

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

ALEX RIBEIRO BATISTA

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS
RELATIVOS COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
COMPREENSÕES E DIFICULDADES DE ESTUDANTES
DO 7º ANO DE UMA ESCOLA MUNICIPAL**

Presidente Prudente

2024

ALEX RIBEIRO BATISTA

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS
RELATIVOS COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
COMPREENSÕES E DIFICULDADES DE ESTUDANTES
DO 7º ANO DE UMA ESCOLA MUNICIPAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Unesp – Campus de Presidente Prudente, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Raquel Gomes de Oliveira

Presidente Prudente

2024

B333e Batista, Alex Ribeiro
Ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos com
Resolução de Problemas: compreensões e dificuldades de estudantes
do 7º ano de uma escola municipal / Alex Ribeiro Batista. --
Presidente Prudente, 2024
296 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientadora: Raquel Gomes de Oliveira

1. Números Inteiros Relativos. 2. Resolução de Problemas. 3.
Ensino de Matemática. 4. Aprendizagem de Matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Universidade
Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS COM
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: COMPREENSÕES E DIFICULDADES DE
ESTUDANTES DO 7º ANO DE UMA ESCOLA MUNICIPAL

AUTOR: ALEX RIBEIRO BATISTA

ORIENTADORA: RAQUEL GOMES DE OLIVEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em Educação, pela Comissão
Examinadora:

Profa. Dra. RAQUEL GOMES DE OLIVEIRA (Participação Virtual)
Departamento de Educação / Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. VINICIO DE MACEDO SANTOS (Participação Virtual)
Departamento de Ensino / Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo - FEUSP

Profa. Dra. RENATA VIVIANE RAFFA RODRIGUES (Participação Virtual)
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Grande
Dourados (PPGECMat/UFGD) / UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados

Profa. Dra. LENY RODRIGUES MARTINS TEIXEIRA (Participação Virtual)
Programa de Pós-Graduação em Educação / Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente
Prudente

Profa. Dra. ELIANE MARIA VANI ORTEGA (Participação Virtual)
Departamento de Educação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Presidente Prudente, 25 de março de 2024

À minha esposa, Cintia Harumi Samizava, ao meu filho,
Lucas Samizava Batista e ao meu pai, Pedro Batista Filho
(*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho foi possível graças à colaboração de diversas pessoas.

Agradeço à professora Raquel Gomes de Oliveira pelos ensinamentos, pela parceria e pela paciência durante a orientação da escrita deste trabalho.

À minha esposa Cintia Harumi Samizava pelo apoio incondicional na busca dos objetivos. Ela também cedeu suas aulas de Matemática para realização da pesquisa. Para ela, minha gratidão por tê-la em minha vida.

Às professoras Renata Viviane Raffa Rodrigues e Leny Rodrigues Martins Teixeira pelas excelentes contribuições, no momento da qualificação, para o desenvolvimento deste trabalho.

À professora Eliane Maria Vani Ortega e ao professor Vinício de Macedo Santos por aceitarem compor a banca examinadora de defesa de tese, contribuindo para melhorar o trabalho.

À minha mãe, Noemia Ribeiro da Silva Batista e à minha irmã, Isabela Ribeiro Batista pelo incentivo para seguir na carreira acadêmica.

Aos meus amigos do PPGE: Erika Aparecida Navarro Rodrigues e Lucas Eduardo Silva de Oliveira pela parceria na realização dos trabalhos das disciplinas, trocas de experiências e de conhecimentos durante a realização do doutorado.

Aos meus amigos: Luiz Fernando Carvalho, Messias Alessandro Cardoso e Edilson Simão, que mesmo distantes, sempre me apoiaram com muita alegria e descontração.

À equipe gestora da escola em que realizei a pesquisa: Paulo Marini, professor coordenador, Camila Mancini, diretora e Márcia Alves, vice-diretora. Obrigado por apoiarem o desenvolvimento do trabalho.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA) pelas discussões produtivas e enriquecedoras durante as reuniões. O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

“A experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca.”

(Jorge Larrosa Bondía)

RESUMO

O presente trabalho vincula-se à linha de Pesquisa “Processos Formativos, Ensino e Aprendizagem” do programa de Pós-Graduação em Educação da Unesp, Presidente Prudente e tem como objetivo geral compreender aspectos do ensino e da aprendizagem do Número Inteiro Relativo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da implementação de um conjunto de atividades didático-pedagógicas fundamentadas em pressupostos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo e da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica. A pesquisa desenvolveu-se com abordagem qualitativa de caráter analítico-descritivo, cujos participantes foram 39 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola do município de Álvares Machado-SP. Buscando atingir o objetivo, realizou-se uma análise documental da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Currículo Paulista e dos livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental selecionados no Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD-2020). Tomando como base o desenvolvimento das habilidades específicas associadas aos Números Inteiros Relativos, foram elaboradas atividades didáticas referentes ao conceito, sendo estas desenvolvidas em aulas de Matemática com estudantes do 7º ano. Os dados foram categorizados por meio de análise de conteúdo e organizados em tabelas. Os resultados evidenciaram que, em um primeiro momento, os estudantes associaram o conceito de Número Inteiro Relativo a situações extraescolares, tais como: temperaturas, saldos bancários, situações do cotidiano, dentre outras. No que se refere à adição de Números Inteiros Relativos, o trabalho com as atividades didáticas que envolveram o contexto de pontos ganhos e perdidos e o preenchimento de tabelas proporcionou que os estudantes compreendessem a operação. No caso da subtração de Números Inteiros Relativos, os estudantes demonstraram compreensão quando esta operação foi abordada no contexto de pontos ganhos e perdidos, no contexto bancário, temperaturas (subtração para representar diminuições) e na identificação de padrões/regularidades. Os resultados referentes à multiplicação entre Números Inteiros Relativos demonstraram que as principais compreensões dos estudantes foram inerentes, principalmente, quando trabalhadas atividades envolvendo o cálculo de proporções simples e preenchimento de tabelas. Por fim, os dados relacionados à divisão de Números Inteiros Relativos evidenciaram que o contexto de preços e parcelas proporcionou a compreensão da operação pelos estudantes. Assim sendo, as atividades elaboradas/reelaboradas e desenvolvidas com base em pressupostos da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica demonstraram potencialidades para os processos de ensino e aprendizagem, possibilitando, em sua maioria, aos estudantes, a formulação de hipóteses válidas sobre o conceito de Número Inteiro Relativo e suas operações.

Palavras-chave: Números Inteiros Relativos. Resolução de Problemas. Ensino de Matemática. Aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

This research is linked to the Research line “Processos Formativos, Ensino e Aprendizagem” of the Programa de Pós-Graduação em Educação da Unesp, Presidente Prudente and its general objective is to understand aspects of teaching and learning of the Relative Integer Number of students at the 7th year of Elementary School, based on the implementation of a set of didactic-pedagogical activities based on epistemological, cognitive and didactic assumptions of the Relative Integer and Problem Solving as a methodological perspective. The research was developed with a qualitative approach of analytical-descriptive character, whose participants were 39 students from the 7th year of Elementary School from a school in the municipality of Álvares Machado-SP. Seeking to achieve the objective, a documentary analysis was carried out of the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Currículo Paulista and the textbooks for the seventh year of Elementary School selected in the Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD-2020). Taking as a basis the development of specific skills in Relative Integers, didactic activities related to the concept were created and developed with the students from the 7th year. The data was categorized using content analysis and organized into tables. The results showed that, at first, students associated the concept of Relative Whole Number with extracurricular situations, such as: temperatures, bank balances, everyday situations, among others. Regarding the addition of Relative Whole Numbers, working with teaching activities that involved the context of points gained and lost and filling in tables allowed students to understand the operation. In the case of subtracting Relative Whole Numbers, students demonstrated understanding when this operation was approached in the context of points gained and lost, in the banking context, temperatures (subtraction to represent decreases) and in the identification of patterns/regularities. The results regarding multiplication between Relative Whole Numbers demonstrated that the students' main understandings were inherent, especially when working on activities involving the calculation of simple proportions and filling out tables. Finally, the data related to the division of Relative Whole Numbers showed that the context of prices and installments provided students with an understanding of the operation. Therefore, the activities elaborated/re-elaborated and developed based on Problem Solving assumptions as a methodological perspective demonstrated potential for teaching and learning processes, enabling, for the most part, students to formulate valid hypotheses about the concept of Number Relative Integer and its operations.

Keywords: Whole Numbers. Problem Solving. Teaching Mathematics. Mathematics Learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ábaco dos Inteiros.....	64
Figura 2: Exemplo de tabela de multiplicação.....	64
Figura 3: Exemplo de comparação de NIR.....	78
Figura 4: Saldo de gols no Campeonato Brasileiro de 2018.....	80
Figura 5: Exemplo de comparação de Números Inteiros (Temperaturas).....	81
Figura 6: Representação de sucessor e antecessor na reta numérica.....	85
Figura 7: Quadro de Multiplicação de NIR.....	86
Figura 8: Construção da Reta Numérica dos NIR.....	89
Figura 9: Exercício de comparação de Números Inteiros em reta numérica.....	93
Figura 10: Exemplo de padrão envolvendo multiplicação de NIR	94
Figura 11: Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.....	101
Figura 12: Exemplo de atividade envolvendo medidas positivas e negativas no âmbito dos NIR.....	124
Figura 13: Exemplo de atividade envolvendo relação positiva no âmbito dos NIR....	124
Figura 14: Exemplo de atividade envolvendo transformações positivas e negativas no âmbito dos NIR.....	125
Figura 15: Rua onde Elvira mora.....	132
Figura 16: Pedro e João caminhando em direção à árvore.....	137
Figura 17: Representação das casas de Joana, Heloísa e Isabel.....	138
Figura 18: Caminho para o jogador chegar à taça.....	143
Figura 19: Representação da casa de Isis e de sua avó na reta numérica.....	148
Figura 20: Jogo dos foguetes.....	149
Figura 21: Blocos com a operação misteriosa.....	152
Figura 22: Temperatura do ambiente.....	152
Figura 23: Cartas de Ana e Luiz.....	157
Figura 24: Despesas de Giovana.....	159
Figura 25: Jogo entre Yara e Tobias.....	166

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: dados das pesquisas relacionadas a revisões bibliográficas sobre a temática NIR.....	32
Quadro 2: dados das pesquisas relacionadas à utilização de jogos, materiais concretos e tecnologias para o ensino de NIR.....	34
Quadro 3: dados das pesquisas relacionadas à utilização de sequências didáticas para o ensino de NIR.....	41
Quadro 4: dados das pesquisas relacionadas à utilização da História da Matemática para o ensino de NIR.....	45
Quadro 5: dados das pesquisas relacionadas à formação de professores para o ensino de NIR.....	47
Quadro 6: total de livros de Matemática distribuídos por meio do PNLD (2020) - Anos Finais E.F.....	72
Quadro 7: Objetivos específicos da pesquisa e instrumentos de coleta de dados.....	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Frequência das respostas sobre percepções iniciais dos alunos de 7º anos sobre NIR.....	173
Tabela 2: Frequência de respostas relacionadas à representação conceitual em contextos relacionados ao NIR.....	174
Tabela 3: Frequências de Compreensões relativas ao sinal de um Número Inteiro Relativo quando associado a um contexto.....	176
Tabela 4: compreensões e dificuldades dos estudantes relacionadas à introdução da temática reta numérica.....	182
Tabela 5: Compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à reta numérica dos NIR.....	184
Tabela 6: Compreensões e dificuldades dos estudantes relativas às propriedades da reta numérica dos NIR.....	185
Tabela 7: compreensões e dificuldades observadas na comparação de NIR utilizando a reta numérica.....	186
Tabela 8: compreensões e dificuldades apresentadas pelos estudantes com relação a intervalos na reta numérica.....	189
Tabela 9: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre módulo de um NIR.....	195
Tabela 10: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre oposto/simétrico de um NIR.....	197
Tabela 11: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre comparação e ordenação de NIR em um contexto bancário.....	202
Tabela 12: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre comparação de NIR em um contexto de temperatura.....	204
Tabela 13: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre ordenação de NIR.....	205
Tabela 14: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre comparação e ordenação de NIR.....	207
Tabela 15: Compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à representação e adição de deslocamentos.....	211
Tabela 16: Compreensões e dificuldades referentes à representação e adição de deslocamentos.....	214
Tabela 17: compreensões e dificuldades dos estudantes na realização e formulação de hipóteses envolvendo adições de NIR.....	216

Tabela 18: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à descoberta da operação da adição em um padrão pré-determinado.....	218
Tabela 19: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à realização de adições de NIR em um determinado contexto.....	219
Tabela 20: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à adição de NIR em um contexto bancário.....	221
Tabela 21: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à representação e adição de uma situação envolvendo NIR.....	223
Tabela 22: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes às propriedades da adição de NIR.....	224
Tabela 23: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação aos significados da subtração.....	231
Tabela 24: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à representação e à realização da subtração.....	234
Tabela 25: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre subtração de NIR no contexto da variação de temperatura.....	236
Tabela 26: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à representação e subtração de NIR no contexto de temperatura.....	238
Tabela 27: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à operação de subtração no contexto de encontrar a transformação e o estado inicial.....	239
Tabela 28: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à subtração de NIR no contexto de sequências numéricas.....	240
Tabela 29: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à subtração de NIR no contexto bancário.....	242
Tabela 30: compreensões e dificuldades relacionadas à multiplicação de NIR no contexto de pontuações (proporção simples)	249
Tabela 31: compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à multiplicação de NIR.....	251
Tabela 32: Compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à multiplicação de NIR no contexto de pontuação.....	252
Tabela 33: compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à multiplicação de NIR no contexto de padrões numéricos.....	254
Tabela 34: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à multiplicação de Números Inteiros Relativos no contexto de pontos ganhos e perdidos.....	256

Tabela 35: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à multiplicação de NIR no contexto de padrões numéricos.....	257
Tabela 36: compreensões e dificuldades relativas à multiplicação de NIR no contexto de medidas de profundidade e altitude.....	259
Tabela 37: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à divisão de NIR no contexto de dívidas e parcelas.....	265
Tabela 38: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à divisão de NIR no contexto da partição equitativa e de medida.....	266
Tabela 39: compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à divisão de NIR no contexto bancário.....	267
Tabela 40: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes às propriedades da divisão de NIR.....	268

LISTA DE SIGLAS

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

FURB – Universidade Regional de Blumenau

LDB - Lei de diretrizes e bases

NIR- Número Inteiro Relativo

PIBID - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência

PUC-SP- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

UECE - Universidade Estadual do Ceará

UEL - Universidade Estadual de Londrina

UEMS- Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

UENF – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

UEPA - Universidade do Estado do Pará

UERN – Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

UERR – Universidade Estadual de Roraima

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFMT - Universidade Federal de Mato Grosso

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina

UFSCAR - Universidade Federal de São Carlos

UFSJ – Universidade Federal de São João del-Rei

UFVASF – Universidade Federal do Vale do São Francisco

UNIFESP- Universidade Federal de São Paulo

UNIR – Universidade Federal de Rondônia

UNIVATES – Universidade do Vale do Taquari

USP - Universidade de São Paulo

UTFPR- Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	20
2.	LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO SOBRE A TEMÁTICA NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS.....	31
2.1	Categoria 1: Pesquisas bibliográficas/Revisões bibliográficas sobre a temática Número Inteiro Relativo.....	32
2.2	Categoria 2: Utilização de jogos, materiais concretos e tecnologias para o ensino de Números Inteiros Relativos.....	34
2.3	Categoria 3: Utilização de atividades/sequências didáticas para o ensino de Números Inteiros Relativos.....	40
2.4	Categoria 4: utilização da História da Matemática para o ensino de Números Inteiros Relativos.....	45
2.5	Categoria 5: Formação de professores para o ensino de Números Inteiros Relativos.....	46
2.6	Síntese do levantamento bibliográfico realizado no Catálogo de Teses e Dissertações-CAPEs.....	47
3.	OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: PONTO DE VISTA HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO.....	50
4.	NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS EM ORIENTAÇÕES CURRICULARES.....	59
4.1	Os Números Inteiros Relativos nos Parâmetros Curriculares Nacionais.....	59
4.2	Os Números Inteiros Relativos na Base Nacional Comum Curricular.....	65
4.3	Os Números Inteiros Relativos no Currículo Paulista.....	68
5.	A PERSPECTIVA DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS EM LIVROS DIDÁTICOS ELABORADOS A PARTIR DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR.....	71
5.1	Livro: A conquista da Matemática- José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci (2018)	73
5.2	Livro: Teláris Matemática- Luiz Roberto Dante (2018)	77
5.3	Livro: Matemática Bianchini- Edvaldo Bianchini (2018)	80
5.4	Livro: Araribá Mais Matemática- Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva (2018)	84

5.5	Livro: Matemática Realidade & Tecnologia- Joamir Roberto de Souza (2018)	87
5.6	Análise geral dos livros didáticos.....	91
6.	APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE NÚMERO INTEIRO RELATIVO..	96
6.1	A Teoria dos Campos Conceituais.....	96
6.2	Os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas.....	100
6.3	O conceito de Número Inteiro Relativo.....	102
7.	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	107
8.	METODOLOGIA.....	115
8.1	A natureza da pesquisa.....	115
8.2	Objetivos da pesquisa.....	116
8.3	O processo investigativo: o caminhar da pesquisa.....	117
8.4	Atividades elaboradas/reelaboradas pelo pesquisador no âmbito do Programa Residência Pedagógica- Licenciatura em Matemática (UNESP-PP).....	120
8.5	Significado de um Número Inteiro Relativo.....	122
8.5.1	Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da Educação Básica sobre o significado de um Número Inteiro Relativo.....	127
8.6	O conjunto dos números inteiros e sua representação na reta numérica.....	130
8.6.1	Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre a construção da reta numérica dos inteiros.....	132
8.7	Módulo ou valor absoluto de um número inteiro e conceito de oposto ou simétrico.....	136
8.7.1	Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre módulo ou valor absoluto de um número inteiro e conceito de oposto ou simétrico.....	136
8.8	Ordenação e comparação entre Números Inteiros Relativos.....	139
8.8.1	Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre comparação e ordenação de Números Inteiros Relativos.....	140
8.9	Adição de Números Inteiros Relativos.....	144
8.9.1	Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre adição de Números Inteiros Relativos.....	147
8.10	Subtração de Números Inteiros Relativos.....	155
8.10.1	Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre subtração de Números Inteiros Relativos.....	157
8.11	Multiplicação de Números Inteiros Relativos.....	162

8.11.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre multiplicação de Números Inteiros Relativos.....	164
8.12 Divisão de Números Inteiros Relativos.....	169
8.12.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre divisão de Números Inteiros Relativos.....	169
9. OS RESULTADOS DA PESQUISA.....	173
9.1 Significado de Número Inteiro Relativo: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	173
9.1.1 Análise das respostas dos estudantes sobre o significado de Número Inteiro Relativo	178
9.2 O Número Inteiro Relativo e sua representação na reta numérica: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	181
9.2.1 Análise das respostas dos estudantes sobre o Número Inteiro Relativo e sua representação na reta numérica.....	191
9.3 Módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	195
9.3.1 Análise das respostas dos estudantes sobre módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo	199
9.4 Ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	201
9.4.1 Análise das respostas dos estudantes sobre ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos.....	208
9.5 Adição de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	211
9.5.1 Análise das respostas dos estudantes sobre adição de Números Inteiros Relativos	226
9.6 Subtração de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	231
9.6.1 Análise das respostas dos estudantes sobre subtração de Números Inteiros Relativos	244
9.7 Multiplicação de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	248
9.7.1 Análise das respostas dos estudantes sobre multiplicação de Números Inteiros Relativos	261

9.8	Divisão de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)	265
9.8.1	Análise das respostas dos estudantes sobre divisão de Números Inteiros Relativos	269
10.	CONCLUSÕES.....	272
11.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	280
	REFERÊNCIAS.....	289

1. INTRODUÇÃO

A ideia para desenvolver esta pesquisa surgiu a partir de alguns momentos que marcaram a minha trajetória acadêmico-profissional. O primeiro deles se refere às experiências vividas no Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID), no período de 2013 a 2015, enquanto estudante do curso de licenciatura em Matemática da FCT-UNESP. A participação nesse projeto proporcionou leituras sobre algumas metodologias em Educação Matemática, participações em eventos e possibilitou o trabalho com tais metodologias na escola pública durante a graduação. Considero esse um dos fatores determinantes para o desenvolvimento desta pesquisa, pois foi nesse período que decidi seguir os estudos na área de Educação.

Outro momento que cabe ressaltar se deu no ano de 2015, quando ingressei no Mestrado em Educação da FCT-UNESP (concluído em 2018) que demandou leituras referentes à formação de professores de Matemática e às competências que estes profissionais devem possuir para ensinar, pois a pesquisa realizada objetivou caracterizar as concepções e práticas relatadas pelos docentes das licenciaturas em Matemática de Presidente Prudente (SP), relativas à formação de futuros professores (BATISTA, 2018).

Um dos questionamentos presentes na dissertação foi com relação ao ensino de Matemática na Educação Básica. Afinal, para ensinar Matemática na escola básica os professores devem fazer uma transposição/adaptação do conteúdo aprendido na universidade. Como eles devem fazer isso? Essa transposição/adaptação dos conteúdos de Matemática deve ser responsabilidade de quem, da disciplina da universidade, do professor formador, ou do licenciando?

Levando em conta as respostas analisadas durante a pesquisa, houve uma visão fragmentada dos formadores sobre a responsabilidade de adaptação dos conteúdos para a Educação Básica. Em que pesem as respostas de caráter unilateral a esse respeito, é inegável que o curso tem a incumbência de proporcionar possibilidades para a articulação teoria e prática, fato não compreendido pelos formadores. Caso isso não ocorra, o futuro professor não estará totalmente preparado para ensinar Matemática, tendo que buscar por si só a articulação da teoria e da prática (BATISTA, 2018).

Essas lacunas encontradas durante a pesquisa de mestrado, sendo um professor de Matemática em um processo de formação continuada, me motivam a refletir sobre possibilidades de adaptação/reelaboração de conteúdos matemáticos aprendidos na universidade para o ensino na Educação Básica. Portanto, considero que uma pesquisa que promova esse aspecto, com ênfase em conceitos matemáticos complexos para o

aprendizado de estudantes venha colaborar não somente com minha prática profissional, mas também apresentar alternativas para melhoria dos processos de ensino e aprendizagem desses conceitos.

Em que pesem essas considerações, um dos primeiros momentos que senti a necessidade de articular a teoria aprendida na universidade com a prática em sala de aula aconteceu no ano de 2016, em que fui aprovado no concurso público para o cargo de professor de Matemática do Ensino Fundamental II na cidade de Álvares Machado para lecionar em turmas do sexto ao nono ano. Esse também foi um momento preponderante na minha trajetória acadêmica, pois o fato de estar inserido na rede pública enquanto realizava o mestrado me fez refletir sobre algumas lacunas presentes na formação como docente, inclusive a referida questão de adaptação de conteúdos aprendidos na universidade para o ensino de conceitos matemáticos para estudantes do Ensino Fundamental. Afinal, o fato de “saber muita Matemática” não garantia, necessariamente, que eu estivesse totalmente preparado para ensinar a disciplina.

Isso exposto, em todos os anos que lecionei em turmas de Ensino Fundamental e Médio da Educação Básica percebi que os alunos apresentaram muitas dificuldades envolvendo operações com Números Inteiros Relativos (NIR), e por mais que esse conceito, na minha opinião, fosse trivial, notei que havia diversos empecilhos nos processos de ensino e aprendizagem. Esse fato causou-me (e ainda causa) preocupação, visto que a compreensão deste conceito é de extrema importância para os estudantes, pois implica contribuição para formação do pensamento matemático e aporte para a aprendizagem dos demais conteúdos do currículo de Matemática.

Um exemplo que pode ilustrar essa situação salientada diz respeito a uma experiência que tive ao desenvolver o conteúdo de Equações do Segundo Grau em turmas de nono ano do Ensino Fundamental. Percebi que ao utilizarem a fórmula resolvente para determinarem as raízes das equações, os alunos se depararam com diversas situações que exigiam cálculos com inteiros (potenciação, adição, subtração, multiplicação, divisão) e que na adição, os estudantes recorriam a “regras de sinais da multiplicação” para resolução. Por exemplo, ao se depararem com a operação $-3 - 3$, muitas vezes ouvia o questionamento dos estudantes: “professor, essa conta dá seis positivos, porque menos com menos é mais, não é?”

As experiências que vivi lecionando Matemática para turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, bem como justificativas e resultados de relatos de experiências docentes e pesquisa sobre o Número Inteiro Relativo, corroboram a constituição do

problema dessa pesquisa: **a complexidade dos processos de ensino e aprendizagem do Número Inteiro Relativo na perspectiva de um conhecimento curricular escolar.**

Em suma, o ingresso na docência representou um fator muito importante para a escolha deste tema de pesquisa, porém, em que pesem as concepções e experiências relatadas, a literatura em geral também aponta o ensino e a aprendizagem de Números Inteiros Relativos como processos complexos.

Borelli e Pires (2017) ao realizarem um levantamento de dissertações e teses, no período de 2010 a 2016, envolvendo a temática Números Inteiros Relativos selecionaram 29 trabalhos, sendo 26 dissertações e 3 (três) teses. De acordo com as autoras, houve um predomínio de trabalhos inerentes à categoria uso de jogos, materiais manipuláveis e/ou sequências didáticas como estratégia para o ensino dos Números Inteiros Relativos, compreendendo 15 pesquisas (14 dissertações e 1 tese).

Por conseguinte, inerente à categoria obstáculos e as dificuldades enfrentadas pelos alunos no ensino e na aprendizagem dos Números Inteiros Relativos, levantaram 6 (seis) trabalhos (5 dissertações e 1 tese). Em seguida, compareceu a categoria uso de tecnologias da informação como estratégia para o ensino dos números inteiros, com 5 trabalhos (5 dissertações). A categoria história da Matemática compreendeu 4 trabalhos (3 dissertações e 1 tese). Por fim, 1 trabalho tratou de um mapeamento de pesquisas (1 dissertação). Cabe ressaltar que duas dissertações foram colocadas em duas categorias distintas e, por isso, o número de trabalhos nas categorias é diferente do número total de dissertações e teses (BORELLI; PIRES, 2017).

Assim sendo, os resultados encontrados por Borelli e Pires (2017) constataram que o foco das pesquisas está mais relacionado à busca de estratégias didáticas que permitam uma maior aprendizagem dos estudantes com relação a esse conceito. Esse tipo de interesse em pesquisar estratégias para o ensino, talvez possa ser explicado pela dificuldade dos estudantes no processo de aprendizagem desse conceito.

Em termos cognitivos, Vergnaud (2009) salienta que uma das dificuldades dos alunos diante dos Números Inteiros Relativos é inerente ao fato de que a ideia de número tem sua origem nos conceitos de cardinal e de medida, sendo o cardinal a medida das quantidades discretas: conforme essa concepção inicial do número, cuja construção vem tanto da história da matemática quanto das primeiras aprendizagens numéricas das crianças, os números só podem ser positivos, já que são medidas.

Cid (2015), em sua tese de doutoramento, reforçou a preocupação dos professores com a maneira de ensinar o conceito de Número Inteiro Relativo para que os estudantes

não cometam erros em cálculos envolvendo esse conjunto. Isso exposto, a autora ressaltou que apesar dos esforços dos professores no processo de ensino, os alunos têm grande dificuldade de entender as operações entre inteiros, cometendo frequentes erros em cálculos envolvendo números negativos e esquecendo sua existência no raciocínio matemático (CID, 2015).

Assim como diversos estudantes ao se depararem com situações envolvendo Números Inteiros Relativos acabam desconsiderando a existência desses números, historicamente, na elaboração conceitual do Número Inteiro Relativo, muitos estudiosos tiveram a mesma postura. Glaeser (1985), por exemplo, afirma que o processo de desenvolvimento dos Números Inteiros Relativos demandou muito tempo e não foi de fácil aceitação, pois durante séculos os matemáticos se impressionaram com o zero absoluto, abaixo do qual nada se poderia conceber.

Levando em consideração aspectos epistemológicos, o autor indica seis obstáculos que compareceram na constituição dos Números Inteiros Relativos: inaptidão para manipular as quantidades negativas isoladas, dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas, dificuldade em unificar a reta numérica, a ambiguidade dos dois zeros, estagnação no estágio das operações concretas e desejo de um modelo unificador (GLAESER, 1985).

Concordando com os autores em questão, e a partir da minha experiência na docência, também percebi que os alunos, tanto do Ensino Fundamental, quanto do Ensino Médio, acabam “esquecendo” da existência do sinal, positivo ou negativo, que caracteriza o Número Inteiro Relativo principalmente em operações envolvendo a adição.

Nesses termos, surgem os seguintes questionamentos: será que essa “não aceitação” e “evitação” de números negativos por parte dos estudantes, reforça a presença, atualmente, de obstáculos que permearam a constituição epistemológica do conceito de Número Inteiro Relativo? Quais são as compreensões e dificuldades dos estudantes no processo de aprendizagem do conceito de Número Inteiro Relativo? No processo de aprendizagem de Número Inteiro Relativo quais as dificuldades dos estudantes se assemelham às que ocorreram historicamente na elaboração desse conceito?

Alguns dados podem colaborar para responder estas questões, tais como os resultados de desempenho de alunos da Educação Básica em questões sobre o Número Inteiro Relativo presentes no Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP, que evidenciaram que menos da metade (43,3%) dos estudantes responderam corretamente a uma questão envolvendo esse conceito. Chama atenção que

nessa avaliação os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental realizaram a soma dos números inteiros, ignorando seus sinais, e aplicaram incorretamente alguma regra para decidir se o resultado seria positivo ou negativo (SÃO PAULO, 2017).

Em termos curriculares, atualmente, o ensino de Números Inteiros Relativos é abordado no sétimo ano do Ensino Fundamental, como proposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017). Este conteúdo está presente na unidade temática “Números”, abrangendo o objeto de conhecimento¹ “Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações”.

Ao explorar o conjunto dos Números Inteiros Relativos, como disposto na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), há duas habilidades² que precisam ser desenvolvidas: “(EF07MA03): Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração” (p. 307) e “(EF07MA04): Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros” (p.307).

Já no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), o ensino do conceito dos Números Inteiros Relativos também comparece no sétimo ano do Ensino Fundamental, e assim como na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), tem como objeto de conhecimento: “Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações” (SÃO PAULO, 2019, p. 351), compreendendo as mesmas habilidades mencionadas no documento federal.

De igual modo, os livros didáticos presentes no PNLD-2020 balizam o conteúdo referente ao Número Inteiro Relativo nas habilidades mencionadas, propiciando, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), a apresentação articulada dos objetos de conhecimento e habilidades, nos diferentes campos da Matemática, visando à garantia do desenvolvimento das competências pelo estudante. Segundo esse documento, “tais articulações permitem ao(à) estudante perceber que os conhecimentos matemáticos não são isolados em campos estanques e/ou autossuficientes” (BRASIL, 2017, p.7).

Cabe ressaltar que os critérios de avaliação para que uma obra seja aprovada para a escolha de professores referem-se a diversos aspectos: respeito à legislação educacional

¹ Conforme a BNCC (2017) os objetos de conhecimento se referem aos conteúdos, conceitos e processos organizados em diferentes unidades temáticas, sendo aplicados a partir do desenvolvimento de um conjunto de habilidades.

² Representam as aprendizagens essenciais que devem ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes (BRASIL, 2017).

brasileira, a princípios éticos e de cidadania, coerência e adequação teórico-metodológica, dentre outros (BRASIL, 2019). Além disso, de acordo com o Guia dos livros didáticos (BRASIL, 2019, p. 9)

a avaliação objetiva sobretudo garantir que os materiais contribuam para o desenvolvimento das competências e habilidades envolvidas no processo de aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental, conforme definidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Porém, para Silva (2019) a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) indica, de forma muito prescritiva, o que deve ser trabalhado nas escolas. Segundo o autor, baseando-se nas ideias de Goodson (1995), a aceitação de currículos prescritivos reflete um risco à Educação, pois limita o poder de escolha e decisão do professor. Essa premissa desconsidera a ideia de um documento com “bases multiculturais e interdisciplinares, para a transformação social, favorecendo a todos a condição de aprender, contrariando tipos de currículo que segregam, excluem ou que simplesmente reproduzem a sociedade que já está posta” (SILVA, 2019, p.56).

De acordo com Oliveira (2020) essa lógica prescritiva baseada em competências e habilidades permite um controle da atividade docente, uma vez que converte a avaliação em um modo de rastrear quantos e quais objetivos de aprendizagem os estudantes tiveram e assim, quantas e quais finalidades os professores puderam alcançar com seus alunos, pressionando para que escolas e professores se limitem ao ensino do que está definido na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

Dada a compressão dos conteúdos (conhecimentos, competências e habilidades), os materiais didáticos serão produzidos com facilidade em âmbito nacional, compassados com os modelos esperados de avaliação. A indústria do tecnicismo pedagógico terá pleno impulso. O professor, como qualquer trabalhador que experimenta novas ondas de incremento tecnológico no sistema produtivo capitalista, tenderá a ter mais precariedade em seu trabalho e se frustrará mais em sua rotina (OLIVEIRA, 2020, p. 11).

Com base na problemática apresentada, surge a seguinte pergunta: em que medida o objetivo de desenvolver competências e habilidades curriculares relacionadas a Números Inteiros Relativos (NIR), tal como apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), é orientador de um trabalho didático-pedagógico que implique a compreensão do Número Inteiro Relativo pelos alunos?

Responder a essa questão leva a uma incursão por orientações curriculares, como aquelas encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), para os quais um dos caminhos para aprendizagem dos Números Inteiros Relativos é evitar o

processo de ensino por meio da memorização de regras para efetuar cálculos em situações descontextualizadas, pois faz com que muitos alunos não reconheçam os inteiros como extensão dos Números Naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não obtêm êxito na aplicação, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do referido conceito.

No entanto, para a superação desse processo recorrente no ensino de Matemática, Pontes (2018, p.46) afirma que

[...] as escolas de Educação Básica devem estar preparadas para uma quebra de paradigma educacional na sua proposta metodológica de ensino de Matemática. Faz-se necessário uma aprendizagem voltada para investigação e resolução de problemas, em que as atividades sugeridas tragam significação para o aluno. A Resolução de Problemas é uma metodologia do ensino de Matemática por meio da qual o professor recomenda ao aluno-aprendiz situações-problema evidenciadas pela construção de novos conceitos através de uma investigação.

