seja,

$$f(\vec{v}, t) \rightarrow f_0(\vec{v}),$$

e quando $t \rightarrow \infty$ e as leis de conservação (número total de partículas, momentum linear e energia) são também satisfeitas.

A teoria pode ser ainda mais simplificada, quando tratamos o caso da função distribuição isotrópica na velocidade, $f(\vec{v}, t) = f(v, t)$, com $v = |\vec{v}|$. Neste caso, vamos introduzir a representação da energia da função distribuição (Ernst, 1981) como

$$F(x, t) = \int \delta(x - \frac{mv^2}{2}) f(v, t) d\vec{v}, \quad (II.9)$$

ou seja,

$$F(x, t) = \Omega_d \left(\frac{2x}{m}\right)^{(d/2-1)} f\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}, t\right), \quad (II.9')$$

onde Ω_d é o ângulo sólido total no espaço de d -dimensões

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

As leis de conservação nessa representação são verificadas:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(x, t) dx &= N \\ \int_0^\infty F(x, t) x dx &= Ndk_B T \end{aligned} \quad (II.10)$$

e a função distribuição de equilíbrio, com $f_0(v)$ dada pela Eq.(II.4), fica

$$F_0^{(d/2-1)}(x) = \frac{N}{\Gamma(d/2)k_B T} \left(\frac{x}{k_B T}\right)^{(d/2-1)} e^{-x/k_B T}. \quad (II.11)$$

Nessa representação a equação de Boltzmann, Eq.(II.7), se escreve

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = B[F, F] \quad (II.12)$$

com

$$B[F, F] = \int_0^\infty du \int_0^u dy [K(x, y; u) \times \\ \times F(y, t)F(u - y, t) - K(y, x; u)F(x, t)F(u - x, t)] \quad (II.12')$$

sendo u a energia total, $(y, u - y)$ representam as energias das partículas que entram e $(x, u - x)$ as energias das partículas que saem do volume V . O núcleo $K(x, y; u)$ representa a taxa de transição para a interação binária

$$(y, u - y) \rightarrow (x, u - x),$$

onde o mesmo deve possuir as propriedades de simetria de interação e a de balanço detalhado, respectivamente,

$$K(x, y; u) = K(u - x, u - y; u),$$

$$K(x, y; u)F_0(y)F_0(u - y) = K(y, x; u)F_0(x)F_0(u - x),$$

implicando na desigualdade

$$\frac{dH}{dt} \leq 0,$$

para o funcional

$$H(t) = \int_0^\infty F(x, t) \ln \frac{F(x, t)}{F_0(x)} dx,$$

e que (o teorema-*H*) garante a convergência de $F(x,t)$ para o seu valor de equilíbrio, Eq.(II.11).

Vimos que, conforme a Eq.(II.2), a estrutura do termo de colisão é determinada pelas forças intermoleculares. Devido à complexidade deste termo a solução geral para forças intermoleculares genéricas e condições iniciais arbitrárias torna-se difícil de ser obtida. Nesse caso, vamos passar então a construir equações de Boltzmann-modelo, de forma a podermos estudar modelos simplificados e assim obter soluções específicas. O passo seguinte deverá ser naturalmente o da obtenção de soluções gerais com condições iniciais arbitrárias.

Equações de Boltzmann-Modelo

Podemos classificar as equações de Boltzmann-modelo em dois grupos (Ernst, 1981):

(a) Determinísticas- caracterizadas por conservar o número de partículas, o momentum linear e a energia.

(b) Estocásticas- caracterizadas por não conservarem o momentum linear, mas conservarem o número de partículas e a energia.

Dentro de cada grupo, especificamos ainda classes, conforme a natureza do termo de taxa de colisão: Maxwell, Interação Fraca e a classe VHP (denominação para a Partícula Muito Dura).

Em outras palavras, considerando um potencial de interação repulsivo do tipo $V(r) \sim r^{-s}$, onde r é a distância interpartícula e com $\hat{g} \cdot \hat{g}'$ definindo o ângulo de espalhamento, χ , a taxa de colisão é dada pela forma (Cercignani, 1975)

$$gI(g, \cos\chi) \sim g^{1-2(d-1)/s} \alpha(\cos\chi), \quad (II.13)$$

onde a escolha da função $\alpha(\cos\chi)$ determina a dependência angular da seção de choque. A lei de interação (dada por s) é que permite classificar claramente o termo para a taxa de colisão nas três classes citadas, isto é:

$$s < 2(d - 1) \quad \text{Interação Fraca} \quad (II.14a)$$

$$s = 2(d - 1) \quad \text{Maxwell} \quad (II.14b)$$

$$s > 2(d - 1) \quad \text{VHP} \quad (II.14c)$$

Quando $s < 2(d - 1)$, a taxa de colisão decresce com o aumento da energia relativa g^2 . No caso em que $s = 2(d - 1)$ definimos as moléculas de Maxwell em d -dimensões. No caso $s > 2(d - 1)$ a taxa de colisão cresce com o aumento da energia relativa g^2 .

Na discussão destas equações de Boltzmann-modelo estaremos considerando os modelos matemáticos, especificando apenas a forma da função $\alpha(\cos\chi)$.

A seguir vamos expor cada um dos três casos (II.14) para os dois grupos de equações de Boltzmann-modelo, (a) e (b), acima citados.

(a₁) *Interação Fraca*: Quando a taxa de colisão é uma função decrescente da energia, na forma:

$$gI(g, \cos\chi) \sim g^{-2q}\alpha(\cos\chi); \quad (q \geq 0). \quad (II.15)$$

de onde relacionamos $s = 2(d - 1)/(2q + 1)$. Esta expressão está associada à equação (Ernst, 1981):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v, t) = \int d\vec{v}_1 \int d\hat{g}' g^{-2q} \alpha(\cos\chi) [f(\vec{v}', t) f(\vec{v}'_1, t) - f(\vec{v}, t) f(\vec{v}_1, t)], \quad (II.16)$$

(a₂) *Maxwell*: Quando a taxa de colisão é dada por

$$gI(g, \cos\chi) = \alpha(\cos\chi) \quad (II.17)$$

a equação de Boltzmann se escreve:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v, t) = \int d\vec{v}_1 \int d\hat{g}' \alpha(\cos\chi) [f(\vec{v}', t) f(\vec{v}'_1, t) - f(\vec{v}, t) f(\vec{v}_1, t)], \quad (II.18)$$

sendo que $\alpha(\cos\chi)$ é uma função complicada na sua forma explícita (Barachina, 1965). Este é o modelo conhecido como Moléculas de Maxwell (em d -dimensões), que é muito importante na teoria cinética, pois conhecidos os autovalores e autofunções da equação de Boltzmann linearizada associada, todos os coeficientes de transporte podem ser calculados. O cálculo destes para potenciais gerais é feito usando um método perturbativo (método introduzido por CEH).

Vários modelos matemáticos dentro desta classe, relativamente a $\alpha(\cos\chi)$ são conhecidos, tais como:

-Modelo pseudo-maxwelliano

$$\int d\hat{g} \alpha(\cos\chi) < \infty.$$

-Modelo delta

$$\alpha(\cos\chi) \sim \delta(\cos\chi)$$

-Modelo seno

$$\alpha(\cos\chi) \sim [1 - (\cos\chi)^2]^\sigma; \quad \sigma = p - \frac{d}{2} + \frac{1}{2}$$

onde o parâmetro σ escrito dessa forma permite considerar eventualmente um sistema de partículas interagindo com p graus de liberdade internos. Em particular dentro do modelo seno, ressaltamos a função associada g_0 , (Ernst, 1981)

$$g_0(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)^{p-1}}{2^{2p-1} B(p, p)}; \quad \mu = \cos\chi. \quad (II.19)$$

onde $B(p, p)$ é a função Beta (Abramowitz, 1964)

(a₃) *VHP* : corresponde à escolha da taxa de colisão na forma

$$gI(g, \cos\chi) = \frac{1}{2} g^{2q} \alpha(\cos\chi); \quad q \geq 1. \quad (II.20)$$

e a equação de Boltzmann fica:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int d\vec{v}_1 d\hat{g} \frac{1}{2} g^{2q} \alpha(\cos\chi) [f(\vec{v}', t) f(\vec{v}'_1, t) - f(\vec{v}, t) f(\vec{v}_1, t)]. \quad (II.21)$$

Esta equação modelo torna-se interessante — apesar da sua seção de choque diferencial não estar associada a nenhuma lei de interação física — uma vez que a solução geral do problema bi-dimensional para distribuições isotrópicas é conhecida exatamente (Ernst e Hendriks, 1979).

(b) Definindo agora, a taxa total das partículas espalhadas para “fora” de V — lembrando que neste volume V arbitrário, o número de partículas pode variar devido à evolução dinâmica das mesmas — como:

$$m_0(x, u) \equiv \int_0^u K(y, x; u) dy \quad (II.22)$$

classificamos o grupo estocástico nas tres classes conforme as expressões (II.14). Faremos aqui, uma restrição quanto à definição (II.22), no seguinte sentido: consideraremos que

$$m_0(x, u) = m_0(u), \quad (II.23)$$

isto é, a taxa total das partículas depende somente da energia total u . Na literatura esta expressão caracteriza o subgrupo “Espalhamento Difuso” do grupo Estocástico (Ernst, 1981). Usando a definição

$$R(x, t) = \frac{F(x, t)}{F_0(x)},$$

para as três classes citadas, temos a taxa total das partículas e a equação de Boltzmann associada:

(b₁) *Interação Fraca*: é caracterizada por

$$m_0(u) = cu^{-q}; \quad q > 0, \quad u \gg 1 \quad (II.24)$$

e a equação de Boltzmann escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial t} R(x, t) = \int_0^\infty dz e^{-z} \int_0^{x+z} dy \times$$

$$\times \frac{c[zy(x+z-y)]^{p-1}}{\Gamma(p)(x+z)^{q+2p-1}} [R(y)R(x+z-y) - R(x)R(z)]$$

(II.24')

com $p = d/2$ e onde $z = u - x$.

(b₂) Maxwell: é caracterizado por

$$m_0(u) = m_0 = \text{constante},$$

(II.25)

e a equação de Boltzmann fica escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} R(x, t) = \int_0^\infty e^{-z} dz \int_0^{x+z} dy \frac{1}{(x+z)^{2p-1}} \times$$

$$\times \left[\frac{y(x+z-y)}{x} \right]^{p-1} R(y, t) R(x+z-y, t) - R(x, t)$$

(II.25')

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) F(x, t) = \int_x^\infty du \int_0^u dy \frac{1}{u^{d-1}} F(x) F(u-x)$$

(II.25'')

(b₃) VHP: é caracterizado por

$$m_0(u) \sim u$$

(II.26)

e a equação de Boltzmann escreve-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + x + p\right)R(x, t) &= \int_0^\infty e^{-z} dz \int_0^{x+z} dy \times \\ &\times \frac{[yz(z+x-y)]^{p-1}}{\Gamma(p)(x+z)^{2(p-1)}B(p, p)} R(y, t)R(z+x-y, t) \quad (II.26') \end{aligned}$$

Estas equações -modelo têm sido resolvidas, considerando-se casos particulares. Por exemplo, na Eq.(II.26'), para $p = 1$, temos o caso bidimensional,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + x + 1\right)R(x, t) = \int_0^\infty e^{-z} dz \int_0^{x+z} dy R(y, t)R(x+z-y, t), \quad (II.27)$$

cuja solução foi obtida por Ernst e Hendriks (Ernst e Hendriks, 1983).

Em seguida vamos passar a apresentar alguns métodos aproximativos para resolver formas das equações -modelo.

III - MÉTODOS APROXIMATIVOS.

1-) Método dos Momentos

A idéia básica do método consiste, em assumir uma forma específica para $f(\vec{v}, t)$, dependendo de N parâmetros, chamados momentos. Usa-se, então, as N equações que envolvem os N momentos, para gerar um conjunto de equações diferenciais parciais em t . Se os momentos formarem um conjunto completo, o conjunto de equações de momentos será equivalente à equação de transporte original.

Como um exemplo, vamos analisar o problema apresentado por Krook e Wu (1976). Estes autores estudaram as equações dos momentos para a equação -modelo de Maxwell no caso tri-dimensional com espalhamento isotrópico.

