

**IFT - UNESP**  
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/2024

# A Radiação na Eletrodinâmica de Podolsky

Hiram Souza Marinho Rodrigues

Orientador

*Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar*

Coorientador

*Prof. Dr. Carlos Alberto Bonin*

29 de Fevereiro de 2024

R696r      Rodrigues, Hiram Souza Marinho  
              A radiação na eletrodinâmica de Podolsky/ Hiram Souza Marinho  
Rodrigues. – São Paulo, 2023  
              134 f. : il. color.

              Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo  
              Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar  
              Coorientador: Carlos Alberto Bonin

              1. Teoria de campos (Física). 2. Radiação. 3. Eletrodinâmica. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca  
do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo  
autor(a).

# **A RADIAÇÃO NA ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física Teórica do Câmpus de São Paulo, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título Mestre em Física, Especialidade Física Teórica.

## **Comissão Examinadora:**

Prof. Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR (Orientador)

Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. DIÓGENES GALETTI

Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. RODRIGO ROCHA CUZINATTO

Universidade Federal de Alfenas/UNIFAL

**Conceito:** Aprovado

São Paulo, 29 de fevereiro de 2024.

*Dedico esta dissertação à minha mãe e ao meu pai,  
Marizete e Ademar.*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Bruto Pimentel e ao meu coorientador Prof. Carlos Bonin. Muito obrigado por me orientarem durante esses dois anos de Mestrado, pela disponibilidade em tirar minhas dúvidas, pelos vários *feedbacks*, pela paciência e pela confiança que depositaram em mim. Agradeço muito a vocês por ajudarem a expandir meus conhecimentos sobre a física.

Agradeço à minha mãe Marizete e ao meu pai Ademar. Sou imensamente grato a vocês dois, pela criação, pelo amor incondicional, apoio, suporte, por serem a minha maior fonte de inspiração e os meus exemplos de bondade e perseverança. Sem dúvida alguma, vocês são a razão da minha existência, do meu passado, presente e futuro. E dentre inúmeros motivos para agradecer, tenho gratidão eterna por ser filho de vocês.

Agradeço à minha tia Marileusa e ao meu tio Wilson. Tenho uma grande gratidão a vocês dois, por serem uma fonte de luz, amor, apoio e paz na minha vida. Muito obrigado pelos diversos conselhos e por me acompanharem na minha trajetória. Vocês dois são como pais para mim.

Agradeço ao meu primo Diego Rodrigues. Você é meu primo e meu irmão mais velho, que me inspirou a fazer física desde o início e tem minha eterna gratidão. Também gostaria muito de te agradecer, por ser um exemplo na minha vida e na física, por me incentivar sempre, acreditar em mim e dar suporte em todos os momentos. Vir para SP com você foi um incrível *crossover* e te agradeço por toda a força que me deu, na vida e na física.

Agradeço à minha tia Cleyde e meu tio Hélio, pelo amor e incentivo que vocês sempre me deram, e por serem uma fonte de alegria e união para mim. Vocês também são como pais pra mim.

Agradeço à minha família, por me apoiarem e serem uma fonte de felicidade e de união, é como a gente diz “é JJ, ‘jeral junto’, num braço só”. Em especial, gostaria de agradecer os meus primos, Leonardo, Lucas, Jessé e Rodrigo, por todos os momentos de união, de ‘resenha’ e de parceria, a festa com vocês é sempre épica. E como minha família é gigante, infelizmente não vai dar pra citar todo mundo, mas todos vocês tem um lugar no meu coração.

Agradeço à Letícia, minha namorada, amiga e grande parceira. Sou muito grato por ter você ao meu lado, pelo seu amor, pelo seu carinho, e por me incentivar ao longo dessa caminhada. Obrigado pela sua compreensão e apoio quando não pude estar presente ao seu lado para focar na física. Também te agradeço por sempre me presentear com a sua alegria e com um sorriso que clareia os dias mais cinzas, meu amor.

Agradeço às amigas que fiz ao longo da vida. Muito obrigado por me apoiarem e dividirem momentos incríveis comigo. Em especial, gostaria de agradecer: ao irmão Davi

que a vida me deu na infância, pela irmandade e parceria que dura há mais de 20 anos; aos amigos do colégio, Alberto ('Ava'), Lucca ('Luccao'), Pedro ('Pedrin'), Igor ('Fain'), Igor ('Trokka'), Henrique e Paulo, por todas as 'doideras' juntos, pelas boas risadas, pela amizade e pelos incentivos, com vocês tudo fica mais engraçado; ao meu amigo Filipe, pela amizade e pelas inúmeras conversas sobre física, divulgação científica e a vida, conversar com você é não ver o tempo passar de tão bom que é; aos meus amigos João Victor e Luiz Carlos, pela parceria durante vários momentos da graduação, graduar com vocês e dividir o amor pela física teórica foi um grande prazer.

Agradeço às amizades que fiz no IFT e aos demais estudantes que tive o prazer de conhecer durante o Mestrado. Muito obrigado por me receberem tão bem. Em especial, gostaria de agradecer: aos peruanos Maycol, Luís Gabriel e Juan, pelos bons momentos que passamos juntos, pelas incontáveis horas de conversa sobre a física e a vida, e "*por contarme sus mentiras*"; aos meus conterrâneos João Pedro e Eggon lá de BH uai, pelos bons momentos e por dividirem comigo o saudosismo de BH, era sempre bom te ouvir falar do gigante de MG João, e também jamais esquecerei do dia que tudo parecia desmoronar mas nós vencemos Eggon, de grão em grão. Também agradeço ao Eduardo, Rodrigo, Matheus, Washington, Isabela e Luísa, pela companhia, receptividade e o esforço de vocês em unir a comunidade.

Agradeço à toda a comunidade acadêmica do IFT, por disponibilizarem uma excelente infra-estrutura para fazer pesquisa. Ficam aqui os meus agradecimentos à todas as pessoas que trabalham lá e tornam incrível a experiência de fazer parte do IFT. Agradeço também por todos os recursos disponibilizados a mim para fazer pesquisa.

Agradeço ao ICTP-SAIFR, por fomentar eventos acadêmicos em alto nível, de forma contínua, e viabilizar o intercâmbio de conhecimento entre cientistas do mundo todo. O caderno amarelo de vocês me acompanhou durante todo o Mestrado, seja nas reuniões, aulas ou em eventos.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante o meu Mestrado.

*“Não hesitarei nem contemporeizarei no trabalho pela física e pela ciência no Brasil.”*

José Leite Lopes, *Ciência e Liberdade*

# Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar a teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky e algumas de suas aplicações. Proposta em 1942 por Boris Podolsky, a eletrodinâmica de Podolsky é uma generalização da teoria eletromagnética de Maxwell, em que ela é realizada introduzindo derivadas de segunda ordem do campo eletromagnético na densidade lagrangiana de Maxwell. Primeiramente, apresentaremos a construção da eletrodinâmica de Podolsky de acordo com o formalismo de uma teoria de campos de 2ª ordem. Na sequência, será abordada a teoria da radiação e obteremos a função de Green do quadripotencial de Podolsky, os potenciais de Lienard-Wiechert-Podolsky e o tensor de Faraday retardado. Por fim, o trabalho desenvolvido anteriormente auxiliará na obtenção de algumas aplicações da teoria, como os campos eletromagnéticos gerados por uma partícula com velocidade constante, e na dedução de outros resultados, como o campo elétrico gerado por uma partícula em movimento acelerado e a potência de Larmor-Podolsky.

**Palavras Chaves:** Eletrodinâmica de Podolsky; Teoria de campos de segunda ordem; Teoria da radiação; Função de Green; Potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky; Tensor de Faraday; Radiação emitida.

**Áreas do conhecimento:** Física; Teoria de Campos; Eletrodinâmica.

# Abstract

This dissertation aims to present the radiation theory in Podolsky's electrodynamics and some of its applications. Proposed in 1942 by Boris Podolsky, Podolsky electrodynamics is a generalization of Maxwell's electromagnetic theory, which is realized by introducing second-order derivatives of the electromagnetic field into Maxwell's Lagrangian density. Firstly, we will present the construction of Podolsky electrodynamics according to the formalism of a 2nd order field theory. Furthermore, the radiation theory will be discussed, and we will obtain the Green's function of Podolsky's four-potential, the Lienard-Wiechert-Podolsky potentials, and the retarded Faraday tensor. Finally, the work developed previously will help to obtain some applications of the theory, such as the electromagnetic fields generated by a particle with constant speed, and in deducing other results, such as the electric field generated by an accelerated moving particle and the Larmor-Podolsky power.

**Keywords:** Podolsky's electrodynamics; Second order field theory; Radiation theory; Green's function; Lienard-Wiechert-Podolsky potential; Faraday tensor; Radiation emitted.

**Knowledge areas:** Physics; Field Theory; Electrodynamics.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Por que recorrer a uma eletrodinâmica alternativa? . . . . .	2
1.2	Eletrodinâmica de Podolsky: uma possível extensão à eletrodinâmica de Maxwell . . . . .	3
1.3	Aspectos gerais de uma teoria com derivadas de segunda ordem . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Fundamentos da eletrodinâmica de Podolsky</b>	<b>6</b>
2.1	Teoria de campos com derivadas de 1ª ordem . . . . .	6
2.2	Teoria de campos com derivadas de 2ª ordem . . . . .	10
2.3	A lagrangiana e o campo de Podolsky . . . . .	13
2.4	Equações de Podolsky . . . . .	13
2.5	Conservação da carga e invariância de <i>gauge</i> . . . . .	16
2.6	Teorema de Noether e as simetrias do sistema . . . . .	18
2.6.1	Teorema de Noether . . . . .	18
2.6.2	Grupo de Poincaré . . . . .	23
2.6.3	O tensor de energia-momento de Podolsky . . . . .	25
2.6.4	Os tensores momento angular orbital e <i>spin</i> de Podolsky . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Teoria da radiação</b>	<b>37</b>
3.1	<i>Gauge</i> de Lorenz da eletrodinâmica de Podolsky . . . . .	37
3.2	Funções de Green de Maxwell e Klein-Gordon-Fock . . . . .	39
3.3	Potenciais retardados e avançados . . . . .	43
3.3.1	Causalidade . . . . .	43
3.3.2	Potenciais retardados e avançados de Maxwell . . . . .	44
3.3.3	Potenciais retardados e avançados de Klein-Gordon-Fock . . . . .	50
3.4	O potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky . . . . .	54
3.5	Caracterização do parâmetro de Podolsky . . . . .	60
3.6	Comparativo dos potenciais de Lienard-Wiechert de Podolsky e de Maxwell . . . . .	61
3.7	Tensor de Faraday retardado . . . . .	62

<b>4</b>	<b>Aplicações da teoria da radiação</b>	<b>69</b>
4.1	Partícula carregada em movimento não acelerado . . . . .	69
4.1.1	Partícula em repouso . . . . .	70
4.1.2	Partícula com velocidade constante . . . . .	73
4.2	Partícula em movimento acelerado . . . . .	79
4.3	Radiação emitida por uma partícula . . . . .	86
4.3.1	Radiação em baixas velocidades . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>94</b>
5.1	Conclusões e resumos dos resultados obtidos . . . . .	94
5.2	Perspectivas futuras . . . . .	99
<b>A</b>	<b>Notação e definições</b>	<b>102</b>
A.1	Sistema de unidades . . . . .	102
A.2	Espaço-tempo . . . . .	102
A.3	Tensores importantes . . . . .	104
A.3.1	Tensor de Faraday . . . . .	104
A.3.2	Pseudo-tensor de Levi-Civita . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Condição de comutatividade de <math>\delta</math> e <math>\partial_\mu</math> e variação do hipervolume de integração <math>d^4x</math></b>	<b>107</b>
B.1	Condição de comutatividade de $\delta$ e $\partial_\mu$ . . . . .	107
B.2	Aproximação usada na variação do hipervolume de integração . . . . .	108
<b>C</b>	<b>Tensor energia-momento simétrico de Podolsky</b>	<b>109</b>
<b>D</b>	<b>Resolução da integral da função de Green retardada de KGF</b>	<b>121</b>
<b>E</b>	<b>Cálculos da radiação em baixas velocidades</b>	<b>126</b>
	<b>Referências</b>	<b>132</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este capítulo tem como objetivo motivar o estudo de uma eletrodinâmica generalizada, que visa ser uma extensão da teoria eletromagnética de Maxwell. Tratando-se de uma teoria mais abrangente, é de se esperar que ela contenha os resultados previstos pela teoria de Maxwell como um subproduto e faça previsões novas. Neste contexto, veremos que a eletrodinâmica de Podolsky surge como uma candidata natural, além de ser uma alternativa promissora.

Essa nova eletrodinâmica tem como principal característica ser uma teoria com derivadas de segunda ordem nos campos eletromagnéticos<sup>1</sup>. Tal particularidade é que a diferencia da teoria de Maxwell, que possui apenas derivadas de primeira ordem nos campos. Sendo assim, é possível afirmar sem exageros que, para compreendermos a eletrodinâmica de Podolsky, é necessário compreender bem o formalismo de uma teoria de campos com derivadas de segunda ordem. Nesse sentido, tal formalismo será discutido ao longo do capítulo 2 da dissertação, enquanto que o capítulo 3 é dedicado a explorar a teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky. Por último, o capítulo 4 consiste em apresentar algumas aplicações derivadas dos resultados obtidos nos capítulos 2 e 3.

A fim de fornecer um guia para a dissertação, apresentaremos aqui um breve resumo sobre o conteúdo de cada capítulo. No capítulo 2, construiremos a eletrodinâmica de Podolsky usando o formalismo de uma teoria de campos de 2ª ordem. De forma que daremos destaque a alguns elementos importantes, como: equações de movimento, tensor de energia-momento e tensor momento angular total (orbital + *spin*). Com relação ao capítulo 3, serão vistos alguns resultados importantes da teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky, dentre eles, podemos destacar: o *gauge* de Lorenz generalizado, a função de Green de Podolsky, o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky e o tensor de Faraday retardado. Já no capítulo 4, reuniremos os resultados dos capítulos anteriores para calcular os campos gerados por uma partícula em movimento, de forma que diferentes casos serão analisados,

---

<sup>1</sup>Uma explicação mais detalhada sobre o que significa o termo 'derivadas de segunda ordem' é dada na seção 1.3.

por exemplo, repouso, velocidade constante e movimento acelerado. E através dos campos obtidos, poderemos finalmente analisar a radiação emitida por uma partícula sob a ótica da eletrodinâmica de Podolsky. De forma que, obteremos a potência emitida por uma carga em movimento, e vamos particularizar a análise para a radiação emitida por uma carga em baixas velocidades.

Por fim, vale destacar que as próximas seções da introdução foram construídas com o objetivo de motivar o estudo de uma eletrodinâmica alternativa. Sendo assim, apresentaremos a necessidade de estender o eletromagnetismo de Maxwell, as principais características da eletrodinâmica de Podolsky, e a razão dela ser uma alternativa promissora à teoria eletromagnética que conhecemos.

## 1.1 Por que recorrer a uma eletrodinâmica alternativa?

A teoria eletromagnética de Maxwell, compilada nas quatro equações de Maxwell e na equação da força de Lorentz, é sem dúvida alguma um dos pilares da física. Desde o seu advento em 1873, quando Maxwell publicou seu tratado sobre o eletromagnetismo [24], ela tem sido a base para explicar diversos fenômenos eletromagnéticos. E além disso, uma vasta quantidade de aplicações tecnológicas não seriam possíveis sem a compreensão do eletromagnetismo, e.g.<sup>2</sup>, luz elétrica, computadores, máquinas elétricas, etc.

Portanto, sendo uma teoria tão robusta, que descreve diversos fenômenos e dá base à existência de diversas tecnologias, surge naturalmente a pergunta: por que estender essa teoria e recorrer a uma eletrodinâmica alternativa? Porque sabemos que, no âmbito da física clássica, o eletromagnetismo de Maxwell possui limitações quando tentamos estender o seu uso para descrever determinados fenômenos físicos. Dentre limitações mais evidentes, e outras nem tanto assim, destacaremos aqui a mais evidente e uma das grandes motivadoras na busca de extensões da eletrodinâmica de Maxwell: presença de infinitos associados à carga pontual.

Sabemos que a teoria física atual que melhor descreve a dinâmica e interações de partículas subatômicas como o elétron é a teoria quântica de campos. Porém, mesmo tendo uma descrição adequada para essas partículas na perspectiva quântica, é insatisfatório e indesejável a presença de divergências ao calcular simples observáveis associados à carga pontual no contexto clássico, como o campo eletromagnético que é infinito na posição da carga, levando a uma energia eletrostática divergente no elétron. Portanto, a presença dos infinitos é insatisfatória, pois

---

<sup>2</sup>E.g. é uma expressão abreviada para *exempli gratia* do latim que significa “por exemplo”.

eles são fontes de problemas na descrição de fenômenos que, *a priori*<sup>3</sup>, podem ser resolvidos no âmbito clássico, como a reação de radiação. E tendo como motivação esse problema dos infinitos, surgiram diversos trabalhos e teorias para tentar resolvê-lo, e.g., a eletrodinâmica de Podolsky.

Por fim, do ponto de vista teórico, é desejável que tenhamos um modelo sem divergências para a descrição de partículas pontuais carregadas na física clássica, i.e., sem infinitos. E do ponto de vista fenomenológico, é desejável quando levamos em conta a física dos aceleradores de partículas, pois não é factível modelar feixes de partículas pontuais em termos de corpos extensos carregados [16], dado que experimentos de altas energias indicam que o elétron, por exemplo, pode ser considerado como uma partícula pontual, pelo menos até distâncias da ordem de  $10^{-15}$  cm [14].

## 1.2 Eletrodinâmica de Podolsky: uma possível extensão à eletrodinâmica de Maxwell

Há várias propostas para estender a eletrodinâmica de Maxwell. Dentre elas, temos a eletrodinâmica de Podolsky. Proposta originalmente por Bopp em 1940 [7] e Podolsky em 1942 [29] de forma independente, ao propor uma nova eletrodinâmica, a principal motivação era remover os infinitos associados ao tratamento da carga pontual. No caso, isso foi feito pensando em formular duas versões da teoria: clássica e quântica. De fato, posteriormente à formulação da parte clássica, Podolsky e Kikuchi formularam a versão quântica [30] e [31].

Originalmente, Podolsky argumentou em [29] que, visando manter a linearidade das equações de campo para facilitar a quantização, a única forma de generalizar a teoria de Maxwell seria acrescentando à lagrangiana termos que envolvessem derivadas dos campos elétricos e magnéticos. Desta forma, as equações de movimento dos campos possuem agora derivadas de ordem superior a 2.

Após o trabalho de Podolsky, surgiram diversos resultados que dão uma robustez maior a esta nova eletrodinâmica e que a torna bastante promissora. Dentre eles, foi mostrado por Cuzinatto *et al.* [12] que: a única forma de acrescentar derivadas de segunda ordem nos campos na lagrangiana, mantendo a linearidade das equações e preservando as simetrias de Lorentz e de *gauge*, é através da eletrodinâmica de Podolsky.

---

<sup>3</sup>*A priori* é uma expressão do latim que significa “à primeira vista”. Ou seja, pode ser entendida como “a princípio”.

Sendo a eletrodinâmica de Podolsky uma possível extensão à eletrodinâmica de Maxwell, é de se esperar que a primeira contenha a segunda no limite apropriado e que reproduza os seus resultados. De fato, como veremos adiante, a teoria eletromagnética de Maxwell pode ser obtida como um limite da teoria de Podolsky, no caso em que o parâmetro fundamental da teoria, o parâmetro de Podolsky ( $a$ ), tende a zero. Então, *a priori*, no limite que  $a \rightarrow 0$ , a eletrodinâmica de Podolsky contém todos os resultados do eletromagnetismo maxwelliano e, além disso, é capaz de resolver alguns dos problemas que não são resolvidos na eletrodinâmica usual. Para citar alguns desses resultados, temos que: o problema de 4/3 do eletromagnetismo foi resolvido por Frenkel em 1996 [14]; o potencial elétrico gerado por uma carga pontual é finito quando medido sobre a mesma; a auto-força de uma partícula uniformemente acelerada é finita [16].

### 1.3 Aspectos gerais de uma teoria com derivadas de segunda ordem

O eletromagnetismo como conhecemos pode ser formulado de forma completamente covariante, usando o arcabouço teórico da teoria clássica de campos. E em particular, é uma teoria que envolve apenas derivadas de primeira ordem nos campos. Ou seja, ao considerarmos a lagrangiana da teoria, ela só depende dos campos e de suas derivadas de primeira ordem.

Porém, pode-se generalizar o eletromagnetismo ao acrescentar derivadas de ordem superior nos campos. De fato, foi isto que Podolsky fez no século 20, conforme mencionado na seção 1.2. Ele acrescentou uma correção à lagrangiana, incluindo uma derivada de segunda ordem nos campos. Daí, é de se esperar que obtenhamos uma nova física. Pois, como será discutido e mostrado no capítulo 2, ao fazer esta modificação, temos novas expressões para as quantidades de interesse de uma teoria de campos, e.g., tensor de energia-momento, tensor de momento angular e *spin*, quadrimomento etc. Além disso, a própria equação de Euler-Lagrange é modificada.

Considerando a possível dúvida que pode surgir relacionada ao termo derivadas de segunda ordem nos campos, é válido já fazermos uma breve explicação sobre isto. Ao se referir às derivadas de segunda ordem dos campos  $\phi_i(x)$ , estamos nos referindo aos novos termos  $\partial_\mu \partial_\nu \phi_i(x)$  que aparecerão na densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  associada à eletrodinâmica de Podolsky, e não à ordem das equações

de movimento dos campos. As equações de movimento possuirão derivadas de ordem superior a 2, podendo ser equações diferenciais de terceira ordem ou quarta ordem, a depender se estamos falando dos campos elétricos e magnéticos ou dos potenciais. Portanto, a eletrodinâmica de Podolsky aumenta a ordem das equações diferenciais. E isto é uma vantagem, pois equações diferenciais de ordem superior a 2 lidam melhor com alguns regimes, e.g., regime de altas energias [29]. De fato, conforme será discutido ao longo da dissertação, a eletrodinâmica de Podolsky está associada ao limite de altas energias.

# Capítulo 2

## Fundamentos da eletrodinâmica de Podolsky

Neste capítulo será abordado o formalismo necessário para se construir a eletrodinâmica de Podolsky. Sendo a mesma uma teoria de campos de 2ª ordem, a sua estrutura é diferente em vários aspectos de uma teoria de campos de 1ª ordem, tal como a eletrodinâmica de Maxwell. E para introduzir melhor esse formalismo, será discutido inicialmente sobre a teoria de campos de 1ª ordem para posteriormente tratarmos de uma teoria de campos de 2ª ordem, em virtude da completeza.

A fim de destacar alguns pontos, nesta seção construiremos a eletrodinâmica de Podolsky, obteremos as equações de movimento e mostraremos como se obtém grandezas relevantes da teoria, e.g., tensor de energia-momento e tensor momento angular total (orbital + *spin*). Além disso, ao longo de toda a seção será realizado um comparativo entre as duas eletrodinâmicas, de Maxwell e Podolsky. Como a teoria de Podolsky se propõe a ser uma generalização da de Maxwell, é natural esperarmos que a primeira contenha a segunda como caso particular, e isto será analisado ostensivamente ao longo do capítulo, para garantir assim a consistência dos raciocínios desenvolvidos.

### 2.1 Teoria de campos com derivadas de 1ª ordem

Com os objetivos de fazer o contraste entre teorias de campos com derivadas de 1ª ordem e 2ª ordem, e de tornar a dissertação mais auto-contida, analisemos em primeiro lugar o formalismo de uma teoria de campos com derivada de 1ª ordem. Um campo é uma função que associa uma quantidade física, e.g., escalar, vetor, tensor etc, a cada ponto de um subconjunto do espaço-tempo em que ela está definida. Na física, usamos essa definição matemática para modelar sistemas com um infinito contínuo de graus de liberdade, em que os graus de liberdade são

compreendidos como a quantidade mínima de fatores independentes necessários para determinar completamente o estado físico de um determinado sistema.

Na tentativa de elucidar a diferença entre sistemas que são ou não representados como campos, podemos explicitar os casos abaixo.

- **Posição de partícula clássica no espaço euclidiano:** três variáveis independentes com cada variável indicando a posição em uma das dimensões. Temos então três graus de liberdade para representar o sistema, logo não é um campo.
- **Posição de  $N$  partículas clássicas no espaço euclidiano:** três variáveis independentes para cada partícula,  $3N$  variáveis representando a posição de cada uma nas 3 dimensões. Temos então  $3N$  graus de liberdade para representar o sistema, logo não é um campo.
- **Temperatura em uma certa região do espaço euclidiano:** um infinito contínuo de temperaturas, cada uma associada a um ponto do espaço considerado. Nesse caso, para representar o sistema por completo precisamos de um infinito contínuo de graus de liberdade, logo é um campo.
- **Temperatura em um certo ponto do espaço:** Nesse caso, como não há nenhuma liberdade de escolha com relação a diferentes localidades para se medir a temperatura, temos basicamente um valor associado a um ponto, nos restando somente um grau de liberdade, o que não é considerado um campo.
- **Velocidade do ar se movendo em certa região do espaço euclidiano:** De forma análoga à temperatura, para cada ponto do espaço associamos um vetor de velocidade. Como temos a liberdade de escolha de um infinito contínuo de pontos, temos nesse caso um campo.

Dados estes exemplos, estudaremos a dinâmica dos campos sob um ponto de vista mais fundamental. E para isto, vamos partir do princípio da ação mínima no contexto da mecânica clássica e generalizar para o caso dos campos no espaço-tempo de Minkowski ( $\mathcal{M}^4$ ). Buscamos então o mínimo da ação  $S$ , que é definida por

$$S = \int dt L(q, \dot{q}, t), \quad (2.1)$$

em que  $q$  é a coordenada dinâmica associada ao sistema e  $L$  é a função que descreve o comportamento a ser seguido pelas coordenadas, chamada *função de Lagrange* ou *lagrangiana*.

O processo de minimização da ação resultará na equação de Euler-Lagrange, mostrada abaixo, que é uma equação que descreve a dinâmica do sistema em termos da coordenada  $q$  e velocidade generalizada  $\dot{q}$  usada na construção da lagrangiana.

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Como a energia de um dado sistema isolado é constante no tempo, e os sistemas mecânicos podem ser descritos em termos de sua energia potencial  $V$  e cinética  $K$ , uma escolha natural para a lagrangiana é sua descrição em termos desses valores de energia, como por exemplo  $L = K - V$ . Essa escolha nos permite chegar ao resultado (por unidade de massa)

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \implies \ddot{q} = -\frac{dV}{dq}, \quad (2.3)$$

assumindo que  $dL/dt = 0$ . E no contexto da mecânica Newtoniana, este resultado reproduz exatamente a dinâmica esperada pela segunda lei de Newton.

Já na Teoria Clássica de Campos, a utilização do princípio da ação mínima é um pouco diferente. Nesse caso, ao invés da lagrangiana ser uma função das coordenadas, ela é uma função dos campos  $\Phi^i$ , em que estes são escritos em função das coordenadas do espaço-tempo e o índice  $i$  indica o tipo do campo, de modo que  $i = 1, \dots, N$ . Com isso, não temos uma lagrangiana definida para todas as coordenadas, mas sim uma densidade Lagrangiana<sup>1</sup> ( $\mathcal{L}$ ) permeando a região do espaço onde os campos agem. Podemos calcular a lagrangiana a partir de sua densidade da seguinte forma

$$L = \int_{\tau} dV \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_{\mu} \Phi^i) = \int_{\tau} d^3x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_{\mu} \Phi^i), \quad (2.4)$$

em que  $\tau$  é o volume do espaço tridimensional. Com a lagrangiana em mãos, é possível calcular a ação da mesma forma que fizemos anteriormente

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{\Omega} dt d^3x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_{\mu} \Phi^i) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_{\mu} \Phi^i), \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Ao longo desta dissertação, a densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  será chamada de lagrangiana a fim de simplificar a escrita, a menos quando explicitamente for indicado o contrário.

em que  $\Omega$  é o hipervolume, que contém a seção temporal da expressão (2.5) e a hiperseção espacial da expressão (2.4).

Neste ponto, veremos em detalhe como chegar às equações de Euler-Lagrange desta teoria. Consideremos então a variação na ação tomada com o ponto fixo ( $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = 0$ ) que é dada por:

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \bar{\delta}[\mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)] + \int_{\Omega} \delta(d^4x) \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Como estamos lidando com uma transformação com o ponto fixo temos que  $\bar{\delta} = \delta$ ,<sup>2</sup> logo manteremos a notação do  $\delta$  até que seja explicitado o contrário. Agora, considerando a variação da lagrangiana, do termo de quadrivolume infinitesimal ( $d^4x$ ), e a comutatividade de  $\delta$  e  $\partial_\mu$ .<sup>3</sup>

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} \delta \Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \delta (\partial_\mu \Phi^i), \quad (2.7)$$

$$\delta(d^4x) = \partial_\mu (\delta x^\mu) d^4x = 0 \quad \text{pois} \quad \delta x^\mu = 0, \quad (2.8)$$

$$\bar{\delta}(\partial_\mu \Phi^i) = \partial_\mu (\bar{\delta} \Phi^i), \quad (2.9)$$

$$\implies \delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} \bar{\delta} \Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \partial_\mu (\bar{\delta} \Phi^i) \right]. \quad (2.10)$$

Porém, através das expressões (2.6) e (2.8) nota-se que, para o caso geral, em que a transformação não é necessariamente tomada com o ponto fixo, temos que:

$$\delta = \bar{\delta} + \delta x^\mu \partial_\mu \quad (2.11)$$

$$\implies \bar{\delta} = \delta - \delta x^\mu \partial_\mu. \quad (2.12)$$

Agora, vê-se que, pela regra do produto, chegamos à seguinte variação:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \delta \Phi^i \right] = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \right] \delta \Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \partial_\mu (\delta \Phi^i) \quad (2.13)$$

<sup>2</sup> $\bar{\delta}$  representa uma variação na forma dos campos, i.e.,  $\bar{\delta} \Phi_i(x) = \Phi'_i(x) - \Phi_i(x)$ .

<sup>3</sup>As demonstrações para a variação do quadrivolume infinitesimal e a comutatividade de  $\delta$  e  $\partial_\mu$  encontram-se no apêndice B.

$$\implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \partial_\mu (\delta \Phi^i) = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \delta \Phi^i \right] - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \right] \delta \Phi^i \quad (2.14)$$

$$\implies \delta S = \int_\Omega d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} \delta \Phi^i - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \right] \delta \Phi^i + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \delta \Phi^i \right] \right). \quad (2.15)$$

Com ajuda do Teorema de Stokes, chegamos a seguinte relação para o último termo do 2º membro da equação:

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \delta \Phi^i \right] = \int_{\partial\Omega} d\sigma^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \delta \Phi^i. \quad (2.16)$$

Analogamente ao que acontece para a mecânica clássica, a variação é feita de modo que na hipersuperfície tridimensional ( $\partial\Omega$ ), que é a fronteira da região  $\Omega$ , temos que  $\delta \Phi^i|_{\partial\Omega} = 0$ . Logo, o termo considerado é nulo, o que nos leva ao seguinte:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} \delta \Phi^i - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \right] \delta \Phi^i \right\} \quad (2.17)$$

$$= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \right) \right\} \delta \Phi^i. \quad (2.18)$$

Assim, pelo princípio da mínima ação, para obtermos um extremo (mínimo) da variação, a condição  $\delta S = 0$  deve ser satisfeita. E como  $\delta \Phi^i$  é arbitrário, exceto na fronteira, para que a integral a ser calculada seja zero, precisamos que o termo entre chaves seja zero em todos os pontos de  $\Omega$ . Desse modo, obtemos a equação de Euler-Lagrange para a Teoria Clássica de Campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Com essa equação é possível encontrarmos a descrição de vários sistemas dinâmicos, a depender de quais campos sejam considerados e a forma da lagrangiana.

## 2.2 Teoria de campos com derivadas de 2ª ordem

Sejam os campos  $\phi_i = \phi_i(t, \vec{r}) \equiv \phi_i(x)$ . Consideraremos uma lagrangiana de uma teoria de campos de 2ª ordem genérica, que é dada por  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, \partial_\mu \partial_\nu \phi_i)$ .

Então, a ação associada à esta lagrangiana é dada por:

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_{\mu}\phi_i, \partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i). \quad (2.20)$$

Analogamente ao que fizemos para o caso de 1ª ordem, estaremos interessados em extremizar a ação considerando transformações globais, mais especificamente, transformações com o ponto fixo. Relembrando, tais transformações são aquelas que satisfazem:

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} \Rightarrow \delta x^{\mu} = x'^{\mu} - x^{\mu} = 0, \quad (2.21)$$

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x). \quad (2.22)$$

Sendo assim, podemos agora aplicar o princípio de Hamilton à ação (2.20). Temos então

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_{\mu}\phi_i, \partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i) = \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi_i)} \delta(\partial_{\mu}\phi_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i)} \delta(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

usando a regra do produto e a comutatividade de  $\delta$ ,  $\partial_{\mu}$  e  $\partial_{\nu}$ :

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi_i)} \delta\phi_i \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi_i)} \partial_{\mu}(\delta\phi_i) + \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi_i)} \right) \delta\phi_i \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi_i)} \delta(\partial_{\mu}\phi_i) &= \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi_i)} \delta\phi_i \right) - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi_i)} \right) \delta\phi_i, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \left[ \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i)} \delta\phi_i \right) \right] &= \partial_{\mu} \left( \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i)} \right) \delta\phi_i \right) \\ &\quad + \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i)} \right) \delta(\partial_{\nu}\phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i)} \delta(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \delta(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i) &= \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \delta\phi_i - \partial_\mu \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \delta\phi_i \\ &\quad - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \delta(\partial_\nu \phi_i). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) e (2.25) em (2.23) temos que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d^4x \left\{ \partial_\mu \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \delta(\partial_\nu \phi_i) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \delta\phi_i \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

E pelo teorema da divergência, generalizado para o espaço quadridimensional, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\partial\Omega} d^3\sigma_\mu \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \delta(\partial_\nu \phi_i) \right] \\ &\quad + \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right] \delta\phi_i. \end{aligned} \quad (2.27)$$

De forma análoga ao que é feito na mecânica clássica e na teoria de campos de 1ª ordem, a variação dos campos na fronteira é nula, i.e.,  $\delta\phi_i(x)|_{\partial\Omega} = 0$ . E adicionalmente para o caso de 2ª ordem, também levamos em conta a condição da variação da velocidade generalizada ser nula na fronteira, i.e.,  $\delta(\partial_\mu \phi_i(x))|_{\partial\Omega} = 0$ . Logo, considerando essas condições de contorno que os campos devem satisfazer, temos que a primeira integral é nula, restando:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right] \delta\phi_i. \quad (2.28)$$

Por fim, sabendo que pelo princípio da mínima ação  $\delta S = 0$ , e a variação  $\delta\phi_i$  é arbitrária, chegamos às equações de Euler-Lagrange de 2ª ordem:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) = 0.} \quad (2.29)$$

Com esta equação, poderemos determinar a dinâmica de qualquer sistema cuja lagrangiana depende de derivadas de 2ª ordem nos campos  $\phi_i$ . Em especial, usaremos a equação (2.29) para obter as equações de movimento que regem a dinâmica dos campos na eletrodinâmica de Podolsky.

## 2.3 A lagrangiana e o campo de Podolsky

O campo eletromagnético de Podolsky é dado pelo quadripotencial  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , onde  $\phi = A^0$  é o potencial escalar e  $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$  é o potencial vetor. A lagrangiana de Podolsky ( $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ ) associada ao quadripotencial na presença de fontes é dada por [29]

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} = \mathcal{L}_{\mathcal{M}} + a\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\rho F^{\rho}_\nu, \quad (2.30)$$

$$\text{sendo } \mathcal{L}_{\mathcal{M}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu, \quad (2.31)$$

$$\implies \mathcal{L}_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + a\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\rho F^{\rho}_\nu - J_\mu A^\mu, \quad (2.32)$$

em que  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$  é a lagrangiana de Maxwell na presença de fontes,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor de Faraday,  $J^\mu = (\rho, \vec{j})$  é a quadricorrente e  $a$  é o **parâmetro de Podolsky**, que é um parâmetro real com dimensão de comprimento ao quadrado [29], ou inverso de energia ao quadrado. Neste ponto, torna-se nítida a distinção entre a eletrodinâmica de Maxwell e de Podolsky. De fato, temos que

$$\lim_{a \rightarrow 0_+} \mathcal{L}_{\mathcal{P}} = \mathcal{L}_{\mathcal{M}}, \quad (2.33)$$

ou seja, a Eletrodinâmica de Podolsky reproduz a Eletrodinâmica de Maxwell no limite que  $a \rightarrow 0_+$ .<sup>4</sup> Portanto, quando formos comparar as duas eletrodinâmicas usaremos a relação (2.33) como referência.

## 2.4 Equações de Podolsky

O processo para obter as equações de movimento covariantes e não covariantes do eletromagnetismo de Podolsky é análogo ao que fazemos para o eletromagnetismo de Maxwell. De fato, tendo a equação (2.29) em vista, consideraremos agora a lagrangiana de Podolsky dada pela equação (2.32). Temos então

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{P}}}{\partial A_\alpha} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{P}}}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{P}}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\alpha)} \right) = 0, \quad (2.34)$$

<sup>4</sup>A explicação do porquê o limite é tomado pela direita encontra-se no final da seção 2.6.3.

logo, ao calcular cada quantidade, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{P}}}{\partial A_{\alpha}} = -J^{\alpha}, \quad (2.35)$$

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{P}}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\alpha})} \right) = -\partial_{\mu} F^{\mu\alpha}, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{P}}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} A_{\alpha})} \right) &= \partial_{\mu} \partial_{\nu} [2a(\eta^{\mu\nu} \partial_{\sigma} F^{\sigma\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \partial_{\sigma} F^{\sigma\nu})], \\ \implies \partial_{\mu} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{P}}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} A_{\alpha})} \right) &= 2a \square \partial_{\sigma} F^{\sigma\alpha}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

sendo  $\square \equiv \partial_{\mu} \partial^{\mu}$  o operador d'Alembertiano. Portanto, juntando as três quantidades acima na equação (2.34), e fazendo as trocas de índices  $\sigma \leftrightarrow \mu$  e  $\alpha \leftrightarrow \nu$ :

$$\begin{aligned} -J^{\alpha} + \partial_{\mu} F^{\mu\alpha} + 2a \square \partial_{\sigma} F^{\sigma\alpha} &= 0 \\ \implies (1 + 2a \square) \partial_{\mu} F^{\mu\nu} &= J^{\nu}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

As equações (2.38) são as **equações de Podolsky com fontes** na forma covariante, e elas representam um par do conjunto das equações de Podolsky, o par não homogêneo. Já o par referente à parte sem fontes, i.e., o par homogêneo, pode ser obtido através da identidade de Bianchi, dada por<sup>5</sup>:

$$\partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = \partial_{\alpha} F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} F_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} F_{\alpha\mu} = 0. \quad (2.39)$$

Na eletrodinâmica de Maxwell obtemos o par de equações homogêneas reconhecendo que o tensor de Faraday satisfaz a identidade de Bianchi. E na eletrodinâmica de Podolsky é possível obter as equações homogêneas da mesma forma, dado que o tensor de Faraday é o mesmo, logo as equações (2.39) representam as **equações de Podolsky sem fontes** na forma covariante.

Para efeitos de comparação, obteremos as equações de Podolsky não covariantes, escrevendo-as em termos do campo elétrico  $\vec{E}$  e do campo magnético  $\vec{B}$ .