Nesse âmbito, segundo Fiorentini (2012), o uso de metodologias diferenciadas no ensino de Matemática pode contribuir para uma maior contextualização dos conceitos e, conseqüentemente, para a superação da concepção que reduz essa disciplina a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem a preocupação em fundamentá-los ou justificá-los, pois corrobora o surgimento de um ambiente similar àquele vivenciado pelos matemáticos quando estão em processo de produção/criação do conhecimento matemático.

É um ambiente que se caracteriza como “de formulação de conjecturas ou hipóteses as quais são testadas e verificadas através de experiências mentais, podendo ser provadas ou não” (FIORENTINI, 2012, p.66).

Essas metodologias podem ser mencionadas como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o processo de escolarização. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais em Matemática, como o raciocínio, representação, comunicação e argumentação (BRASIL, 2017).

Partindo desse pressuposto, especificamente com relação à Resolução de Problemas, ressalta-se que esta possibilita aos estudantes mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance, proporcionando a oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos (BRASIL, 1998).

Nesse sentido, o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) orienta que a Resolução de Problemas

[...] é uma atividade central no ensino e na aprendizagem de Matemática porque favorece não apenas que os estudantes articulem e refinem seu pensamento, mas também que percebam diferentes perspectivas para enfrentar uma dada situação. A possibilidade de enfrentar um desafio promove a reflexão e a valorização de formas pessoais de resolução, o uso da criatividade na busca de uma estratégia que modele e resolva a situação enfrentada, a convivência com diferentes pontos de vista, bem como o ajuste consciente, por cada um, de suas próprias estratégias. Isso contribui para que as soluções propostas sejam as mais eficientes e precisas, propicia persistência, capacidade de refletir, investigar, questionar e observar elementos característicos do pensar crítico (SÃO PAULO, 2019 p. 313).

A relevância de utilizarmos a Resolução de Problemas nessa pesquisa com Números Inteiros Relativos encontra respaldo no fato de que é muito mais significativo para o estudante tornar-se sujeito de sua aprendizagem, do que ser, meramente, um reprodutor de regras pré-estabelecidas desse conteúdo (POZO, 1998). Portanto, de acordo com Pais (2016, p. 37) é necessário

[...] buscar problemas que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam estratégias pessoais de pesquisa. Essa valorização do uso pedagógico do problema fundamenta-se no pressuposto de que seja possível o aluno sentir motivado pela busca de conhecimento. Seguindo essa ideia, o trabalho com a resolução de problemas amplia os valores educativos do saber matemático e o desenvolvimento dessa competência contribui na capacitação do aluno para melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Assim sendo, o estudante deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma iniciação à investigação, que desenvolva o hábito de fazer uso de seu raciocínio e cultive o gosto pela resolução de problemas (PAIS, 2016). Portanto, é pertinente responder a seguinte questão: quais são os limites e as potencialidades da Resolução de Problemas nos processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos?

Diante do problema de pesquisa e das questões que se buscam responder, esta pesquisa tem como objetivo geral compreender aspectos do ensino e da aprendizagem do Número Inteiro Relativo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da implementação de um conjunto de atividades didático-pedagógicas fundamentadas em pressupostos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo e da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica.

Assim sendo, a tese que norteia esse trabalho é a de que as atividades didático-pedagógicas fundamentadas nos aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo e em pressupostos da Resolução de Problemas como perspectiva

metodológica (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, VAN DE WALLE, 2009, ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) contribuem para o aprendizado desse conceito pelos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Para atingirmos o objetivo geral, traçamos os seguintes objetivos específicos:

- Descrever aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo, evidenciando as principais dificuldades na construção desse conceito e nos processos de ensino e aprendizagem escolar;
- Descrever como o conceito de Número Inteiro Relativo é abordado em documentos que norteiam os processos de ensino e aprendizagem no âmbito da educação escolar brasileira: Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019);
- Descrever e analisar como a temática dos Números Inteiros Relativos é abordada nos livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental, presentes no PNLD-2020;
- Elaborar e desenvolver com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, um conjunto de atividades didático-pedagógicas sobre Números Inteiros Relativos apoiadas em seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos e em pressupostos da Resolução de Problemas como metodologia de ensino;
- Verificar como os estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental assimilam o conceito de Número Inteiro Relativo, evidenciando quais compreensões e dificuldades referentes ao conteúdo eles apresentam.

O relatório de qualificação aqui apresentado foi organizado em nove capítulos, descritos a seguir.

No primeiro capítulo apresentamos o levantamento bibliográfico de dissertações e teses, envolvendo o assunto Números Inteiros Relativos, realizado no Catálogo de Teses e Dissertações – CAPES, compreendendo o período de 2012 a 2022. Em suma, buscamos evidenciar o que os trabalhos revelam sobre os processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos para demonstrar em que pontos essa pesquisa desenvolvida avança para contribuir com estudos sobre a referida temática.

No segundo capítulo abordamos os Números Inteiros Relativos num ponto de vista histórico-epistemológico. Nesse contexto, apresentamos o que os autores Glaeser (1985), Boyer (1991), Teixeira (1992; 1993), Caraça (2003), Oliveira (2019), dentre outros, discutem sobre a história e pressupostos epistemológicos relativos aos Números Inteiros Relativos, visando abordar as principais dificuldades na construção desse

conceito e, conseqüentemente, nos processos de ensino e aprendizagem escolar.

No terceiro capítulo discorremos sobre como os Números Inteiros Relativos são abordados em diferentes documentos que norteiam o processo de ensino de conceitos no âmbito da educação escolar brasileira. Assim sendo, foram escolhidos os seguintes documentos para descrição: Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019).

No quarto capítulo elucidamos a perspectiva didática para o ensino de Números Inteiros relativos com base na descrição e análise de cinco coleções de livros de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental com maior número de escolhas no Brasil, de acordo com os dados do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do ano de 2020.

No quinto capítulo abordamos a perspectiva cognitiva da aprendizagem de Números Inteiros Relativos tendo como base as contribuições de Vergnaud (1981; 1986; 1990; 2009), Teixeira (1993), Borba e Nunes (2004), Borba (2009), Duval (2012, 2018), dentre outros. Essa abordagem se justifica, pois, compreender como o estudante assimila, em termos cognitivos, o conceito de Número Inteiro Relativo é fundamental para esse trabalho, principalmente no que tange à construção das atividades didáticas que foram desenvolvidas com os alunos da Educação Básica.

No sexto capítulo versamos sobre a Resolução de Problemas, apresentando aspectos relacionados a características dessa metodologia, principalmente no que tange às diferentes abordagens. Para tanto, nos baseamos, principalmente, em autores como Schroeder e Lester (1989), Polya (1995), Echeverría e Pozo (1998), Van de Walle (2009), Onuchic e Allevato (2011), Allevato e Onuchic (2014) Edel Pontes (2018) e outros.

No sétimo capítulo apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa. Em suma, este estudo é qualitativo de caráter analítico descritivo, compreendendo as seguintes etapas: levantamento teórico sobre a produção da área; análise documental dos livros didáticos de Matemática presentes no PNLD-2020, focando em Números Inteiros Relativos; construção das atividades didáticas sobre Números Inteiros Relativos; desenvolvimento das atividades didáticas com os alunos dos sétimos anos da Educação Básica; análise de conteúdo (BARDIN, 2011)

No oitavo capítulo apresentamos, discutimos e analisamos os resultados da pesquisa.

Por fim, tecemos considerações a respeito dos resultados da pesquisa, com o objetivo de levantar alguns pontos que se fizeram presentes a partir da análise dos dados,

no sentido de elucidar aspectos referentes ao ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos, com base em pressupostos epistemológicos, didáticos e cognitivos deste conceito, fundamentado na Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

Portanto, esperamos que os resultados dessa pesquisa nos possibilitem compreender os processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos, levando em consideração aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos envolvidos nesse conceito.

Com o desenvolvimento de um conjunto de atividades didático-pedagógicas, apoiadas em pressupostos da Resolução de Problemas, esperamos levantar as principais compreensões e dificuldades dos estudantes e elencar as potencialidades dessa metodologia nos processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos.

2. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO SOBRE A TEMÁTICA NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

O pesquisador ao elaborar uma investigação deve rever a literatura acadêmica sobre o assunto que norteará o trabalho, pois essa revisão pode contribuir para ressaltar a necessidade de pesquisa sobre o tema, limitando o escopo da investigação (CRESWELL, 2007).

De acordo com Triviños (1997) essa etapa é de suma importância no desenvolvimento do trabalho, pois o processo de levantamento e avaliação do material bibliográfico que o pesquisador encontra, lhe ensinará até onde outros investigadores têm chegado nas suas pesquisas, as metodologias empregadas, as dificuldades que tiveram de enfrentar e o que pode ser ainda investigado.

Nesse sentido, visando compreender o que as pesquisas que envolvem a temática Números Inteiros Relativos nos revelam e buscando ampliar a discussão sobre processos de ensino/aprendizagem desse conceito, realizamos um levantamento bibliográfico de trabalhos elaborados nos últimos dez anos (2012-2022) no Catálogo de Teses e Dissertações-CAPES.

Para tanto, utilizamos como descritor para a busca no catálogo o termo “Números Inteiros” (entre aspas) obtendo o retorno de 198 documentos. A partir disso, realizamos a leitura dos títulos e resumos das pesquisas buscando encontrar singularidades com a referida temática. Para a análise selecionamos 33 trabalhos, sendo 31 dissertações e duas teses que têm relação com a temática Números Inteiros Relativos.

Levando em consideração os trabalhos encontrados, que englobam nosso objeto de estudo, passamos a analisar os objetivos, a metodologia e as conclusões obtidas em cada um deles. A reflexão sobre a produção de conhecimento nas dissertações e teses possibilitou compreender como os estudos acerca da temática “Números Inteiros Relativos” vêm sendo desenvolvidos nos Programas de Pós-graduação.

Ao mesmo tempo, permitiu-nos conhecer o enfoque desses trabalhos de forma a orientar nossos questionamentos a respeito do conteúdo em análise. Para tanto, é válido ressaltar que nosso objetivo é destacar as temáticas abordadas, os objetivos delineados, a metodologia e as conclusões assumidas, procurando enfatizar algumas semelhanças e diferenças em relação a nossa investigação.

Assim sendo, tais documentos foram divididos em cinco categorias que serão descritas a seguir: revisões bibliográficas sobre a temática Número Inteiro Relativo; utilização de jogos, materiais concretos e tecnologias para o ensino de Número Inteiro

Relativo; utilização de atividades/sequências didáticas para o ensino de Número Inteiro Relativo; utilização da História da Matemática para o ensino de Número Inteiro Relativo; formação de professores para o ensino de Número Inteiro Relativo.

2.1 Categoria 1: Pesquisas bibliográficas/Revisões bibliográficas sobre a temática Número Inteiro Relativo

Nessa categoria consideramos os trabalhos que apresentaram dados sobre a produção de dissertações e teses que abordaram revisões bibliográficas sobre a temática Números Inteiros Relativos. Nesse sentido, conforme os parâmetros para a escolha dos documentos, selecionamos três dissertações (9,1% do total de trabalhos). O tipo de documento, ano de defesa da dissertação, instituição do pesquisador, autor e título da pesquisa estão presentes no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: dados das pesquisas relacionadas a revisões bibliográficas sobre a temática NIR

Tipo de documento	Ano	Instituição	Autor	Título
Dissertação	2012	PUC-SP	AMORIM, Sandra Regina Correa	Números inteiros: panorama de pesquisas produzidas de 2001 a 2010
Dissertação	2013	Universidade Anhanguera de São Paulo	TEODORO, Marcia Maria	Obstáculos e dificuldades relacionados à aprendizagem de números inteiros
Dissertação	2021	UFMT	CAVALCANTE, Zillene Souza	Ensino aprendizagem dos números inteiros no Ensino Fundamental: um olhar sobre as teses e dissertações produzidas no Brasil entre os anos de 2009 a 2019

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

O trabalho de Amorim (2012) objetivou realizar um levantamento das dissertações e teses defendidas no período de 2001 a 2010, em quatro universidades do estado de São Paulo: PUC-SP, UNESP, UNICAMP e USP, com enfoque no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de números inteiros. Por meio de um estado da arte, analisou 12 trabalhos que foram categorizados em três eixos: Jogos e Materiais Manipulativos na construção do objeto matemático Números Inteiros; A utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação- TICs no processo de ensino de números inteiros e as implicações; Livro Didático e Materiais Impressos.

Amorim (2012) ressaltou que, com o levantamento, foi possível identificar que dos trabalhos selecionados, dez destinaram-se a proporcionar situações que pudessem favorecer a construção ou ampliação de conhecimentos sobre o conceito de Números Inteiros Relativos, seis utilizaram-se de pressupostos da pesquisa qualitativa e seus

procedimentos metodológicos, contemplando a aplicação de testes iniciais, intervenção de ensino e pós-testes; oito trabalhos mostraram convergências entre objetivos, quando se buscou evidenciar a eficiência de diferentes estratégias no processo de ensino e aprendizagem. Com relação ao referencial teórico presente nos trabalhos, metade recorreram às ideias de Jean Piaget e Raymond Duval. Por fim, oito dos trabalhos referiram-se a recursos utilizados na aprendizagem de números inteiros (jogos, materiais manipulativos e tecnologias de informação e comunicação).

Isso exposto, Amorim (2012) reforçou a necessidade da ampliação de pesquisas sobre a temática números, além de programas de formação continuada para professores que proporcionem o estudo de erros e dificuldades dos estudantes na resolução de problemas envolvendo os Números Inteiros Relativos.

Já Teodoro (2013) objetivou, por meio de um estudo documental, verificar em pesquisas em educação matemática, dificuldades de aprendizagem e obstáculos para o ensino dos números inteiros, bem como, buscar orientações para o ensino desses números em documentos que regem a educação básica, analisando se essas orientações se fazem presentes em livros didáticos, por serem estes considerados como o principal material de apoio para o professor no trabalho em sala de aula. A autora constatou que há a preocupação de alguns autores com tratamento dado à abordagem de operações com números inteiros e que as orientações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais estão presentes nos livros didáticos, porém em situações descontextualizadas com o predomínio de memorização de regras.

Por sua vez, o trabalho de Cavalcante (2021) teve como objetivo geral apresentar um panorama das pesquisas de mestrado e doutorado sobre o ensino aprendizagem dos números inteiros entre os anos de 2009 e 2019. Realizando um estado da arte, observou que os resultados encontrados destacaram a predominância de estudos referentes ao uso de materiais concretos e manipuláveis/jogos/resolução de problemas/sequências didáticas e outras atividades para o ensino de Números Inteiros Relativos, ao passo que a ênfase na formação dos professores para o ensino desse conceito representou a temática com menor número de pesquisas.

Assim sendo, Cavalcante (2021) destacou a necessidade de que mais pesquisas tenham como foco a formação de professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos, e ainda trabalhos que possam replicar estudos com bons resultados já realizados envolvendo Números Inteiros

Relativos, principalmente os que se utilizam de jogos, recursos tecnológicos, Resolução de Problemas e História da Matemática.

De modo geral, podemos ressaltar que as três pesquisas possuem a abordagem qualitativa e são do tipo documental. Além disso, apesar de analisarem trabalhos, documentos oficiais e livros didáticos produzidos em intervalos de tempo diferentes, ressaltaram a necessidade da continuidade dos estudos que abrangem os processos de ensino/aprendizagem de Números Inteiros Relativos.

2.2 Categoria 2: Utilização de jogos, materiais concretos e tecnologias para o ensino de Números Inteiros Relativos

Nesta categoria são enfatizadas pesquisas que abordaram a utilização de jogos, materiais e tecnologias para o processo de ensino de Números Inteiros Relativos. Diante dos dados levantados, selecionamos 15 documentos (45,5% do total) que têm relação com nosso objeto de estudo. Os dados das pesquisas estão dispostos no quadro 2 a seguir.

Quadro 2: dados das pesquisas relacionadas à utilização de jogos, materiais concretos e tecnologias para o ensino de NIR

Tipo de documento	Ano	Instituição	Autor	Título
Dissertação	2012	UNIVATES	LIELL, Cláudio Cristiano	Jogo roletrando dos inteiros: uma abordagem dos números inteiros na 6ª série do Ensino Fundamental
Dissertação	2012	UFSCAR	SILVA, Maristela Alves.	Elaboração de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre números inteiros e suas operações
Dissertação	2013	UFVASF	SILVA, Levi Brasilino da	O ensino dos Números Inteiros Relativos com materiais concretos e recursos tecnológicos
Dissertação	2013	UFSJ	PINTO, Carlos Eustaquio	Pentes de ovos, ovos e as quatro operações básicas da matemática com números inteiros
Dissertação	2015	UNIVATES	COSTA, Antônio Silva da	Utilização de materiais alternativos numa intervenção pedagógica para uma aprendizagem significativa das operações dos números inteiros
Dissertação	2015	PUC-SP	SOUZA, Flavio Cabral de	Números Inteiros e suas operações: uma proposta de estudo para alunos do 6º ano com o auxílio de tecnologia
Dissertação	2016	UFRJ	SANTOS, Sanileni Gutemberg dos	Números inteiros: estratégias que visam facilitar a compreensão de conceitos e operações
Dissertação	2016	UERN	SOUSA, Marcos Aurelio da Silva	Jogos pedagógicos como elemento facilitador da aprendizagem dos números inteiros nos anos finais do Ensino Fundamental

Dissertação	2017	UENF	CORREIA, Lyvia Poggian	Uma intervenção no ensino de operações com números inteiros
Dissertação	2017	UNIR	PINHO, Claudinei de Oliveira	Avaliação do modelo e aplicação do jogo trilha da adição de números inteiros como recurso pedagógico no ensino de adição de números inteiros
Dissertação	2018	USP	FANTINI, Patrícia	Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros
Dissertação	2019	Centro Universitári o Vale do Cricaré	BASONI, Fabiana Torres	Ensino e Aprendizagem de Números Inteiros utilizando o jogo “Cartas Matemáticas”
Dissertação	2020	UFRRJ	OLIVEIRA, Andressa Alves Goncalves de	Motivando a Aprendizagem de Números Inteiros por Meio de Materiais Manipuláveis: uma Experiência no Sétimo ano do Ensino Fundamental
Dissertação	2020	UFMG	GONÇALVES, Amanda Natalia da Silva	Atividades contextualizadas e o ábaco dos inteiros: recursos didáticos para introduzir os números inteiros e as operações de adição e subtração no 7º ano
Dissertação	2021	UEMS	GARCEZ, Brenda Pavão	Jogos de Matemática voltados para a aprendizagem de números inteiros no Ensino Fundamental: propostas a partir da Classificação Esar

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

O trabalho de Liell (2012) de caráter quanti-qualitativo, analisou uma experiência com o jogo matemático “Roletrando dos Inteiros” como estratégia desencadeadora do processo de ensino, propondo verificar se esse jogo contribui para a aprendizagem da noção de Números Inteiros Relativos e das operações básicas desse conjunto numérico. A motivação para esta pesquisa, segundo o autor, é que durante a sua experiência docente os alunos apresentaram dificuldades com relação ao conceito de Números Inteiros, principalmente com as operações.

Os resultados evidenciaram a importância da utilização deste jogo para o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes, pois, de acordo com o autor, nas aulas com jogos, o professor atua como mediador e os alunos são ativos na construção de conhecimento. Além disso, o professor pôde compreender como os estudantes estão pensando de acordo com suas ações no jogo. Por fim, os registros feitos pelos estudantes em aula e os testes aplicados indicaram melhoria na aprendizagem dos Números Inteiros Relativos dos alunos que trabalharam com essa estratégia (LIEL, 2012).

Alves (2012), por meio de uma pesquisa qualitativa, objetivou analisar as principais elaborações explicitadas por estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre números inteiros e suas operações. Para tanto, a autora utilizou jogos matemáticos em seu trabalho, constatando que a introdução de tais jogos proporcionou aulas mais prazerosas, aumentando a participação dos estudantes, além do rendimento deles.

Silva (2013) objetivou em sua dissertação de abordagem quantitativa-qualitativa fazer uma comparação da aprendizagem de Números Inteiros Relativos pelos alunos do 7º ano, considerando o ensino tradicional e o ensino utilizando materiais concretos. Para tanto, identificou os conhecimentos prévios dos alunos sobre Número Inteiro Relativo por meio de atividades e após isso apresentou uma proposta de intervenção pedagógica utilizando materiais concretos.

Conforme o autor, utilizar os materiais concretos na construção do conceito foi importante, pois favoreceram a criatividade dos estudantes na elaboração de estratégia de resolução e busca de soluções para as atividades propostas. Como resultado, constatou que antes das intervenções os alunos apresentaram alto índice de erros nas questões relacionadas aos inteiros, mas depois de todo processo esse índice diminuiu.

O trabalho de Pinto (2013) é sobre o desenvolvimento de uma proposta metodológica visando a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem das operações básicas envolvendo inteiros (adição, subtração, multiplicação e divisão), utilizando materiais concretos durante as aulas. O autor reforçou que por meio dessa proposta houve contribuição para compreensão das ideias matemáticas, em detrimento da memorização de regras e procedimentos no processo de aprendizagem, pois o uso de material concreto nas aulas faz com que os estudantes participassem mais das aulas (PINTO, 2013).

A dissertação de Costa (2015), de cunho qualitativo e quantitativo, partindo da dificuldade dos alunos em compreender o conceito de Números Inteiros, buscou discutir se o uso de materiais alternativos para o ensino das operações nesse conjunto é potencialmente expressivo como recurso na aprendizagem dessas operações.

Os resultados desse trabalho mostraram que nas aulas com esses materiais, os estudantes mostraram-se ativos e participantes da construção do conhecimento frente ao conteúdo de números inteiros; os registros realizados em sala e as atividades aplicadas salientaram a melhora na aprendizagem dos alunos que utilizaram os materiais alternativos, promovendo um maior interesse pela Matemática e despertando nos alunos uma predisposição a aprender.

Souza (2015) teve como objetivo geral em sua dissertação verificar como os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, que não tiveram contato formal com números inteiros e suas operações, mobilizam seus conhecimentos prévios para resolver situações que envolvem objetos matemáticos e se eles poderiam se desenvolver de forma autônoma para a compreensão. Para tanto, desenvolveu uma sequência de atividades utilizando

recursos tecnológicos, procurando enfatizar a visualização do objeto matemático em situações concretas.

Ainda de acordo com Souza (2015), os resultados demonstraram que os estudantes foram capazes de compreender o Número Inteiro Relativo e suas operações, pois a familiaridade que eles têm com a tecnologia favoreceu a interação e possibilitou o desenvolvimento de novas conjecturas sobre este conceito matemático.

Santos (2016) objetivou em sua dissertação disponibilizar estratégias que possam ser utilizadas em sala de aula para auxiliar os alunos na construção do conhecimento sobre Número Inteiro Relativo. Assim, desenvolveu com um grupo de estudantes uma sequência de jogos envolvendo o conceito e, diante disso, constatou a contribuição com o processo de aprendizagem de Números Inteiros Relativos.

Conforme a autora, por meio dos jogos os estudantes aprenderam a lidar com símbolos, a pensarem por analogia, passaram a compreender e utilizar convenções e a observarem padrões, em detrimento à mera memorização de regras que envolvem o conceito de Número Inteiro Relativo (SANTOS, 2016).

A dissertação de Sousa (2016), de abordagem quanti-qualitativa e do tipo intervenção, teve como objetivo investigar a aprendizagem de Número Inteiro Relativo fazendo uso de cinco jogos pedagógicos.

Nesse sentido, utilizando questionários, observações, pré-testes e pós testes, constatou que a inserção de jogos pedagógicos no processo de ensino de Número Inteiro Relativo, além de ter facilitado a aprendizagem, tornando o aluno ativo no processo, “motivou os alunos a quererem mais, descobrirem mais, desconstruindo, nesse processo de ensino/aprendizagem, a visão negativa atribuída à Matemática, além de possibilitar maior aproximação entre os participantes, inclusive com o professor” (SOUSA, 2016, p. 110).

Correia (2017) desenvolveu sua pesquisa de campo de caráter qualitativo objetivando auxiliar os alunos na representação, compreensão, manipulação e fixação das operações com Números Inteiros Relativos. Para tanto, em um primeiro momento foi aplicado um pré-teste para verificar o nível de conhecimento dos alunos em relação aos números inteiros. Posteriormente, os estudantes foram submetidos a uma intervenção pedagógica elaborada a partir de jogos, materiais didáticos e contextualizações.

A partir disso, houve uma reaplicação do teste inicial para identificar se houve melhorias após a intervenção. A autora constatou durante os resultados da pesquisa que o desenvolvimento das atividades fez com que houvesse a aprendizagem significativa do

conceito de Número Inteiro Relativo, pois a manipulação de objetos e a utilização de Material Didático possibilitou aos estudantes a construção de conceitos a partir do concreto para que, em um momento posterior, atingissem um maior nível de abstração, o que facilita o processo de ensino-aprendizagem.

A dissertação de Pinho (2017) de abordagem quanti-qualitativa objetivou a elaboração de um jogo denominado “Trilha da adição de números inteiros” para auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem do conteúdo de números inteiros. Para verificar se o desenvolvimento com estudantes em sala deste jogo foi efetivo na aprendizagem, o pesquisador utilizou questionários, registro da observação das atividades envolvendo o jogo e aplicação de avaliações envolvendo operações com Número Inteiro Relativo.

Os resultados obtidos reforçaram a importância do uso do jogo na construção do conhecimento matemático, pois auxiliaram os estudantes a melhorarem suas habilidades como jogadores, nas operações mentais envolvendo o conteúdo de Número Inteiro Relativo, melhoraram a concentração, proporcionaram o cumprimento de regras e promoveram a interação com o professor (PINHO, 2017).

O trabalho de Fantini (2018), por meio de uma abordagem qualitativa, tendo como metodologia levantamento bibliográfico, partindo da dificuldade de seus alunos com relação aos Números Inteiros Relativos, objetivou contribuir para melhoria na aprendizagem dos alunos da Educação Básica sobre este conceito, com foco na reta numérica.

A partir da análise de livros a autora não observou a apresentação do conceito de números inteiros passo a passo, mas sim uma introdução com a reta numérica dos Números Inteiros já pronta, com imagens na horizontal e apenas quando tratavam de situações com termômetros, a imagem da reta era indicada na vertical. Assim sendo, a autora elaborou um conjunto de jogos com materiais manipuláveis para o ensino da reta numérica dos Números Inteiros Relativos.

Cabe ressaltar que tais jogos não foram aplicados com estudantes na Educação Básica, somente como sugestão aos professores para o ensino do referido conceito.

Basoni (2019) desenvolveu uma pesquisa exploratória analisando o jogo “cartas matemáticas” no contexto de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos. Os resultados da dissertação evidenciaram que o trabalho com jogos é importante no âmbito escolar, pois os estudantes compreenderam o conceito desenvolvido, diminuindo as dificuldades encontradas nos processos de ensino e aprendizagem.

O trabalho de Oliveira (2020) de caráter quanti-qualitativo, a partir da coleta de dados por meio de uma pesquisa experimental, buscou analisar se o uso de materiais manipuláveis motiva e auxilia no aprendizado de Números Inteiros em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental.

De acordo com a autora, para verificar se houve algum impacto na motivação dos alunos foi aplicado um questionário antes e depois das atividades com os materiais manipuláveis e para analisar se houve uma melhora no aprendizado dos alunos em relação ao conteúdo, foi aplicado um pré-teste e um pós-teste. Em que pesem os resultados da pesquisa, foi possível concluir que a sequência didática que utilizou materiais manipuláveis, elaborada pela pesquisadora, possibilitou um ganho de motivação e auxílio aos alunos no aprendizado de Números Inteiros.

Gonçalves (2020) objetivou, por meio de uma pesquisa qualitativa, analisar a contribuição de atividades contextualizadas e do Ábaco dos Inteiros para a compreensão dos números inteiros e das operações de adição e subtração pelos estudantes. A análise dos dados coletados ocorreu com base nas transcrições das gravações em áudio e vídeo na sala de aula, das produções escritas dos estudantes e dos registros no diário de campo.

Os resultados evidenciaram que o Ábaco dos Inteiros se mostrou um material de apoio apropriado para o ensino das operações de adição e subtração de números inteiros, pois permitiu que os estudantes explorassem algumas regularidades destas operações.

Por fim, a dissertação de Garcez (2021) visou propor jogos que utilizem materiais concretos e que potencializem os processos de ensino e aprendizagem dos números inteiros para alunos do Ensino Fundamental. Para tanto, a autora utilizou uma revisão bibliográfica para levantamento de materiais já elaborados para o ensino de Números Inteiros Relativos, escolhendo alguns de acordo com pressupostos pré-definidos.

Apesar de não realizar a aplicação desses jogos na sala de aula, devido à pandemia de COVID-19, Garcez (2021) acredita que o estudo tem a possibilidade de beneficiar os processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos no Ensino Fundamental.

Os trabalhos elencados nessa categoria demonstraram que a utilização de jogos, materiais concretos e tecnologia para a abordagem dos Números Inteiros Relativos é um importante diferencial para os processos de ensino e aprendizagem dessa temática.

Em síntese, as pesquisas apontam que a utilização desses recursos foi importante, pois tanto os trabalhos em que os autores desenvolveram as atividades didático-pedagógicas com os estudantes, quanto aquelas teóricas demonstraram que quando se

aborda o ensino de um modo diferenciado há um maior envolvimento, a participação, interesse, motivação e o protagonismo dos estudantes na construção dos conceitos.

Possivelmente essa constatação se explique, pois de acordo com as pesquisas levantadas nessa categoria, a utilização de jogos, materiais concretos e tecnologias para o ensino de Números Inteiros Relativos, proporcionaram aulas mais prazerosas, favorecendo a criatividade dos estudantes para a elaboração de estratégias e busca de soluções das atividades propostas e, conseqüentemente, possibilitaram um maior aprendizado do conceito.

Partindo desses pressupostos, pesquisas como as elencadas demonstram que trabalhar com o ensino e a aprendizagem de Números Inteiros Relativos, de modo que os estudantes participem efetivamente das atividades, pode levá-los à construção significativa e à consolidação matemática desse conceito. Portanto, tal justificativa também baliza o desenvolvimento dessa pesquisa, pois os pressupostos da Resolução de Problemas, como metodologia de ensino (ECHEVERRÍA; POZO, 1998; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC E ALLEVATO, 2011; ALLEVATO E ONUCHIC, 2014) supõem os estudantes como centro do processo de aprendizagem, aumentando as possibilidades de compreensão, neste caso, dos Números Inteiros Relativos em diferentes contextos.

2.3 Categoria 3: Utilização de atividades/seqüências didáticas para o ensino de Números Inteiros Relativos

Na presente categoria evidenciamos trabalhos que têm relação com a temática investigada nessa pesquisa, principalmente no que tange à utilização de atividades ou seqüências didáticas para o ensino de Número Inteiro Relativo. Nesse sentido, selecionamos 11 dissertações (33,3% do total de trabalhos) que estão detalhados no quadro 3 a seguir.

Quadro 3: dados das pesquisas relacionadas à utilização de sequências didáticas para o ensino de NIR

Tipo de documento	Ano	Instituição	Autor	Título
Dissertação	2012	UFPE	ALVES, Evanilson Landim	Menos com menos é menos ou é mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos
Dissertação	2013	UFSC	HILLESHEIM, Selma Felisbino	Os números inteiros em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais
Dissertação	2016	UEL	CHIAROTTI, Joao Paulo	Números inteiros: uma Proposta de tratamento para o Ensino Fundamental a partir das ideias de Descartes e Hilbert
Dissertação	2016	FURB	ROPELATO, Graziela	Conceitos básicos dos números inteiros a partir de situações problema
Dissertação	2016	UTFPR	DANCZUK, Fabulo Eugenio	Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos números inteiros
Dissertação	2018	USP	LUNA, Everton Luiz Silva de	O pensamento dos comerciantes medievais como elemento textual para o ensino dos números inteiros na educação básica
Dissertação	2018	UECE	FERREIRA, Raimundo Nelio Rodrigues	A Sequência Fedathi como proposta de mediação do professor no ensino dos números inteiros
Dissertação	2019	UFRGS	BECK, Miguel Melendo	Campo Aditivo no Conjunto dos Números Inteiros: um estudo a partir da teoria dos campos conceituais
Dissertação	2019	UERR	DINIZ, Francisma de Oliveira	A atividade de situações problema na aprendizagem com números inteiros nas operações aritméticas fundamentadas em Galperin e Majmutov com os estudantes de 7º ano do Ensino Fundamental na escola estadual Fernando Grangeiro
Dissertação	2019	UEL	FERREIRA, Francelise Ide Alves	Uma trajetória de ensino e aprendizagem para o estudo de números inteiros
Dissertação	2020	UEPA	VASCONCELOS, Akilson Medeiros	Uma sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

O trabalho de Alves (2012), de natureza qualitativa, teve como ponto de partida o objetivo de analisar e comparar a compreensão dos estudantes da 4ª fase da Educação de jovens e adultos e do 8º ano do Ensino Fundamental, que são ciclos escolares correspondentes, quando resolvem situações envolvendo multiplicação e divisão de Números Inteiros Relativos.

Para a coleta de dados foram utilizadas atividades referentes a Números Inteiros Relativos e entrevistas clínicas com 32 estudantes já familiarizados com a multiplicação

e a divisão nesse conjunto. Os resultados evidenciaram que os participantes da pesquisa possuem dificuldades no conceito de Números Inteiros Relativos, principalmente no que tange à localização desses números em uma reta numérica e a presença do sinal no número nos termos de desenvolvimento da operação.

A dissertação de Hillesheim (2013) teve abordagem qualitativa e contou com a metodologia estudo de caso. De acordo com a autora, “a dificuldade enfrentada pelos alunos na aprendizagem da multiplicação de dois números negativos direcionou o tema da pesquisa para o ensino dos números inteiros com ênfase nas operações de adição, multiplicação e subtração” (HILLESHEIM, 2013, p.23).