A existência dos momentos depende do comportamento da função distribuição para valores grandes de x . Restringindo-nos a funções no espaço de Hilbert, todos os momentos existem. A física somente impõe as restrições de que os momentos $M_0(t)$ e $M_1(t)$ existam, ou seja, que as densidades de partícula e de energia total sejam finitas. Se todos os momentos existem, a função geratriz dos momentos escreve-se

$$\Phi(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} M_n(t), \quad (III.1)$$

onde os $M_n(t)$ são os momentos normalizados,

$$M_n(t) = \frac{\langle x^n \rangle}{\langle x^n \rangle_0}, \quad (III.2)$$

e $\langle x^n \rangle_0$ é calculado no estado de equilíbrio. Uma consequência imediata desta definição em combinação com as leis de conservação (II.10) é

$$M_0(t) = M_1(t) = 1, \quad (III.3)$$

pois

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{\Omega_d} \int_0^{\infty} dx x^n F(x, t). \quad (III.4)$$

Para longos tempos a função distribuição $F(x, t)$ se aproxima de $F_0(x)$ e os momentos $\langle x^n \rangle$ se aproximam de seu valor de equilíbrio $\langle x^n \rangle_0$, portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_n(t) = M_n(\infty) = 1.$$

As equações de movimento para os momentos normalizados podem ser diretamente calculados, multiplicando a Eq.(II.18) por v^{2n} e integrando sobre todo o espaço \vec{v} . Este procedimento leva a uma seqüência infinita de equações,

$$\frac{dM_n}{dt} + \mu_{00}M_n = \sum_{k=0}^n \mu_{nk}M_kM_{n-k}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (III.5)$$

onde

$$\mu_{nk} = \binom{n}{k} \int_{-1}^1 d\mu \bar{g}(\mu) \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^k \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{n-k}, \quad (III.6)$$

$$\mu = \cos \chi,$$

e

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A função $\bar{g}(\mu)$ é dada por

$$\bar{g}(\mu) = \frac{2\pi^{(d/2-1)}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} (1-\mu^2)^{(d/2-3)} \alpha(\mu). \quad (III.7)$$

Considerando as relações (III.3), reescrevemos a Eq.(III.5) na forma:

$$\frac{d}{dt}M_n + \Delta_n M_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{nk}M_kM_{n-k}; \quad (III.8)$$

onde

$$\Delta_n = \mu_{00}(1 + \delta_{n0}) - \mu_{0n} - \mu_{nn} \quad (III.8')$$

Explicitamente, as primeiras n -equações e as respectivas soluções, são:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M_0 + \Lambda_0 M_0 &= 0 : \Rightarrow M_0(t) = M_0(0)e^{-\Lambda_0 t} \\ \frac{d}{dt}M_1 + \Lambda_1 M_1 &= 0 : \Rightarrow M_1(t) = M_1(0)e^{-\Lambda_1 t} \\ \frac{d}{dt}M_2 + \Lambda_2 M_2 &= \mu_{21} M_1 M_0 \\ &\Rightarrow M_2(t) = e^{-\Lambda_2 t} [M_2(0) + \int_0^t e^{\Lambda_2 \tau} \mu_{21} M_1^2(\tau) d\tau] \\ \frac{d}{dt}M_3 + \Lambda_3 M_3 &= \sum_{k=1}^2 \mu_{3k} M_k M_{3-k} \\ &\Rightarrow M_3(t) = e^{-\Lambda_3 t} [M_3(0) + \int_0^t e^{\Lambda_3 \tau} \sum_{k=1}^2 \mu_{3k} M_k(\tau) M_{3-k}(\tau) d\tau] \\ &\vdots \\ &\qquad\qquad\qquad (III.9) \end{aligned}$$

Nota-se que as equações para os momentos são lineares inhomogêneas e permitem que cada $M_n(t)$ possa ser determinado, em princípio, sequencialmente, dado os valores iniciais $M_n(0)$ de todos os momentos, isto é, dada a função distribuição inicial $f(v, 0)$. Uma vez que os momentos M_2, \dots, M_{n-1} estão determinados, a equação para $M_n(t)$ se reduz a uma equação diferencial não homogênea linear de primeira ordem. A solução $M_n(t)$ é, então uma soma de termos constantes e exponenciais com dependências nos valores iniciais $M_k(0)$ para $k \leq n$. Enquanto os momentos M_n de ordens mais baixas podem ser calculados de forma relativamente simples; o processo de cálculo torna-se trabalhoso com o aumento de n .

2-) Método da Transformada de Fourier

Bobylev introduziu o método da Transformada de Fourier para o grupo dos Modelo de Maxwell (Bobylev, 1976).

Para a função distribuição de velocidades $f(\vec{v}, t)$ a transformada de Fourier para um caso geral é

$$\Phi(\vec{k}, t) = \int f(\vec{v}, t) e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} d\vec{v}, \quad (III.10)$$

e a anti-transformada correspondente é

$$f(\vec{v}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \Phi(\vec{k}, t) e^{i\vec{v} \cdot \vec{k}} d\vec{k}. \quad (III.11)$$

Na teoria cinética, normalmente, requer-se que a função distribuição ,

$$f(\vec{v}, t) = f_0(v)R(\vec{v}, t) \quad (III.12)$$

pertença ao espaço de Hilbert com norma finita (Bobylev, 1976)

$$N(t) = \|R\| = \int d\vec{v} f_0(v) |R(v, t)|^2 < \infty, \quad 0 \leq t < \infty \quad (III.13)$$

condição esta suficiente para a existência da Transformada de Fourier.

Considerando uma função distribuição isotrópica de velocidades $f(v, t)$, podemos reduzir convenientemente a Transformada de Fourier (III.10) em termos da função distribuição de energia (Apêndice A). Isto é :

$$\langle e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} \rangle \equiv \int d\vec{v} e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} f(v, t) = {}_0F_1\left(\frac{d}{2}, -\frac{k^2 v^2}{4}\right) \quad (III.14)$$

onde ${}_0F_1$ representa uma função hipergeométrica (Abramowitz, 1964), escrita como

$${}_0F_1(a; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(a)_n n!}; \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \quad (III.15)$$

Na representação da energia temos,

$$\Phi(y, t) = \int_0^{\infty} dx {}_0F_1\left(\frac{d}{2}, -yx\right) F(x, t) \quad (III.16)$$

onde fizemos o uso das equações (II.9) e (II.9') na Eq.(III.10). As leis de conservação (II.10) para $y = 0$ dão:

$$\Phi(0, t) = 1$$

$$\Phi'(0, t) = -1 \quad (III.17)$$

e o valor de equilíbrio é

$$\Phi(y, \infty) = e^{-y}. \quad (III.18)$$

A transformada inversa de (III.16) é

$$F(x, t) = \frac{1}{\Gamma^2(d/2)} \int_0^\infty dy (xy)^{d/2-1} {}_0F_1\left(\frac{d}{2}, -xy\right) \Phi(y, t). \quad (III.19)$$

Também o termo de colisão $B[F, F]$, Eq.(II.12'), se simplifica ao usar a transformada inversa (III.19), isto é ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(y, t) = \int_{-1}^1 d\mu \bar{g}(\mu) [\Phi(\mu_1 y, t) \Phi(\mu_2 y, t) - \Phi(y, t) \Phi(0)] \quad (III.20)$$

onde

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(1 + \mu) \quad e \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(1 - \mu).$$

Nota-se que a Eq.(III.20) é bem mais simples que a Eq.(II.12') em vista da redução no número de integrais.

O passo seguinte na direção da solução geral da Eq.(III.20) foi dado por Ernst (Ernst, 1979), que introduziu a propriedade de invariância para a equação de Boltzmann. Isto é , se $\Phi(y, t)$ é solução da Eq.(III.20), então

$$\Phi_s(y, t) = e^{sy} \Phi(y, t), \quad (III.21)$$

é também uma solução da Eq.(III.20) para qualquer valor de s real.

Como $\Phi(y, t)$ pode ser expandida em potências de y , Eq.(III.1), $\Phi_s(y, t)$ também pode ser expandida como

$$\Phi_s(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} c_n(t). \quad (III.22)$$

Os coeficientes $c_n(t)$ — conhecidos como momentos de Laguerre — satisfazem o mesmo conjunto de equações (III.5)

$$\frac{d}{dt} c_n + \mu_{00} c_n = \sum_{k=0}^n \mu_{nk} c_k c_{n-k}. \quad (III.23)$$

Uma escolha conveniente de s pode ser feita, observando, que dada a expressão

$$\Phi_s(y, t) = \left(1 + sy + \frac{(sy)^2}{2!} + \dots\right) \left(1 - y - \frac{y^2}{2} M_2(t) - \dots\right) \quad (III.24)$$

para pequenos valores de y ($y \rightarrow 0$) temos,

$$\Phi_s(y, t) = 1 + (s-1)y + O(y^2) \quad (III.25)$$

e para $t \rightarrow \infty$

$$\Phi_s(y, t) \rightarrow e^{(s-1)y}, \quad (III.26)$$

A escolha, $s = 1$ leva à simples relação

$$\Phi_1(y, t) = e^y \Phi(y, t). \quad (III.27)$$

Nesse caso, para $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Phi_1(y, t \rightarrow \infty) &= 1 \\ &= c_0(t \rightarrow \infty) + c_1(t \rightarrow \infty)y + c_2(t \rightarrow \infty)y^2 + \dots \end{aligned} \quad (III.28)$$

e comparando com (III.25), obtém-se

$$\begin{aligned} c_0(t) &= 1 \\ c_1(t) &= 0. \end{aligned} \quad (III.29)$$

A função $\Phi(y, t)$ pode ser escrita como

$$\Phi(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(t)}{n!} y^n e^{-y}, \quad (III.30)$$

e conforme a Eq.(III.19), a substituição da Eq.(III.30) na mesma, resulta na integral,

$$F(x, t) = \frac{x^{(d/2-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(t)}{n!} \times \\ \times \int_0^{\infty} dy y^{n+(d/2-1)/2} e^{-y} J_{d/2-1}(2\sqrt{xy}), \quad (III.31)$$

onde usamos a definição (Abramowitz, 1964):

$${}_0F_1\left(\frac{d}{2}, -yx\right) \equiv \frac{\Gamma(d/2)}{(xy)^{(d/2-1)/2}} J_{d/2-1}(2\sqrt{xy}). \quad (III.32)$$

Integrando, a Eq.(III.31) obtém-se a função distribuição na representação da energia

$$F(x, t) = F_0^{(d/2-1)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) L_n^{(d/2-1)}(x), \quad (III.33)$$

onde $F_0^{(d/2-1)}(x)$ é dada pela Eq.(II.11) e os $L_n^{(d/2-1)}(x)$ representam os polinômios de Laguerre associados. Na representação das velocidades esta função, obtida através da Eq.(II.9), se escreve como

$$f(v, t) = f_0(v) \sum_0^{\infty} c_n(t) L_n^{(d/2-1)}(v^2/2) \quad (III.34)$$

onde os coeficientes $c_n(t)$, satisfazem o conjunto de equações (III.23), e as suas soluções — considerando os resultados (III.29) — se escrevem

$$c_0(t) = 1$$

$$c_1(t) = 0$$

$$c_n(t) = c_0(0)e^{-\Lambda_n t} + \sum_{m=2}^{n-2} \mu_{nm} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{\Lambda_n(\tau-t)} c_m(\tau) c_{n-m}(\tau) d\tau, \quad n = 2, 3, \dots$$

(III.34')

e são solúveis sequencialmente. Os momentos μ_{nm} são dados por (III.6)

3-) Método da Transformada de Laplace.

Com este método baseado na Transformada de Laplace, vamos mostrar que a equação -modelo, Eq.(II.25'')

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)F(x, t) = \int_x^{\infty} du \int_0^u dy \frac{1}{u^{d-1}} F(y, t) F(u - y, t)$$

pode ser reescrita numa forma simplificada, o que possibilita facilitar as discussões sobre sua possível resolução para casos particulares.

Introduzindo a Transformada de Laplace,

$$G(z, t) = \int_0^{\infty} dx e^{-xz} F(x, t) = \langle e^{-xz} \rangle, \quad (III.35)$$

e considerando a Eq.(II.25'')

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)F(x, t) = \int_x^{\infty} du \int_0^u dy u^{(1-d)} F(y, t) F(u - y, t), \quad (III.36)$$

obtemos a equação de Boltzmann-modelo transformada na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)G(z, t) = \int_0^z dy z^{-d} G^2(y, t). \quad (III.37)$$

Nota-se nesta equação a redução das integrais presentes na Eq.(II.25''). Este mesmo método pode ser aplicado para os modelos determinísticos, fazendo uso

de uma transformação sequencial: a Transformada de Laplace da Transformada de Fourier $\Phi(y, t)$ é a transformada da função distribuição de energia. Com esta transformação sequencial estamos definindo a Transformada de Laplace generalizada.

Seja a Eq.(III.20), a equação transformada de Fourier $\Phi(y, t)$ da função distribuição de energia. Vamos considerar o modelo seno, definido pela Eq.(II.19). Neste caso, a Eq.(III.20), toma a forma (Apêndice B, Eq.(B.2))

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)\Phi(y, t) = \frac{1}{B(p, p)y^{2p-1}} \int_0^y dy' [y'(y-y')]^{p-1} \Phi(y', t)\Phi(y-y', t) \quad (III.38)$$

Notando a estrutura de convolução na expressão acima, definimos

$$\Psi_p(y, t) = \frac{y^{p-1}}{\Gamma(p)} \Phi(y, t) \quad (III.39)$$

e a equação fica escrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)\Psi_p(y, t) \equiv \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)y^p} \int_0^y dy' \Psi_p(y', t)\Psi_p(y-y', t). \quad (III.40)$$

Usando a transformada de Laplace (Apêndice B, Eq.(B.3)) obtemos a equação diferencial parcial

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)(-1)^p \frac{\partial^p}{\partial \xi^p} \hat{\psi}_p(\xi, t) = \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)} \hat{\psi}_p^2(\xi, t). \quad (III.41)$$

onde

$$\hat{\psi}(\xi, t) = \int_0^\infty dy e^{-\xi y} \Psi(y, t). \quad (III.42)$$

Usando a identidade, Eq.(B.5),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dy e^{-y\xi} y^{p-1} \Phi(y, t) &\equiv \Gamma(p)\xi^{-p} \langle {}_1F_1(p, m, -x/\xi) \rangle \\ &= \Gamma(p)\xi^{-p} G(1/\xi, t), \end{aligned} \quad (III.43)$$

e chamando $1/\xi \equiv z$, obtemos a expressão (III.37) de volta,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)G(z, t) = \int_0^z dy z^{-d} G^2(y, t).$$

O caso particular, $p = 1$, foi considerado por Krook-Wu (Krook e Wu, 1976).

4-) Método da Transformada em Temperatura

Considerando a função distribuição na representação da energia $F(x, t)$, introduzimos a Transformada em Temperatura $G(s, t)$ com base na seguinte expressão:

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F_s(x) G(s, t) ds. \quad (III.44)$$

Onde o caminho Γ contorna as singularidades de $G(s, t)$ no sentido anti-horário e $F_s(x)$ é a função distribuição de equilíbrio (II.11), mas com uma temperatura modificada $(1-s)T$; isto é ,

$$F_s(x) = \frac{N}{\Gamma(d/2)k_B(1-s)T} \left(\frac{x}{k_B T(1-s)}\right)^{d/2-1} e^{x/k_B T(1-s)}. \quad (III.45)$$

É facilmente visto da Eq.(III.44) que as leis de conservação para o número de partículas e energia são caracterizadas para a função transformada por

$$\oint_{\Gamma} G(s, t) ds = 2\pi i \quad (III.46a)$$

$$\oint_{\Gamma} G(s, t) s ds = 0 \quad (III.46b)$$

e para a distribuição de equilíbrio, devemos ter

$$G_0(s) = \frac{1}{s}. \quad (III.46c)$$

A expressão (III.44) indica claramente que as características da evolução da função distribuição $F(x, t)$ serão devidas principalmente ao comportamento

das singularidades da Transformada em Temperatura $G(s, t)$ associada (Barachina, 1985). Uma rigorosa análise matemática pode ser encontrada em (Barachina, 1985). Aqui apresentaremos apenas um modelo para distribuição das singularidades, a partir do qual poderemos observar como a Transformada em Temperatura descreve a evolução temporal da função distribuição .