<sup>5</sup>Para mais detalhes sobre a notação usada na equação (2.39) confira o apêndice A.

Considerando então as definições<sup>6</sup>

$$E^i \equiv F^{i0}, \quad (2.40)$$

$$\implies \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2.41)$$

$$B^i \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}, \quad (2.42)$$

$$\implies \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.43)$$

sendo  $\epsilon^{ijk}$  o *pseudo-tensor de Levi-Civita*, podemos escrever as equações de Podolsky (2.38) e (2.39) de forma não covariante como:

$$(1 + 2a\Box)\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.44)$$

$$(1 + 2a\Box)\left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{j}, \quad (2.45)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.46)$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0. \quad (2.47)$$

Estas são as **equações de Podolsky não covariantes**, que com a equação da força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.48)$$

descrevem toda a eletrodinâmica de Podolsky.

Obtidas as equações de Podolsky, podemos agora compará-las às equações de Maxwell, dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.49)$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{j}, \quad (2.50)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.51)$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0. \quad (2.52)$$

Notemos que, tomando o limite em que  $a \rightarrow 0_+$  nas equações (2.44) e (2.45), temos a completa equivalência entre ambas as eletrodinâmicas. Ou seja, elas diferem

<sup>6</sup>Ao longo desta dissertação será usada a convenção de índices latinos para a parte espacial e índices gregos para a parte espaço-temporal, para mais detalhes veja o apêndice A.

na forma como os campos elétricos e magnéticos interagem com as fontes e em como as fontes criam os campos. Além disso, as equações de movimento que independem das fontes, derivadas da identidade de Bianchi, são as mesmas em ambas as teorias. Portanto, posteriormente, será do nosso interesse estudar como estes campos são criados e como se dá a interação entre os mesmos e as fontes.

## 2.5 Conservação da carga e invariância de *gauge*

Com as equações de Podolsky (2.38) e (2.39) em mãos, exploraremos como se dá a conservação da carga na eletrodinâmica de Podolsky de duas maneiras: através da invariância de *gauge* e através da própria equação de Podolsky com fontes (2.38).

Partindo da equação (2.38), tomaremos a derivada  $\partial_\nu$  de ambos os lados da equação

$$\begin{aligned} (1 + 2a\Box)\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ \implies \partial_\nu(1 + 2a\Box)\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\nu J^\nu \\ \implies (1 + 2a\Box)\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} &= \partial_\nu J^\nu, \end{aligned} \quad (2.53)$$

usando a antissimetria do tensor de Faraday, i.e.,  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ , temos que

$$\begin{aligned} (1 + 2a\Box)\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -(1 + 2a\Box)\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} \\ \implies (1 + 2a\Box)\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

usando isto em (2.53) concluímos que:

$$\partial_\nu J^\nu = 0. \quad (2.55)$$

Portanto, temos a conservação da quadricorrente e, conseqüentemente, a conservação da carga. De forma não covariante, temos que este resultado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \partial_\nu J^\nu &= \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

ou seja, recuperamos a equação da continuidade. E esta equação estabelece a

conservação local da carga elétrica.

Com o intuito de fazer um breve parênteses sobre a invariância de *gauge*, dada a sua importância na física, exploraremos a sua origem. A invariância de *gauge*, ou invariância de calibre, surgiu primeiramente no eletromagnetismo. De acordo com Jackson e Okun (2001, pp.669) [19], Maxwell em seu *treatise* [24] é um dos primeiros a enunciar explicitamente a equação da transformação de *gauge*,  $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi$  (em notação moderna), e afirmar que os campos são invariantes sob este calibre: "A quantidade  $\chi$  desaparece das equações ( $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ) e não está relacionada a qualquer fenômeno físico".

Há uma forma distinta de se chegar ao resultado da conservação da carga, que é explorando a invariância de *gauge* presente tanto na eletrodinâmica de Maxwell quanto na eletrodinâmica de Podolsky. Para isto, consideremos a seguinte transformação do potencial  $A^\mu$

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f(x), \quad (2.57)$$

em que  $f(x) \equiv f(t, \vec{r})$  é uma função escalar arbitrária.

Considerando a forma do potencial,  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , a transformação de *gauge* dada pela equação (2.57) escrita de forma não covariante assume a forma

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial f(x)}{\partial t} \quad (2.58)$$

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f(x). \quad (2.59)$$

Contudo, considerando a forma não covariante dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dadas pelas equações (2.41) e (2.43), pode-se mostrar que tais campos são invariantes sob a transformação de *gauge*, i.e.,  $\vec{E}' = \vec{E}$  e  $\vec{B}' = \vec{B}$ . E como será discutido mais à frente sobre as simetrias, tal invariância leva a alguma conservação, no caso será a conservação da carga.

Dada a transformação de *gauge*, queremos verificar como ela afeta a ação ( $S_P$ ). Para isto, analisemos o tensor de Faraday:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ \implies F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu f(x) - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu f(x) \\ \implies F'^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Logo, sendo o tensor de Faraday invariante, podemos verificar que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}'} = \mathcal{L}_{\mathcal{P}} + J_{\mu} \partial^{\mu} f(x). \quad (2.61)$$

E considerando que a ação na presença de fontes é invariante sob uma transformação de *gauge*, i.e.,  $S'_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}}$ , temos que

$$\int_{\Omega} d^4x J_{\mu} \partial^{\mu} f = 0, \quad (2.62)$$

logo

$$\int_{\Omega} d^4x [\partial^{\mu} (J_{\mu} f) - f \partial^{\mu} J_{\mu}] = \int_{\partial\Omega} d\sigma^{\mu} J_{\mu} f - \int_{\Omega} d^4x f \partial^{\mu} J_{\mu} = 0 \quad (2.63)$$

$$\implies \int_{\partial\Omega} d\sigma^{\mu} J_{\mu} f = \int_{\Omega} d^4x f \partial^{\mu} J_{\mu}. \quad (2.64)$$

Dada a arbitrariedade da função escalar  $f(x)$ , podemos tomar uma função tal que a condição  $f(x)|_{\partial\Omega} = 0$  seja satisfeita, sendo assim, o lado esquerdo da equação acima é nulo. Além disso, como  $f(x)$  é arbitrária e a ação é invariante sob a transformação de *gauge*, podemos chegar à equação da conservação da carga elétrica:

$$\partial^{\mu} J_{\mu} = 0. \quad (2.65)$$

Portanto, vimos aqui que é possível mostrar a conservação da carga tanto através da simetria induzida pela invariância *gauge*, como através da análise das equações de Podolsky com fontes (2.38).

## 2.6 Teorema de Noether e as simetrias do sistema

Nesta seção é discutido o teorema de Noether aplicado ao contexto da eletrodinâmica de Podolsky. Além disso, discutimos conceitos auxiliares, e.g, grupo de Poincaré e representações, para a aplicação do teorema a fim de obter os tensores de energia-momento e momento angular total (orbital + *spin*).

### 2.6.1 Teorema de Noether

Publicado em 1918 por Emmy Noether [27], o teorema de Noether é um dos teoremas mais importantes da física teórica atualmente. Há mais de um teorema de Noether [2], mas vamos nos ater ao primeiro teorema de Noether, que esta-

belece a relação entre as simetrias presentes em um sistema físico com as leis de conservação obedecidas pelo mesmo. De forma geral, as simetrias de um sistema podem ser entendidas como transformações de um determinado grupo que deixam a ação invariante, i.e., as equações de movimento não mudam sob tais transformações. E as transformações podem ser mudanças nas coordenadas do espaço-tempo ou nos campos. Além disso, vale lembrar que estamos lidando com a eletrodinâmica de Podolsky, que é uma teoria de 2ª ordem. Logo, trabalharemos com o teorema aplicado a este contexto, assumindo assim que quem está lendo possui familiaridade com o teorema de Noether adaptado a uma teoria de campos de 1ª ordem.

Contudo, em virtude da completeza, é válido começar com algumas definições da teoria de grupos que serão úteis no decorrer da seção e da dissertação<sup>7</sup>, antes de tratar do teorema de Noether. Da teoria de grupos, temos a seguinte definição [34].

**Definição de Grupo:** Um conjunto  $G$  é dito um *grupo* se existe uma lei de composição que associa qualquer dado par (ordenado) de elementos  $a, b \in G$  com um produto bem definido  $a \cdot b$  que também é um elemento de  $G$ , tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. A operação é associativa, i.e.,  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \forall a, b, c \in G$ ;
2. Dentre os elementos de  $G$ , existe um elemento  $e$ , chamado identidade, que tem a propriedade de  $a \cdot e = e \cdot a = a \forall a \in G$ ;
3. Para cada  $a \in G$ , existe um elemento  $a^{-1} \in G$ , chamado inverso de  $a$ , que tem a propriedade de  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .

De forma que todas as condições acima são essenciais para um dado conjunto ser considerado um grupo. Outro conceito que será útil ao longo da discussão é o da representação de um grupo. Pois dado um elemento abstrato de um grupo tal como foi definido, o nosso interesse aqui é entender como este elemento está associado com uma transformação de simetria que torna a ação invariante, levando a uma quantidade conservada (como será visto quando discutirmos o Teorema de Noether). Sendo assim, vamos para a definição [34].

**Definição de representações de um grupo:** Se existe um homeomorfismo<sup>8</sup> de

<sup>7</sup>Para mais detalhes sobre a teoria de grupos aplicada à física, consulte a referência [34].

<sup>8</sup>Definição: Um homeomorfismo de um grupo  $G$  para outro grupo  $G'$  é um mapeamento (não necessariamente de um para um) que preserva a lei de composição do grupo, i.e., se  $g_1 g_2 = g_3 \Rightarrow g'_1 g'_2 = g'_3$ , sendo  $g_i \in G \rightarrow g'_i \in G'$ .

um grupo  $G$  para um grupo de operadores  $U(G)$  em um espaço vetorial linear  $V$ , dizemos que  $U(G)$  forma uma representação do grupo  $G$ . A dimensão da representação é a dimensão do espaço vetorial  $V$ . Uma representação é dita fiel se o homeomorfismo é também um isomorfismo, i.e., uma correspondência um para um. Uma representação degenerada é aquela que não é fiel.

Então, uma representação é um mapeamento

$$g \in G \xrightarrow{U} U(g),$$

onde  $U(g)$  é um operador em  $V$  que satisfaz a lei de composição do grupo. No contexto da teoria de campos, estamos interessados nos campos de um determinado espaço no qual uma representação está bem definida. Neste caso, por simplicidade, é dito que o campo pertence à representação [2]. E os campos do nosso interesse são aqueles que pertencem às representações lineares do grupo de Poincaré que será discutido adiante.

Estamos interessados nas transformações de simetria que são dadas de forma geral como [2]:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \exp\{(\imath\omega^a T_a)\}^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.66)$$

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x') = \exp\{(\imath\omega^a T_a)\}_{ij} \phi_j(x). \quad (2.67)$$

Sendo  $\omega^a$  os parâmetros de estrutura ( $\omega^a = \omega^a(x)$  para transformações locais e para transformações globais temos que  $\omega^a = \text{constante}$ ) e  $T_a$  os geradores do grupo  $N$ -dimensional, i.e.,  $a = 1, \dots, N$ . De forma que, para o nosso caso, a transformação (2.66) age no espaço de Minkowski e a transformação (2.67) age no espaço das funções  $\phi_i(x)$ .<sup>9</sup>

Quando temos transformações infinitesimais, podemos fazer uma expansão em série de Taylor em torno da identidade das relações (2.66) e (2.67), obtendo

$$\begin{aligned} x^\mu \longrightarrow x'^\mu &\approx (\mathbb{1} + \imath\omega^a T_a)^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \imath(\omega^a T_a)^\mu{}_\nu x^\nu \\ \implies x'^\mu &\approx x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \imath(\omega^a T_a)^\mu{}_\nu x^\nu \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x') &\approx (\delta + \imath\omega^a T_a)_{ij} \phi_j(x) = \phi_i(x) + \imath(\omega^a T_a)_{ij} \phi_j(x) \\ \implies \phi'_i(x') &\approx \phi_i(x) + \delta\phi_i(x), \quad \delta\phi_i(x) = \imath(\omega^a T_a)_{ij} \phi_j(x) \end{aligned} \quad (2.69)$$

<sup>9</sup>Vale destacar um ponto aqui sobre a notação. O  $i$  como índice está associado aos campos  $\phi_i(x)$ , e o  $\imath$  sem o pingo que multiplica  $\omega^a T_a$  está sendo usado para denotar o número imaginário. Quando não houver ambiguidade na notação o  $i$  voltará a denotar o número imaginário.

de modo que

$$\delta x^\mu = \Psi^\mu{}_a \omega^a, \quad \Psi^\mu{}_a = \iota(T_a)^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.70)$$

$$\delta \phi_i(x) = \Phi_{ia} \omega^a, \quad \Phi_{ia} = \iota(T_a)_{ij} \phi_j(x). \quad (2.71)$$

Agora, usando (2.12) temos que

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \phi_i &= \delta \phi_i - \delta x^\mu \partial_\mu \phi_i \\ &= \Phi_{ia} \omega^a - \Psi^\mu{}_a \omega^a \partial_\mu \phi_i \\ \implies \bar{\delta} \phi_i &= \varphi_{ia} \omega^a, \quad \text{sendo} \quad \varphi_{ia} = \Phi_{ia} - \Psi^\mu{}_a \partial_\mu \phi_i. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Com estas expressões em mãos, relembremos agora da equação (2.26). Tal equação foi obtida considerando uma transformação com o ponto fixo. Mas para obter o caso geral, basta considerarmos que  $\delta x^\mu \neq 0$ , recuperando assim a forma completa do operador delta, dada pela equação (2.11). Então, incluindo o termo  $\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}$  em (2.23) temos que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d^4x \left\{ \partial_\mu \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \bar{\delta} \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \bar{\delta}(\partial_\nu \phi_i) + \delta x^\mu \mathcal{L} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \bar{\delta} \phi_i \right\}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Feito isto, ao substituir (2.70) e (2.72) em (2.73), obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d^4x \left\{ \partial_\mu \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \varphi_{ia} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} (\partial_\nu \varphi_{ia}) + \Psi^\mu{}_a \mathcal{L} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \varphi_{ia} \right\} \omega^a. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Impondo que  $\delta S = 0$ , considerando que  $\mathcal{L}$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange de 2ª ordem (2.29) e reconhecendo a arbitrariedade de  $\omega^a$ , temos

$$-\partial_\mu \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \varphi_{ia} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} (\partial_\nu \varphi_{ia}) + \Psi^\mu{}_a \mathcal{L} \right] = 0, \quad (2.75)$$

definindo o termo que é conservado como a quadricorrente  $J^\mu{}_a$ , ou seja,

$$J^\mu{}_a \equiv - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \right) \right) \varphi_{ia} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} (\partial_\nu \varphi_{ia}) + \Psi^\mu{}_a \mathcal{L} \right], \quad (2.76)$$

chegamos à equação:

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0. \quad (2.77)$$

Esta equação representa o teorema de Noether no formalismo de uma teoria de campos de 2ª ordem. Ou seja, se a ação é invariante sobre transformações de um determinado grupo de dimensão  $N$  com  $N$  geradores, então há  $N$  quadricorrentes conservadas que são dadas pela equação (2.76) e satisfazem (2.77).

Além disso, partindo da equação (2.77), podemos também extrair um outro resultado importante, que é a conservação da carga. Para isto, consideraremos um hipervolume  $\Omega$  ilimitado nas direções tipo espaço, cuja borda tipo tempo no infinito espacial é  $\Omega_0$ , mas limitado no tempo por duas hipersuperfícies tipo espaço  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , i.e.,  $\partial\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Ao integrar (2.77) sobre este hipervolume, considerando que a corrente é nula no infinito, i.e., nula em  $\Omega_0$ , e que a orientação da hipersuperfície  $\Omega_2$  é oposta à  $\Omega_1$ , conforme mostrado na figura (2.1), temos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega d^4x \partial_\mu J^\mu_a &= \int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu J^\mu_a = \int_{\Omega_0} d\sigma_\mu J^\mu_a + \int_{\Omega_1} d\sigma_\mu J^\mu_a - \int_{\Omega_2} d\sigma_\mu J^\mu_a = 0 \\ \implies \int_{\Omega_1} d\sigma_\mu J^\mu_a &= \int_{\Omega_2} d\sigma_\mu J^\mu_a. \end{aligned} \quad (2.78)$$

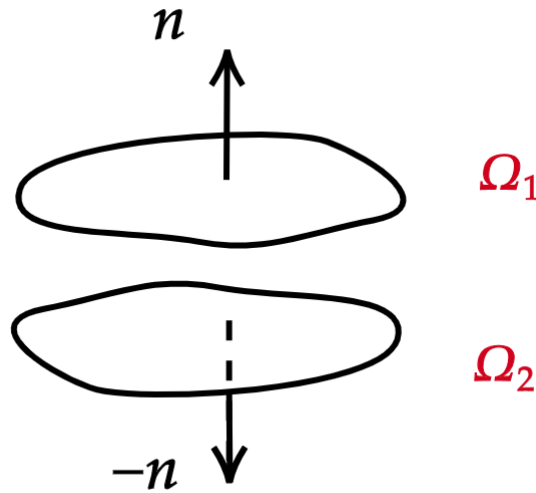


Figura 2.1: Orientações das hipersuperfícies  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .

Portanto, independentemente da hipersuperfície tipo espaço  $\Omega_n$  tomada, a integral

$$Q_a = \int_{\Omega_n} d\sigma_\mu J^\mu_a \quad (2.79)$$

é nula no infinito, ou seja,  $Q_a$  é independente do tempo. Realizando a integração de (2.77) sobre  $d^3x$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d^3x \partial_0 J_a^0 &= - \int_{\Sigma} d^3x \partial_i J_a^i = - \int_{\partial\Sigma} d\sigma_i J_a^i = 0, \\ \implies \int_{\Sigma} d^3x \partial_0 J_a^0 &= 0 \quad \text{sendo} \quad Q_a \equiv \int_{\Sigma} d^3x J_a^0, \\ &\implies \frac{dQ_a}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Logo, para cada gerador  $T_a$  do grupo em questão teremos uma carga conservada.

## 2.6.2 Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré é um dos pilares para a compreensão de certas simetrias presentes na natureza em seu nível mais fundamental. E diante da sua importância, é conveniente destacar alguns pontos relacionados a ele, mais especificamente: a sua estrutura e a sua álgebra.

O grupo de Poincaré, ou grupo de Lorentz não homogêneo, é composto de 10 parâmetros independentes: 3 *boosts*<sup>10</sup>, 3 rotações espaciais e 4 translações espaço-temporais, diferindo assim do grupo de Lorentz homogêneo<sup>11</sup> que é composto dos 3 *boosts* e das 3 rotações. Um elemento geral do grupo de Poincaré pode ser representado como  $U(b, \Lambda)$  [34], em que  $b$  são as translações espaço-temporais e  $\Lambda$  são as transformações de Lorentz, de forma que este elemento genérico do grupo induz de forma geral a seguinte transformação de coordenadas:

$$x^\mu \xrightarrow{U} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu. \quad (2.81)$$

Nesta representação,  $U(b, \Lambda)$ , os elementos do grupo satisfazem a regra de composição da forma

$$U(b', \Lambda') \cdot U(b, \Lambda) = U(\Lambda' b + b', \Lambda' \Lambda), \quad (2.82)$$

e as transformações de Poincaré, que são contínuas e unitárias, assumem a forma

$$U(b, \Lambda) \equiv \exp \left\{ \left( -ib_\mu P^\mu + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right) \right\}, \quad (2.83)$$

<sup>10</sup>*Boosts*: as transformações de Lorentz que não envolvem rotações.

<sup>11</sup>Ao tratarmos do grupo de Lorentz homogêneo, estamos nos referindo ao sub grupo ortócrono próprio, que será chamado simplesmente de grupo de Lorentz homogêneo.

sendo  $b_\mu$  e  $\omega_{\mu\nu}$  os parâmetros das transformações,  $P^\mu$  os geradores das translações espaço-temporais e  $M^{\mu\nu}$  os geradores das rotações e dos *boosts*. De forma que, dada a representação em questão,  $P^\mu$  e  $M^{\mu\nu}$  assumem a forma:  $P^\mu = i\partial^\mu$  e  $M^{\mu\nu} = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$  [2]. Podemos dividir as transformações (2.83) em duas partes, uma ligada as translações e a outra aos *boosts* e rotações, respectivamente:

$$U(b) = \exp\{(-ib_\mu P^\mu)\}, \quad (2.84)$$

$$U(\Lambda) = \exp\left\{\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)\right\}. \quad (2.85)$$

Foi dito anteriormente que o grupo de Poincaré possui 10 parâmetros independentes, que são associados aos 10 geradores do grupo. Isto pode ser mostrado analisando os parâmetros de transformação  $b_\mu$  e  $\omega_{\mu\nu}$ . Do parâmetro  $b_\mu$  temos 4 parâmetros independentes, ligados às translações espaço-temporais. Já do parâmetro  $\omega_{\mu\nu}$  temos 6 parâmetros independentes, dada a antissimetria de  $\omega_{\mu\nu}$  ( $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ) que restringe o número de parâmetros, de forma que sobram três ligados aos *boosts* e três às rotações. Para mostrar esta antissimetria, vamos lembrar que o grupo de Poincaré é o grupo de Lorentz homogêneo mais as translações, de forma que a condição de Lorentz  $\eta = \Lambda^{-1}\eta\Lambda$  é satisfeita, sendo  $\eta$  a métrica de Minkowski e  $\Lambda$  a transformação de Lorentz. Tomemos uma transformação de Poincaré da forma (2.81) que corresponde à uma deformação da identidade, ou seja,  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ , onde os parâmetros de transformação  $b_\mu$  e  $\omega_{\mu\nu}$  são infinitesimais. Como  $\Lambda^\mu{}_\nu$  deve satisfazer a condição de Lorentz, temos que

$$(\delta_\beta{}^\nu + \omega_\beta{}^\nu)\eta_{\nu\mu}(\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha) = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.86)$$

descartando termos de segunda ordem em  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \eta_{\beta\alpha} + \omega_{\beta\alpha} + \omega_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} \\ \implies \omega_{\beta\alpha} &= -\omega_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Junto da operação definida pelo comutador, que é antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi, os geradores do grupo de Poincaré constituem uma álgebra, que é a álgebra de Lie<sup>12</sup> do grupo. De forma que as relações de comutação dos

<sup>12</sup>Definição: Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial  $G$  sobre um campo  $F$  com uma operação  $[\cdot, \cdot] : G \times G \rightarrow G$ , que é chamada de *Lie Bracket*, tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:

- É bilinear, ou seja,  $\alpha[x, y] = [\alpha x, y] = [x, \alpha y] \forall \alpha \in F$  e  $x, y \in G$ .

geradores são independentes da representação, pois são características do próprio grupo. E no caso, as regras de comutação que os geradores do grupo de Poincaré satisfazem são:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (2.88)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i(P^\nu \eta^{\mu\lambda} - P^\mu \eta^{\nu\lambda}) \quad (2.89)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(M^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + M^{\nu\sigma} \eta^{\mu\rho} - M^{\nu\rho} \eta^{\mu\sigma} - M^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}). \quad (2.90)$$

Estas 3 equações compõem a álgebra de Poincaré. E é possível interpretá-las da seguinte forma [2]: (2.88) implica que translações espaço-temporais são independentes, (2.89) implica que os geradores  $P$  do grupo se transformam como vetores sob transformações de Lorentz, e (2.90) implica que os geradores  $M$  se comportam como tensores de segunda ordem.

### 2.6.3 O tensor de energia-momento de Podolsky

Queremos obter o tensor de energia-momento de Podolsky. Sendo o mesmo um tensor de 2ª ordem, podemos usar os resultados já obtidos nas seções anteriores para chegar ao tensor de energia-momento de 2ª ordem, e enfim obter o mesmo para o caso de Podolsky. Sendo assim, consideremos uma translação espaço-temporal, que é uma transformação de simetria, dada por

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \exp\{(-ib^\nu P_\nu)\} x^\mu, \quad (2.91)$$

$$\phi_\kappa(x) \longrightarrow \phi'_\kappa(x') = \phi_\kappa(x), \quad (2.92)$$

em que os campos  $\phi_\kappa$  são campos vetoriais lorentzianos. Assumindo que se trata de uma transformação infinitesimal, podemos expandir em série de Taylor em torno da identidade, da forma:

$$\begin{aligned} x^\mu \longrightarrow x'^\mu &= (\delta^\mu_\nu - ib^\sigma P_\sigma \eta^{\mu\nu}) x^\nu, \quad \text{sendo} \quad P_\sigma = i\partial_\sigma, \\ &= x^\mu + b^\sigma \partial_\sigma x^\mu = x^\mu + b^\sigma \eta_\sigma^\mu \\ \implies x'^\mu &= x^\mu + b^\mu, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\phi_\kappa(x) \longrightarrow \phi'_\kappa(x') = \phi_\kappa(x). \quad (2.94)$$

- 
- É antissimétrico, ou seja,  $[x, x] = 0$  logo  $[x, y] = -[y, x] \forall x, y \in G$ .
  - Satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja,  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ .

Considerando (2.70) e (2.71), ao fazer as devidas identificações dadas as expressões acima temos que  $\Psi^{\mu}_{\ a} = \eta^{\mu}_{\ a}$  e  $\varphi_{\kappa a} = -\eta^{\mu}_{\ a} \partial_{\mu} \phi_{\kappa} \implies \varphi_{\kappa a} = -\partial_a \phi_{\kappa}$ . Portanto, ao introduzir esses valores na quadridensidade de corrente (2.76), que é conservada mediante uma translação espaço-temporal, teremos que

$$J^{\mu}_{\ a} = - \left[ - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{\kappa})} - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi_{\kappa})} \right) \right) \partial_a \phi_{\kappa} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi_{\kappa})} (\partial_{\nu} \partial_a \phi_{\kappa}) + \eta^{\mu}_{\ a} \mathcal{L} \right], \quad (2.95)$$

logo, definindo  $J^{\mu}_{\ a} \equiv \Theta^{\mu}_{\ a}$  e tomando  $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\mu}_{\ a} \eta^{a\nu}$ , chegamos ao **tensor de energia-momento canônico** do campo  $\phi_{\kappa}$ :

$$\Theta^{\mu\nu} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{\kappa})} - \partial_{\alpha} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\alpha} \phi_{\kappa})} \right) \right) \partial^{\nu} \phi_{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\alpha} \phi_{\kappa})} (\partial^{\nu} \partial_{\alpha} \phi_{\kappa}) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.96)$$

Partindo da expressão (2.96), podemos obter agora o tensor de energia-momento de Podolsky  $T^{\mu\nu}$ . Para isto, consideremos o campo de Podolsky  $A_{\beta}$ . Fazendo as identificações  $\phi_{\kappa} \rightarrow A_{\beta}$  e  $\Theta^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu}$ , temos que:

$$T^{\mu\nu} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\beta})} - \partial_{\alpha} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\alpha} A_{\beta})} \right) \right) \partial^{\nu} A_{\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\alpha} A_{\beta})} (\partial^{\nu} \partial_{\alpha} A_{\beta}) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}. \quad (2.97)$$

Por fim, ao substituir as quantidades (2.35), (2.36) e (2.37) na expressão anterior e adaptando os índices, podemos calcular o tensor de energia-momento de Podolsky

$$\begin{aligned} T_P^{\mu\nu} &= - [F^{\mu\beta} + 2a \partial_{\alpha} (\eta^{\mu\alpha} \partial_{\rho} F^{\rho\beta} - \eta^{\mu\beta} \partial_{\rho} F^{\rho\alpha})] \partial^{\nu} A_{\beta} \\ &\quad + 2a (\eta^{\mu\alpha} \partial_{\rho} F^{\rho\beta} - \eta^{\mu\beta} \partial_{\rho} F^{\rho\alpha}) \partial^{\nu} \partial_{\alpha} A_{\beta} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \\ \implies T_P^{\mu\nu} &= F^{\beta\mu} \partial^{\nu} A_{\beta} + 4a (\partial^{\mu} \partial_{\rho} F^{\rho\beta} \partial^{\nu} A_{\beta} - \partial_{\alpha} \partial_{\rho} F^{\rho\alpha} \partial^{\nu} A^{\mu}) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

sendo  $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$  dado por (2.32) com  $J_{\mu} = 0$ ,<sup>13</sup> ao substituí-lo na expressão acima temos:

$$\begin{aligned} T_P^{\mu\nu} &= F^{\beta\mu} \partial^{\nu} A_{\beta} + 4a (\partial^{\mu} \partial_{\rho} F^{\rho\beta} \partial^{\nu} A_{\beta} - \partial_{\alpha} \partial_{\rho} F^{\rho\alpha} \partial^{\nu} A^{\mu}) \\ &\quad + \eta^{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} F^{\sigma\lambda} F_{\sigma\lambda} - a \partial_{\sigma} F^{\sigma\lambda} \partial_{\rho} F^{\rho}_{\ \lambda} \right) \\ \implies T_P^{\mu\nu} &= 4a \left( \partial^{\mu} \partial_{\rho} F^{\rho\beta} \partial^{\nu} A_{\beta} - \partial_{\alpha} \partial_{\rho} F^{\rho\alpha} \partial^{\nu} A^{\mu} - \frac{1}{4} \partial_{\sigma} F^{\sigma\lambda} \partial_{\rho} F^{\rho}_{\ \lambda} \eta^{\mu\nu} \right) \\ &\quad + F^{\beta\mu} \partial^{\nu} A_{\beta} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\sigma\lambda} F_{\sigma\lambda}. \quad (2.98) \end{aligned}$$

<sup>13</sup>O tensor energia-momento é obtido tomando  $J_{\mu} = 0$  pois o sistema de interesse é o campo eletromagnético livre.

Agora, nota-se que o tensor acima não é simétrico pela troca dos índices  $\mu$  e  $\nu$ . E como essa simetria é desejável em diversas teorias de campos, como na relatividade geral por exemplo, em que o  $T^{\mu\nu}$  na equação de Einstein é simétrico, faz-se necessário o processo de simetrização do tensor de energia-momento. No caso de uma teoria de 1ª ordem, esse processo é feito acrescentando uma divergência total ao tensor. Isto é conhecido como processo de Belinfante que leva ao tensor de Belinfante, um tensor simétrico. Há também um outro modo de se obter o tensor de energia-momento simétrico para uma teoria de 1ª ordem, sem fazer uso do processo de Belinfante. Ele parte da análise das equações de movimento e da identidade de Bianchi, de forma que tal processo está descrito no artigo [26].

Porém, como estamos lidando com uma teoria de 2ª ordem, procederemos de uma forma diferente, pois talvez o processo de Belinfante não seja possível para teorias de 2ª ordem. De forma que, para o tensor de energia-momento de Podolsky, o processo para obtê-lo está bem descrito na referência [5]. E, de acordo com [5], o tensor de energia-momento simétrico de Podolsky é:

$$T_P^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha - 2a\left(\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\gamma F^\gamma{}_\beta + F^{\mu\alpha}\square F^\nu{}_\alpha + F^{\nu\alpha}\square F^\mu{}_\alpha + F^{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta F^{\beta\nu} + F^{\nu\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta F^{\beta\mu} - \partial_\tau F^{\tau\mu}\partial_\gamma F^{\gamma\nu}\right). \quad (2.99)$$

Obtido o tensor de energia-momento simétrico de Podolsky<sup>14</sup>, podemos verificar que ao tomar o limite em que  $a \rightarrow 0_+$  temos  $T_P^{\mu\nu} \rightarrow T_M^{\mu\nu}$ , i.e., recuperamos o tensor de energia-momento de Maxwell. Com o tensor em mãos, podemos agora extrair outras quantidades da eletrodinâmica de Podolsky, de forma que o processo é análogo ao caso de Maxwell<sup>15</sup>. As quantidades de interesse aqui são: quadrimomento  $P^\nu$  do campo, o momento linear  $P^i$  do campo, a densidade de energia (densidade hamiltoniana)  $\mathcal{H}$  e o vetor de Poynting  $\vec{S}_P$  de Podolsky [28].

- **Quadrimomento  $P^\nu$**

Para obtermos o quadrimomento, vale lembrar a equação (2.79). Dada a simetria de evolução temporal presente e a invariância sob translação espaço-temporal, a ‘carga’ conservada neste caso está associada ao quadrimomento

<sup>14</sup>O processo para obter o tensor também pode ser encontrado no apêndice C.

<sup>15</sup>Para mais detalhes, consulte as referências [3] e [32].

do campo, que é dado por

$$\begin{aligned}
 P^\nu = \int_{\Omega} d^3x T_P^{0\nu} = \int_{\Omega} d^3x \left[ \frac{1}{4} \eta^{0\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{0\alpha} F^\nu{}_{\alpha} - 2a \left( \frac{1}{2} \eta^{0\nu} \partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} \partial_{\gamma} F^{\gamma}{}_{\beta} \right. \right. \\
 \left. \left. + F^{0\alpha} \square F^\nu{}_{\alpha} + F^{\nu\alpha} \square F^0{}_{\alpha} + F^{0\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} F^{\beta\nu} + F^{\nu\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} F^{\beta 0} - \partial_{\tau} F^{\tau 0} \partial_{\gamma} F^{\gamma\nu} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

em que  $\Omega$  é uma hipersuperfície do espaço-tempo.

- **Momento linear  $P^i$**

Já o momento linear do campo pode ser obtido tomando a parte espacial do quadrimomento acima, ou seja,  $P^i$ . Portanto, o momento linear do campo é

$$\begin{aligned}
 P^i = \int_{\Omega} d^3x T_P^{0i} = - \int_{\Omega} d^3x [F^{0\alpha} F^i{}_{\alpha} + 2a(F^{0\alpha} \square F^i{}_{\alpha} + F^{i\alpha} \square F^0{}_{\alpha} \\
 - \partial_{\tau} F^{\tau 0} \partial_{\gamma} F^{\gamma i})],
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

dado que:  $F^{0\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} F^{\beta\nu} + F^{\nu\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} F^{\beta 0} = 0$ . Podemos escrever o momento linear do campo também de forma não covariante em termos dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Usando a equação acima, temos que:

$$\begin{aligned}
 P^i = \int_{\Omega} d^3x [F^i{}_{\alpha} F^{\alpha 0} + 2a(\square F^i{}_{\alpha} F^{\alpha 0} + \square F^0{}_{\alpha} F^{\alpha i} + \partial_{\tau} F^{\tau 0} \partial_{\gamma} F^{\gamma i})] \\
 \implies \vec{P} = \int_{\Omega} d^3x \{ \vec{E} \times \vec{B} + 2a[\vec{E} \times (\square \vec{B}) + (\square \vec{E}) \times \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} (\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B})] \}.
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Nota-se que, tomando o limite  $a \rightarrow 0_+$  recuperamos o momento linear do caso de Maxwell:

$$\vec{P} = \int_{\Omega} d^3x (\vec{E} \times \vec{B}). \tag{2.103}$$

- **Vetor de Poynting  $\vec{S}_P$**

Para obter o vetor de Poynting  $\vec{S}_P$ , consideremos a conservação do tensor energia-momento, i.e.,  $\partial_{\mu} T_P^{\mu\nu} = 0$ . A partir dela, considerando  $\nu = 0$  temos que

$$\partial_{\mu} T_P^{\mu 0} = 0 \implies \partial_0 T_P^{00} + \partial_i T_P^{i0} = 0,$$

identificando  $T_P^{00} \equiv \mathcal{H}$  como a densidade de energia (ou densidade hamilton-

niana), e  $T_P^{i0} \equiv S_P^i$  como o vetor de Poynting de Podolsky, temos a equação da continuidade:

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{H} + \partial_i S_P^i &= 0 \\ \implies \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_P &= 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Portanto, sendo o vetor de Poynting de Podolsky o vetor  $\vec{S}_P \equiv T_P^{i0}$  que satisfaz a equação acima, nota-se que ele corresponde ao integrando da equação (2.102), pois  $T_P^{0i} = T_P^{i0}$ , ou seja:

$$\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{B} + 2a[\vec{E} \times (\square \vec{B}) + (\square \vec{E}) \times \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B})]. \quad (2.105)$$

### • Densidade hamiltoniana $\mathcal{H}$

A hamiltoniana  $H_P$  pode ser obtida de duas formas: fazendo uma transformada de Legendre da função lagrangiana, ou simplesmente tomando a componente  $T^{00}$  do tensor de energia-momento, pois  $\mathcal{H} \equiv T_P^{00}$ , e integrando em todo o espaço a densidade hamiltoniana. Logo, usando a equação (2.99), temos que:

$$\begin{aligned} H_P &= \int_{\Omega} d^3x \mathcal{H} = \int_{\Omega} d^3x T_P^{00} = \int_{\Omega} d^3x \left[ \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{0\alpha} F^0_{\alpha} \right. \\ &\quad - 2a \left( \frac{1}{2} \partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} \partial_{\gamma} F^{\gamma}_{\beta} + F^{0\alpha} \square F^0_{\alpha} + F^{0\alpha} \square F^0_{\alpha} + F^{0\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} F^{\beta 0} \right. \\ &\quad \left. \left. + F^{0\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} F^{\beta 0} - \partial_{\tau} F^{\tau 0} \partial_{\gamma} F^{\gamma 0} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.106)$$

Escrevendo a hamiltoniana de forma não covariante temos

$$\begin{aligned} H_P &= \int_{\Omega} d^3x \frac{1}{2} \left\{ \vec{B}^2 + \vec{E}^2 + 2a \left[ (\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B})^2 + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + 4\vec{E} \cdot (\square \vec{E}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\vec{E} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

e tomando o limite  $a \rightarrow 0_+$ :

$$H = \int_{\Omega} d^3x \frac{1}{2} (\vec{B}^2 + \vec{E}^2). \quad (2.108)$$

Há um último ponto nesta seção que vale ser destacado. Analisando o integrando ( $T_P^{00}$ ) da expressão (2.107), é possível extrair uma condição que o parâmetro de Podolsky deve satisfazer. Para isso, tomemos o regime eletrostático com a presença de um campo elétrico não nulo a fim de simplificar. Neste regime temos que  $\partial_t \vec{E} = \vec{B} = 0$  e  $\vec{E} \neq 0$ , logo [28]:

$$T_P^{00} = \frac{1}{2}[\vec{E}^2 + 2a(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2]. \quad (2.109)$$

Agora, como o campo  $\vec{E}$  é não nulo, nota-se que  $T_P^{00} > 0$ , sendo assim:

$$\frac{1}{2}[\vec{E}^2 + 2a(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2] > 0 \implies a > -\frac{\vec{E}^2}{2(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2}. \quad (2.110)$$

Como foi assumido anteriormente que o parâmetro  $a$  é uma constante real, a equação acima estabelece um limite inferior para a constante de Podolsky. Pois, dado que  $[\vec{E}/(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})]^2$  é sempre positivo, o parâmetro de Podolsky deve satisfazer a condição:  $a > 0$ . Portanto, dado esse requerimento, podemos perceber porquê o limite da teoria de Maxwell deve ser tomado quando  $a$  tende à zero pela direita, i.e., fazer  $a \rightarrow 0_+$ .