Assim, a pesquisa objetivou propor uma abordagem para o ensino da regra de sinais nos Números Inteiros Relativos no sétimo ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, os resultados encontrados, segundo a autora, foram satisfatórios após a aplicação de uma sequência didática, possibilitando que os estudantes fizessem generalizações a respeito das operações com Números Inteiros Relativos.

Chiarotti (2016) objetivou compreender os obstáculos didáticos encontrados nos processos de ensino e aprendizagem de números inteiros. Partindo desse pressuposto, desenvolveu uma sequência didática, com base nas ideias de Decartes e Hilbert, que visou abordar os Números Inteiros Relativos e suas operações, bem como as regras de sinais. Cabe ressaltar que, de acordo com o autor, não foi possível aplicar as atividades em sala de aula.

O trabalho de Ropelato (2016) de caráter qualitativo buscou verificar quais as colaborações do ensino a partir de situações-problema dos conceitos básicos de Números Inteiros, para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Ao desenvolver esse estudo, a autora verificou que este trabalho proporcionou uma forma ativa de levar os alunos a compreenderem os Números Inteiros Relativos uma vez que, por meio dele os estudantes se tornaram protagonistas da sua aprendizagem, o que tende a facilitar o processo.

Danczuk (2016) em sua dissertação de abordagem qualitativa apresentou uma proposta metodológica sobre números inteiros pautada na diversificação de tarefas matemáticas com o intuito de constatar as contribuições de tal proposta para os processos de ensino e aprendizagem desse conceito. Para tanto, houve a aplicação de 25 tarefas para alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. O autor constatou que a diversificação de tarefas contribuiu para os processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos e que, portanto, essa metodologia apresenta grandes potencialidades no âmbito escolar.

Já Luna (2018) desenvolveu uma dissertação analítica-descritiva de delineamento qualitativo com o seguinte problema de pesquisa: “quais elementos devem conter uma atividade para o ensino dos números inteiros de modo a propiciar uma melhor aprendizagem para os alunos?” (LUNA, 2018, p. 13). Diante disso, o objetivo do autor nessa dissertação foi propor atividades de ensino baseadas no movimento comercial da idade média. Como resultado, Luna (2018) propôs, em um produto final, algumas atividades que envolvem a noção introdutória de números inteiros, diferente das abordadas nos livros didáticos.

Rodrigues (2018) realizou um trabalho cujo objetivo foi propor a “Sequência Fedathi” como metodologia na organização de sessões didáticas para o ensino dos Números Inteiros Relativos, de modo a proporcionar a mediação do professor. O autor utilizou como metodologia os princípios da pesquisa qualitativa, do tipo bibliográfica e explicativa, na preparação de atividades didáticas para o ensino dos Números Inteiros Relativos.

O respectivo trabalho, de acordo com Rodrigues (2018), apresentou uma forma diferenciada de abordagem, buscando superar o modelo de ensino expositivo, o qual o docente somente apresenta as regras referentes ao conceito de Número Inteiro Relativo. Não houve desenvolvimento com alunos da Educação básica.

Beck (2019) objetivou em sua dissertação refletir a partir da construção matemática do conjunto dos números inteiros, da análise de livros didáticos e do campo aditivo proposto por Vergnaud, o ensino das propriedades e operações básicas de adição e multiplicação, no âmbito do conjunto dos números inteiros, no nível de Ensino Fundamental. A partir desta reflexão, o autor produziu uma sequência didática e a desenvolveu com estudantes da Educação Básica, observando que eles começaram a se interessar mais pela Matemática.

O trabalho de Diniz (2019) visou analisar a aprendizagem da atividade de situações problema com números inteiros nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, fundamentadas nas teorias de formação por etapas das ações mentais de Galperin, a direção da atividade de estudo de Talízina e ensino problematização de Majmutov. Para a autora essas atividades mostraram-se inovadoras e contribuíram para a aprendizagem de Números Inteiros Relativos, pois ao desenvolvê-las os estudantes foram protagonistas no processo de aprendizagem.

Já Ferreira (2019) objetivou em sua dissertação proporcionar um ambiente em que os alunos pudessem ser ativos no processo de aprendizagem e, dessa maneira, realizar

uma reinvenção guiada do conceito e de operações com números inteiros. Para isso, realizou uma sequência de tarefas com alunos do 7º ano da Educação Básica. Como resultados, a autora constatou durante o desenvolvimento de atividades com os estudantes, obstáculos semelhantes aos enfrentados no decorrer do desenvolvimento histórico dos números inteiros.

Por fim, Vasconcelos (2020) buscou em seu trabalho analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma sequência didática envolvendo as quatro operações aritméticas mais elementares com números inteiros, em uma turma da 3ª etapa da educação de jovens e adultos (EJA) do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual em Belém do Pará. Conforme o pesquisador, os resultados da dissertação evidenciaram indícios de aprendizagem, mostrando que os estudantes participaram ativamente da busca pelo conhecimento, contribuindo com a assimilação dos algoritmos para somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros.

Em síntese, as pesquisas evidenciaram a importância do desenvolvimento das sequências/atividades didáticas para os processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos, pois apresentaram diversas abordagens que fizeram com que os alunos se interessassem pela aprendizagem do conceito.

Em que pese o fato de se utilizar um conjunto de atividades de diferentes naturezas para o ensino de Números Inteiros Relativos constatamos, por meio da análise dos trabalhos levantados nessa categoria, que os resultados encontrados nas pesquisas citadas anteriormente suscitaram potencialidades no âmbito do ensino de Números Inteiros Relativos, uma vez que constaram melhorias na assimilação do conceito por parte dos estudantes.

Com relação às conclusões das pesquisas desenvolvidas temos que as intervenções propostas pelos autores têm trazido contribuições para o ensino e aprendizagem dos Números Inteiros Relativos. Assim, ressaltamos que em grande parte dos trabalhos os pesquisadores apontam a melhoria do aprendizado dos alunos diante o desenvolvimento de novas situações de ensino do conceito de Número Inteiro Relativo.

Apesar disso, constatamos que algumas pesquisas encontradas neste levantamento, devido a motivos diversos, limitaram-se somente à construção de atividades ou sequências didáticas referentes ao conceito abordado, sem que estas fossem desenvolvidas, em contexto de aula de Matemática, com estudantes da Educação Básica.

Acreditamos que a não realização de tais atividades ou sequências, em aulas de Matemática pelos estudantes, justifica a necessidade e motiva para avançarmos em

pesquisas que também abordem o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Número Inteiro Relativo.

Assim sendo, tais resultados possibilitam a continuidade de estudos neste tema, pois nenhuma das pesquisas descritas considerou simultaneamente aspectos didáticos, cognitivos e curriculares na construção do conceito de Número Inteiro Relativo atrelados à elaboração e ao desenvolvimento de atividades com estudantes da Educação Básica.

Nessa perspectiva, acreditamos que o fato de considerar nesse trabalho, além dos processos de ensino e de aprendizagem dos inteiros ocorridos em sala de aula, a análise em função da coordenação entre diretrizes curriculares, aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos de aprendizagem apresente a possibilidade de um avanço na temática.

2.4 Categoria 4: Utilização da História da Matemática para o ensino de Números Inteiros Relativos

Nessa categoria consideramos os trabalhos que apresentaram dados sobre a produção de dissertações e teses que abordaram a utilização da História da Matemática para o ensino de Números Inteiros Relativos. Assim, selecionamos duas dissertações (6,1% do total de trabalhos). O tipo de documento, ano de defesa da dissertação, instituição do pesquisador, autor e título da pesquisa estão presentes no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4: dados das pesquisas relacionadas à utilização da História da Matemática para o ensino de NIR

Tipo de documento	Ano	Instituição	Autor	Título
Dissertação	2012	UFMG	ROQUE, Ana Catarina Cantoni	Uma investigação sobre a participação da História da Matemática em uma sala de aula do Ensino Fundamental
Dissertação	2017	UNIFESP	RIOS, Neander Medeiros	Os números inteiros: construção histórica e as dificuldades atuais em sala de aula

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

O trabalho de Roque (2012) objetivou investigar as potencialidades pedagógicas da História da Matemática, em uma sala de aula de estudantes do Ensino Fundamental, tomando como referencial uma perspectiva de aprendizagem situada. Assim, para a coleta de dados a autora aplicou oito atividades envolvendo a história da matemática relacionadas a Números Inteiros Relativos. Segundo Roque (2012) o desenvolvimento das atividades envolvendo a história da matemática contribui para uma aprendizagem

mais efetiva dos conceitos relacionados aos Números Inteiros Relativos no Ensino Fundamental.

Rios (2017) visou apresentar um breve resumo do processo de formalização e aceitação dos números negativos, abrindo espaço para uma reflexão sobre as semelhanças encontradas nas dificuldades atuais de nossos alunos e aqueles enfrentados por importantes matemáticos integrantes deste processo. Nesse sentido, o autor concluiu que o conhecimento do processo histórico tem papel importante na busca da superação das dificuldades e, conseqüentemente, auxilia os processos de ensino e aprendizagem dos Números Inteiros.

Contatamos que as pesquisas relacionadas à utilização da História da Matemática para o ensino de Números Inteiros Relativos compõem em menor proporção. Tal fato suscita discussões, pois a formação deste conceito perpassa por aspectos históricos importantes que poderiam ser enfatizados no processo de ensino. Partindo desse pressuposto, entendemos que a História da Matemática deveria ser mais utilizada/pesquisada no que tange ao ensino de Números Inteiros Relativos, pois diversos obstáculos que foram vivenciados por estudiosos durante a construção de tal conceito são observados atualmente na aprendizagem escolar.

2.5 Categoria 5: Formação de professores para o ensino de Números Inteiros Relativos

Nessa categoria consideramos os trabalhos que apresentaram dados sobre a produção de dissertações e teses que abordaram a temática formação de professores para o ensino de Números Inteiros Relativos.

Nesse sentido, conforme os parâmetros para a escolha dos documentos, selecionamos duas teses (6,1% do total de trabalhos). O tipo de documento, ano de defesa da dissertação, instituição do pesquisador, autor e título da pesquisa estão presentes no quadro 5 a seguir.

Quadro 5: dados das pesquisas relacionadas à formação de professores para o ensino de NIR

Tipo de documento	Ano	Instituição	Autor	Título
Tese	2014	UEL	DEIXA, GERALDO VERNIJO	Uma Abordagem dos Números Inteiros Relativos na 8ª classe: indicadores para uma proposta de formação de professores.
Tese	2019	UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL	BORELLI, SUZETE DE SOUZA.	Estudos de aula na formação de professores de Matemática em turmas de 7º ano do Ensino Fundamental que ensinam Números Inteiros

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

A tese de Deixa (2014) teve uma abordagem qualitativa com base na análise de conteúdo. Essa pesquisa, partindo da problemática de entender as dificuldades dos alunos com os Números Inteiros Relativos, teve como objetivo desenvolver uma proposta de ensino para o trabalho com Números Inteiros Relativos, que articule as dimensões de conhecimento dos números relativos (reta, contexto e abstrata) em uma proposta de tarefas para formação de professores de Matemática. Os resultados, segundo Deixa (2014) indicaram que uma abordagem multidimensional pode contribuir para uma aprendizagem efetiva dos Números Inteiros Relativos.

Já Borelli (2019) objetivou em sua pesquisa qualitativa investigar quais são as contribuições que a metodologia de formação “Estudos de Aula” para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Números Inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental. De acordo com a autora, os resultados da pesquisa evidenciaram que o Estudo de Aula como metodologia de formação favoreceu o desenvolvimento profissional do professor, melhorando a aprendizagem dos alunos em relação aos Números Inteiros.

As duas pesquisas levantadas salientam a importância da formação dos professores para ensinar o conceito de Número Inteiro Relativo. Apesar de não ser o foco desse trabalho, pesquisas como essas reforçam a relevância da continuidade de estudos sobre a temática, pois apresentam possibilidades de discussões e processos colaborativos entre docentes para a melhoria do ensino de Números Inteiros Relativos.

2.6 Síntese do levantamento bibliográfico realizado no Catálogo de Teses e Dissertações-CAPES

No presente levantamento realizado no Catálogo de Teses e Dissertações-CAPES referente à temática Números Inteiros Relativos selecionamos 33 pesquisas, sendo 31 dissertações e duas teses, dividindo-as em cinco categorias: revisões bibliográficas sobre

a temática Número Inteiro Relativo; utilização de jogos, materiais concretos e tecnologias para o ensino de Número Inteiro Relativo; utilização de atividades/seqüências didáticas para o ensino de Número Inteiro Relativo; utilização da História da Matemática para o ensino de Número Inteiro Relativo; formação de professores para o ensino de Número Inteiro Relativo.

As pesquisas ressaltam a importância do processo de ensino de Números Inteiros Relativos e do trabalho com situações que visam proporcionar a construção desse conceito pelos estudantes. Reforça tal constatação, a quantidade de trabalhos que tem o foco voltado para o ensino dos Números Inteiros Relativos (28 dos 33 levantados – 84,9%), englobando desde a utilização de jogos, materiais concretos, tecnologias, seqüências didáticas, até metodologias como a História da Matemática, por exemplo.

Possivelmente, isso se explique pela complexidade envolvendo o conceito de Número Inteiro Relativo, tanto no processo de ensino, quanto no de aprendizagem. A maior parte das pesquisas levantadas parte do pressuposto que o referido conceito é de difícil aprendizado pelos estudantes e, diante disso, surge a necessidade de um trabalho que supere o modo tradicional de ensino, no qual o professor é um mero transmissor do conteúdo e o estudante é somente um receptor.

Grande parte dos trabalhos evidenciados nesse levantamento buscaram estratégias/caminhos visando a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem do Número Inteiro Relativo com base em diversos referenciais e abordagens. Cabe ressaltar que tais pesquisas compreenderam temáticas isoladas envolvendo o conceito, “operações com Números Inteiros Relativos”, por exemplo. Diante disso, constatamos a necessidade de uma pesquisa que abordasse toda a construção conceitual com os estudantes, envolvendo desde significado de um Número Inteiro Relativo, até operações com estes números.

Outra característica que motiva a continuidade de pesquisas sobre a temática é que nenhum dos trabalhos analisados, no que se refere à utilização de tecnologias, materiais concretos, metodologias de ensino e desenvolvimento de seqüências didáticas para o ensino de Números Inteiros Relativos, enfatiza ao mesmo tempo aspectos didáticos, cognitivos e curriculares na construção do conceito.

Em síntese, consideramos que o fato de atrelar os principais obstáculos para a aprendizagem de um conceito, ou seja, as dificuldades que os estudantes podem ter e como o professor pode desenvolver o trabalho para proporcionar que estas sejam superadas, com a ideia de como os livros didáticos abordam e de que maneira os

documentos oficiais orientam o processo de ensino do conceito evidencia um aspecto importante nos processos de ensino e aprendizagem do Número Inteiro Relativo. Assim sendo, compreender como o estudante assimila em termos cognitivos o conceito e como os materiais didáticos disponíveis o abordam, pode auxiliar o professor na escolha da proposta metodológica a ser adotada, na seleção, desenvolvimento e criação de atividades didáticas, pois determinam a intencionalidade de desenvolver a aprendizagem do Número Inteiro Relativo.

Por fim, até mesmo os trabalhos, elencados nessa seção, que não têm a mesma natureza da nossa pesquisa, mais precisamente referentes a levantamentos bibliográficos e à formação de professores para o ensino do conceito de Número Inteiro Relativo, evidenciaram que a continuidade de pesquisas com relação à temática é importante, pois identificaram lacunas que devem ser preenchidas por novos trabalhos.

3 OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: PONTO DE VISTA HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

Sejam a e b dois Números Naturais quaisquer: a diferença entre a e b quando $a < b$ pertence ao conjunto dos Números Naturais? Existe a possibilidade de subtrair um número maior de um número menor? Na história da Matemática, a elaboração dessas perguntas e a busca por suas respostas demandaram esforços cognitivos e tempo (BOYER, 1991; GLAESER, 1985).

Mais uma vez nos aparece uma impossibilidade operacional a limitar as condições de resolução de um problema, a negar a possibilidade de dar em todos os casos, um resultado numérico. Que fazer? Como das outras vezes, impõe a criação de um novo campo numérico (CARAÇA, 2003, p.97).

Somente o desenvolvimento do conjunto dos Números Inteiros, embasado pelo princípio de extensão do conhecimento (CARAÇA, 2003), é que levou superar a impossibilidade da subtração $a - b$, quando $a < b$.

De acordo com Caraça (2003) todo o trabalho intelectual do homem é orientado por certas normas e princípios. Assim, o princípio da extensão revela a intenção do homem a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências (CARAÇA, 2003).

No conjunto dos Números Naturais, os obstáculos, impedimentos e consequentes dificuldades estão dados para os casos das operações inversas, que não são possíveis em alguns casos. Para superá-los recorreu-se à criação de novos sistemas de numeração.

De fato, a divisão tornou-se possível com a criação dos Números Racionais, a radiciação de números positivos com o conjunto dos números reais e a raiz quadrada (e outras raízes pares) de negativos com o conjunto dos Números Complexos (TEIXEIRA, 1992, CARAÇA, 2003, CID, 2015, OLIVEIRA, 2019).

Tomando como base essa linha de raciocínio, os números negativos surgiram como forma de viabilizar a subtração que não era possível em alguns casos no conjunto dos Números Naturais. Portanto, a ampliação deste conjunto possibilitou definir um Número Inteiro Relativo como diferença entre dois Números Naturais a e b .

Assim sendo, aplicando-se o princípio da extensão (CARAÇA, 2003), tal operação pode resultar um número inteiro positivo (se $a > b$), um número inteiro negativo (se $a < b$), ou o zero se $a = b$. Portanto, se $a > b$, o número relativo é positivo, sendo sua representação coincidindo com aquela de um número natural; se $a < b$, o número relativo

é negativo, e essa diferença será $a - b$, cuja representação numérica é precedida pelo sinal negativo “-”.

De fato, a diferença, $8-5$ resulta 3, que é um número relativo positivo, já a diferença $5-8$ é o número relativo -3 (CARAÇA, 2003).

Partindo desse pressuposto, podemos afirmar que, se a e b pertencerem ao conjunto dos Números Naturais, temos como resultado da subtração um Número Inteiro Relativo (Z^3). Sendo assim, compreende-se que o desenvolvimento do conceito de Número Inteiro Relativo, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos Números Naturais, pois, o Conjunto Z se apropria de características do Conjunto N , porém ampliando-as no sentido de superar a impossibilidade de se resolver a situação $a - b$, na qual $b > a$ (CARAÇA, 2003)

No campo numérico determinado pela reelaboração de propriedades do Conjunto N , a situação $a - b$, na qual $b > a$, é resolvida sendo equivalente ao resultado c , onde c é reconhecido como elemento do conjunto dos Números Inteiros Relativos (Z), estando, portanto, sob as propriedades deste novo conjunto (OLIVEIRA, 2019).

Em suma, a introdução desta definição possibilitou a operação $a - b$, com $a < b$, em um novo domínio: o conjunto dos Números Inteiros (POMMER, 2010).

Deste modo, o que se ampliou no campo dos Números Inteiros foram os valores negativos, originados pela possibilidade da simetrização da operação de adição.

Assim, Caraça (2003) apresenta alguns enunciados com relação aos inteiros, definindo que:

- A sucessão dos números inteiros é ilimitada;
- Dado um número inteiro, por maior que seja, sempre existirá outro maior;
- Há uma infinidade de números inteiros.

Sendo assim, nesse conjunto, os números positivos coincidem com os naturais e consequentemente, a ampliação fica por conta dos números negativos, uma vez que:

[...] representam adequadamente as transformações aditivas (adições e subtrações) que podem ser aplicadas à medida de um conjunto de objetos isoláveis, acrescentando elementos a este conjunto ou deles os retirando. [...] números naturais representam medidas dos conjuntos de objetos isoláveis. Os números relativos representam as transformações que essas medidas sofrem (VERGNAUD, 2009, p. 199).

Pelo novo significado que ganha o número, Caraça (2003) afirma que pode haver a necessidade de especificar a que conjunto este pertence, pois um número qualquer,

³ Z vem de Zahl (Número em alemão)

pertencente ao conjunto dos números reais pode ter características de um número racional, ser um número inteiro, ou ambos.

O processo de diferenciação entre eles se dá pela abstração de uma de suas características em detrimento de outras. Sendo assim, um número “a” considerado independente de suas qualidades no campo negativo apresenta-se como valor absoluto. Este mesmo número no contexto do campo dos inteiros ganha um valor relativo, ou seja, agora pode ser positivo ou negativo, sendo que: $|+a| = |-a| = a$ (TEIXEIRA, 1992).

Ao compreendermos a ideia de valor absoluto podemos tratar da ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos. Neste âmbito, Caraça (2003) afirma que:

- De dois números positivos o maior é o que apresentar maior valor absoluto;
- Um número positivo é sempre maior que um número negativo;
- De dois números negativos, o maior deles é o que apresenta menor valor absoluto.

Com isso, além do significado do número, considerando as propriedades desse sistema, as operações desenvolvidas com seus números também ganham um novo sentido e, portanto, se ampliam.

Por exemplo, no contexto dos Números Naturais, os sinais utilizados são somente de natureza operatória, ou seja, o sinal + (mais) representa um acréscimo, enquanto o sinal – (menos) representa um decréscimo de determinadas quantidades. No caso dos números inteiros, a adição pode representar acréscimo, decréscimo, ou pode até resultar zero, quando, neste caso, representa uma compensação entre quantidades de qualidades opostas

Diante disso, a adição com os Números Inteiros Relativos não se limita a acrescentar quantidades, mas a associar e compor (TEIXEIRA, 1993).

Partindo desse pressuposto, na adição há algumas propriedades que regem o Conjunto dos Números Inteiros: Fechamento, Propriedade Comutativa da Adição, Propriedade Associativa da Adição, Elemento Neutro, Elemento Oposto ou Simétrico. Portanto, para todo a, b e c pertencentes ao Conjunto dos Números Inteiros temos que:

1. $a + b \in \mathbb{Z}$ (fechamento). A soma de dois números inteiros sempre resulta em inteiro. Exemplo $-2 + 3 = 1$ (pertence ao conjunto dos Números Inteiros).
2. $a + b = b + a$ (comutatividade). Na primeira propriedade, temos que na adição de dois números inteiros, obtemos o mesmo resultado se alterarmos as parcelas. Por exemplo, $-5 + 3 = -2$ e $+3 + (-5) = -2$.

3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade). Se associarmos os inteiros de um modo diferente, obtemos o mesmo resultado. No exemplo, $(-40 + 20) + 20$, podemos associar primeiramente a operação $-40 + 20$ e depois associar o resultado desta com o $+20$, resultando em zero, ou $-40 + (20 + 20) = 0$, o qual associamos as últimas parcelas e somamos com primeira, obtendo resultado idêntico.
4. $\exists 0 \in \mathbb{Z}: a + 0 = 0 + a = a$ (elemento neutro). Na adição de um número inteiro qualquer a zero, o resultado é o próprio número, portanto o zero é o elemento neutro da adição nos inteiros.
5. $\exists -a \in \mathbb{Z}: a + (-a) = (-a) + a = 0$ (elemento simétrico). Todo número inteiro tem um oposto ou simétrico. Portanto, ao adicionar um inteiro a seu oposto ou simétrico o resultado é zero.

De acordo com Teixeira (1993) a subtração nesse conjunto também ocorre associada a um novo contexto. Se nos Números Naturais, para a ação de subtrair podemos ter, dependendo do contexto, as ideias de tirar, de comparar e de complementar, no Conjunto $\mathbb{Z}$ a subtração corresponde à ideia de operação inversa da adição.

Ilustra esse fato a seguinte situação: “dada uma reunião ou associação de elemento $(a+b=c)$, é possível chegar ao ponto de partida, (a) , por exemplo, pela diferença $(c-b)$, ou seja, pela operação inversa” (TEIXEIRA, 1993, p.64).

A multiplicação no Conjunto dos Números Naturais representa uma adição de parcelas iguais. Porém, amplia-se nos inteiros, pois, além de representar uma adição repetida $(2 \times (-5) = (-5) + (-5) = -10$, repete-se duas vezes o menos cinco), também concebe operações de transformação, fazendo manter ou inverter a posição do número na região a que pertenciam (Exemplo: $-2 \times (+5) = -10$) (TEIXEIRA, 1993, CARAÇA, 2003, CID, 2015, OLIVEIRA, 2019).

Em $\mathbb{Z}$, a multiplicação (produto) satisfaz as seguintes propriedades:

1. $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ (fechamento). Se multiplicarmos dois números inteiros, o resultado será sempre um número inteiro. Exemplo $-4 \times 5 = -20$ (pertence aos inteiros).
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade). Se alterarmos a ordem dos fatores no Conjunto dos Números Inteiros, o produto não mudará. Exemplo: $-2 \times (-3) = -3 \times (-2) = 6$.
3. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade). Em uma multiplicação de três fatores inteiros, podemos multiplicar os dois primeiros fatores e o resultado pelo

último ou podemos multiplicar o primeiro fator pelo produto dos dois últimos que os resultados serão iguais. Exemplo: $(-2 \times 3) \times 4 = -2 \times (3 \times 4) = -24$

4. $\exists 1 \in \mathbb{Z}: a \cdot 1 = 1 \cdot a$ (elemento neutro do produto, no caso de $\mathbb{Z}$, denominamos de elemento unidade). O elemento neutro da multiplicação é o número que, multiplicado por a , tem como resultado o próprio a . Esse número é sempre 1. Exemplo $2 \times 1 = 1 \times 2 = 2$.
5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade). Podemos multiplicar cada parcela da adição pelo fator a , para, depois, realizar a adição. Exemplo: $2 \cdot (7 + 9) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 9 = 14 + 18 = 32$.

Isto exposto, podemos afirmar que o conjunto dos Números Inteiros é um grupo aditivo (POMMER, 2010), pois contempla as propriedades: associativa, elemento neutro e existência de um elemento oposto ou simétrico, mas não é um grupo multiplicativo, uma vez que, apesar de atender à propriedade associativa e à de existência de um elemento neutro, os números desse conjunto não são simetrizáveis na multiplicação, ou seja, o simétrico de um número inteiro, na operação produto, não pertence a $\mathbb{Z}$.

Por exemplo, o simétrico multiplicativo do número inteiro 2 não pertence ao conjunto dos Números Inteiros. Para calcularmos o simétrico do número inteiro 2 na operação produto devemos encontrar um número que multiplicado por 2 resulta 1 (elemento neutro da multiplicação). Assim sendo, temos que o número $\frac{1}{2}$ é o simétrico multiplicativo do número 2, pois $2 \times \frac{1}{2} = 1$, porém $\frac{1}{2}$ não pertence ao conjunto dos números inteiros.

No entanto, se, em termos matemáticos, esses raciocínios nos são apresentados atualmente com clareza de encadeamento lógico, sabemos que historicamente, a elaboração dessas sínteses encontrou muitas dificuldades, havendo um processo árduo de construção desse conjunto, passando por um longo período de obstáculos, estudos, “sintomas de evitação” e, por fim, de aceitação (GLAESER, 1985; BOYER, 1991; TEIXEIRA, 1992).

Segundo Boyer (1991), o conceito de Número Inteiro Relativo é o mais antigo na Matemática. Os chineses, 300 a.C. (trezentos anos antes de Cristo) foram os primeiros povos a aceitar a ideia de Números Negativos. Utilizando barras feitas de bambu, marfim ou ferro, os administradores dessa nação operavam de modo muito eficiente em seus cálculos. Com isso, a ideia de número negativo:

[...] parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses, pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras – uma vermelha para os coeficientes positivos ou números e uma barra preta

para os negativos. No entanto, não aceitavam a ideia de um número negativo poder ser solução de uma equação (BOYER, 1991, p. 147).

A não aceitação dos Números Inteiros Relativos em sua completude não foi uma característica apenas do povo chinês. Os árabes, por exemplo, mesmo conhecendo as regras de sinais para os números negativos, também não aceitavam as raízes negativas como solução de equações (BOYER, 1991).

Glaeser (1985) ressalta que a introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento. Perdurou mais de 1500 anos, da época de Diofante até Hankel, em 1867. Durante todo esse período os matemáticos trabalharam com números relativos, porém tendo deles apenas uma compreensão parcial, com muitas lacunas. Muito disso se justifica por alguns obstáculos na construção desse conjunto numérico.

Glaeser (1981) apud Cid (2000) sistematizou os obstáculos epistemológicos específicos para o número negativo. Contudo, apesar de ter iniciado seu artigo referindo-se à noção de obstáculo, tendo como referências as elucidções de Bachelard e Brousseau, em seguida, esclarece que “considera prematuro especificar demais o termo ‘obstáculo’ e que o usa em um sentido amplo, igualando-o com ‘dificuldade’, ‘limiar’, ‘sintoma’, etc...” (CID, 2000, p. 5).

Em contrapartida, Radford (2012) discorre que os obstáculos referentes à aprendizagem de Números Inteiros Relativos são mais um problema cultural do que inerentes ao próprio conceito, ou seja, “a dificuldade depende de características locais, ideias culturais sobre ciência, matemática, seus objetos e métodos” (RADFORD, 1997, apud IGLIORI, 1999, p. 107).

O fato de a civilização chinesa trabalhar com as quantidades negativas utilizando bastões coloridos, teria evitado dificuldades na aprendizagem de seus alunos, o que não aconteceu com os estudantes ocidentais (IGLIORI, 1999).

Em que pesem tais considerações, Glaeser (1985) cita em seu trabalho algumas barreiras que dificultaram a compreensão dos Números Inteiros, são elas:

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
4. A ambiguidade dos dois zeros.
5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.

6. Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante (1985, p.7).

Diante das ideias relacionadas ao Número Inteiro Relativo, bem como das dificuldades e obstáculos epistemológicos ressaltados, podemos compreender que a construção conceitual do Número Inteiro Relativo é permeada por abstrações e generalizações em que concorrem justamente essas dificuldades e obstáculos epistemológicos e os contextos a eles associados.

Nesse sentido, o obstáculo inaptidão para manipular quantidades isoladas refere-se à não aceitação de medidas negativas; nessa condição, o número não positivo era entendido como o que está faltando.

A dificuldade em dar um sentido às quantidades negativas isoladas se faz presente em artifícios para que os números negativos sejam utilizados apenas como elementos isolados que atendem às dinâmicas da própria matemática, porém sem que sejam reconhecidos como número. Portanto, assumir números com sinal exige romper com a visão tradicional dos números como noções que expressam o resultado da medida de uma grandeza de magnitude absoluta.

Nesse contexto, zero indica a ausência de quantidade, então não pode haver números menores que ele; a soma está associada a ações de aumento, portanto que o resultado tem que ser maior ou, no máximo, igual as parcelas; a subtração é associada a diminuição, então o resultado deve ser menor ou, no máximo, igual ao minuendo; se em uma subtração, o minuendo é menor que o subtraendo, a operação é impossível, porque você não pode levar mais do que você tem (CID; GODINO; BERNABEU, 2003).

O obstáculo “dificuldade em unificar a reta numérica” é percebido na justaposição da reta numérica como duas semirretas opostas, condição que não considera o número com características dinâmicas.

Com relação a esse obstáculo, Teixeira (1993) salienta que a ordenação que acontece no sistema dos números inteiros supõe a integração de uma ordem crescente entre os números positivos e decrescente entre os negativos, a partir de um ponto de referência. Isso é possível, pois a reta numérica em $\mathbb{Z}$, pela extensão do conjunto dos Números Naturais, consiste em:

[...] um campo de pontos que possui uma relação bijetora com os Números Inteiros Relativos, ou seja, cada ponto da reta está associado a um e somente um número inteiro relativo. O fato de ser tomado como um campo numérico ordenado imprime a cada número, de acordo com sua posição, ser maior e menor que outros números, levando à necessidade de superar o conceito errôneo da reta numérica como

justaposição de dois conjuntos de números: os positivos à direita e os negativos à esquerda (OLIVEIRA, 2019, p.322).

Assim, em muitas situações, há um equívoco na ordenação dos números negativos. Por exemplo, se pensarmos na sentença $2 > 1$ (dois é maior do que um), construímos uma proposição verdadeira, mas se escrevemos $-2 > -1$ (menos dois é maior do que menos 1) obtemos uma sentença falsa.

A ambiguidade dos dois zeros relaciona-se à interpretação do zero apenas como valor absoluto, sendo que abaixo dele nada mais poderia existir.

Teixeira (1993) ressalta que um fator importante para a construção dos Números Inteiros foi a necessidade de dar novo sentido ao zero nesse conjunto, ampliando o conceito no qual o zero, nos Números Naturais, representa unicamente a ausência de quantidade. Assim sendo, o zero no conjunto $\mathbb{Z}$ deve, de acordo com o contexto, ser compreendido “tanto como a ausência de quantidade, quanto como a origem de grandezas que se apresentam em sentidos opostos, e que, portanto, se anulam ou se compensam, constituindo um “zero móvel”” (OLIVEIRA, 2019, p. 321).

O obstáculo “estagnação no estágio das operações concretas” tem como característica a dificuldade de os matemáticos superarem a ideia de que a Matemática só existiria a partir do mundo real, sem recorrerem a abstrações. Um exemplo relacionado a esse obstáculo se refere à confusão entre operadores multiplicativos e estados a que se aplicam. No conjunto dos Números Naturais a multiplicação é inerente à uma adição de fatores iguais, porém nos Números Inteiros essa regra muitas vezes não se aplica.

Por exemplo, como mostrar, utilizando-se dessa concepção, que a multiplicação de dois números negativos resulta em número positivo (Exemplo: $(-2) \times (-2) = 4$)?

De acordo com Teixeira (1993) isso se explica pois, no caso dos Números Inteiros, um operador multiplicativo indica o número de vezes que um conjunto se repete, bem como produz transformações de aumento ou diminuição do resultado de acordo com os sinais dos números.

O desejo de um modelo unificador caracteriza-se pela necessidade de aplicar um modelo aditivo que faça sentido no campo multiplicativo e seja capaz de atender às propriedades destas duas operações.

Para Cid (2000), a existência de um “bom modelo” teria evitado a necessidade de superar o obstáculo anterior, porém os que são comumente usados no ensino, como o modelo de ganhos e perdas, apenas explicam satisfatoriamente a estrutura aditiva, tornando-se um obstáculo para a compreensão da estrutura multiplicativa.