Vamos supor que as únicas singularidades de $G_N(s, t)$ são N pólos simples localizados no plano complexo- s ,

$$G_N(s, t) = \frac{\alpha_1}{s - \sigma_1(t)} + \frac{\alpha_2}{s - \sigma_2(t)} + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha_N}{s - \sigma_N(t)} = \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n(t)}{s - \sigma_n} \quad (III.47)$$

As leis de conservação do número de partículas e de energia, fornecem as relações

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n(t) = 1, \quad (III.48a)$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \sigma_n(t) = 0, \quad (III.48b)$$

respectivamente; e substituindo a Eq.(III.47) na Eq.(III.44), obtemos a função distribuição

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) F_{\sigma_n(t)}(x), \quad (III.49)$$

onde

$$F_{\sigma_n(t)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F_s(x)}{s - \sigma_n(t)} ds \quad (III.49')$$

é a função distribuição em termos das singularidades de $G_N(s, t)$. Ao mesmo tempo, observamos que $F(x, t)$ está expressa como uma expansão em $F_s(x)$, dada pela Eq.(III.45) com temperaturas modificadas e definidas pela localização dos pólos em $s = \sigma_n$, isto é

$$T_n = (1 - \sigma_n)T.$$

e os $\alpha_n(t)$ representam os pesos associados. Assim a análise da singularidade da função Transformada em Temperatura descreve a evolução da função distribuição .

IV- MÉTODO ITERATIVO

Neste capítulo nos propomos a apresentar um método aproximativo, que chamamos de Método Iterativo. Após a descrição do método, mostraremos aplicações em algumas equações de Boltzmann-modelo.

1-) Descrição do Método

Seja a equação de Boltzmann não linear, expressa como em (II.8)

$$\frac{\partial}{\partial t} f - L[f] = A[f, f],$$

definimos a função de desvio da condição de equilíbrio como

$$E(v, t) = \frac{f(v, t) - f_0(v)}{f_0(v)}. \quad (IV.1)$$

Quando o desvio $E(v, t)$ do equilíbrio é pequeno, podemos desprezar os termos bilineares em $E(v, t)$, obtendo a seguinte equação de Boltzmann linearizada,

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(1)} - L[f^{(1)}] = A[f_0, f_0] = 0. \quad (IV.2)$$

A solução desta equação é, em geral, uma boa aproximação para a relaxação ao equilíbrio da função distribuição. Contudo, quando o desvio inicial do equilíbrio é importante, esta solução não descreve de forma satisfatória a evolução temporal do sistema. Neste caso, podemos calcular a aproximação de segunda ordem incluindo o termo bilinear. Na realidade estamos propondo um esquema iterativo de maneira a resolver a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(l)}(v, t) - L[f^{(l)}] = A[f^{(l-1)}, f^{(l-1)}]; \quad l = 1, 2, \dots \quad (IV.3)$$

A integração desta equação dá a l -ésima aproximação iterativa para a função distribuição. As leis de conservação e a condição assintótica são verificadas para cada iteração.

2-) Aplicações

(a) Modelo de interação de Maxwell

Vamos considerar o modelo de interação de Maxwell (determinístico), cuja taxa de colisão é uma função dada pela Eq.(II.17)

$$gI(g, \cos\chi) = \alpha(\cos\chi)$$

A equação de Boltzmann associada a este modelo é a expressa pela Eq.(II.18), e a solução pode ser representada por uma expansão em polinômios de Laguerre (Eq.(III.34)),

$$f(v, t) = f_0(v) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) L_n^{(d/2-1)}(v^2/2),$$

quando a função distribuição pertence a um espaço de Hilbert com norma finita,

$$\|f\|^2 = \int \frac{|f(v, t)|^2}{f_0(v)} d\vec{v} < \infty.$$

Os coeficientes $c_n(t)$ — momentos de Laguerre — são dados pelas equações (III.34')

$$\begin{aligned} c_0(t) &= 1, \\ c_1(t) &= 0, \\ c_n(t) &= c_0(0)e^{-\Lambda_n t} + \sum_{m=2}^{n-2} \mu_{nm} \times \\ &\times \int_0^t e^{\Lambda_n(\tau-t)} c_m(\tau) c_{n-m}(\tau) d\tau, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (III.34')$$

e formalizamos o esquema iterativo (IV.3) para os momentos c_n como

$$\begin{aligned} c_0(t) &= 1, \\ c_1(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$c_n^{(l)}(t) = c_n(0)e^{-\Delta_n t} + \sum_{m=2}^{n-2} \mu_{nm} \times \\ \times \int_0^t e^{\Delta_n(\tau-t)} c_m^{(l-1)}(\tau) c_{n-m}^{(l-1)}(\tau) d\tau, \quad (IV.4)$$

onde $n = 2, 3, \dots$ e $l = 1, 2, \dots$

Como os dois primeiros momentos $c_0^{(l)}$ e $c_1^{(l)}$ são os mesmos para cada ordem da iteração, o número de partículas e a energia total são conservadas no esquema iterativo. A solução fica:

$$f^{(l)}(v, t) = f_0(v) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(l)}(t) L_n^{(d/2-1)}(v^2/2)$$

De uma comparação algébrica entre as Eqs.(III.34') e (IV.4) é observado que (Apêndice E)

$$c_n^{(l)}(t) = c_n(t); \quad l \geq \frac{n-3}{2}. \quad (IV.5)$$

Assim a soma parcial

$$S_N(v^2, t) = f_0(v) \sum_{n=0}^N c_n(t) L_n^{(d/2-1)}(v^2/2)$$

da expansão (III.34) será reproduzida exatamente pela solução aproximada $f^{(l)}$ para $l \geq (N-3)/2$. Na realidade, a solução aproximada $f^{(l)}$ convergirá para f , se a condição (IV.5) for observada e a soma parcial $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(t) L_n^{(d/2-1)}(v^2/2)$ for uma quantidade limitada quando $N \rightarrow \infty$.

(b) VHP bidimensional (Partícula Muito Dura bidimensional)

A taxa de colisão para este modelo determinístico bidimensional proposto por Ernst e Hendriks (Ernst e Hendriks, 1979) é :

$$gI(g, \cos\chi) = g^2 |1 - \cos^2\chi| \quad (IV.6)$$

e a equação de Boltzmann não linear associada escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{v}, t) = \int d\vec{v}_1 \int d\hat{g} g^2 |1 - \cos^2 \chi| [f(\vec{v}, t) f(\vec{v}_1, t) - f(\vec{v}, t) f(\vec{v}_1, t)] \quad (IV.7)$$

A aplicação da Transformada de Laplace

$$G(z, t) = 2\pi \int_0^\infty v e^{-zv^2/2} f(v, t) dv \quad (IV.8)$$

e da transformada inversa

$$f(v, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zv^2/2} G(z, t) dz, \quad \gamma > 0 \quad (IV.8')$$

na Eq.(IV.7) resulta numa equação diferencial parcial não linear

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) G(z, t) = \frac{1}{z} \left(1 - G^2(z, t) \right) \quad (IV.9)$$

cuja solução (Ernst e Hendriks, 1979; 1983) é :

$$G(z, t) = \frac{(z-1)e^{-t} + \beta(z+t)}{(z+1)\beta(z+t) - e^{-t}} \quad (IV.10)$$

onde $\beta(z+t)$ — beta, uma função da soma $z+t$ — é determinada a partir da função distribuição inicial. Podemos também obter uma expressão equivalente para (IV.10), através de uma expansão da mesma em potências de β^{-1} . De uma expansão da Eq.(IV.10), em potências de β^{-1} , obtém-se a expressão:

$$G(z, t) = \frac{1}{z+1} \left[1 + z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{\beta(z+t)(1+z)} \right)^n \right] \quad (IV.11)$$

Vamos agora obter o esquema de resolução iterativa para a função $G(z, t)$:

Seja

$$G(z, t) = \frac{1}{z+1} [1 + z^2 g(z, z+t)] \quad (IV.12)$$

uma solução da Eq.(IV.9), onde $g(z, z+t)$ é uma função a ser determinada. Consideremos as mudanças das variáveis:

$$\begin{aligned}u &= z \\v &= z + t\end{aligned}$$

tal que a Eq.(IV.12) se escreve

$$\tilde{G}(u, v) = \frac{1}{1+u} [1 + u^2 g(u, v)] \quad (IV.13)$$

Substituindo a Eq.(IV.13) na Eq.(IV.9), utilizando as novas variáveis, obtemos uma equação para a função $g(u, v)$, isto é :

$$\frac{\partial}{\partial u} g(u, v) = \frac{u}{1+u} [g + g^2(u, v)]. \quad (IV.14)$$

A seguir, vamos verificar que a função $g(u, v)$ pode ser determinada. Vamos inicialmente desprezar o termo quadrático — $g^2(u, v)$ — de maneira a obtermos a equação linear

$$\frac{\partial}{\partial u} g^{(1)}(u, v) = \frac{u}{1+u} g^{(1)}(u, v).$$

A solução desta equação é

$$g^{(1)}(u, v) = \frac{e^u}{1+u} \alpha_1^{(1)}(v), \quad (IV.15)$$

onde $\alpha_1^{(1)}(v)$ é uma função da variável v que pode ser determinada a partir das condições iniciais, isto é , para dada função distribuição inicial, $G(z, 0)$, escrevemos conforme a Eq.(IV.12)

$$G(z, 0) = \frac{1}{1+z} [1 + z^2 g^{(1)}(z)]$$

de onde

$$g^{(1)}(z) = \frac{1}{z^2} [(1+z)G(z, 0) - 1].$$

E em termos das variáveis u e v , da Eq.(IV.13) temos

$$g^{(1)}(u, v) = \frac{1}{u^2} [(1+u)\tilde{G}(u, v) - 1] \quad (IV.16)$$

Por outro lado, igualando a Eq.(IV.16) com a Eq.(IV.15), obtemos

$$\alpha_1^{(1)}(v) = \frac{1+u}{u^2} e^{-u} [(1+u)\tilde{G}(u, v) - 1], \quad (IV.17)$$

de onde vemos que a solução $g^{(1)}(u, v)$, Eq.(IV.15), fica completamente definida.

Considerando a ordem de iteração seguinte, a Eq.(IV.14) se escreve

$$\frac{\partial}{\partial u} g^{(2)}(u, v) = \frac{u}{1+u} \{g^{(2)}(u, v) + [g^{(1)}(u, v)]^2\}$$

e a solução é do tipo

$$g^{(2)}(u, v) = \frac{e^u}{1+u} \alpha_1^{(2)}(v) + [g^{(1)}(u, v)]^2 \quad (IV.18)$$

com $\alpha_1^{(2)}(v)$ uma função a ser determinada a partir das condições iniciais, $G(z, 0)$. Ou seja:

$$G(z, 0) = \frac{1}{1+z} [1 + z^2 g^{(2)}(z)],$$

isolando $g^{(2)}(z)$, temos

$$g^{(2)}(z) = \frac{1}{z^2} [(1+z)G(z, 0) - 1].$$

Equivalentemente nas variáveis u e v , temos

$$g^{(2)}(u, v) = \frac{1}{u^2} [(1+u)\tilde{G}(u, v) - 1]. \quad (IV.19)$$

Igualando a Eq.(IV.19) com a Eq.(IV.18), obtemos:

$$\alpha_1^{(2)}(v) = \alpha_1^{(1)}(v) - \frac{e^u}{1+u} [\alpha_1^{(1)}(v)]^2. \quad (IV.20)$$

Assim, a solução $g^{(2)}(u, v)$ — Eq.(IV.18) — fica determinada. Para a l -ésima ordem de iteração da equação

$$\frac{\partial}{\partial u} g^{(l)}(u, v) = \frac{u}{1+u} \{g^{(l)}(u, v) + [g^{(l-1)}(u, v)]^2\} \quad (IV.21)$$

temos (vide Apêndice C)

$$g^{(l)}(u, v) = \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}(v) \left(\frac{e^u}{1+u} \right)^n \quad (IV.22)$$

com $\xi_l = 2^{l-1}$,

Vamos agora verificar que todas as outras funções $\alpha_n^{(l)}(v)$ podem ser determinadas das condições iniciais $G(z, 0)$, através de:

$$G(z, 0) = \frac{1}{1+z} [1 + z^2 g^{(l)}(z)]$$

isto é :

$$g^{(l)}(z) = \frac{1}{z^2} [(1+z)G(z, 0) - 1]$$

e

$$g^{(l)}(u, v) = \frac{1}{u^2} [(1+u)\tilde{G}(u, v) - 1]. \quad (IV.23)$$

Igualando as Eqs.(IV.23) e (IV.22), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)} \left(\frac{e^u}{1+u} \right)^n = \frac{1}{u^2} [(1+u)\tilde{G}(u, v) - 1]. \quad (IV.24)$$

Definindo a função

$$U_l(u, v) = \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}(v) x^n ; \quad x = \frac{e^u}{1+u} \quad (IV.25)$$

para os primeiros valores de l temos

$$U_1 = \alpha_1^{(1)}(v)x$$

$$U_2 = \alpha_1^{(2)}(v)x + \alpha_2^{(2)}(v)x^2$$

$$U_3 = \alpha_1^{(3)}(v)x + \alpha_2^{(3)}(v)x^2 + \alpha_3^{(3)}(v)x^3 ;$$

⋮

mas por outro lado, de acôrdo com a Eq.(IV.24) e a definição (IV.25), temos que

$$U_l = \frac{1}{u^2} [(1+u)G(u,v) - 1],$$

de onde é imediato deduzir:

$$\alpha_1^{(2)}(v) = \alpha_1^{(1)}(v) - \alpha_2^{(2)}(v)x$$

$$\alpha_1^{(3)}(v) = \alpha_1^{(1)}(v) - \alpha_2^{(3)}(v)x - \alpha_3^{(3)}(v)x^2 - \alpha_4^{(3)}(v)x^3$$

⋮

e desta maneira obtemos todos os $\alpha_n^{(l)}$. As demais funções $\alpha_n^{(l)}$; $n \neq 1$, são obtidas através da relação de recorrência (Apêndice C)

$$\alpha_n^{(l)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(l-1)} \alpha_{n-i}^{(l-1)}, \quad (IV.26)$$

e todas as funções $\alpha_n^{(l)}$ ficam determinados.