#### 2.6.4 Os tensores momento angular orbital e *spin* de Podolsky

O nosso interesse aqui é obter o tensor momento angular total de Podolsky, para depois obter os tensores momento angular orbital e *spin* de Podolsky. Para isto, vamos recorrer ao mesmo raciocínio utilizado para obter o tensor de energia-momento. Sendo assim, seja a transformação de Poincaré:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \exp\left\{\left(\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\right)\right\}_\nu^\mu x^\nu, \quad (2.111)$$

$$\phi_\kappa(x) \longrightarrow \phi'_\kappa(x') = \exp\left\{\left(\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\right)\right\}_\kappa^\xi \phi_\xi(x). \quad (2.112)$$

Nota-se que esta transformação induz uma mudança nas coordenadas e nos

campos. E ao expandirmos ela em série de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu = \delta^\mu_\nu x^\nu + \left( \frac{\iota}{2} \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right)^\mu_\nu x^\nu \\ \implies x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu \quad \text{sendo} \quad \delta x^\mu = \frac{\iota}{2} \omega^{\alpha\beta} (M_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu, \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} \phi_\kappa(x) &\longrightarrow \phi'_\kappa(x') = \delta_\kappa^\xi \phi_\xi + \left( \frac{\iota}{2} \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right)^\xi_\kappa \phi_\xi(x) \\ \implies \phi'_\kappa(x') &= \phi_\kappa + \delta\phi_\kappa \quad \text{sendo} \quad \delta\phi_\kappa = \frac{\iota}{2} \omega^{\alpha\beta} (M_{\alpha\beta})^\xi_\kappa \phi_\xi. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Relembrando as expressões (2.70), (2.71) e (2.72), ao fazer as devidas extensões e identificações temos:

$$\delta x^\mu = \frac{1}{2} \Psi^\mu_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} \implies \Psi^\mu_{\alpha\beta} = \iota (M_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu \quad (2.115)$$

$$\delta\phi_\kappa = \frac{1}{2} \Phi_{\kappa\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} \implies \Phi_{\kappa\alpha\beta} = \iota (M_{\alpha\beta})_{\kappa\xi} \phi^\xi \quad (2.116)$$

$$\bar{\delta}\phi_\kappa = \varphi_{\kappa\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} \implies \varphi_{\kappa\alpha\beta} = \Phi_{\kappa\alpha\beta} - \Psi^\mu_{\alpha\beta} \partial_\mu \phi_\kappa \quad (2.117)$$

Agora, usando o fato que  $(M_{\alpha\beta})^\mu_\nu = \iota(\eta_{\alpha\nu}\eta^\mu_\beta - \eta_{\beta\nu}\eta^\mu_\alpha)$  e  $(M_{\alpha\beta})_{\kappa\xi} = \iota(\eta_{\alpha\xi}\eta_{\kappa\beta} - \eta_{\beta\xi}\eta_{\kappa\alpha})$  [2], concluímos que:

$$\Psi^\mu_{\alpha\beta} = \eta^\mu_\alpha x_\beta - \eta^\mu_\beta x_\alpha, \quad (2.118)$$

$$\Phi_{\kappa\alpha\beta} = \eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha, \quad (2.119)$$

$$\varphi_{\kappa\alpha\beta} = \eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha + (\partial_\beta x_\alpha - \partial_\alpha x_\beta) \phi_\kappa. \quad (2.120)$$

Reconhecendo que o índice  $a$  da quadricorrente (2.76) será denotado agora por um índice duplo, dada a transformação de Poincaré em questão, ou seja

$$J^\mu_a \longrightarrow J^\mu_{\alpha\beta} = -(C^{\mu\kappa} \varphi_{\kappa\alpha\beta} + D^{\mu\nu\kappa} \partial_\nu \varphi_{\kappa\alpha\beta} + \Psi^\mu_{\alpha\beta} \mathcal{L}), \quad (2.121)$$

sendo

$$C^{\mu\kappa} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\kappa)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_\kappa)} \right), \quad (2.122)$$

$$D^{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_\kappa)}, \quad (2.123)$$

e substituindo as expressões (2.118), (2.119) e (2.120) no novo tensor, obtemos:

$$\begin{aligned} J^\mu_{\alpha\beta} &= - \{ C^{\mu\kappa} [\eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha + (\partial_\beta x_\alpha - \partial_\alpha x_\beta) \phi_\kappa] + D^{\mu\nu\kappa} [\partial_\nu \eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta \\ &\quad - \partial_\nu \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha + \partial_\nu (\partial_\beta x_\alpha - \partial_\alpha x_\beta) \phi_\kappa] + (\eta^\mu_{\alpha} x_\beta - \eta^\mu_{\beta} x_\alpha) \mathcal{L} \} \\ &= - [C^{\mu\kappa} (\eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha) + D^{\mu\nu\kappa} (\partial_\nu \eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \partial_\nu \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha) + C^{\mu\kappa} \partial_\beta x_\alpha \phi_\kappa \\ &\quad + D^{\mu\nu\kappa} \partial_\nu \partial_\beta x_\alpha \phi_\kappa - \eta^\mu_{\beta} x_\alpha \mathcal{L} - (C^{\mu\kappa} \partial_\alpha x_\beta \phi_\kappa + D^{\mu\nu\kappa} \partial_\nu \partial_\alpha x_\beta \phi_\kappa - \eta^\mu_{\alpha} x_\beta \mathcal{L})]. \end{aligned}$$

Usando (2.95), i.e.,  $\Theta^\mu_a = C^{\mu\kappa} \partial_a \phi_\kappa + D^{\mu\nu i} \partial_\nu \partial_a \phi_\kappa - \eta^\mu_a \mathcal{L}$ , ao adaptar os índices a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} J^\mu_{\alpha\beta} &= - [C^{\mu\kappa} (\eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha) + D^{\mu\nu\kappa} (\partial_\nu \eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \partial_\nu \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha) + \Theta^\mu_{\beta} x_\alpha - \Theta^\mu_{\alpha} x_\beta] \\ &= - (C^{\mu\kappa} + D^{\mu\nu\kappa} \partial_\nu) (\eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha) - \Theta^\mu_{\beta} x_\alpha + \Theta^\mu_{\alpha} x_\beta \\ &= B^{\mu\kappa} (\eta_{\kappa\alpha} \phi_\beta - \eta_{\kappa\beta} \phi_\alpha) - \Theta^\mu_{\beta} x_\alpha + \Theta^\mu_{\alpha} x_\beta \quad \text{onde} \quad B^{\mu\kappa} = -C^{\mu\kappa} - D^{\mu\nu\kappa} \partial_\nu \\ &= B^\mu_{\alpha} \phi_\beta - B^\mu_{\beta} \phi_\alpha - \Theta^\mu_{\beta} x_\alpha + \Theta^\mu_{\alpha} x_\beta, \end{aligned} \tag{2.124}$$

por fim, tomando  $J_{\gamma\alpha\beta} = \eta_{\gamma\mu} J^\mu_{\alpha\beta}$  temos o **tensor momento angular total**:

$$J_{\gamma\alpha\beta} = B_{\gamma\alpha} \phi_\beta - B_{\gamma\beta} \phi_\alpha + \Theta_{\gamma\alpha} x_\beta - \Theta_{\gamma\beta} x_\alpha. \tag{2.125}$$

E pelo Teorema de Noether, temos a seguinte lei de conservação:

$$\partial^\gamma J_{\gamma\alpha\beta} = 0. \tag{2.126}$$

Além disso, analisando  $J_{\gamma\alpha\beta}$ , é natural dividirmos o tensor em duas partes:

$$J_{\gamma\alpha\beta} = S_{\gamma\alpha\beta} + L_{\gamma\alpha\beta}, \tag{2.127}$$

$$S_{\gamma\alpha\beta} \equiv B_{\gamma\alpha} \phi_\beta - B_{\gamma\beta} \phi_\alpha, \tag{2.128}$$

$$L_{\gamma\alpha\beta} \equiv \Theta_{\gamma\alpha} x_\beta - \Theta_{\gamma\beta} x_\alpha. \tag{2.129}$$

Nota-se que o tensor  $L_{\gamma\alpha\beta}$  possui a estrutura de momento angular orbital ( $\epsilon_{ijk} L_k = x_i p_j - x_j p_i$ ), logo denominaremos ele como **tensor momento angular orbital**. Quanto ao tensor  $S_{\gamma\alpha\beta}$ , podemos associá-lo ao momento angular de *spin*, logo denominaremos ele como **tensor momento angular de spin**. De forma que, este tensor caracteriza as propriedades de polarização do campo, e de acordo com a teoria quântica de campos, ele corresponderá ao momento angular de *spin* das partículas descritas pelos campos quantizados [4]. Agora, dada a lei de

conservação (2.126), a expressão (2.129) e que  $\partial^\gamma \Theta_{\gamma\beta} = \partial^\gamma \Theta_{\gamma\alpha} = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial^\gamma J_{\gamma\alpha\beta} \\
 &= \partial^\gamma (S_{\gamma\alpha\beta} + L_{\gamma\alpha\beta}) \\
 &= \partial^\gamma (S_{\gamma\alpha\beta} + \Theta_{\gamma\alpha} x_\beta - \Theta_{\gamma\beta} x_\alpha) \\
 &= \partial^\gamma S_{\gamma\alpha\beta} + \cancel{\partial^\gamma \Theta_{\gamma\alpha} x_\beta}^0 + \Theta_{\gamma\alpha} \partial^\gamma x_\beta - \cancel{\partial^\gamma \Theta_{\gamma\beta} x_\alpha}^0 - \Theta_{\gamma\beta} \partial^\gamma x_\alpha \\
 &= \partial^\gamma S_{\gamma\alpha\beta} + \Theta_{\gamma\alpha} \delta_\beta^\gamma - \Theta_{\gamma\beta} \delta_\alpha^\gamma \\
 &= \partial^\gamma S_{\gamma\alpha\beta} + \Theta_{\beta\alpha} - \Theta_{\alpha\beta} \\
 \implies \partial^\gamma S_{\gamma\alpha\beta} &= \Theta_{\alpha\beta} - \Theta_{\beta\alpha}. \tag{2.130}
 \end{aligned}$$

Portanto, como o tensor de energia-momento canônico  $\Theta_{\alpha\beta}$  (2.96) não é automaticamente simétrico, somente o tensor momento angular total  $J_{\gamma\alpha\beta}$  se conserva [2].

A fim de obtermos esses tensores para o caso de Podolsky, faz-se necessária a identificação:  $\phi_\kappa(x) \rightarrow A_\mu(x)$ . A partir dela, temos que a transformação dos campos (2.114) se traduz como:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu(x') = A_\mu + \omega_{\mu\nu} A^\nu. \tag{2.131}$$

Assim, podemos agora, determinar os tensores momento angular total, orbital e de *spin* de Podolsky. Para isto, usaremos as expressões (2.127), (2.128) e (2.129).

- **Tensor momento angular orbital de Podolsky** ( $L_P^{\gamma\alpha\beta}$ )

Considerando o tensor de energia-momento canônico de Podolsky (2.98), substituindo o mesmo na expressão (2.129) e ‘levantando’ os índices temos que

$$\begin{aligned}
 L_P^{\gamma\alpha\beta} &= T_P^{\gamma\alpha} x^\beta - T_P^{\gamma\beta} x^\alpha \\
 &= \left[ \frac{1}{4} \eta^{\gamma\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F^{\mu\gamma} \partial^\alpha A_\mu + 4a \left( \partial^\gamma \partial_\rho F^{\rho\sigma} \partial^\alpha A_\sigma - \partial_\sigma \partial_\rho F^{\rho\sigma} \partial^\alpha A^\gamma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} \partial_\rho F^\rho{}_\lambda \eta^{\gamma\alpha} \right) \right] x^\beta - \left[ \frac{1}{4} \eta^{\gamma\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F^{\mu\gamma} \partial^\beta A_\mu + 4a \left( \partial^\gamma \partial_\rho F^{\rho\sigma} \partial^\beta A_\sigma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \partial_\sigma \partial_\rho F^{\rho\sigma} \partial^\beta A^\gamma - \frac{1}{4} \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} \partial_\rho F^\rho{}_\lambda \eta^{\gamma\beta} \right) \right] x^\alpha, \tag{2.132}
 \end{aligned}$$

definindo o tensor  $\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta} \equiv \eta_{\chi}^{\alpha} \eta_{\rho}^{\beta} - \eta_{\chi}^{\beta} \eta_{\rho}^{\alpha}$  [28], e usando esta definição na

expressão acima:

$$\begin{aligned}
L_P^{\gamma\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\eta^{\gamma\chi}\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F^{\mu\gamma}\partial_\chi A_\mu\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho + 4a\left(\partial^\gamma\partial_\rho F^{\rho\sigma}\partial^\chi A_\sigma\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho\right. \\
&\quad \left.- \partial_\sigma\partial_\rho F^{\rho\sigma}\partial^\chi A^\gamma\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho - \frac{1}{4}\partial_\sigma F^{\sigma\lambda}\partial_\rho F^\rho{}_\lambda\eta^{\gamma\chi}\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho\right) \\
&= \left[\frac{1}{4}\eta^{\gamma\chi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F^{\mu\gamma}\partial_\chi A_\mu + 4a\left(\partial^\gamma\partial_\rho F^{\rho\sigma}\partial^\chi A_\sigma - \partial_\sigma\partial_\rho F^{\rho\sigma}\partial^\chi A^\gamma\right.\right. \\
&\quad \left.\left.- \frac{1}{4}\partial_\sigma F^{\sigma\lambda}\partial_\rho F^\rho{}_\lambda\eta^{\gamma\chi}\right)\right]\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho \implies L_P^{\alpha\beta} = T_P^{\gamma\chi}\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho. \quad (2.133)
\end{aligned}$$

Agora que temos o tensor momento angular orbital (2.133), é possível obter a carga conservada associada ao mesmo, i.e., obter  $L_P^{\alpha\beta}$ . Para isto, basta integrar  $L_P^{0\alpha\beta}$  no volume  $\Omega$ , logo:

$$\begin{aligned}
L_P^{\alpha\beta} &= \int_\Omega d^3x L_P^{0\alpha\beta} = \int_\Omega d^3x T_P^{0\chi}\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho = \int_\Omega d^3x \left[\frac{1}{4}\eta^{0\chi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F^{\mu 0}\partial_\chi A_\mu\right. \\
&\quad \left.+ 4a\left(\partial^0\partial_\rho F^{\rho\sigma}\partial^\chi A_\sigma - \partial_\sigma\partial_\rho F^{\rho\sigma}\partial^\chi A^0 - \frac{1}{4}\partial_\sigma F^{\sigma\lambda}\partial_\rho F^\rho{}_\lambda\eta^{0\chi}\right)\right]\Xi_{\chi\rho}^{\alpha\beta}x^\rho. \quad (2.134)
\end{aligned}$$

- **Tensor momento angular de *spin* de Podolsky ( $S_P^{\gamma\alpha\beta}$ )**

Usando o mesmo raciocínio do item anterior, podemos obter o tensor momento angular de *spin* de Podolsky. Desta forma, da expressão (2.128), temos então

$$\begin{aligned}
S_P^{\gamma\alpha\beta} &= B_P^{\gamma\alpha}A^\beta - B_P^{\gamma\beta}A^\alpha \\
&= -(C_P^{\gamma\alpha} + D_P^{\gamma\nu\alpha}\partial_\nu)A^\beta + (C_P^{\gamma\beta} + D_P^{\gamma\nu\beta}\partial_\nu)A^\alpha, \\
&= C_P^{\gamma\chi}\Xi_{\chi\rho}^{\beta\alpha}A^\rho + D_P^{\gamma\chi}\Xi_{\chi\rho}^{\beta\alpha}A^\rho \\
&= (C_P^{\gamma\chi} + D_P^{\gamma\nu\chi}\partial_\nu)\Xi_{\chi\rho}^{\beta\alpha}A^\rho \quad (2.135)
\end{aligned}$$

usando (2.122), (2.123) e (2.36):

$$\begin{aligned} S_P^{\gamma\alpha\beta} &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\gamma A_\chi)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\gamma \partial_\nu A_\chi)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\gamma \partial_\nu A_\chi)} \partial_\nu \right] \Xi^{\beta \ \alpha}_{\ \chi \ \rho} A^\rho \\ &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\gamma A_\chi)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\gamma \partial_\nu A_\chi)} \right) \right] \Xi^{\beta \ \alpha}_{\ \chi \ \rho} A^\rho \\ &= -(F^{\gamma\chi} + 2a\partial^\gamma \partial_\sigma F^{\sigma\chi}) \Xi^{\beta \ \alpha}_{\ \chi \ \rho} A^\rho \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\implies S_P^{\gamma\alpha\beta} = F^{\gamma\alpha} A^\beta - F^{\gamma\beta} A^\alpha + 2a\partial^\gamma \partial_\sigma (F^{\sigma\alpha} A^\beta - F^{\sigma\beta} A^\alpha). \quad (2.137)$$

Agora que temos o tensor momento angular de *spin* de Podolsky (2.137), podemos obter a carga conservada associada ao mesmo, i.e., obter  $S_P^{\alpha\beta}$ . Portanto, integrando  $S_P^{0\alpha\beta}$  no volume  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} S_P^{\alpha\beta} &= \int_\Omega d^3x S_P^{0\alpha\beta} \\ \implies S_P^{\alpha\beta} &= \int_\Omega d^3x [F^{0\alpha} A^\beta - F^{0\beta} A^\alpha + 2a\partial^0 \partial_\sigma (F^{\sigma\alpha} A^\beta - F^{\sigma\beta} A^\alpha)]. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Novamente, nota-se que se tomarmos o limite em que  $a \rightarrow 0_+$  na equação (2.137), recuperamos o tensor momento angular de *spin* de Maxwell:

$$S_M^{\gamma\alpha\beta} = F^{\gamma\alpha} A^\beta - F^{\gamma\beta} A^\alpha. \quad (2.139)$$

- **Tensor momento angular total de Podolsky** ( $J_P^{\gamma\alpha\beta}$ )

Substituindo (2.132) e (2.137) em (2.127) obtemos o tensor momento angular total de Podolsky

$$J_P^{\gamma\alpha\beta} = F^{\gamma\alpha} A^\beta - F^{\gamma\beta} A^\alpha + 2a\partial^\gamma \partial_\sigma (F^{\sigma\alpha} A^\beta - F^{\sigma\beta} A^\alpha) + T_P^{\gamma\alpha} x^\beta - T_P^{\gamma\beta} x^\alpha, \quad (2.140)$$

ou de forma mais explícita:

$$\begin{aligned} J_P^{\gamma\alpha\beta} &= F^{\gamma\alpha} A^\beta - F^{\gamma\beta} A^\alpha + \left( \frac{1}{4} \eta^{\gamma\chi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F^{\mu\gamma} \partial^\chi A_\mu \right) \Xi^{\alpha \ \beta}_{\ \chi \ \rho} x^\rho \\ &\quad + 2a \left[ \partial^\gamma \partial_\sigma (F^{\sigma\alpha} A^\beta - F^{\sigma\beta} A^\alpha) + 2 \left( \partial^\gamma \partial_\rho F^{\rho\sigma} \partial^\chi A_\sigma - \partial_\sigma \partial_\rho F^{\rho\sigma} \partial^\chi A^\gamma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} \partial_\rho F^\rho_{\ \lambda} \eta^{\gamma\chi} \right) \Xi^{\alpha \ \beta}_{\ \chi \ \rho} x^\rho \right]. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Com a obtenção desses tensores da eletrodinâmica de Podolsky encerramos este capítulo, de modo que com os raciocínios desenvolvidos aqui e os resultados obtidos, podemos prosseguir para o estudo da teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky.

# Capítulo 3

## Teoria da radiação

Um estudo da teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky faz-se necessário para a compreensão de fenômenos radiativos associados a esta eletrodinâmica. Sendo assim, neste capítulo estaremos interessados em construir alguns resultados fundamentais para compreendermos uma parte da teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky, de forma a não perdermos de vista a comparação com a eletrodinâmica de Maxwell. Dentre esses resultados destacam-se: o *gauge* de Lorenz generalizado da eletrodinâmica de Podolsky, as funções de Green de Maxwell e Klein-Gordon-Fock que são necessárias para a obtenção do principal resultado do capítulo, o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky. E por fim, mostraremos explicitamente como se obtém o tensor de Faraday retardado.

### 3.1 *Gauge* de Lorenz da eletrodinâmica de Podolsky

Como estaremos interessados em descrever a radiação na eletrodinâmica de Podolsky, precisamos determinar a forma explícita do potencial de Podolsky. E para isso, inspirados no eletromagnetismo de Maxwell, usaremos a invariância de *gauge*, ou seja:

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f(x). \quad (3.1)$$

Sendo assim, vamos relembrar primeiramente das equações de movimento

$$(1 + 2a\Box)\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (3.2)$$

reescrevendo as equações acima em termos do potencial:

$$\begin{aligned} (1 + 2a\Box)\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= J^\nu \\ \implies (1 + 2a\Box)(\Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu) &= J^\nu. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dada essa expressão, poderíamos, de forma precipitada, impor a condição de

Lorenz, i.e.,  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , e obter a equação de onda generalizada para a onda eletromagnética

$$(1 + 2a\Box)\Box A^\nu = J^\nu. \quad (3.4)$$

Porém, o *gauge* de Lorenz da eletrodinâmica de Maxwell não é o *gauge* correto da eletrodinâmica de Podolsky. E para detalhar melhor este ponto, seguiremos a referência [15]. De acordo com ela, a condição (*gauge*) de Lorenz generalizada da eletrodinâmica de Podolsky é:

$$(1 + 2a\Box)\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.5)$$

O *gauge* de Lorenz generalizado é dado por (3.5), pois o mesmo satisfaz algumas condições fundamentais, são elas:

1. uma vez que os potenciais são restringidos pelo *gauge*, não podem haver outros potenciais obtidos do potencial original através de uma transformação de *gauge* que satisfaçam  $(1 + 2a\Box)\partial_\mu A^\mu = 0$ ;
2. preserva as equações de movimento e as condições iniciais do sistema físico;
3. a invariância de Lorentz da teoria não é destruída;
4. ao começar com um potencial  $A^\mu(x)$  que não satisfaz a condição de *gauge*, deve existir uma transformação de *gauge* que leva a um potencial novo que satisfaça o *gauge*.

O *gauge* de Lorenz da eletrodinâmica de Maxwell só satisfaz a terceira condição, logo ele não é o *gauge* ideal para a eletrodinâmica de Podolsky. Por isso o *gauge* ideal neste caso é o (3.5), que satisfaz todas as condições acima.

Agora, como queremos usar a invariância de *gauge* para obter o potencial de Podolsky, consideremos as expressões:

$$(1 + 2a\Box)\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (3.6)$$

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f(x). \quad (3.7)$$

Se a eletrodinâmica de Podolsky é invariante por transformações de *gauge*, então

temos que o potencial  $A'^\mu$  também deve satisfazer a condição (3.5), então

$$(1 + 2a\Box)\partial_\mu A'^\mu = (1 + 2a\Box)\partial_\mu(A^\mu - \partial^\mu f(x)) = 0, \quad (3.8)$$

$$\implies (1 + 2a\Box)\partial_\mu A'^\mu = (1 + 2a\Box)(\partial_\mu A^\mu - \Box f(x)) = 0, \quad (3.9)$$

$$\implies (1 + 2a\Box)\partial_\mu A'^\mu = (1 + 2a\Box)\partial_\mu A^\mu - (1 + 2a\Box)\Box f(x) = 0, \quad (3.10)$$

agora, como  $A'^\mu$  e  $A^\mu$  satisfazem (3.5):

$$(1 + 2a\Box)\partial_\mu A'^\mu = 0, \quad (3.11)$$

$$(1 + 2a\Box)\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (3.12)$$

$$(1 + 2a\Box)\Box f(x) = 0. \quad (3.13)$$

Portanto, percebemos da equação (3.13) que a função  $f(x)$  deve ser um escalar sob transformações de Lorentz<sup>1</sup>. Por fim, obtido o *gauge* de Lorenz<sup>2</sup> generalizado (3.5) e a condição (3.13) para o escalar de Lorentz, podemos avançar no processo para obter o potencial de Podolsky.

## 3.2 Funções de Green de Maxwell e Klein-Gordon-Fock

Para obter o potencial de Podolsky, analisemos a equação de movimento

$$(1 + 2a\Box)\Box A^\nu = J^\nu, \quad (3.14)$$

a fim de resolvê-la, vamos usar o método das funções de Green. Para termos uma maior clareza quanto a este método, vamos estudá-lo com mais cuidado. Seguindo a referência [8], consideremos primeiramente a equação diferencial

$$Df(x) = g(x), \quad (3.15)$$

em que  $f(x)$  e  $g(x)$  são funções definidas sobre um conjunto aberto<sup>3</sup>  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . A

<sup>1</sup>Hendrik Antoon Lorentz.

<sup>2</sup>Ludvig Valentin Lorenz.

<sup>3</sup>Definição [22]: Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  chama-se *aberto* quando  $A = \text{int } A$ , i.e., quando todos os pontos de  $A$  são interiores à  $A$ .

Um ponto  $a$  é interior ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  quando é centro de alguma bola aberta contida em  $X$ , ou seja, quando existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - a| < \delta$ , então  $x \in X$ . De forma que, o conjunto dos pontos interiores a  $X$  é denominado *interior* do conjunto  $X$ , e é representado pela notação  $\text{int } X$ .

equação pode ser resolvida se encontrarmos uma função de Green  $G(x, x')$  de dois pontos  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ , esta função é aquela que satisfaz a equação

$$D_x G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (3.16)$$

em que  $D_x$  indica que esta função atua somente na variável  $x$ . Encontrada  $G(x, x')$  que satisfaça a equação acima, dizemos que ela é uma possível função de Green do operador  $D$  ou da equação (3.15), de modo que então qualquer solução particular da equação (3.15) se escreve formalmente como

$$f(x) = \int_{\Omega} dx' G(x, x') g(x'), \quad (3.17)$$

implicando em

$$Df(x) = \int_{\Omega} dx' D_x G(x, x') g(x'), \quad (3.18)$$

em que  $\Omega = \mathcal{M}^4$  é o espaço de Minkowski. E se encontramos duas funções de Green da mesma equação, elas diferem apenas por uma solução da equação homogênea  $Dh(x) = 0$ . Então, percebemos aqui que a tarefa de encontrar uma solução da equação (3.15) consiste na verdade em buscar uma solução da equação (3.17).

Voltando então para o nosso objetivo, determinar a solução de (3.4), temos que de acordo com o método das funções de Green

$$A^\nu(x) = \int_{\Omega} d^4x' G(x, x') J^\nu(x'), \quad (3.19)$$

em que<sup>4</sup>  $G(x, x')$  é a função de Green do quadripotencial de Podolsky, ou função de Green de Podolsky, satisfazendo então:

$$(1 + 2a\Box)\Box G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (3.20)$$

Nossa tarefa é encontrar a solução  $G(x, x')$  da equação acima. Para isto, obteremos

---

<sup>4</sup>Relembrando que estamos no espaço quadridimensional de Minkowski e a notação  $x = (t, \vec{r})$  está sendo usada.

a transformada de Fourier  $\tilde{G}(k)$  da função  $G(x, x')$ :

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4x' e^{-ik(x-x')} G(x, x'), \quad (3.21)$$

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k), \quad (3.22)$$

$$\implies \tilde{G}(k) = \mathcal{F} G(x, x'), \quad (3.23)$$

sendo  $\mathcal{F}$  a notação para indicar que estamos tomando a transformada de Fourier. E a fim de resolver a equação (3.20), precisamos também tomar a transformada de Fourier da delta de Dirac quadridimensional, sendo assim:

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')}. \quad (3.24)$$

Agora, substituindo (3.22) e (3.24) em (3.20)

$$(1 + 2a\Box) \frac{\Box}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')}$$

$$(1 + 2a\Box) \int_{\Omega} d^4k \Box e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k) = \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')},$$

e lembrando que o operador  $\Box$  atua somente em  $x$ , pois<sup>5</sup>

$$\Box \equiv \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\vec{\nabla})^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (3.25)$$

<sup>5</sup>A assinatura da métrica que está sendo considerada é a  $(+, -, -, -)$ .

temos que:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}
(1 + 2a\Box) \int_{\Omega} d^4k (ik)^2 e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k) &= \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \\
\int_{\Omega} d^4k (1 + 2a\Box) (ik)^2 e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k) &= \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \\
\int_{\Omega} d^4k [(ik)^2 e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k) + 2a(ik)^4 e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k)] &= \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \\
\int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} (ik)^2 [\tilde{G}(k) + 2a(ik)^2 \tilde{G}(k)] &= \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \\
- \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} k^2 [\tilde{G}(k) - 2ak^2 \tilde{G}(k)] &= \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \\
-k^2 \tilde{G}(k) (1 - 2ak^2) &= 1 \\
\implies \tilde{G}(k) &= \frac{1}{k^2(2ak^2 - 1)}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Obtida a função de Green  $\tilde{G}(k)$  acima, notemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(k) &= \frac{1}{(2ak^2 - 1)k^2} \\
&= \frac{2ak^2 - (2ak^2 - 1)}{(2ak^2 - 1)k^2} \\
&= \frac{1}{k^2 - (2a)^{-1}} - \frac{1}{k^2} \\
\implies \tilde{G}(k) &= \tilde{G}_M(k) - \tilde{G}_{KGF}(k), \tag{3.27}
\end{aligned}$$

sendo:

$$\tilde{G}_{KGF}(k) = -\frac{1}{k^2 - (2a)^{-1}}, \tag{3.28}$$

$$\tilde{G}_M(k) = \lim_{a \rightarrow 0_+} \tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2}. \tag{3.29}$$

Portanto, vimos que a função de Green (3.27) obtida pode ser decomposta nas funções de Green (3.29) e (3.28), que são as transformadas de Fourier das funções de Green de Maxwell e de Klein-Gordon-Fock (KGF), respectivamente. E, pela relação (3.23), podemos aferir que:

$$G(x, x') = G_M(x, x') - G_{KGF}(x, x'). \tag{3.30}$$

---

<sup>6</sup>Lembrando que  $k^2 = (k^0)^2 - (\vec{k})^2$ .

Aqui vale fazer uma observação a respeito da relação (3.30). Note que para o caso de Maxwell, teríamos apenas a função de Green  $G_M$ , i.e.,  $G(x, x') = G_M(x, x')$ . De fato, o termo extra  $G_{KGF}(x, x')$  é exclusivo da eletrodinâmica de Podolsky.

### 3.3 Potenciais retardados e avançados

#### 3.3.1 Causalidade

Para prosseguir na obtenção do potencial de Podolsky, precisamos discutir a causalidade e os potenciais retardados e avançados. Então, considerando o resultado (3.30), começaremos determinando as funções de Green retardadas e avançadas que são necessárias para determinar os potenciais.

Queremos que a eletrodinâmica de Podolsky seja consistente com o princípio da causalidade. Para isso, analisemos a equação (3.19). O potencial  $A^\nu$  será medido em  $x$ , dada a quadricorrente infinitesimal  $J^\nu(x') d^4x'$  localizada em  $x'$  que gera este mesmo potencial. Logo, para respeitar a causalidade devemos ter a causa precedendo o efeito, i.e., o potencial deve ser gerado em um instante  $x'$  anterior à detecção do potencial no instante  $x$ . Portanto, se o evento  $x' = (t', \vec{r}')$  precede o evento  $x = (t, \vec{r})$ , então:

$$t - t' > 0. \quad (3.31)$$

Além disso, devemos ter a seguinte condição: se  $t - t' \leq 0 \implies A^\nu = 0$ . E para isso ser verdade, temos que

$$G_R(x, x') = 0 \quad \text{se} \quad t - t' \leq 0, \quad (3.32)$$

sendo  $G_R$  a notação que indica que estamos tratando da função de Green retardada. Tal nome deriva do fato de que estamos considerando que o evento ocorrido em  $x'$  demora um tempo  $t - t' > 0$  para ser detectado em  $x$ . O potencial que obedece tais condições é chamado de potencial retardado.

Agora, se a causalidade for desrespeitada, ou seja, o efeito precede a causa, temos que:

$$t - t' < 0. \quad (3.33)$$

Além disso, analogamente à discussão anterior, se  $t - t' \geq 0 \implies A^\nu = 0$ . Para isto ser verificado, basta que

$$G_A(x, x') = 0 \quad \text{se} \quad t - t' \geq 0, \quad (3.34)$$

sendo  $G_A$  a notação que indica que estamos tratando da função de Green avançada. Tal nome deriva do fato de que estamos considerando que o evento ocorrido em  $x'$  demora um tempo  $t - t' < 0$  para ser detectado em  $x$ . O potencial que obedece tais condições é chamado de potencial avançado. Esta possibilidade não está condizente com princípios físicos, mas é uma solução matematicamente coerente. Com efeito, na literatura ela costuma ser discutida e analisada no contexto da eletrodinâmica de Maxwell, como por exemplo em [20]. Sendo assim, faremos o mesmo aqui e trataremos dessa solução no contexto da eletrodinâmica de Podolsky.

### 3.3.2 Potenciais retardados e avançados de Maxwell

Para obter os potenciais retardados e avançados de Maxwell, vamos inicialmente obter as funções de Green retardadas e avançadas, bastando depois só fazer a substituição necessária da função de Green na expressão do potencial. Sendo assim, comecemos substituindo (3.29) em (3.22)

$$\begin{aligned}
 G_M(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \tilde{G}_M(k) \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2} \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_V d^3k e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - \vec{k}^2} \\
 \implies G_M(x, x') &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_V d^3k e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - \vec{k}^2} \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

de forma que  $\Omega$  é o hipervolume e  $V$  é o volume tridimensional. Para resolver a integral no segundo membro da última equação, usaremos o método de integração de resíduos<sup>7</sup>.

Consideremos a expressão (3.35), vemos que ela possui um polo de ordem 1 em  $k^0 = \pm K$ .<sup>8</sup> Há duas formas de contornar cada um destes dois polos simples, através dos semi-planos inferior e superior. De forma que estes contornos dependem do sinal de  $t - t'$ , pois o mesmo influencia no sinal da exponencial dado o lema de Jordan, que afirma que se o argumento da função exponencial é positivo, o contorno é feito no semi-plano superior, e se é negativo é feito no

<sup>7</sup>Para mais detalhes a respeito deste método, consulte a referência [9].

<sup>8</sup>Está sendo usada a notação  $|\vec{k}| = K$ .

semi-plano inferior. Então, para  $t - t' > 0$  o contorno será feito no semi-plano superior, e para  $t - t' < 0$  o contorno será feito no semi-plano inferior. Além disso, pelo princípio da causalidade, devemos também deslocar os polos para baixo, conforme mostrado na figura (3.1). Pois desta forma obteremos a função de Green retardada, que vai levar ao potencial fisicamente possível.

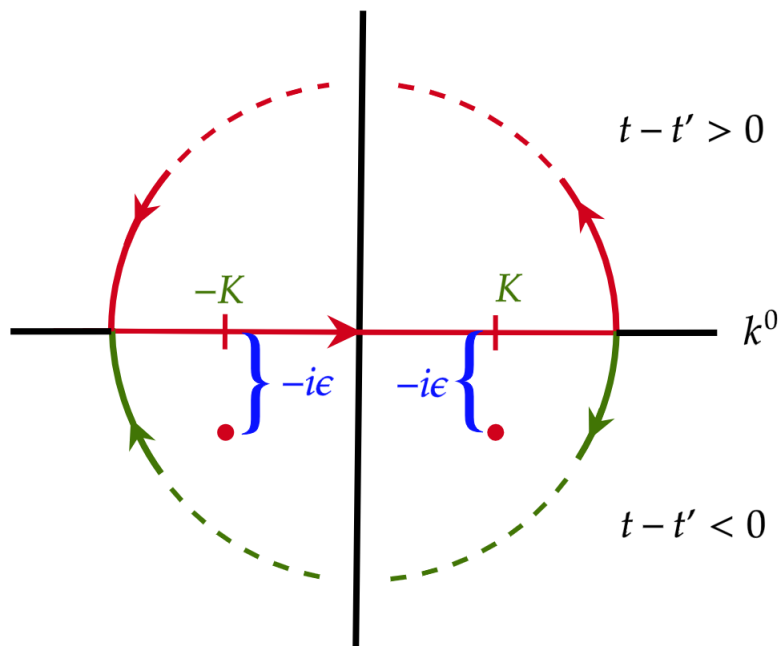


Figura 3.1: Contorno de integração relativo à função de Green de Maxwell com os polos deslocados para baixo.

E para obter a função de Green avançada, bastaria deslocar os polos para cima, conforme mostrado na figura (3.2).

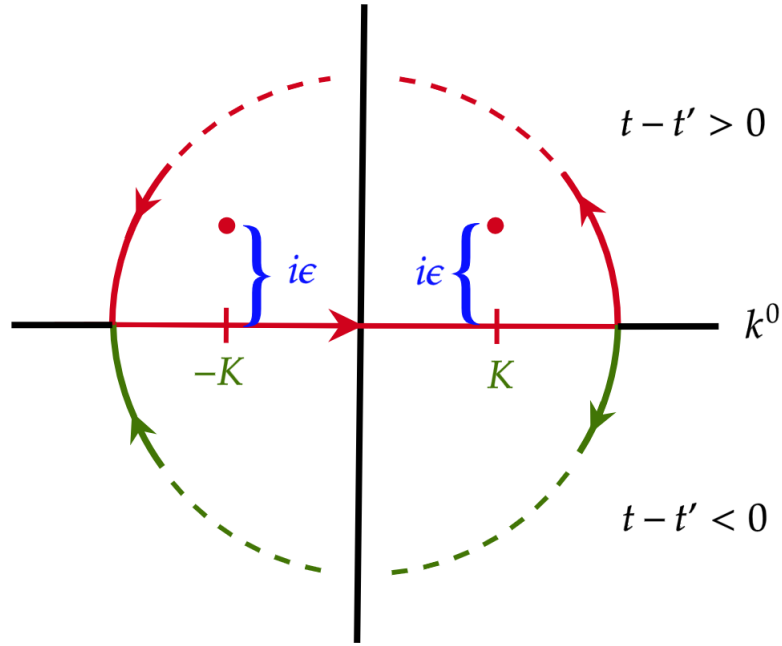


Figura 3.2: Contorno de integração relativo à função de Green de Maxwell com os polos deslocados para cima.