Diante dessas elucidacões, é possível afirmar que a compreensão da construçao histórico-epistemológica dos Números Inteiros Relativos pode colaborar para o entendimento das dificuldades que os estudantes apresentam no desenvolvimento conceitual desse tipo de número, sendo elas: dificuldade em unificar a reta numérica, ambiguidade dos dois zeros, estagnacão no estágio de operaçoes concretas (confusão entre operadores multiplicativos a estados a que se aplicam) e a questao do modelo unificador (adição e multiplicação) (TEIXEIRA, 1993, CID, 2000, OLIVEIRA, 2019).

Historicamente a compreensao dos números negativos se constituiu um desafio, caracterizado por diferentes dificuldades (GLAESER, 1985), que tem se mostrado presentes em diversos estudos (FANTINI, 2018, BORELLI, 2019, OLIVEIRA, 2020, VASCONCELOS, 2020). Logo, a elucidacão dessas dificuldades, no contexto de ensino e aprendizagem dos Números Inteiros Relativos, pode levar a compreender a natureza das mesmas quando os estudantes operam com esses números.

Portanto, a perspectiva histórico-epistemológica para a conceitualizacão do Número Inteiro Relativo pode nos auxiliar a compreender tanto as dificuldades que os professores apresentam no ensino e aprendizagem desse conceito, como o conhecimento docente necessário para ensiná-lo.

4 NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS EM ORIENTAÇÕES CURRICULARES

Documentos legais, que normatizam políticas públicas educacionais e consequentemente a elaboração de currículos escolares, têm ressaltado a importância do ensino de conhecimentos matemáticos na Educação Básica brasileira, pois estes “tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas, o que faz com que a Matemática assuma um papel fundamental para o pleno acesso dos sujeitos à cidadania” (SÃO PAULO, 2019, p.303).

Assim sendo, o conhecimento matemático “é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais” (BRASIL, 2016, p.221).

Em se tratando de Educação Básica, porém, considerando especificamente os anos finais do Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) reforça a necessidade de os estudantes resolverem problemas envolvendo as operações fundamentais com números naturais, inteiros e racionais, considerando seus diferentes significados, utilizando estratégias de diferentes naturezas e buscando compreender os processos envolvidos.

Por ser um conhecimento matemático importante, é nesse contexto que o ensino do conceito de Números Inteiros Relativos está inserido atualmente.

Diante disso, faz-se necessário descrever como os Números Inteiros Relativos são abordados em diferentes documentos que norteiam o processo de ensino e aprendizagem de conceitos no âmbito da educação escolar brasileira.

Para tanto, foram escolhidos os seguintes documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019).

4.1 Os Números Inteiros Relativos nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm como finalidade de

[...] fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros. Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (BRASIL, 1998, p.15).

Nesse aspecto, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a Matemática pode auxiliar no desenvolvimento do objetivo proposto e, conseqüentemente, na formação do cidadão ao proporcionar metodologias que enfatizem o desenvolvimento de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

Isso exposto, podemos afirmar que a Matemática se faz presente na quantificação do real, contagem, medição de grandezas e na constituição das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas. Entretanto, esse conhecimento extrapola as questões concretas, criando sistemas abstratos, “ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico” (BRASIL, 1998, p. 25).

Ainda de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), exemplos associados a esse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários.

Nessa perspectiva, os currículos de Matemática para o Ensino Fundamental devem contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permitem associações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) (BRASIL, 1998).

Com relação ao processo de ensino e aprendizagem desses campos matemáticos, os Parâmetros Curriculares sugerem que:

O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos que conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes. Também apontar em que medida os conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos (BRASIL, 1998, p. 49).

Assim, podemos inferir sobre a importância do processo de ensino e aprendizagem dos conjuntos numéricos, com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996) e Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), para que a Educação Básica alcance parte dos objetivos e supere o desafio descrito anteriormente.

Neste caso, temos que esta construção relativa a conjuntos numéricos é iniciada a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental, no âmbito do bloco Números e Operações (BRASIL, 1998), e desenvolvida durante todo o processo de escolarização do estudante.

Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p. 50).

Assim sendo, faz-se necessário que os estudantes “ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, busquem relações existentes entre eles” (BRASIL, 1998, p. 63).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática (BRASIL, 1998), a referida ampliação do pensamento numérico deve acontecer por meio da exploração de situações de aprendizagem, possibilitando ao estudante:

- ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
- resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
- selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta (BRASIL, 1998, p.64).

Portanto, legalmente é nesse contexto que o ensino dos Números Inteiros Relativos se inicia, sendo abordado no Ensino Fundamental Anos Finais, mais precisamente no sétimo ano desse ciclo, que pertence ao terceiro ciclo, correspondente à quinta série (sexto ano) e a sexta série (sétimo ano) do Ensino Fundamental.

De modo geral, as primeiras noções dos Números Inteiros Relativos podem apoiar-se nas ideias intuitivas que os estudantes já possuem sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou em diversas situações do cotidiano (BRASIL, 1998).

Na parte em que os Parâmetros Curriculares Nacionais versam sobre conceitos e procedimentos para o terceiro ciclo, a respeito dos números relativos, sugere-se seu reconhecimento “[...] em diferentes contextos – cotidianos e históricos - e exploração de situações problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos.” (BRASIL, 1998, p. 71).

Nesse sentido, os Números Inteiros podem aparecer como uma ampliação do campo aditivo⁴, pelo desenvolvimento de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem significar diferença, falta, orientação e posições relativas (BRASIL, 1998).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também apresentam algumas orientações didáticas para alguns conteúdos matemáticos, dentre eles o de Números Inteiros.

As orientações didáticas para o ensino e aprendizagem de Números Inteiros são caracterizadas por apresentarem, em um primeiro momento, uma abordagem histórica sobre os mesmos, bem como a necessidade de sua criação, utilização no cotidiano e contextualização na própria Matemática, ressaltando o desafio para seu desenvolvimento e para sua aceitação.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, “na escola o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades, e os resultados, no que se refere à sua aprendizagem ao longo do Ensino Fundamental, têm sido bastante insatisfatórios” (BRASIL, 1998, p.97).

Partindo desse pressuposto, esse documento apresenta alguns obstáculos que o aluno enfrenta no estudo dos Números Inteiros:

- conferir significado às quantidades negativas;
- reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
- reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);
- perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais- por exemplo, é possível adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado, como também é possível subtrair um número de 2 e obter 9.;
- interpretar sentenças do tipo $x = -y$, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo) (BRASIL, 1998, p. 98).

Podemos afirmar que tais obstáculos vão ao encontro daqueles descritos por Glaeser (1985) na construção histórico-epistemológica do conceito de Número Inteiro Relativo.

Neste caso, algumas das dificuldades que Glaeser (1985) indica em sua obra apresentam relação com determinadas dificuldades elucidadas pelos Parâmetros

⁴ Segundo Vergnaud (1982) o campo aditivo é caracterizado por um conjunto de situações que pode ser analisado com base na adição e na subtração, ou seja, estas operações pertencem a um mesmo campo conceitual. Os campos conceituais são definidos como uma série de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, representações simbólicas e procedimentos unidos uns aos outros (VERGNAUD, 1982).

Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), sendo elas: dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; dificuldade em unificar a reta numérica; compreensão da ambiguidade dos dois zeros; estagnação no estágio das operações concretas em relação ao estágio das operações formais.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a abordagem didático-pedagógica dos Números Inteiros tem acontecido, em muitos casos, através da memorização de regras para efetuar cálculos em situações descontextualizadas, fazendo com que muitos alunos não reconheçam os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não obtêm êxito na aplicação, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do conceito de número inteiro (BRASIL, 1998).

Outra abordagem referente aos números inteiros, presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), diz respeito à representação geométrica desses números numa reta numérica orientada da esquerda para a direita, possibilitando abordar diferentes aspectos desse conteúdo, tais como:

- visualizar o ponto de referência (origem) a partir do qual se definem os dois sentidos da reta;
- identificar um número e seu oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero, em sentidos opostos;
- reconhecer a ordenação dos inteiros: dados dois números inteiros quaisquer, o menor é o que está à esquerda (no sentido positivo da reta numérica); assim, dados dois números positivos será maior o que estiver mais distante do zero e dados dois negativos será maior o que estiver mais próximo do zero;
- comparar números inteiros e identificar diferenças entre eles;
- inferir regras para operar com a adição e a subtração, como: $(+3) + (-5) = +3 - 5 = -2$ (BRASIL, 1998, p.98-99).

A fim de atingir os objetivos propostos, há como sugestão alguns recursos para trabalhar o conteúdo de Números Inteiros, dentre eles: ábaco de inteiros e tabelas que possibilitem observar regularidades e de padrões de comportamento da série numérica.

O ábaco dos inteiros (Figura 1) consiste em “duas varetas verticais fixadas num bloco, nas quais se indica a que vai receber as quantidades positivas e a que vai receber as quantidades negativas, utilizando argolas de cores diferentes para marcar pontos” (BRASIL, 1998, p.99).

Figura 1: Ábaco dos Inteiros



Fonte: GONÇALVES (2020, p.44)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), o referido material possibilita a visualização de quantidades positivas e negativas e das situações vinculadas ao zero. Ao manipular as argolas nas varetas, os estudantes poderão construir regras para o cálculo com os inteiros.

No caso das tabelas (Figura 2), o documento ressalta que é possível que seja utilizada no desenvolvimento da multiplicação e da divisão com inteiros, uma vez que, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais, a compreensão dos procedimentos de cálculo envolvidos “dependem do conhecimento de conceitos, propriedades e processos que implicam identificar regularidades, estabelecer relações, fazer algumas inferências” (BRASIL, 1998, p.99).

Figura 2: Exemplo de tabela de multiplicação

-3	-2	-1	0	1	2	3	x
-9	-6	-3	0	3	6	9	3
-6	-4	-2	0	2	4	6	2
-3	-2	-1	0	1	2	3	1
0	0	0	0	0	0	0	0
							-1
							-2
							-3

Fonte: BRASIL (1998, p. 100)

Nesse caso, podemos inferir que os estudantes, por meio da observação do padrão definido em cada linha ou coluna, podem preencher a tabela sem ter um conhecimento

prévio da regra de “sinais da multiplicação”. Porém, após preencherem a tabela, os estudantes podem levantar hipóteses que levem a tal construção, ou seja, sobre o sinal resultado da multiplicação entre dois números inteiros com sinais iguais e com sinais opostos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam que, o professor, ao buscar as orientações para trabalhar com os Números Inteiros, deve partir do pressuposto que as atividades propostas não podem somente apoiar-se em situações concretas, pois nem sempre essas concretizações reforçam os significados das noções envolvidas.

Portanto, faz-se necessário possibilitar, pela extensão dos conhecimentos, o entendimento e a justificativa de algumas propriedades dos números inteiros, buscando situações que permitam aos alunos reconhecer algumas características formais desses números a partir de experiências e do conhecimento que possuem sobre os Números Naturais (BRASIL, 1998).

A ideia apresentada anteriormente se relaciona com o princípio de extensão do conhecimento, proposto por Caraça (2003), em que a impossibilidade de resolução de cálculos em determinados conjuntos numéricos impõe a necessidade da criação de novos conjuntos, despontando assim a intenção do homem a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento.

Logo, quando os Parâmetros Curriculares Nacionais trazem a concepção de que o professor deve possibilitar o entendimento e a justificativa de algumas propriedades dos Números Inteiros Relativos, pela extensão dos conhecimentos, fica explícita a tentativa de propor que o docente, devido aos obstáculos de operações com os Números Naturais, amplie este conjunto e, diante disso, construa com seus alunos, conceito e propriedades dos Números Inteiros.

4.2 Os Números Inteiros Relativos na Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) é definida como

[...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2017, p.7, grifo do autor).

Durante a Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) devem garantir aos estudantes o

desenvolvimento de competências gerais, que constituem, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento (BRASIL, 2017).

Cabe ressaltar que, na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), o termo competência é definido como: “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2017, p.8).

Por conseguinte, as habilidades são aptidões desenvolvidas ao longo de cada etapa de ensino que contribuem para o desenvolvimento das competências gerais e específicas da Base, ou seja, representam as aprendizagens essenciais que devem ser garantidas no âmbito da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) a todos os estudantes.

Objetivando o desenvolvimento das competências por meio de habilidades, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) na área da Matemática propõe cinco unidades temáticas a serem abordadas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e estatística.

Essas unidades temáticas encontram-se correlacionadas e têm por objetivo orientar a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, propondo assegurar aos alunos a possibilidade de reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo, baseando-se nos princípios do Letramento Matemático (BRASIL, 2017),

Letramento Matemático na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) é definido como

[...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2017, p.264).

De acordo com o exposto, salientamos que é no contexto da unidade temática Números que o conceito de Número Inteiro Relativo está inserido. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), essa unidade tem como finalidade “desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades” (BRASIL, 2017, p.269).

Nesse sentido, no processo da construção da noção de número, os alunos necessitam desenvolver as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e

ordem, noções fundamentais da Matemática, dentre outras. Para essa construção, faz-se necessário proporcionar, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos (BRASIL, 2017).

Nesses termos, há que se ressaltar a relevância da construção dos campos numéricos, mais precisamente dos Números Inteiros Relativos, para os quais nos estudos “devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações” (BRASIL, 2017, p. 268).

A introdução ao conceito de Números Inteiros Relativos é encontrada no seguinte objeto de conhecimento associado ao sétimo ano do Ensino Fundamental: “Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações” (2017, p.306). De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) as habilidades a serem desenvolvidas nesse tópico são:

(EF07MA03)⁵ Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros (BRASIL, 2017, p. 306).

Na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) é nesse momento que o aluno deve ter a habilidade de resolver situações envolvendo números inteiros, relacionando as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando métodos diversos, com compreensão dos processos neles envolvidos. A partir do desenvolvimento das habilidades inerentes a Números Inteiros Relativos, o estudante poderá ser capaz de realizar cálculos algébricos mais complexos em momentos posteriores de seu desenvolvimento escolar.

Porém, diferentemente dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), que apresentam exemplos ou sugestões de atividades referentes ao Número Inteiro Relativo baseando-se na construção histórica do conceito ou em práticas sociais, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) apresenta apenas as habilidades específicas a serem desenvolvidas com relação ao referido conceito.

⁵ EF= Ensino Fundamental; 07= Sétimo ano; MA= Matemática; 03= Terceira habilidade a ser desenvolvida na área de Matemática no sétimo ano; 04= Quarta habilidade a ser desenvolvida na área de Matemática no sétimo ano.

4.3 Os Números Inteiros Relativos no Currículo Paulista

O Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) define as competências e habilidades cognitivas e socioemocionais que devem ser garantidas ao longo da escolaridade básica, de modo a proporcionar a formação integral dos estudantes, objetivando a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Neste currículo, o conceito de competência utilizado faz referência ao definido na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), ou seja, “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (p.8).

No caso da componente Matemática, assim como na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) apresenta como pressuposto pedagógico a ideia de que todos podem aprender, o que demanda investir no desenvolvimento da autoestima e autoconfiança dos alunos.

Orientado pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos parte do desenvolvimento do Letramento Matemático dos estudantes, uma vez que, “o ensino deve considerar a necessidade de vincular a escola a vida, envolvendo todos os componentes curriculares” (p.311).

O conceito de Letramento Matemático no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) é definido com base nos preceitos da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), porém mesmo com a semelhança, no documento que baliza o ensino, no currículo escolar da rede estadual paulista há um foco em aspectos como comunicação, representação e raciocínio e argumentação.

Referente à comunicação tem-se que:

[...] ao se deparar com um desafio, os estudantes se sentem estimulados a reconhecer e compreender uma situação-problema construindo um modelo mental da situação, o que levará à compreensão, ao esclarecimento e à formulação de um problema. Ao encontrar uma solução, os estudantes precisarão apresentar, explicar ou justificar, ou seja, “matematizar”: transcrever um problema do mundo real para a linguagem matemática, além de interpretar ou avaliar um resultado matemático em relação ao problema original (SÃO PAULO, 2019, p. 311).

A representação é inerente à capacidade de expressar objetos matemáticos por meio de tabelas, gráficos, diagramas, fluxogramas, figuras, equações, materiais concretos, na proposição ou resolução de problemas.

No caso do raciocínio e argumentação há a ideia de proporcionar que os estudantes “desenvolvam o pensamento lógico e a capacidade de justificar e fazer inferência sobre uma informação ou solução de problemas” (SÃO PAULO, 2019, p. 312).

Com isso, para o desenvolvimento do Letramento Matemático, o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) propõe as seguintes metodologias: resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem. Também há foco na interdisciplinaridade e nas tecnologias digitais para o desenvolvimento das habilidades.

Assim, como proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) de Matemática agrupa as habilidades a serem desenvolvidas no decorrer do Ensino Fundamental em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

De acordo com o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) é no contexto da unidade temática Números que o conceito de Números Inteiros Relativos está inserido. Portanto, segundo esse documento, o ensino no âmbito de Números

[...] tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, o que, além de desenvolver conhecimentos sobre os números e suas relações, envolve a compreensão das operações e seus resultados, reconhecendo o significado ao operar com um número para obter outros (SÃO PAULO, 2019, p. 316).

O ensino do conceito dos Números Inteiros Relativos aparece no sétimo ano do Ensino Fundamental, e assim como na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), tem como objeto de conhecimento: “Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações” (SÃO PAULO, 2019, p. 351). Portanto, as habilidades associadas a esse objeto de conhecimento são:

(EF07MA03) Ler, comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
(EF07MA04) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam operações com números inteiros (SÃO PAULO, 2019, p. 351).

Por fim, para uma abordagem significativa das habilidades mencionadas de acordo com o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), é possível ter como base a história da Matemática, pois a necessidade de medir e de contar revela os usos dos Números Naturais e a justificativa da ampliação para os demais conjuntos numéricos.

Igualmente são mencionados os jogos que ativem o cálculo mental, raciocínio e cálculo por estimativa, como ferramentas no processo de ensino e aprendizagem da unidade temática Números, a qual está inserida os Números Inteiros Relativos (SÃO PAULO, 2019).

5 A PERSPECTIVA DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS EM LIVROS DIDÁTICOS ELABORADOS A PARTIR DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

O ensino de Números Inteiros Relativos, com base na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), é abordado no sétimo ano do Ensino Fundamental. Este conteúdo está presente na unidade temática “Números”, abrangendo o objeto de conhecimento⁶ “Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações”.

Ao explorar o conjunto dos Números Inteiros, como disposto na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), há duas habilidades que precisam ser desenvolvidas pelos estudantes: “(EF07MA03): Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração” (p. 307) e “(EF07MA04): Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros” (p.307).

Entendemos que os livros didáticos devem balizar o seu conteúdo referente a Números Inteiros Relativos nas habilidades mencionadas, nas dez competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e nas competências específicas da Matemática presentes neste documento. De acordo com o Guia de livros didáticos do Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) (2020)

O ensino de Matemática está associado ao estabelecimento de diversos tipos de articulações entre objetos de conhecimento, inclusive das diferentes áreas de conhecimento do Ensino Fundamental. Nesse contexto, o livro didático deve zelar pela apresentação articulada dos objetos de conhecimento e habilidades, nos diferentes campos da Matemática, visando à garantia do desenvolvimento das competências específicas e gerais pelo(a) estudante, como previsto na BNCC. Tais articulações permitem ao(à) estudante perceber que os conhecimentos matemáticos não são isolados em campos estanques e/ou autossuficientes (BRASIL, 2019, p.7).

Sendo assim, das 11 (onze) coleções de Matemática aprovadas no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) no ano de 2020, elencamos cinco coleções com maior número de escolhas no Brasil com o intuito de identificar a perspectiva didática para o ensino de Número Inteiro Relativo presente nos livros

⁶ Conforme a BNCC (2017) os objetos de conhecimento se referem aos conteúdos, conceitos e processos organizados em diferentes unidades temáticas, sendo aplicados a partir do desenvolvimento de um conjunto de habilidades.

didáticos de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017). Os livros foram distribuídos conforme o quadro 6 a seguir.

Quadro 6: total de livros de Matemática distribuídos por meio do PNLD (2020) - Anos Finais E.F

LIVRO	EDITORA	QUANTIDADE DISTRIBUÍDA (PROFESSOR)	QUANTIDADE DISTRIBUÍDA (ALUNO)	TOTAL
A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	EDITORA FTD S A	102208	4033531	4135739
TELÁRIS MATEMÁTICA	EDITORA ÁTICA S.A.	20181	1025496	1045677
MATEMÁTICA - BIANCHINI	EDITORA MODERNA LTDA	19939	899923	919862
ARARIBÁ MAIS – MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	15371	620824	636195
MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA	EDITORA FTD S A	10398	520972	531370
MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	11880	514953	526833
MATEMÁTICA ESSENCIAL	EDITORA SCIPIONE S.A.	11480	507969	519449
APOEMA	EDITORA DO BRASIL S.A.	6855	345904	352759
TRILHAS DA MATEMÁTICA	SARAIVA EDUCACAO S.A.	5568	218718	224286
GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA	EDIÇÕES SM LTDA.	5387	223150	228537
CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA	EDIÇÕES SM LTDA.	3879	192738	196617

Fonte: Ministério da Educação- Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)

Assim sendo, descreveremos e analisaremos a seguir as seguintes coleções: A conquista da Matemática, Teláris Matemática, Matemática – Bianchini, Araribá Mais-Matemática e Matemática Realidade & Tecnologia, levando em consideração os seguintes aspectos: como as habilidades e competências gerais e específicas presentes na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) são abordadas nas coleções elencadas e se as atividades presentes nos livros didáticos podem colaborar para a superação de dificuldades (GLAESER, 1985) que se apresentam historicamente para o desenvolvimento do conceito de Número Inteiro Relativo.

5.1 Livro: A conquista da Matemática- José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci (2018)

No início do conteúdo de Números Inteiros Relativos já percebemos a intenção de construção da habilidade EF07MA03 por meio de situações referentes ao cotidiano, como termômetros e tabelas com saldo de gols em campeonatos, que servem de base para a introdução do conceito, aplicando-o em diferentes contextos, como nos é apresentado na habilidade em questão.

Inferimos que a utilização da reta numérica no contexto dos Números Inteiros Relativos é uma característica presente nesse livro. Esse fato se confirma com um tópico, que aborda o conceito de reta numérica, no qual os estudantes são convidados a construir uma reta numérica como recurso para a localização de números, através de passos pré-determinados. Também é sugerido que o professor trabalhe com linhas do tempo, pedindo para que os estudantes marquem acontecimentos históricos com base em um ponto de referência, que pode ser o ano de nascimento de cada um deles, por exemplo.

Apesar do trabalho de construção, não se evidencia, nas atividades propostas, a possibilidade de entender a reta numérica como um campo numérico orientado da esquerda para direita, pois os números positivos e negativos são tratados de modo isolado durante a construção da reta numérica, à direita e à esquerda do zero, respectivamente.

Nestes termos, o contexto histórico abordado na habilidade EF07MA03 se faz presente, porém, configura-se como uma sugestão ao professor e não como atividade obrigatória ao estudante. Cabe ao professor efetivar esse processo para o desenvolvimento da habilidade em questão.

Por conseguinte, há abordagem do conceito de módulo⁷ de um Número Inteiro Relativo por meio de uma situação que envolve distância entre casas. O livro, mais uma vez, utiliza-se da representação da situação em uma reta numérica, em uma tentativa de consolidar uma das habilidades propostas (EF07MA03) na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017). Além disso, neste tópico define-se matematicamente o conceito de módulo.

Podemos perceber que há uma progressão de conceitos trabalhados nesse livro. Um exemplo disso se refere ao conceito de Números Opostos ou Simétricos. Utilizando-se do módulo de um número, a ideia de número simétrico⁸ é apresentada através da

⁷ “Chama-se módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro a distância ou o afastamento desse número até o zero, na reta numérica” (JÚNIOR E CASTRUCCI, 2018, p. 39).

⁸ “Números associados a pontos que se encontram à mesma distância do zero (eles possuem módulos iguais), mas situados em lados opostos na reta” (JÚNIOR E CASTRUCCI, 2018, p. 40).

distância de números ao zero. Esse é outro indício da utilização do conceito de reta numérica.

A comparação e ordenação de números inteiros também são abordadas através da reta numérica. “Considerando dois números inteiros quaisquer, o maior desses números é aquele que está à direita na reta numérica” (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p. 41).

Há o aprofundamento desse conceito com situações envolvendo temperaturas positivas e negativas. Assim, as atividades apresentam situações em que são incluídos os sinais de $>$ (maior), $<$ (menor) e $=$ (igual) para comparação de Números Inteiros Relativos.

Também consta a ideia de se escrever conjuntos de acordo com as condições apresentadas. Assim, o conceito de reta numérica como campo orientado da esquerda para direita é evidenciado por meio dos exemplos e atividades descritas anteriormente.

A habilidade de resolver e elaborar problemas que envolvam operações com Números Inteiros (EF07MA04) é contemplada do capítulo 4 até o capítulo 12, e envolvem a adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada.

No caso da adição envolvendo Números Inteiros Relativos é apresentada a ideia de deslocamentos na reta numérica através de três situações: perda e ganho de pontos em um torneio de handebol, descida e subida em elevadores e associação de números aos deslocamentos para o leste e oeste.

Salientamos que na obra didática de Júnior e Castrucci (2018) essas situações servem de base para a elaboração da operação de adição de Números Inteiros Relativos com o mesmo sinal e com sinais opostos. As atividades referentes a essa operação, no contexto dos Números Inteiros Relativos, abrangem diferentes naturezas, variando desde a realização de operações até situações contextualizadas.

Porém, percebemos que questões que se referem à elaboração, por parte dos estudantes, de problemas que envolvam Números Inteiros Relativos, não aparecem entre essas atividades.

A operação de subtração no contexto dos Números Inteiros Relativos é abordada através da reta numérica, com o foco na variação da temperatura. Chama a atenção o fato de o livro apresentar a ideia de ampliação dos conjuntos numéricos para justificar a subtração em $\mathbb{Z}$. Esse é o primeiro momento em que isso ocorre.

As atividades que envolvem essa operação são, em sua maioria, contextualizadas, apresentando tabelas, gráficos, situações do cotidiano, dentre outras. Também não há indícios de situações que oportunizem o desenvolvimento da habilidade de elaboração de problemas que envolvam a subtração de Números Inteiros Relativos.

Na multiplicação com Números Inteiros a introdução é dada através de um pouco de história da Matemática.

De acordo com Júnior e Castrucci (2018) apesar de a ideia de número negativo ser utilizada desde o século XVII, ela só foi totalmente aceita a partir do século XIX. “A multiplicação com números negativos foi mais difícil de ser aceita e compreendida naquela época. Passou-se um longo tempo para que os matemáticos pudessem dar um resultado para a multiplicação de dois números negativos” (p. 59).

Nesse caso, a História da Matemática foi utilizada apenas para introduzir o conceito de multiplicação no âmbito dos inteiros, apresentando, resumidamente, alguns fatos históricos referentes a tal construção.

Dada essa introdução há apresentação de regras de sinais para a multiplicação envolvendo Números Inteiros Relativos. Percebemos que estas são abordadas por meio de padrões, tabelas e soma de parcelas iguais. Nas atividades há tendência em utilizar tabelas de multiplicação na consolidação da referida operação. Também ressaltamos aspectos que envolvem incógnitas a serem encontradas através de tentativas. Há atividades que envolvem a ideia de soma e produto. Não comparecem questões que os estudantes devam criar situações que envolvam multiplicação de Números Inteiros Relativos.

A divisão é abordada através de exemplos numéricos, utilizando-se do conceito de operação inversa da multiplicação. A generalização da questão do sinal do quociente ocorre por meio de três exemplos de divisão: $(+20): (-5)$; $(-20): (+5)$; $(-20): (-5)$.

Com relação às atividades desse tema comparece a questão da utilização de quadros para completar e situações que envolvem incógnitas. Cabe ressaltar que atividades inerentes à regra de sinais na divisão também aparecem. Assim como na multiplicação, também não há atividades que envolvem a construção de situações-problema envolvendo divisão.

A potenciação é iniciada por meio de atividades que envolvem potências de bases (-1) e $(+1)$. Também são elencadas operações de produto, quociente, potência de uma potência e potência de um produto ou de um quociente em $\mathbb{Z}$. As atividades deste tópico variam entre a aplicação de propriedades em cálculos algébricos e consolidação das propriedades apresentadas. Ressaltamos que, mais uma vez, não são apresentadas atividades em que o estudante deva construir situações que envolva a potenciação em $\mathbb{Z}$.

Por fim, a radiciação nos inteiros é marcada pela generalização da não existência de raiz quadrada de números negativos em $\mathbb{Z}$, dada a impossibilidade de se obter um Número Inteiro Relativo que elevado ao quadrado resulte em um número inteiro negativo.

As atividades apresentam cálculos de raízes quadradas de inteiros, ressaltando a possibilidade ou a não possibilidade de cálculo nesse conjunto. Também não há evidências de construção de situações-problema, por parte dos alunos, envolvendo radiciação em $\mathbb{Z}$.

De um modo geral, concluímos que as habilidades referentes a Números Inteiros Relativos na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) são abordadas em parte por esse livro. As ações de comparação e de ordenação de Números Inteiros Relativos são oportunizadas em diferentes contextos, tais como: medição, registro de temperatura, saldo bancário, tabelas de saldo de gols, dentre outros.

A questão histórica, enfatizada na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) pouco aparece, apresentando-se apenas em algumas atividades isoladas.

Percebemos ainda que a associação dos Números Inteiros Relativos à reta numérica é desenvolvida, se considerarmos as habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), uma vez que, em praticamente todos os tópicos as situações abordadas partem dessa ideia.

Resolver atividades que envolvam operações com Números Inteiros Relativos está presente em diversos exemplos. Porém no que se refere à habilidade de elaborar problemas que trazem essas operações, não encontramos indícios em nenhuma atividade da unidade relacionada ao conteúdo investigado.

Ainda assim, com base na diversidade de atividades propostas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, no contexto dos Números Inteiros, salientamos que a segunda competência específica da Matemática⁹ pode ser contemplada, uma vez que grande parte das referidas atividades buscam abranger situações que envolvam a Matemática atrelada ao cotidiano.

Logo, tanto a teoria, quanto os exemplos e atividades apresentadas no livro, proporcionam elementos, não só para alcançar a construção das habilidades propostas referentes ao conteúdo de Números Inteiros Relativos, relacionando-os aos obstáculos presentes na construção histórico-epistemológica do conceito, como também para

⁹ “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2017, p.267)

abordar as competências gerais da Educação Básica e as competências específicas da Matemática propostas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

5.2 Livro: Teláris Matemática- Luiz Roberto Dante (2018)

Para introduzir o conceito de Número Inteiro Relativo o livro apresenta exemplos da sua aplicação no cotidiano, tais como: temperatura, altitude, fuso horário e transações bancárias. Esse aspecto é confirmado nas primeiras atividades que objetivam a representação dos Números Inteiros nos contextos evidenciados anteriormente.

Também traz parte da história sobre a origem dos Números Negativos, reforçando a preocupação em desenvolver a habilidade EF07MA03 presente na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017). Contudo, a utilização da História da Matemática, assim como na coleção analisada anteriormente, também se resume à apresentação de fatos históricos referentes à construção do conceito somente para a contextualização do assunto.

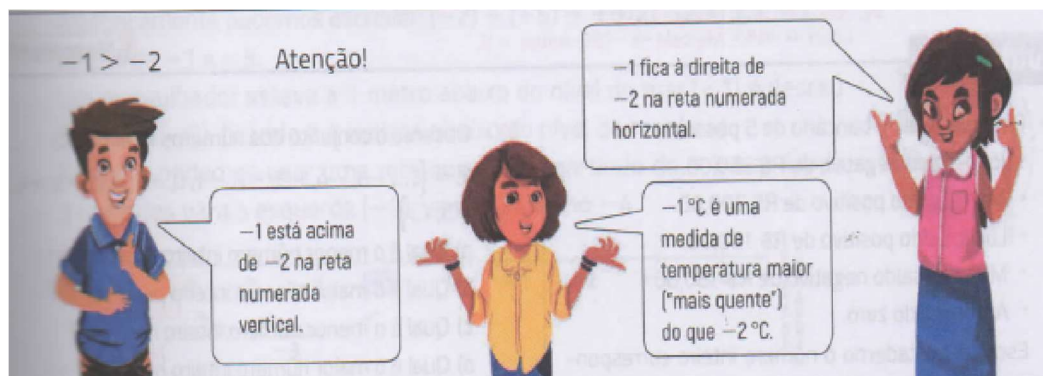
Após esta contextualização inicia-se a representação do conjunto dos Números Inteiros por meio da construção da reta numérica e conjuntos. Cabe ressaltar que nesse momento de construção não transparece a ideia da reta numérica como um campo orientado da esquerda para direita, pois a coleção investigada divide-a em duas “partes”: negativa e positiva.

Nesse sentido, as atividades referentes a essa seção evidenciam a ideia de antecessor e sucessor, pertencimento e não pertencimento de números ao conjunto dos inteiros e associação de Números Inteiros a pontos da reta numérica.

Isto exposto, evidencia-se a ideia de Módulo ou Valor Absoluto de um Número Inteiro Relativo e do conceito de Números Opostos ou Simétricos no Conjunto $\mathbb{Z}$. Neste caso, também há utilização da reta numérica, além de exemplos numéricos e atividades envolvendo contextos para exemplificar e desenvolver estes conceitos.

Por conseguinte, o livro apresenta a comparação de Números Inteiros Relativos por meio de situações do cotidiano (crédito e débito, temperaturas, altitude) e utilização da reta numérica. Cabe ressaltar que, nesse momento, alguns desses exemplos possibilitam evidenciar a reta numérica como um campo orientado da esquerda para direita (Figura 3).

Figura 3: Exemplo de comparação de NIR



FONTE: DANTE, 2018, p. 21

Assim, as atividades propostas referentes ao tópico ordenação e comparação são de diferentes naturezas, variando desde ordenação de Números Inteiros Relativos isolados, até situações contextualizadas envolvendo comparação de saldos bancários e altitudes.

As operações com Números Inteiros Relativos abordadas neste livro são: adição, subtração, multiplicação e divisão. Esse aspecto reforça a intenção de desenvolver a habilidade EF07MA04 da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), que trata da resolução e elaboração de problemas que envolvam operações com números inteiros.