Podemos, além disso, obter todos os $\alpha_n^{(l)}$ em função dos $\alpha_1^{(1)}$ e expressar estas funções convenientemente como

$$\alpha_n^{(l)}(v) = [\alpha_1^{(1)}(v)]^n P_{\xi_l - n}(y), \quad (IV.27)$$

onde $P_m(y)$ é um polinômio de grau m e $y = \alpha_1^{(1)}x$. Então a l -ésima solução (IV.22) fica:

$$g^{(l)}(u, v) = \sum_{n=1}^{\xi_l} [\alpha_1^{(1)}]^n P_{\xi_l - n}(y) x^n. \quad (IV.28)$$

Assumindo que a expansão da Eq.(IV.22) converge quando $l \rightarrow \infty$, então

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \alpha_n^{(l)} = \alpha_n.$$

e portanto

$$\lim_{l \rightarrow \infty} g^{(l)}(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(v) x^n,$$

pois nesse limite

$$\xi_l = 2^{l-1} \rightarrow \infty.$$

Substituindo a Eq.(IV.28) na Eq.(IV.13), temos

$$\bar{G}(u, v) = \frac{1}{1+u} \left[1 + u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(v) x^n \right] \quad (IV.29)$$

que em termos das variáveis z e t fica

$$G(z, t) = \frac{1}{1+z} \left[1 + z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z+t) x^n \right]; \quad x = \frac{e^x}{1+z}; \quad (IV.30)$$

comparando esta com a Eq.(IV.11), obtemos

$$\alpha_n(z+t) = \frac{e^{-(z+t)n}}{\beta^n(z+t)}.$$

Para a l -ésima iteração temos

$$G^{(l)}(z, t) = \frac{1}{1+z} \left[1 + z^2 \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}(z+t) x^n \right], \quad (IV.31)$$

com $\alpha_n^{(l)}(z+t)$ dado pela Eq.(IV.26), que é a solução da seguinte equação para $G^{(l)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) G^{(l)}(z, t) &= \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{1+z} G^{(l)}(z, t) \right) - \\ &- \frac{1}{z} \left([G^{(l-1)}(z, t)]^2 - \frac{2}{1+z} G^{(l-1)}(z, t) \right); \end{aligned} \quad (IV.32)$$

esta foi obtida da Eq.(IV.21) na qual substituímos a função $g^{(l)}$ pela função $G^{(l)}$ usando a relação (IV.12). A solução para $l = 0$ é equivalente à função distribuição de equilíbrio $t \rightarrow \infty$

$$G_0(z) = \frac{1}{1+z}.$$

A l -ésima solução (IV.31) pode ser reescrita, substituindo a Eq.(IV.26), isto é :

$$G^{(l)}(z, t) = \frac{1}{1+z} \left\{ 1 + z^2 \sum_{n=1}^{\xi_l} [\alpha_1^{(1)}(z+t)x]^n P_{\xi_l-n}(y) \right\}, \quad (IV.33)$$

esta forma de expressar a solução $G^{(l)}(z, t)$, evidencia que a Eq.(IV.32) depende — através dos coeficientes $\alpha_1^{(1)}(z+t)$, Eq.(IV.17) — só dos pólos dados na condição inicial. Para uma condição inicial com k polos, localizados em σ_i , a solução $G^{(l)}$ é uma função racional própria de $1/z$, isto é, aquele em que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador, (Apêndice D) ou seja, uma solução do tipo

$$G^{(l)}(z, t) = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)},$$

onde $\psi(z, t)$ é de grau superior ao de $\phi(z, t)$. Sendo assim, podemos decompor a Eq.(IV.33) de maneira a expressá-la em uma forma conveniente para o cálculo. Se temos, por hipótese, uma solução $G^{(l)}(z, t)$ com k polos — (a, b, c, \dots, m) — de multiplicidades respectivas — $\alpha, \beta, \dots, \mu$ — então (Gradshteyn, 1965)

$$G^{(l)}(z, t) = \sum_{j=1}^{\alpha+1} \frac{A_j^{(l)}(t)}{(1-a)^j} \left(\frac{z}{z+1/(1-a)} \right)^j + \sum_{j=1}^{\beta} \frac{B_j^{(l)}(t)}{(1-b)^j} \left(\frac{z}{z+1/(1-b)} \right)^j + \dots + \sum_{j=1}^{\mu} \frac{M_j^{(l)}(t)}{(1-m)^j} \left(\frac{z}{z+1/(1-m)} \right)^j ; \quad \alpha = \beta = \dots = \mu = 2^{l-1}$$

(IV.34)

onde os coeficientes A, B, \dots, M são obtidos das relações :

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha-k+2} &= \frac{\bar{\psi}_a^{(k-1)}(a, t)}{(k-1)!} ; 1 \leq k \leq \alpha + 1 \\
 B_{\beta-k+1} &= \frac{\bar{\psi}_b^{(k-1)}(b, t)}{(k-1)!} ; 1 \leq k \leq \beta \\
 &\vdots \\
 M_{\mu-k+1} &= \frac{\bar{\psi}_m^{(k-1)}(m, t)}{(k-1)!} ; 1 \leq k \leq \mu
 \end{aligned}
 \tag{IV.34'}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_a(z, t) &= \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z(1-a)}{z} \right)^{\alpha+1} \\
 &\vdots \\
 \bar{\psi}_m(z, t) &= \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z(1-m)}{z} \right)^{\mu}.
 \end{aligned}$$

Os índices superiores nas equações acima (IV.34') indicam a ordem da derivada da função em z . Assim, a solução (IV.34) fica determinada e a solução transformada procurada é :

$$f^{(l)}(v, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dz \frac{e^{zv^2/2}}{z} G^{(l)}(z, t). \tag{IV.35}$$

As integrais resultantes nas Eqs.(IV.35) são do tipo:

$$\int \frac{dz}{z} e^{zv^2/2} \left(\frac{\sigma_i}{z + \sigma_i} \right)^j = \frac{e^{-\sigma_i v^2/2}}{\sigma_i^j} L_j(\sigma_i v^2/2),$$

onde $L_j(\sigma_i v^2/2)$ são os polinômios de Laguerre e σ_i representam os polos, isto é :

$$\sigma_i = \frac{1}{1-i} ; i = a, b, \dots, m$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 f^{(l)}(v, t) = & \sum_{j=1}^{\alpha+1} A_j^{(l)}(t) \frac{e^{-\sigma_a v^2/2}}{(\sigma_a)^j} L_j(\sigma_a v^2/2) + \sum_{j=1}^{\beta} B_j^{(l)}(t) \frac{e^{-\sigma_b v^2/2}}{(\sigma_b)^j} L_j(\sigma_b v^2/2) + \\
 & + \dots + \sum_{j=1}^{\mu} M_j^{(l)}(t) \frac{e^{-\sigma_m v^2/2}}{(\sigma_m)^j} L_j(\sigma_m v^2/2) \qquad (IV.35')
 \end{aligned}$$

Devemos observar que da Eq.(IV.33), a solução $G^{(l)}(z, t)$ tem um polo em $z = 0$ (Apêndice D) significando na solução transformada, $f^{(l)}(v, t)$, $\sigma_a = \sigma_{a=0} = 1$. Estas soluções podem ser comparadas com soluções particulares exatas conhecidas, a seguir fazemos duas comparações relacionados aos modelos conhecidos e mencionados no Capítulo II.

V - APLICAÇÕES E DISCUSSÕES

(a) Modelo de Partícula Muito Dura

Consideramos uma condição inicial simples dada pela superposição de duas distribuições Maxwellianas

$$f(v, 0) = \frac{a_1}{b_1} e^{-v^2/(2b_1)} + \frac{a_2}{b_2} e^{-v^2/(2b_2)} \quad (V.1)$$

com $b_1 \geq b_2 \geq 0$. As leis de conservação Eqs. (II.3) e a condição de positividade da distribuição, impõem que:

$$a_1 = \frac{1 - b_2}{b_1 - b_2}$$

$$a_2 = \frac{b_1 - 1}{b_1 - b_2}$$

$$b_1 + b_2 \geq 1 \quad e \quad b_2 < 1 \quad (V.2)$$

A transformada de Laplace da distribuição inicial é :

$$G(z, 0) = \frac{a_1}{1 + b_1 z} + \frac{a_2}{1 + b_2 z} \quad (V.3)$$

onde observamos a presença de dois pólos simples. De acôrdo à Eq.(IV.31) para a primeira iteração temos,

$$G^{(1)}(z, t) = \frac{z}{1 + z} + \frac{e^z z^3}{(1 + z)^2} \alpha_1^{(1)}(z + t),$$

onde a função $\alpha_1^{(1)}(z + t)$ é determinada a partir da condição inicial, $t = 0$.

$$\alpha_1^{(1)}(z) = \frac{1 + z}{z^2} e^{-z} [(1 + z)G(z, 0) - 1]$$

A solução a partir da Eq.(IV.34) é :

$$G^{(1)}(z, t) = A_0^{(1)}(t) \frac{z}{z+1} + A_1^{(1)} \left(\frac{z}{z+1} \right)^2 + \\ + B_1^{(1)}(t) \frac{(\sigma_1 + t)z}{z + \sigma_1 + t} + C_1^{(1)}(t) \frac{(\sigma_2 + t)z}{z + \sigma_2 + t},$$

onde

$$a = 0; \quad \alpha = 1$$

$$b_i = \frac{\sigma_i + t - 1}{\sigma_i + t}; \quad \beta = \mu = 1$$

$$\sigma_i = \frac{1}{1 - \gamma_i}$$

$$\gamma_i = \frac{(1 - b_i) + b_i t}{1 + b_i t}; \quad i = 1, 2$$

e os coeficientes $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, são os resíduos associados com os polos da equação de $G^{(1)}(z, t)$, Eqs.(IV.34'). Por sua vez, estas dependem das funções definidas por

$$\bar{\psi}_a(z, t) = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z}{z} \right)^2$$

$$\bar{\psi}_b(z, t) = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z/(\sigma_1 + t)}{z} \right)$$

$$\bar{\psi}_c(z, t) = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z/(\sigma_2 + t)}{z} \right)$$

temos

$$A_0^{(1)}(t) = \bar{\psi}_a^{(1)}(z, t) \Big|_{z=-1}$$

$$A_1^{(1)}(t) = \bar{\psi}_a^{(0)}(z, t) \Big|_{z=-1}$$

$$B_1^{(1)}(t) = \bar{\psi}_b^{(0)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_1}$$

$$C_1^{(1)}(t) = \bar{\psi}_c^{(0)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_2}$$

A solução transformada, conforme a Eq.(IV.35) é :

$$f^{(1)}(v, t) = [A_0^{(1)}(t) + A_1^{(1)}(t)(1 - v^2/2)]e^{-v^2/2} + \\ + B_1^{(1)}(t)\sigma_1 e^{-\sigma_1 v^2/2} + C_1^{(1)}(t)\sigma_2 e^{-\sigma_2 v^2/2}. \quad (V.4)$$

A solução de segunda ordem é :

$$G^{(2)}(z, t) = \frac{z}{1+z} A_0^{(2)}(t) + \left(\frac{z}{1+z}\right)^2 A_1^{(2)}(t) + \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 A_2^{(2)}(t) + \\ + \frac{z(\sigma_1 + t)}{z + \sigma_1 + t} B_1^{(2)}(t) + \left(\frac{z(\sigma_1 + t)}{z + \sigma_1 + t}\right)^2 B_2^{(2)}(t) + \\ + \frac{z(\sigma_2 + t)}{z + \sigma_2 + t} C_1^{(2)}(t) + \left(\frac{z(\sigma_2 + t)}{z + \sigma_2 + t}\right)^2 C_2^{(2)}(t) \quad (V.5)$$

com a solução transformada

$$f^{(2)}(v, t) = e^{-v^2/2} [A_0^{(2)}(t)L_1^{(0)}(v^2/2) + A_1^{(2)}(t)L_2^{(0)}(v^2/2) + \\ + A_2^{(2)}(t)L_3^{(0)}(v^2/2)] + e^{-v^2(\sigma_1+t)/2} [B_1^{(2)}(t)L_1^{(0)}(v^2(\sigma_1+t)/2) + \\ + B_2^{(2)}(t)L_2^{(0)}(v^2(\sigma_1+t)/2)] + e^{-v^2(\sigma_2+t)/2} [C_1^{(2)}(t)L_1^{(0)}(v^2(\sigma_2+t)/2) + \\ + C_2^{(2)}(t)L_2^{(0)}(v^2(\sigma_2+t)/2)] \quad (V.6)$$