Agora, consideremos a segunda integral da equação (3.35):

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2}. \quad (3.36)$$

Como vamos obter a função de Green retardada primeiramente, o contorno de integração assumido será o da figura (3.1). Considerando-o, via método dos resíduos, podemos calcular a integral da seguinte forma [9]:

$$\begin{aligned} I^{ret} &= -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \sum_{l=1}^2 \text{Res}_{k^0=k_l^0} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2 - 2i\epsilon k^0 - \epsilon^2} \right) \\ &= -2\pi i \sum_{l=1}^2 \text{Res}_{k^0=k_l^0} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2} \right) \\ &= -2\pi i \left[ \text{Res}_{k^0=K} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2} \right) + \text{Res}_{k^0=-K} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sendo

$$\frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2} = \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0 - K)(k^0 + K)} \quad (3.38)$$

ao substituir na equação (3.37) temos que:

$$\begin{aligned}
I^{ret} &= -2\pi i \left[ \text{Res}_{k^0=K} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0-K)(k^0+K)} \right) + \text{Res}_{k^0=-K} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0-K)(k^0+K)} \right) \right] \\
&= -2\pi i \left[ \frac{e^{iK(t-t')}}{(k^0+K)} \Big|_{k^0=K} + \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0-K)} \Big|_{k^0=-K} \right] \\
&= -2\pi i \left( \frac{e^{iK(t-t')}}{2K} - \frac{e^{-iK(t-t')}}{2K} \right) \\
&= \frac{\pi i}{K} (e^{-iK(t-t')} - e^{iK(t-t')}) \\
\Rightarrow I^{ret} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2} = \frac{\pi i}{K} (e^{-iK(t-t')} - e^{iK(t-t')}). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo (3.39) em (3.35) temos que

$$G_M^{ret}(x, x') = -\frac{\pi i}{(2\pi)^4} \int_V d^3k \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} (e^{-iK(t-t')} - e^{iK(t-t')})}{K} \Theta(t - t'), \tag{3.40}$$

em que a função  $\Theta(t - t')$  introduzida é a função de Heaviside que retorna a função de Green retardada:

$$\Theta(t - t') = \begin{cases} 1, & t - t' > 0 \\ 0, & t - t' < 0. \end{cases}$$

Para avaliar (3.40) usaremos o sistema de coordenadas esféricas, e a fim de simplificar a notação, definiremos  $\vec{d} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ . Sendo assim, temos então que  $\vec{k} \cdot \vec{d} = KD \cos \theta$  ( $|\vec{k}| = K$ ,  $|\vec{d}| = D$ ) e  $d^3k = K^2 \sin \theta dK d\theta d\phi$ . Logo, calculando (3.40):

$$\begin{aligned}
 G_M^{ret}(x, x') &= -\frac{\pi i}{(2\pi)^4} \int_V d^3k \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} (e^{-iK(t-t')} - e^{iK(t-t')})}{K} \Theta(t-t') \\
 &= \frac{2\pi i \Theta(t-t')}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \sinh[iK(t-t')] dK \int_0^\pi K \sin \theta e^{-iKD \cos \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \frac{4\pi^2 i \Theta(t-t')}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \sinh[iK(t-t')] dK \int_0^\pi K \sin \theta e^{-iKD \cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{4\pi^2 i \Theta(t-t')}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \sinh[iK(t-t')] dK \int_{-1}^1 K e^{-iKDu} du \\
 &= \frac{8\pi^2 \Theta(t-t')}{D(2\pi)^4} \int_0^\infty \sinh[iK(t-t')] \sinh[iKD] dK \\
 &= \frac{2\pi^2 \Theta(t-t')}{D(2\pi)^4} \int_0^\infty (e^{iK(t-t')} - e^{-iK(t-t')}) (e^{iKD} - e^{-iKD}) dK \\
 &= \frac{2\pi^2 \Theta(t-t')}{(2\pi)^4 D} \left[ \int_{-\infty}^\infty e^{iK(t-t'+D)} dK + \int_{-\infty}^\infty e^{-iK(t-t'-D)} dK \right]. \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Agora, considerando a transformada de Fourier da função delta de Dirac unidimensional

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x-x')}, \quad (3.42)$$

se substituirmos sua definição na expressão (3.41) temos que:

$$G_M^{ret}(x, x') = \frac{4\pi^3 \Theta(t-t')}{(2\pi)^4 D} [\delta(t-t'+D) + \delta(t-t'-D)]. \quad (3.43)$$

Porém, a função de Heaviside filtrará uma das deltas, pois, como  $t - t' > 0$  no caso retardado e  $D = |\vec{r} - \vec{r}'| > 0$ , a delta cujo argumento é  $t - t' + D$  possui um argumento positivo, logo  $t - t' + D > 0 \implies \delta(t - t' + D) = 0$ . Levando isto em consideração, temos a função de Green retardada de Maxwell<sup>9</sup>:

$$G_M^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t-t')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} [\delta(t-t' + |\vec{r} - \vec{r}'|) + \delta(t-t' - |\vec{r} - \vec{r}'|)] \quad (3.44)$$

$$\implies G_M^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t-t')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t-t' - |\vec{r} - \vec{r}'|). \quad (3.45)$$

Se estivéssemos interessados em obter a função de Green avançada  $G_M^{adv}$ , o raciocínio seria análogo ao anterior. O que mudaria no processo seria o desloca-

<sup>9</sup>Neste ponto a notação  $D = |\vec{r} - \vec{r}'|$  será retomada.

mento dos polos para cima, como mostrado na figura (3.2), e também a função de Heaviside, que assumiria a forma:

$$\Theta(t' - t) = \begin{cases} 1, & t' - t > 0 \\ 0, & t' - t < 0. \end{cases}$$

Reunindo tudo isso e executando o mesmo raciocínio feito para a função retardada, é possível obter a função de Green avançada de Maxwell:

$$G_M^{adv}(x, x') = \frac{\Theta(t' - t)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} [\delta(t - t' + |\vec{r} - \vec{r}'|) + \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|)] \quad (3.46)$$

$$\implies G_M^{adv}(x, x') = \frac{\Theta(t' - t)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' + |\vec{r} - \vec{r}'|). \quad (3.47)$$

Porém, em virtude da conveniência, a forma das funções de Green retardadas e avançadas obtidas não são as mais usadas, e sim uma outra. Para obtê-la, consideremos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \delta(|x - x'|^2) &= \delta((t - t')^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2) \\ &= \frac{1}{2|\vec{r} - \vec{r}'|} \{ \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|) + \delta(t - t' + |\vec{r} - \vec{r}'|) \}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

lembrando que  $x = (t, \vec{r})$ . Substituindo a identidade acima em (3.44) e (3.46), obtemos as funções de Green retardadas e avançadas de Maxwell, respectivamente:

$$G_M^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t - t')}{2\pi} \delta(|x - x'|^2), \quad (3.49)$$

$$G_M^{adv}(x, x') = \frac{\Theta(t' - t)}{2\pi} \delta(|x - x'|^2). \quad (3.50)$$

Tendo determinado as funções de Green, podemos obter as expressões para os potenciais. Para isto, basta substituir (3.49) e (3.50) em (3.19), resultando para cada caso em:

$$A_{ret}^v(x) = \int_{\Omega} d^4x' G_M^{ret}(x, x') J^v(x'), \quad (3.51)$$

$$A_{adv}^v(x) = \int_{\Omega} d^4x' G_M^{adv}(x, x') J^v(x'). \quad (3.52)$$

Porém, conforme já mencionado, a solução física é dada pelo potencial retardado.

Desse modo, considerando somente ele, o potencial de Maxwell assume a forma:

$$A_M^\nu(x) = \int_{\Omega} d^4x' \frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \delta[(x-x')^2] J^\nu(x'). \quad (3.53)$$

### 3.3.3 Potenciais retardados e avançados de Klein-Gordon-Fock

Analogamente ao que foi realizado na sub-seção anterior, vamos seguir aqui o mesmo raciocínio e obter primeiramente as funções de Green retardadas e avançadas de Klein-Gordon-Fock. Substituindo (3.28) em (3.22):

$$\begin{aligned} G_{KGF}(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k e^{ik(x-x')} \tilde{G}_{KGF}(k) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d^4k \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 - (2a)^{-1}} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_V d^3k e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(x^0-x'^0)}}{(k^0)^2 - \vec{k}^2 - (2a)^{-1}} \\ \implies G_{KGF}(x, x') &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_V d^3k e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - \vec{k}^2 - (2a)^{-1}}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

de forma que  $\Omega$  é o hipervolume e  $V$  é o volume tridimensional. Para resolver a integral no segundo membro da última equação, usaremos novamente o método de resíduos. Então, seja:

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - \vec{k}^2 - (2a)^{-1}}. \quad (3.55)$$

Sabendo que é a função retardada que dá origem ao potencial físico, obteremos a função de Green retardada. Para isto consideraremos o contorno de integração da figura (3.3).

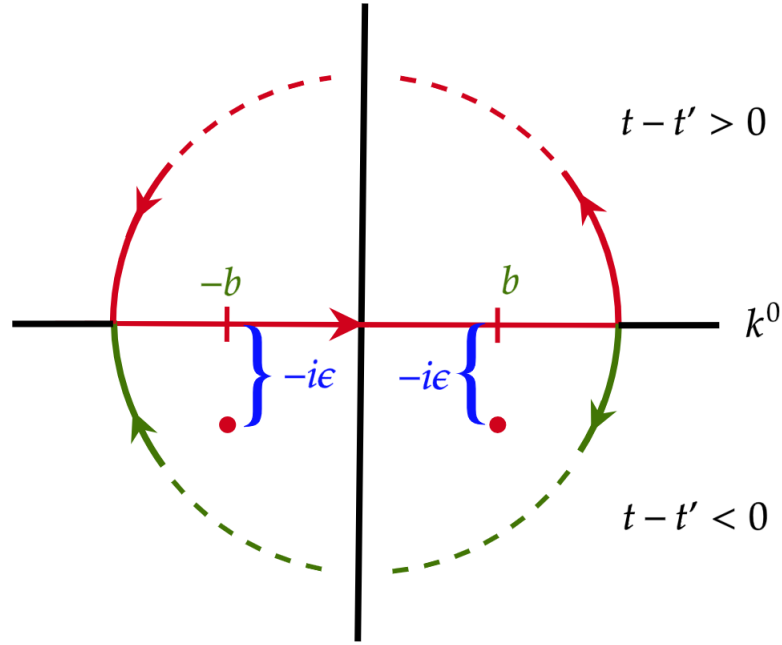


Figura 3.3: Contorno de integração relativo à função de Green de KGF com os polos deslocados para baixo.

E dado este contorno, temos que

$$\begin{aligned}
 I^{ret} &= -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \sum_{l=1}^2 \text{Res}_{k^0=k_l^0} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2 - 2i\epsilon k^0 - \epsilon^2 - (2a)^{-1}} \right) \\
 &= -2\pi i \sum_{l=1}^2 \text{Res}_{k^0=k_l^0} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2 - (2a)^{-1}} \right) \\
 &= -2\pi i \left[ \text{Res}_{k^0=b} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2 - (2a)^{-1}} \right) + \text{Res}_{k^0=-b} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2 - (2a)^{-1}} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

sendo  $b = \sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}$ . E considerando que

$$\frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2 - (2a)^{-1}} = \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0 - b)(k^0 + b)}, \tag{3.57}$$

temos então:

$$\begin{aligned}
I^{ret} &= -2\pi i \left[ \text{Res}_{k^0=b} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0-b)(k^0+b)} \right) + \text{Res}_{k^0=-b} \left( \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0-b)(k^0+b)} \right) \right] \\
&= -2\pi i \left[ \left. \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0+b)} \right|_{k^0=b} + \left. \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0-b)} \right|_{k^0=-b} \right] \\
&= -2\pi i \left( \frac{e^{ib(t-t')}}{2b} - \frac{e^{-ib(t-t')}}{2b} \right) \\
&= \frac{\pi i}{b} (e^{-ib(t-t')} - e^{ib(t-t')}) \\
\Rightarrow I^{ret} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - K^2 - (2a)^{-1}} = \frac{\pi i}{b} (e^{-ib(t-t')} - e^{ib(t-t')}). \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.58) em (3.54)

$$G_{KGF}^{ret}(x, x') = -\frac{\pi i}{(2\pi)^4} \int_V d^3k \frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} (e^{-ib(t-t')} - e^{ib(t-t')})}{b} \Theta(t-t'), \quad (3.59)$$

e usando as coordenadas esféricas de forma análoga ao que foi realizado anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
G_{KGF}^{ret}(x, x') &= \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \frac{\sinh[ib(t-t')]}{b} dK \int_0^{\pi} K^2 \sin\theta e^{-iKD \cos\theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Theta(t-t') \\
&= \frac{8\pi^2}{D(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \frac{K}{b} \sinh[ib(t-t')] \sinh[iKD] dK \Theta(t-t') \\
&= \frac{2\pi^2}{D(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \frac{K}{b} (e^{ib(t-t')} - e^{-ib(t-t')}) (e^{iKD} - e^{-iKD}) dK \Theta(t-t') \\
&= \frac{2\pi^2 \Theta(t-t')}{(2\pi)^4 D} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{b} e^{i[DK+b(t-t')]} dK + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{b} e^{-i[DK+b(t-t')]} dK \right], \quad (3.60)
\end{aligned}$$

reescrevendo em termos explícitos de  $K$ :

$$\begin{aligned}
G_{KGF}^{ret}(x, x') &= \frac{2\pi^2 \Theta(t-t')}{(2\pi)^4 D} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K \exp\left[i(DK + (t-t')\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}})\right]}{\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}} dK \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K \exp\left[-i(DK + (t-t')\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}})\right]}{\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}} dK \right]. \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Para resolver a integral acima, será adotado um procedimento parecido com o feito em [28].<sup>10</sup> E, dado o resultado (D.18) do apêndice, temos que

$$G_{KGF}^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t - t')}{2\pi} \left[ \delta(|x - x'|^2) - \frac{\Theta(|x - x'|^2)}{|x - x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right], \quad (3.62)$$

sendo  $J_1(|x - x'|/\sqrt{2a})$  a função de Bessel de primeira espécie. Agora, analogamente ao raciocínio desenvolvido na seção anterior, podemos obter a expressão para os potenciais avançados, com o auxílio da função de Heaviside e deslocando os polos para cima, conforme mostrado na figura (3.4). Fazendo isso, temos que:

$$G_{KGF}^{adv}(x, x') = \frac{\Theta(t' - t)}{2\pi} \left[ \delta(|x - x'|^2) - \frac{\Theta(|x - x'|^2)}{|x - x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right]. \quad (3.63)$$

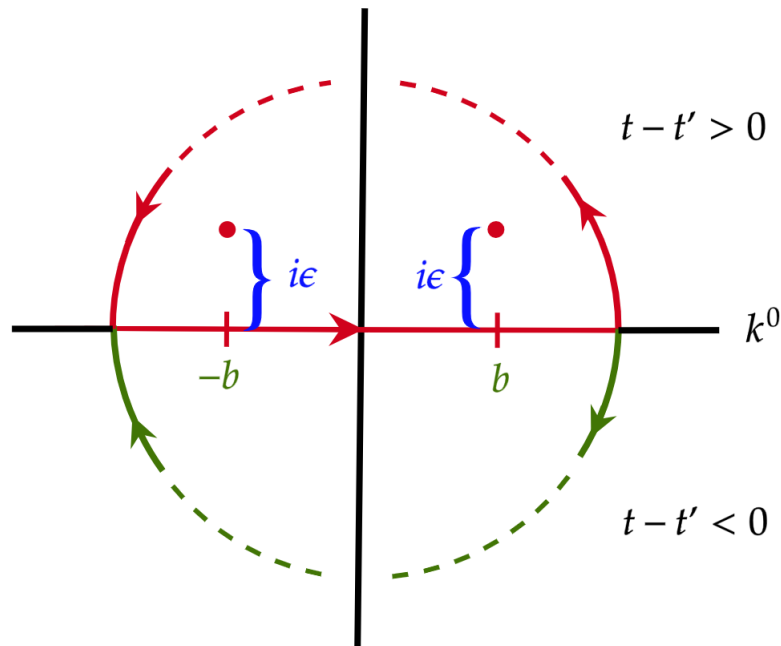


Figura 3.4: Contorno de integração relativo à função de Green de KGF com os polos deslocados para cima.

Por fim, com a função de Green retardada (3.62) podemos obter agora o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky.

<sup>10</sup>Para maiores detalhes sobre a resolução, confira o apêndice D.

### 3.4 O potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky

O potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky pode ser obtido a partir das equações (3.49) e (3.62). Então, usando a relação (3.30), temos que:

$$\begin{aligned}
 G^{ret}(x, x') &= -\frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \left[ \delta(|x-x'|^2) - \frac{\Theta(|x-x'|^2)}{|x-x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right] \\
 &\quad + \frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \delta(|x-x'|^2), \\
 \implies G^{ret}(x, x') &= \frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \left[ \frac{\Theta(|x-x'|^2)}{|x-x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right]. \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Como estamos lidando com o potencial retardado, temos que  $\Theta(t-t') = 1 \iff t-t' > 0$ . E neste momento, faremos a mudança  $G^{ret}(x, x') \rightarrow G(x, x')$ , dado que está claro que estamos tratando da função de Green retardada que leva à solução física para o potencial, sendo assim:

$$G(x, x') = \frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \left[ \frac{\Theta(|x-x'|^2)}{|x-x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right]. \tag{3.65}$$

E, de acordo com a relação (3.19), como os potenciais estão associados às suas respectivas funções de Green, usando a relação  $G(x, x') = G_M(x, x') - G_{KGF}(x, x')$  podemos inferir que

$$A^v(x) = A_M^v(x) - A_{KGF}^v(x), \tag{3.66}$$

em que  $A_M^v(x)$  é o potencial associado à função de Green  $G_M$ ,  $A_{KGF}^v$  é o potencial associado à  $G_{KGF}$  e  $A^v$  é o potencial associado à  $G$ . E sendo assim, temos então:

$$\begin{aligned}
 A^v(x) &= \int_{\Omega} d^4x' \frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \left[ \delta(|x-x'|^2) - \delta(|x-x'|^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Theta(|x-x'|^2)}{|x-x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right] J^v(x') \\
 \implies A^v(x) &= \int_{\Omega} d^4x' \frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \left[ \frac{\Theta(|x-x'|^2)}{|x-x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right] J^v(x'). \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

Com a equação acima, podemos agora determinar o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky. Para uma carga pontual  $e$  se movendo no espaço-tempo com uma

quadrivelocidade  $v^\nu(\tau) = (v_0(\tau), \vec{v}(\tau))$  em que  $\tau$  é o tempo próprio da carga, temos que a quadricorrente associada a ela é dada por [3]

$$J^\nu(x') = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v^\nu(\tau) \delta[x' - r(\tau)], \quad (3.68)$$

sendo  $r(\tau) = (r_0(\tau), \vec{r}(\tau))$  a quadriposição da carga. Substituindo a expressão (3.68) em (3.67), e reconhecendo que a função delta filtra  $x'$ , temos<sup>11</sup>

$$A^\nu(x) = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - r^0) \left[ \frac{\Theta(|x - r(\tau)|^2)}{|x - r(\tau)|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x - r(\tau)|}{\sqrt{2a}}\right) \right] v^\nu(\tau), \quad (3.69)$$

de forma que a expressão acima só é não nula para um intervalo  $I$  em que a condição  $|x - r(\tau)|^2 > 0$  é satisfeita, então  $x - r(\tau)$  é um quadri vetor tipo tempo.

Logo, nota-se que a equação (3.69) são os potenciais de Lienard-Wiechert-Podolsky. E para verificar que esta expressão recai nos potenciais de Lienard-Wiechert de Maxwell, analisaremos o comportamento da equação (3.69) no limite que  $a \rightarrow 0_+$ , que é o limite em que recuperamos a eletrodinâmica de Maxwell. Porém, para verificar isso, basta analisarmos o limite da função de Green de Podolsky, pois se a mesma recair na função de Green de Maxwell, teremos o mesmo comportamento para os potenciais. Logo, calcularemos o limite da teoria de Maxwell a partir da função de Green de Podolsky (3.65), ou seja, fazer  $a \rightarrow 0_+$  em  $G(x, x')$ .

Portanto, será mostrado em seguida que os limites abaixo são válidos:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ \frac{\Theta(x^0 - r^0)}{4\pi} \frac{\Theta(|x - x'|^2)}{|x - x'|\sqrt{2a}} J_1\left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= \Theta(x^0 - r^0) \frac{\delta(|x - x'|^2)}{2\pi} \\ \implies \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{\Theta(|x - x'|^2)}{|x - x'|\sqrt{2a}} J_1\left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= \frac{\delta(|x - x'|^2)}{2\pi} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ \frac{\Theta(x^0 - r^0)}{4\pi} \frac{\Theta(|x - x'|^2)}{|x - x'|\sqrt{2a}} J_1\left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= \Theta(x^0 - r^0) \frac{\delta[(t - t') - |\vec{r} - \vec{r}'|]}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \implies \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{\Theta(|x - x'|^2)}{|x - x'|\sqrt{2a}} J_1\left(\frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= \frac{\delta[(t - t') - |\vec{r} - \vec{r}'|]}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.70) \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Note que mantemos a função  $\Theta(t - t')$  mas ela foi reescrita como  $\Theta(x^0 - r^0)$ .

Para isto, seja  $f(x)$  uma função analítica tal que admita uma expansão em série de Taylor em torno do ponto  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}, \quad f^{(n)}(0) \equiv \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0}. \quad (3.71)$$

Além disso, vamos considerar a seguinte propriedade da função delta.<sup>12</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) g(x) dx = (-1)^n g^{(n)}(0). \quad (3.72)$$

Sendo assim, podemos reescrever  $f(x)$  como:<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x') f(x') dx' \right] \frac{x^n}{n!} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{(n)}(x') \frac{x^n}{n!} \right] f(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' \\ \implies \delta(x - x') &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{(n)}(x') \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

A fim de facilitar os cálculos, vamos reescrever a função de Green de Maxwell (3.44) como

$$G_M(x, x') = \frac{\delta(T - |\vec{R}|)}{4\pi|\vec{R}|}, \quad (3.74)$$

em que estamos usando a notação  $T = t - t'$  e  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Tomando a representação em série de Taylor de  $G_M(x, x')$  temos<sup>14</sup>

$$G_M(x, x') = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{(n)}(T) \frac{|\vec{R}|^{n-1}}{n!}, \quad (3.75)$$

e com base nela, usaremos o seguinte *ansatz*:

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{(n)}(T) \frac{|\vec{R}|^{n-1}}{n!} f_n \left( \frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}} \right). \quad (3.76)$$

<sup>12</sup>Para mais detalhes sobre esta propriedade, as referências [25] e [36] são indicadas.

<sup>13</sup>Para mais detalhes sobre esta representação da delta de Dirac e da demonstração em questão, a referência [14] é indicada.

<sup>14</sup>Estamos usando a notação:  $\delta^{(n)}(T) \equiv d^n \delta(T) / dT^n$ .

Agora, considerando que  $T = t - t' > 0 \implies \Theta(t - t') = 1$  e igualando as expressões (3.65) e (3.76), temos

$$\frac{\Theta(T^2 - |\vec{R}|^2)}{\sqrt{2a}\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}} J_1\left(\frac{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}}{\sqrt{2a}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{(n)}(T) \frac{|\vec{R}|^{n-1}}{n!} f_n\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right), \quad (3.77)$$

multiplicando os dois lados da equação por  $T^k$  e integrando em  $T$ :<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2, \\ I_1 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(T^2 - |\vec{R}|^2)}{\sqrt{2a}\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}} J_1\left(\frac{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}}{\sqrt{2a}}\right) T^k dT, \\ I_2 &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(T) T^k dT \right] \frac{|\vec{R}|^{n-1}}{n!} f_n\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right). \end{aligned}$$

Mas, nota-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(T) T^k dT = (-1)^n \frac{d^n T^k}{dT^n} \Big|_{T=0} = (-1)^n k! \delta_{nk}, \quad (3.78)$$

pois,

$$\begin{aligned} \text{se } k < n &\implies \frac{d^n T^k}{dT^n} \Big|_{T=0} = 0 \\ \text{e se } k > n &\implies \frac{d^n T^k}{dT^n} \Big|_{T=0} = 0, \end{aligned}$$

logo, temos apenas  $k = n$  resultando em

$$\frac{d^k T^k}{dT^k} \Big|_{T=0} = k!.$$

<sup>15</sup>Lembrando que  $T$  é tal que  $T = t - t'$ , ou seja, a mesma análise feita aqui vale se tomarmos o caso mais simples em que  $t' = 0$ . De modo que poderíamos prosseguir na demonstração dessa forma, tal como foi feito em [28].

Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(T^2 - |\vec{R}|^2)}{\sqrt{2a}\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}} J_1\left(\frac{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}}{\sqrt{2a}}\right) T^k dT &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} k! \delta_{nk} \frac{|\vec{R}|^{n-1}}{n!} f_n\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(T^2 - |\vec{R}|^2)}{\sqrt{2a}\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}} J_1\left(\frac{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}}{\sqrt{2a}}\right) T^k dT &= |\vec{R}|^{k-1} f_k\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) \\
 \Rightarrow f_k\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) &= \frac{|\vec{R}|^{1-k}}{\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(T^2 - |\vec{R}|^2)}{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}} J_1\left(\frac{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}}{\sqrt{2a}}\right) T^k dT. \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

Como  $\Theta(T^2 - |\vec{R}|^2)$  limita a região de integração para  $T > |\vec{R}|$ , preservando assim a causalidade, temos que

$$f_k\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{|\vec{R}|^{1-k}}{\sqrt{2a}} \int_{|\vec{R}|}^{\infty} \frac{\Theta(T^2 - |\vec{R}|^2)}{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}} J_1\left(\frac{\sqrt{T^2 - |\vec{R}|^2}}{\sqrt{2a}}\right) T^k dT, \quad (3.80)$$

e fazendo a mudança de variável

$$z = \sqrt{\left(\frac{T}{|\vec{R}|}\right)^2 - 1},$$

obtemos:

$$f_k\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}} \int_0^{\infty} J_1\left(\frac{z|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) (\sqrt{z^2 + 1})^{k-1} dz. \quad (3.81)$$

Considerando agora os índices  $k = 0, 1, 2, 3$ , temos

$$\begin{aligned} f_0\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) &= 1 - \exp\left\{-\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right\}, \\ f_1\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) &= 1, \\ f_2\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) &= 1 - \frac{\sqrt{2a}}{|\vec{R}|} \exp\left\{-\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right\}, \\ f_3\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) &= 1, \end{aligned}$$

logo, vemos que no limite em que  $a \rightarrow 0_+$ , temos que  $f_k \rightarrow 1$ . De fato, ao tomar o limite de  $f_0$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ f_0\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ 1 - e^{-|\vec{R}|/\sqrt{2a}} \right] = 1 - \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ \frac{1}{e^{|\vec{R}|/\sqrt{2a}}} \right] = 1 \\ \implies \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ f_0\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= 1, \end{aligned}$$

e ao tomar o limite de  $f_2$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ f_2\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2a}}{|\vec{R}|} e^{-|\vec{R}|/\sqrt{2a}} \right] = 1 - \frac{1}{|\vec{R}|} \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ \frac{\sqrt{2a}}{e^{|\vec{R}|/\sqrt{2a}}} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{|\vec{R}|} \left\{ \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ \frac{1}{e^{|\vec{R}|/\sqrt{2a}}} \right] \cdot \lim_{a \rightarrow 0_+} (\sqrt{2a}) \right\} = 1 \\ \implies \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[ f_2\left(\frac{|\vec{R}|}{\sqrt{2a}}\right) \right] &= 1, \end{aligned}$$

logo, no limite em que  $a \rightarrow 0_+$ , temos que  $f_k \rightarrow 1$ . Portanto, ao comparar as expressões (3.75) e (3.76) vemos que elas são iguais. Sendo assim, conseguimos mostrar que no limite de Maxwell ( $a \rightarrow 0_+$ ) a função de Green de Podolsky é igual a função de Green de Maxwell, logo é possível recuperar a eletrodinâmica de Maxwell.

### 3.5 Caracterização do parâmetro de Podolsky

A fim de obter a escala de comprimento da teoria, é conveniente reescrever o parâmetro de Podolsky  $a$  e mudar a notação daqui em diante. Para isto, consideremos o *gauge* de Lorenz generalizado da eletrodinâmica de Podolsky (2.38). Sob esta condição, as equações de movimento de Podolsky, dadas por (3.5), assumem a forma:

$$(1 + 2a\Box)\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = J^\nu \implies (1 + 2a\Box)\Box A^\nu = J^\nu$$

$$\implies \begin{cases} [1 + 2a(\partial_t^2 - \nabla^2)](\partial_t^2 - \nabla^2)\phi = \rho \\ [1 + 2a(\partial_t^2 - \nabla^2)](\partial_t^2 - \nabla^2)\vec{A} = \vec{j}. \end{cases} \quad (3.82)$$

Considerando o caso estático por simplicidade, i.e.,  $\dot{A}^0 = \dot{\vec{A}} = 0$ , temos que:

$$\implies (1 + 2a\nabla^2)\nabla^2\phi = \rho, \quad (3.83)$$

$$\implies (1 + 2a\nabla^2)\nabla^2\vec{A} = \vec{j}. \quad (3.84)$$

De forma que podemos reescrevê-las como:

$$\implies (1 + m^{-2}\nabla^2)\nabla^2\phi = \rho, \quad (3.85)$$

$$\implies (1 + m^{-2}\nabla^2)\nabla^2\vec{A} = \vec{j}, \quad (3.86)$$

$$m \equiv \frac{1}{\sqrt{2a}}. \quad (3.87)$$

Fazendo a análise dimensional das equações acima, chegamos a conclusão que  $m$  deve ter dimensão de inverso de comprimento ( $m^{-1}$  no S.I.). Sendo assim, o parâmetro  $m$  deve ser entendido como a escala de comprimento da teoria de Podolsky, portanto, tal parâmetro será chamado de agora em diante de comprimento de Podolsky. E sabendo que a energia é proporcional ao inverso do comprimento, ao determinar o valor do comprimento de Podolsky, teríamos a escala de energia da teoria, a partir da qual a eletrodinâmica de Podolsky poderia ser verificada. Nesse sentido, o último valor encontrado para o parâmetro  $m$  foi de  $m > 37,595 \text{ GeV}$  em [10], ou seja, para uma escala de energia menor ou igual a este valor não é possível verificar experimentalmente a teoria de Podolsky.

Além disso, vale mencionar que como estamos usando o limite de  $a \rightarrow 0_+$  para comparar as duas eletrodinâmicas, dado o valor de  $m$  e a sua definição,

passaremos a considerar que se  $a \rightarrow 0_+ \implies m \rightarrow +\infty$ .<sup>16</sup>

### 3.6 Comparativo dos potenciais de Lienard-Wiechert de Podolsky e de Maxwell

Determinamos anteriormente o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky, dado pela equação (3.69). Agora, compararemos com o potencial de Lienard-Wiechert obtido no eletromagnetismo de Maxwell. Para isto, reescreveremos (3.69) em termos vetoriais. Então, consideremos o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky reescrito em termos da constante  $m$  (3.87):

$$A^\nu(x) = \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - r^0) \Theta(|x - r(\tau)|^2) \frac{J_1(m|x - r(\tau)|)}{|x - r(\tau)|} v^\nu(\tau), \quad (3.88)$$

em componentes vetoriais<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned} \nu = 0: \quad \phi(x) &= \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - r^0) \Theta(|x - r(\tau)|^2) J_1(m|x - r(\tau)|) \frac{v^0(\tau)}{|x - r(\tau)|}, \\ \nu = i: \quad \vec{A}(x) &= \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - r^0) \Theta(|x - r(\tau)|^2) J_1(m|x - r(\tau)|) \frac{\vec{v}(\tau)}{|x - r(\tau)|}. \end{aligned}$$

E do eletromagnetismo de Maxwell, em notação covariante, temos a seguinte expressão para o potencial de Lienard-Wiechert [3]

$$A^\nu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{\dot{r}^\nu}{[x - r(\tau)]^\sigma \dot{r}_\sigma} \Big|_{\tau=\tau_R}, \quad (3.89)$$

em que  $\tau_R$  é o tempo retardado, ou em notação vetorial,

$$\nu = 0: \quad \phi(x) = \frac{e}{4\pi R} \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v})}, \quad (3.90)$$

$$\nu = 1, 2, 3: \quad \vec{A}(x) = \frac{e}{4\pi R} \frac{\vec{v}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v})}, \quad (3.91)$$

$$\text{sendo} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}(\tau_R) \quad \text{e} \quad \hat{n} = \vec{R}/R.$$

Podemos notar então que, dada a forma do potencial de Lienard-Wiechert-

<sup>16</sup>Para mais detalhes sobre a origem do parâmetro  $m$ , a referência [6] é indicada.

<sup>17</sup>Para quadrivetores contravariantes, estamos considerando que  $r(\tau) = (r_0(\tau), \vec{r}(\tau)) \implies v(\tau) = (v_0(\tau), \vec{v}(\tau))$ .

Podolsky (3.88), não conseguimos de uma forma imediata recuperar o potencial de Lienard-Wiechert (3.89) tomando o limite em que  $m \rightarrow \infty$ . De forma que, a fim de avaliar a integral em (3.88), é necessário especificar o quadrivetor posição da carga  $r(\tau)$ . E tendo isto em vista, estudaremos no capítulo seguinte (capítulo 4) algumas configurações possíveis especificando o quadrivetor posição.

### 3.7 Tensor de Faraday retardado

A fim de explorarmos no próximo capítulo algumas propriedades e alguns aspectos dos campos gerados por uma carga em movimento, é conveniente obtermos o tensor de Faraday retardado para uma carga em movimento a partir da eletrodinâmica de Podolsky. O tensor de Faraday retardado é dado por

$$F_{ret}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (3.92)$$

em que  $A^\nu$  é o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky (3.88). Porém, de agora em diante, será omitido o *ret* por simplicidade da notação.<sup>18</sup>

Calculando  $\partial^\nu A^\mu$  temos que<sup>19</sup>

$$\partial^\nu A^\mu = \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial^\nu \left[ \frac{\Theta(x^0 - \bar{r}^0) \Theta(|x - \bar{r}|^2) J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right] \bar{v}^\mu, \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{em}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial^\nu [\Theta(x^0 - \bar{r}^0)] \frac{\Theta(|x - \bar{r}|^2) J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \bar{v}^\mu \right. \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial^\nu [\Theta(|x - \bar{r}|^2)] \frac{\Theta(x^0 - \bar{r}^0) J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \bar{v}^\mu \\ &\left. + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial^\nu \left[ \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right] \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \Theta(|x - \bar{r}|^2) \bar{v}^\mu \right\}, \end{aligned}$$

$$\implies \partial^\nu A^\mu = I_1 + I_2 + I_3, \quad (3.94)$$

<sup>18</sup>Enquanto não houver ambiguidade, será mantida a notação, de forma que quando precisarmos diferenciar os tensores  $F^{\mu\nu}$  e  $F_{ret}^{\mu\nu}$  será indicado.

<sup>19</sup>Para simplificar a notação nesta seção, usaremos a notação  $\bar{r} \equiv r(\tau)$  e  $\bar{v} \equiv v(\tau)$  para indicar a dependência em  $\tau$ . E quando for necessário, explicitaremos a dependência em  $\tau$ .

sendo:

$$I_1 \equiv \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial^\nu [\Theta(x^0 - \bar{r}^0)] \frac{\Theta(|x - \bar{r}|^2) J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \bar{v}^\mu, \quad (3.95)$$

$$I_2 \equiv \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial^\nu [\Theta(|x - \bar{r}|^2)] \frac{\Theta(x^0 - \bar{r}^0) J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \bar{v}^\mu, \quad (3.96)$$

$$I_3 \equiv \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial^\nu \left[ \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right] \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \Theta(|x - \bar{r}|^2) \bar{v}^\mu. \quad (3.97)$$

Note que  $\partial^\nu \bar{v}^\mu = 0$ , pois  $\bar{v}^\mu$  não depende de  $x^\nu$ .

Agora, para resolver  $I_1$  e  $I_2$ , temos que usar as seguintes propriedades da função delta de Dirac [25]

$$\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx}, \quad (3.98)$$

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f'(x_i) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}. \quad (3.99)$$

Levando a 1ª propriedade em consideração, temos

$$\partial^\nu \{\Theta(x^0 - \bar{r}^0)\} = \partial^\nu \{\Theta(x_0 - \bar{r}_0)\} = \frac{\partial \Theta(x_0 - \bar{r}_0)}{\partial(x_0 - \bar{r}_0)} \frac{\partial(x_0 - \bar{r}_0)}{\partial x_\nu} = \delta(x_0 - \bar{r}_0) \delta_0^\nu,$$

pois  $x^0 - \bar{r}^0 = x_0 - \bar{r}_0$ . Sendo  $\delta(x_0 - \bar{r}_0)$  a delta de Dirac e  $\delta_0^\nu$  a delta de Kronecker, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(x_0 - \bar{r}_0) \delta_0^\nu \frac{\Theta(|x - \bar{r}|^2) J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \bar{v}^\mu \\ I_1 &= \frac{\Theta(|x - \bar{r}|^2) J_1(m\sqrt{(x - \bar{r})^i (x - \bar{r})_i})}{\sqrt{(x - \bar{r})^i (x - \bar{r})_i}} \delta_0^\nu \bar{v}^\mu \Theta[(x - \bar{r})^i (x - \bar{r})_i] \\ \implies I_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

em que  $\Theta[(x - \bar{r})^i (x - \bar{r})_i] = 0$  pois  $(x - \bar{r})^i (x - \bar{r})_i < 0$ , dada a definição que estamos usando da função de Heaviside (D.9).