No caso da adição envolvendo Números Inteiros Relativos são apresentadas situações do cotidiano, tais como temperatura e profundidade de mergulho, com intuito de contextualizar esta operação. Além disso, observamos a utilização da reta numérica como ferramenta para auxiliar nos cálculos.

As atividades referentes a esta operação são de diferentes naturezas, abrangendo contextos para efetuar cálculos de soma de duas parcelas, situações envolvendo saldos bancários, temperaturas e quadrados mágicos, expressões numéricas e propriedades da adição de inteiros.

Ressaltamos que não há evidência de atividades inerentes à elaboração de problemas, por parte dos alunos, envolvendo a adição de inteiros, conforme descrito na habilidade EF07MA04 da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

O desenvolvimento da operação de subtração no conjunto dos Números Inteiros Relativos é iniciado por meio de exemplos do cotidiano, tais como: variação de temperatura, movimentações em contas bancárias e deslocamentos em elevadores. Ressaltamos que para a formalização da referida operação são utilizados os conceitos de Reta Numérica e de Oposto ou Simétrico de um Número Inteiro.

Nesse sentido, as atividades envolvendo a subtração no contexto dos inteiros evidenciam situações do cotidiano, preenchimento de informações em tabelas, cálculos com números inteiros isolados e utilização da calculadora como ferramenta de validação das respostas.

A multiplicação envolvendo Números Inteiros Relativos é iniciada através da “Tabela da Multiplicação” e de um roteiro que proporciona que os estudantes explorem regularidades desta operação.

Ao final desta atividade há um resumo envolvendo a multiplicação em $\mathbb{Z}$: “se um fator é zero, então o resultado é zero; o produto de dois Números Inteiros com sinais iguais tem sempre sinal positivo; o produto de dois Números Inteiros com sinais diferentes tem sempre sinal negativo” (DANTE, 2018, p.30).

Assim, as atividades referentes a esta operação envolvem cálculo de multiplicações, situações contextualizadas, multiplicações com mais de dois fatores e verificação de propriedades de multiplicação envolvendo inteiros.

A divisão de Números Inteiros Relativos é tratada como a operação inversa da multiplicação, seguindo, portanto, as mesmas propriedades. Diante disso, as atividades apresentadas visam estabelecer as regras de sinais para a divisão de inteiros, explorando cálculos, situações contextualizadas e suas respectivas propriedades.

As operações com Números Inteiros Relativos são finalizadas com a potenciação. Isto exposto, a ideia tratada no presente livro é a abordagem de inteiros na base e Números Naturais no expoente por meio de exemplos numéricos referentes às propriedades de potenciação. As atividades que concluem esta operação variam desde escrita e cálculos de potências e validação de suas propriedades.

Por fim, são apresentados capítulos referentes à representação de Números Inteiros Relativos no plano cartesiano e à aplicação deste conjunto em sequências numéricas. Evidenciamos que a abordagem específica desses tópicos se configura como uma diferença aos demais livros analisados neste trabalho, principalmente no que se refere à ideia de plano cartesiano no contexto dos Números Inteiros, que somente é tratado nesta coleção.

Em suma, os dados ressaltados sobre este livro evidenciam a preocupação, não só com o trabalho das habilidades referentes ao processo de ensino e aprendizagem de Números Inteiros (EF07MA03, EF07MA04), mas também com o desenvolvimento das Competências Gerais da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e as competências específicas da área de Matemática.

Por conseguinte, remetem ao desenvolvimento das Competências Gerais 1, 2 e 7 previstas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), referindo-se à valorização e utilização de conhecimentos historicamente construídos, no caso da primeira competência, ao desenvolvimento do exercício da curiosidade intelectual, como descrito na segunda competência e à questão de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, conforme a sétima competência (BRASIL, 2017).

Por fim, as Competências Específicas da Matemática são contempladas por meio do uso de exemplos e exercícios de diferentes naturezas no presente livro.

Afirmamos que o trabalho com tabelas, gráficos, fusos horários, padrões e sequências numéricas oportunizam o desenvolvimento das Competências Específicas da Matemática 1, 2, 3 e 6, proporcionando que os estudantes resolvam situações envolvendo diferentes contextos e compreendam que a Matemática contribui para alicerçar descobertas e construções, desenvolvam raciocínio lógico que potencialize a busca de soluções, assim como proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

5.3 Livro: Matemática Bianchini- Edvaldo Bianchini (2018)

O conteúdo de Números Inteiros Relativos neste livro é iniciado ressaltando a necessidade da criação de outros números, além dos naturais, para a realização de algumas subtrações e para representação de diversas situações do cotidiano, tais como: lugares que estão abaixo do nível do mar, temperaturas negativas, extratos bancários e saldo de gols em campeonatos de futebol (Figura 4).

Ressaltamos que a representação do conjunto $\mathbb{Z}$ e a leitura de Números Inteiros Relativos também compõem nesta introdução.

Figura 4: Saldo de gols no Campeonato Brasileiro de 2018

Classificação		P	GP	GC	SG
1ª	Palmeiras - SP	80	62	32	+30
2ª	Santos - SP	71	59	35	+24
3ª	Flamengo - RJ	71	52	35	+17
4ª	Atlético - MG	62	61	53	+8
17ª	Internacional - RS	43	35	41	-6
18ª	Figueirense - SC	37	30	50	-20
19ª	Santa Cruz - PE	31	45	69	-24
20ª	América - MG	28	23	58	-35

Fonte: BIANCHINI (2018, P.13)

Por conseguinte, há o tópico: “Representação na reta numérica e módulo”, que possibilita o trabalho com a habilidade (EF07MA03) – “Comparar e ordenar números

inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração” (BRASIL, 2017, p.307), à medida que apresenta passos para a construção da reta numérica dos inteiros e apresenta o conceito de módulo de um Número Inteiro.

Assim, as atividades referentes a esse tópico corroboram o desenvolvimento desta habilidade, pois estão associadas a cálculos de valor de módulo e consequentemente, localização de pontos na reta numérica.

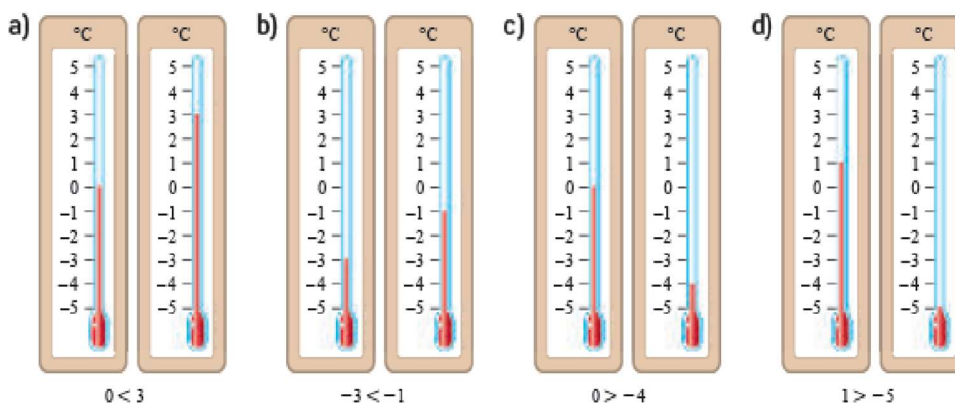
Após isso, o conceito de Números Opostos (ou simétricos) é ressaltado no âmbito dos inteiros. Partindo da ideia de Módulo, o livro apresenta a seguinte definição: “Números que têm sinais diferentes e têm o mesmo módulo são opostos ou simétricos” (BIANCHINI, 2018, p. 17). Esse aspecto demonstra uma progressão na apresentação dos conteúdos referentes ao conceito de Números Inteiros Relativos.

Tendo em vista a comparação de Números Inteiros Relativos, a situação escolhida para o desenvolvimento dessa habilidade foi a da temperatura em cidades brasileiras (Figura 5).

Com o auxílio da reta numérica e dos sinais $>$ (maior), $<$ (menor) e $=$ (igual) foram apresentados exemplos de comparação de Números Inteiros Relativos, resultando na seguinte conclusão: “Dados dois números inteiros diferentes, na reta numérica o menor deles é o que está à esquerda do outro” (BIANCHINI, 2018, p.19).

As atividades relacionadas a esse tópico reforçam o desenvolvimento da habilidade de ordenação de inteiros de modo crescente ou decrescente, além do desenvolvimento da ideia de comparação, por meio de situações-problema ou sentenças matemáticas.

Figura 5: Exemplo de comparação de Números Inteiros (Temperaturas)



Fonte: BIANCHINI (2018, p. 19)

Feito isso, tem-se início o conteúdo das operações com Números Inteiros Relativos. Ressaltamos que neste livro são abordadas a adição, subtração, multiplicação,

divisão, radiciação e potenciação envolvendo o conjunto dos Números Inteiros, compreendendo assim a habilidade EF07MA04: “Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros” (BRASIL, 2017, p.307).

A primeira operação envolvendo Números Inteiros Relativos apresentada no livro é a adição. Utilizando-se de deslocamentos na reta numérica são descritas duas situações do cotidiano com intuito de ilustrar a soma de dois inteiros de mesmo sinal e a soma de dois inteiros de sinais diferentes. As propriedades envolvendo esta operação- associativa, comutativa e elemento neutro- são trabalhadas por meio de exemplos com operações numéricas.

As atividades referentes à adição de inteiros apresentam a reta numérica como ferramenta para resolução. Também se referem à aplicação das propriedades apresentadas, leitura e desenvolvimento de tabelas no contexto dos Números Inteiros Relativos e resolução de situações contextualizadas. Há questões que envolvem a criação, por parte dos estudantes, de situações envolvendo a adição de inteiros.

No caso da subtração no contexto dos Números Inteiros Relativos, a situação escolhida para introdução desta operação foi o cálculo da variação de temperatura em diferentes países. Assim, para a explicação da subtração, a reta numérica e o conceito de Número Oposto foram utilizados. Com isso, as atividades envolvendo esta operação apresentam situações contextualizadas, operações com o auxílio da calculadora e momentos em que o estudante deve elaborar problemas envolvendo a subtração de inteiros.

A multiplicação de inteiros é trabalhada por meio de operações numéricas. Para tanto, o conceito de Oposto de um Número Inteiro Relativo é utilizado com intuito de ilustrar duas situações: “o produto de dois números de mesmo sinal é um número positivo; o produto de dois números de sinais diferentes é um número negativo” (BIANCHINI, 2018, p. 32).

Partindo desses pressupostos, são apresentadas as propriedades da multiplicação no conjunto dos Números Inteiros Relativos: comutativa, associativa, elemento neutro e distributiva em relação à adição. Com isso, as atividades referentes a essa seção têm por objetivo a identificação e utilização das referidas propriedades, tendo como base situações contextualizadas e cálculos com números inteiros isolados.

A divisão envolvendo Números Inteiros Relativos é iniciada por meio da ideia de operação inversa da multiplicação. Portanto, duas regras são evidenciadas em uma divisão entre dois números inteiros, com o divisor diferente de zero: “quociente positivo

quando esses números (dividendo e divisor) são de mesmo sinal; quociente negativo quando esses números (dividendo e divisor) são de sinais diferentes” (BIANCHINI, 2018, p.36).

Com relação às atividades relacionadas a esta operação podemos ressaltar que contemplam cálculos de divisão com Números Inteiros e contextos para determinar o valor de incógnitas por meio de operação inversa. Não há indícios de atividades que abordem a habilidade de elaboração, por parte dos estudantes, de situações envolvendo divisão de Números Inteiros Relativos.

Para introduzir o conceito de potenciação com Números Inteiros Relativos são exibidos exemplos de cálculos com bases negativas e positivas, objetivando a construção de regras por meio da observação de padrões. Também são salientadas as propriedades da potenciação quando o expoente é zero ou um, bem como a potência de uma potência, potência de um produto e produto e quociente de potências de bases iguais.

No que se refere às atividades relacionadas a esta operação, a maioria apresenta a ideia de calcular valores das potências. Também são abordados os conceitos de comparação de potências e fixação das propriedades de potenciação apresentadas anteriormente.

A radiciação nos Números Inteiros é trabalhada, especificamente, com a raiz quadrada. Nesta seção, além de exemplos de cálculos de raízes quadradas exatas de Números Inteiros positivos, é salientada a impossibilidade de cálculo de raiz quadrada de Números Inteiros negativos no âmbito deste conjunto. Nesse sentido, as atividades relacionadas a esta temática apresentam, predominantemente, cálculos envolvendo esta operação.

Em suma, salientamos que neste livro os estudantes são levados a desenvolver as habilidades previstas para o ensino de Números Inteiros. A introdução do conceito é abordada de modo contextualizado, como proposto na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), porém não envolvendo a parte histórica dos Números Inteiros Relativos.

Logo, as atividades relacionadas à introdução apresentam, em sua maioria, diversas aplicações de inteiros em situações cotidianas, tais como: temperatura, altitude, saldo de gols, dentre outras, corroborando a diversificação de contextos em que esse conceito é abordado.

5.4 Livro: Araribá Mais Matemática- Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva (2018)

O conceito de Número Inteiro Relativo é iniciado por meio de exemplos contextuais envolvendo quatro situações cotidianas: temperaturas, saldo de gols em campeonatos de futebol, extratos bancários e altitude, que visam atingir a habilidade (EF07MA03) “Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração” (BRASIL, 2017, p.307).

Os exemplos expostos para a introdução do conceito também contemplam a primeira competência geral evidenciada na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) que se refere a “Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva” (BRASIL, 2017, p. 9).

Igualmente é contemplada a Competência específica 1, que visa proporcionar que o estudante reconheça que a Matemática é “uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho” (BRASIL, 2017, p. 267).

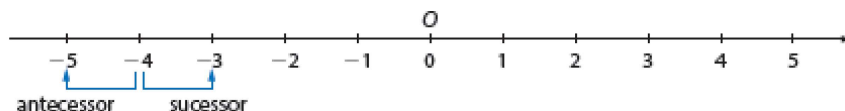
Visando auxiliar na introdução do conceito de Números Inteiros Relativos, o contexto histórico foi utilizado. Com isso, na seção “Um pouco de história” o livro apresenta como era entendido o número negativo, além de ressaltar a importância desse tipo de número no comércio na antiguidade. As atividades referentes a introdução da ideia de inteiro focam principalmente na representação desses números.

Na seção “Números Inteiros” tem-se a apresentação do conjunto e de seus respectivos elementos.

Ressaltamos que a reta numérica é utilizada para representar alguns números, além de auxiliar na construção do conceito de antecessor e sucessor no conjunto dos Números Inteiros (Figura 6). Assim, fica evidente a ideia de construção da reta numérica como campo orientado da esquerda para a direita: “quanto mais à direita um número estiver, na sequência ou na reta, maior ele será” (GAY; SILVA, 2018, p. 33).

Portanto, faz-se presente a intenção de desenvolver a comparação e associação de Números Inteiros Relativos com pontos da reta numérica, assim como proposto na habilidade EF07MA03.

Figura 6: Representação de sucessor e antecessor na reta numérica



Fonte: GAY; SILVA (2018, p. 33)

As sete atividades relacionadas a essa seção evidenciam a ideia de comparar e ordenar Números Inteiros Relativos em diferentes contextos, tais como: associar inteiros a pontos da reta numérica e determinar o antecessor e sucessor desses números.

Dando prosseguimento a essa abordagem conceitual, o livro apresenta os conceitos de Módulo, Simétrico e Oposto de um Número Inteiro Relativo. Nesse caso, também há o auxílio da reta numérica para a ilustração e compreensão dos conceitos levantados.

Percebemos que a progressão dos conteúdos fica evidenciada, ou seja, um conceito depende do outro, já que os números opostos têm sempre o mesmo módulo, pois apresentam a mesma distância até a origem (zero). Assim, as atividades relacionadas a esses conceitos apresentam quadros, tabelas, situações do cotidiano envolvendo saldos bancários e temperaturas.

O desenvolvimento da habilidade “Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros - (EF07MA04)” (BRASIL, 2017, p. 307) inicia-se com a adição. Na introdução dessa operação há três situações que servem de base para a construção do conceito: temperatura, elevadores e mergulhos.

Ressaltamos que há o auxílio da reta numérica para o trabalho com a adição. Nesse sentido, fica evidente a ideia de trabalhar as operações com Números Inteiros Relativos aplicando-as em contextos de diferentes naturezas, conforme orienta a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

As atividades baseadas na operação de adição referem-se às situações em geral, tais como: saldos bancários, termômetros, lucros e prejuízos. A partir disso, são evidenciadas as propriedades da adição: associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto, por meio de exemplos envolvendo diferentes contextos.

A subtração com Números Inteiros Relativos é apresentada através da situação do saldo de gols em campeonatos de futebol. A reta numérica e o conceito de Oposto de um número inteiro auxiliam na compreensão dessas operações. Assim, as atividades

referentes à subtração envolvendo inteiros apresentam diferentes naturezas, dentre elas: variação de temperaturas, aplicação da operação em tabelas, cálculos com números inteiros isolados e situações contextualizadas.

A multiplicação no conjunto dos Números Inteiros Relativos também é introduzida por meio de uma situação-problema envolvendo o cálculo do valor de uma dívida parcelada.

Para a ilustração do conceito, também é utilizado o fato de a multiplicação ser entendida como adição de parcelas iguais, além da ideia de números opostos como ferramenta para a realização dessa operação.

Padrões e sequências numéricas se fazem presentes para evidenciar a multiplicação de dois números inteiros negativos, ilustrando o porquê dessa operação resultar em um valor positivo.

Resumindo, “na multiplicação de dois números inteiros: se os fatores têm mesmo sinal, o produto é positivo; se os fatores têm sinais diferentes, o produto é negativo; se um dos fatores é zero, o produto é igual a zero” (GAY; SILVA, 2018, p. 47).

As atividades envolvendo multiplicação de inteiros envolvem cálculos, situações-problema, quadro de multiplicação (Figura 7), representação e cálculo mental. Por conseguinte, há a apresentação das propriedades envolvendo a multiplicação: comutativa, associativa, distributiva e existência de elemento neutro.

Figura 7: Quadro de Multiplicação de NIR

a	b	Sinal de $(a \cdot b)$	$(a \cdot b)$
3	-7		
-8		-	-32
-9	-5		
	4	-	-20
-2		+	+16
	-3	+	+21

Fonte: GAY; SILVA (2018)

Na divisão de Números Inteiros o contexto escolhido para a introdução foi o da profundidade do submarino, com a seguinte questão: “Um submarino está 20 m abaixo do nível do mar. Essa posição pode ser representada por 20 m e foi atingida em 4 etapas. Se em cada etapa o submarino submergiu a mesma quantidade de metros, quantos metros ele submergiu em cada etapa?” (GAY; SILVA, 2018, p. 50)

Para definir qual é o sinal do quociente da divisão é ressaltada a concepção de que a multiplicação é a sua operação inversa e, portanto, as mesmas propriedades inerentes

ao sinal da multiplicação valem para a divisão. Assim, as atividades da referida operação apresentam elementos que visam a compreensão dessa ideia.

O trabalho com Números Inteiros Relativos é finalizado com as operações de potenciação e radiciação nesse conjunto. No caso da potenciação, o foco é a base sendo um número inteiro. Nesse sentido, são apresentadas as propriedades desta operação e, por meio de sequências numéricas há ampliação para o conjunto dos Números Inteiros Relativos. As atividades evidenciam a aplicação da potenciação em $\mathbb{Z}$. Além disso, há situações contextualizadas envolvendo essa operação.

Por fim, com relação à radiciação, o objetivo é o trabalho com a raiz quadrada exata de um Número Inteiro Relativo. Por meio do contexto de área, há a introdução dessa operação. A inexistência da raiz quadrada de um número negativo no âmbito dos inteiros também é evidenciada nesse tópico. Assim, as atividades buscam aplicar essa operação em diferentes contextos, principalmente envolvendo conceitos de geometria.

Neste sentido, afirmamos que, de modo geral, no âmbito das habilidades referentes à construção do conceito de Números Inteiros Relativos, o presente livro apresenta elementos que podem proporcionar o desenvolvimento, tais como: contextualização histórica, aplicações dos Números Inteiros no cotidiano e uso da reta numérica para associação e representação dos Números Inteiros Relativos.

Por fim, no que se refere à habilidade de resolver e elaborar problemas envolvendo operações com Números Inteiros, ressaltamos que quanto à resolução de problemas, esta é desenvolvida por meio de exemplos e atividades de diversas naturezas, variando desde operações aritméticas, até aplicações na geometria e em outras áreas do conhecimento. Apesar disso, o aspecto inerente à elaboração de problemas, por parte dos alunos, envolvendo operações com Números Inteiros, é pouco abordado neste livro, fato que pode dificultar o desenvolvimento da referida habilidade em sua completude.

5.5 Livro: Matemática Realidade & Tecnologia- Joamir Roberto de Souza (2018)

A situação escolhida para iniciar o conteúdo de Números Inteiros Relativos, no livro do sétimo ano desta coleção, é a da incidência de temperaturas abaixo de zero no Brasil. Nesta, o estudante é convidado a refletir sobre as temperaturas durante o inverno em alguns municípios brasileiros, por meio de um mapa que representa estas temperaturas.

Salientamos que este modo de apresentar os Números Inteiros Relativos relaciona-se com a competência geral 1 e à competência específica 3 de Matemática da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), uma vez que o estudo das temperaturas nas diferentes regiões brasileiras, permite desenvolver um “trabalho que relaciona diferentes componentes curriculares, como Matemática, Geografia e Ciências, valorizando conhecimentos historicamente construídos e visando explicar fenômenos da realidade do mundo físico” (SOUZA, 2018 p. 39).

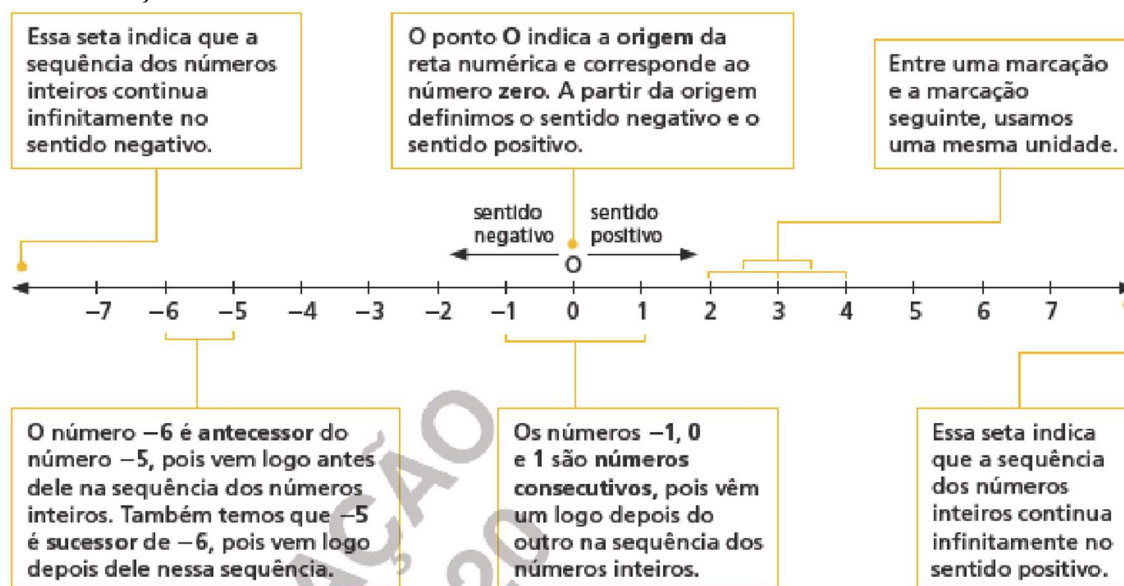
Por conseguinte, ressaltamos a intenção presente neste livro em proporcionar o desenvolvimento da habilidade (EF07MA03): “Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração” (BRASIL, 2017, p.307), por meio da apresentação de situações do cotidiano, como altitude, saldo de gols no futebol, saldo bancário e temperaturas.

Neste sentido, o trabalho com o contexto histórico se faz presente na seção “Fique Ligado”, que apresenta a civilização chinesa como um dos primeiros povos que se apropriaram dos Números Negativos, evidenciando o registro de cálculos com coleções de barras vermelhas e pretas representando, respectivamente, números positivos e negativos. Assim como em outras coleções analisadas, a História da Matemática somente é utilizada como ferramenta para introduzir o conceito.

No âmbito da associação de pontos a reta numérica, há evidências do trabalho com essa habilidade no tópico “Os Números Inteiros e a reta numérica”, apresentando a construção da reta referente aos Números Inteiros (Figura 8). Depois dessa construção, também são tratados os conceitos de módulo de um número inteiro e simétrico de um número inteiro.

Assim, as atividades relacionadas a esse tópico envolvem representação de medidas em diferentes situações por meio de Números Inteiros Relativos, associação de números inteiros a pontos na reta numérica, as ideias de antecessor, de sucessor e de números inteiros consecutivos e módulo ou valor absoluto de um número inteiro.

Figura 8: Construção da Reta Numérica dos NIR



Fonte: SOUZA, 2018, p. 42

O conteúdo do livro é prosseguido com a comparação de Números Inteiros. Essa ideia é introduzida utilizando exemplos de países que se encontram abaixo do nível do mar e acima desse nível. A reta numérica e os sinais de maior ($>$), menor ($<$) e igual ($=$) são utilizados para elucidar as comparações.

As atividades referentes a essa seção envolvem utilização dos símbolos maior ($>$), menor ($<$) e igual ($=$) para comparação de Números Inteiros Relativos, associação desses números a pontos da reta numérica, atividades contextualizadas de comparação de inteiros, envolvendo temperatura de alimentos e planetas, além de situações envolvendo saldo bancário. Cabe ressaltar que há uma situação que propõe a elaboração de questões pelo aluno em um contexto de comparação de números inteiros.

A habilidade de resolver e elaborar problemas que envolvam operações com Números Inteiros (EF07MA04) é contemplada pelos tópicos adição, subtração, multiplicação e divisão. As operações de radiciação e potenciação não são trabalhadas nesse volume da coleção.

A adição de Números Inteiros Relativos é introduzida por meio de uma situação contextualizada envolvendo pontuações em um jogo. O livro ilustra essa operação com auxílio de deslocamentos na reta numérica. As atividades dessa seção evidenciam situações contextualizadas e fixação de propriedades e características da adição envolvendo números inteiros. Também há uma atividade referente à elaboração de problemas, por parte dos alunos, envolvendo essa operação.

A subtração no conjunto dos Números Inteiros Relativos é iniciada com a ideia de variações de temperaturas. Para tanto, há utilização da reta numérica para evidenciar essa operação por meio de deslocamentos. Neste sentido, as atividades referentes à subtração permitem contextualizar essa operação em diferentes situações, como saldo de gols em campeonatos de futebol, sequências numéricas e posições de submarinos. Cabe ressaltar que a habilidade que sugere que os alunos elaborem problemas referentes a operações também é contemplada com uma atividade, no caso da subtração.

Por fim, a multiplicação e a divisão no contexto dos Números Inteiros Relativos são tratadas em um mesmo tópico. No caso da multiplicação ficam evidentes tanto o auxílio da reta numérica para essa operação, quanto o conceito de oposto para a realização dos cálculos e validação da regra de sinais.

A divisão é tratada como operação inversa da multiplicação, portanto, seguem as mesmas propriedades. Assim, as atividades relacionadas a estas operações no conjunto dos Números Inteiros Relativos visam trabalhar cálculos contextualizados de multiplicação e divisão, fixação de propriedades e expressões numéricas.

Em suma, este livro didático apresenta elementos para o desenvolvimento das duas habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) inerentes a Números Inteiros Relativos. A contextualização de exemplos e atividades, tanto no âmbito histórico, quanto nas situações cotidianas, reforçam essa intenção.

Na parte de operações com Números Inteiros Relativos as atividades apresentam diversidade, inclusive ressaltando a componente que exige ao estudante a criação de situações-problema envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão no âmbito do Conjunto Z . Cabe ressaltar que a potenciação e a radiciação em Z não são abordadas neste volume.

Por fim, tanto as Competências Gerais, quanto as Competências Específicas da Matemática podem ser desenvolvidas por meio desse livro no que se refere ao objeto de conhecimento Números Inteiros.

Partindo desse pressuposto, afirmamos que há diversas situações que envolvem interdisciplinaridade neste conceito, relacionando-o com outras componentes curriculares e contextualizando-o com alguns elementos, tais como: gráficos, tabelas, quadros e mapas, visando a aplicação dos Números Inteiros em situações de diferentes naturezas, conforme exigido pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

5.6 Análise geral dos livros didáticos

Dada a variedade de contextos que são usados para a introdução dos Números Inteiros Relativos, podemos deduzir que, em todos os livros analisados, há finalidade de alcançar a primeira competência específica da Matemática presente na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017):

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (p. 267).

Evidenciamos que o fato de contextualizar atividades, inclusive com a utilização de gráficos e tabelas, ressalta a intenção de desenvolver a sexta competência específica da área de Matemática presente na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017):

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (p. 267).

Além disso, a segunda competência geral¹⁰, da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) para a Educação Básica, é evidenciada em diversos momentos, tanto os referentes à introdução aos conceitos, quanto inerentes à resolução de atividades.

Assim sendo, os estudantes são convidados a formular e investigar hipóteses sobre representação em retas numéricas e conjuntos, utilização, comparação, significado das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, envolvendo os Números Inteiros Relativos em diferentes situações no cotidiano e contextualizando no âmbito da própria Matemática.

A utilização da história da Matemática nos livros didáticos analisados trata-se apenas de uma apresentação resumida de fatos históricos para a introdução do conceito de Número Inteiro Relativo, pois não são realizadas problematizações sobre as questões, estratégias ou formas de pensar de diferentes povos que impulsionaram o desenvolvimento dos Números Inteiros Relativos como conjunto numérico.

¹⁰ Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Talvez isso se explique pelo fato de que na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), documento que baliza os livros didáticos analisados, a História da Matemática aparentemente esteja em segundo plano, uma vez que é apresentada somente como “recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2017, p. 298).

Apesar da diversidade de contextos envolvendo os Números Inteiros Relativos, atividades que envolvem relações positivas e negativas (BORBA, 2009) pouco comparecem nos livros didáticos analisados.

Situações que abordam expressões como “a mais que” e a “menos que” no contexto de operações com inteiros, são pouco observadas nos livros didáticos analisados. Já as atividades que abordam os contextos inerentes a medidas e a transformações positivas e negativas (BORBA, 2009) são amplamente evidenciadas em diversas situações.

Com relação aos obstáculos que se apresentam historicamente, de acordo com a perspectiva de Glaeser (1985), para a sistematização dos Números Inteiros Relativos, podemos afirmar que os livros didáticos analisados contêm, em parte, atividades e apresentam contextos que oportunizam a superação dos por meio das habilidades trabalhadas.

No caso dos obstáculos referentes à inaptidão para manipular quantidades isoladas e à dificuldade em dar um sentido às quantidades negativas, todas as coleções investigadas trazem exemplos e exercícios que apresentam a utilização do conceito de Número Inteiro Relativo, tanto no cotidiano, quanto na própria Matemática, oportunizando que os estudantes compreendam os negativos como números.

A contextualização por meio de exemplos relacionados à temperatura, altitude, saldo de gols em campeonatos de futebol, dentre outros, corrobora não só para a superação dos dois obstáculos mencionados, mas também o desenvolvimento da habilidade EF07MA03 presente na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), referente aos Números Inteiros Relativos.

No que se refere ao obstáculo da dificuldade em unificar a reta numérica podemos afirmar que os livros, em geral, apresentam diversos exemplos que envolvem a construção da reta numérica dos Números Inteiros e seu uso para auxiliar nas operações, principalmente no que tange à adição e a subtração.

Porém, nas coleções analisadas, a construção da reta numérica evidencia a característica de ser um campo orientado da esquerda para a direita de maneira pontual,

ou seja, somente em alguns exemplos isolados. Esse aspecto ressaltado pode corroborar com a concepção errônea que apresenta os números positivos e negativos em semirretas opostas.

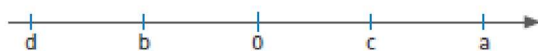
Assim, não podemos afirmar que os referidos livros possam oportunizar aos alunos a superação desse obstáculo, pois não favorecem a concepção da reta numérica dos Números Inteiros como “um sistema numérico unificado cujos elementos só se diferenciam quantitativamente e no qual ambos os elementos (positivos e negativos) são reais” (TEIXEIRA, 1992, p. 52).

Nesse caso, considerando que na reta orientada, isto é, a reta em que se tomou um ponto zero para a origem e dois sentidos opostos, (de zero para a direita, ou sentido positivo, e de zero para esquerda, ou sentido negativo) existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos seus pontos e o conjunto dos Números Relativos (CARAÇA, 2003).

Ressaltamos que o livro Araribá (GAY; SILVA, 2018) faz menção a essa característica de construção dos Números Inteiros Relativos, na seção que apresenta a reta numérica: “na reta numérica, os números inteiros estão organizados de forma crescente, da esquerda para a direita” (GAY; SILVA, 2018, p.34). Além disso, no livro A conquista da Matemática há um exemplo que reforça essa concepção na orientação de resolução de um dos exercícios (Ver Figura 9), salientando que: “Espera-se que os alunos concluam que o valor numérico da letra que está à direita é sempre maior que o valor numérico da letra que está à esquerda” (JUNIOR; CASTRUCCI, 2018, p.43).

Figura 9: Exercício de comparação de Números Inteiros em reta numérica

1. Observe os números inteiros a , b , c , d assinalados na reta numérica abaixo:



Usando o símbolo $>$ ou $<$, compare:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) a e 0 . $a > 0$ | f) a e c . $a > c$ |
| b) b e 0 . $b < 0$ | g) d e a . $d < a$ |
| c) c e 0 . $c > 0$ | h) b e c . $b < c$ |
| d) 0 e d . $0 > d$ | i) b e d . $b > d$ |
| e) a e b . $a > b$ | |

Fonte: JUNIOR E CASTRUCCI, 2018, p.43

Com relação ao obstáculo “ambiguidade dos dois zeros”, os livros investigados podem corroborar na compreensão, tanto da concepção do zero como ausência de quantidade, como origem de grandezas que se apresentam em sentidos opostos por meio

da aplicação de Números Inteiros Relativos, tais quais: nível do mar, andar térreo de um edifício, dentre outros.