Analogamente, os coeficientes da solução (V.6) dependem das equações seguintes

$$\bar{\psi}_a(z, t) = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z}{z} \right)^3$$

$$\bar{\psi}_b(z, t) = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z/(\sigma_1+t)}{z} \right)^2$$

$$\bar{\psi}_c(z, t) = \frac{\psi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z/(\sigma_2+t)}{z} \right)^2$$

na forma

$$A_0^{(2)}(t) = \frac{\bar{\psi}_a^{(2)}(z, t)}{2!} \Big|_{z=-1}$$

$$A_1^{(2)}(t) = \bar{\psi}_a^{(1)}(z, t) \Big|_{z=-1}$$

$$A_2^{(2)}(t) = \bar{\psi}_a^{(0)}(z, t) \Big|_{z=-1}$$

$$B_1^{(2)}(t) = \bar{\psi}_b^{(1)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_1}$$

$$B_2^{(2)}(t) = \bar{\psi}_b^{(0)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_1}$$

$$C_1^{(2)}(t) = \bar{\psi}_c^{(1)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_2}$$

$$C_2^{(2)}(t) = \bar{\psi}_c^{(0)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_2}$$

A solução em terceira iteração é :

$$G^{(3)}(z, t) = \frac{z}{1+z} A_0^{(3)}(t) + \left(\frac{z}{1+z} \right)^2 A_1^{(3)}(t) + \left(\frac{z}{1+z} \right)^3 A_2^{(3)}(t) + \\ + \left(\frac{z}{1+z} \right)^4 A_3^{(3)}(t) + \left(\frac{z}{1+z} \right)^5 A_4^{(3)}(t) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{z(\sigma_1 + t)}{z + \sigma_1 + t} \right) B_1^{(3)}(t) + \left(\frac{z(\sigma_1 + t)}{z + \sigma_1 + t} \right)^2 B_2^{(3)}(t) + \\
 & + \left(\frac{z(\sigma_1 + t)}{z + \sigma_1 + t} \right)^3 B_3^{(3)}(t) + \left(\frac{z(\sigma_1 + t)}{z + \sigma_1 + t} \right)^4 B_4^{(3)}(t) + \\
 & + \left(\frac{z(\sigma_2 + t)}{z + \sigma_2 + t} \right) C_1^{(3)}(t) + \left(\frac{z(\sigma_2 + t)}{z + \sigma_2 + t} \right)^2 C_2^{(3)}(t) + \\
 & + \left(\frac{z(\sigma_2 + t)}{z + \sigma_2 + t} \right)^3 C_3^{(3)}(t) + \left(\frac{z(\sigma_2 + t)}{z + \sigma_2 + t} \right)^4 C_4^{(3)}(t) \quad (V.7)
 \end{aligned}$$

e a solução transformada é :

$$\begin{aligned}
 f^{(3)}(v, t) = & e^{-v^2/2} [A_0^{(3)}(t)L_1^{(0)}(v^2/2) + A_1^{(3)}L_2^{(0)}(v^2/2) + A_2^{(3)}(t)L_3^{(0)}(v^2/2) + \\
 & + A_3^{(3)}L_4^{(0)}(v^2/2) + A_4^{(3)}(t)L_5^{(0)}(v^2/2)] + \\
 & + e^{-v^2(\sigma_1+t)/2} [B_1^{(3)}(t)L_0^{(0)}(v^2(\sigma_1 + t)/2) + B_2^{(3)}(t)L_1^{(0)}(v^2(\sigma_1 + t)/2) + \\
 & + B_3^{(3)}(t)L_2^{(0)}(v^2(\sigma_1 + t)/2) + B_4^{(3)}(t)L_3^{(0)}(v^2(\sigma_1 + t)/2)] + \\
 & + e^{-v^2(\sigma_2+t)/2} [C_1^{(3)}(t)L_0^{(0)}(v^2(\sigma_2 + t)/2) + C_2^{(3)}(t)L_1^{(0)}(v^2(\sigma_2 + t)/2) + \\
 & + C_3^{(3)}(t)L_2^{(0)}(v^2(\sigma_2 + t)/2) + C_4^{(3)}(t)L_3^{(0)}(v^2(\sigma_2 + t)/2)] \quad (V.8)
 \end{aligned}$$

onde, para

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_a(z, t) & = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z}{z} \right)^5 \\
 \bar{\psi}_b(z, t) & = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z/(\sigma_1+t)}{z} \right)^4 \\
 \bar{\psi}_c(z, t) & = \frac{\phi(z, t)}{\psi(z, t)} \left(\frac{1+z/(\sigma_2+t)}{z} \right)^4
 \end{aligned}$$

temos os coeficientes

$$A_0^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_a^{(4)}(z, t)}{4!} \Big|_{z=-1}$$

$$A_1^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_a^{(3)}(z, t)}{3!} \Big|_{z=-1}$$

$$A_2^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_a^{(2)}(z, t)}{2!} \Big|_{z=-1}$$

$$A_3^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_a^{(1)}(z, t)}{1!} \Big|_{z=-1}$$

$$A_4^{(3)}(t) = \bar{\psi}_a^{(0)}(z, t) \Big|_{z=-1}$$

$$B_1^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_b^{(3)}(z, t)}{3!} \Big|_{z=\sigma_1}$$

$$B_2^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_b^{(2)}(z, t)}{2!} \Big|_{z=\sigma_1}$$

$$B_3^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_b^{(1)}(z, t)}{1!} \Big|_{z=\sigma_1}$$

$$B_4^{(3)}(t) = \bar{\psi}_b^{(0)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_1}$$

$$C_1^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_c^{(3)}(z, t)}{3!} \Big|_{z=\sigma_2}$$

$$C_2^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_c^{(2)}(z, t)}{2!} \Big|_{z=\sigma_2}$$

$$C_3^{(3)}(t) = \frac{\bar{\psi}_c^{(1)}(z, t)}{1!} \Big|_{z=\sigma_2}$$

$$C_4^{(3)}(t) = \bar{\psi}_c^{(0)}(z, t) \Big|_{z=\sigma_2}$$

Os coeficientes $A_n^{(l)}(t)$, $B_n^{(l)}(t)$ e $C_n^{(l)}(t)$ foram calculados para diversos

valores dos parâmetros iniciais b_1 e b_2 , que foram usados para calcular o erro relativo da l -ésima ordem da solução iterativa através da relação :

$$E_l(v, t) = \frac{f^{(l)}(v, t) - f(v, t)}{f(v, t)},$$

onde $f(v, t)$ é a distribuição exata (Ernst, 1983).

Na Fig.(2) mostramos os resultados para $l = 1, 2, 3$ com os valores $b_1 = 11/20$ e $b_2 = 9/20$ e para o tempo $t = 0.2$. Observamos uma convergência oscilante. Considerando que o erro é avaliado pela envolvente das curvas, observamos uma rápida convergência do processo oscilatório. O E_l mostra um erro 10 vezes menor que E_{l-1} sobre todo o intervalo de energia, tornando-se maior para altas energias. A Fig.(3) mostra E_l ($l = 1, 2, 3$) para um valor de energia fixa, $v^2/2 = 5$; notamos que a convergência da aproximação iterativa é mais rápida para tempos grandes. Na realidade, a relevância das contribuições não lineares é mais importante para tempos pequenos. Além disso verificamos que a solução iterativa dá uma descrição satisfatória para o processo de equilíbrio sobre todo o intervalo de energia.

(b) Modelo de Maxwell

Aplicamos este método, também ao modelo de Maxwell — discutido no Capítulo precedente — com a condição inicial dada pela Eq.(V.3) e com os mesmos valores dos parâmetros utilizados no caso VHP (item a). Contudo, neste caso, a comparação das soluções aproximada e exata fica oculta pela dupla aproximação implícita na Eq.(III.34). Na realidade, as ordens do esquema iterativo e o N -ésimo truncamento da Eq.(III.34) foram consideradas simultaneamente. Neste caso, definimos E_l como o erro das séries com coeficientes $c_n^{(l)}$ relativos às séries com as exatas, ambas truncadas à mesma ordem. Para o modelo Tjon-Wu (Ernst, 1981),

$$\mu_{nm} = \frac{1}{n+1},$$

foram calculados as séries até $N = 18$. Notamos que para tempos grandes a dupla aproximação fica crítica e nenhuma conclusão pode ser estabelecida acerca da convergência.

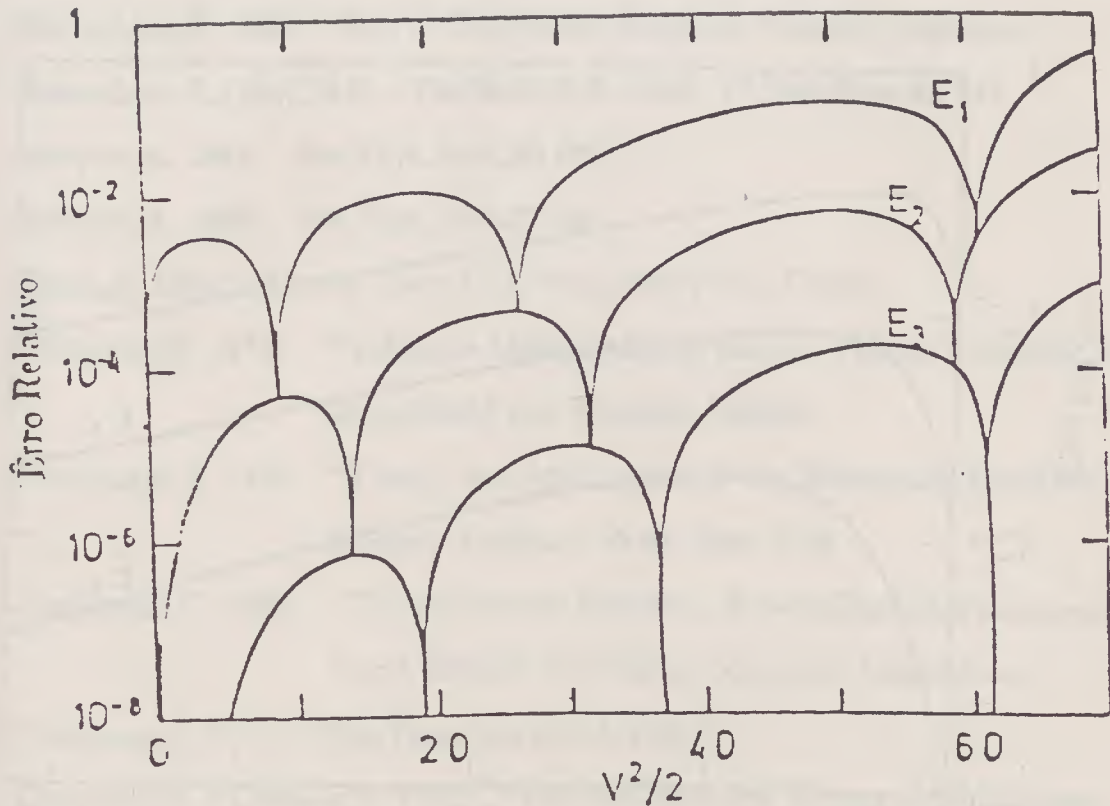


Fig.(2) Curvas referentes ao erro relativo com a energia para os valores $b_1 = 11/20$ e $b_2 = 9/20$ e tempo fixo $t = 0.2$

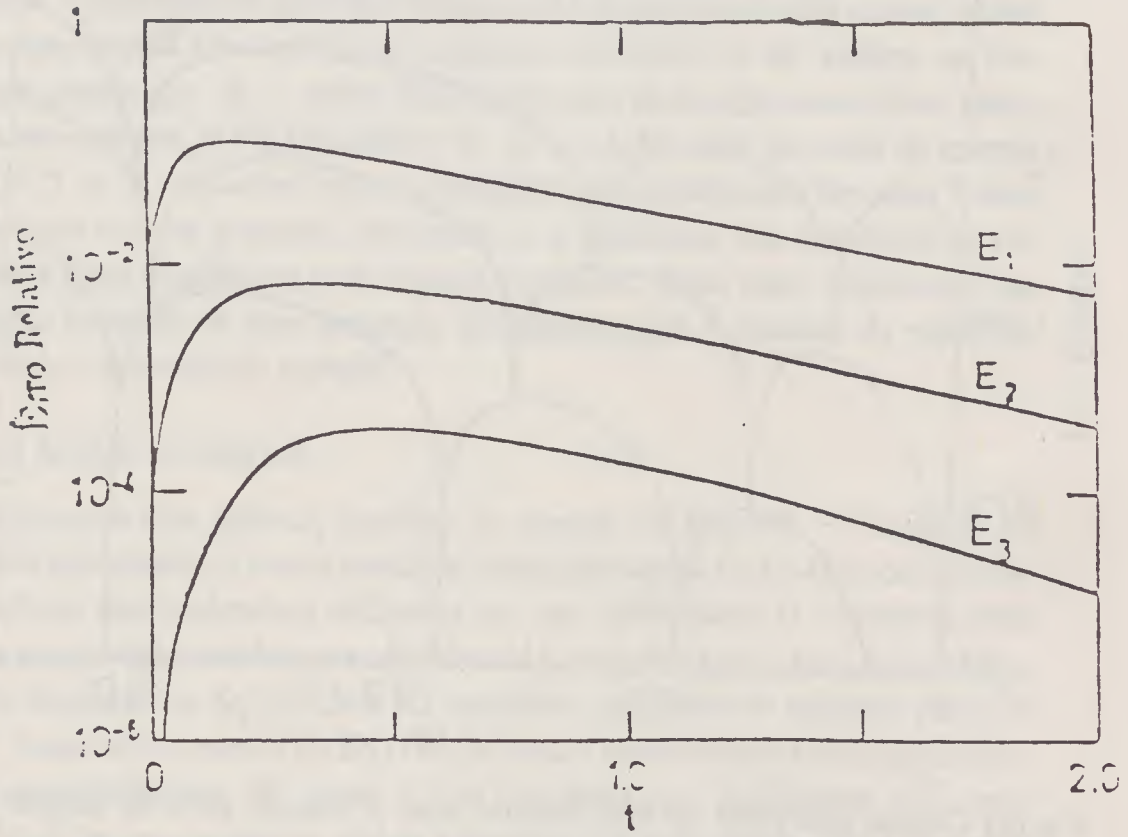


Fig.(3) Curvas referentes ao erro relativo como uma função do tempo e energia fixa $v^2/2 = 5$, para os valores $b_1 = 11/20$ e $b_2 = 9/20$