Para resolver  $I_2$ , precisamos usar as duas propriedades da delta de Dirac

mencionadas anteriormente. Calculando  $\partial^\nu[\Theta(|x - \bar{r}|^2)]$ , temos que:

$$\begin{aligned}\partial^\nu[\Theta(|x - \bar{r}|^2)] &= \frac{\partial\Theta(|x - \bar{r}|^2)}{\partial(|x - \bar{r}|^2)} \frac{\partial(|x - \bar{r}|^2)}{\partial x_\nu} = \delta[|x - \bar{r}|^2] \partial^\nu[(x - \bar{r})^\alpha (x - \bar{r})_\alpha] \\ &= \delta(|x - \bar{r}|^2) \partial^\nu(x^2 + \bar{r}^2 - 2x^\alpha \bar{r}_\alpha) = 2\delta(|x - \bar{r}|^2)(x - \bar{r})^\nu \\ \implies \partial^\nu[\Theta(|x - \bar{r}|^2)] &= 2\delta(|x - \bar{r}|^2)(x - \bar{r})^\nu.\end{aligned}\quad (3.101)$$

Porém, para usarmos a 2ª propriedade da delta de Dirac mencionada anteriormente, precisamos calcular  $d(|x - r(\tau)|^2)/d\tau$ , logo:

$$\begin{aligned}\frac{d(|x - r(\tau)|^2)}{d\tau} &= 2(x - \bar{r})^\alpha \frac{d(x - \bar{r})_\alpha}{d\tau} = -2(x - \bar{r})^\alpha \bar{v}_\alpha, \quad \text{pois } \frac{dx_\alpha}{d\tau} = 0, \\ \implies \frac{d(|x - r(\tau)|^2)}{d\tau} &= -2(x^\alpha - \bar{r}^\alpha) \bar{v}_\alpha.\end{aligned}\quad (3.102)$$

Pela expressão acima, e nomeando as duas raízes da equação do 2º grau  $|x - r(\tau)|^2 = 0$  de  $\tau_R^+$  e  $\tau_R^-$ , de acordo com a 2ª propriedade da delta de Dirac:

$$\delta(|x - r(\tau)|^2) = \frac{\delta(\tau - \tau_R^+)}{2(x - r(\tau_R^+))^\alpha v_\alpha(\tau_R^+)} + \frac{\delta(\tau - \tau_R^-)}{2(x - r(\tau_R^-))^\alpha v_\alpha(\tau_R^-)}.\quad (3.103)$$

Substituindo a expressão acima em  $\partial^\nu[\Theta(|x - \bar{r}|^2)]$ , temos que:

$$\partial^\nu[\Theta(|x - \bar{r}|^2)] = \left[ \frac{\delta(\tau - \tau_R^+)}{(x - r(\tau_R^+))^\alpha v_\alpha(\tau_R^+)} + \frac{\delta(\tau - \tau_R^-)}{(x - r(\tau_R^-))^\alpha v_\alpha(\tau_R^-)} \right] (x - \bar{r})^\nu \quad (3.104)$$

Agora, perceba que as raízes  $\tau_R^+$  e  $\tau_R^-$  não podem ser determinadas para um  $r(\tau)$  genérico, de modo que faz-se necessária a especificação de  $r(\tau)$ . Porém, analisando a equação  $|x - r(\tau)|^2 = 0$ , temos que:

$$\begin{aligned}|x - r(\tau)|^2 = |x - r(\tau_R)|^2 = 0 &\implies (x^0 - r(\tau_R)^0)^2 - (x^i - r(\tau_R)^i)^2 = 0 \\ \implies x^0 - r(\tau_R^\pm)^0 = \pm |x^i - r(\tau_R^\pm)^i| &\implies r(\tau_R^\pm)^0 = x^0 \mp |x^i - r(\tau_R^\pm)^i| \\ \implies r(\tau_R^+)^0 = x^0 - |x^i - r(\tau_R^+)^i| &\quad \text{e} \quad r(\tau_R^-)^0 = x^0 + |x^i - r(\tau_R^-)^i|.\end{aligned}$$

Identificando as raízes  $\tau_R^\pm$  como o tempo próprio retardado, que satisfaz a condição  $|x - r(\tau_R)|^2 = 0$ , vemos que, a princípio, existem dois possíveis valores para ele. Porém, veremos que só há uma solução possível para o tempo próprio retardado, que é aquele que satisfaz a condição  $|x - r(\tau_R)|^2 = 0$ , a mesma da eletrodinâmica de Maxwell. Tal condição representa o fato do intervalo associado ao quadrivetor

$(x - r(\tau))^{\nu}$  ser do tipo luz. Por fim, precisamos substituir a expressão (3.104) na integral  $I_2$ , logo

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \frac{\delta(\tau - \tau_R^+)}{(x - r(\tau_R^+))^{\alpha} v_{\alpha}(\tau_R^+)} \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} (x - \bar{r})^{\nu} \bar{v}^{\mu} \\
 &+ \frac{em}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \frac{\delta(\tau - \tau_R^-)}{(x - r(\tau_R^-))^{\alpha} v_{\alpha}(\tau_R^-)} \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} (x - \bar{r})^{\nu} \bar{v}^{\mu}, \\
 \Rightarrow I_2 &= \frac{em^2}{8\pi} \left[ \Theta(-|x^i - r(\tau_R^+)^i|) \frac{(x - r(\tau_R^+))^{\nu} v(\tau_R^+)^{\mu}}{(x - r(\tau_R^+))^{\alpha} v(\tau_R^+)_{\alpha}} \right. \\
 &\quad \left. + \Theta(|x^i - r(\tau_R^-)^i|) \frac{(x - r(\tau_R^-))^{\nu} v(\tau_R^-)^{\mu}}{(x - r(\tau_R^-))^{\alpha} v(\tau_R^-)_{\alpha}} \right] \\
 \Rightarrow I_2 &= \frac{em^2}{8\pi} \frac{(x - r(\tau_R^-))^{\nu} v(\tau_R^-)^{\mu}}{(x - r(\tau_R^-))^{\alpha} v(\tau_R^-)_{\alpha}}, \tag{3.105}
 \end{aligned}$$

de forma que, usamos o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{J_1(mt)}{t} \right) = \frac{m}{2}$$

e a condição  $|x - r(\tau_R)| = 0$  para resolver a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(\tau - \tau_R) \frac{J_1(m|x - r(\tau)|)}{|x - r(\tau)|} = \frac{m}{2}.$$

Para resolver  $I_3$ , precisamos usar a regra do produto, a regra da cadeia e a propriedade da função de Bessel

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = \frac{J_0(x) - J_2(x)}{2}, \tag{3.106}$$

sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \partial^\nu \left[ \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right] &= \frac{\partial^\nu [J_1(m|x - \bar{r}|)]}{|x - \bar{r}|} - \frac{J_1(m|x - \bar{r}|) \partial^\nu (|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|^2}, \\
 \partial^\nu (|x - \bar{r}|) &= \frac{(x - \bar{r})^\nu}{|x - \bar{r}|}, \\
 \partial^\nu [J_1(m|x - \bar{r}|)] &= \frac{\partial J_1(m|x - \bar{r}|)}{\partial(m|x - \bar{r}|)} \frac{\partial(m|x - \bar{r}|)}{\partial x_\nu} \\
 &= \frac{[J_0(m|x - \bar{r}|) - J_2(m|x - \bar{r}|)]}{2} \frac{m(x - \bar{r})^\nu}{|x - \bar{r}|}, \\
 \implies \partial^\nu \left[ \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right] &= \frac{m(x - \bar{r})^\nu}{|x - \bar{r}|} \left[ \frac{J_0(m|x - \bar{r}|) - J_2(m|x - \bar{r}|)}{2|x - \bar{r}|} - \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{m|x - \bar{r}|^2} \right].
 \end{aligned}$$

Ao simplificar a expressão acima usando a identidade (3.106), pode-se mostrar que

$$\partial^\nu \left[ \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right] = \frac{(x - \bar{r})^\nu}{|x - \bar{r}|^2} \left[ \frac{dJ_1(m|x - \bar{r}|)}{d(|x - \bar{r}|)} - \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right],$$

usando a identidade

$$\frac{J_1(x)}{x} = J_2(x) + \frac{dJ_1(x)}{dx},$$

logo:

$$\partial^\nu \left[ \frac{J_1(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|} \right] = -\frac{m(x - \bar{r})^\nu}{|x - \bar{r}|^2} J_2(m|x - \bar{r}|). \quad (3.107)$$

Substituindo o resultado acima em  $I_3$  (3.97):

$$I_3 = -\frac{em^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \Theta(|x - \bar{r}|^2) \frac{J_2(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|^2} (x - \bar{r})^\nu \bar{v}^\mu. \quad (3.108)$$

Reunindo os resultados (3.100), (3.105) e (3.108) em (3.94), temos que

$$\begin{aligned}
 \partial^\nu A^\mu &= \frac{em^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \frac{(x - r(\tau_R^-))^\nu v(\tau_R^-)^\mu}{|(x - r(\tau_R^-))^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha|} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \Theta(|x - \bar{r}|^2) \frac{J_2(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|^2} (x - \bar{r})^\nu \bar{v}^\mu \right], \quad (3.109)
 \end{aligned}$$

e procedendo de forma análoga para  $\partial^\mu A^\nu$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \partial^\mu A^\nu &= \frac{em^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \frac{(x - r(\tau_R^-))^\mu v(\tau_R^-)^\nu}{|(x - r(\tau_R^-))^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \Theta(|x - \bar{r}|^2) \frac{J_2(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|^2} (x - \bar{r})^\mu \bar{v}^\nu \right], \end{aligned} \quad (3.110)$$

Por fim, substituindo (3.109) e (3.110) em (3.92) temos que

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{(x - r(\tau_R^-))^{[\mu} v(\tau_R^-)^{\nu]}}{(x - r(\tau_R^-))^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha} \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(x^0 - \bar{r}^0) \Theta(|x - \bar{r}|^2) \frac{J_2(m|x - \bar{r}|)}{|x - \bar{r}|^2} (x - \bar{r})^{[\mu} \bar{v}^{\nu]} \right] \\ \Rightarrow F^{\mu\nu} &= \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{D(\tau_R^-)^{[\mu} v(\tau_R^-)^{\nu]}}{D(\tau_R^-)^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(\bar{D}^0) \Theta(\bar{D}^2) \frac{J_2(m\bar{D})}{\bar{D}^2} \bar{D}^{[\mu} \bar{v}^{\nu]} \right], \end{aligned} \quad (3.111)$$

em que

$$\bar{D} \equiv D(\tau) \equiv |x - r(\tau)| \quad \text{e} \quad \bar{D}^\mu \equiv D(\tau)^\mu \equiv x^\mu - r(\tau)^\mu, \quad (3.112)$$

e

$$\bar{D}^{[\mu} \bar{v}^{\nu]} \equiv \frac{\bar{D}^\mu \bar{v}^\nu - \bar{D}^\nu \bar{v}^\mu}{2}. \quad (3.113)$$

Agora, levando em conta a mudança de variável

$$\frac{d\tau}{d\bar{D}} d\bar{D} = -\frac{\bar{D}}{\bar{D}^\sigma \bar{v}_\sigma} d\bar{D},$$

teremos uma mudança nos limites de integração,  $-\infty < \tau < \infty \rightarrow 0 < \bar{D} < \infty$ ,<sup>20</sup> e dadas as expressões (3.111), (3.112) e (3.113), podemos reescrever (3.111) da forma:

$$F^{\mu\nu} = \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{D(\tau_R^-)^{[\mu} v(\tau_R^-)^{\nu]}}{D(\tau_R^-)^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha} - 2 \int_0^\infty d\bar{D} \frac{J_2(m\bar{D})}{\bar{D}} \frac{\bar{D}^{[\mu} \bar{v}^{\nu]}}{\bar{D}^\alpha \bar{v}_\alpha} \right]. \quad (3.114)$$

Obtemos então o tensor de Faraday retardado de Podolsky (3.114), também conhe-

<sup>20</sup>Dado o intervalo de integração, nota-se que  $\bar{D}^2 > 0$ , e além disso  $\bar{D}^0 > 0$ . Logo, levando em conta a definição da função de Heaviside que estamos usando, temos que  $\Theta(\bar{D}^0) = \Theta(\bar{D}^2) = 1$ .

cido como tensor eletromagnético retardado ou *field strength*.

E nota-se que, de acordo com a expressão para o tensor de Faraday, teremos contribuições adicionais para a radiação advindas de um intervalo espaço-temporal do tipo tempo. Esta particularidade é uma distinção das duas eletrodinâmicas, pois em Maxwell só é considerada a configuração da partícula no tempo retardado, que por sua vez está associado ao intervalo tipo luz.

Por fim, com a obtenção do tensor eletromagnético retardado de Podolsky, encerramos este capítulo. Portanto, podemos prosseguir para as aplicações dos resultados obtidos aqui em alguns fenômenos radiativos na eletrodinâmica de Podolsky.

# Capítulo 4

## Aplicações da teoria da radiação

Este capítulo tem como objetivo apresentar algumas aplicações do formalismo da teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky. Para isto, será apresentada de forma explícita a obtenção dos campos elétricos gerados por uma carga em três tipos de movimento: repouso, velocidade constante e acelerado. Obtidos os campos, a partir do vetor de Poynting de Podolsky determinaremos a expressão para a potência irradiada por uma partícula. De forma que, em seguida, particularizaremos a análise para uma carga que se movimenta a baixas velocidades, a fim de obter a potência de Larmor-Podolsky.

### 4.1 Partícula carregada em movimento não acelerado

Nesta seção exploraremos dois casos, a saber: uma partícula em repouso e uma partícula que se move com velocidade constante. Mais especificamente, queremos determinar os potenciais da partícula nessas duas situações, e consequentemente os campos elétricos associados a eles. Para isto, podemos proceder de duas formas, calculando diretamente os potenciais através da expressão (3.88) e depois calcular o campo elétrico usando (2.41), ou então obter o campo elétrico diretamente através das expressões (2.40) e (3.114). De forma que, para os dois casos (repouso e velocidade constante) optaremos pela segunda forma. Porém, a fim de fazer uma análise dos potenciais de Lienard-Wiechert-Podolsky e comparar com os obtidos na eletrodinâmica de Maxwell, obteremos os potenciais usando a expressão (3.88) depois de obter os campos elétricos.

### 4.1.1 Partícula em repouso

Considerando a expressão para o tensor de Faraday retardado (3.114), temos que:<sup>1</sup>

$$F^{\mu\nu} = \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{D(\tau_R^-)^{[\mu} v(\tau_R^-)^{\nu]}}{D(\tau_R^-)^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha} - 2 \int_0^\infty dD \frac{J_2(mD)}{D} \frac{D^{[\mu} v^{\nu]}}{D^\alpha v_\alpha} \right]. \quad (4.1)$$

Agora, tal como na eletrodinâmica de Maxwell, a configuração de uma partícula em repouso é a mesma na eletrodinâmica de Podolsky. Logo, temos que:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} r^\nu &= (\tau, 0, 0, 0), \\ v^\nu &= \frac{dr^\nu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0), \\ x^\nu &= (t', x, y, z), \\ x^\nu - r^\nu &\equiv D^\nu = (t' - \tau, \vec{d}), \quad \text{sendo} \quad \vec{d} = (x, y, z). \end{aligned}$$

Sendo o campo elétrico dado por  $E^i \equiv F^{i0}$ , então

$$\begin{aligned} E^i = F^{i0} &= \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{D(\tau_R^-)^{[i} v(\tau_R^-)^{0]}}{D(\tau_R^-)^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha} - 2 \int_0^\infty dD \frac{J_2(mD)}{D} \frac{D^{[i} v^{0]}}{D^\alpha v_\alpha} \right], \\ \implies E^i &= \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{D(\tau_R^-)^{[i} v(\tau_R^-)^{0]}}{D(\tau_R^-)^\alpha v(\tau_R^-)_\alpha} - 2 \int_0^\infty dD \frac{J_2(mD)}{D} \frac{D^{[i} v^{0]}}{D^\alpha v_\alpha} \right]. \quad (4.2) \end{aligned}$$

A fim de calcular o campo, precisamos calcular  $\tau = \tau(D)$ ,  $\tau_R^-$  (que é obtido calculando  $\tau(0)$ ),  $D^\alpha v_\alpha$  e  $D^{[i} v^{0]}$ . Então, dada a configuração coulombiana da

<sup>1</sup>Para não sobrecarregar a notação, podemos fazer a mudança  $\bar{D} \rightarrow D$  e  $\bar{v} \rightarrow v$  sem prejuízos, lembrando que  $\bar{D} \equiv D(\tau)$  e  $\bar{v} \equiv v(\tau)$ .

<sup>2</sup>Para mais detalhes, consulte a referência [3].

partícula, temos que:

$$D^2 = t'^2 - 2t'\tau + \tau^2 - d^2, \\ \implies \tau^-(D) = t' - \sqrt{D^2 + d^2}, \quad (4.3)$$

$$\implies \tau_R^- = t' - d, \quad d \equiv |\vec{d}| \quad (4.4)$$

$$D^\alpha v_\alpha = t' - \tau \implies D^\alpha v_\alpha = \sqrt{D^2 + d^2}, \quad (4.5)$$

$$D^{[i}v^{0]} = \frac{d^i}{2}, \quad (4.6)$$

$$\implies \left. \frac{D^{[i}v^{0]}}{D^\alpha v_\alpha} \right|_{\tau=\tau_R^-} = \frac{d^i}{2d}. \quad (4.7)$$

Substituindo as expressões acima na definição do campo elétrico  $E^i$

$$E^i = \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{d^i}{2d} - \int_0^\infty dD \frac{J_2(mD)}{D} \frac{d^i}{\sqrt{D^2 + d^2}} \right], \quad (4.8)$$

mudando a variável de integração:<sup>3</sup>

$$E^i = \frac{em^2 d^i}{4\pi} \left[ \frac{1}{2d} - m \int_0^\infty d(mD) \frac{J_2(mD)}{mD} \frac{1}{\sqrt{(mD)^2 + (md)^2}} \right] \\ \implies E^i = \frac{em^2 d^i}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2d} - m \left[ \frac{(md)^2 - 2 + 2e^{-md}(1 + md)}{2(md)^3} \right] \right\} \\ \implies E^i = \frac{e}{4\pi} \frac{d^i}{d^3} [1 - e^{-md}(1 + md)] \\ \implies \vec{E}(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{\hat{d}}{d^2} [1 - e^{-md}(1 + md)], \quad \hat{d} \equiv \frac{\vec{d}}{d}. \quad (4.9)$$

Obtemos então o campo elétrico de Podolsky gerado por uma partícula em repouso.

Porém, poderíamos também ter obtido a mesma expressão com a seguinte abordagem: obter os potenciais dados por (3.88) e depois obter o campo elétrico calculando  $\vec{E}(\vec{d}, t') = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$ . Sendo assim, a fim de comparar os potenciais associados à uma partícula em repouso nas duas eletrodinâmicas, Maxwell e

<sup>3</sup>Estamos usando a mesma notação para a carga elétrica ( $e$ ) e para o número de Euler ( $e$ ). Então, quando aparecer a constante  $e$  sem nenhuma potência algébrica ela representará a carga elétrica, e será a função exponencial quando ela aparecer elevada à uma potência algébrica do tipo  $e^x$ . E caso haja ambiguidade ela será esclarecida.

Podolsky, obteremos também os potenciais eletrostáticos de Podolsky. Então, considerando a expressão (3.88) e fazendo a mudança de variável  $\tau \rightarrow D$ , tal como foi feito para o *field strenght* (3.114), podemos reescrever  $A^\nu(x)$  como:

$$\begin{aligned} A^\nu(x) &= \frac{em}{4\pi} \int_0^\infty dD \Theta(D^0) \Theta(D^2) \frac{J_1(mD)}{D^\alpha v_\alpha} v^\nu(D) \\ \implies A^\nu(x) &= \frac{em}{4\pi} \int_0^\infty dD \frac{J_1(mD)}{D^\alpha v_\alpha} v^\nu(D). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Levando em conta a configuração da partícula em repouso, temos que

$$v = 0: \quad A^0(x) \equiv \phi(\vec{d}, t') = \frac{em}{4\pi} \int_0^\infty d(mD) \frac{J_1(mD)}{\sqrt{(mD)^2 + (md)^2}}, \quad (4.11)$$

$$v = i: \quad A^i(x) \equiv \vec{A}(\vec{d}, t') = 0, \quad \text{pois } v^i = 0. \quad (4.12)$$

E calculando  $A^0(x)$ , o potencial eletrostático  $\phi(\vec{d}, t')$  de Podolsky é dado por:

$$\phi(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi d} (1 - e^{-md}). \quad (4.13)$$

Obtido o potencial (4.13) e o campo elétrico (4.9) de Podolsky, podemos tomar o limite de Maxwell nas duas expressões, i.e., fazer  $m \rightarrow \infty$ , então:

$$\phi_M(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi d'}, \quad (4.14)$$

$$\vec{E}_M(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi d'^2} \hat{d}. \quad (4.15)$$

Agora, considerando as equações (4.13) e (4.9), analisaremos os valores dos campos quando  $d = 0$ , ou seja, avaliaremos os valores do potencial e do campo elétrico na partícula. Tomando o limite de  $d \rightarrow 0_+$  das expressões (4.13) e (4.9), respectivamente, temos que:

$$\phi(0, t') = \frac{e}{4\pi} \lim_{d \rightarrow 0_+} \left[ \frac{1 - e^{-md}}{d} \right] = \frac{em}{4\pi}, \quad (4.16)$$

$$\vec{E}(0, t') = \frac{e}{4\pi} \lim_{d \rightarrow 0_+} \left[ \frac{1 - mde^{-md} - e^{-md}}{d^2} \right] \hat{d} = \frac{em^2}{8\pi} \hat{d}. \quad (4.17)$$

Portanto, concluímos que o potencial eletrostático e o campo eletrostático são finitos na partícula, dependendo somente do parâmetro de massa  $m$  da eletrodinâmica de Podolsky. Estes resultados evidenciam um dos aspectos mais importantes

da eletrodinâmica de Podolsky: na partícula, o potencial eletrostático, o campo elétrico e a energia da mesma são finitos no âmbito clássico. E do ponto de vista teórico, este é um importante avanço quando comparado ao eletromagnetismo de Maxwell, que apresenta divergências nos valores dos campos eletrostáticos e da energia de uma partícula em repouso no âmbito clássico. Contudo, é necessário um tratamento experimental para verificar se esses comportamentos são observados. E para mais detalhes sobre a fenomenologia associada à eletrodinâmica de Podolsky, a referência [11] é indicada. Por fim, vale a pena ressaltar que: como estamos lidando com uma partícula em repouso, o campo magnético associado é nulo.

#### 4.1.2 Partícula com velocidade constante

Analogamente à seção anterior, para obter o campo elétrico de uma partícula que se move com velocidade constante, precisamos calcular  $F^{i0} = E^i$  de acordo com a configuração da partícula, dada por:

$$\begin{aligned}
 r^\nu &= (t, \vec{v}t) & t &\equiv \gamma\tau, \\
 v^\nu &= \gamma(1, \vec{v}), & \gamma &= \frac{dt}{d\tau}, & \vec{v} &= (v_x, v_y, v_z) \\
 a^\nu &\equiv \frac{dv^\nu}{d\tau} = (0, \vec{0}), & \vec{0} &\equiv (0, 0, 0) \\
 x^\nu &= (t', \vec{d}), \\
 D^\nu &= (t' - t, \vec{d} - \vec{v}t).
 \end{aligned}$$

Levando em conta esta configuração, precisamos novamente especificar  $\tau(D)$ ,  $\tau_R^-$ ,

$D^\alpha v_\alpha$  e  $D^{[i}v^{0]}$ . Calculando estes termos, temos que:

$$\begin{aligned}
 D^2 &= t'^2 - 2t't + t^2 - d^2 - v^2 t^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{v}t \\
 &= t'^2 - 2t'\gamma\tau + (\gamma\tau)^2 - d^2 - v^2(\gamma\tau)^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{v}\gamma\tau \\
 &= t'^2 - 2\gamma\tau(t' - \vec{d} \cdot \vec{v}) + (\gamma\tau)^2\gamma^{-2} - d^2 \\
 \implies 0 &= \tau^2 - 2\gamma\tau(t' - \vec{d} \cdot \vec{v}) + t'^2 - d^2 - D^2 \\
 \implies \tau^-(D) &= (t' - \vec{d} \cdot \vec{v})\gamma - \sqrt{\gamma^2(t' - \vec{d} \cdot \vec{v})^2 - (t'^2 - d^2 - D^2)} \\
 \implies \tau^-(D) &= (t' - \vec{d} \cdot \vec{v})\gamma - \frac{\sqrt{(mD)^2 + b^2}}{m}, \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

$$\text{sendo } b^2 \equiv m^2(d^2 - t'^2 + \gamma^2(t' - \vec{d} \cdot \vec{v})^2), \tag{4.19}$$

$$\implies \tau_R^-(D=0) = (t' - \vec{d} \cdot \vec{v})\gamma - \sqrt{\gamma^2(t' - \vec{d} \cdot \vec{v})^2 - (t'^2 - d^2)}, \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 D^\alpha v_\alpha &= \gamma(t' - t - \vec{d} \cdot \vec{v} + v^2 t) = \gamma(t' - \vec{d} \cdot \vec{v}) - \gamma\gamma^{-2}t \\
 &= \gamma(t' - \vec{d} \cdot \vec{v}) - \tau^-
 \end{aligned}$$

$$\implies D^\alpha v_\alpha = \frac{\sqrt{(mD)^2 + b^2}}{m}, \tag{4.21}$$

$$D^{[i}v^{0]} = \frac{\gamma}{2}[d^i - v^i t - v^i(t' - t)]$$

$$\implies D^{[i}v^{0]} = \frac{\gamma(d^i - v^i t')}{2}, \tag{4.22}$$

$$\implies \left. \frac{D^{[i}v^{0]}}{D^\alpha v_\alpha} \right|_{\tau=\tau_R^-} = \frac{m\gamma(d^i - v^i t')}{2b}. \tag{4.23}$$

Então, sendo o campo  $E^i$  dado por (4.2), ao substituir as expressões anteriores na sua definição temos que

$$\begin{aligned}
 E^i &= \frac{em^2}{4\pi} \left[ \frac{m\gamma(d^i - v^i t')}{2b} - m\gamma(d^i - v^i t') \int_0^\infty dD \frac{J_2(mD)}{D\sqrt{(mD)^2 + b^2}} \right] \\
 &= \frac{em^3\gamma(d^i - v^i t')}{4\pi} \left[ \frac{1}{2b} - \int_0^\infty d(mD) \frac{J_2(mD)}{mD\sqrt{(mD)^2 + b^2}} \right] \\
 &= \frac{em^3\gamma(d^i - v^i t')}{4\pi} \left[ \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} + \frac{1 - e^{-b}(1+b)}{b^3} \right] \\
 &= \frac{em^3\gamma(d^i - v^i t')}{4\pi} \frac{[1 - e^{-b}(1+b)]}{b^3}, \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

mas, nota-se que podemos reescrever  $b$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 b^2 &= m^2[d^2 - t'^2 + \gamma^2(t' - \vec{d} \cdot \vec{v})^2] \\
 &= m^2\gamma^2[d^2 - t'^2 - v^2d^2 + v^2t'^2 + t'^2 - 2t'\vec{d} \cdot \vec{v} + (\vec{d} \cdot \vec{v})^2] \\
 &= m^2\gamma^2[(\vec{d} - \vec{v}t')^2 - v^2d^2 + (\vec{d} \cdot \vec{v})^2] \\
 &= m^2\gamma^2(\vec{d} - \vec{v}t')^2 \left[ 1 - \frac{(d^2v^2 - (\vec{d} \cdot \vec{v})^2)}{(\vec{d} - \vec{v}t')^2} \right] \\
 \implies b^2 &= m^2\gamma^2|\vec{d} - \vec{v}t'|^2 g^2
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\text{sendo } |\vec{d} - \vec{v}t'|^2 = (\vec{d} - vt')^2 \quad \text{e} \quad g^2 \equiv 1 - \frac{(d^2v^2 - (\vec{d} \cdot \vec{v})^2)}{(\vec{d} - \vec{v}t')^2}, \tag{4.26}$$

portanto, temos que  $E^i$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 E^i &= \frac{e}{4\pi} \frac{(d^i - v^i t')}{(|\vec{d} - \vec{v}t'|g)^3} (1 - v^2) [1 - e^{-m\gamma|\vec{d} - \vec{v}t'|g} (1 + m\gamma|\vec{d} - \vec{v}t'|g)] \\
 \implies \vec{E}(\vec{d}, t') &= \frac{e}{4\pi} \frac{(\vec{d} - \vec{v}t')}{|\vec{d} - \vec{v}t'|^3 g^3} (1 - v^2) [1 - e^{-m\gamma|\vec{d} - \vec{v}t'|g} (1 + m\gamma|\vec{d} - \vec{v}t'|g)].
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Obtido o campo elétrico da partícula, é conveniente obtermos também os potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$  associados ao campo, a fim de fazer uma análise deles posteriormente. Então, usando a expressão (3.88) e levando em conta a configuração de

uma partícula em movimento com velocidade constante, temos que:

$$\begin{aligned}
 A^{\nu}(x) &= \frac{em}{4\pi} \int_0^{\infty} d(mD) \frac{J_1(mD)}{\sqrt{(mD)^2 + b^2}} v^{\nu}(D) \\
 \phi(\vec{d}, t') &= \frac{em\gamma}{4\pi} \int_0^{\infty} d(mD) \frac{J_1(mD)}{\sqrt{(mD)^2 + b^2}} \\
 &= \frac{em\gamma}{4\pi} \frac{(1 - e^{-b})}{b} \\
 \Rightarrow \phi(\vec{d}, t') &= \frac{e}{4\pi} \frac{(1 - e^{-m\gamma|\vec{d} - \vec{v}t'|g})}{|\vec{d} - \vec{v}t'|g} \quad (4.28) \\
 \vec{A}(\vec{d}, t') &= \frac{em\gamma\vec{v}}{4\pi} \int_0^{\infty} d(mD) \frac{J_1(mD)}{\sqrt{(mD)^2 + b^2}} \\
 &= \frac{em\gamma\vec{v}}{4\pi} \frac{(1 - e^{-b})}{b} \\
 \Rightarrow \vec{A}(\vec{d}, t') &= \frac{e\vec{v}}{4\pi} \frac{(1 - e^{-m\gamma|\vec{d} - \vec{v}t'|g})}{|\vec{d} - \vec{v}t'|g}. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

As expressões (4.28) e (4.29) são os potenciais de Lienard-Wiechert-Podolsky de uma partícula com velocidade constante. E assim como foi feito para o caso da partícula em repouso, podemos novamente comparar o campo elétrico (4.27) e os potenciais obtidos na eletrodinâmica de Podolsky (4.28) e (4.29) com os decorrentes da eletrodinâmica de Maxwell. Porém, para isto, é conveniente realizarmos novamente uma mudança de variável, a fim de comparar diretamente com os que são encontrados regularmente na literatura [23].

Neste sentido, nota-se que podemos reescrever a expressão (4.20) e resolvê-la para  $t'$ , ao invés de  $\tau_R$ .<sup>4</sup> Fazendo isso, temos que

$$\begin{aligned}
 \tau_R &= (t' - \vec{d} \cdot \vec{v})\gamma - \sqrt{\gamma^2(t' - \vec{d} \cdot \vec{v})^2 - (t'^2 - d^2)} \\
 \Rightarrow t' &= \gamma\tau_R \pm \gamma\sqrt{\tau_R^2 v^2 + d^2 \gamma^{-2} - 2\gamma^{-1}\tau_R \vec{d} \cdot \vec{v}},
 \end{aligned}$$

como estamos interessados na solução retardada, i.e., que respeita a causalidade entre o tempo atual  $t'$  e o tempo retardado  $\tau_R$ , a solução física da equação acima é dada pelo sinal positivo:

$$t' = \gamma\tau_R + \gamma\sqrt{\tau_R^2 v^2 + d^2 \gamma^{-2} - 2\gamma^{-1}\tau_R \vec{d} \cdot \vec{v}}. \quad (4.30)$$

<sup>4</sup>Para não sobrecarregar a notação, será feita a troca  $\tau_R^- \rightarrow \tau_R$ .

Pela equação acima, ao reconhecer que  $t_R \equiv \gamma\tau_R$  e  $R \equiv |\vec{d} - \vec{v}\gamma\tau_R|$ , temos:

$$\begin{aligned} t' &= t_R + \sqrt{\gamma^2\tau_R^2v^2 + d^2 - 2\gamma\tau_R\vec{d}\cdot\vec{v}} \\ &= t_R + |\vec{d} - \gamma\tau_R\vec{v}| = t_R + |\vec{d} - t_R\vec{v}| \\ \implies t' &= t_R + R. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo a expressão acima para  $t'$  no cálculo do produto  $g^2|\vec{d} - \vec{v}t'|^2$ , em que  $g$  é dado por (4.26), temos

$$\begin{aligned} |\vec{d} - \vec{v}t'|^2g^2 &= (\vec{d} - \vec{v}t')^2 \left[ 1 - \frac{(d^2v^2 - (\vec{d}\cdot\vec{v})^2)}{(\vec{d} - \vec{v}t')^2} \right] \\ &= d^2 + v^2t'^2 - 2t'\vec{d}\cdot\vec{v} - d^2v^2 + (\vec{d}\cdot\vec{v})^2 \\ &= d^2 + v^2(t_R + R)^2 - 2(t_R + R)\vec{d}\cdot\vec{v} - d^2v^2 + (\vec{d}\cdot\vec{v})^2 \\ &= d^2 + v^2(t_R^2 + R^2 + 2t_R R) - 2t_R\vec{d}\cdot\vec{v} - 2R\vec{d}\cdot\vec{v} - d^2v^2 + (\vec{d}\cdot\vec{v})^2 \\ &= (\vec{d} - \vec{v}t_R)^2 - 2R\vec{v}\cdot(\vec{d} - \vec{v}t_R) + R^2v^2 + (\vec{d}\cdot\vec{v})^2 - d^2v^2, \\ &= (\vec{R})^2 - 2R\vec{v}\cdot\vec{R} + R^2v^2 + (\vec{d}\cdot\vec{v})^2 - d^2v^2, \quad \text{sendo} \quad \vec{R} \equiv \vec{d} - \vec{v}t_R, \\ &= R^2(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) + R(Rv^2 - \vec{R}\cdot\vec{v}) + (\vec{d}\cdot\vec{v})^2 - d^2v^2, \end{aligned}$$

em que na última passagem foi usada a condição  $|\vec{R}| = R$ , que é válida no tempo retardado  $t_R$ . Esta condição é válida pois o tempo retardado é aquele em que  $D^2 = 0$ , logo, em  $t_R$  temos que  $D^2 = R^2 - |\vec{R}|^2 = 0 \implies R = |\vec{R}|$ . Agora, reescrevendo  $\vec{d}$  como  $\vec{d} = \vec{R} + \vec{v}t_R$  e substituindo na expressão acima:

$$\begin{aligned} |\vec{d} - \vec{v}t'|^2g^2 &= R^2(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) + R(Rv^2 - \vec{R}\cdot\vec{v}) + (\vec{R}\cdot\vec{v} + v^2t_R)^2 - (\vec{R} + \vec{v}t_R)^2v^2 \\ &= R^2(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) + R(Rv^2 - \vec{R}\cdot\vec{v}) + (\vec{R}\cdot\vec{v})^2 + v^4t_R^2 + 2v^2t_R\vec{R}\cdot\vec{v} \\ &\quad - (R^2v^2 + v^4t_R^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{v}t_Rv^2)v^2 \\ &= R^2(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) + R(Rv^2 - \vec{R}\cdot\vec{v}) + (\vec{R}\cdot\vec{v})^2 - R^2v^2 \\ &= R^2(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) + (\vec{R}\cdot\vec{v})^2 - R(\vec{R}\cdot\vec{v}) \\ &= R^2(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) - R(\vec{R}\cdot\vec{v})(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) \\ &= (1 - \hat{R}\cdot\vec{v})(R^2 - R(\vec{R}\cdot\vec{v})) = R^2(1 - \hat{R}\cdot\vec{v}) \\ \implies |\vec{d} - \vec{v}t'|^2g^2 &= (R - \vec{R}\cdot\vec{v})^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Com as mudanças de variáveis (4.31) e (4.32), podemos representar a configuração da partícula através da figura (4.1), de uma forma familiar ao eletromagnetismo

de Maxwell [18].

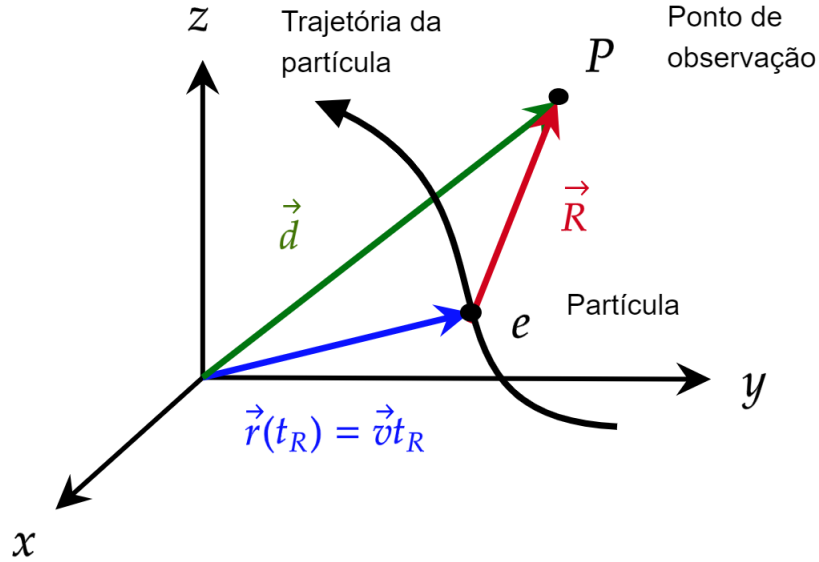


Figura 4.1: Configuração de uma partícula se movendo.

Além disso, dadas as mudanças de variáveis (4.31) e (4.32), podemos agora reescrever os campos (4.27), (4.28) e (4.29), em termos das novas variáveis

$$\vec{E}(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{(\vec{R} - R\vec{v})(1 - v^2)}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} [1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}(1 + m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v}))], \quad (4.33)$$

$$\phi(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad (4.34)$$

$$\vec{A}(\vec{d}, t') = \frac{e\vec{v}}{4\pi} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad (4.35)$$

e comparar com os campos correspondentes na eletrodinâmica de Maxwell. Sendo

assim, da eletrodinâmica de Maxwell temos que

$$\vec{E}(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{(\vec{R} - R\vec{v})(1 - v^2)}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^3}, \quad (4.36)$$

$$\phi(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \quad (4.37)$$

$$\vec{A}(\vec{d}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \quad (4.38)$$

logo, nota-se que, ao tomar o limite em que  $m \rightarrow \infty$  nas expressões (4.33), (4.34) e (4.35), recuperamos os campos maxwellianos. Por fim, vale destacar que obteremos o campo magnético de uma partícula em movimento acelerado na próxima seção, de forma que, para obter o campo magnético de uma partícula com velocidade constante bastará substituir  $\vec{d} = 0$  na expressão a ser obtida.

## 4.2 Partícula em movimento acelerado

Nesta seção, determinaremos quais são os potenciais gerados por uma partícula em um movimento acelerado e o campo elétrico associado a eles. Porém, nesta seção obteremos o campo elétrico diretamente através dos potenciais, ou seja, utilizando a abordagem vetorial. Pois diferentemente do que foi realizado nas seções anteriores, a obtenção do campo elétrico não é tão imediata a partir do tensor de Faraday retardado, dado que a aceleração não aparece explicitamente na expressão do *field strength*.