Logo, percebemos que o modo que é desenvolvido o trabalho das coleções investigadas com a habilidade EF07MA03 que, dentre outros itens, propõe a comparação e a ordenação dos Números Inteiros em diferentes contextos, possibilita a contribuição para que os estudantes ampliem a compreensão da representatividade do zero no âmbito dos Números Inteiros.

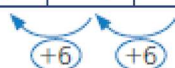
Por fim, as situações apresentadas nos livros analisados referentes à habilidade EF07MA04 têm como objetivo a superação das dificuldades que os estudantes possuem no processo de desenvolvimento do conceito de Números Inteiros Relativos: estagnação no estágio de operações concretas (confusão entre operadores multiplicativos a estados a que se aplicam) e a questão do modelo unificador ou um mesmo modelo ou contexto que corresponda tanto à operação de adição como de multiplicação.

Com relação à questão do modelo para o ensino da multiplicação, nos livros A conquista da Matemática (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018), Teláris-Matemática (DANTE, 2018) e Araribá- Matemática (GAY; SILVA, 2018), a demonstração das regras de sinais da multiplicação é realizada por meio do modelo aritmético que se baseia no prolongamento da reta numérica (MORETTI, 2012), principalmente no que tange a multiplicação de dois fatores negativos.

Nesse âmbito, partindo de resultados de multiplicações previamente conhecidos, como por exemplo, os que envolvem um fator positivo e um negativo, há o desenvolvimento de tabelas de multiplicação que envolvem padrões com intuito de demonstrar que o produto de dois números inteiros negativos resulta em um positivo (Figura 10).

Figura 10: Exemplo de padrão envolvendo multiplicação de NIR

$\times$	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
-6	?	?	?	?	0	-6	-12



Fonte: JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p. 60

Por conseguinte, no caso dos livros Matemática Bianchini e Matemática-Realidade & Tecnologia a operação de multiplicação é abordada apoiando-se em um modelo aritmético que leva em consideração o conceito de oposto de um Número Inteiro Relativo e a soma de parcelas iguais, ou seja, um dos fatores indica a quantidade de vezes que o número deve ser somado.

Assim, por meio de manipulações de sinais utilizando-se do recurso de oposto, o resultado de multiplicações de dois inteiros negativos é evidenciado. Exemplificando: “O produto $(-2) \times (-4)$ pode ser representado por $-(+2) \times (-4)$. Como $(+2) \times (-4) = -8$, temos: $-(+2) \times (-4) = -(-8) = + 8 = 8$. Portanto, $(-2) \times (-4) = 8$. Multiplicamos dois números negativos, e o resultado foi um número positivo” (BIANCHINI, 2018, p. 32).

Ressaltamos que em ambos os casos, o modo de apresentar a multiplicação de Números Inteiros Relativos não se utiliza de modelos concretos, isto é, apresentações de Z que são baseadas na semelhança com outros sistemas de objetos que são familiares aos alunos.

Compreendemos que propostas de ensino de números negativos a partir de modelos concretos, mesmo que sejam adequadas para superar o primeiro obstáculo epistemológico, reforçam o segundo obstáculo epistemológico, justamente aquele que foi preciso superar para construir o conceito atual de número negativo (CID, 2000).

6 APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE NÚMERO INTEIRO RELATIVO

No presente capítulo buscamos abordar, em termos cognitivos, como ocorre o processo de aprendizagem do conceito de Número Inteiro Relativo.

Tal movimento se justifica, pois, pesquisar como os estudantes se apropriam de conceitos é importante para a área de Educação Matemática, pois há possibilidade da melhora do processo de ensino, ao passo que, os resultados podem orientar como melhor se desenvolver conceitos matemáticos em sala de aula, mais especificamente o de Número Inteiro Relativo, no caso desse trabalho.

A partir disso, apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (1933 - 2021), que contribui para compreendermos como os estudantes constroem conceitos matemáticos.

Apesar de a Teoria dos Campos Conceituais não ser uma teoria específica da área de Educação Matemática, estudá-la possibilita entendermos como ocorre o processo de aprendizagem das estruturas aditivas e multiplicativas envolvendo o conjunto dos Números Inteiros Relativos, que é o foco da pesquisa que desenvolvemos.

Por fim, nesse capítulo abordamos pressupostos cognitivos que norteiam a aprendizagem do Número Inteiro Relativo em si, objetivando compreender como o estudante constrói este conceito e quais as principais dificuldades que podem comparecer nesse processo.

6.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista, que objetiva proporcionar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos para o estudo do desenvolvimento e aprendizagem de habilidades complexas, possibilitando compreender a generalização do conhecimento (VERGNAUD, 1990; 1993; 1996; 2009).

Apesar de não ser uma teoria específica da Matemática, pode possibilitar estudos dos processos de conceituação progressiva de estruturas aditivas, multiplicativas, relações numéricas e espaciais e álgebra (VERGNAUD, 1990).

Seu principal objetivo é “fornecer uma estrutura para a compreensão de afiliações e rupturas entre conhecimento, em crianças e adolescentes, entendendo por "conhecimento" tanto o know-how como o conhecimento expreso” (VERGNAUD, 1990, p.1).

Nesse contexto, a Teoria dos Campos Conceituais enfatiza que a aquisição do conhecimento e conseqüentemente, a aprendizagem de conceitos acontece por meio da exploração de diversas situações e problemas, sendo um processo de longo prazo.

“Longo prazo” refere-se inevitavelmente a uma perspectiva de desenvolvimento: não é em alguns dias ou em algumas semanas que uma criança adquire uma competência nova ou compreende um conceito novo, mas, sim, ao longo de vários anos de escola e de experiência. É a esse processo que a teoria dos campos conceituais se refere (VERGNAUD, 2011, p. 16).

Portanto, para o autor, todos os conceitos têm um domínio restrito de validade que varia com a experiência e o desenvolvimento cognitivo. Conseqüentemente, determinada situação não é considerada um problema para um indivíduo, a menos que este domine conceitos que o capacitem a considerá-lo como um problema. “O processo de simulação de um problema vai além da abstração de regularidades do mundo observável” (VERGNAUD, 1994, p.42).

Nesses termos, para Vergnaud (1990), as situações são divididas em dois tipos: aquelas nas quais o sujeito se depara com uma situação a qual detém determinadas competências para resolvê-la de maneira imediata e aquelas em que a pessoa não desenvolveu, até o determinado momento, todas as competências necessárias para a resolução parcial ou total dessa situação, vendo-se compelido a passar por um processo de tentativa e erro, reflexões e hesitações, levando-o eventualmente ao sucesso ou a falha.

A abordagem de diversas situações relacionadas a um mesmo campo conceitual propicia o desenvolvimento de esquemas. Vergnaud (1990, 1993) afirma que o esquema é a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dadas. Sendo assim, os esquemas não funcionam do mesmo modo nos dois casos ressaltados.

No primeiro caso, de acordo com Vergnaud (1990) observa-se, para um mesmo conjunto de situações, comportamentos amplamente automatizados, organizados por somente um esquema, posto que, no segundo caso, nota-se a contínua utilização de diversos esquemas, “que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinaos. Este processo é permeado de descobertas” (VERGNAUD, 1990, p.1).

De acordo com Vergnaud (1990), um esquema comporta quatro elementos: **invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação)**, que compreendem um reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes e da apresentação de informações de determinada situação; **antecipações** do objetivo que se deseja alcançar, dos efeitos que se vão ser considerados e das etapas intermediárias eventuais; **regras de**

ação do tipo “se... então...”, que permitem generalizar a sequência de ações do indivíduo; **inferências** que permitem calcular as regras e as antecipações a partir de informações e do sistema de invariantes operatórios que o sujeito dispõe.

Partindo desse pressuposto, Vergnaud (1986, 1990), salienta que há três aspectos determinantes para a formação de um conceito, o tripé S, I, R, em que: S é conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito; R é conjunto de representações simbólicas que podem ser utilizadas no conceito.

Em S o significado dos conceitos advém da variedade de situações e da história das situações vividas e enfrentadas que permitem a construção do conjunto das classes, ao qual o conceito está relacionado. Nos Números Inteiros Relativos, por exemplo, podemos destacar inúmeras situações que envolvem esse conceito, tais como: medidas de temperaturas, altitude, saldo de gols, dívidas e créditos, dentre outras.

Nesse sentido, Vergnaud (1986) expõe três razões pelas quais devemos estudar diversas situações e não os conceitos de maneira isolada:

- Uma situação dada não coloca, de maneira geral, em execução todas as propriedades de um conceito. Se queremos proporcionar aos estudantes a possibilidade de encontrar todas estas propriedades é preciso fazer, necessariamente, alusão a uma diversidade de classes de problemas.
- Uma determinada situação não põe habitualmente em jogo um único conceito; a sua análise requer, na maioria das vezes, a mobilização de vários conceitos, e as dificuldades encontradas pelos estudantes derivam, em geral, dessa diversidade de conceitos, por exemplo, os problemas de adição e de subtração podem referir-se aos conceitos de medida, de transformação, de comparação, de diferença, de inversão, dentre outros.
- A formação de um conceito, particularmente, se o considerarmos por meio de atividades de resolução de problema, requer um longo período de tempo, apresentando muitas interações e desníveis.

Em suma, a aprendizagem de conceitos por meio de campos conceituais e não por situações isoladas se faz importante, pois, segundo Vergnaud (1986) uma situação não põe em execução todas as propriedades de um conceito, uma vez que, para isso deve-se fazer referência a uma diversidade de situações-problema. Além disso, uma dada situação não põe, habitualmente, em jogo um único conceito.

Já I refere-se aos conceitos em ação e teoremas em ação, os quais dirigem o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação. São operações de pensamento que se manifestam pela extração de uma propriedade, pelo estabelecimento de uma relação ou conjunto de relações, ou pela realização de uma transformação. Compreender que os números com sinal negativo são associados a valores menores que zero está relacionado à ideia de conceito em ação.

Também podemos destacar como exemplo de teoremas em ação as “regras de sinais” envolvendo a multiplicação de inteiros: produto de dois números inteiros de sinais iguais resulta em um número positivo, enquanto o produto de dois números inteiros de sinais opostos resulta em um número inteiro negativo.

Por fim, R é relacionado ao conjunto de significantes ou representações simbólicas tais como: linguagem natural, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, álgebra, que se referem não só à representação dos problemas como às soluções deles. No âmbito dos inteiros, destacam-se os símbolos + (positivo) e – (negativo), que podem representar a qualidade do número (sinal predicativo) ou a operação envolvida (sinal operatório) (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015).

Ao se referir a um número negativo pode-se utilizar a linguagem falada ou escrita: “uma perda de R\$20,00”, “um débito de R\$20,00”, “R\$20,00 a menos que ontem”, “um decréscimo de 20 graus”, “20 graus abaixo de zero” e “20 graus a menos que o mês passado”, dentre várias outras possibilidades. Por escrito pode-se também representar as situações descritas anteriormente por -20 ou usando uma cor para representar +20 e outra para representar -20 (BORBA, 2009, p. 68).

Assim sendo, podemos compreender os sentidos de conceito como um conjunto de situações que podem surgir, sejam elas didáticas ou presentes no cotidiano. “Temos então S; para resolver essa nova situação o aluno precisa evocar conhecimentos e, todo esse conhecimento usado é denominado I. Já o R é toda forma de representar esse conhecimento evocado” (BARROS; BOAVENTURA, 2019, p.117).

Em síntese, “[...] estudar o funcionamento de um conceito no decurso da aprendizagem ou quando de sua utilização, é necessariamente, considerar esses três planos ao mesmo tempo” (VERGNAUD, 1990, p. 6).

Portanto, partindo do pressuposto de que um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações (VERGNAUD, 1990), faz-se necessário apresentar o conjunto de situações que envolvam o significado, operações de adição, subtração, multiplicação e divisão no âmbito do conjunto dos Números Inteiros Relativos.

6.2 Os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas

Um campo conceitual pode ser definido como “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (VERGNAUD, 1986, p. 84). Partindo desse pressuposto, o campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto das situações cujo treinamento implica uma ou várias adições ou subtrações e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas.

Constituem-se, de acordo com Vergnaud (1986, 1990, 2009), seis relações de base, a partir das quais é possível conceber todos os problemas de adição e subtração: composição entre duas medidas em uma terceira, transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final, relação (quantificada) de comparação entre duas medidas, composição de duas transformações, transformação de uma relação e composição de duas relações.

A composição entre duas medidas em uma terceira diz respeito à união de partes que resultam em uma totalidade, por exemplo: o estudante A possui 20 figurinhas e o estudante B possui outras 10. Quantas figurinhas no total os dois estudantes possuem?

No caso da transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final, há uma relação entre o estado inicial e final por meio de uma ação realizada. Um exemplo que ilustra essa característica é: a temperatura pela manhã era de 18 graus e a tarde aumentou 3 graus. Qual é a temperatura a tarde?

No que se refere a relação (quantificada) de comparação entre duas medidas há a predominância da relação entre duas partes, comparando-as. Por exemplo: Ana possui uma dívida de 50 reais. A dívida de Lucas é de 10 reais a menos que a de Ana. Quanto deve Lucas?

Com relação à composição de duas transformações temos o exemplo: Pedro ganhou 10 figurinhas ontem e hoje perdeu 15, portanto perdeu 5 no total. Portanto, há a união de duas transformações (ganhar 10 figurinhas e perder 15) para dar lugar a uma só transformação (perder 5 no total) (VERGNAUD, 2009).

Podemos representar a transformação de uma relação pelo seguinte exemplo: Eduardo devia 10 reais a Breno e pagou 5, portanto, ainda deve 5 reais. Nesse caso, uma transformação (pagar 5 reais) opera sobre um estado relativo (dívida de 10 reais) para dar lugar a somente uma relação (ainda dever 5 reais) (VERGNAUD, 2009).

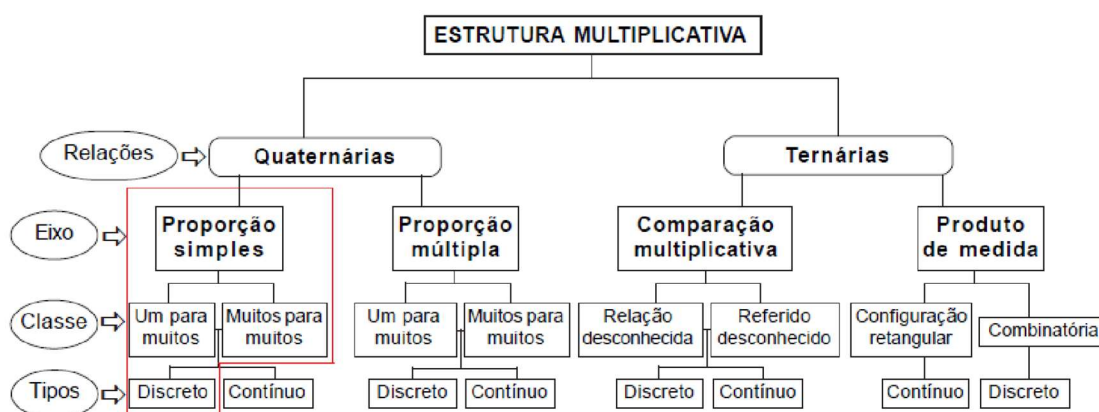
Por fim, a composição de duas relações tem por exemplo a seguinte situação: Marcos deve 50 reais a Luan, porém Luan lhe deve 40 reais. Portanto, Luan deve somente

10 reais a Marcos. Neste caso, dois estados relativos (Marcos dever 50 reais a Luan e Luan dever 40 reais a Marcos) se compõem para dar lugar a um novo estado relativo (Marcos dever 10 reais a Luan) (VERGNAUD, 2009).

Analogamente as estruturas aditivas, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto de situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor, dentre outras (VERGNAUD, 1986).

Neste âmbito, Magina, Santos e Merlini (2014), com base nos estudos de Vergnaud, elaboraram um esquema que sintetiza as ideias centrais desse campo

Figura 11: Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Santos e Merlini (2014, p.520)

De acordo com as autoras, tal estrutura é constituída pelas relações quaternárias, composta pelos eixos proporção simples e proporção múltipla, e ternárias, que se referem à comparação multiplicativa e ao produto de medidas. Assim sendo, os dois eixos inerentes à relação quaternária possuem duas classes: correspondência um para muitos e correspondência muitos para muitos.

No caso das relações ternárias, há dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medida. O eixo comparação multiplicativa é composto pelas respectivas classes: referido desconhecido e relação desconhecida, sendo que essas podem ser relacionadas aos tipos de quantidades discretas e contínuas. Já o eixo produto de medida tem como

classes: configuração retangular (contínua) e combinatória (discreta) (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014).

Nesse sentido, conforme salientam Magina, Santos e Merlini (2014) a proporção simples compreende a uma relação entre quantidades, podendo ser divididas em duas classes de situações: correspondência um para muitos e correspondência muitos para muitos.

No âmbito dos inteiros, a correspondência um para muitos pode ser exemplificada como: “se uma questão errada equivale a -4 pontos e um estudante errou cinco questões, quantos pontos ele obteve?”. Nesse caso, podemos perceber que a relação está explícita, ou seja, a cada resposta errada perde-se quatro pontos (relação um para -4).

No que se refere à correspondência muitos para muitos, a relação entre as quantidades está implícita (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014), por exemplo: “a cada duas questões erradas, um estudante perde quatro pontos. Se ele errar 10 questões, quantos pontos perderá?”.

Neste caso, há uma situação que envolve quantidades implícitas que podem ser transformadas em uma correspondência um para muitos, ou seja, a cada duas questões erradas, quatro pontos são perdidos e implicam que a cada uma questão errada, perde-se dois pontos.

Já o eixo proporções múltiplas diz respeito à “classe de situações que envolvem uma relação quaternária entre mais de duas quantidades relacionadas duas a duas” (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 523).

A comparação multiplicativa envolve situações como o cálculo do “dobro” e da “metade” de determinada quantidade.

Por fim, o produto de medidas é determinado por duas classes: configuração retangular, abrangendo situações referentes à relação entre medidas verticais e horizontais, como por exemplo, o cálculo de área de figuras planas; combinatória, remetendo à noção do produto cartesiano envolvendo dois conjuntos, principalmente no que tange ao cálculo de possibilidades.

6.3 O conceito de Número Inteiro Relativo

De acordo com Vergnaud (1986) o saber forma-se a partir de problemas a resolver e de situações a dominar. No entanto, não é o que acontece, muitas vezes, no ensino de Matemática, já que a concepção presente nesta disciplina gira em torno de transmitir

maneiras de fazer ou o ensino de algoritmos de resolução, limitando a ideia da utilização de situações-problema no processo de ensino e aprendizagem de conceitos.

Duval (2018) elenca três características que podem explicar os possíveis motivos da dificuldade enfrentada no processo de aprendizagem dessa disciplina. A primeira se refere à complexidade epistemológica dos conceitos a serem ensinados. A segunda diz respeito à necessidade da descoberta do interesse prático dos conhecimentos matemáticos e por fim, a terceira é inerente à necessidade de construção dos conceitos de modo natural, partindo de observações e experiências concretas.

Porém, o fato de o foco da incompreensão nessa área ser apenas em aspectos inerentes à Matemática, deixa escapar a principal razão das dificuldades: em Matemática, não se pensa ou se trabalha da mesma maneira que em outros domínios do conhecimento. Nessa área utiliza-se o sistema semiótico, dando ênfase na linguagem, como por exemplo, nos sistemas de numeração, equações e planos cartesianos; enquanto em outras áreas predomina o sistema não semiótico, que é constituído a partir de instrumentos que possibilitam o acesso aos objetos, fugindo de toda percepção direta (DUVAL, 2018).

Inerente a isso, é prioridade classificar os problemas que conferem significação e função a um conceito. Assim, o ensino de conceitos matemáticos deve se pautar em uma maior variedade de representações, já que as concepções dos estudantes, muitas vezes, são moldadas pelas situações que se deparam (DUVAL, 2012).

Além disso, de acordo com Duval (2018) uma das exigências cognitivas para compreender matemática é poder utilizar ao menos duas representações de um mesmo objeto. Esse aspecto é importante, pois segundo o autor, se apenas uma das duas representações é fornecida, é preciso poder pensar na substituição por outra representação.

Este simples gesto intelectual precede a toda resolução de problemas, uma vez que para começar a procurar a solução é preciso de imediato converter as representações iniciais dos dados do problema apresentados em um registro, em representações de um outro registro e, com isso, poder trabalhar e avançar à solução do problema (DUVAL, 2018, p.9).

Partindo desse pressuposto, é por meio das situações e problemas que se pretende resolver que um conceito faz sentido para os estudantes. Corroboram essa informação Borba e Nunes (2004, p.74), salientando que

[...] uma forma de se entender melhor a aprendizagem de conceitos é através do estudo dos fatores que influenciam o desenvolvimento conceitual. Ser capaz de resolver problemas aditivos, ou sobre qualquer

conteúdo matemático, depende dos aspectos enfocados durante a resolução dos problemas.

Nesse sentido, em termos curriculares, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) salienta que se deve considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento matemático, é basilar haver um contexto significativo para os alunos, não essencialmente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento ou da própria história da Matemática.

No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem as situações propostas após os terem resolvido.

Portanto, segundo Vergnaud (1986), é importante que os professores não ignorem que as concepções dos estudantes são modeladas pelas situações do cotidiano e por essa compreensão primitiva, ou seja, os docentes devem reconhecer os erros e incompreensões de um conceito por parte dos estudantes, pois as concepções erradas só mudam se entrarem em conflito através da diversidade de situações as quais o aluno é exposto. Sendo assim, deve-se proporcionar situações que ampliem a significação do conceito abordado.

Um exemplo que pode ilustrar essa ampliação é referente a operação de subtração. Neste caso, para um estudante dos anos iniciais do Ensino Fundamental essa operação consiste, de modo geral, na diminuição da quantidade inicial.

Sem a ampliação desse conceito não é possível compreender os diversos sentidos que a permeiam, tais como: complemento, diferença de estados, inverso de um aumento, comparação e diferença de transformação.

Partindo desse pressuposto, com relação ao conceito de Número Inteiro Relativo, tem-se que quando associado a diferentes situações ou contextos, determina alguns significados. Em suma: um número negativo pode ter o significado de medida, transformação e relação (BORBA, 2009). Portanto, nas situações com números negativos é preciso atentar para o sinal da operação e para o sinal do número, ou seja, o seu significado naquela situação ou contexto.

Nesse sentido, para Borba (2009), diversas pesquisas têm ressaltado que o desempenho dos estudantes é condicionado pelos significados dados às operações mesmo que a conta que tenham que realizar seja a mesma ou muito semelhante.

Evidencia-se nesses estudos que o raciocínio exigido em uma situação pode mudar de acordo com os significados envolvidos e que o entendimento das relações implícitas em um problema nem sempre é facilmente alcançado: “Deve-se assim distinguir claramente as dificuldades que os alunos têm de identificar operações adequadas à resolução de um problema e as dificuldades que podem apresentar ao efetuar as operações aritméticas” (BORBA, 2009, p. 62).

Por exemplo, em um contexto monetário pode-se salientar que se alguém tem R\$5,00 na sua conta bancária e retira R\$7,00, o seu saldo final será um débito de R\$2,00. Analogamente, num contexto envolvendo temperatura, seria aceitável afirmar que se a temperatura de uma cidade era de 5 graus acima de zero, havendo uma diminuição de 7 graus, a temperatura final é de 2 graus abaixo de zero (BORBA, 2009).

Em ambos os contextos o 5 inicial (reais possuídos e temperatura acima de zero) é uma medida positiva. O 2 final (saldo devedor e temperatura abaixo de zero) é uma medida negativa. O valor intermediário (R\$7,00 retirados e queda de 7°) é uma transformação negativa. Exemplos de transformações positivas nos dois contextos seriam respectivamente um depósito de R\$7,00 e uma subida de 7°. A partir de uma transformação positiva de valor 7 sobre uma medida positiva inicial de valor 5, as medidas finais seriam positivas: R\$12,00 e 12° acima de zero para os 2 contextos, respectivamente (BORBA, 2009, p. 64).

Ainda com relação aos contextos monetário e de temperaturas, Borba (2009) reforça que outros significados podem ser explorados, como por exemplo, a de Número Inteiro Relativo como relação. Isso acontece, por exemplo, quando uma temperatura sobe 7 graus (transformação positiva), ou quando há um depósito bancário de R\$ 7,00 (transformação positiva), pois independentemente dos valores iniciais, “a pessoa possui no final R\$ 7,00 a mais do que possuía antes ou a temperatura da cidade no final é 7 graus maior do que a inicial” (BORBA, 2009, p.65).

Exposta a diversidade de significados que podem ser atribuídos aos Números Inteiros Relativos, Vergnaud (2002) corrobora à discussão ao salientar que a dificuldade dos alunos diante dos números negativos vem principalmente do fato de que o conceito de número tem sua origem nos conceitos de cardinalidade e de medida, e o cardinal não é nada mais que a medida das quantidades discretas: “conforme essa concepção inicial do número, cujo testemunho vem tanto da história da matemática quanto das primeiras aprendizagens numéricas das crianças, os números só podem ser positivos, já que são medidas” (VERGNAUD, 2002, p. 4-5).

Por conseguinte, introduzir números negativos na sala de aula é fazer com que os estudantes superem a concepção anterior e passem a representar os números como

transformações (aumentos e diminuições), relações (“mais que”, “menos que”), posições relativas (três casas para frente, duas casas para trás), dívidas e créditos.

Nesse sentido, os estudantes são levados a considerar a união de duas partes em um todo, ou o aumento de uma quantidade inicial, como casos particulares de adição e, em alguns casos, a subtração considerando outra característica que não uma diminuição ou uma perda (VERGNAUD, 2002).

Assim, a aprendizagem do conceito de Número Inteiro Relativo só é possível caso se oportunize aos estudantes diferentes situações e contextos e suas diferentes representações a fim de que percebam o que permanece, ou seja, o invariante em cada situação. Essa percepção é construída através da observação e do entendimento das propriedades de cada contexto ou situação, que permitem agir sobre este contexto ou situação (VERGNAUD, 2002).

7 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Muitas vezes os termos problema e exercício são tratados como sinônimos no ensino de Matemática, no entanto há diferenças entre ambos que devem ser esclarecidas. “Podemos partir de uma definição já clássica de um problema, que o identifica com uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução” (LESTER, 1983 apud ECHEVERRÍA; POZO, 1998). Já no caso do exercício, há mecanismos que levam, de forma imediata, à solução, visando exercitar habilidades já constituídas, conforme salientam Echeverría e Pozo (1998).

Nesse sentido, Van de Walle (2009) ressalta algumas características que um problema voltado para a aprendizagem matemática deve possuir, tais como:

- o problema deve começar onde os estudantes estão- o projeto ou seleção de tarefas deve levar em conta a compreensão atual que eles têm de determinado conceito. Eles devem ter “as ideias apropriadas para se envolver e resolver o problema” e, ainda assim, considerá-lo desafiante e interessante. Os estudantes devem considerar a tarefa algo que faça sentido” (VAN DE WALLE, 2009, p. 57);
- O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender- ao buscarem a solução do problema, os estudantes devem se atentar, principalmente, em atribuir significado à matemática envolvida de tal modo que possam desenvolver sua compreensão sobre essas ideias. “Embora seja aceitável e até mesmo desejável ter contextos para os problemas que os tornem interessantes, esses aspectos não devem ser o foco da atividade” (VAN DE WALLE, 2009, p. 58);
- A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos- os estudantes devem entender que a responsabilidade para determinar se as soluções estão corretas e porque elas estão corretas também é deles. “A justificativa deve ser uma parte integrante de suas soluções” (VAN DE WALLE, 2009, p. 58)

Assim sendo, de acordo com Duval (2018, p. 2) o ensino de Matemática deve propor que os estudantes “entrem na maneira de pensar e de trabalhar que é específica à matemática, uma vez que é essa a condição que precede a toda aquisição dos conceitos em matemática”. Porém, não é o que acontece no ensino dessa disciplina, já que a

concepção presente gira, em muitos casos, em torno de transmitir maneiras de fazer e do ensino de algoritmos de resolução, muitas vezes de modo descontextualizado.

Nesse sentido, a Resolução de Problemas tem se mostrado uma alternativa que pode contribuir para melhorar os aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática, pois visa tornar os estudantes ativos no processo de aprendizagem, não se limitando à mera transmissão de conteúdos, uma vez que um problema é o ponto de partida para o desenvolvimento de novos conhecimentos (SÃO PAULO, 2019).

Pontes (2018, p. 45) corrobora a discussão ao afirmar que:

[...] o sucesso da escola do futuro deve obrigatoriamente passar por uma remodelagem no ensino de Matemática, sendo assim, propostas metodológicas do tipo Resolução de Problemas de Matemática são imprescindíveis na construção desse novo currículo. A Resolução de Problemas justifica-se em compreender o mundo das formas, das medidas, dos números e das probabilidades, a partir da arte de resolver problemas matemáticos.

As pesquisas sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerá-la como uma forma de ensinar Matemática receberam atenção a partir de Polya, considerado o precursor da Resolução de Problemas, em 1944. Em seu trabalho, Polya objetivou descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Nesse sentido, Schroeder e Lester (1989) destacam três abordagens de resolução de problemas: ensinar “sobre resolução de problemas”, ensinar “para resolver problemas” e ensinar “via resolução de problemas”

O professor que ensina **sobre resolução de problemas**, conforme Schroeder e Lester (1989), destaca, geralmente, o modelo de solução de problemas de Polya. De modo geral, este modelo apresenta um conjunto de quatro fases independentes no processo de resolução de problemas matemáticos. Assim sendo, os estudantes aprendem explicitamente as fases que os especialistas recorrem para resolver problemas matemáticos, e são incentivados a tomar consciência de sua própria progressão por essas fases quando eles mesmos solucionam os problemas (SCHROEDER; LESTER, 1989). Assim sendo,

[...] o ensino sobre resolução de problemas corresponde a considerá-la como um novo conteúdo. São abordados temas relacionados à resolução de problemas e percebe-se uma forte ênfase nas heurísticas como forma de orientar os alunos na resolução de problemas, com regras e processos gerais, independentes do conteúdo específico abordado (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 37).

Com base nesses pressupostos, o modelo proposto por Polya (1995) é composto em quatro etapas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Polya ressalta que a compreensão do problema o aluno necessita não só compreender o problema, mas também, querer resolvê-lo. O problema deve ser bem escolhido pelo professor, nem muito difícil e nem muito fácil, e sim, natural e interessante, para que o aluno o compreenda e tenha interesse em resolvê-lo. Além disso, o enunciado do problema deve ficar bem entendido, possibilitando que o estudante tenha condições de identificar as partes principais do problema, tais como incógnitas e dados da atividade, por exemplo (POLYA, 1995)

Echeverría e Pozo (1998) corroboram a discussão ao afirmarem que a compreensão de um problema não envolve somente o entendimento das palavras, da linguagem e dos símbolos com os quais ele é apresentado, mas também assumir a situação desse problema e adquirir uma disposição para procurar a resolução.

Dito de outra forma, compreender um problema implica dar-se conta das dificuldades e obstáculos apresentados por uma tarefa e ter vontade de tentar superá-las” (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.22).

Na etapa relacionada ao estabelecimento de um plano, Polya afirma que há um plano quando se conhece, pelo menos, quais são as operações envolvidas, cálculos ou desenhos que são necessários para a obtenção da incógnita.

Em outras palavras, devemos nos perguntar qual a distância entre a situação que partimos e a meta à qual pretendemos chegar, e quais são os procedimentos mais úteis para diminuir essa distância (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.24).

Para tanto, nessa etapa, os professores devem estimular os estudantes a lembrarem de problemas semelhantes, ou do mesmo problema proposto de uma maneira um pouco diferente, para que assim os estudantes possam dar sequência nas ideias para a resolução do problema (POLYA, 1995).

A execução consiste em desenvolver o plano elaborado na etapa anterior. Nesse momento podem surgir outros problemas, uma vez que a solução de problemas não é um processo linear e o plano proporciona apenas um roteiro geral (POLYA, 1995). Conforme salientam Echeverría e Pozo (1998), a execução do plano faz com que nos coloquemos novos problemas que precisamos levar em consideração e para os quais precisamos delinear novos planos. Isso acontece principalmente em problemas que exigem a divisão em submetas.

Cada vez que uma submeta é atingida, o problema transforma-se em uma questão tão diferente da inicial que nos obriga a começar novamente o processo de solução (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.27).

Finalmente, no retrospecto há uma etapa de verificação do resultado e do caminho que levou até a resolução do problema para que os estudantes possam consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a capacidade de solucionar problemas (POLYA, 1995).

Essa fase, de acordo com Echeverría e Pozo (1998), tem dois objetivos: com relação ao estudante, avaliar o alcance da meta estabelecida e conseqüentemente, uma possível revisão do procedimento utilizado, e no que se refere ao professor, ajudar o estudante a tornar-se consciente das estratégias e regras empregadas.

Já o docente que **“ensina para resolver problemas”**, de acordo com Schroeder e Lester (1989), foca em maneiras pelas quais a matemática ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Os autores ressaltam que, embora a aquisição de conhecimentos matemáticos seja de suma importância, o propósito essencial para aprender matemática é usá-la na resolução de problemas.

Além disso, o professor que ensina para solução de problemas está muito preocupado com a capacidade dos alunos de transferir o que aprenderam de um contexto de problema para outros. “Um grande adepto dessa abordagem pode argumentar que a única razão para aprender matemática é ser capaz de usar o conhecimento adquirido para resolver problemas” (SCHROEDER; LESTER, 1989, p.32, tradução nossa).

Nesse sentido, Allevato e Onuchic (2014, p.77) denotam essa concepção por **“ensino de Matemática para a resolução de problemas”**. Conforme as autoras essa mudança tem por objetivo evidenciar que o foco dessa abordagem não está mais na Resolução de Problemas, mas sim na Matemática, sendo a resolução de problemas vista como um apêndice.

Assim, nessa abordagem, apenas por ter desenvolvido a parte teórica referente a um determinado tópico matemático, é que o professor propõe problemas aos alunos, de fato, como aplicação dos conteúdos estudados (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.38).