VI - BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz,M. e Stegun,I. 1964: "Handbook of Mathematical Functions"
Dover Publ. Inc, New York.
- Alexanian,M. 1979: Phys.Lett.**74A** 1
- Arkeryd,L. 1972: Arch.Rat.Mech.Anal.**45** 1.
- Barrachina,R. 1985: Tese de Doutorado, Instituto Balseiro, Argentina.
- Barrachina,R.; Fujii,D.H. e Garibotti,C.R. 1986: J.Stat.Phys.**45** 647.
- Bobylev,A. 1976: Sov.Phys.Dokl.**20** 822.
- Bobylev,A. 1982: Sov.Phys.Dokl.**27** 29.
- Brush,S. 1972: Kinetic Theory III, Pergamon Press, Oxford
- Carleman,T. 1957: "Problemes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz",
Almquist and Wiksells, Upsala
- Cercignani,C. 1975: "Theory and Applications of the Boltzmann Equation",
Scottish Academic Press, New York
- Cercignani,C. 1983: "The Boltzmann Equation, Nonequilibrium Phenomena I",
North Holland Publishing Company, Amsterdam
- Chapman,S. 1916: Phyl.Trans.Roy.Soc.A,**216** 279
- Chapman,S. e Cowling,T. 1970: "The Mathematical Theory of Nonuniform
Gases", 3rd Ed.Cambridge
- Enskog,D. 1917: Dissertation,Upsala
- Ernst,M. 1981: Phys.Rep.**78** 1
- Ernst,M. e Hendriks,E. 1979: Phys.Lett.**70A** 183
- Ernst,M. e Hendriks,E. 1983: Physica **120A** 545
- Fujii,D.H.;Barrachina,R. e Garibotti,C.R.,1986: J.Stat.Phys,**44** 95
- Hilbert,D. 1912: Math.Ann.**72** 562.

- Krook, M. e Wu, T. 1976: *Phys.Rev.Lett.***36** 1107;
Phys.Fluids **20** 1589.
- Grad, H. 1949: *Comm.Pure Appl.Math.***4** 331
- Gradshteyn, I.S. e Ryzhik, I.M. 1965: "Table of Integrals, Series and
Products", 4rd Ed. Academic Press,
N.Y. e London, pag.56
- Truesdell, C. e Muncaster, R.G. 1980: "Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a
Simple Monatomic Gas", Academic Press, New York.
- Wild, E. 1951: *Proc.Camb.Phil.Soc.***47** 602

APÊNDICE A

Relações Matemáticas

Seja a Eq.(III.10)

$$\Phi(\vec{k}, t) = \int f(\vec{v}, t) e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} d\vec{v}.$$

Denotamos o valor médio de $e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}}$ com os símbolos $\langle \rangle$ e escrevemos:

$$\langle e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} \rangle_{ang} = \int f(\vec{v}, t) e^{(-i\vec{v} \cdot \vec{k})} d\vec{v}, \quad (A.1)$$

considerando f uma distribuição isotrópica, de maneira a tomarmos a média angular, isto é uma média sobre $\langle \hat{k} \cdot \hat{v} \rangle$. Ainda,

$$e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} = e^{-ikv \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ikv \cos \theta)^n}{n!}.$$

Tomando a média

$$\langle e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ikv)^n}{n!} \langle (\cos \theta)^n \rangle.$$

n deve ser par, o que implica em $n = 2n'$, ou seja, (Gradshteyn e Ryzhik, 1965)

$$\langle (\cos \theta)^{2n} \rangle = \langle (\hat{k} \cdot \hat{v})^{2n} \rangle = \frac{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(n + d/2)\Gamma(1/2)}.$$

Então:

$$\langle e^{-i\vec{v} \cdot \vec{k}} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-ikv)^n}{n!} \frac{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(n + d/2)\Gamma(1/2)}.$$

Considerando as relações :

$$\frac{\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(1/2)} = \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n - 1)!!}{2^n}$$

$$\frac{1}{(2n)!!} = \frac{1}{2^n n!}$$

$$(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$$

Obtemos

$$\langle e^{-i\vec{v}\cdot\vec{k}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-k^2 v^2}{4} \right)^n \frac{1}{(d/2)_n} \frac{1}{n!} \quad (A.2)$$

Como a função hipergeométrica é :

$${}_0F_1(a, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{(a)_k}, \quad (A.3)$$

identificamos (A.2) com (A.3), isto é :

$$\langle e^{-i\vec{v}\cdot\vec{k}} \rangle = \langle {}_0F_1\left(\frac{d}{2}, \frac{-k^2 v^2}{4}\right) \rangle \quad (A.4)$$

APÊNDICE B

Formas Transformadas da equação de Boltzmann-Modelo

Seja a Eq.(III.20)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(y, t) = \int_{-1}^1 d\mu \bar{g}(\mu) [\Phi(\mu_1 y, t) \Phi(\mu_2 y, t) - \Phi(y, t) \Phi(0)].$$

Para $\bar{g}(\mu) = g_0$, (Eq.II.19), reescrevemos a equação acima:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(y, t) = \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^{p-1}}{2^{2p-1} B(p, p)} [\Phi(\mu_1 y, t) \Phi(\mu_2 y, t) - \Phi(y, t) \Phi(0)] \quad (B.1)$$

De onde:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right) \Phi(y, t) = \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^{p-1}}{2^{2p-1} B(p, p)} \Phi(\mu_1 y, t) \Phi(\mu_2 y, t)$$

Chamando $\mu_1 y = y'$, temos que $dy' = (y/2)d\mu$. Assim obtemos a Eq.(III.38)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right) \Phi(y, t) = \frac{1}{B(p, p) y^{(2p-1)}} \int_0^y dy' [y'(y - y')]^{p-1} \Phi(y', t) \Phi(y - y', t). \quad (B.2)$$

Vamos considerar a definição (III.39)

$$\Psi(y, t) \equiv \frac{y^{p-1}}{\Gamma(p)} \Phi(y, t),$$

onde $\Phi(y, t)$ é dado por (III.16).

Seja

$$\hat{\Psi}\left(\frac{1}{z}, t\right) = \int_0^\infty dy e^{-y/z} \Psi(y, t). \quad (B.3)$$

Substituindo (III.39) em (B.1) (usando $m = d/2$)

$$\hat{\Psi}\left(\frac{1}{z}, t\right) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty dy e^{-y/z} y^{p-1} \langle {}_0 F_1(m, -xy) \rangle. \quad (B.4)$$

Usando a definição de valor médio, reescrevemos a Eq.(B.2) na forma:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}\left(\frac{1}{z}, t\right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dx F(x, t) \int_0^{\infty} dy e^{-y/z} y^{p-1} {}_0F_1(m, -xy) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dx F(x, t) [\Gamma(p) z^p {}_1F_1(p; m; -xz)] \\ &= z^p \int_0^{\infty} dx F(x, t) {}_1F_1(p; m; -xz), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{\infty} dy e^{-y/z} y^{p-1} \Phi(y, t) = \Gamma(p) z^p \langle {}_1F_1(p; m; -xz) \rangle \quad (B.5)$$

Vamos definir uma expressão generalizada para a Eq.(III.35)

$$G(z, t) = \langle {}_1F_1(p; m; -xz) \rangle = \int_0^{\infty} dx {}_1F_1(p; m; -xz) F(x, t), \quad (B.6)$$

observando que, quando $p = m$, a função hipergeométrica é

$${}_1F_1(p; p; -xz) = e^{-xz}.$$

Das Eqs.(B.6) e (B.5), observamos que

$$G(z, t) = z^{-p} \hat{\Psi}\left(\frac{1}{z}, t\right). \quad (B.7)$$

Assim, aplicando a transformação acima, (B.7), na Eq.(III.38), e usando a representação

$$y^{-p} e^{-y/z} = \frac{1}{\Gamma(p) z^p} \int_0^1 ds s^{-2p} [s(1-s)]^{p-1} e^{-y/sz},$$

temos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)G(z, t) = \frac{1}{(\Gamma(p)z^p)^2 B(p, p)} \int_0^\infty dy \int_0^1 s^{-2p} \times \\ \times [s(1-s)]^{p-1} e^{-y/sz} \int_0^y dy' [y'(y-y')]^{p-1} \Phi(y', t) \Phi(y-y', t).$$

Trocando as ordens de integração convenientemente, obtemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)G(z, t) = \frac{1}{(\Gamma(p)z^p)^2 B(p, p)} \int_0^1 ds s^{-2p} [s(1-s)]^{p-1} G^2(sz, t).$$

Como $W_{pp}\left(\frac{y}{z}; 1\right) = [y(z-y)]^{p-1} / z^{2(p-1)} B(p, p)$, então podemos escrever a expressão

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 1\right)G(z, t) = \int_0^z dy W_{pp}(y; z) G^2(y, t), \quad (B.8)$$

APÊNDICE C

Sobre as funções $\alpha_n^{(l)}$

Dada a equação diferencial parcial não linear Eq.(IV.9)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} + 1\right)G(z, t) = \frac{1}{z}\left(1 - G^2(z, t)\right),$$

e considerando uma solução do tipo da Eq.(IV.12)

$$G(z, t) = \frac{1}{1+z}[1 + z^2g(z, z+t)] \quad (C.1)$$

ou usando as variáveis $u = z$, $v = z + t$

$$G(z, t) = \tilde{G}(u, v) = \frac{1}{1+u}[1 + u^2g(u, v)], \quad (C.2)$$

obtemos que a solução da Eq.(IV.9) em primeira aproximação (isto é, desprezando termos quadráticos em g^2) é proporcional a

$$g^{(1)}(u, v) = \frac{e^u}{1+u}\alpha_1^{(1)}(v). \quad (C.3)$$

Introduzindo a ordem de iteração seguinte, a solução é

$$g^{(2)}(u, v) = \frac{e^u}{1+u}\alpha_1^{(2)}(v) + [g^{(1)}(u, v)]^2 \quad (C.4)$$

As funções $\alpha_1^{(1)}(v)$ e $\alpha_1^{(2)}$ são obtidas dadas as condições iniciais, Eq.(IV.17)

$$\alpha_1^{(1)}(v) = \frac{1+u}{u^2}e^{-u}[(1+u)\tilde{G}(u, v) - 1] \quad (C.5)$$

e Eq.(IV.20)

$$\alpha_1^{(2)}(v) = \alpha_1^{(1)}(v) - \frac{e^u}{1+u}[\alpha_1^{(1)}(v)]^2 \quad (C.6)$$

Para a l -ésima ordem, por indução, propomos para $g^{(l)}$ a forma

$$g^{(l)}(u, v) = \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}(v) \left(\frac{e^u}{1+u}\right)^n, \quad (C.7)$$

que substituída na Eq.(IV.21) (que reproduzimos abaixo)

$$\frac{\partial}{\partial u} g^{(l)}(u, v) = \frac{u}{1+u} \left[g^{(l)}(u, v) + [g^{(l-1)}(u, v)]^2 \right].$$

leva à seguinte relação de recorrência para os coeficientes $\alpha_n^{(l)}$

$$\sum_{n=2}^{\xi_l} (n-1) \alpha_n^{(l)} x^n = \sum_{n=2}^{2(\xi_{l-1})} \left(\sum_{i,j}^{\prime n} \alpha_i^{(l-1)} \alpha_j^{(l-1)} \right) x^n \quad (C.8)$$

onde o apóstrofe no símbolo de soma significa que as somas sobre os índices i e j estão vinculadas pela relação $i+j=n$ e assumimos que $\alpha_n^{(0)} = 0$.

Das Eqs.(C.3) e de (C.4), observamos que $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = 2$ e de (C.8) temos

$$\xi_l = 2(\xi_{l-1})$$

e

$$\alpha_n^{(l)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i,j}^{\prime n} \alpha_i^{(l-1)} \alpha_j^{(l-1)}.$$

portanto, podemos escrever

$$\xi_l = 2^{(l-1)}$$

e

$$\alpha_n^{(l)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(l-1)} \alpha_{n-i}^{(l-1)} \quad (C.9)$$

APÊNDICE D

TEOREMA: "Se é dada uma função $G(z, 0)$ cuja analiticidade é conter k polos, localizados em σ_i ; então a solução $G^{(l)}(z, t)$ é uma função racional própria de $1/z^n$ "

Demonstração:

Se definirmos

$$z = \frac{1}{s-1} \quad (D.1)$$

a Transformada de Laplace, Eq.(IV.8),

$$G(z, t) = 2\pi \int_0^{\infty} v e^{-zv^2/2} f(v, t) dv$$

escreve-se então

$$G\left(\frac{1}{s-1}, t\right) = 2\pi \int_0^{\infty} v e^{-v^2/2(s-1)} f(v, t) dv, \quad (D.2)$$

onde relacionamos com a Transformada de Laplace, na nova variável s .

$$\bar{G}(s, t) = \frac{1}{s-1} G\left(\frac{1}{s-1}, t\right) \quad (D.3)$$

Nestes termos, a l -ésima ordem da iteração Eq.(IV.31) fica:

$$G^{(l)}(s, t) = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{1}{(s-1)^2} \sum_{n=1}^{\xi_l} \left[\alpha_1^{(1)} \left(\frac{1}{s-1} + t \right) x(s) \right]^n P_{\xi_l-n}(y') \right\} \quad (D.4)$$

onde

$$x(s) = \frac{s-1}{s} e^{1/(s-1)}$$

$$y' = \alpha_1^{(1)} \left(\frac{1}{s-1} + t \right) x(s).$$

Reescrevendo as Eqs.(IV.24) e (IV.25)

$$U_l(u, v) = \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}(v) x^n \quad (IV.25)$$

e

$$U_l(u, v) = \frac{1}{u^2} [(1+u)G(u, v) - 1] \quad (IV.24)$$

e em termos das variáveis z e t :

$$U_l(z, t) = \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}(z+t) x^n = \frac{1}{z^2} [(1+z)G(z, t) - 1] \quad (D.5)$$

temos

$$U_l\left(\frac{1}{s-1}, t\right) = \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}\left(\frac{1}{s-1} + t\right) x^n = (s-1)^2 \left[\frac{s}{s-1} G\left(\frac{1}{s-1}, t\right) - 1 \right] \quad (D.6)$$