Primeiramente, consideremos a configuração de uma partícula em movimento acelerado<sup>5</sup>, dada por:

$$r^\nu = (t, \vec{v}t), \quad (4.39)$$

$$v^\nu = \gamma(1, \vec{v}), \quad \gamma = \frac{dt}{d\tau}, \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (4.40)$$

$$a^\nu = \gamma^2(\gamma^2(\vec{a} \cdot \vec{v}), \gamma^2(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v} + \vec{a}), \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (4.41)$$

$$x^\nu = (t', \vec{d}), \quad (4.42)$$

$$D^\nu = (t' - t, \vec{d} - \vec{v}t). \quad (4.43)$$

Considerando esta configuração na expressão geral para o potencial (3.88), e

<sup>5</sup>Como estamos considerando um movimento acelerado genérico, o quadrivetor aceleração assume a forma geral [32]:  $a^\nu = \gamma^2(\gamma^2(\vec{a} \cdot \vec{v}), \gamma^2(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v} + \vec{a})$ .

substituindo a expressão para  $b = m\gamma|\vec{d} - \vec{v}t'|g$  em termos das novas variáveis, dadas por (4.32), temos que:

$$\begin{aligned}
 A^\nu(x) &= \frac{em}{4\pi} \int_0^\infty d(mD) \frac{J_1(mD)}{\sqrt{(mD)^2 + b^2}} v^\nu(D) \\
 \phi(\vec{d}, t') &= \frac{em\gamma}{4\pi} \int_0^\infty d(mD) \frac{J_1(mD)}{\sqrt{(mD)^2 + b^2}} \\
 &= \frac{em\gamma}{4\pi} \frac{(1 - e^{-b})}{b} \\
 \implies \phi(\vec{d}, t') &= \frac{e}{4\pi} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{d}, t') &= \frac{em\gamma\vec{v}}{4\pi} \int_0^\infty d(mD) \frac{J_1(mD)}{\sqrt{(mD)^2 + b^2}} \\
 &= \frac{em\gamma\vec{v}}{4\pi} \frac{(1 - e^{-b})}{b} \\
 \implies \vec{A}(\vec{d}, t') &= \frac{e\vec{v}}{4\pi} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}. \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

Portanto, percebe-se que os potenciais (4.44) e (4.45) gerados por uma partícula em movimento com velocidade constante ou em movimento acelerado são os mesmos, já que a aceleração não aparece explicitamente na expressão (3.88). Contudo, o campo elétrico vai mudar neste caso, pois estamos considerando um movimento acelerado. Logo, levando em conta a definição vetorial do campo elétrico a ser calculado no tempo retardado

$$\vec{E}(\vec{d}, t') = -\vec{\nabla}\phi(\vec{d}, t')|_{t'=t_R} - \frac{\partial\vec{A}(\vec{d}, t')}{\partial t'} \Big|_{t'=t_R}, \quad (4.46)$$

ao tomar as derivadas de (4.44) e (4.45), precisamos tomar cuidado com as derivadas que vão surgir, dada a dependência não trivial entre  $t_R$  e  $R$ , pois  $t' = t_R + R$ .<sup>6</sup>

Antes de derivar as expressões (4.44) e (4.45), consideremos os cálculos das

---

<sup>6</sup>Para mais detalhes sobre essa relação não trivial e os cálculos das derivadas, a referência [23] é indicada.

seguintes derivadas:

$$\vec{\nabla}R = \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad \vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v}) = \frac{v^2 \vec{R} - (\vec{v} \cdot \vec{R}) \vec{v} - (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{R} + R \vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad (4.47)$$

$$\vec{\nabla}(R - \vec{R} \cdot \vec{v}) = \frac{\vec{R} - v^2 \vec{R} + (\vec{v} \cdot \vec{R}) \vec{v} + (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{R} - R \vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad \vec{\nabla}\gamma = -\frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \gamma^3 \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'} = \frac{R \vec{a}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} = -\frac{R \vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}{\partial t'} = \frac{Rv^2 - \vec{R} \cdot \vec{v} - R(\vec{R} \cdot \vec{a})}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t'} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \gamma^3 R}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}. \quad (4.50)$$

Agora, calculando  $\vec{\nabla}\phi(\vec{d}, t')$  e  $\partial_{t'} \vec{A}(\vec{d}, t')$  considerando as derivadas acima, temos que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\phi &= \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{\nabla}(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} + (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \right) \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{me^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} [(R - \vec{R} \cdot \vec{v}) \vec{\nabla}\gamma + \gamma \vec{\nabla}(R - \vec{R} \cdot \vec{v})] \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) \frac{[\vec{R}v^2 - \vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \vec{v}) - \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a}) + R\vec{v}]}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{m\gamma e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} [\vec{R} - \vec{R}v^2 - (R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{R}\gamma^2(\vec{a} \cdot \vec{v}) + \vec{v}) \right. \\ &\quad \left. + \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a})] + (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) \frac{[\vec{R}v^2 - \vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \vec{v}) - \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a}) + R\vec{v}]}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} \right\} \\ \implies \vec{\nabla}\phi &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [\vec{R}(1 - v^2) + \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a}) \right. \\ &\quad \left. - \vec{v}(R - \vec{R} \cdot \vec{v})] - m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v}) e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\vec{R}(1 - v^2) + \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a}) \right. \\ &\quad \left. - (R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{R}\gamma^2(\vec{a} \cdot \vec{v}) + \vec{v})] \right\}, \quad (4.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} &= \frac{e}{4\pi} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) \left[ \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \frac{\partial(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{\partial t'} \right\} \\
&= \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} \left[ R\vec{a} - \vec{v} \frac{\partial(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}{\partial t'} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \frac{\partial(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{\partial t'} \right\} \\
&= -\frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} \left[ \vec{v} \frac{[Rv^2 - \vec{R} \cdot \vec{v} - R(\vec{R} \cdot \vec{a})]}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} - R\vec{a} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} m e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} \frac{\partial[\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})]}{\partial t'} \right\} \\
&= -\frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} \left[ \vec{v} \frac{[Rv^2 - \vec{R} \cdot \vec{v} - R(\vec{R} \cdot \vec{a})]}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} - R\vec{a} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\vec{v} m e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \left[ (R - \vec{R} \cdot \vec{v}) \frac{\partial \gamma}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}{\partial t'} \right] \right\} \\
\Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [\vec{v}(Rv^2 - \vec{R} \cdot \vec{v} - R(\vec{R} \cdot \vec{a})) \right. \\
&\quad \left. - R\vec{a}(R - \vec{R} \cdot \vec{v})] - \vec{v} m \gamma (R - \vec{R} \cdot \vec{v}) e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v}) \gamma^2 R \right. \\
&\quad \left. + Rv^2 - \vec{R} \cdot \vec{v} - (\vec{R} \cdot \vec{a})R] \right\}. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Usando as expressões encontradas para  $\vec{\nabla} \phi(\vec{d}, t')$  e  $\partial_{t'} \vec{A}(\vec{d}, t')$  no cálculo do campo elétrico, fazendo algumas simplificações, e.g.,  $\gamma^{-2} = 1 - v^2$ , e usando a identidade

vetorial  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{d}, t') &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [(Rv^2 - \vec{R} \cdot \vec{v} - (\vec{R} \cdot \vec{a})R)\vec{v} \right. \\
&\quad - \vec{a}R(R - \vec{R} \cdot \vec{v}) + (\vec{R}\gamma^{-2} + \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a}) - \vec{v}(R - \vec{R} \cdot \vec{v}))] \\
&\quad - m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\vec{R}\gamma^{-2} - (R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{R}\gamma^2(\vec{a} \cdot \vec{v}) + \vec{v}) \\
&\quad + \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a}) + \vec{v}(Rv^2 + (R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})\gamma^2R - \vec{R} \cdot \vec{v} - (\vec{R} \cdot \vec{a})R)] \left. \right\} \\
&= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [\vec{R}\gamma^{-2} - R\vec{v}\gamma^{-2} \right. \\
&\quad + (\vec{R} - R\vec{v})(\vec{R} \cdot \vec{a}) - \vec{a}R(R - \vec{R} \cdot \vec{v})] \\
&\quad - m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\vec{R}\gamma^{-2} + Rv^2\vec{v} - R\vec{v} \\
&\quad - \gamma^2(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})(\vec{R} - R\vec{v}) + (\vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{R} - R\vec{v})] \left. \right\} \\
&= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [(\vec{R} - R\vec{v})\gamma^{-2} \right. \\
&\quad + \vec{R} \times ((\vec{R} - R\vec{v}) \times \vec{a})] \\
&\quad - m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\vec{R}\gamma^{-2} - R\vec{v}\gamma^{-2} \\
&\quad - \gamma^2(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})(\vec{R} - R\vec{v}) + (\vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{R} - R\vec{v})] \left. \right\} \\
&= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [(\vec{R} - R\vec{v})\gamma^{-2} \right. \\
&\quad + \vec{R} \times ((\vec{R} - R\vec{v}) \times \vec{a})] - m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{R} - R\vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\gamma^{-2} \\
&\quad - \gamma^2(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v}) + \vec{R} \cdot \vec{a}] \left. \right\} \\
\therefore \vec{E}(\vec{d}, t') &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} \left\{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [(\vec{R} - R\vec{v})(1 - v^2) \right. \\
&\quad + \vec{R} \times ((\vec{R} - R\vec{v}) \times \vec{a})] - m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{R} - R\vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [1 - v^2 \\
&\quad - \gamma^2(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v}) + \vec{R} \cdot \vec{a}] \left. \right\}. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Este é o campo elétrico gerado por uma partícula em movimento acelerado na eletrodinâmica de Podolsky. E desta expressão podemos recuperar tanto o caso de uma partícula com velocidade constante, tomando  $\vec{a} = 0$ , como o caso de uma partícula em repouso, tomando  $\vec{a} = \vec{v} = 0$ . Além disso, procedendo de forma análoga às seções anteriores, podemos verificar que no limite de Maxwell, i.e., quando  $m \rightarrow \infty$ , recuperamos o resultado do eletromagnetismo maxwelliano.

De fato, tomando o limite de Maxwell na expressão (4.53), obtemos o campo

elétrico maxwelliano de uma partícula em movimento acelerado:

$$\begin{aligned}\vec{E}_M(\vec{d}, t') &= \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{d}, t') \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} \{ (1 - v^2)(\vec{R} - R\vec{v}) + \vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{v}) \times \vec{a}] \}. \quad (4.54)\end{aligned}$$

Por fim, vale destacar que podemos dividir o campo elétrico (4.53) em duas partes, no campo de velocidades e no campo de aceleração, analogamente ao que é feito no eletromagnetismo de Maxwell. De fato, fatorando potências de  $R$  da equação (4.53) temos que

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{d}, t') &= \frac{e}{4\pi} \frac{R^2}{R^3(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{v}) \times \vec{a})] \} \\ &\quad - \frac{eR^3}{4\pi} \frac{m\gamma(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})(\hat{R} - \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\hat{R} \cdot \vec{a} - \gamma^2(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})]}{R^3(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &\quad + \frac{e}{4\pi} \frac{R(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})(\hat{R} - \vec{v})(1 - v^2)}{R^3(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &\quad - \frac{e}{4\pi} \frac{mR^2\gamma^{-1}(\hat{R} - \vec{v})(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}}{R^3(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &= \frac{e}{4\pi R} \frac{1}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{v}) \times \vec{a})] \} \\ &\quad - \frac{e}{4\pi} \frac{m\gamma(\hat{R} - \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\hat{R} \cdot \vec{a} - \gamma^2(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})]}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^2} \\ &\quad + \frac{e}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})(\hat{R} - \vec{v})(1 - v^2)}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &\quad - \frac{e}{4\pi R} \frac{m\gamma^{-1}(\hat{R} - \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^2} \\ \implies \vec{E}(\vec{d}, t') &= \vec{E}_a(\vec{d}, t') + \vec{E}_v(\vec{d}, t'), \quad (4.55)\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \vec{E}_v(\vec{d}, t') &\equiv \frac{e}{4\pi R^2} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})(\hat{R} - \vec{v})(1 - v^2)}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &\quad - \frac{e}{4\pi R} \frac{m\gamma^{-1}(\hat{R} - \vec{v})(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_a(\vec{d}, t') &\equiv \frac{e}{4\pi R} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})[\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{v}) \times \vec{a})]}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &\quad - \frac{e}{4\pi} \frac{m\gamma(\hat{R} - \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}[\hat{R} \cdot \vec{a} - \gamma^2(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})]}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^2}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

em que  $\vec{E}_v(\vec{d}, t')$  é o campo de velocidades e  $\vec{E}_a(\vec{d}, t')$  é o campo de aceleração. Contudo, nota-se que a separação dos campos não assume a mesma forma de Maxwell, i.e., o campo de aceleração não decai somente com  $R^{-1}$  e o campo de velocidades não decai somente com  $R^{-2}$ , dado que há duas parcelas com decaimentos distintos em  $R$  para os campos (4.56) e (4.57). Portanto, na eletrodinâmica de Podolsky, temos termos adicionais para cada campo que alteram o seu decaimento.

A partir do potencial vetor  $\vec{A}(\vec{d}, t')$  associado à uma partícula em movimento acelerado (4.45), podemos calcular também o campo magnético  $\vec{B}(\vec{d}, t')$ . Na eletrodinâmica de Podolsky, ele é definido de forma equivalente ao eletromagnetismo maxwelliano, conforme mostrado na equação (2.43). Sendo assim, percebendo que  $\vec{A}(\vec{d}, t') = \vec{v}\phi(\vec{d}, t')$ , usando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v}\phi) = (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{v} + \phi(\vec{\nabla} \times \vec{v}),$$

e calculando o rotacional de  $\vec{v}$  considerando a derivação implícita [23]

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{\vec{a} \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \quad (4.58)$$

dada a definição do campo magnético  $\vec{B}(\vec{d}, t') = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{d}, t')$  temos que:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{d}, t') &= \vec{\nabla} \times (\vec{v}\phi) \\ &= (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{v} + \phi(\vec{\nabla} \times \vec{v}). \end{aligned}$$

Agora, ao substituir as relações (4.44) e (4.58) na expressão acima para o campo magnético, para  $\phi(\vec{d}, t')$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ , respectivamente, após algumas simplificações

temos que:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{d}, t') &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} \{ (1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [(\gamma^{-2} + \vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{v} \times \vec{R}) \\ &+ (R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \times \vec{R})] - m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})} [\gamma^{-2} + \vec{R} \cdot \vec{a} \\ &- \gamma^2(R - \vec{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})](\vec{v} \times \vec{R}) \}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Fatorando potências de  $R$  de forma análoga ao que fizemos para o campo elétrico, também podemos dividir o campo magnético em campos de velocidade e aceleração:

$$\begin{aligned}\vec{B}_v(\vec{d}, t') &\equiv \frac{e}{4\pi R^2} \frac{\gamma^{-2}(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})(\vec{v} \times \hat{R})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &- \frac{e}{4\pi R} \frac{m\gamma^{-1}(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}(\vec{v} \times \hat{R})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_a(\vec{d}, t') &\equiv \frac{e}{4\pi R} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})})[(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \times \hat{R}) + (\vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{v} \times \hat{R})]}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3} \\ &- \frac{e}{4\pi} \frac{m\gamma e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}[\hat{R} \cdot \vec{a} - \gamma^2(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})(\vec{a} \cdot \vec{v})](\vec{v} \times \hat{R})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^2}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

### 4.3 Radiação emitida por uma partícula

Nesta seção determinaremos a energia irradiada por uma partícula em movimento acelerado. Sendo assim, precisaremos do campo elétrico gerado por uma partícula em movimento acelerado, dado pela equação (4.53). Vimos que este campo elétrico pode ser dividido em dois, no campo de velocidades (4.56) e no campo de aceleração (4.57). Esta divisão foi importante pois estaremos interessados somente no campo de aceleração, dado que só este campo contribui para a radiação emitida pela carga em Maxwell [13]. E como trataremos apenas situações nas quais o campo de velocidades é irrelevante, por simplicidade dos nossos propósitos, assumiremos que apenas o campo de aceleração contribuirá para a radiação emitida em Podolsky, da mesma forma que ocorre na teoria de Maxwell. Ao fazer isso, analisaremos a radiação emitida sob a ótica da eletrodinâmica de Podolsky, a fim de fazer uma comparação direta com a de Maxwell. Por fim, como analisaremos somente os casos nos quais o campo de aceleração contribuirá para a radiação emitida, ele também será chamado de campo de radiação.

Contudo, antes de prosseguirmos, vale a pena respondermos a seguinte pergunta: o que é radiação?<sup>7</sup>

- Radiação é a energia que o campo eletromagnético gerado por uma determinada distribuição de cargas aceleradas perde, de forma irreversível, para o infinito.

Tendo em vista esta definição, ao assumirmos que ela se mantém na eletrodinâmica de Podolsky, temos que somente os termos que decaem com  $1/R$  do campo de aceleração apresentarão contribuições não nulas no infinito para a radiação emitida, tal como em Maxwell. Pois somente eles apresentam contribuições não nulas para a potência emitida pela distribuição de cargas a distâncias muito grandes da mesma.<sup>8</sup>

Como queremos calcular a energia irradiada por uma partícula, precisamos calcular o vetor de Poynting e integrá-lo em todo o espaço para determinar a potência emitida, já que o vetor de Poynting representa o fluxo de energia por unidade de área e tempo emitido pela carga. Começamos então determinando as expressões gerais para o vetor de Poynting e para a potência emitida, para depois particularizar para os casos de interesse. Consideremos a expressão (2.105) para o vetor de Poynting da eletrodinâmica de Podolsky lembrando que  $2a = m^{-2}$

$$\begin{aligned}\vec{S}_P &= \vec{E} \times \vec{B} + \frac{1}{m^2} [\vec{E} \times (\square \vec{B}) + (\square \vec{E}) \times \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} (\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B})] \\ \implies \vec{S}_P &= \vec{E} \times \vec{B} + \frac{1}{m^2} [\square (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} (\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B})],\end{aligned}\quad (4.62)$$

em que  $\vec{E}$  é dado por (4.53) e  $\vec{B}$  é o campo magnético (4.59). Porém, conforme as expressões (4.53) e (4.59), podemos verificar que o campo magnético é dado por:

$$\vec{B}(\vec{d}, t') = \hat{R}(t_R) \times \vec{E}(\vec{d}, t').\quad (4.63)$$

<sup>7</sup>Estamos mantendo a definição de radiação usada na literatura referente à eletrodinâmica de Maxwell [17] [23] [37].

<sup>8</sup>Para discussões mais detalhadas sobre os campos de velocidade e aceleração, assim como do porquê somente o campo de aceleração contribui para a radiação emitida no eletromagnetismo de Maxwell, confira a referência [23].

Logo, substituindo a expressão acima em (4.62)<sup>9</sup>

$$\vec{S}_P = \vec{E} \times (\hat{R} \times \vec{E}) + \frac{1}{m^2} \{ \square [\vec{E} \times (\vec{R} \times \vec{E})] + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} [\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times (\hat{R} \times \vec{E})] \}. \quad (4.64)$$

Este é o vetor de Poynting em termos do campo elétrico. Porém, consideraremos que somente uma parte dele contribui para a radiação emitida pela partícula, a parte associada ao campo de aceleração que decai com  $1/R$  na expressão (4.57). Levando isto em consideração, temos um novo campo  $\vec{E}_r(\vec{a}, t')$  que será denominado campo de radiação de Podolsky:

$$\vec{E}_r(\vec{a}, t') \equiv \frac{e}{4\pi R} \frac{(1 - e^{-m\gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v})}) [\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{v}) \times \vec{a})]}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v})^3}. \quad (4.65)$$

Levando em consideração o campo  $\vec{E}_r$ , podemos obter o vetor  $\vec{S}_{Pr}$  associado à radiação:

$$\vec{S}_{Pr} = \vec{E}_r \times (\hat{R} \times \vec{E}_r) + \frac{1}{m^2} \{ \square [\vec{E}_r \times (\vec{R} \times \vec{E}_r)] + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_r) [\partial_t \vec{E}_r - \vec{\nabla} \times (\hat{R} \times \vec{E}_r)] \}. \quad (4.66)$$

Esta é a parcela do vetor de Poynting de Podolsky que contribui para a radiação emitida.

E para calcularmos a potência associada à radiação emitida, consideremos uma superfície esférica que engloba a carga de elemento de área  $dA = R^2 d\Omega$ , em que  $R$  é o raio da esfera e  $\Omega$  o ângulo sólido. Além disso, temos que a potência emitida no tempo retardado é dada por [23]

$$P(t_R) = \frac{dW}{dt_R} = \frac{dW}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t_R} = P(t') \frac{\partial t'}{\partial t_R}, \quad (4.67)$$

em que  $W$  é o trabalho necessário para manter a partícula em uma determinada configuração. Aqui novamente temos que levar em conta a relação não trivial entre o tempo atual ( $t'$ ) e o tempo retardado ( $t_R$ ) para calcular  $\partial t' / \partial t_R$ . Sendo

<sup>9</sup>Para não sobrecarregar a notação, omitiremos na expressão do vetor de Poynting que a derivada  $\partial_t \vec{E}$  é com relação a  $t'$ , ou seja, na notação que usamos até então seria  $\partial_{t'} \vec{E}$ , mas omitiremos "".

assim, considerando que  $R = t' - t_R$  e que  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t_R$ , então

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{\partial \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}}{\partial t'} = \frac{\vec{R} \cdot \partial \vec{R}}{R \partial t'} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v} \partial t_R}{R \partial t'} \implies \frac{\partial R}{\partial t'} = -(\hat{R} \cdot \vec{v}) \frac{\partial t_R}{\partial t'},$$

por outro lado  $\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{\partial(t' - t_R)}{\partial t'} = 1 - \frac{\partial t_R}{\partial t'} \implies \frac{\partial R}{\partial t'} = 1 - \frac{\partial t_R}{\partial t'}$ ,

igualando as duas expressões anteriores:

$$1 - \frac{\partial t_R}{\partial t'} = -(\hat{R} \cdot \vec{v}) \frac{\partial t_R}{\partial t'} \implies \frac{\partial t_R}{\partial t'} = \frac{1}{1 - \vec{v} \cdot \hat{R}} \implies \frac{\partial t'}{\partial t_R} = 1 - \vec{v} \cdot \hat{R}. \quad (4.68)$$

Substituindo (4.68) em (4.67):

$$P(t_R) = P(t')(1 - \vec{v} \cdot \hat{R}). \quad (4.69)$$

Agora, sabendo que a potência emitida pela partícula através de um elemento de área infinitesimal  $dA$  no tempo  $t'$  é dada por

$$\frac{dP(t')}{dA} = \vec{S}_{Pr} \cdot \hat{R}, \quad (4.70)$$

e ao considerar que  $dA = R^2 d\Omega$ , temos que:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = (\vec{S}_{Pr} \cdot \hat{R}) R^2. \quad (4.71)$$

E considerando a equação (4.69), ao derivá-la com relação ao ângulo sólido temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t_R)}{d\Omega} &= \frac{dP(t')}{d\Omega} (1 - \vec{v} \cdot \hat{R}) \\ \implies \frac{dP(t_R)}{d\Omega} &= (\vec{S}_{Pr} \cdot \hat{R}) R^2 (1 - \vec{v} \cdot \hat{R}). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Então, nota-se que a potência na qual estamos interessados é a potência emitida no tempo retardado  $t_R$ . Sendo assim, para determinar a potência irradiada em algum caso de interesse físico, basta integrar a equação anterior na superfície esférica  $S$  com ângulo sólido  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ , da forma:

$$P = \oint_S d\Omega R^2 (\vec{S}_{Pr} \cdot \hat{R}) (1 - \vec{v} \cdot \hat{R}). \quad (4.73)$$

Obtida a expressão da potência irradiada por uma partícula, podemos particularizar agora para alguma situação de interesse físico.

### 4.3.1 Radiação em baixas velocidades

Para descrever a radiação emitida por uma partícula em baixas velocidades, inicialmente precisamos caracterizar o limite de baixas velocidades. Tal limite é aquele em que  $v \ll c$ , i.e., a velocidade da partícula é muito menor que a velocidade da luz, ou equivalentemente  $v/c \rightarrow 0$ .<sup>10</sup> Considerando este limite ( $\vec{v} \rightarrow 0$ ) na expressão para o campo de radiação (4.65), lembrando que  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t_R \implies \vec{R} = \vec{r}$ , pois  $\vec{v} \rightarrow 0$ , e usando a identidade vetorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \quad (4.74)$$

temos que o campo  $\vec{E}_{r1}$  em baixas velocidades é dado por:

$$\vec{E}_{r1}(\vec{r}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) [(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}]}{r}. \quad (4.75)$$

Considerando a expressão para o campo  $\vec{E}_{r1}$  e o limite de baixas velocidades, temos que calcular o vetor de Poynting associado ao campo para determinar a potência emitida. Sendo assim, substituindo (4.75) em (4.66), considerando que  $\vec{v} \rightarrow 0$ , constatando que  $\vec{E}_{r1} \cdot \hat{r} = 0$  e usando a identidade (4.74), temos que:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{Pr1} &= \vec{E}_{r1}^2 \hat{r} + \frac{1}{m^2} \{ \square(\vec{E}_{r1}^2 \hat{r}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{r1}) [\partial_t \vec{E}_{r1} - \vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1})] \} \\ \implies \vec{S}_{Pr1} &= \vec{E}_{r1}^2 \hat{r} + \frac{1}{m^2} \{ 2(\vec{E}_{r1} \cdot \square \vec{E}_{r1}) \hat{r} + \vec{E}_{r1}^2 (\square \hat{r}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{r1}) [\partial_t \vec{E}_{r1} \\ &\quad - \vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1})] \}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Portanto, vemos que precisamos calcular as seguintes quantidades:  $\partial_t \vec{E}_{r1}$ ,  $\vec{E}_{r1}^2$ ,  $\square \hat{r}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{r1}$ ,  $\vec{E}_{r1} \cdot \square \vec{E}_{r1}$  e  $\vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1})$ .<sup>11</sup> Realizados estes cálculos, podemos substituir as expressões (E.9), (E.10), (E.11), (E.13), (E.15) e (E.16) na expressão acima para

<sup>10</sup>Vale lembrar que estamos usando o sistema de unidades em que  $c = 1$ , então a constante  $c$  não aparece ao longo dos cálculos.

<sup>11</sup>Os cálculos referentes a esta parte podem ser encontrados no apêndice E

$\vec{S}_{Pr1}$ . Após isto, podemos calcular o produto escalar  $\vec{S}_{Pr1} \cdot \hat{r}$ , obtendo:

$$\vec{S}_{Pr1} \cdot \hat{r} = \left( \frac{ea}{2\pi} \right)^2 \left\{ \frac{\sin^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{4r^2} + \frac{1}{m^2 r^2} \left[ \frac{\sin^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{2r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \frac{2(1 - e^{-mr})}{r^2} + m^2 e^{-mr} \right) (1 - e^{-mr}) - \frac{\cos^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{r^2} \right] \right\}.$$

Substituindo a expressão acima na equação da potência emitida por uma partícula (4.73), e lembrando que  $\vec{v} \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} P_{r1} &= \oint_S d\Omega r^2 (\vec{S}_{Pr} \cdot \hat{r}) \\ &= \left( \frac{ea}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin \theta \left\{ \frac{\sin^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{4r^2} + \frac{1}{m^2 r^2} \left[ \frac{\sin^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{2r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \frac{2(1 - e^{-mr})}{r^2} + m^2 e^{-mr} \right) (1 - e^{-mr}) - \frac{\cos^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{r^2} \right] \right\} \\ &= \frac{e^2 a^2}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \left\{ \frac{\sin^3 \theta (1 - e^{-mr})^2}{4} + \frac{\sin \theta}{m^2} \left[ \frac{\sin^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{2r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \frac{2(1 - e^{-mr})}{r^2} + m^2 e^{-mr} \right) (1 - e^{-mr}) - \frac{\cos^2 \theta (1 - e^{-mr})^2}{r^2} \right] \right\} \\ \implies P_{r1} &= \frac{e^2 a^2}{6\pi} \left( 1 - e^{-2mr} + \frac{4}{m^2 r^2} + \frac{4e^{-2mr}}{m^2 r^2} - \frac{8e^{-mr}}{m^2 r^2} \right). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Esta é a expressão para a potência emitida por uma partícula em baixas velocidades na eletrodinâmica de Podolsky, ou então, potência de Larmor-Podolsky. De forma que, a potência calculada é a que apresenta as correções de Podolsky ao campo de aceleração a uma distância finita da carga. É importante enfatizar este ponto, pois, do eletromagnetismo de Maxwell, temos que a radiação é a energia que sobrevive no limite em que  $r \rightarrow \infty$  [37], ou seja, a uma distância muito grande da carga. Sendo assim, se tomarmos o limite de  $r \rightarrow \infty$  na expressão (4.77) recuperamos a potência de Larmor, ou seja, neste limite não temos contribuições da eletrodinâmica de Podolsky. De forma semelhante, se tomarmos o limite que

$m \rightarrow \infty$ , nota-se que  $P_{r1}$  também recai na potência de Larmor ( $P_L$ ):

$$P_L = \frac{e^2 a^2}{6\pi}. \quad (4.78)$$

Além de analisar os limites  $m \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow \infty$ , estenderemos o comparativo das potências (4.78) e (4.77) fazendo um gráfico superposto das duas expressões, a fim de verificar os seus comportamentos. Sendo assim, considerando o limite inferior da eletrodinâmica de Podolsky discutido na seção 3.5,  $m > 37,595$  GeV, construiremos os gráficos  $r \times P_{r1} / (e^2 a^2)$  e  $r \times P_L / (e^2 a^2)$  para valores de  $m$  neste limite. Portanto, dadas as equações (4.78) e (4.77), ao renomear  $P_{r1} \rightarrow P_{LP}$  temos:

$$P_{LP} = \frac{e^2 a^2}{6\pi} \left( 1 - e^{-2mr} + \frac{4}{m^2 r^2} + \frac{4e^{-2mr}}{m^2 r^2} - \frac{8e^{-mr}}{m^2 r^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{P_{LP}}{e^2 a^2} \equiv \mathcal{P}_{LP}(r) = \frac{1}{6\pi} \left( 1 - e^{-2mr} + \frac{4}{m^2 r^2} + \frac{4e^{-2mr}}{m^2 r^2} - \frac{8e^{-mr}}{m^2 r^2} \right), \quad (4.79)$$

$$P_L = \frac{e^2 a^2}{6\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{P_L}{e^2 a^2} \equiv \mathcal{P}_L(r) = \frac{1}{6\pi}. \quad (4.80)$$

Redefinimos as potências dessas formas, pois, estamos interessados somente no comportamento qualitativo delas em função de  $r$ , ou seja, em função da distância radial à carga. Agora, considerando  $m = 38$  GeV como exemplo, podemos construir o gráfico (4.2).

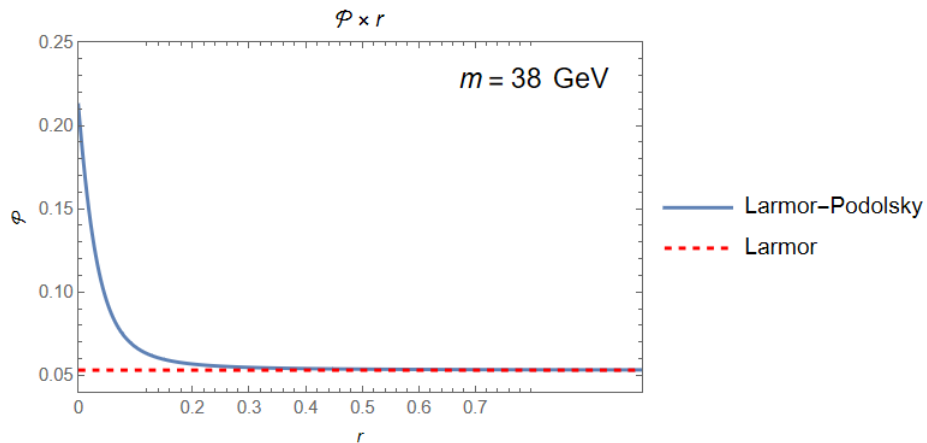


Figura 4.2: Gráficos das potências de Larmor  $\mathcal{P}_L$  e de Larmor-Podolsky  $\mathcal{P}_{LP}$  para  $m = 38$  GeV.

Portanto, a partir da figura (4.2), nota-se que as duas eletrodinâmicas preveem um comportamento muito distinto para a potência a uma distância muito próxima da carga. Portanto, vemos que a eletrodinâmica de Podolsky prevê que a potência apresenta um decaimento “exponencial” próximo à carga, ou seja, não é a mesma que a de Maxwell. Sendo assim, de acordo com a eletrodinâmica de Podolsky, a uma distância muito próxima da carga devemos medir uma potência maior do que a prevista por Maxwell, até que a partir de uma determinada distância os valores medidos da potência devem coincidir. Além disso, vale enfatizar que se o valor de  $m$  fosse maior, ou seja, a escala de energia fosse maior, a potência de Larmor-Podolsky se aproximaria ainda mais da de Larmor. E para verificar isto, podemos construir um gráfico semelhante ao anterior, mas desta vez considerando  $m = 100 \text{ GeV}$ .

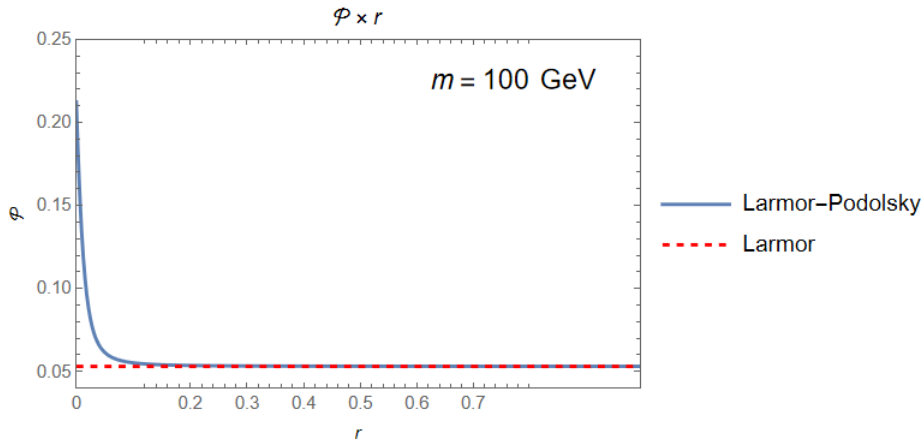


Figura 4.3: Gráficos das potências de Larmor  $\mathcal{P}_L$  e de Larmor-Podolsky  $\mathcal{P}_{LP}$  para  $m = 100 \text{ GeV}$ .

Logo, percebemos pela figura (4.3) que o limite de Maxwell ( $m \rightarrow \infty$ ) se mantém. Por fim, um outro limite interessante de se calcular é o limite de  $r \rightarrow 0_+$  da expressão (4.79), a fim de determinar o ponto de interseção dos gráficos (4.2) e (4.3) com o eixo das ordenadas. Fazendo isso, temos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0_+} \left[ \frac{1}{6\pi} \left( 1 - e^{-2mr} + \frac{4}{m^2 r^2} + \frac{4e^{-2mr}}{m^2 r^2} - \frac{8e^{-mr}}{m^2 r^2} \right) \right] = \frac{2}{3\pi}. \quad (4.81)$$

Sendo assim, dado o valor de  $1/6\pi$  para a potência de Larmor, temos que a potência de Larmor-Podolsky é 4 vezes maior do que ela no limite que  $r \rightarrow 0_+$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste capítulo, apresentaremos as conclusões referentes aos capítulos anteriores e perspectivas futuras relacionadas ao trabalho desenvolvido nesta dissertação.

### 5.1 Conclusões e resumos dos resultados obtidos

No capítulo 2 foram desenvolvidos os aspectos do formalismo lagrangiano de uma teoria de campos de 2ª ordem necessários para o objetivo desta dissertação, que consiste em realizar um estudo de aplicações da teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky. Contudo, antes de adentrar no formalismo lagrangiano de uma teoria de campos de 2ª ordem, foi realizada uma breve introdução sobre o formalismo lagrangiano de uma teoria de campos de 1ª ordem, com o seguinte objetivo: fazer uma introdução mais didática ao tema para quem não tenha tanta familiaridade com o formalismo lagrangiano de uma teoria de campos.

Verificou-se também que há muitas semelhanças, e poucas diferenças, entre uma teorias de campos com derivadas de 1ª ordem nos campos e uma com derivadas de 2ª ordem nos campos. De fato, se compararmos as equações de Euler-Lagrange associadas a cada uma, (2.19) e (2.29), vemos que a última difere da primeira apenas pelo termo que envolve a derivada parcial da lagrangiana com respeito às derivadas de 2ª ordem dos campos. Portanto, há semelhanças na obtenção delas, e.g., para o caso de 2ª ordem a ação é extremizada considerando transformações a ponto fixo. Contudo, também há diferenças importantes no raciocínio usado para obtenção das equações de Euler-Lagrange de 2ª ordem, por exemplo, além de considerar que a variação dos campos na fronteira da hipersuperfície é nula, também consideramos que a variação da velocidade generalizada é nula na fronteira.

Após a obtenção das equações de Euler-Lagrange de 2ª ordem, e usando a lagrangiana da eletrodinâmica de Podolsky, foi possível obter as equações de movimento da teoria, (2.38) e (2.39). Dessa forma, vimos que, de fato, a partir das

equações de Podolsky podemos recuperar as equações de Maxwell tomando o limite apropriado, em que  $a \rightarrow 0_+$  (ou  $m \rightarrow \infty$ ).

Outros aspectos importantes de uma teoria de campos de 2ª ordem também foram estudados, como a conservação da carga e invariância de *gauge*. Vimos que, de forma análoga ao que é feito para uma teoria de campos de 1ª ordem, partindo da equação de movimento (2.38) é possível obter a conservação da quadricorrente e, conseqüentemente, a da carga. Já no que diz respeito à invariância por transformações de *gauge*, como o tensor de Faraday ( $F^{\mu\nu}$ ) é invariante por esta transformação, e conseqüentemente a ação de Podolsky, vimos que também é possível chegar à conservação da carga dessa forma.

A fim de entender aspectos fundamentais de uma teoria de campos com derivadas de segunda ordem, também foi realizado um estudo do teorema de Noether para essa teoria. Porém, como há mais de um teorema de Noether [1] [2], nos restringimos ao uso do primeiro teorema de Noether. E sendo assim, foi importante compreender alguns conceitos fundamentais associados ao teorema, como o conceito de simetrias e grupos. No que diz respeito às simetrias, usamos o conceito geral de que as simetrias de um sistema são transformações de um determinado grupo que deixam a ação invariante. E para contextualizar mais o tema, foi apresentada uma breve introdução sobre teoria de grupos, que contém a definição de grupo e das representações de um grupo. Dessa forma, vimos como os elementos de um grupo podem estar associados às transformações de simetria, que por sua vez deixam a ação de Podolsky invariante e, conseqüentemente, levam a quantidades conservadas. Sendo assim, chegamos à equação que representa o teorema de Noether para uma teoria de campos de 2ª ordem (2.77), que por sua vez permitiu concluir que para cada gerador  $T_a$  de um grupo teremos uma carga conservada.

Além disso, depois do estudo realizado sobre teoria de grupos e o teorema de Noether, foi apresentado o grupo de Poincaré, um grupo que está relacionado a diversas simetrias fundamentais da natureza. Vimos que uma transformação de Poincaré genérica, composta por *boosts* e rotações, assume a forma (2.83). E neste sentido, mostramos como os parâmetros  $b_\mu$  e  $\omega_{\mu\nu}$  da transformação restringem o número de parâmetros independentes do grupo de Poincaré para 10, que por sua vez estão associados aos 10 geradores do grupo. Por fim, um outro resultado importante destacado foi a álgebra que caracteriza o grupo de Poincaré, condensada nas equações (2.88), (2.89) e (2.90).

Considerando o estudo feito sobre o grupo de Poincaré e as transformações

de simetria, a partir da quadridensidade de corrente, vimos que a simetria de translação espaço-temporal dá origem ao tensor energia-momento canônico de uma teoria de campos de 2ª ordem. Este tensor por sua vez leva ao tensor de energia-momento da eletrodinâmica de Podolsky. Porém, após esse raciocínio, nota-se que o tensor obtido não é simétrico. E diferentemente de uma teoria de campos de 1ª ordem, em que podemos realizar o processo de Belinfante para simetrizar o tensor, para uma teoria de 2ª ordem esse processo talvez não seja possível, e caso seja é de difícil aplicação, conforme indicado na referência [1]. Logo, a simetrização do tensor foi realizada seguindo a abordagem descrita no apêndice C. Portanto, a partir da expressão para o tensor de energia-momento simétrico (2.99) da eletrodinâmica de Podolsky, foi possível concluir que o mesmo é diferente do de Maxwell e possui uma estrutura mais complexa, sendo esta diferença proporcional ao parâmetro de Podolsky. Por fim, conhecendo a forma desse tensor foi possível obter quantidades relevantes da teoria de forma análoga ao que é feito em Maxwell, como o quadrimomento  $P^\nu$ , o vetor de Poynting  $\vec{S}_P$  e a densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}$ .

Por último, o capítulo se encerra com a obtenção do tensor momento angular total (orbital + *spin*) da eletrodinâmica de Podolsky, e para obtê-lo, utilizamos um raciocínio análogo ao caso do tensor de energia-momento. Considerando a simetria de rotações do grupo de Poincaré, vimos que, pelo teorema de Noether, o tensor momento angular total (2.6.4) de uma teoria de 2ª ordem é conservado, assim como o tensor de energia-momento simétrico (2.99). Além disso, foi possível separar o tensor momento angular total em duas partes, no orbital e de *spin*. Fazendo isso, foi possível obter os tensores genéricos de momento angular de uma teoria de campos de 2ª ordem. De forma que, ao considerar o campo de Podolsky  $A_\mu(x)$ , foi possível obter os tensores de momento angular orbital e de *spin*, (2.133) e (2.137), respectivamente. E ao fazer isso, concluímos que os mesmos recaem nos tensores equivalentes da eletrodinâmica de Maxwell quando tomamos o limite da teoria, i.e.,  $a \rightarrow 0_+$  ou  $m \rightarrow \infty$ .

No capítulo 3, a partir da análise das equações de movimento (2.38), foi possível obter a equação de onda generalizada associada ao potencial  $A^\nu(x)$ . Este passo foi importante, pois, a partir dele, vimos que o *gauge* correto da eletrodinâmica de Podolsky não é o *gauge* de Lorenz usual,  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . O *gauge* correto da eletrodinâmica de Podolsky é o *gauge* de Lorenz generalizado, conforme mostrado em [15]. De forma que, foram apresentadas ao longo da discussão as condições fundamentais que ele deve satisfazer, mostrando o porquê ele é o *gauge* correto e

o de Lorenz não. Dada a condição de *gauge* correta, vimos que é possível usá-la para obter a função de Green da eletrodinâmica de Podolsky.

E a partir da invariância do potencial  $A^\mu$  por uma transformação de *gauge*, foi possível obter a função de Green de Podolsky associada ao potencial, que consiste na diferença entre a função de Green de Maxwell e a de Klein-Gordon-Fock (KGF). Porém, antes de obter as funções de Green, foi realizada uma breve introdução ao formalismo delas, com o intuito de facilitar a compreensão dos raciocínios desenvolvidos posteriormente. Após isto, foi possível obter a forma geral da função de Green de Podolsky, que conforme mencionado anteriormente, consiste na diferença entre duas, a de Maxwell e KGF. Sendo assim, a função de Green adicional que aparece, a de KGF, é exclusiva da eletrodinâmica de Podolsky, no sentido que, ao tomarmos o limite da teoria, teríamos somente a função de Green de Maxwell.