Por fim, no ensino **“via resolução de problemas”**, “os problemas são avaliados não apenas como um propósito para a aprendizagem da matemática, mas também como um meio principal de fazê-lo” (SCHROEDER; LESTER, 1989, p.33, tradução nossa).

O ensino do objeto matemático inicia-se com uma situação-problema que incorpora aspectos-chave do tópico. Nesse modo de conceber a resolução de problemas, as técnicas matemáticas, por sua vez, são desenvolvidas como respostas para os

problemas e, portanto, um objetivo para se aprender matemática é transformar certos problemas não rotineiros em problemas rotineiros.

Assim sendo, a aprendizagem da matemática, nesses termos, pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do cotidiano que serve como uma instância do conceito ou técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica dos problemas de uma classe e técnicas para operar com os símbolos) (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Nessa metodologia, o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de conceitos matemáticos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Partindo desse pressuposto, as autoras indicam dez etapas para organizar as aulas nessa perspectiva: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) preposição e resolução de novos problemas.

Em linhas gerais, a proposição de um problema marca o início do trabalho, sendo o momento que o professor propõe ou aceita um problema proposto pelos estudantes (ALLEVATO, 2014). Tal problema é denominado por Allevato e Onuchic (2014) problema gerador, pois objetiva a construção de um novo conceito, conteúdo ou procedimento, ou seja, “o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 45).

Ao receber o problema impresso, inicia-se a segunda etapa: leitura individual. Nesse momento, o estudante lê individualmente o problema com o intuito de desenvolver sua própria compreensão do que foi proposto. Feito isso, os alunos se reúnem em pequenos grupos para a quarta etapa que consiste em discutir o problema com os pares (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Após isso, inicia-se a quarta etapa: resolução do problema, em que os estudantes em grupos tentam resolver o problema gerador fazendo o uso de conhecimentos prévios, enquanto o professor observa esse momento e incentiva os alunos (quinta etapa) e os auxiliam nas dificuldades, mas sem fornecer as respostas prontas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Quando os alunos registram as suas resoluções na lousa (sexta etapa) surge a possibilidade de os alunos compartilharem e discutirem as estratégias para a solução do problema gerador com a sala toda. O professor, nesse caso, estimula os estudantes a

justificarem suas ideias e a defenderem seus pontos de vista, comparando e discutindo as diferentes soluções que compareceram no momento anterior.

A partir disso, em conjunto com o professor, os alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto em sessão plenária, conforme as etapas 7 e 8 (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

No momento que corresponde à penúltima etapa, o professor registra na lousa uma apresentação organizada e estruturada utilizando a linguagem matemática, “padronizando os conceitos, os princípios operatórios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações, se for o caso” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.46).

Por fim, de acordo com Allevato e Onuchic (2014), novos problemas geradores são propostos aos estudantes como forma de possibilitar a análise da compreensão dos elementos introduzidos na aula e buscar a consolidação das aprendizagens constituídas nas etapas anteriores.

Outro autor que discute a organização de aula com foco na Resolução de Problemas é Van de Walle (2009). Para ele, a aula nessa perspectiva compreende três fases: fase antes de uma lição, fase durante uma lição e fase depois de uma lição.

A fase antes de uma lição refere-se à etapa de preparação dos estudantes. Nesta o professor deve verificar se o problema foi compreendido, ativar os conhecimentos prévios dos alunos e estabelecer expectativas com relação à tarefa a ser realizada (VAN DE WALLE, 2009).

Na fase durante a lição os estudantes devem trabalhar no problema. Para tanto, o professor deve colocar o estudante como protagonista de sua própria aprendizagem, evitando intervenções desnecessárias, escutando e observando atentamente as discussões e fornecendo sugestões adequadas (VAN DE WALLE, 2009).

Por fim, na fase depois da lição o foco é no debate entre os estudantes. Nessa fase, o professor deve encorajar os estudantes a discutirem soluções em grupos, a fim de sintetizar as principais ideias e identificar futuros problemas (VAN DE WALLE, 2009).

Em termos curriculares, a Resolução de Problemas, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser resumida nos seguintes princípios de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

- No âmbito do ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados por meio da exploração de problemas, ou seja,

de situações em que os estudantes precisem desenvolver estratégias para resolvê-las;

- O problema certamente não é um exercício em que o estudante é um mero aplicador de fórmulas ou processos operatórios. Só há problema se o estudante for levado a interpretar o enunciado da questão exposta e a estruturar a situação que é apresentada;
- Aproximações sucessivas de um conceito são desenvolvidas para resolver um certo tipo de problema; “num outro momento, o estudante utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática” (BRASIL, 1998, p. 41);

O fato de o estudante ser levado a questionar sua própria resposta, a examinar o problema, a transformar uma determinada situação em uma fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de informações, a analisar problemas abertos, que admitem diferentes respostas em função de certas condições, “evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos” (BRASIL, 1998, p.42).

[...] a resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido. Toda vez que você apresenta uma tarefa baseada em resolução de problemas e aguarda uma solução, você está dizendo aos estudantes “Eu acredito que vocês podem fazer isso”. Toda vez que a turma resolve um problema e os alunos desenvolvem sua compreensão, a autoconfiança e a autoestima são ampliadas e fortalecidas (VAN DE WALLE, 2009, p.59).

No caso desta pesquisa, a Resolução de Problemas foi utilizada para situações que envolveram os Números Inteiros Relativos em uma perspectiva de ensino “via resolução de problemas” (SCHROEDER; LESTER, 1989), ou seja,

[...] resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas (VAN DE WALLE, 2009, p.57).

Partindo desses pressupostos, tivemos como ponto de partida problemas que abordaram situações com base nos conhecimentos prévios dos estudantes e que os desafiaram no desenvolvimento do conceito de Números Inteiros Relativos, principalmente no que tange ao significado e operações nesse conjunto, considerando o contexto da Resolução de Problemas conforme proposto por Van de Walle (2009).

Cabe ressaltar que as etapas da pesquisa envolvendo a Resolução de Problemas estão descritas no capítulo a seguir.

8 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos a natureza da pesquisa, os caminhos metodológicos percorridos para atingirmos os objetivos propostos, bem como a fundamentação das atividades didáticas desenvolvidas com os estudantes participantes do estudo.

8.1 A natureza da pesquisa

A presente investigação de delineamento analítico-descritivo pautou-se nos fundamentos da pesquisa qualitativa, que por sua natureza, atende aos objetivos pretendidos.

De acordo com Esteban (2010, p.127) a pesquisa qualitativa significa a “atividade sistemática voltada para a compreensão em profundidade de fenômenos sociais que podem ser transformados e modificados resultando num corpo organizado de conhecimentos”.

De modo geral, a pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ ou medir os eventos estudados, mas sim parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo à medida que o estudo avança.

Além disso, envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (GODOY, 1995; CRESWELL, 2007).

Nesses termos, a fim de caracterizarmos a investigação qualitativa, remetemo-nos a Bogdan e Biklen (1994), que apresentam cinco características básicas para esse tipo de metodologia:

1. A fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal instrumento na recolha desses mesmos dados, isto é, os pesquisadores frequentam os locais dos estudos devido à forte influência do contexto na pesquisa, uma vez que as ações podem ser interpretadas de uma forma satisfatória, quando são observadas no ambiente, onde ocorrem habitualmente;

2. A investigação qualitativa é descritiva, ou seja, os dados coletados são considerados formas de interpretação do contexto através das palavras, mais do que de números. Assim, o pesquisador, que trabalha com esse tipo de abordagem, analisa os dados na totalidade de sua riqueza, dado que se entende que toda amostra fornece pistas importantes para construção e compreensão do fenômeno estudado.

3. Os pesquisadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelo produto: as técnicas qualitativas privilegiam o modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações do dia a dia;

4. O pesquisador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Nesse caso, os pesquisadores que se utilizam desse tipo de abordagem buscam entender como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas;

5. A análise dos dados tende a seguir um caráter indutivo. Os pesquisadores não recolhem dados com o objetivo de confirmar ou refutar hipóteses construídas de maneira prévia, mas os resultados vão se construindo à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se juntando.

Conforme Bogdan e Biklen (1994), os investigadores qualitativos utilizam-se de estratégias e procedimentos que lhes permite levar em consideração as experiências do sujeito da pesquisa. Logo, o processo de condução da investigação qualitativa apresenta uma espécie de diálogo entre o investigador e o investigado, fazendo com que não exista neutralidade no tipo de abordagem, ou seja, têm como característica o “investigador geralmente envolvido em uma experiência sustentada e intensiva com os participantes” (CRESWELL, 2007, p. 188).

Particularmente, no caso dessa investigação, a escolha da abordagem qualitativa de delineamento analítico-descritivo é de grande valia, pois, essa modalidade de pesquisa possui características voltadas à investigação da atuação práticas (GIL, 2002), nesse caso, os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos que são aspectos importantes para a educação escolar.

Em suma, os referidos processos que, no âmbito dos Números Inteiros Relativos, costumam suscitar obstáculos para ensinar e diversas dúvidas nos estudantes, devem ser investigados para uma compreensão profunda da natureza dessas dificuldades.

8.2 Objetivos da pesquisa

A presente pesquisa tem como objetivo geral compreender aspectos do ensino e da aprendizagem do Número Inteiro Relativo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da implementação de um conjunto de atividades didático-pedagógicas fundamentadas em pressupostos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo e da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica.

Para atingirmos o objetivo geral, traçamos os seguintes objetivos específicos e os respectivos procedimentos para a sua obtenção (Quadro 7).

Quadro 7: Objetivos específicos da pesquisa e instrumentos de coleta de dados

Objetivos Específicos	Instrumentos de coleta de dados
1. Descrever aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo, evidenciando as principais dificuldades na construção desse conceito e nos processos de ensino e aprendizagem escolar;	Levantamento bibliográfico
2. Descrever como o conceito de Número Inteiro Relativo é abordado em documentos que norteiam os processos de ensino e aprendizagem no âmbito da educação escolar brasileira: Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019);	Análise documental
3. Descrever e analisar como a temática dos Números Inteiros Relativos é abordada nos livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental, presentes no PNLD-2020;	Análise documental
4. Elaborar e desenvolver com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, um conjunto de atividades didático-pedagógicas sobre Números Inteiros Relativos apoiadas em seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos e em pressupostos da Resolução de Problemas como metodologia de ensino;	Atividades de intervenção didática;
5. Verificar como os estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental assimilam o conceito de Número Inteiro Relativo, evidenciando quais compreensões e dificuldades referentes ao conteúdo eles apresentam.	Atividades de intervenção didática

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

8.3 O processo investigativo: o caminhar da pesquisa

A partir das características destacadas pelos autores citados, como sendo a base de discussão de uma abordagem qualitativa do tipo analítico-descritivo, descreveremos o modo como o estudo foi realizado, explicitando as etapas metodológicas para atingir os objetivos propostos. Com isso, o caminho da pesquisa seguiu os seguintes passos:

Em um primeiro momento realizamos um levantamento teórico sobre a produção da área. Essa etapa é de suma importância, pois o pesquisador ao elaborar uma investigação deve rever a literatura acadêmica sobre o assunto que norteará o trabalho, pois essa revisão pode contribuir para ressaltar a necessidade de pesquisa sobre o tema, limitando o escopo da investigação (CRESWELL, 2007).

Assim sendo, buscamos autores que são referências para o desenvolvimento da pesquisa com ênfase em estudos que retratam o processo de ensino e aprendizagem dos Números Inteiros Relativos, principalmente no que tange à utilização da Resolução de Problemas no ensino desse conceito. Com isso são retratados alguns pontos que merecem destaque para a discussão da pesquisa, para que o tema investigado seja tratado de forma clara e precisa.

O processo de avaliação do material bibliográfico que o pesquisador encontra mostrará até onde outros investigadores têm chegado em seus trabalhos, os métodos empregados, as dificuldades que tiveram de enfrentar e o que pode ser ainda investigado. Ao mesmo tempo, irá analisando as possibilidades de realização de seu trabalho e a utilidade que os resultados alcançados podem ceder a determinada área do saber e da ação (TRIVIÑOS, 1997; CRESWELL, 2007).

Após isso, fizemos uma análise documental da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) e dos livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental selecionados no PNLD-2020, tomando como base o desenvolvimento das habilidades específicas do conceito de Números Inteiros (EF07MA04 e EF07MA04).

Portanto, analisamos, especificamente, como é exposto o conteúdo de Números Inteiros Relativos nos documentos oficiais e em livros didáticos, principalmente no que concerne a introdução do conceito, utilização da reta numérica, comparação, ordenação e operações no contexto dos inteiros.

Essa etapa é de grande relevância para a pesquisa, uma vez que, segundo Gil (2002) é pertinente lembrar que algumas pesquisas elaboradas com base em documentos são importantes, não porque respondem definitivamente a um problema, mas porque proporcionam melhor visão deste problema ou, então, hipóteses que conduzem a sua verificação por outros meios.

Em um terceiro momento, iniciamos a elaboração das atividades sobre Números Inteiros Relativos. Esta ação foi realizada no segundo semestre de 2021 em conjunto com alunos do Projeto Residência Pedagógica- Matemática da Unesp- Presidente Prudente e será detalhada no tópico a seguir. Cabe ressaltar que nem todas as atividades desenvolvidas no âmbito do Residência Pedagógica foram implementadas pelo pesquisador nas turmas de sétimo ano participantes da pesquisa. Além disso, algumas atividades foram elaboradas/reelaboradas/adaptadas somente pelo pesquisador, com o intuito de atender aos objetivos da pesquisa e aos processos de ensino e aprendizagem de

Números Inteiros Relativos dos alunos da Educação Básica. Tais particularidades estão indicadas nas atividades.

Após isso, desenvolvemos as atividades didáticas com 39 alunos, sendo 21 do 7º ano A (identificados como A1, A2...A21) e 18 7º ano B (identificados como B1, B2...B18) do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Álvares Machado – SP. O início do desenvolvimento dessa etapa aconteceu no mês de abril de 2022 e o término ocorreu em junho do mesmo ano. Cabe ressaltar que as atividades foram realizadas com os estudantes durante as aulas de Matemática cedidas pela professora responsável pela turma, que não participou da aplicação, somente acompanhou o desenvolvimento da pesquisa.

Cada turma contou com cinco aulas semanais de Matemática que foram utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa no período informado, totalizando 50 aulas de 55 minutos em cada uma delas. As aulas ministradas pelo pesquisador seguiram os pressupostos da Resolução de Problemas como metodologia de ensino (VAN DE WALLE, 2009). Assim sendo, as aulas nessa perspectiva compreenderam três fases citadas anteriormente: fase antes de uma lição, fase durante uma lição e fase depois de uma lição (VAN DE WALLE, 2009).

Assim sendo, antes do início do desenvolvimento de cada atividade, ou seja, na fase “antes de uma lição”, o pesquisador buscou preparar os estudantes, levantando conhecimentos prévios e estabelecendo expectativas com relação à tarefa a ser realizada. Cabe ressaltar que, nesse momento, as atividades eram iniciadas pela leitura de algum estudante para toda classe

No decorrer do desenvolvimento das atividades, mais precisamente na fase “durante a lição”, o pesquisador objetivou colocar os estudantes como protagonistas do processo de aprendizagem, circulando pela sala de aula, buscando escutar como eles estavam raciocinando, observando e fornecendo questionamentos e sugestões adequadas para a resolução das situações propostas (não fornecendo respostas).

Por fim, concluída a resolução das atividades propostas, na fase “depois da lição”, houve a discussão e síntese de ideias dos estudantes referentes às estratégias de resolução de cada tarefa. Nessa fase, o pesquisador encorajou os estudantes a compartilharem a maneira que resolveram a atividade, buscando discutir, levantar e validar as hipóteses, além de evidenciar similaridades e diferenças nas estratégias de resolução com a participação dos alunos. Cabe ressaltar que o registro das respostas dos estudantes foi feito nos materiais impressos pelo pesquisador.

Após o desenvolvimento das atividades pelos estudantes realizamos uma análise de conteúdo (BARDIN, 2011). Os dados considerados para as análises nessa etapa foram obtidos por meio das respostas dos estudantes às atividades didáticas referentes ao conceito de Número Inteiro Relativo propostas pelo pesquisador, descritas anteriormente.

Tal análise foi iniciada com uma “leitura flutuante” das respostas dos estudantes às atividades didáticas propostas. De acordo com Bardin (2011) essa etapa possibilita ao pesquisador estabelecer contato com os documentos deixando-se invadir por impressões e orientações.

A partir disso, iniciamos a preparação do material (BARDIN, 2011). Assim sendo, transcrevemos os dados em quadros específicos contendo a identificação do estudante (estudantes do 7º ano A foram identificados como A1, A2, A3, ..., A21, enquanto os do 7º ano B como B1, B2, B3, ..., B18) e sua respectiva resposta para cada atividade desenvolvida.

Por fim, partimos para o tratamento dos resultados e interpretações dos dados (BARDIN, 2011). Nessa etapa construímos categorias específicas para cada atividade, levando em consideração seus objetivos e as respostas dos alunos as atividades impressas, propostas pelo pesquisador e descritas anteriormente. “As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns desses elementos” (BARDIN, 2011, p. 145). Tais categorias foram apresentadas em tabelas (numeradas de 1 a 40) e agrupadas conforme os eixos apresentados anteriormente.

A partir disso, tentamos buscar singularidades que pudessem, mediante análise, elucidar os objetivos da pesquisa, identificando aspectos referentes às compreensões e dificuldades dos estudantes com relação ao conceito de Número Inteiro Relativo.

8.4 Atividades elaboradas/reelaboradas pelo pesquisador no âmbito do Programa Residência Pedagógica- Licenciatura em Matemática (UNESP-PP)

A primeira atividade nessa etapa referiu-se a um estudo dirigido sobre Números Inteiros Relativos, tendo como base o texto “Epistemologia dos Números Relativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de Matemática” de Glaeser (1985). Tal estudo compreendeu quatro questões que deveriam ser respondidas pelos residentes, abordando aspectos referentes a obstáculos epistemológicos relacionados à compreensão do conceito, entendimento do Número Inteiro Relativo como quantidade isolada,

significados do sinal negativo (-) em diferentes contextos e utilização modelos concretos para o ensino da regra de sinais na multiplicação.

Para fechar esse estudo houve a discussão do texto proposto por meio de uma apresentação de slides realizada pelo pesquisador, tendo como foco os obstáculos epistemológicos, tratados pelo autor, no desenvolvimento do conceito de Número Inteiro Relativo.

Com base na leitura do texto e reflexões propostas pelo pesquisador, deu-se o início da elaboração/reelaboração das atividades didáticas referentes ao conceito de Número Inteiro Relativo. Nessa etapa participaram 16 residentes, dois professores preceptores, a coordenadora do projeto e o pesquisador. Oito residentes, um professor preceptor e o pesquisador participaram da equipe 1, e os demais, incluindo o pesquisador, da equipe 2.

Com relação a equipe 1 a proposta era que esta equipe, a partir das questões analisadas no caderno do professor – Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), elaborasse/reelaborasse um conjunto de atividades didáticas que envolvessem o objeto do conhecimento Números Inteiros Relativos, levando em conta os seguintes aspectos: significado de um número negativo, o conjunto dos Números Inteiros Relativos e sua representação na reta numérica (Módulo ou valor absoluto de um número inteiro, conceito de oposto ou simétrico de um número, ordenação e comparação entre Números Inteiros Relativos).

No caso da equipe 2, novamente, a sugestão para desenvolvimento desse trabalho teve como base as questões analisadas no caderno do professor – Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), com a proposta de uma elaboração/reelaboração de atividades didáticas levando em conta as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão no âmbito desse conjunto.

A elaboração/reelaboração das atividades aconteceu em reuniões semanais com a participação do pesquisador, os professores preceptores, a coordenadora do programa e os alunos participantes do Residência Pedagógica. As discussões entre os grupos de alunos, os professores preceptores e o pesquisador levaram à construção de um conjunto de atividades didáticas sobre Número Inteiro Relativo.

Elaboradas as atividades, algumas foram escolhidas para o processo de implementação pelo pesquisador com os alunos da Educação Básica e divididas em oito eixos temáticos que serão detalhados a seguir.

Partindo dessas considerações, no primeiro eixo temático, desenvolvemos atividades relacionadas ao significado do Número Inteiro Relativo, enfatizando a ideia dos sinais operatório e predicativo (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015, OLIVEIRA, 2020) e contextos em que se aplicam. Já no segundo eixo temático, abordamos o conjunto dos Números Inteiros Relativos e sua representação na reta numérica.

No terceiro eixo temático trabalhamos com atividades que envolveram os conceitos de módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo. No quarto eixo temático abordamos a ordenação e a comparação de Números Inteiros Relativos. Por fim, nos demais, trabalhamos com os estudantes do sétimo ano atividades associadas às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com Números Inteiros Relativos.

A fundamentação teórica envolvendo cada eixo temático e as suas respectivas atividades serão abordadas no tópico a seguir.

8.5 Significado de um Número Inteiro Relativo

Nas situações que envolvem Números Inteiros Relativos é preciso atentar para o sinal da operação (sinal operatório) e para o sinal do número (sinal predicativo) (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015). Nesse âmbito, além das operações, o sinal de + (mais) que anteriormente concebia uma adição, agora nos números relativos pode representar um estado.

De igual modo, o sinal de – (menos) que no conjunto $\mathbb{N}$ representava uma operação de subtração, com ideias associadas a tirar, comparar e completar, agora também passa a ser considerado como um sinal predicativo, representando o estado final de uma operação e também a qualidade associada a um Número Inteiro Relativo em determinada situação ou contexto (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015).

Logo, diferentemente do conjunto dos naturais em que um número indica uma quantidade ou está relacionado a processos de contagem, no conjunto dos Números Inteiros Relativos, um número designa uma quantidade, investida de qualidade, que não está necessariamente ligada à ideia de contagem (OLIVEIRA, 2020).

De acordo com Cid (2015), em contextos anteriores, esses sinais indicavam as operações aritméticas de adição e subtração entre Números Naturais, mas considerando um aspecto importante: “na aritmética eles são usados, principalmente, para indicar operações que devem ser executadas, não para indicar o resultado da operação” (CID,

2015, p. 232, tradução nossa). Com os Números Inteiros Relativos, esses sinais farão parte da notação usada para representar determinados números em função do contexto ao qual se associam.

Em que pese a ideia dos sinais operatório e predicativo, de um modo geral, um Número Inteiro Relativo pode assumir diferentes significados.

Nesse sentido, Borba (2009) ressalta que um número positivo pode representar uma medida positiva, ressaltando exemplos como saldo de gols positivos, temperaturas acima de zero, dentre outros. Além disso, podem ser atribuídos significados referentes a uma transformação positiva, no caso de aumentos de temperatura, quantia depositada e pontos ganhos em um jogo, ou a uma relação positiva, que representa a comparação com uma medida inicial (“a mais” que a quantidade inicial).

Analogamente, um número negativo pode representar um estado negativo (no caso de temperaturas negativas, por exemplo), uma transformação negativa (diminuição de temperatura) ou uma relação negativa (“a menos” que a quantidade inicial) (BORBA, 2009).

Partindo desses pressupostos, quando representamos a situação na qual um time de futebol sofreu mais gols do que marcou, utilizamos os Números Inteiros Relativos no contexto de medida negativa. Em um saldo de gols de -4, como o do América-MG, por exemplo (Figura 12), esse número representa uma qualidade, porque a operação entre quantidades de gols marcados e sofridos já foi realizada ($24 + (-28) = -4$), representando uma medida negativa. Por sua vez, o caso do Internacional refere-se à medida positiva, uma vez que marcou mais gols do que sofreu, obtendo um saldo igual a +18.

Figura 12: Exemplo de atividade envolvendo medidas positivas e negativas no âmbito dos NIR

1. Veja, na tabela seguinte, o desempenho de alguns clubes após a 24ª rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol, série A – Brasileiro 2018.

Campeonato Brasileiro de Futebol (24ª rodada/2018)

Classificação	Time	Pontos	Gols marcados	Gols sofridos	Saldo de gols
1ª	 Internacional	49	31	13	+18
9ª	 Fluminense	31	23	27	-4
10ª	 Corinthians	30	25	21	+4
11ª	 América-MG	30	24	28	-4
13ª	 Bahia	28	24	29	-5
18ª	 Ceará	24	15	25	-10

Fonte: CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL. Campeonato Brasileiro de Futebol. Disponível em: <<https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2018>>. Acesso em: 17 set. 2018.

Chama-se **saldo de gols** a diferença entre o número de gols marcados e o número de gols sofridos por uma equipe em um torneio de futebol. Quando o número de gols marcados é maior que o de gols sofridos, dizemos que a equipe apresenta um **saldo de gols positivo**. Se o número de gols marcados for menor que o número de gols sofridos, dizemos que a equipe apresenta um **saldo de gols negativo**.

De acordo com as informações do texto e da tabela, responda às questões no caderno: **c) Os saldos positivos foram indicados com o sinal "+", e os saldos negativos, com o "-".**

- Quais clubes apresentaram um saldo de gols positivo? **Internacional e Corinthians.**
- E quais apresentaram um saldo de gols negativo? **Fluminense, América-MG, Bahia e Ceará.**
- Como foram representados os saldos positivos e os saldos negativos de gols?
- Como foi representado o saldo de gols do Ceará? **-10**

FONTE: JÚNIOR; CASTRUCCI (2018, p.32)

No âmbito das relações entre quantidades a atividade a seguir (Figura 13) ilustra as situações envolvidas.

Figura 13: Exemplo de atividade envolvendo relação positiva no âmbito dos NIR

- 8** O termômetro eletrônico da câmara fria ilustrada ao lado estava com defeito e, por isso, sempre registrava 4 graus acima da temperatura real.



- Qual era a temperatura real nessa câmara? **-44 °C**
- Qual será a temperatura real se o termômetro registrar -2 °C? **-6 °C**

FONTE: GAY; SILVA (2018, p. 40)

Como o termômetro com defeito registra quatro graus acima da temperatura real (+ 4), há uma relação positiva, pois, a temperatura da câmara fria com defeito é quatro graus “a mais” que a temperatura real. Neste caso, nos itens a) e b), há uma comparação entre a temperatura marcada pelo equipamento e a temperatura real (quatro graus “a mais”).

Com relação à transformação, os exemplos envolvendo temperaturas também são comuns. “Se uma medida de temperatura de 0°C baixar 5 graus Celsius, então qual será a nova medida de temperatura?” (DANTE, 2020, p.13). No exemplo citado o número -5, diminui a temperatura de 0°C em cinco unidades, atribuindo ao Número Inteiro Relativo em questão o significado de transformação negativa de uma quantidade inicial.

As atividades envolvendo transações bancárias também podem apresentar Números Inteiros Relativos no âmbito de transformações positivas ou negativas, como podemos ver na figura 14 a seguir.

Figura 14: Exemplo de atividade envolvendo transformações positivas e negativas no âmbito dos NIR

- 1** Represente os valores abaixo com números inteiros e efetue as adições.
1. a) $(+120) + (+85) = +205$
- a) No dia 3, havia R\$ 120,00 em minha conta-corrente. No dia seguinte, deposei nela R\$ 85,00. Quanto tenho agora?
- b) O saldo da conta-corrente de Eva estava negativo em 95 reais. Depois de pagar uma dívida de 175 reais, que saldo Eva tem na conta-corrente? $(-95) + (-175) = -270$

FONTE: GAY; SILVA (2018, p. 39)

No item a) o fato de depositar um valor maior que zero à conta corrente, representa uma transformação positiva de um estado inicial, o que é oposto ao que ocorre em b), já que há um pagamento de uma dívida, fato que é associado à transformação negativa.

Considerando os pressupostos teóricos e exemplos apresentados, as atividades descritas a seguir, elaboradas no contexto do Projeto Residência Pedagógica- Matemática da Unesp- Presidente Prudente, visaram propiciar o trabalho com os diversos contextos que envolvem os Números Inteiros Relativos.

A diversidade desses contextos ou situações objetivou contribuir para a superação de dois obstáculos citados por Glaeser (1985): inaptidão para manipular as quantidades negativas isoladas e dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.

O estudo de diversos contextos que envolvem os Números Inteiros Relativos é justificado com base nas ideias de Vergnaud (1986, 2009), para quem o desenvolvimento de somente uma situação isolada não coloca em execução todas as propriedades de um conceito, uma vez que, para isso deve-se fazer referência a uma diversidade de situações-problema.

Nesse sentido, a primeira atividade que foi selecionada para explorar os significados de um Número Inteiro Relativo levou em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes acerca deste conceito. A partir dela, os estudantes deveriam indicar situações cotidianas que remetem à utilização dos Números Inteiros Relativos e destacar, de acordo com suas concepções, a importância dos sinais positivo (+) e negativo (-) nos Números Inteiros Relativos.

A atividade 2 objetivou trabalhar com a situação em que os Números Naturais não são suficientes para representar as quantidades e, portanto, os estudantes deveriam utilizar os Números Inteiros Relativos.

Ao verificarem que tanto a quantidade de itens do armazém, quanto a quantidade de dinheiro disponível por Anna são insuficientes para atender a demanda proposta, os estudantes foram levados a refletir sobre como representar a situação matematicamente e a propor soluções para resolver o problema. Isso se justifica, pois, o trabalho com esse contexto possibilita a ampliação do conjunto dos naturais para os inteiros (CARAÇA, 2003) e consequentemente, a superação da dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas (GLAESER, 1985).

A terceira atividade objetivou a reflexão dos estudantes sobre mais um contexto de utilização dos Números Inteiros Relativos no cotidiano: o saldo de gols em campeonatos, tendo possibilitado a introdução de algumas ideias envolvendo a operação de adição no campo dos inteiros. Em síntese, o fato de um time levar mais gols do que fazer leva a um saldo negativo; se ocorre o contrário, o saldo é positivo; e caso o número de gols feitos ser igual ao número de gols sofridos, há um saldo zero.

Esse aspecto nos remete à operação de adição no âmbito dos inteiros relativos: a soma de um número positivo com um número negativo é maior que zero, caso o módulo do número positivo seja maior que o módulo do número negativo, é menor que zero caso o módulo do número negativo seja maior que o do número positivo e é igual a zero caso os módulos sejam iguais (CARAÇA, 2003).

A ideia de diferenciar os números -19 e 19 remete à utilização do sinal negativo (-) como predicativo (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015), ou seja, este sinal representa a qualidade do número em questão. Nesse caso, o Grêmio fez 19 gols “a mais” do que sofreu, enquanto o Avaí, fez 19 gols “a menos” do que sofreu no campeonato.

A quarta atividade visou propiciar aos estudantes a possibilidade de converter diferentes representações, em língua materna, envolvendo Números Inteiros Relativos para outro tipo de registro, numérico nesse caso.

A conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro (DUVAL, 2012; 2016). “Por exemplo, a tradução de um texto em uma ou mais expressões algébricas correspondentes é uma conversão da representação destas expressões da língua materna para o registro algébrico” (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 469).

Por exemplo, para transformar corretamente a ideia expressa no enunciado do item “a”, o aluno precisa compreender que uma temperatura abaixo de zero pode ser convertida a um número negativo, no caso, -12°C .

No contexto do item “b”, o aluno deve ter a noção de registrar a quantidade de 390,00 reais com um sinal negativo pelo fato de Laura estar devendo dinheiro, ou seja, sua conta bancária está negativa ou “no vermelho”.

Já nas atividades “c” e “d” o estudante deve lembrar/associar que a altitude tem como base a altura do nível do mar, que é representada como altura zero. Portanto, as alturas acima do nível do mar são indicadas por números positivos e as alturas abaixo do nível do mar por números negativos. No item “c”, trata-se de 800 metros acima do nível do mar, logo, +800 metros, enquanto na atividade “d” a profundidade é 11034 m abaixo do nível do mar, portanto -11034.

8.5.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da Educação Básica sobre o significado de um Número Inteiro Relativo

Atividade 1 (Elaborada pelo pesquisador): A utilização de números está presente no nosso cotidiano. Você já vivenciou situações em que antes de um número há um sinal “de menos” também chamado de sinal negativo? Qual a importância de usar os sinais positivo (+) e negativo (-) nos Números Inteiros Relativos?

(Ação do professor): Muitas são as situações do cotidiano nas quais os Números Inteiros Relativos estão presentes. O professor, nesse caso, deve estimular os alunos a pensarem em algumas dessas situações. Deve investir em questionamentos que envolvem o uso e a importância do sinal do número, tais como, por que as temperaturas abaixo de zero são apresentadas com um sinal – (negativo)? Por que os saldos positivos no banco vêm acompanhados pelo sinal + (positivo)?

Atividade 2 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Anna enviou a sua lista de compras para o senhor Manoel, dono de um armazém na cidade, através do WhatsApp, para que esta fosse entregue em sua residência. Ao verificar seu estoque, o senhor Manoel fez uma lista do que ele possuía. As listas estão a seguir.

Lista de compras e itens no armazém

Lista de Anna	Itens no armazém	Valor Unitário
10 Kg de arroz	9 Kg de arroz	R\$5,00 (Kg)
5 Kg de feijão	1 Kg de feijão	R\$12,00 (Kg)
7 Kg de açúcar	20 Kg de açúcar	R\$7,00 (Kg)
2 L de leite	1 L de leite	R\$3,00 (L)

Fonte: elaborado no programa Residência Pedagógica

- De acordo com a quantidade de mercadorias disponíveis no armazém, seria possível que Anna adquirisse todos os itens de sua lista? O que acontece nesse caso? Como podemos representar essa situação utilizando números inteiros?
- Supondo que Anna possui R\$100,00 ela conseguirá comprar todos os itens de sua lista? Por quê?
- Como Anna poderia levar os itens da sua lista de acordo com a quantidade de mercadorias no armazém e com R\$100,00? Explique sua sugestão.

(Ação do professor): a falta dos itens arroz, feijão e leite no armazém requer que os estudantes reflitam sobre a impossibilidade de utilizar somente Números Naturais para a conversão da situação indicada em linguagem matemática, tendo que recorrer aos números inteiros. O professor pode explorar as representações em linguagem escrita e linguagem matemática das situações a) e b), por exemplo, faltar um quilograma de arroz, pode ser representado com o número inteiro -1. As diversas sugestões que os estudantes apresentarão no item c) também podem ser evidenciadas pelo professor durante a discussão com a turma.