Chamando

$$\frac{1}{s-1} + t = \frac{1}{\sigma-1} \quad (D.7)$$

temos que

$$\begin{aligned} U_l\left(\frac{1}{s-1}, t\right) &= (s-1)^2 \left[\frac{s}{s-1} G^{(l)}\left(\frac{1}{s-1}, t\right) - 1 \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\xi_l} \alpha_n^{(l)}\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) x^n(s) \end{aligned}$$

No instante inicial, $t = 0$,

$$s-1 = \sigma-1$$

e podemos escrever

$$U_1\left(\frac{1}{\sigma-1}, 0\right) = (\sigma-1)^2 \left[\frac{\sigma}{\sigma-1} G\left(\frac{1}{\sigma-1}, 0\right) - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\xi_1} \alpha_n^{(1)} \left(\frac{1}{\sigma-1}\right) x^n(\sigma)$$

tal que

$$x(\sigma) = \frac{\sigma-1}{\sigma} e^{1/(\sigma-1)},$$

de onde, para $l = 1$

$$\frac{U_1\left(\frac{1}{\sigma-1}, 0\right)}{x(\sigma)} = \alpha_1^{(1)}\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) \quad (D.8)$$

ou

$$\alpha_1^{(1)}\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) = \sigma^2(\sigma-1)e^{-1/(\sigma-1)} \left[G\left(\frac{1}{\sigma-1}, 0\right) - \frac{1}{\sigma} \right]. \quad (D.9)$$

Agora substituindo a Eq.(D.9) na Eq.(D.4), obtemos

$$G^{(l)}(s, t) = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{1}{(s-1)^2} \sum_{n=1}^{\xi_1} \left[\alpha_1^{(1)}\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) x \right]^{\xi_1} \right\},$$

como não depende de n , então

$$G^{(l)}(s, t) = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{1}{(s-1)^2} \left[\alpha_1^{(1)}\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) x \right]^{\xi_1} \right\} \quad (D.10)$$

e

$$G^{(l)}(s, t) = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{1}{(s-1)^2} \left[\sigma^2(\sigma-1)e^{-1/(\sigma-1)} \left(G_1\left(\frac{1}{\sigma-1}, 0\right) - \frac{1}{\sigma} \right) \right]^{\xi_1} \right\} \quad (D.11)$$

Observamos na Eq.(D.9), que a função $\alpha_1^{(1)}$ é proporcional ao produto de σ por $(\sigma-1)$. Analogamente as funções $\alpha_n^{(l)}$ e x também são proporcionais a σ e $(\sigma-1)$.
Então

$$\left[\alpha_1^{(1)} \left(\frac{1}{\sigma - 1} \right) x \right]^{\xi_t} = \Phi(\sigma). \tag{D.12}$$

Como, da Eq.(D.7)

$$\sigma = \frac{s(1+t) - t}{(s-1)t + 1}, \tag{D.13}$$

podemos expressar

$$\Phi(\sigma) = \frac{\phi(s, t)}{\varphi(s, t)},$$

isto é , o quociente de duas funções de s de mesmo grau.

Nestes termos reescrevemos a Eq.(D.10),

$$G^{(l)}(s, t) = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{1}{(s-1)^2} \frac{\phi(s, t)}{\varphi(s, t)} \right\} \tag{D.14}$$

ou, chamando o denominador de $\psi(s, t)$, temos de uma maneira geral

$$G^{(l)}(s, t) = \frac{\phi(s, t)}{\psi(s, t)} \tag{D.15}$$

onde de (D.14) observamos que $\psi(s, t)$ é de grau superior que $\phi(s, t)$, desde que $\varphi(s, t)$ e $\phi(s, t)$ são de mesmo grau. Portanto, $G^{(l)}(s, t)$ é uma função racional própria, isto é , aquele em que o grau do denominador é menor do que o grau do denominador.

APÊNDICE E

Comparação entre os momentos de Laguerre $c_n(t)$ e os momentos iterados $c_n^{(l)}$

Seja a Eq.(III.34'):

$$c_n(t) = c_0(0)e^{-\Delta_n t} + \sum_{m=2}^{n-2} \mu_{nm} \int_0^\infty e^{\Delta_n(\tau-t)} c_m(\tau) c_{n-m}(\tau) d\tau$$

e a Eq.(IV.4)

$$c_n^{(l)}(t) = c_0(0)e^{-\Delta_n t} \sum_{m=2}^{n-2} \mu_{nm} \int_0^\infty e^{\Delta_n(\tau-t)} c_m^{(l-1)}(\tau) c_m^{(l-1)}(\tau) d\tau,$$

onde $n = 2, 3, \dots$ e $l = 1, 2, \dots$ e com condições iniciais

$$c_0(t) = 1$$

$$c_1(t) = 0$$

e para $l = 0$, temos que

$$c_n^{(0)}(t) = c_n(0)e^{-\Delta_n t}$$

para todo n .

Podemos expressar explicitamente os primeiros $c_n(t)$ e $c_n^{(l)}(t)$ para cada ordem de iteração, e observar que

$$c_n^{(l)}(t) = c_n(t)$$

para

$$l \geq \frac{n-3}{2}.$$

Ou seja:

As expressões para os primeiros $c_n(t)$ escrevem-se:

$$n = 0: c_0(t) = 1$$

$$n = 1: c_1(t) = 0$$

$$n = 2: c_2(t) = c_2(0)e^{-\Lambda_2 t}$$

$$n = 3: c_3(t) = c_3(0)e^{-\Lambda_3 t}$$

$$n = 4: c_4(t) = c_4(0)e^{-\Lambda_4 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_4(\tau-t)} \mu_{4,2} c_2(\tau) c_2(\tau)$$

$$n = 5: c_5(t) = c_5(0)e^{-\Lambda_5 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_5(\tau-t)} [\mu_{5,2} c_2(\tau) c_3(\tau) + \mu_{5,3} c_3(\tau) c_2(\tau)]$$

$$n = 6: c_6(t) = c_6(0)e^{-\Lambda_6 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_6(\tau-t)} [\mu_{6,2} c_2(\tau) c_4(\tau) + \mu_{6,3} c_3(\tau) c_3(\tau) + \\ + \mu_{6,4} c_4(\tau) c_2(\tau)]$$

$$n = 7: c_7(t) = c_7(0)e^{-\Lambda_7 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_7(\tau-t)} [\mu_{7,2} c_2(\tau) c_5(\tau) + \mu_{7,3} c_3(\tau) c_4(\tau) + \\ + \mu_{7,4} c_4(\tau) c_3(\tau) + \mu_{7,5} c_5(\tau) c_2(\tau)]$$

$$n = 8: c_8(t) = c_8(0)e^{-\Lambda_8 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_8(\tau-t)} [\mu_{8,2} c_2(\tau) c_6(\tau) + \mu_{8,3} c_3(\tau) c_5(\tau) + \\ + \mu_{8,4} c_4(\tau) c_4(\tau) + \mu_{8,5} c_5(\tau) c_3(\tau) + \mu_{8,6} c_6(\tau) c_8(\tau)]$$

$$n = 9: c_9(t) = c_9(0)e^{-\Lambda_9 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_9(\tau-t)} [\mu_{9,2} c_2(\tau) c_7(\tau) + \mu_{9,3} c_3(\tau) c_6(\tau) + \\ + \mu_{9,4} c_4(\tau) c_5(\tau) + \mu_{9,5} c_5(\tau) c_4(\tau) + \mu_{9,6} c_6(\tau) c_3(\tau) + \\ + \mu_{9,7} c_7(\tau) c_2(\tau)]$$

$$\begin{aligned}
 n = 10: c_{10}(t) = c_{10}(0)e^{-\Lambda_{10}t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_{10}(\tau-t)} & [\mu_{10,2}c_2(\tau)c_8(\tau) + \mu_{10,3}c_3(\tau)c_7(\tau) + \\
 & + \mu_{10,4}c_4(\tau)c_6(\tau) + \mu_{10,5}c_5(\tau)c_5(\tau) + \mu_{10,6}c_6(\tau)c_4(\tau) + \\
 & + \mu_{10,7}c_7(\tau)c_3(\tau) + \mu_{10,8}c_8(\tau)c_2(\tau)] \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

As expressões para os $c_n^{(l)}(t)$ escrevem-se:

$$n = 0: c_0^{(0)}(t) = c_0(0) = 1$$

$$n = 1: c_1^{(0)}(t) = 0$$

$$n = 2: c_2^{(0)}(t) = c_2(0)e^{-\Lambda_2 t}$$

$$c_2^{(1)}(t) = c_2(0)e^{-\Lambda_2 t}$$

⋮

$$c_2^{(N)}(t) = c_2(0)e^{-\Lambda_2 t}$$

⋮

$$n = 3: c_3^{(0)}(t) = c_3(0)e^{-\Lambda_3 t}$$

$$c_3^{(1)}(t) = c_3(0)e^{-\Lambda_3 t}$$

⋮

$$c_3^{(N)}(t) = c_3(0)e^{-\Lambda_3 t}$$

⋮

$$n = 4: c_4^{(0)}(t) = c_4(0)e^{-\Lambda_4 t}$$

$$c_4^{(1)}(t) = c_4(0)e^{-\Lambda_4 t} + \mu_{4,2} \int_0^t c_2^{(0)}(\tau) c_2^{(0)}(\tau) e^{\Lambda_4(\tau-t)} d\tau$$

$$c_4^{(2)}(t) = c_4(0)e^{-\Lambda_4 t} + \mu_{4,2} \int_0^t c_2^{(1)}(\tau) c_2^{(1)}(\tau) d\tau$$

⋮

$$c_4^{(N)}(t) = c_4(0)e^{-\Lambda_4 t} + \mu_{4,2} \int_0^t c_2^{(N-1)}(\tau) c_2^{(N-1)}(\tau) e^{\Lambda_4(\tau-t)} d\tau$$

⋮

$$n = 5: c_5^{(0)}(t) = c_5(0)e^{-\Lambda_5 t}$$

$$c_5^{(1)}(t) = c_5(0)e^{-\Lambda_5 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_5(\tau-t)} [\mu_{5,2} c_2^{(0)}(\tau) c_3^{(0)}(\tau) + \mu_{5,3} c_3^{(0)}(\tau) c_2^{(0)}(\tau)]$$

$$c_5^{(2)}(t) = c_5(0)e^{-\Lambda_5 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_5(\tau-t)} [\mu_{5,2} c_2^{(1)}(\tau) c_3^{(1)}(\tau) + \mu_{5,3} c_3^{(1)}(\tau) c_2^{(1)}(\tau)]$$

⋮

$$c_5^{(N)}(t) = c_5(0)e^{-\Lambda_5 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_5(\tau-t)} [\mu_{5,2} c_2^{(N-1)}(\tau) c_3^{(N-1)}(\tau) + \mu_{5,3} c_3^{(N-1)}(\tau) c_2^{(N-1)}(\tau)]$$

⋮

$$n = 6: c_6^{(0)}(t) = c_6(0)e^{-\Lambda_6 t}$$

$$c_6^{(1)}(t) = c_6(0)e^{-\Lambda_6 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_6(\tau-t)} [\mu_{6,2} c_2^{(0)}(\tau) c_4^{(0)}(\tau) + \mu_{6,3} c_3^{(0)}(\tau) c_3^{(0)}(\tau) + \mu_{6,4} c_4^{(0)}(\tau) c_2^{(0)}(\tau)]$$

$$c_6^{(2)}(t) = c_6(0)e^{-\Lambda_6 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_6(\tau-t)} [\mu_{6,2} c_2^{(1)}(\tau) c_4^{(1)}(\tau) + \mu_{6,3} c_3^{(1)}(\tau) c_3^{(1)}(\tau) + \mu_{6,4} c_4^{(1)}(\tau) c_2^{(1)}(\tau)]$$

$$+ \mu_{6,4} c_4^{(1)}(\tau) c_2^{(1)}(\tau)]$$

$$c_6^{(3)}(t) = c_6(0) e^{-\Lambda_6 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_6(\tau-t)} [\mu_{6,2} c_2^{(2)}(\tau) c_4^{(2)}(\tau) + \mu_{6,3} c_3^{(2)}(\tau) c_3^{(2)}(\tau) + \mu_{6,4} c_4^{(2)}(\tau) c_2^{(2)}(\tau)]$$

⋮

$$c_6^{(N)}(t) = c_6(0) e^{-\Lambda_6 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_6(\tau-t)} [\mu_{6,4} c_2^{(N-1)}(\tau) c_4^{(N-1)}(\tau) + \mu_{6,3} c_3^{(N-1)}(\tau) c_3^{(N-1)}(\tau) + \mu_{6,4} c_4^{(N-1)}(\tau) c_2^{(N-1)}(\tau)]$$