Além disso, em virtude da causalidade da teoria, foi realizada uma análise causal da função de Green de Podolsky, a fim de determinar as funções de Green retardada e avançada, para posteriormente obter os potenciais retardados e avançados, sendo os retardados aqueles de interesse físico. A partir dessa análise, demos continuidade a obtenção dos potenciais. Para tal, as funções de Green de Maxwell e de KGF foram calculadas através do método dos resíduos, em que os cálculos foram explicitados nos dois casos.

Através da função de Green de Podolsky, foi possível obter o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky retardado. Além disso, verificamos que, no limite da teoria, podemos recuperar a função de Green de Maxwell a partir da função de Green de Podolsky, de modo que, para mostrar que isto é possível, foi usada a representação para a função delta de Dirac proposta em [14]. Tendo verificado o limite da teoria e obtido o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky (3.69), vimos que é necessária a especificação da configuração da partícula para determinar explicitamente o potencial, i.e., especificar a quadriposição e a quadrivelocidade.

Em seguida, a fim de caracterizar melhor a eletrodinâmica de Podolsky, foi realizada uma análise do parâmetro de Podolsky  $a$ , o parâmetro fundamental da teoria. A partir desta análise, fizemos uma redefinição do parâmetro  $a$ ,  $a \rightarrow a = 1/(2m^2)$ , e vimos que o novo parâmetro de Podolsky  $m$  tem dimensão de massa, ou inverso de comprimento. Portanto, vimos que o parâmetro de Podolsky está associado à escala de comprimento (ou escala de energia) da teoria. E por resultados já obtidos na literatura [10], concluímos que a eletrodinâmica de Podolsky é uma teoria de altas energias, pois dado o limite inferior de  $m$ ,

$m > 37,595$  GeV, constatamos que para uma escala de energia menor ou igual a esta não é possível verificar experimentalmente a teoria de Podolsky.

Por último, tendo determinado o potencial de Lienard-Wiechert-Podolsky, e com o objetivo de explorar alguns aspectos do campo de radiação, calculamos o tensor de Faraday retardado para uma carga em movimento. Partindo da expressão para o potencial (3.69), foi possível derivá-lo para calcular o tensor  $F^{\mu\nu}$ . E a partir da expressão final para o tensor de Faraday retardado (3.114), concluímos que temos contribuições adicionais para a radiação emitida na eletrodinâmica de Podolsky, que são advindas de um intervalo tipo tempo. E essas contribuições não são levadas em conta no eletromagnetismo usual, já que nele só levamos em consideração a configuração da partícula no tempo retardado, i.e., quando o intervalo espaço-temporal é do tipo luz.

Com o objetivo de dar continuidade ao estudo da radiação, no capítulo 4 foi dado um foco nas aplicações dos resultados obtidos no capítulo 3. Mais especificamente, no capítulo 4 buscamos determinar os campos elétricos gerados por partículas carregadas a partir da expressão para o *field strength* (3.114), e os potenciais a partir da equação (3.88). Nesse sentido, determinamos os campos elétricos e os potenciais gerados por uma partícula carregada em três situações: repouso, velocidade constante e movimento acelerado.

Ao fazer isso, para o caso de uma partícula em repouso, vimos que o potencial e o campo são finitos quando calculados na carga, já em nível clássico. E este resultado é uma grande distinção entre a eletrodinâmica de Podolsky e a de Maxwell, dado que a última apresenta divergências para o cálculo dos campos na partícula.

Agora, para o caso de uma partícula em movimento uniforme, prosseguindo de forma análoga ao repouso, também foi possível determinar o campo elétrico calculando  $E^i = F^{i0}$ , e os potenciais  $\phi(\vec{d}, t')$  e  $\vec{A}(\vec{d}, t')$ . Contudo, a fim de fazer uma comparação direta com as expressões equivalentes do campo e dos potenciais no eletromagnetismo usual, foi necessário realizar uma mudança de variáveis na expressão final. E essa mudança foi feita de forma a tornar explícita a dependência dos resultados com o tempo retardado e a posição retardada.

Por último, para o caso de uma partícula em movimento acelerado, não foi possível seguir a mesma abordagem dos dois casos anteriores para obter o campo elétrico. Isto ocorreu devido ao fato da expressão para o *field strength* (3.114) não envolver a aceleração explicitamente, ou seja, a dependência é implícita. Sendo assim, utilizamos a abordagem vetorial para obter o campo elétrico. Dessa forma,

calculamos primeiramente os potenciais  $\phi(\vec{d}, t')$  e  $\vec{A}(\vec{d}, t')$ , que coincidem com os de uma partícula em movimento uniforme, e a partir deles tomamos as suas derivadas para chegar à expressão final do campo elétrico, levando em conta o movimento acelerado da partícula. Ao fazer isso, concluímos que é possível separar o campo elétrico obtido em campos de aceleração e velocidade. Porém, diferentemente dos campos equivalentes no eletromagnetismo usual, vimos que temos a presença de termos adicionais nas expressões dos campos que decaem de forma diferente na eletrodinâmica de Podolsky. Por fim, tomando o limite da teoria,  $m \rightarrow \infty$ , também vimos que todos os campos elétricos da eletrodinâmica de Podolsky recaem nos seus equivalentes da eletrodinâmica de Maxwell.

Com o objetivo de determinar a radiação emitida por uma partícula, construímos a expressão para a potência emitida por uma partícula a partir do vetor de Poynting e do campo de radiação. Após isto, particularizamos a nossa análise para um fenômeno radiativo, a radiação emitida por uma partícula em baixas velocidades. Dessa forma, dadas as expressões obtidas anteriormente para a potência e para o vetor de Poynting em termos do campo elétrico, conseguimos determinar a potência de Larmor-Podolsky a partir da especificação do campo de radiação associado a este caso, dado por (4.75). Ao fazer isso, concluímos que as potências previstas pelas duas eletrodinâmicas apresentam comportamentos distintos. De acordo com a eletrodinâmica de Podolsky, temos que a potência emitida é maior do que a prevista por Maxwell para uma distância muito próxima à carga, conforme mostrado nos gráficos (4.2) e (4.3), e a partir de uma certa distância da carga, as potências passam a coincidir. Além disso, a partir dos gráficos, conseguimos concluir também que à medida que  $m$  aumenta aproximamo-nos progressivamente do limite de Maxwell.

## 5.2 Perspectivas futuras

A partir do trabalho desenvolvido nesta dissertação, e das conclusões apresentadas, é natural pensar em possíveis extensões do tema abordado. Sendo assim, nesta seção serão apresentadas algumas perspectivas futuras para este trabalho que poderiam ser investigadas.

Ao longo do capítulo 2, tratamos a eletrodinâmica de Podolsky sem considerar meios materiais, ou seja, levamos em conta apenas os campos produzidos por fontes extrínsecas aos meios materiais. Contudo, da eletrodinâmica de Maxwell, sabemos que as equações de campo em meios materiais desempenham um papel

fundamental na descrição correta de diversos fenômenos físicos que envolvem campos produzidos por fontes intrínsecas a esses meios, e.g., na polarização e magnetização dos materiais. Portanto, uma perspectiva de ampliação ao que foi feito neste trabalho seria estender o formalismo desenvolvido no capítulo 2 para os meios materiais, a fim de saber como as equações de Podolsky seriam modificadas; dentre outras quantidades de interesse físico, temos o vetor de Poynting por exemplo.

Com relação ao capítulo 3, alguns tópicos não foram analisados por fugirem do escopo proposto. Contudo, a compreensão deles seria de grande importância para enriquecer o entendimento da teoria da radiação na eletrodinâmica de Podolsky. Dentre esses tópicos, destacamos os seguintes:

- Análise de propriedades do tensor de Faraday retardado (3.114), e.g., verificar se as relações  $F^{\mu\nu}F^{\sigma\rho}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = 0$  e  $F^{\mu\nu}D^\sigma\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = 0$  são mantidas em Podolsky<sup>1</sup>, tal como é em Maxwell, e as suas implicações físicas.
- Obter uma expressão para o tensor de Faraday retardado em que a dependência com a aceleração esteja explícita. Ao realizar isso, talvez seja possível reescrever o tensor energia-momento em termos da parte do tensor de Faraday retardado associada à aceleração, tal como é feito em Maxwell. Logo, caso a eletrodinâmica de Podolsky admita tal equação no caso geral, isto possivelmente permitiria construir uma expressão covariante para a energia irradiada por uma partícula.

Sobre o capítulo 4, há vários tópicos possíveis de serem investigados que dão continuidade ao trabalho desenvolvido e que não foram contemplados no capítulo. Dentre eles, destacam-se:

- Obter uma expressão geral para a potência emitida por uma partícula em um movimento arbitrário, caso seja possível.
- Fazer uma análise da distribuição angular da radiação emitida por uma carga em diferentes movimentos, e.g., movimento circular, velocidade e aceleração colineares, movimento circular instantâneo, movimento extremamente relativístico, etc.

---

<sup>1</sup>Na eletrodinâmica de Maxwell, essas relações dizem respeito à ortogonalidade entre os campos elétricos e magnéticos no tempo retardado, e à ortogonalidade entre o campo magnético e o vetor radial que origina-se na partícula no tempo retardado, respectivamente.

- Investigar como se dá o processo da expansão multipolar da radiação na eletrodinâmica de Podolsky.

Considerando o trabalho desenvolvido nesta dissertação e as perspectivas sugeridas, vemos que há muitos aspectos da eletrodinâmica de Podolsky a serem investigados. E tratando-se de uma teoria que tem a possibilidade de suplementar o eletromagnetismo de Maxwell, ou seja, explicar tudo que Maxwell explica e prever física nova, mais especificamente no limite de altas energias, é fundamental a investigação experimental dos fenômenos que já foram analisados na literatura referente à eletrodinâmica de Podolsky. Neste sentido, uma última perspectiva futura seria a proposição de experimentos que possam investigar os comportamentos previstos pela teoria, como foi realizado em [11] por exemplo.

# Apêndice A

## Notação e definições

### A.1 Sistema de unidades

O sistema de unidades utilizado ao longo desta dissertação foi o **Sistema Natural de Unidades**, em especial o que temos  $c = \hbar = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ . Mas, por que usar esse sistema? O sistema natural de unidades é muito útil no contexto de Teoria de Campos em geral e na Física Teórica, principalmente pelo seu apelo computacional, ou seja, é mais fácil realizar cálculos nesse sistema. De modo que não há perdas ao usá-lo, pois, encontradas as grandezas de interesse, basta fazer uma análise dimensional adequada e converter para o sistema de unidades desejado.

### A.2 Espaço-tempo

O espaço-tempo utilizado para descrever a eletrodinâmica de Maxwell e de Podolsky foi o espaço-tempo quadridimensional de Minkowski ( $\mathcal{M}$ ), que difere do espaço euclidiano tridimensional ( $\mathbb{E}^3$ ) de várias formas. E o uso do espaço-tempo de Minkowski faz-se necessário dada a relação intrínseca da eletrodinâmica com a relatividade especial. Tendo isto em vista, serão abordadas aqui brevemente algumas características, propriedades principais e elementos deste espaço, necessárias para a compreensão desta dissertação.

O primeiro elemento do espaço de Minkowski que queremos dar destaque são os quadrivetores (4-vetor), que podem ser divididos em dois, covariantes e contravariantes. Tomando como exemplo o quadrivetor posição  $x^\mu$  que especifica a posição de uma partícula, definiremos o quadrivetor contravariante com os índices em cima

$$x^\mu = (t, \vec{r}) \tag{A.1}$$

e o quadrivetor covariante com os índices em baixo

$$x_\mu = (t, -\vec{r}), \quad (\text{A.2})$$

sendo  $t$  o instante de tempo em que o evento localizado na posição  $\vec{r} = (x, y, z)$  acontece. E sobre a convenção usada, a menos que seja especificado o contrário ao longo da dissertação, os índices gregos tomam os valores de  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , e os índices latinos tomam valores de  $i = 1, 2, 3$ , visando diferenciar quadrivetores de vetores tridimensionais. Sendo assim, podemos ver que existe a seguinte relação entre as componentes dos quadrivetores covariantes e contravariantes:  $x^0 = x_0$  e  $x^i = -x_i$ .

Um outro objeto fundamental do espaço de Minkowski é a sua métrica. A métrica é dada pelo tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$  que pode ser representado pela seguinte matriz  $4 \times 4$ :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Aqui vale mencionar que estamos fazendo um abuso de notação ao escrever que  $\eta_{\mu\nu}$  é igual a matriz acima, pois  $\eta_{\mu\nu}$  representa um elemento qualquer da matriz  $\eta$  que representa o tensor métrico. Porém, como isto é comum no contexto da relatividade, manteremos este padrão. Dito isso, note que a métrica é uma matriz diagonal que possui uma assinatura lorentziana, i.e., a parte temporal ( $\eta_{00}$ ) e espacial ( $\eta_{ii}$ ) diferem por um sinal negativo, no nosso caso a assinatura específica é  $(+, -, -, -)$ .

A métrica é um tensor muito importante por diversos aspectos. Dentre eles, vamos dar destaque aos seguintes:

- A métrica permite calcular o produto escalar no espaço de Minkowski. Ou seja, dado dois quadrivetores  $x$  e  $y$  quaisquer representando dois pontos do espaço-tempo, o produto escalar deles é dado por:

$$\begin{aligned} xy &= \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \eta_{00} x^0 y^0 + \eta_{11} x^1 y^1 + \eta_{22} x^2 y^2 + \eta_{33} x^3 y^3 \\ &= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

- A métrica é invertível. Ou seja, o tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$  satisfaz a relação

$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \eta\eta^{-1} = \eta^{-1}\eta = \mathbb{1}_4$ , em que a métrica inversa  $\eta^{\mu\nu}$  é dada por:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

- A métrica é responsável pela operação de levantar e abaixar índices. Ou seja, a relação entre um quadrivetor covariante e seu respectivo quadrivetor contravariante é dada pela métrica, da forma:  $x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu$  e  $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$ .

Agora, note que nos dois últimos itens o símbolo do somatório foi omitido na presença de índices repetidos. Esta é a convenção da soma de Einstein. Ela é usada justamente para indicar que há uma soma implícita sob o índice que se repete. E esta convenção foi usada ao longo de toda a dissertação.<sup>1</sup>

Por fim, os últimos objetos de interesse que valem a pena mencionar são os operadores diferenciais covariantes, mais especificamente a derivada parcial covariante  $\partial_\mu$  e o operador d'Alembertiano. A derivada parcial covariante é definida por

$$\partial_\mu \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (\text{A.6})$$

já o operador d'Alembertiano:

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{A.7})$$

## A.3 Tensores importantes

Dentre os tensores tratados ao longo desta dissertação, será dado destaque aqui a alguns: o tensor de Faraday  $F^{\mu\nu}$  e o pseudo-tensor de Levi-Civita  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ .

### A.3.1 Tensor de Faraday

O tensor de Faraday na eletrodinâmica de Podolsky  $F_{\mu\nu}$  é definido como  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , ou seja, da mesma forma que na eletrodinâmica de Maxwell. Mas, sem maiores explicações a respeito, fica vago o porquê ele é definido desta forma. Na eletrodinâmica de Maxwell, a definição do tensor de Faraday decorre

<sup>1</sup>Para mais detalhes sobre essa convenção, a referência [33] é indicada.

naturalmente das equações de Euler-Lagrange (2.19), levando em conta a lagrangiana que descreve o movimento de uma partícula que interage com um campo eletromagnético

$$\mathcal{L} = -M\sqrt{v_\mu v^\mu} - A_\mu J^\mu, \quad (J^\mu \equiv ev^\mu) \quad (\text{A.8})$$

em que  $M$  é a massa da partícula,  $J^\mu$  a 4-corrente,  $v^\mu$  a sua 4-velocidade,  $e$  a sua carga e  $A^\mu$  o potencial eletromagnético<sup>2</sup>. Mais especificamente, a definição original se da equação da força de Lorentz escrita em forma covariante. Esta equação pode ser obtida ao inserir a lagrangiana (A.8) nas equações de Euler-Lagrange, resultando em

$$Ma_\mu = e \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) v^\nu \implies Ma_\mu = F_{\mu\nu} J^\nu, \quad (\text{A.9})$$

sendo  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  o tensor de Faraday.

E na eletrodinâmica de Podolsky, temos a mesma lagrangiana (A.8) descrevendo o movimento de uma partícula carregada, pois, a lagrangiana de Podolsky (2.32) consiste apenas no acréscimo do termo com derivadas de segunda ordem nos campos à lagrangiana de Maxwell. Sendo assim, a lagrangiana que descreve a interação de uma partícula carregada com o campo não sofrerá modificações. Além disso, ao substituir (A.8) nas equações de Euler-Lagrange de 2ª ordem (2.29), o termo referente às derivadas de 2ª ordem vai se anular, dado que a equação (A.8) não depende de derivadas de segunda ordem nos campos. Sendo assim, teremos a mesma equação da força de Lorentz, e conseqüentemente no mesmo tensor de Faraday, que assume a seguinte representação matricial:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

### A.3.2 Pseudo-tensor de Levi-Civita

O pseudo-tensor de Levi-Civita ou símbolo de Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  recebe essa denominação de ‘pseudo’ pois ele na verdade não é um tensor, dado que ele não se transforma como tal. Mas antes de falar dele, vale a pena relembrar o delta de

<sup>2</sup>Para mais detalhes sobre a construção da lagrangiana e da obtenção do tensor de Faraday, consulte as referências [20] e [21]

Kronecker ou símbolo de Kronecker. O delta de Kronecker é uma função definida por partes da seguinte forma:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

De modo que o símbolo de Kronecker guarda uma relação direta com o símbolo de Levi-Civita, dado que o último é a versão quadridimensional do primeiro<sup>3</sup>. Logo, temos que o símbolo de Levi-Civita totalmente antissimétrico é definido como

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ é uma permutação par de } 0123, \\ -1 & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ é uma permutação ímpar de } 0123, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

sendo o valor inicial  $\epsilon_{0123} = 1$ . E para levantar e abaixar os índices do pseudo-tensor usamos a métrica  $\eta^{\mu\nu}$ , de modo que  $\epsilon^{0123} = -1$ . Por fim, vale a pena elencar as seguintes identidades relacionadas às contrações do símbolo de Levi-Civita:

- contraído uma vez

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = \delta_\nu^\alpha\delta_\rho^\beta\delta_\sigma^\gamma - \delta_\nu^\alpha\delta_\sigma^\beta\delta_\rho^\gamma - \delta_\sigma^\alpha\delta_\rho^\beta\delta_\nu^\gamma + \delta_\sigma^\alpha\delta_\nu^\beta\delta_\rho^\gamma + \delta_\rho^\alpha\delta_\sigma^\beta\delta_\nu^\gamma - \delta_\rho^\alpha\delta_\nu^\beta\delta_\sigma^\gamma; \quad (\text{A.11})$$

- contraído duas vezes

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\beta\gamma} = 2(\delta_\rho^\beta\delta_\sigma^\gamma - \delta_\sigma^\beta\delta_\rho^\gamma); \quad (\text{A.12})$$

- contraído três vezes

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\gamma} = 3!\delta_\sigma^\gamma = 6\delta_\sigma^\gamma; \quad (\text{A.13})$$

- contraído quatro vezes

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4! = 24. \quad (\text{A.14})$$

---

<sup>3</sup>Nesta parte a referência [2] é indicada.

# Apêndice B

## Condição de comutatividade de $\delta$ e $\partial_\mu$ e variação do hipervolume de integração $d^4x$

### B.1 Condição de comutatividade de $\delta$ e $\partial_\mu$

O operador  $\delta$ , de forma geral, executa uma mudança na forma e no argumento dos campos  $u_i(x)$ . Porém, há dois tipos de transformações possíveis, uma com o ponto fixo e a outra com o ponto variável. De forma que, para  $\delta$  e  $\partial_\mu$  comutarem, é necessário que a transformação seja feita com o ponto fixo. Se a transformação for feita a ponto variável,  $\delta$  e  $\partial_\mu$  não comutam. Vamos mostrar isto explicitamente.

Seja o campo  $u_i(x)$  e suas primeiras derivadas  $\partial_\mu u_i(x)$ . Como  $\delta$  executa uma mudança na forma e no argumento dos campos  $u_i(x)$ , ele fará o mesmo para  $\partial_\mu u_i(x)$ , ou seja<sup>1</sup>:

$$\delta u_i(x) = \bar{u}_i(\bar{x}) - u_i(x) \quad (\text{B.1})$$

$$\delta(\partial_\mu u_i(x)) = \bar{\partial}_\mu \bar{u}_i(\bar{x}) - \partial_\mu u_i(x). \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (B.1) em (B.2):

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu u_i) &= \bar{\partial}_\mu(\delta u_i + u_i) - \partial_\mu u_i \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\delta u_i + u_i) - \partial_\mu u_i \\ \Rightarrow \delta(\partial_\mu u_i) &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial u_i}{\partial x^\nu} - \partial_\mu u_i. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Portanto, da equação (B.3), podemos ver que  $\delta$  e  $\partial_\mu$  só comutam se  $\bar{x} = x$ , ou mais

---

<sup>1</sup>A notação  $\bar{u}_i(\bar{x})$  está sendo usada para representar a mudança na forma e no argumento do campo  $u_i(x)$ .

explicitamente:

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu u_i) &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \partial_\nu u_i - \partial_\mu u_i \\ &= \delta_\mu^\nu \partial_\nu(\delta u_i) + \delta_\mu^\nu \partial_\nu u_i - \partial_\mu u_i, \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \equiv \delta_\mu^\nu \rightarrow \text{delta de Kronecker,} \\ &= \partial_\mu(\delta u_i) + \partial_\mu u_i - \partial_\mu u_i \\ \implies \delta(\partial_\mu u_i) &= \partial_\mu(\delta u_i).\end{aligned}$$

A condição  $\bar{x} = x$  é justamente a condição da transformação com o ponto fixo. Logo, somente para ela ocorre a comutatividade de  $\delta$  e  $\partial_\mu$ , para a transformação de ponto variável, i.e.,  $\bar{x} \neq x$ , temos que  $\delta$  e  $\partial_\mu$  não comutam.

## B.2 Aproximação usada na variação do hipervolume de integração

Seja o volume de integração:

$$d^4x' = dx'_0 dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \frac{\partial x'_0}{\partial x_0} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} d^4x.$$

Lembremos que

$$\frac{\partial x'_0}{\partial x_0} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} = \det J \equiv |J|, \quad (\text{B.4})$$

$$\implies d^4x' = |J| d^4x \quad (\text{B.5})$$

sendo  $|J|$  o determinante da matriz jacobiana. Agora, sendo  $|J(x)| = |J(x)|_{x_0} + |J(x_0)(x - x_0)|$ , no caso em questão temos que:  $|J| = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$ . Ou seja, estamos fazendo uma aproximação linear em torno de um ponto de equilíbrio estável do sistema:

$$\implies d^4x' \approx [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)] d^4x.$$

# Apêndice C

## Tensor energia-momento simétrico de Podolsky

Neste apêndice queremos demonstrar como se obtém o tensor energia-momento simétrico de Podolsky. Para isto, procederemos de forma análoga ao que foi realizado em [5]. Como o tensor energia-momento de Podolsky simétrico é um caso particular do tensor energia-momento genérico para uma teoria de 2ª ordem, obteremos primeiro a situação mais geral para em seguida particularizar para o caso de Podolsky.

Então, seja a lagrangiana genérica de 2ª ordem

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, \partial_\mu \partial_\nu \phi_i), \quad (\text{C.1})$$

em que  $\phi_i$  são os campos, de modo que  $[\delta, \partial_\mu] = 0$ . Tomando a variação da lagrangiana

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta (\partial_\mu \phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} \delta (\partial_\mu \partial_\nu \phi_i) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \partial_\mu \partial_\nu (\delta \phi_i), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

reescrevendo o 2º termo da equação acima

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i) = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] \delta \phi_i, \quad (\text{C.3})$$

podemos reescrever o 3º termo de (C.2) também da forma:

$$\begin{aligned}
 l_1 &\equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \partial_\mu \partial_\nu (\delta \phi_i) \\
 &= \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \partial_\mu (\delta \phi_i) \right\} \\
 &\quad - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \right\} \partial_\mu (\delta \phi_i) \\
 &= \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \partial_\mu (\delta \phi_i) \right\} \\
 &\quad - \partial_\mu \left\{ \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \right\} \delta \phi_i \right\} \\
 &\quad + \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \right\} \delta \phi_i. \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

Definindo

$$\Pi^{\mu i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \right\}, \tag{C.5}$$

$$\Pi^{\mu \nu i} \equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right], \tag{C.6}$$

ao substituir (C.3), (C.4), (C.5) e (C.6) em (C.2):

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L} &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \phi_i)} \right] \right\} \right\} \delta \phi_i \\
 &\quad + \partial_\mu [\Pi^{\mu i} \delta \phi_i + \Pi^{\mu \nu i} \partial_\nu (\delta \phi_i)]. \tag{C.7}
 \end{aligned}$$

Agora, definindo  $\hat{\partial} \equiv n^\mu \partial_\mu$  e  $\underline{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu - n_\mu \hat{\partial}$ , tal que  $n_\mu n^\mu = 1$  ( $n$  é o quadrivetor unitário  $n = (1, \vec{0})$  tipo tempo), temos

$$\partial_\mu = \partial_\mu + n_\mu \hat{\partial} - n_\mu \hat{\partial} \implies \partial_\mu = \underline{\partial}_\mu + n_\mu \hat{\partial}, \tag{C.8}$$

usando isto, podemos reescrever

$$\Pi^{\mu \nu i} \partial_\nu (\delta \phi_i) = \Pi^{\mu \nu i} (\underline{\partial}_\nu + n_\nu \hat{\partial}) (\delta \phi_i) = \Pi^{\mu \nu i} \underline{\partial}_\nu (\delta \phi_i) + n_\nu \Pi^{\mu \nu i} \hat{\partial} (\delta \phi_i), \tag{C.9}$$

sendo

$$\Pi^{\mu\nu i} \underline{\partial}_\nu (\delta\phi_i) = \underline{\partial}_\nu (\Pi^{\mu\nu i} \delta\phi^i) - \underline{\partial}_\nu \Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i, \quad (\text{C.10})$$

ao substituir a última equação na penúltima

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu i} \partial_\nu \delta\phi_i &= \Pi^{\mu\nu i} \underline{\partial}_\nu \delta\phi_i + n_\nu \Pi^{\mu\nu i} \widehat{\partial} (\delta\phi_i) \\ &= \underline{\partial}_\nu (\Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i) - \underline{\partial}_\nu \Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i + n_\nu \Pi^{\mu\nu i} \widehat{\partial} (\delta\phi_i), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

temos então:

$$\Pi^{\mu i} \delta\phi_i + \Pi^{\mu\nu i} \partial_\nu (\delta\phi_i) = (\Pi^{\mu i} - \underline{\partial}_\nu \Pi^{\mu\nu i}) \delta\phi_i + n_\nu \Pi^{\mu\nu i} \widehat{\partial} (\delta\phi_i) + \underline{\partial}_\nu (\Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i). \quad (\text{C.12})$$

Substituindo a expressão acima em (C.7), temos que:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\phi_i)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\phi_i)} \right] \right\} \right\} \delta\phi_i \\ &+ \partial_\mu [(\Pi^{\mu i} - \underline{\partial}_\nu \Pi^{\mu\nu i}) \delta\phi_i + n_\nu \Pi^{\mu\nu i} \widehat{\partial} (\delta\phi_i)] + \partial_\mu \underline{\partial}_\nu (\Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Agora, queremos que o termo  $\partial_\mu \underline{\partial}_\nu (\Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i)$  satisfaça

$$\begin{aligned} l_2 &\equiv \int_R d^{D+1}x \partial_\mu \underline{\partial}_\nu (\Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i) = \int_B d\sigma_\mu \underline{\partial}_\nu (\Pi^{\mu\nu i} \delta\phi_i) = \int_V d^Dx \underline{\partial}_\nu (\Pi^{0\nu i} \delta\phi_i) \\ &= \int_V d^Dx (\partial_\nu - n_\nu \widehat{\partial}) (\Pi^{0\nu i} \delta\phi_i) = \int_V d^Dx [\partial_\nu (\Pi^{0\nu i} \delta\phi_i) - n_\nu \widehat{\partial} (\Pi^{0\nu i} \delta\phi_i)] \\ &= \int_V d^Dx [\partial_0 (\Pi^{00i} \delta\phi_i) + \partial_j (\Pi^{0ji} \delta\phi_i) - n_\nu n^\mu \partial_\mu (\Pi^{0\nu i} \delta\phi_i)] \\ &= \int_V d^Dx [\partial_0 (\Pi^{00i} \delta\phi_i) + \partial_j (\Pi^{0ji} \delta\phi_i) - n_0 n^0 \partial_0 (\Pi^{00i} \delta\phi_i)] \\ &= \int_V d^Dx [\partial_j (\Pi^{0ji} \delta\phi_i)] = \int_V d^Dx [\partial_j (\Pi^{0ji} \delta\phi_i)] = \int_B ds_j (\Pi^{0ji} \delta\phi_i) \\ \implies l_2 &= \int_B ds_j (\Pi^{0ji} \delta\phi_i) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

em que  $D$  são as dimensões espaciais,  $R$  é a região de integração englobando todo o espaço-tempo,  $V$  é o hipervolume e denota a fronteira dessa região, e  $B$  é a hipersuperfície que delimita  $V$ . Logo, o resultado de  $l_2$  indica que estamos considerando somente as variações que satisfazem  $ds_j \perp \Pi^{0ji}$ , ou seja, as componentes espaciais do vetor  $\Pi^{0ji} \delta\phi_i$  são ortogonais à  $B$ . Além disso, do penúltimo termo de

(C.13) temos também que

$$l_3 \equiv \int_R d^4x \partial_\mu [(\Pi^{\mu i} - \partial_\nu \Pi^{\mu \nu i}) \delta \phi_i + n_\nu \Pi^{\mu \nu i} \delta(\widehat{\partial} \phi_i)], \quad (\text{C.15})$$

logo

$$\begin{aligned} l_3 &= \int_B d\sigma_\mu [(\Pi^{\mu i} - \partial_\nu \Pi^{\mu \nu i}) \delta \phi_i + n_\nu \Pi^{\mu \nu i} \delta(\widehat{\partial} \phi_i)] \\ &= \int_B d\sigma_\mu [\pi^{(0)\mu i} \delta \phi_i + \pi^{(1)\mu i} \delta(\widehat{\partial} \phi_i)] = \int_B d\sigma_\mu \sum_{k=0}^{N-1} \pi^{(k)\mu i} \delta(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i), \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

sendo  $N = 2$  neste caso dada a ordem das derivadas consideradas, e

$$\pi^{(0)\mu i} \equiv \Pi^{\mu i} - \partial_\nu \Pi^{\mu \nu i}, \quad (\text{C.17})$$

$$\pi^{(1)\mu i} \equiv n_\nu \Pi^{\mu \nu i}, \quad (\text{C.18})$$

$$\widehat{\partial}^{(k)} \equiv \begin{cases} 1, & k=0 \\ \widehat{\partial}, & k=1. \end{cases}$$

Agora, convém definir o gerador  $G$ , que posteriormente será associado aos geradores das transformações, da forma

$$G \equiv \int_B d\sigma_\mu \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \pi^{(k)\mu i} \delta(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) + \mathcal{L} \delta x^\mu \right], \quad (\text{C.19})$$

introduziremos a variação total<sup>1</sup>  $\bar{\delta}$

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \phi_i &= \delta \phi_i + \phi_i(x) - \phi'_i(x) = \delta \phi_i + \partial_\xi \phi_i(x) \delta x^\xi - \frac{\epsilon_{\alpha\beta} S_{ij}^{\alpha\beta} \phi_j(x)}{2} \\ \bar{\delta}(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) &= \delta(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) + \partial_\xi(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) \delta x^\xi - \frac{\epsilon_{\alpha\beta} S_{ij}^{\alpha\beta}(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_j)}{2} \\ \implies \delta(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) &= \bar{\delta}(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) - \partial_\xi(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) \delta x^\xi + \frac{\epsilon_{\alpha\beta} S_{ij}^{\alpha\beta}(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_j)}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

<sup>1</sup>Mais detalhes sobre as definições a seguir podem ser encontradas na referência [3].

e vamos substituir (C.20) em (C.19):

$$G = \int_B d\sigma_\mu \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \pi^{(k)\mu i} \bar{\delta}(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) - \pi^{(k)\mu i} \partial_\xi(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_i) \delta x^\xi + \frac{\epsilon_{\alpha\beta} \pi^{(k)\mu i} S_{ij}^{\alpha\beta}(\widehat{\partial}^{(k)} \phi_j)}{2} \right] + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\}. \quad (\text{C.21})$$

Sendo

$$f_{\mu\lambda\nu}^{(k)} \equiv \frac{1}{2} [\pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\nu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\lambda\alpha}^{(k)} S_{\nu\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta], \quad (\text{C.22})$$

em que  $S_{\nu\mu}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} S_{\rho\lambda\nu\mu}$ , dada a expressão acima pode-se mostrar que  $f$  satisfaz:

$$\epsilon^{\lambda\nu} f_{\mu\lambda\nu}^{(k)} = \frac{\epsilon^{\lambda\nu} \pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta}{2}, \quad (\text{C.23})$$

$$f_{\mu\lambda\nu}^{(k)} = -f_{\lambda\mu\nu}^{(k)}. \quad (\text{C.24})$$

Para mostrar (C.23) e (C.24) usaremos a antissimetria de  $\epsilon^{\lambda\nu}$  e  $S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta}$  nos índices  $\lambda$  e  $\nu$ .<sup>2</sup> De (C.23), dada a antissimetria de  $\epsilon$ , temos que:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\lambda\nu} f_{\mu\lambda\nu}^{(k)} &= \frac{1}{2} [\epsilon^{\lambda\nu} \pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\nu\alpha}^{(k)} \epsilon^{\lambda\nu} S_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\lambda\alpha}^{(k)} \epsilon^{\lambda\nu} S_{\nu\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta] \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon^{\lambda\nu} \pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta - \pi_{\nu\alpha}^{(k)} \epsilon^{\nu\lambda} S_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\lambda\alpha}^{(k)} \epsilon^{\lambda\nu} S_{\nu\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta] \\ \implies \epsilon^{\lambda\nu} f_{\mu\lambda\nu}^{(k)} &= \frac{\epsilon^{\lambda\nu} \pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

De (C.24), dada a antissimetria do tensor  $S$  nos índices inferiores, ao fazer a troca de índices  $f_{\mu\lambda\nu}^{(k)} \rightarrow f_{\lambda\mu\nu}^{(k)}$  temos que:

$$\begin{aligned} f_{\lambda\mu\nu}^{(k)} &\equiv \frac{1}{2} [\pi_{\lambda\alpha}^{(k)} S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta - \pi_{\nu\alpha}^{(k)} S_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\nu\lambda}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta] \\ &= \frac{1}{2} [-\pi_{\lambda\alpha}^{(k)} S_{\nu\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta - \pi_{\nu\alpha}^{(k)} S_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta - \pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta] \\ &= -\frac{1}{2} [\pi_{\lambda\alpha}^{(k)} S_{\nu\mu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\nu\alpha}^{(k)} S_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta + \pi_{\mu\alpha}^{(k)} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \widehat{\partial}^{(k)} \phi_\beta] \\ \implies f_{\lambda\mu\nu}^{(k)} &= -f_{\mu\lambda\nu}^{(k)}. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

<sup>2</sup>Aqui vale fazer a seguinte observação: a quantidade  $\epsilon^{\lambda\nu}$  é o parâmetro de transformação  $\omega^{\lambda\nu}$  apresentado anteriormente, cuja antissimetria foi mostrada em (2.87).

Agora, sendo  $\delta x_{\xi} = \epsilon_{\xi\mu} x^{\mu} + a_{\xi}$ , então

$$\frac{\partial(\delta x_{\xi})}{\partial x^{\rho}} = \epsilon_{\xi\mu} \delta_{\rho}^{\mu} = \epsilon_{\xi\rho},$$

logo

$$\begin{aligned} f_{\mu\tilde{\rho}}^{(k)} \epsilon^{\tilde{\rho}} &= f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \epsilon^{\rho\tilde{\xi}} = -f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \epsilon^{\tilde{\rho}} = -f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \frac{\partial(\delta x^{\tilde{\xi}})}{\partial x^{\rho}} \\ &= -\frac{\partial f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)}}{\partial x^{\rho}} \delta x^{\tilde{\xi}} + \frac{\partial f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)}}{\partial x^{\rho}} \delta x^{\tilde{\xi}}, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

e integrando o 1º termo de (C.27) em uma hipersuperfície  $S$ :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\sigma^{\mu} \frac{\partial(f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}})}{\partial x_{\rho}} &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\sigma} d\sigma^{\mu} \frac{\partial(f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}})}{\partial x_{\rho}} + \int_{\sigma} d\sigma^{\rho} \frac{\partial(f_{\rho\mu\tilde{\xi}} \delta x^{\tilde{\xi}})}{\partial x_{\rho}} \right] \\ \Rightarrow \int_{\sigma} d\sigma^{\mu} \frac{\partial(f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}})}{\partial x_{\rho}} &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\sigma} d\sigma^{\mu} \partial^{\rho} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) - \int_{\sigma} d\sigma^{\rho} \partial^{\mu} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Agora, avaliando as duas integrais do lado direito da equação (C.28) em duas hipersuperfícies distintas,  $\sigma_{(2)}$  e  $\sigma_{(1)}$ , e calculando a diferença:

$$\begin{aligned} t_4 &\equiv \int_{\sigma_{(2)}} d\sigma^{\mu} \partial^{\rho} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) - \int_{\sigma_{(1)}} d\sigma^{\mu} \partial^{\rho} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\sigma_{(2)}} d\sigma^{\mu} \partial^{\rho} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) - \int_{\sigma_{(2)}} d\sigma^{\rho} \partial^{\mu} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \int_{\sigma_{(1)}} d\sigma^{\mu} \partial^{\rho} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) - \int_{\sigma_{(1)}} d\sigma^{\rho} \partial^{\mu} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} d^{D+1}x \partial^{\mu} \partial^{\rho} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) - \int_{\mathbb{R}} d^{D+1}x \partial^{\rho} \partial^{\mu} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} d^{D+1}x [\partial^{\mu}, \partial^{\rho}] (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}}) = 0 \quad \text{pois} \quad [\partial^{\mu}, \partial^{\rho}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Logo, como o termo  $\partial^{\rho} (f_{\mu\rho\tilde{\xi}}^{(k)} \delta x^{\tilde{\xi}})$  é nulo entre duas hipersuperfícies, dado o resultado de (C.29), ele não contribui para o gerador. Portanto, invertendo novamente

os índices de  $f$ , i.e.,  $f_{\mu\rho\zeta}^{(k)} \rightarrow f_{(k)}^{\mu\rho\zeta}$ ,<sup>3</sup> podemos escrever  $G$  como

$$G = \int_B d\sigma_\mu \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \pi^{(k)\mu\alpha} \bar{\delta}(\widehat{\partial}^{(k)}\phi_\alpha) - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right], \quad (\text{C.30})$$

sendo  $T^{\mu\nu}$  o tensor energia-momento, definido da forma [3]:

$$T^{\mu\nu} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} [\pi^{(k)\mu\alpha} \partial^\nu(\widehat{\partial}^{(k)}\phi_\alpha) - \partial_\rho(f_{(k)}^{\mu\rho\nu})] - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{C.31})$$

Agora, considerando uma transformação de Poincaré

$$\delta x_\nu = \epsilon_{\nu\zeta} x^\zeta + a_\nu, \quad (\text{C.32})$$

$$\bar{\delta}(\widehat{\partial}^{(k)}\phi_\alpha) = 0, \quad (\text{C.33})$$

podemos escrever o gerador (C.30) como

$$\begin{aligned} G &= - \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} \delta x_\nu = - \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} (\epsilon_{\nu\zeta} x^\zeta + a_\nu) \\ \Rightarrow G &= -\epsilon_{\nu\zeta} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta - \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} a_\nu, \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

definindo

$$P^\nu \equiv \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu}, \quad (\text{C.35})$$

$$J^{\nu\zeta} \equiv \int_B d\sigma_\mu M^{\mu\nu\zeta}, \quad (\text{C.36})$$

$$\text{sendo} \quad M^{\mu\nu\zeta} \equiv T^{\mu\nu} x^\zeta - T^{\mu\zeta} x^\nu, \quad (\text{C.37})$$

---

<sup>3</sup>Note que o  $(k)$  não é um índice como os outros, ele apenas cumpre o propósito de explicitar a relação com  $\widehat{\partial}^{(k)}$ . De forma que também poderíamos ter escrito  $f$  da forma  $f_{(k)\mu\rho\zeta}$  sem prejuízos, mas isto não foi feito para não sobrecarregar a notação.

temos então

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\nu\zeta} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta &= \frac{1}{2} \left[ \epsilon_{\nu\zeta} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta - \epsilon_{\zeta\nu} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \epsilon_{\nu\zeta} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta - \epsilon_{\nu\zeta} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\zeta} x^\nu \right] \\
 &= \frac{\epsilon_{\nu\zeta}}{2} \int_B d\sigma_\mu (T^{\mu\nu} x^\zeta - T^{\mu\zeta} x^\nu) \\
 &= \frac{\epsilon_{\nu\zeta}}{2} \int_B d\sigma_\mu M^{\mu\nu\zeta} \\
 &= \frac{\epsilon_{\nu\zeta} J^{\nu\zeta}}{2}, \tag{C.38}
 \end{aligned}$$

logo, o gerador  $G$  assume a forma:

$$G = -a_\nu P^\nu - \frac{\epsilon_{\nu\zeta} J^{\nu\zeta}}{2}. \tag{C.39}$$

E como  $G$  é um gerador, pelo teorema de Noether temos  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  e  $\partial_\mu M^{\mu\nu\zeta} = 0$ . Por fim, temos que

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu M^{\mu\nu\zeta} &= \partial_\mu (T^{\mu\nu} x^\zeta) - \partial_\mu (T^{\mu\zeta} x^\nu) \\
 &= \partial_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta + T^{\mu\nu} \partial_\mu x^\zeta - \partial_\mu T^{\mu\zeta} x^\nu - T^{\mu\zeta} \partial_\mu x^\nu \\
 &= \partial_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta + T^{\mu\nu} \delta_\mu^\zeta - \partial_\mu T^{\mu\zeta} x^\nu - T^{\mu\zeta} \delta_\mu^\nu \\
 &= \partial_\mu T^{\mu\nu} x^\zeta + T^{\zeta\nu} - \partial_\mu T^{\mu\zeta} x^\nu - T^{\nu\zeta} \\
 &= T^{\zeta\nu} - T^{\nu\zeta} = 0 \\
 \implies T^{\zeta\nu} &= T^{\nu\zeta}, \tag{C.40}
 \end{aligned}$$

logo, podemos concluir que o tensor energia-momento dado por (C.31) é simétrico.

Como estamos interessados em obter o tensor energia-momento simétrico de Podolsky, basta aplicar o resultado (C.31) para o caso de Podolsky, i.e., considerar  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_P$ . Logo, considerando a lagrangiana de Podolsky

$$\mathcal{L}_P = -\frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4} + a \partial_\mu F^{\mu\zeta} \partial_\nu F^\nu_\zeta, \tag{C.41}$$

e de acordo com (C.31), temos que o tensor desta teoria é dado por

$$T_P^{\mu\nu} = \sum_{k=0}^1 [\pi^{(k)\mu\alpha} \partial^\nu (\widehat{\partial}^{(k)} A_\alpha) - \partial_\rho (f_{(k)}^{\mu\rho\nu})] - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_P, \quad (\text{C.42})$$

sendo

$$\begin{aligned} \pi^{(0)\mu\alpha} &\equiv \Pi^{\mu\alpha} - \underline{\partial}_\nu \Pi^{\mu\nu\alpha}, \\ \pi^{(1)\mu\alpha} &\equiv n_\nu \Pi^{\mu\nu\alpha}, \\ \Pi^{\mu\alpha} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\alpha)} + \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu A_\alpha)} \right] \right\}, \\ f_{(k)}^{\mu\rho\nu} &\equiv \frac{1}{2} [\pi^{(k)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial}^{(k)} A^\beta + \pi^{(k)\nu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\mu} \widehat{\partial}^{(k)} A^\beta + \pi^{(k)\rho\alpha} S_{\alpha\beta}^{\nu\mu} \widehat{\partial}^{(k)} A^\beta], \end{aligned}$$

e considerando um campo vetorial,  $S_{\alpha\beta}^{\rho\nu}$  assume a forma [3]:

$$S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} = \eta^{\rho\nu} \eta_{\alpha\beta} - \eta_\alpha^\rho \eta_\beta^\nu.$$

Agora, definindo

$$\begin{aligned} L^{\mu\alpha} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)}, \\ L^{\mu\zeta\alpha} &\equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu \partial_\zeta A_\alpha)} + \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\zeta \partial_\mu A_\alpha)} \right], \end{aligned}$$

podemos reescrever

$$\begin{aligned} \pi^{(0)\mu\alpha} &= L^{\mu\alpha} - 2\partial_\zeta L^{\mu\zeta\alpha} + n_\zeta \widehat{\partial} L^{\mu\zeta\alpha}, \\ \pi^{(1)\mu\alpha} &= n_\zeta \Pi^{\mu\zeta\alpha} = n_\zeta L^{\mu\zeta\alpha}, \end{aligned}$$

com isso,  $T_P^{\mu\nu}$  assume a forma

$$T_P^{\mu\nu} \asymp (L^{\mu\alpha} - 2\partial_\zeta L^{\mu\zeta\alpha}) \partial^\nu A_\alpha - \partial_\rho (f_{(0)}^{\mu\rho\nu} + f_{(1)}^{\mu\rho\nu}) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_P, \quad (\text{C.43})$$

em que a notação  $\asymp$  indica que os dois membros da equação são iguais a menos

de uma derivada total. Calculando os termos da expressão anterior

$$f_{(0)}^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2} [\pi^{(0)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta + \pi^{(0)\nu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\mu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta + \pi^{(0)\rho\alpha} S_{\alpha\beta}^{\nu\mu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta], \quad (\text{C.44})$$

$$f_{(1)}^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2} [\pi^{(1)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta + \pi^{(1)\nu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\mu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta + \pi^{(1)\rho\alpha} S_{\alpha\beta}^{\nu\mu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta], \quad (\text{C.45})$$

em que

$$\begin{aligned} \pi^{(0)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta &= (L^{\mu\alpha} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\xi\alpha} + n_{\xi} \widehat{\partial} L^{\mu\xi\alpha}) S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} A^\beta, \\ \pi^{(1)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta &= n_{\xi} L^{\mu\xi\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial} A^\beta, \end{aligned}$$

e somando (C.44) e (C.45) temos que

$$\begin{aligned} f_{(0)}^{\mu\rho\nu} + f_{(1)}^{\mu\rho\nu} &= \frac{1}{2} [(\pi^{(0)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} A^\beta + \pi^{(1)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial} A^\beta) + (\pi^{(0)\nu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\mu} A^\beta + \pi^{(1)\nu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\mu} \widehat{\partial} A^\beta) \\ &\quad + (\pi^{(0)\rho\alpha} S_{\alpha\beta}^{\nu\mu} A^\beta + \pi^{(1)\rho\alpha} S_{\alpha\beta}^{\nu\mu} \widehat{\partial} A^\beta)], \end{aligned}$$

mas note que cada uma das somas entre parênteses pode ser escrita como

$$\pi^{(0)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} A^\beta + \pi^{(1)\mu\alpha} S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} \widehat{\partial} A^\beta \simeq (L^{\mu\alpha} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\xi\alpha}) S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} A^\beta,$$

então

$$\begin{aligned} f_{(0)}^{\mu\rho\nu} + f_{(1)}^{\mu\rho\nu} &\simeq \frac{1}{2} [(L^{\mu\alpha} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\xi\alpha}) S_{\alpha\beta}^{\rho\nu} A^\beta + (L^{\nu\alpha} - 2\partial_{\xi} L^{\nu\xi\alpha}) S_{\alpha\beta}^{\rho\mu} A^\beta \\ &\quad + (L^{\rho\alpha} - 2\partial_{\xi} L^{\rho\xi\alpha}) S_{\alpha\beta}^{\nu\mu} A^\beta], \end{aligned}$$

logo, podemos reescrever  $T_p^{\mu\nu}$  como

$$\begin{aligned} T_p^{\mu\nu} &= (L^{\mu\alpha} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\xi\alpha}) \partial^\nu A_\alpha - \frac{1}{2} \partial_\rho \left\{ [(L^{\rho\mu} - 2\partial_{\xi} L^{\rho\xi\mu}) - (L^{\mu\rho} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\xi\rho})] A^\nu \right. \\ &\quad - [(L^{\nu\mu} - 2\partial_{\xi} L^{\nu\xi\mu}) + (L^{\mu\nu} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\xi\nu})] A^\rho + [(L^{\rho\nu} - 2\partial_{\xi} L^{\rho\xi\nu}) \\ &\quad \left. + (L^{\nu\rho} - 2\partial_{\xi} L^{\nu\xi\rho})] A^\mu \right\} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_p. \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Ao calcular alguns termos da expressão acima, temos que

$$\begin{aligned} L^{\rho\mu} &= -F^{\mu\rho}, \\ L^{\rho\xi\mu} &= a(2\eta^{\xi\mu} \partial_\tau F^{\tau\rho} - \eta^{\xi\rho} \partial_\tau F^{\tau\mu} - \eta^{\mu\rho} \partial_\tau F^{\tau\xi}), \\ L^{\rho\mu} - 2\partial_{\xi} L^{\rho\xi\mu} &= -F^{\mu\rho} - 2a(2\partial^\mu \partial_\tau F^{\tau\rho} - \partial^\rho \partial_\tau F^{\tau\mu}), \end{aligned}$$

e ao usar a equação  $(1 + 2a\Box)\partial_\tau F^{\tau\mu} = 0$  em (C.46), obtemos:

$$T_P^{\mu\nu} \simeq F^\mu_\rho F^{\rho\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_P + 2a(2\partial^\mu \partial_\tau F^\tau_\rho - \partial_\rho \partial_\tau F^{\tau\mu})F^{\rho\nu}. \quad (\text{C.47})$$

Porém,

$$2a(2\partial^\mu \partial_\tau F^\tau_\rho - \partial_\rho \partial_\tau F^{\tau\mu})F^{\rho\nu} \simeq 4a\partial^\mu \partial_\tau F^\tau_\rho F^{\rho\nu} + 2a\partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\rho F^{\rho\nu}, \quad (\text{C.48})$$

pois

$$\begin{aligned} \partial_\rho(\partial_\tau F^{\tau\mu} F^{\rho\nu}) &= \partial_\rho(\partial_\tau F^{\tau\mu} F^{\rho\nu} + \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\rho F^{\rho\nu}) \\ \implies \partial_\rho(\partial_\tau F^{\tau\mu})F^{\rho\nu} &= \partial_\rho(\partial_\tau F^{\tau\mu} F^{\rho\nu}) - \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\rho F^{\rho\nu} \\ \implies -\partial_\rho(\partial_\tau F^{\tau\mu})F^{\rho\nu} &\simeq \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\rho F^{\rho\nu}, \end{aligned}$$

e se usarmos a identidade de Bianchi (2.39)

$$\partial^\mu F^{\tau\rho} = \partial^\tau F^{\mu\rho} + \partial^\rho F^{\tau\mu}, \quad (\text{C.49})$$

obtemos

$$\begin{aligned} 4a\partial^\mu(\partial_\tau F^\tau_\rho F^{\rho\nu}) &= 4a[\partial^\mu(\partial_\tau F^{\tau\rho})F_\rho^\nu + \partial_\tau F^\tau_\rho \partial^\mu F^{\rho\nu}] \\ &= 4a[\partial_\tau(\partial^\mu F^{\tau\rho})F_\rho^\nu + \partial_\tau F^\tau_\rho \partial^\mu F^{\rho\nu}] \\ &= 4a[\partial_\tau(\partial^\tau F^{\mu\rho} + \partial^\rho F^{\tau\mu})F_\rho^\nu + \partial_\tau F^\tau_\rho \partial^\mu F^{\rho\nu}] \\ \implies 4a[\partial^\mu(\partial_\tau F^\tau_\rho F^{\rho\nu}) - \partial_\tau F^\tau_\rho \partial^\mu F^{\rho\nu}] &= 4a[\partial_\tau \partial^\tau F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \partial_\tau \partial^\rho F^{\tau\mu} F_\rho^\nu] \\ 4a\partial^\mu(\partial_\tau F^\tau_\rho)F^{\rho\nu} &= 4a[\partial_\tau \partial^\tau F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \partial_\tau \partial^\rho F^{\tau\mu} F_\rho^\nu], \quad (\text{C.50}) \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \partial^\tau(\partial_\tau F^{\mu\rho} F_\rho^\nu) &= \partial^\tau \partial_\tau F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \partial^\tau F^{\mu\rho} \partial_\tau F_\rho^\nu \\ \implies \partial^\tau \partial_\tau F^{\mu\rho} F_\rho^\nu &\simeq -\partial^\tau F^{\mu\rho} \partial_\tau F_\rho^\nu = \partial^\tau F^{\mu\rho} \partial_\tau F_\rho^\nu \\ \implies \partial^\tau \partial_\tau F^{\mu\rho} F_\rho^\nu &\simeq \partial^\tau F^{\mu\rho} \partial_\tau F_\rho^\nu \quad (\text{C.51}) \end{aligned}$$

$$\text{e } \partial_\tau(\partial^\rho F^{\tau\mu} F_\rho^\nu) \simeq -\partial^\rho F^{\tau\mu} \partial_\tau F_\rho^\nu, \quad (\text{C.52})$$

logo, substituindo (C.51) e (C.52) em (C.50):

$$4a\partial^\mu(\partial_\tau F^\tau_\rho)F^{\rho\nu} \simeq 4a[\partial^\tau F^{\mu\rho} \partial_\tau F_\rho^\nu - \partial^\rho F^{\tau\mu} \partial_\tau F_\rho^\nu]. \quad (\text{C.53})$$

Portanto, o tensor energia-momento simétrico de Podolsky é dado por:

$$T_P^{\mu\nu} = F^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_P + 2a(2\partial^\tau F^{\mu\rho} \partial_\tau F^\nu{}_\rho - 2\partial^\rho F^{\tau\mu} \partial_\tau F_\rho{}^\nu + \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\rho F^{\rho\nu}). \quad (\text{C.54})$$

E substituindo a lagrangiana de Podolsky na expressão acima pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} T_P^{\mu\nu} = & \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - 2a \left( \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\gamma F^\gamma{}_\beta + F^{\mu\alpha} \square F^\nu{}_\alpha + F^{\nu\alpha} \square F^\mu{}_\alpha \right. \\ & \left. + F^{\mu\alpha} \partial_\alpha \partial_\beta F^{\beta\nu} + F^{\nu\alpha} \partial_\alpha \partial_\beta F^{\beta\mu} - \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\gamma F^{\gamma\nu} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

# Apêndice D

## Resolução da integral da função de Green retardada de KGF

Para resolver a integral (3.61), será adotado aqui o mesmo procedimento de [28]. Vamos reescrever (3.61) como:

$$G_{KGF}^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t-t')}{4\pi D} \left\{ \frac{\partial}{\partial D} \left[ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ i(DK + (t-t')\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}) \right]}{\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}} dK \right] - \frac{\partial}{\partial D} \left[ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ -i(DK + (t-t')\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}) \right]}{\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}} dK \right] \right\}. \quad (D.1)$$

Usando a definição

$$F(D) \equiv \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ i(DK + (t-t')\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}) \right]}{\sqrt{K^2 + (2a)^{-1}}} dK, \quad (D.2)$$

temos que

$$G_{KGF}^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t-t')}{4\pi D} \left( \frac{\partial F(D)}{\partial D} + \frac{\partial \bar{F}(D)}{\partial D} \right), \quad (D.3)$$

sendo  $\bar{F}(D)$  o complexo conjugado de  $F(D)$ . Agora, fazendo a mudança de variáveis  $K = l \sinh \varphi$  em  $F(D)$  com  $l^2 = (2a)^{-1}$ , temos que:

$$\begin{aligned} F(D) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ i(Dl \sinh \varphi + (t-t')\sqrt{(l \sinh \varphi)^2 + l^2}) \right]}{\sqrt{(l \sinh \varphi)^2 + l^2}} d(l \sinh \varphi), \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ i(Dl \sinh \varphi + (t-t')l \cosh \varphi) \right]}{l \cosh \varphi} l \cosh \varphi d\varphi, \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ il(D \sinh \varphi + (t-t') \cosh \varphi) \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (D.4)$$

Agora, note que o valor do integral depende da relação entre  $D$  e  $t - t'$ . Como estamos analisando o caso retardado, temos que  $t - t' > D$ .

Fazendo a definição

$$t - t' = \sqrt{\lambda} \cosh \varphi_0 \quad \text{e} \quad D = \sqrt{\lambda} \sinh \varphi_0 \quad \text{se} \quad t - t' > D,$$

em que  $\lambda = (t - t')^2 - D^2$ , podemos substituí-la na integral (D.4), obtendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ il\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right] d\varphi = \int_{-\infty}^0 \exp \left[ il\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right] d\varphi + \int_0^{\infty} \exp \left[ il\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right] d\varphi, \quad (\text{D.5})$$

Reescrevendo  $\exp \left[ il\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right]$  explicitamente em termos das funções seno e cosseno,

$$\exp \left[ il\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right] = \cos \left[ l\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right] + i \sin \left[ l\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right],$$

e após algumas manipulações, conseguimos reconhecer que a integral em (D.5) é composta de representações integrais de funções de Bessel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ il\sqrt{\lambda} \cosh (\varphi + \varphi_0) \right] d\varphi = i\pi J_0(l\sqrt{\lambda}) - \pi N_0(l\sqrt{\lambda}), \quad (\text{D.6})$$

em que  $J_0$  é a função de Bessel de primeira espécie e  $N_0$  é a função de Bessel de segunda espécie, de forma que as funções são de ordem zero. Usando (D.6) em (D.4),

$$F(D) = \frac{i}{2\pi} \left[ i\pi J_0(l\sqrt{\lambda})\Theta(\lambda) - \pi N_0(l\sqrt{\lambda})\Theta(\lambda) \right] \quad (\text{D.7})$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ J_0(l\sqrt{\lambda}) + iN_0(l\sqrt{\lambda}) \right] \Theta(\lambda), \quad (\text{D.8})$$

em que  $\Theta(\lambda)$  é a função de Heaviside:

$$\Theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Retomando a notação  $\lambda = (t - t')^2 - D^2$  temos:

$$F(D) = -\frac{1}{2} \left[ J_0 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) + i N_0 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \right] \Theta \left( (t - t')^2 - D^2 \right). \quad (\text{D.10})$$

Ao substituir (D.10) em (D.3), o termo que multiplica  $i$  vai se cancelar dada a soma de  $\partial F(D)/\partial D$  com seu complexo conjugado, sendo assim<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} G_{KGF}^{ret}(x, x') &= \frac{\Theta(t - t')}{4\pi D} \left( - \frac{\partial [J_0(l\sqrt{(t - t')^2 - D^2})\Theta((t - t')^2 - D^2)]}{\partial D} \right) \\ &= \frac{\Theta(t - t')}{4\pi D} \left( 2DJ_0 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \delta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial J_0(l\sqrt{(t - t')^2 - D^2})}{\partial(l\sqrt{(t - t')^2 - D^2})} \frac{\partial(l\sqrt{(t - t')^2 - D^2})}{\partial D} \Theta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right) \\ &= \frac{\Theta(t - t')}{4\pi D} \left( 2DJ_0 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \delta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{J_{-1}}_{-J_1} \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \frac{lD}{\sqrt{(t - t')^2 - D^2}} \Theta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right) \\ &= \frac{\Theta(t - t')}{4\pi D} \left( 2DJ_0 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \delta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - J_1 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \frac{lD}{\sqrt{(t - t')^2 - D^2}} \Theta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right) \\ &= \frac{\Theta(t - t')}{4\pi D} \left( 2DJ_0 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \delta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{DlJ_1(l\sqrt{(t - t')^2 - D^2})}{\sqrt{(t - t')^2 - D^2}} \Theta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right) \\ &= \frac{\Theta(t - t')}{2\pi} \left( J_0 \left( l \sqrt{(t - t')^2 - D^2} \right) \delta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{lJ_1(l\sqrt{(t - t')^2 - D^2})}{2\sqrt{(t - t')^2 - D^2}} \Theta \left( (t - t')^2 - D^2 \right) \right), \quad (\text{D.11}) \end{aligned}$$

voltando com as notações  $\lambda = (t - t')^2 - D^2 = (t - t')^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2 = |x - x'|^2$  e

<sup>1</sup>Em um dos passos do cálculo em questão foi usado que  $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ , isto é uma propriedade da função de Bessel que decorre da sua definição [35].

$l^2 = (2a)^{-1}$ , podemos reescrever a equação acima como:

$$G_{KGF}^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t - t')}{2\pi} \left[ J_0 \left( \frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}} \right) \delta(|x - x'|^2) - \frac{\Theta(|x - x'|^2)}{|x - x'| \sqrt{8a}} J_1 \left( \frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}} \right) \right]. \quad (D.12)$$

Agora, consideremos a seguinte propriedade da função delta de Dirac

$$\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0), \quad (D.13)$$

em que  $f(x)$  é uma função arbitrária. De fato, podemos verificar essa propriedade lembrando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (D.14)$$

e sendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx = f(0),$$

ao multiplicar por 1 a relação acima à direita em termos da  $\delta(x)$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx &= f(0) \\ \implies \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \\ \implies \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(0) dx \\ \implies \delta(x)f(x) &= \delta(x)f(0). \end{aligned}$$

E de acordo com essa propriedade, temos que:

$$J_0 \left( \frac{|x - x'|}{\sqrt{2a}} \right) \delta(|x - x'|^2) = J_0(0) \delta(|x - x'|^2). \quad (D.15)$$

Contudo, dada a representação em série da função de Bessel de primeira espécie e de ordem zero

$$\begin{aligned} J_0(x) &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2} x^{2l} \\ J_0(x) &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2} x^{2l} \\ \implies J_0(0) &= 1, \end{aligned} \quad (D.16)$$

temos:

$$J_0\left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{2a}}\right)\delta(|x-x'|^2) = \delta(|x-x'|^2) \quad (\text{D.17})$$

Sendo assim, podemos reescrever a função de Green como:

$$G_{KGF}^{ret}(x, x') = \frac{\Theta(t-t')}{2\pi} \left[ \delta(|x-x'|^2) - \frac{\Theta(|x-x'|^2)}{|x-x'|\sqrt{8a}} J_1\left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{2a}}\right) \right]. \quad (\text{D.18})$$

Esta é a expressão para a função de Green retardada de Klein-Gordon-Fock que queríamos determinar, vide (3.62).

## Apêndice E

### Cálculos da radiação em baixas velocidades

Para obter o vetor de Poynting  $\vec{S}_{Pr1}$ , dado por (4.76), precisamos calcular:  $\vec{E}_{r1}^2$ ,  $\vec{E}_{r1} \cdot \square \vec{E}_{r1}$ ,  $\square \hat{r}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{r1}$ ,  $\partial_t \vec{E}_{r1}$  e  $\vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1})$ . Sendo assim, usaremos o sistema de coordenadas esféricas por ser o mais conveniente para os cálculos em questão. Além disso, sem perda de generalidade para o caso que estamos trabalhando, podemos considerar que a aceleração está na direção  $\hat{z}$ , i.e.,  $\vec{a} = a\hat{z}$ . Logo, no sistema de coordenadas esféricas temos que  $\vec{a} = a(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$ . E desse sistema,

as seguintes relações do cálculo vetorial serão úteis:

$$\vec{\nabla} \times (g\vec{f}) = g\vec{\nabla} \times \vec{f} + (\vec{\nabla}g) \times \vec{f}, \quad (\text{E.1})$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad (\text{E.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta f_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}, \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{f} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta f_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r f_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r f_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(r f_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}, \quad (\text{E.5})$$

$$\nabla^2 \vec{f} = (\nabla^2 \vec{f})_r \hat{r} + (\nabla^2 \vec{f})_\theta \hat{\theta} + (\nabla^2 \vec{f})_\phi \hat{\phi}, \quad (\text{E.6})$$

sendo

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \vec{f})_r = & \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r f_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_r}{\partial \phi^2} \\ & - \frac{2f_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}, \\ (\nabla^2 \vec{f})_\theta = & \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r f_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial \phi^2} \\ & - \frac{f_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial f_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}, \\ (\nabla^2 \vec{f})_\phi = & \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r f_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_\phi}{\partial \phi^2} \\ & - \frac{f_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f_\theta}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Considerando as relações acima, podemos calcular agora as quantidades de interesse mencionadas anteriormente.

- Para  $\partial_{t'} \vec{E}_{r1}$ , temos que derivar  $\vec{E}_{r1}$  com relação a  $t'$  no tempo retardado, i.e., fazer  $\partial_{t'} \vec{E}_{r1}|_{t'=t_R}$ , de forma análoga ao que foi realizado em (4.46). Logo, sendo

$$\vec{E}_{r1}(\vec{r}, t') = \frac{e}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) [(\hat{r} \cdot \vec{a}) \hat{r} - \vec{a}]}{r},$$

temos que<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{E}_{r1} = & \frac{e}{4\pi} (1 - e^{-mr}) \left\{ [(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}] \partial_t (r^{-1}) + \frac{1}{r} \partial_t [(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}] \right\} \\ & + \frac{e}{4\pi} \frac{[(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}]}{r} \partial_t (1 - e^{-mr}). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Lembrando que

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R - \vec{v} \cdot \vec{R}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} = -\frac{R\vec{v}}{R - \vec{v} \cdot \vec{R}},$$

ao considerarmos o limite de interesse  $\vec{v} \rightarrow 0$  temos que  $\partial_t R = \partial_t r = \partial_t \vec{R} = \partial_t \vec{r} = 0$ , logo  $\partial_t (r^{-1}) = \partial_t (1 - e^{-mr}) = 0$ . Além disso, falta calcular  $\partial_t [(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}]$ . Sendo  $\partial_t \vec{a} = 0$ , temos então

$$\begin{aligned} \partial_t [(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}] &= \partial_t (\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} + (\hat{r} \cdot \vec{a})\partial_t \hat{r} \\ &= \frac{\vec{a}[\partial_t \vec{r} - \hat{r}\partial_t r] + (\hat{r} \cdot \vec{a})(\partial_t \vec{r}) - \hat{r}\partial_t r}{r} \\ \implies \partial_t [(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Portanto, como  $\partial_t (r^{-1}) = \partial_t (1 - e^{-mr}) = \partial_t [(\hat{r} \cdot \vec{a})\hat{r} - \vec{a}] = 0$ , temos que:

$$\partial_t \vec{E}_{r1} = 0 \implies \partial_t^2 \vec{E}_{r1} = 0. \quad (\text{E.9})$$

- Para  $\vec{E}_{r1}^2$ , temos que

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{r1})^2 &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{(1 - e^{-mr})^2 [(\hat{r} \cdot \vec{a})^2 + a^2 - 2(\hat{r} \cdot \vec{a})^2]}{r^2} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{(1 - e^{-mr})^2 [a^2 - (\hat{r} \cdot \vec{a})^2]}{r^2}, \end{aligned}$$

e sendo  $\hat{r} \cdot \vec{a} = a_r = a \cos \theta$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{r1}^2 &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{(1 - e^{-mr})^2 [a^2 - a^2 \cos^2 \theta]}{r^2} \\ \implies \vec{E}_{r1}^2 &= \frac{e^2 a^2}{16\pi^2} \frac{(1 - e^{-mr})^2 \sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

<sup>1</sup>Estamos novamente escrevendo  $\partial_t$  ao invés de  $\partial_{t'}$ , i.e., fazendo  $\partial_t \vec{E}_{r1} \equiv \partial_{t'} \vec{E}_{r1}|_{t'=t_R}$ .

- Para  $\square \hat{r}$ , como  $\partial_t \hat{r} \implies \partial_t^2 \hat{r} = 0$ , ao considerar a expressão para o laplaciano em coordenadas esféricas (E.6) temos que:

$$\square \hat{r} = (\partial_t^2 - \nabla^2) \hat{r} = -\nabla^2 \hat{r} = \frac{2}{r^2} \hat{r}. \quad (\text{E.11})$$

- Para  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{r1}$ , sendo  $\vec{a} = a(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$ , o campo elétrico em coordenadas esféricas é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{r1} &= \frac{e}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr})}{r} [(\hat{r} \cdot \vec{a}) \hat{r} - \vec{a}] \\ \vec{E}_{r1} &= \frac{e}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr})}{r} [(a_r - a_r) \hat{r} - a_\theta \hat{\theta} - a_\phi \hat{\phi}] \\ \vec{E}_{r1} &= \frac{ea}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r} \hat{\theta} \\ \implies E_r &= 0, \quad E_\theta = \frac{ea}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r}, \quad E_\phi = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Logo, ao usar a expressão para o divergente (E.3) temos que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{r1} &= \frac{ea}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r} \hat{\theta} \right] \\ &= \frac{ea}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right] \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \\ \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{r1} &= \frac{ea}{2\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) \cos \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

- Para  $\vec{E}_{r1} \cdot \square \vec{E}_{r1}$ , temos que inicialmente calcular  $\square \vec{E}_{r1}$ . Como  $\partial_t^2 \vec{E}_{r1} = 0 \implies \square \vec{E}_{r1} = -\nabla^2 \vec{E}_{r1}$ , temos que usar a expressão para o laplaciano vetorial (E.6)

para calcular  $\square \vec{E}_{r1}$ , logo:

$$\begin{aligned}
 \hat{r} \longrightarrow (\nabla^2 \vec{E}_{r1})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \vec{E}_r^0)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \vec{E}_r^0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \vec{E}_r^0}{\partial \phi^2} \\
 &\quad - \frac{2 \vec{E}_r^0}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \vec{E}_\phi^0}{\partial \phi} \\
 &= -\frac{ea}{4\pi} \frac{4(1 - e^{-mr}) \cos \theta}{r^3} \\
 \hat{\theta} \longrightarrow (\nabla^2 \vec{E}_{r1})_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r E_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \phi^2} \\
 &\quad - \frac{E_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \vec{E}_r^0}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \vec{E}_\phi^0}{\partial \phi} \\
 &= -\frac{ea}{4\pi} \left[ \frac{2(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r^3} + \frac{m^2 e^{-mr} \sin \theta}{r} \right] \\
 \hat{\phi} \longrightarrow (\nabla^2 \vec{E}_{r1})_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \vec{E}_\phi^0)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \vec{E}_\phi^0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \vec{E}_\phi^0}{\partial \phi^2} \\
 &\quad - \frac{\vec{E}_\phi^0}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \vec{E}_r^0}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \\
 &= 0 \\
 \implies \square \vec{E}_{r1} &= \frac{ea}{4\pi} \left\{ \frac{4(1 - e^{-mr}) \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \left[ \frac{2(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r^3} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{m^2 e^{-mr} \sin \theta}{r} \right] \hat{\theta} \right\}. \tag{E.14}
 \end{aligned}$$

Portanto, dada a expressão acima, temos que:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{r1} \cdot \square \vec{E}_{r1} &= \frac{e^2 a^2}{16\pi^2} \frac{(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r} \hat{\theta} \cdot \left\{ \frac{4(1 - e^{-mr}) \cos \theta}{r^3} \hat{r} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{2(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r^3} + \frac{m^2 e^{-mr} \sin \theta}{r} \right] \hat{\theta} \right\} \\
 \implies \vec{E}_{r1} \cdot \square \vec{E}_{r1} &= \frac{e^2 a^2}{16\pi^2} \frac{(1 - e^{-mr}) \sin^2 \theta}{r^2} \left[ \frac{2(1 - e^{-mr})}{r^2} + m^2 e^{-mr} \right]. \tag{E.15}
 \end{aligned}$$

- Para  $\vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1})$ , temos que usar a expressão para o rotacional em coordenadas esféricas (E.4) e a identidade (E.1). Sendo assim, calculando  $\hat{r} \times \vec{E}_{r1}$

$$\begin{aligned}\hat{r} \times \vec{E}_{r1} &= \frac{ea}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r} \hat{r} \times \hat{\theta} \\ &= \frac{ea}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r} \hat{\phi}\end{aligned}$$

e substituindo na expressão  $\vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1})$ :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1}) &= \vec{\nabla} \times \left[ \frac{ea}{4\pi} \frac{(1 - e^{-mr}) \sin \theta}{r} \hat{\phi} \right] \\ &= \frac{ea}{4\pi} \left\{ \frac{\sin \theta (1 - e^{-mr})}{r} \vec{\nabla} \times \hat{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \vec{\nabla} \left[ \frac{\sin \theta (1 - e^{-mr})}{r} \right] \times \hat{\phi} \right\} \\ &= \frac{ea}{4\pi} \left\{ \frac{\sin \theta (1 - e^{-mr})}{r} \left[ \frac{\cot \theta}{r} \hat{r} - \frac{1}{r} \hat{\theta} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - e^{-mr} - mre^{-mr}) \sin \theta}{r^2} \underbrace{\hat{r} \times \hat{\phi}}_{=-\hat{\theta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - e^{-mr}) \cos \theta}{r^2} \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{\phi}}_{=\hat{r}} \right\} \\ \implies \vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{E}_{r1}) &= \frac{ea}{4\pi} \left[ \frac{2(1 - e^{-mr}) \cos \theta}{r^2} \hat{r} - \frac{me^{-mr} \sin \theta}{r} \hat{\theta} \right]. \quad (\text{E.16})\end{aligned}$$

Por fim, com as expressões (E.9), (E.10), (E.11), (E.13), (E.15) e (E.16) podemos calcular o vetor de Poynting  $\vec{S}_{Pr1}$  em (4.76).

# Referências

- [1] O.A. Acevedo e B.M. Pimentel. “[Teoremas de Nöther: um estudo](#)”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 45 (2023), e20230091.
- [2] Ruben Aldrovandi e J. G. Pereira. “[Classical fields](#)”. Em: *São Paulo* (2004).
- [3] A. O. Barut. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. Dover Publications, 1980.
- [4] N.N. Bogoliubov e D.V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. Interscience Publishers, 1976.
- [5] C. A. Bonin. “[A quantização da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico no formalismo de Matsubara-Fradkin](#)”. Tese de dout. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, 2011, 193 f.
- [6] C. A. Bonin e B. M. Pimentel. “[Mechanism for the origin of the Podolsky mass](#)”. Em: *Phys. Rev. D* 106.1 (2022), p. 016003.
- [7] Fritz Bopp. “[Eine lineare Theorie des Elektrons](#)”. Em: *Annalen der Physik* 430.5 (1940), pp. 345–384.
- [8] C.L.R. Braga. *Notas de Física Matemática*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [9] James Ward Brown e Ruel V Churchill. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 9ª ed. McGraw Hill Brasil, 2015.
- [10] R. Bufalo, B. M. Pimentel e G. E. R. Zambrano. “[Renormalizability of generalized quantum electrodynamics](#)”. Em: *Phys. Rev. D* 86.12 (2012), p. 125023.
- [11] R. R. Cuzinatto et al. “[How can one probe Podolsky electrodynamics?](#)” Em: *International Journal of Modern Physics A* 26.21 (2011), pp. 3641–3651.
- [12] R.R. Cuzinatto, C.A.M. de Melo e P.J. Pompeia. “[Second Order Gauge Theory](#)”. Em: *Annals of Physics* 322.5 (2007), pp. 1211–1232.
- [13] E. Eriksen e Ø. Grøn. “[Electrodynamics of Hyperbolically Accelerated Charges: II. Does a Charged Particle with Hyperbolic Motion Radiate?](#)” Em: *Annals of Physics* 286.2 (2000), pp. 343–372.
- [14] J. Frenkel. “[4/3 problem in classical electrodynamics](#)”. Em: *Phys. Rev. E* 54.5 (1996), pp. 5859–5862.

- [15] Carlos A. P. Galvão e B. M. Pimentel. “[The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics](#)”. Em: *Canadian Journal of Physics* 66.5 (1988), pp. 460–466.
- [16] Jonathan Gratus, Volker Perlick e Robin W Tucker. “[On the self-force in Bopp–Podolsky electrodynamics](#)”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48.43 (2015), p. 435401.
- [17] D.J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Pearson Education, 2014.
- [18] Mark A. Heald e Jerry B. Marion. *Classical Electromagnetic Radiation*. Courier Corporation, 2013.
- [19] J. D. Jackson e L. B. Okun. “[Historical roots of gauge invariance](#)”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 73.3 (2001), pp. 663–680.
- [20] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [21] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields: Volume 2*. 4th edition. Butterworth-Heinemann, 1980.
- [22] Elon Lages Lima. *Análise Real - vol. 1 - Funções de uma Variável*. 13<sup>a</sup> ed. Vol. 1. IMPA, 2020.
- [23] Kleber Daum Machado. *Eletromagnetismo*. Vol. 3. Todapalavra, 2014.
- [24] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, 1873.
- [25] A. Messiah. *Quantum Mechanics: Two Volumes Bound as One*. Dover books on physics, 2014.
- [26] Merced Montesinos e Ernesto Flores. “[Symmetric energy-momentum tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca theories obtained using only Noether’s theorem](#)”. Em: *Revista mexicana de física* 52.1 (2006), pp. 29–36.
- [27] E. Noether. “[Invariante Variationsprobleme](#)”. Em: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1918), pp. 235–257.
- [28] P. H. Ortega. “[Aspectos Clássicos da Eletrodinâmica de Podolsky](#)”. Diss. de mestr. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, 2014, 135 f.
- [29] Boris Podolsky. “[A Generalized Electrodynamics Part I—Non-Quantum](#)”. Em: *Phys. Rev.* 62.1-2 (1942), pp. 68–71.
- [30] Boris Podolsky e Chihiro Kikuchi. “[A Generalized Electrodynamics Part II—Quantum](#)”. Em: *Phys. Rev.* 65.7-8 (1944), pp. 228–235.

- 
- [31] Boris Podolsky e Chihiro Kikuchi. “[Auxiliary Conditions and Electrostatic Interaction in Generalized Quantum Electrodynamics](#)”. Em: *Phys. Rev.* 67.5-6 (1945), pp. 184–192.
- [32] F. Rohrlich. *Classical Charged Particles*. World Scientific, 2007.
- [33] L. Susskind e A. Friedman. *Special Relativity and Classical Field Theory: The Theoretical Minimum*. Basic Books, 2017.
- [34] W.K. Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific, 1985.
- [35] Eric W. Weisstein. “*Bessel Function of the First Kind.*” From [MathWorld](#)—A Wolfram Web Resource. (Acesso em 2023).
- [36] Eric W. Weisstein. “*Delta Function.*” From [MathWorld](#)—A Wolfram Web Resource. (Acesso em 2023).
- [37] A. Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.