⋮

$$n = 7: c_7^{(0)}(t) = c_7(0) e^{-\Lambda_7 t}$$

$$c_7^{(1)}(t) = c_7(0) e^{-\Lambda_7 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_7(\tau-t)} [\mu_{7,2} c_2^{(0)}(\tau) c_5^{(0)}(\tau) + \mu_{7,3} c_3^{(0)}(\tau) c_4^{(0)}(\tau) + \mu_{7,5} c_5^{(0)}(\tau) c_2^{(0)}(\tau)]$$

$$c_7^{(2)}(t) = c_7(0) e^{-\Lambda_7 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_7(\tau-t)} [\mu_{7,2} c_2^{(1)}(\tau) c_5^{(1)}(\tau) + \mu_{7,3} c_3^{(1)}(\tau) c_4^{(1)}(\tau) + \mu_{7,5} c_5^{(1)}(\tau) c_2^{(1)}(\tau)]$$

$$c_7^{(3)}(t) = c_7(0) e^{-\Lambda_7 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_7(\tau-t)} [\mu_{7,2} c_2^{(2)}(\tau) c_5^{(2)}(\tau) + \mu_{7,3} c_3^{(2)}(\tau) c_4^{(2)}(\tau) + \mu_{7,5} c_5^{(2)}(\tau) c_2^{(2)}(\tau)]$$

⋮

$$c_7^{(N)}(t) = c_7(0) e^{-\Lambda_7 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_7(\tau-t)} [\mu_{7,2} c_2^{(N-1)}(\tau) c_5^{(N-1)}(\tau) + \mu_{7,3} c_3^{(N-1)}(\tau) c_4^{(N-1)}(\tau) + \mu_{7,5} c_5^{(N-1)}(\tau) c_2^{(N-1)}(\tau)]$$

⋮

$$n = 8: c_8^{(0)}(t) = c_8(0)e^{-\Lambda_8 t}$$

$$c_8^{(1)}(t) = c_8(0)e^{-\Lambda_8 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_8(\tau-t)} [\mu_{8,2}c_2^{(0)}(\tau)c_6^{(0)}(\tau) + \\ + \mu_{8,3}c_3^{(0)}(\tau)c_5^{(0)}(\tau) + \mu_{8,4}c_4^{(0)}(\tau)c_4^{(0)}(\tau) + \\ + \mu_{8,5}c_5^{(0)}(\tau)c_3^{(0)}(\tau) + \mu_{8,6}c_6^{(0)}(\tau)c_2^{(0)}(\tau)]$$

$$c_8^{(2)}(t) = c_8(0)e^{-\Lambda_8 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_8(\tau-t)} [\mu_{8,2}c_2^{(1)}(\tau)c_6^{(1)}(\tau) + \\ + \mu_{8,3}c_3^{(1)}(\tau)c_5^{(1)}(\tau) + \mu_{8,4}c_4^{(1)}(\tau)c_4^{(1)}(\tau) + \\ + \mu_{8,5}c_5^{(1)}(\tau)c_3^{(1)}(\tau) + \mu_{8,6}c_6^{(1)}(\tau)c_2^{(1)}(\tau)]$$

$$c_8^{(3)}(t) = c_8(0)e^{-\Lambda_8 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_8(\tau-t)} [\mu_{8,2}c_2^{(2)}(\tau)c_6^{(2)}(\tau) + \\ + \mu_{8,3}c_3^{(2)}(\tau)c_5^{(2)}(\tau) + \mu_{8,4}c_4^{(2)}(\tau)c_4^{(2)}(\tau) + \\ + \mu_{8,5}c_5^{(2)}(\tau)c_3^{(2)}(\tau) + \mu_{8,6}c_6^{(2)}(\tau)c_2^{(2)}(\tau)]$$

⋮

$$c_8^{(N)}(t) = c_8(0)e^{-\Lambda_8 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_8(\tau-t)} [\mu_{8,2}c_2^{(N-1)}(\tau)c_6^{(N-1)}(\tau) + \\ + \mu_{8,3}c_3^{(N-1)}(\tau)c_5^{(N-1)}(\tau) + \mu_{8,4}c_4^{(N-1)}(\tau)c_4^{(N-1)}(\tau) + \\ + \mu_{8,5}c_5^{(N-1)}(\tau)c_3^{(N-1)}(\tau) + \mu_{8,6}c_6^{(N-1)}(\tau)c_2^{(N-1)}(\tau)]$$

⋮

$$n = 9: c_9^{(0)}(t) = c_9(0)e^{-\Lambda_0 t}$$

$$\begin{aligned} c_9^{(1)}(t) = c_9(0)e^{-\Lambda_0 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_0(\tau-t)} & [\mu_{9,2}c_2^{(0)}(\tau)c_7^{(0)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,3}c_3^{(0)}(\tau)c_6^{(0)}(\tau) + \mu_{9,4}c_4^{(0)}(\tau)c_5^{(0)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,5}c_5^{(0)}(\tau)c_4^{(0)}(\tau) + \mu_{9,6}c_6^{(0)}(\tau)c_3^{(0)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,7}c_7^{(0)}(\tau)c_2^{(0)}(\tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_9^{(2)}(t) = c_9(0)e^{-\Lambda_0 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_0(\tau-t)} & [\mu_{9,2}c_2^{(1)}(\tau)c_7^{(1)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,3}c_3^{(1)}(\tau)c_6^{(1)}(\tau) + \mu_{9,4}c_4^{(1)}(\tau)c_5^{(1)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,5}c_5^{(1)}(\tau)c_4^{(1)}(\tau) + \mu_{9,6}c_6^{(1)}(\tau)c_3^{(1)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,7}c_7^{(1)}(\tau)c_2^{(1)}(\tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_9^{(3)}(t) = c_9(0)e^{-\Lambda_0 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_0(\tau-t)} & [\mu_{9,2}c_2^{(2)}(\tau)c_7^{(2)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,3}c_3^{(2)}(\tau)c_6^{(2)}(\tau) + \mu_{9,4}c_4^{(2)}(\tau)c_5^{(2)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,5}c_5^{(2)}(\tau)c_4^{(2)}(\tau) + \mu_{9,6}c_6^{(2)}(\tau)c_3^{(2)}(\tau) + \\ & + \mu_{9,7}c_7^{(2)}(\tau)c_2^{(2)}(\tau)] \end{aligned}$$

⋮

$$c_9^{(N)}(t) = c_9(0)e^{-\Lambda_0 t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_0(\tau-t)} [\mu_{9,2}c_2^{(N-1)}(\tau)c_7^{(N-1)}(\tau) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_{9,3}c_3^{(N-1)}(\tau)c_8^{(N-1)}(\tau) + \mu_{9,4}c_4^{(N-1)}(\tau)c_8^{(N-1)}(\tau) + \\
 & + \mu_{9,5}c_5^{(N-1)}(\tau)c_4^{(N-1)}(\tau) + \mu_{9,6}c_6^{(N-1)}(\tau)c_3^{(N-1)}(\tau) + \\
 & + \mu_{9,7}c_7^{(N-1)}(\tau)c_2^{(N-1)}(\tau)]
 \end{aligned}$$

⋮

$$n = 10 : c_{10}^{(0)}(t) = c_{10}(0)e^{-\Lambda_{10}t}$$

$$c_{10}^{(1)}(t) = c_{10}(0)e^{-\Lambda_{10}t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_{10}(\tau-t)} [\mu_{10,2}c_2^{(0)}(\tau)c_8^{(0)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,3}c_3^{(0)}(\tau)c_7^{(0)}(\tau) + \mu_{10,4}c_4^{(0)}(\tau)c_6^{(0)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,5}c_5^{(0)}(\tau)c_5^{(0)}(\tau) + \mu_{10,6}c_6^{(0)}(\tau)c_4^{(0)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,7}c_7^{(0)}(\tau)c_3^{(0)}(\tau) + \mu_{10,8}c_8^{(0)}(\tau)c_2^{(0)}(\tau)]$$

$$c_{10}^{(2)}(t) = c_{10}(0)e^{-\Lambda_{10}t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_{10}(\tau-t)} [\mu_{10,2}c_2^{(1)}(\tau)c_8^{(1)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,3}c_3^{(1)}(\tau)c_7^{(1)}(\tau) + \mu_{10,4}c_4^{(1)}(\tau)c_6^{(1)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,5}c_5^{(1)}(\tau)c_5^{(1)}(\tau) + \mu_{10,6}c_6^{(1)}(\tau)c_4^{(1)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,7}c_7^{(1)}(\tau)c_3^{(1)}(\tau) + \mu_{10,8}c_8^{(1)}(\tau)c_2^{(1)}(\tau)]$$

$$c_{10}^{(3)}(t) = c_{10}(0)e^{-\Lambda_{10}t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_{10}(\tau-t)} [\mu_{10,2}c_2^{(2)}(\tau)c_8^{(2)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,3}c_3^{(2)}(\tau)c_7^{(2)}(\tau) + \mu_{10,4}c_4^{(2)}(\tau)c_6^{(2)}(\tau) +$$

$$+ \mu_{10,5}c_5^{(2)}(\tau)c_5^{(2)}(\tau) + \mu_{10,6}c_6^{(2)}(\tau)c_4^{(2)}(\tau) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_{10,7} c_7^{(2)}(\tau) c_3^{(2)}(\tau) + \mu_{10,8} c_8^{(2)}(\tau) c_2^{(2)}(\tau) \\
 & \vdots \\
 c_{10}^{(N)}(t) = & c_{10}(0) e^{-\Lambda_{10} t} + \int_0^t d\tau e^{\Lambda_{10}(\tau-t)} [\mu_{10,2} c_2^{(N-1)}(\tau) c_8^{(N-1)}(\tau) + \\
 & + \mu_{10,3} c_3^{(N-1)}(\tau) c_7^{(N-1)}(\tau) + \mu_{10,4} c_4^{(N-1)}(\tau) c_6^{(N-1)}(\tau) + \\
 & + \mu_{10,5} c_5^{(N-1)}(\tau) c_5^{(N-1)}(\tau) + \mu_{10,6} c_6^{(N-1)}(\tau) c_4^{(N-1)}(\tau) + \\
 & + \mu_{10,7} c_7^{(N-1)}(\tau) c_3^{(N-1)}(\tau) + \mu_{10,8} c_8^{(N-1)}(\tau) c_2^{(N-1)}(\tau)] \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Fazendo a comparação entre as soluções — as soluções $c_n(t)$ com as soluções $c_n^{(t)}(t)$ até um certo n , temos:

$$n = 0 : c_0^{(0)}(t) = c_0(t) = 1$$

$$n = 1 : c_1^{(0)}(t) = c_1(t) = 0$$

$$n = 2 : c_2^{(N)}(t) = c_2^{(N-1)}(t) = \dots = c_2^{(3)}(t) = c_2^{(2)}(t) = c_2^{(1)}(t) = c_2^{(0)}(t) = c_2(t)$$

$$n = 3 : c_3^{(N)}(t) = c_3^{(N-1)}(t) = \dots = c_3^{(3)}(t) = c_3^{(2)}(t) = c_3^{(1)}(t) = c_3(t)$$

$$n = 4 : c_4^{(N)}(t) = c_4^{(N-1)}(t) = \dots = c_4^{(3)}(t) = c_4^{(2)}(t) = c_4^{(1)}(t) = c_4(t)$$

$$n = 5 : c_5^{(N)}(t) = c_5^{(N-1)}(t) = \dots = c_5^{(3)}(t) = c_5^{(2)}(t) = c_5^{(1)}(t) = c_5(t)$$

$$\text{pois : } c_2^{(0)}(t) = c_2(t) ; c_3^{(0)}(t) = c_3(t)$$

$$n = 6: c_6^{(N)}(t) = c_6^{(N-1)}(t) = \dots = c_6^{(3)}(t) = c_6^{(2)}(t) = c_6(t)$$

$$\text{pois: } c_2^{(1)}(t) = c_2(t); c_3^{(1)}(t) = c_3(t); c_4^{(1)}(t) = c_4(t)$$

$$n = 7: c_7^{(N)}(t) = c_7^{(N-1)}(t) = \dots = c_7^{(3)}(t) = c_7^{(2)}(t) = c_7(t)$$

$$\text{pois: } c_2^{(1)}(t) = c_2(t); c_3^{(1)}(t) = c_3(t); c_4^{(1)}(t) = c_4(t); c_5^{(1)}(t) = c_5(t)$$

$$n = 8: c_8^{(N)}(t) = c_8^{(N-1)}(t) = \dots = c_8^{(3)}(t) = c_8(t)$$

$$\text{pois: } c_2^{(3)}(t) = c_2(t); c_3^{(3)}(t) = c_3(t); c_4^{(3)}(t) = c_4(t); c_5^{(3)}(t) = c_5(t);$$

$$c_6^{(3)}(t) = c_6(t)$$

$$n = 9: c_9^{(N)}(t) = c_9^{(N-1)}(t) = \dots = c_9^{(3)}(t) = c_9(t)$$

$$\text{pois: } c_2^{(3)}(t) = c_2(t); c_3^{(3)}(t) = c_3(t); c_4^{(3)}(t) = c_4(t); c_5^{(3)}(t) = c_5(t);$$

$$c_6^{(3)}(t) = c_6(t); c_7^{(3)}(t) = c_7(t)$$

$$n = 10: c_{10}^{(N)}(t) = c_{10}^{(N-1)}(t) = \dots = c_{10}^{(4)}(t) = c_{10}(t)$$

$$\text{pois: } c_2^{(3)}(t) = c_2(t); c_3^{(3)}(t) = c_3(t); c_4^{(3)}(t) = c_4(t); c_5^{(3)}(t) = c_5(t);$$

$$c_6^{(3)}(t) = c_6(t); c_7^{(3)}(t) = c_7(t); c_8^{(3)}(t) = c_8(t)$$

Então, resumidamente, temos:

$$c_2^{(0)}(t) = c_2(t)$$

$$c_3^{(0)}(t) = c_3(t)$$

$$c_4^{(1)}(t) = c_4(t)$$

$$c_5^{(1)}(t) = c_5(t)$$

$$c_6^{(2)}(t) = c_6(t)$$

$$c_7^{(2)}(t) = c_7(t)$$

$$c_8^{(3)}(t) = c_8(t)$$

$$c_9^{(3)}(t) = c_9(t)$$

$$c_{10}^{(4)}(t) = c_{10}(t)$$

⋮

Nesse sentido, dessa comparação, obtemos que

$$c_n^{(l)}(t) = c_n(t),$$

sempre que

$$l \geq \frac{n-3}{2}.$$