Atividade 3 (Elaborada pelo pesquisador): No futebol, a pontuação, os gols marcados, sofridos e o saldo de gols de um time são critérios importantes para a classificação do campeonato. Observe a tabela do Campeonato Brasileiro de Futebol da Série A de 2017, calcule os saldos de gols restantes e responda as questões a seguir.

Classificação do Campeonato Brasileiro de Futebol 2017

Classificação	Clube	Pontos	Gols marcados	Gols sofridos	Saldo de gols
1º	Corinthians	72	50	30	
2º	Palmeiras	63	61	45	
3º	Santos	63	42	32	
4º	Grêmio	62	55	36	19
18º	Avaí	43	29	48	-19
20º	Atlético Goianiense	36	38	56	

Fonte: Elaborado pelo autor

a) Qual o saldo de gols do time que ficou na 3ª colocação? Como este saldo foi obtido? O que ele significa?

b) Qual o saldo de gols do Avaí? Como este saldo foi obtido? O que ele significa?

c) Observando a tabela, notamos que o saldo de gols do Grêmio é 19, enquanto o saldo de gols do Avaí é de -19. Como foram obtidos esses saldos? Por que um é representado por um número positivo e o outro é um número negativo?

d) É possível, em um campeonato de futebol, um time ter o saldo de gols igual a zero? Explique sua resposta.

(Ação do professor): O professor necessita trazer alguns questionamentos para essa atividade, tais como, “por que o saldo de gols é representado por números positivos em alguns casos e por números negativos em outros? Como os saldos de gols são obtidos?” Esses questionamentos levam em consideração os sinais operatório e predicativo (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015) referente aos Números Inteiros Relativos e sua diferenciação diante de um contexto.

O item d) pode levar à reflexão do significado do zero nesse contexto. Para tanto, o professor pode explorar maneiras possíveis de um time obter um saldo de gols igual a zero (não marcar e não sofrer nenhum gol durante o campeonato- pouco provável, mas possível; marcar a mesma quantidade de gols que sofrer, provável e possível).

Atividade 4 (Elaborada pelo pesquisador): Cada expressão a seguir pode ser convertida em um Número Inteiro Relativo. Assim, faça a conversão da linguagem materna em linguagem matemática em cada item.

- a) A temperatura em Moscou está **12°C abaixo de zero**.
- b) Laura levou um susto ao consultar seu extrato bancário e verificar o **saldo devedor de R\$390,00**.
- c) O avião está **800 metros acima do nível do mar**.
- d) A fossa das Marianas, no oceano Pacífico, tem profundidade de **11034 m abaixo do nível do mar**.

(Ação do professor): o professor deve questionar o que fez o estudante escolher apresentar cada item utilizando determinado sinal. Um exemplo de questão a ser feita pelo docente ao aluno é: “ao ler a expressão, o que fez você representar 12°C abaixo de zero como -12°C e não como +12°C?”

8.6 O conjunto dos números inteiros e sua representação na reta numérica

Nesse eixo propomos trabalhar com a reta numérica de maneira a elucidar suas propriedades, oportunizando a compreensão do significado do Número Inteiro Relativo. Além disso, explorar situações que abordem a diferenciação do significado do zero absoluto e zero relativo (SALVADOR; NACARATO, 2003).

Salvador e Nacarato (2013, p.3) ao abordarem a questão do obstáculo “ambiguidade dos dois zeros” (GLAESER, 1985) ressaltam que:

[...] quando introduzimos os números inteiros, geralmente, com a reta numérica, esquecemos de discutir com os alunos a importância do zero na reta, ou seja, o zero como ponto de referência, que podemos considerar como o significado essencial para a compreensão dos números relativos.

Partindo desse pressuposto, não há como trabalhar os Números Inteiros Relativos com os estudantes sem uma discussão sobre os significados do zero nesse conjunto, ou seja, zero como valor absoluto e zero como valor posicional, no sentido de ser uma origem. Esses significados deveriam ser tratados ao longo da escolarização e não apenas no momento da introdução dos números relativos. No entanto, sem o domínio de tais significados, o aluno dificilmente compreenderá esse novo conjunto numérico e, conseqüentemente, a reta numérica (SALVADOR; NACARATO, 2003).

Na primeira atividade proposta, os Números Inteiros Relativos são utilizados para representar as posições de alguns elementos acima, abaixo e no nível do mar.

Ao solicitar aos estudantes que façam um desenho que ilustre a situação descrita, pretende-se introduzir a ideia de reta numérica por meio de pontos de referência.

Acreditamos que situações desse tipo podem contribuir para a aceitação dos Números Inteiros Relativos, ao passo que, trabalhar com expressões como “acima e abaixo do nível do mar”, bem como com os “deslocamentos de Elvira”, presentes na atividade 2, além de apresentarem atividades do cotidiano, também levam o estudante a representar as situações matematicamente, transformando a escrita em língua materna em linguagem matemática (DUVAL, 2012; HENRIQUES; ALMOULOU, 2016).

Realizar questionamentos tais como: quais estabelecimentos são mais próximos ou mais distantes, considerando um ponto de referência, pode colaborar para introduzir a ideia de módulo de um Número Inteiro Relativo.

Os aspectos mencionados anteriormente são importantes, pois conforme Teixeira (1993) a compreensão de um número negativo avança na medida em que o estudante descobre que se um número negativo é menor que um número positivo, existe um ponto de referência de onde negativo e positivo se originam. É preciso deixar claro também a necessidade de se estabelecer a reta numérica, como uma representação que tem como propriedade ser um campo numérico orientado da esquerda para a direita. Sem esse pressuposto não valeriam as propriedades de comparação entre os Inteiros.

A terceira, a quarta e a quinta atividades também dizem respeito à reta numérica dos Números Inteiros Relativos. O fato de completar com os números que estão em falta, pode levar os estudantes a comparar e estabelecer padrões, além de conjecturar e validar hipóteses sobre crescimento e decrescimento dos números no âmbito do conjunto dos Números Inteiros Relativos.

Por fim, a sexta atividade requer que os estudantes realizem a representação numérica em uma reta para que possam encontrar quais valores atendem às condições dos itens apresentados no exercício. O zero, nesse caso, é visto como um ponto de referência em que a sua direita se encontra os números positivos e a sua esquerda os números negativos.

Essas atividades proporcionam a compreensão da reta numérica como um campo orientado da esquerda para a direita, e sua consequência para as propriedades de comparação entre os Inteiros. Por exemplo, todo número inteiro positivo é maior que qualquer inteiro negativo e todo número à esquerda de um inteiro negativo é menor que ele, ou seja, quanto mais à direita, mais os números aumentam.

Esse aspecto pode colaborar na superação do obstáculo que Glaeser (1985) denomina dificuldade em unificar a reta numérica, auxiliando na comparação entre os Números Inteiros Relativos. Além disso, o significado do zero como ponto de referência nessas atividades pode corroborar a discussão sobre o obstáculo que se refere à ambiguidade dos dois zeros, ampliando os saberes dos estudantes com relação a esse aspecto.

8.6.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre a construção da reta numérica dos inteiros

Atividade 1 (elaborada pelo pesquisador): Você está em um navio em alto mar, observando as belas paisagens da praia. Quando olha para cima, vê um helicóptero sobrevoando baixo, a 100 metros de altura. Ao seu lado, um amigo resolve mergulhar a uma profundidade de 40 metros. Como podemos representar matematicamente essas três medidas? Faça um desenho que contenha os números envolvidos e represente o local em que está o helicóptero, o navio e o seu amigo mergulhador.

(Ação do professor): O professor deve questionar os alunos com relação ao que os levou a representar os elementos presentes na atividade de tal modo. É importante que o estudante seja incentivado a utilizar a reta numérica para converter a representação do objeto em língua materna, proposto na atividade, em registro numérico (representação dos Números Inteiros Relativos na reta numérica) (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016).

Atividade 2 (elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): O esquema a seguir representa a rua onde Elvira mora, no centro da cidade. Observação: a distância de um local a outro é medida em metros.

Figura 15: Rua onde Elvira mora



Fonte: Elaborado no programa Residência Pedagógica

a) Certo dia, Elvira saiu de casa e fez o seguinte trajeto, exatamente nesta sequência: foi até ao correio mandar uma carta para sua amiga e, em seguida, foi à Igreja

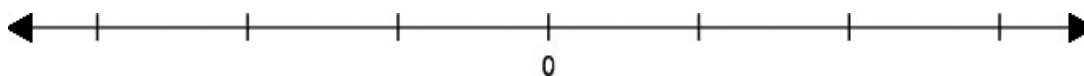
para assistir à missa. Logo depois, comeu um lanche na padaria após a missa, foi ao banco pagar uma conta e buscou sua filha na escola. Na volta, Elvira e sua filha pararam na praça para tomar um sorvete e, por fim, foram para casa. Como podemos representar, matematicamente, o trajeto percorrido por Elvira, considerando os locais onde Elvira parou cada vez que seguiu este trajeto como foi descrito?

b) Agora, suponha que você está na casa de Elvira. Então, saindo da casa de Elvira, faça o seguinte trajeto, nesta sequência, sobre o desenho da rua: caminhe 400 m para à direita, volte 300 m para à esquerda, depois ande 500 m para à direita, retorne 300 m para à esquerda e, por fim, ande mais 100 m para à esquerda.

I) Em que local você parou no desenho?

II) E se você caminhasse mais 300 metros para à direita, qual seria o segundo local que você se encontraria nessa rua?

c) Como podemos converter o desenho (trajeto) do item b) para uma reta numérica? Marque cada parada indicada e sua respectiva posição numérica sobre a reta a seguir por meio de pontos.



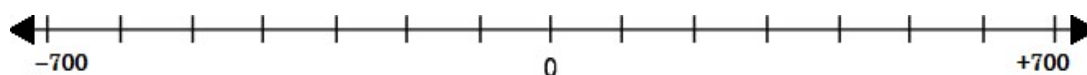
d) Indique o(s) estabelecimento(s) mais distante(s) e o(s) mais próximo(s) da Igreja (Referencial de Origem).

e) Indique o(s) estabelecimento(s) mais distante(s) e o(s) mais próximo(s) da Casa de Elvira.

(Ação do professor): o professor deve incentivar os alunos a registrarem cada ponto que a atividade se refere. O fato de os alunos indicarem os estabelecimentos mais próximos e mais distantes pode servir como base para a introdução de conceitos como módulo e simétrico de Números Inteiros Relativos.

Atividade 3 (elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Podemos então, usar esse exemplo da rua de Elvira para construir uma reta numérica, onde cada local será representado por um ponto sobre uma reta, de modo que a distância entre os pontos determine sua posição na reta a partir de um referencial, o qual chamamos de origem. Na reta numérica a nossa origem é o ponto O, cuja posição é demarcada como 0 (zero) sobre a reta.

- a) Marque na reta a seguir os pontos que representam os locais da rua de Elvira.

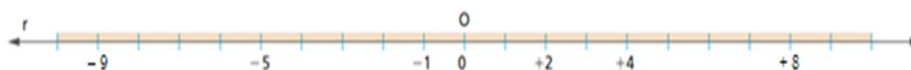


- b) Que números podemos utilizar para completar a sequência pela direita até +700 e pela esquerda até -700? Marque-os na mesma reta do item anterior.

(Ação do professor): o professor deve fazer o estudante perceber que os pontos da reta numérica, neste caso, variam de 100 em 100 unidades. Após os estudantes completarem a reta com os locais indicados na atividade, o professor deve explorar as regularidades para levar os estudantes à construção da reta em questão.

Atividade 4 (elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Voltando à reta numérica, podemos completá-la de forma a obtermos a sequência dos Números Inteiros Relativos. Nesta sequência, cada ponto é igualmente espaçado pela mesma unidade de distância (distância de comprimento medindo 1 unidade).

- a) Observe a figura a seguir, e complete-a com os números que estão faltando.

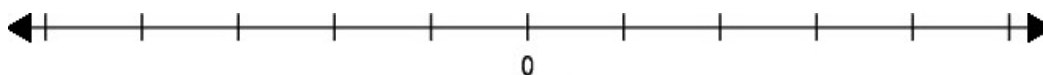


- b) O que você observa quando os números se afastam do zero, deslocando-se à direita? E quando se deslocam à esquerda com relação ao zero? Como você chegou a essas conclusões?
- c) Analise cada afirmação abaixo, marcando-a como verdadeira (V) ou falsa (F):

- () 0 é maior que -1, pois 0 está à direita de -1 na reta numérica;
- () -1 é menor que 0, pois -1 está à esquerda de 0 na reta numérica.
- () +8 é maior que +4, pois +8 está “mais distante” do zero com relação ao +4
- () -9 é maior que -5, pois -9 está “mais distante” do zero com relação ao -5

(Ação do professor): explorar a questão dos deslocamentos com relação ao ponto de referência (zero), para que os estudantes possam compreender que na comparação de dois números inteiros, o maior é sempre o que está à direita do outro, ou seja, que a reta numérica é um campo ordenado da esquerda para à direita.

Atividade 5 (elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica):
Nessa reta, o zero é associado à origem, e a distância entre os pontos que representam dois números inteiros consecutivos é sempre a mesma. Sendo assim, complete a reta numérica a seguir com os números que estão faltando, e em seguida, responda e justifique



cada uma delas.

-5										
----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- -4 é menor que -3?
- +5 é maior que -5?
- +2 é menor que +4?
- -2 é menor que +4?
- -2 é maior que -4?
- +2 é maior que -4?

(Ação do professor): fazer questionamentos sobre o porquê da ordenação que o estudante realizou. Além disso, incentivar os alunos a explicarem o que levou às conclusões referentes às comparações entre os Números Inteiros Relativos presentes na atividade.

Atividade 6: (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de BIANCHINI, 2018)
Encontre o número inteiro em cada caso. Descreva qual foi a sua estratégia para encontrar os números em cada item.

- a) Na reta numérica, o número está à direita do zero e à esquerda do 5.
- b) O número está à esquerda do zero e à direita do -6 na reta numérica.
- c) Na reta numérica, o número está à direita do 0 e à esquerda do -2.

(Ação do professor): Discutir as estratégias que os estudantes utilizaram para encontrarem os números pedidos em cada item da atividade. Se perceber que os alunos estão com dificuldades para concluir as atividades, pedir que eles convertam a representação em linguagem materna em uma reta numérica.

8.7 Módulo ou valor absoluto de um número inteiro e conceito de oposto ou simétrico

A distância de um número à origem é chamada de módulo ou valor absoluto de um número, sendo representada da seguinte forma: módulo de $-a = |-a| = a$. O módulo de um número sempre é positivo, pois ele representa uma distância variável positiva. Por conseguinte, quando dois os números de sinais opostos possuem o mesmo módulo ou valor absoluto, denominamos opostos ou simétricos.

Os Números Inteiros Relativos possuem algumas propriedades que são “invariantes em qualquer forma de representação utilizada e para qualquer significado que se dê a esses números” (BORBA; NUNES, 2004, p.79). No que tange aos conceitos de oposto e módulo de números inteiros, algumas dessas propriedades se destacam, tais como: números positivos e negativos de mesmo valor absoluto se cancelam quando adicionados e com relação ao oposto de um número negativo, o resultado é um número positivo e vice-versa (BORBA; NUNES, 2004).

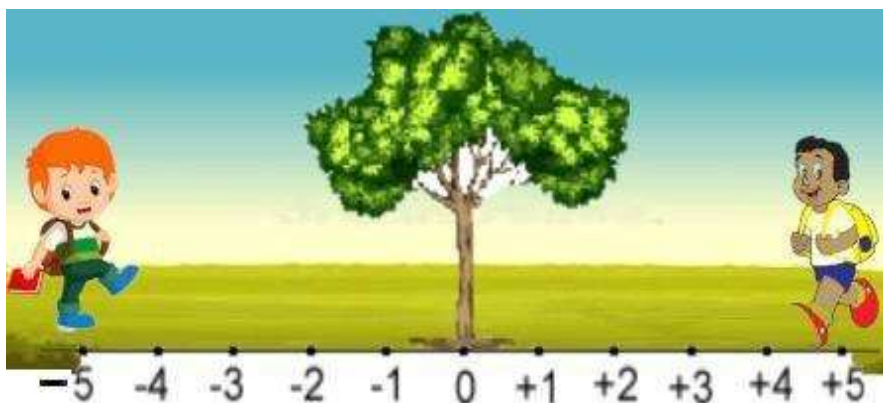
Portanto, as duas primeiras atividades dessa seção remetem a esses conceitos ao tratar de distâncias de elementos situados em posições opostas, com relação a um referencial (árvore na atividade 1 e casa de Isabel na atividade 2).

Por fim, na atividade 3 os estudantes devem realizar o que se pede em cada item com base nos conceitos de oposto e módulo na reta numérica. Também são trabalhados os conceitos de sucessor e antecessor a fim de começar a discussão da próxima seção inerente à comparação e à ordenação de Números Inteiros Relativos.

8.8 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre módulo ou valor absoluto de um número inteiro e conceito de oposto ou simétrico

Atividade 1 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Pedro e João estão caminhando em direção à árvore. Pedro está à direita da árvore, enquanto João está à esquerda, conforme podemos observar na figura a seguir. Observe atentamente a ilustração a seguir que representa a situação dada, e responda. Observação: Nessa atividade, cada ponto é igualmente espaçado pela mesma unidade de distância (distância de comprimento medindo 1 metro).

Figura 16: Pedro e João caminhando em direção à árvore



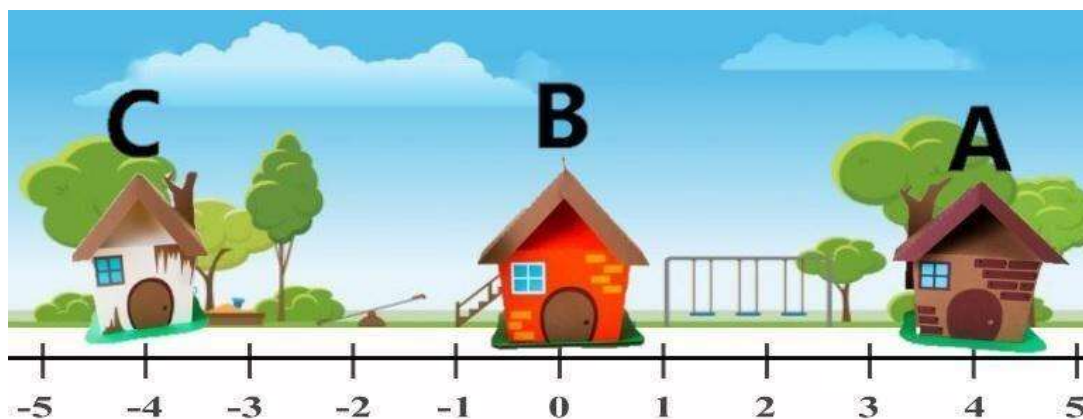
Fonte: elaborado no programa Residência Pedagógica

- Qual a distância, em metros, que Pedro deve percorrer para chegar até a árvore?
- Qual a distância que João deve percorrer para chegar até a árvore?
- Quem está mais distante da árvore? Justifique.
- Represente a posição de Pedro e de João em relação à árvore utilizando números e escrevendo sem utilizá-los.
- Em matemática, chamamos de módulo ou valor absoluto de um número inteiro a distância do ponto que representa esse número até a origem. Portanto, responda: qual o módulo de -5 e qual o módulo de 5?

(Ação do professor): o professor necessita finalizar a atividade com a definição de módulo. Nesse sentido, retomará as representações utilizadas nos itens de I a IV para chegar à definição matemática. Além disso, o professor pode utilizar essa atividade para a introdução ao conceito de oposto ou simétrico, uma vez que os números com sinais contrários que possuem o mesmo módulo são denominados de números opostos.

Atividade 2 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Na imagem a seguir, temos a representação das casas de 3 amigas, Joana, Isabel e Heloísa. Joana mora na casa A, que está situada à direita da casa de Isabel, que mora na casa B. A casa C é de Heloísa e, está à esquerda da casa de Isabel. Essas casas estão representadas como pontos na reta numérica a seguir.

Figura 17: Representação das casas de Joana, Heloísa e Isabel



Fonte: elaborada no programa Residência Pedagógica

A casa A está no ponto representado pelo número 4, a casa B no ponto que representa a origem e a casa C, é o ponto que está sobre o número -4 . Lembre-se de que: A origem na reta numérica é o zero e cada ponto é igualmente espaçado pela mesma unidade de distância (distância de comprimento medindo 1 metro).

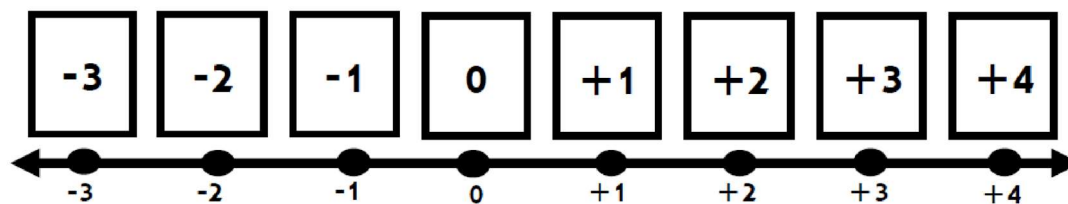
- a) Qual a distância, em metros, da casa B (origem) até à casa C?
- b) Qual a distância, em metros, da casa B (origem) até à casa A?
- c) O que você observa sobre a posição da casa A e da casa C em relação à casa B?
- d) Como podemos chamar a casa C em relação à casa A, pensando na casa B?
- e) A partir das respostas dos itens anteriores, responda:
 - qual é o número oposto ou simétrico de $+4$?
 - qual é o número oposto ou simétrico de -4 ?

(Ação do professor): o professor deve desenvolver com os alunos a ideia de oposição por meio da posição das figuras das casas na atividade. A partir disso, levar os estudantes a refletirem sobre o conceito de oposto ou simétrico no âmbito dos Números Inteiros Relativos.

Atividade 3 (Elaborada pelo pesquisador): Na reta numérica a seguir faça o que se pede:

- Pinte de verde a origem da reta numérica
- Pinte de azul: o oposto de -1 e o antecessor de zero
- Pinte de amarelo: o módulo de -2 e o oposto de 2

- Pinte de vermelho o simétrico de 3 e o oposto do oposto de 3
- Faça um círculo no sucessor de 3



(Ação do professor): discutir com os estudantes os conceitos de módulo, simétrico sucessor e antecessor no âmbito dos Números Inteiros Relativos. Ficar atento à compreensão dos alunos sobre a questão do “oposto do oposto” que é igual ao próprio número. Pode-se iniciar alguns aspectos envolvendo comparação e ordenação nesse conjunto para o trabalho na seção posterior.

8.9 Ordenação e comparação entre Números Inteiros Relativos

A ordenação e a comparação de Números Inteiros Relativos são temas que causam muitas dúvidas nos estudantes, pois muitos realizam as atividades como se estivessem lidando com números pertencentes ao conjunto dos naturais, levando a comparações em que só se considera o valor absoluto dos números (TEIXEIRA, 1993; BORBA, 2009). Decorre disso o surgimento, por parte dos estudantes, da utilização de esquemas de comparação entre Números Naturais, que não se aplicam aos Números Inteiros Relativos. Por exemplo: $-7 > -3$, pois $7 > 3$.

A origem dessa dificuldade não só acontece pelo fato de os alunos desconsiderarem o sinal do número, mas também remete ao obstáculo de unificação da reta numérica (GLAESER, 1985). Portanto, compreender que a reta numérica é um campo ordenado da esquerda para a direita é de extrema importância para o processo de aprendizagem dos Números Inteiros Relativos, principalmente com relação à ordenação e à comparação.

Assim sendo, com o intuito de explorar essas relações, elaboramos quatro atividades envolvendo a temática. Cabe ressaltar que as atividades serão expostas na próxima seção (8.9.1), porém a descrição e pressupostos teóricos que embasaram a construção das atividades encontram-se a seguir.

A primeira atividade envolvendo a temática ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos é inerente ao contexto bancário. Os estudantes devem comparar e

ordenar o saldo de três correntistas de um banco em datas diferentes, sendo que esses saldos variam entre positivos e negativos no decorrer dos dias citados.

Portanto, nessa situação-problema referente à primeira atividade há a possibilidade de se trabalhar com diversas situações de comparação no âmbito dos inteiros: entre números positivos (item a), negativos e positivos (itens a e c) e somente com inteiros negativos (item b). No item d) os estudantes são convidados a escrever suas estratégias para as comparações e ordenações propostas, possibilitando ao professor compreender a lógica de resolução dos alunos nesse tipo de atividade.

A atividade 2 refere-se às temperaturas mínimas em algumas capitais em um determinado dia do ano. Os estudantes devem verificar qual foi a maior e a menor temperatura registrada, comparar a temperatura entre duas capitais e ordenar os dados em uma reta numérica.

No que se refere à terceira atividade, os estudantes devem “conduzir o jogador de futebol até a taça”, seguindo o caminho que passa pelos números, porém deslocando-se sempre para um número maior que o anterior. Para isso, os estudantes devem comparar e ordenar os Números Inteiros Relativos presentes na atividade.

Por fim, na atividade 4 o contexto para comparação e ordenação é referente às temperaturas médias dos oito planetas do sistema solar que variam entre positivas e negativas. Os estudantes devem ordenar as temperaturas em ordem crescente e comparar a temperatura entre eles.

8.9.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre comparação e ordenação de Números Inteiros Relativos.

Atividade 1 (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de Araribá, 2018): Observe os extratos das contas-correntes de Paulo, Joana e Larissa.

Saldo da conta corrente de Paulo

Data	Histórico	Valor
2/11	Saldo	-250,00
5/11	Saldo	-356,00
12/11	Saldo	-525,00
15/11	Saldo	-98,00

Fonte: Adaptado de Araribá (2018)

Saldo da conta corrente de Joana

Data	Histórico	Valor
2/11	Saldo	535,00
5/11	Saldo	134,00
12/11	Saldo	56,00
15/11	Saldo	725,00

Fonte: Adaptado de Araribá (2018)

Saldo da conta corrente de Larissa

Data	Histórico	Valor
2/11	Saldo	723,00
5/11	Saldo	134,00
12/11	Saldo	-56,00
15/11	Saldo	-127,00

Fonte: Adaptado de Araribá (2018)

Agora responda às questões

- Segundo os extratos anteriores os em que dia os saldos de Paulo, Joana e Larissa estavam menores? E em qual dia estavam maiores?
- Ordene as informações contidas no extrato de Paulo do saldo menor para o saldo maior.
- No dia 15/11 quem estava com o menor saldo? E com o Maior?
- Como você fez para comparar os saldos de cada conta?

(Ação do professor): Perguntar para os alunos se eles já viram um extrato bancário e explicar como funciona. Também deve discutir as estratégias que cada estudante teve para comparar e ordenar os saldos das contas. Por fim, ficar atento aos possíveis erros de ordenação tanto por “esquecer” o sinal do número, como por não considerar a reta numérica dos inteiros como um campo ordenado da esquerda para à direita.

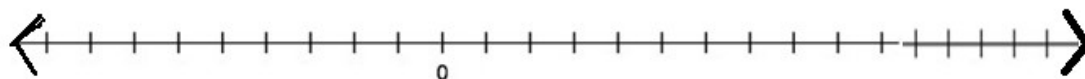
Atividade 2 (Elaborada pelo pesquisador): Diariamente muitos jornais publicam informações relacionadas ao tempo, como temperaturas, ventos, fusos horários, qualidade do ar, qualidade das praias. Veja, na tabela a seguir, algumas temperaturas em diversas cidades do mundo no inverno.

Temperaturas em algumas cidades do mundo no inverno

Cidades	Temperatura Mínima
Porto Alegre	12
Chicago	– 3
Montreal	– 6
Moscou	– 9
Nova Delhi	6
Roma	– 2
São Paulo	10
Seul	– 4
Viena	– 8

Fonte: Elaborado pelo autor

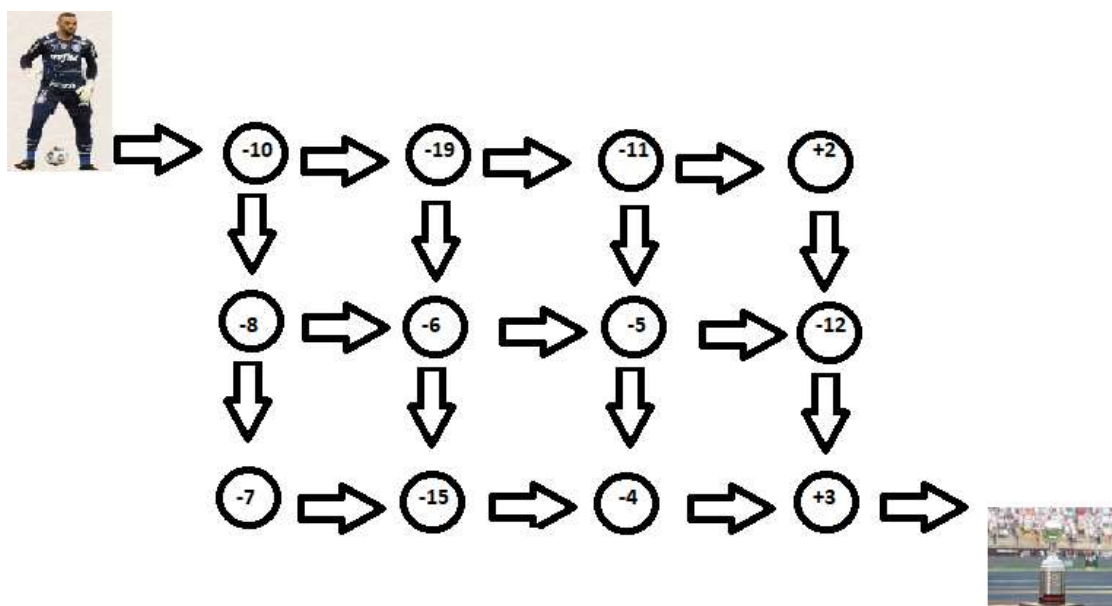
- a) Qual das cidades da tabela acima registrou a menor temperatura? E a maior temperatura ocorreu onde?
- b) A temperatura mínima de Viena é maior ou menor que a de São Paulo? Por quê?
- c) Represente as temperaturas da tabela anterior na reta numérica e responda: quais temperaturas estão à direita do 0 (origem) na reta? E à esquerda?



(Ação do professor): o professor deve questionar os estudantes sobre o modo que eles ordenaram as temperaturas presentes na atividade. Devem-se atentar aos possíveis erros na ordenação, verificando se os estudantes não estão desconsiderando o sinal do número inteiro e aplicando a lógica presente no conjunto dos naturais (por exemplo: “se 4 é maior que 3, -4 também é maior que -3”). Cabe ressaltar que o fato de uma temperatura menor representar “mais frio” também pode confundir os estudantes.

Atividade 3 (Elaborada pelo pesquisador): O jogador quer conquistar a taça, mas para que isso ocorra, precisa de sua ajuda para se deslocar até ela. Para alcançar esse objetivo ele só pode se deslocar seguindo o caminho que passa pelos números, porém andando sempre para um número maior que o anterior.

Figura 18: Caminho para o jogador chegar à taça



Fonte: elaborado pelo autor

- Pinte o trajeto que o jogador terá que fazer para chegar à taça.
- Ordene todos os números presentes na figura em ordem crescente.
- Explique qual estratégia você utilizou para levar o jogador à taça.

(Ação do professor): o professor deve questionar os alunos sobre qual estratégia foi utilizada para ordenar os números nesse “labirinto”, conduzindo o jogador à taça. Também deve ficar atento aos principais erros de ordenação no conjunto dos inteiros.

Atividade 4: (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de Realidade e Tecnologia, 2018) Você se lembra que no sistema solar há 8 planetas? Observe a temperatura média de cada um deles.

Temperaturas dos planetas do sistema solar

Planeta	Temperatura (em °C)
Júpiter	-150 °C
Marte	-53 °C
Mercúrio	420 °C
Netuno	-225 °C
Saturno	-180 °C
Terra	15 °C
Urano	-210 °C
Vênus	456 °C

Fonte: Adaptado de Realidade e Tecnologia (2018)

- Reescreva as temperaturas da tabela em ordem crescente.
- Quais planetas apresentam uma temperatura média positiva? E temperatura média negativa?
- Qual planeta apresenta a menor temperatura média: Júpiter ou Saturno?
- Quais planetas apresentam temperatura média entre -200 °C e 430 °C?

(Ação do professor): o professor deve questionar os alunos sobre as estratégias utilizadas para ordenar as temperaturas na atividade em questão. Também deve ficar atento aos possíveis erros cometidos pelos estudantes nesse processo.

8.10 Adição de Números Inteiros Relativos

Nas atividades referentes a esse tópico temos como objetivo que os estudantes compreendam que, no conjunto dos inteiros relativos, a adição não deve ser compreendida exclusivamente como um “aumento” ou “acrécimo”, pois teremos casos em que esta operação, representará um decréscimo ou resultará zero (TEIXEIRA, 1993, BORBA, 2009). Portanto, abordaremos, por meio das atividades, as seis relações de base para problemas de adição propostas nos trabalhos de Vergnaud (1981, 1986, 1990, 2009):

composição entre duas medidas em uma terceira, transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final, relação (quantificada) de comparação entre duas medidas, composição de duas transformações, transformação de uma relação e composição de duas relações.

A seguir, na subseção 8.10.1, apresentamos nove atividades referentes a esse tópico.

Na primeira o estudante deve utilizar a reta numérica para representar os deslocamentos de uma pessoa no elevador e, conseqüentemente, localizar os locais propostos na atividade. A partir disso, devem representar matematicamente o ponto de chegada com uma operação de adição envolvendo Números Inteiros Relativos.

Ressaltamos a ideia de acréscimo para justificar a adição, ou seja, o sinal de + (positivo), que não é o sinal do número. O deslocamento é sempre um acréscimo de unidades, que podem ter o sentido positivo ou negativo. Essa atividade é inerente à transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009)

Na atividade 2 também há a ideia de deslocamentos em determinados locais, representados por pontos da reta numérica. Nessa situação os deslocamentos devem ser representados por meio da operação de adição, com o intuito de levar os alunos a levantarem hipóteses para responder a seguinte questão: o que acontece quando somamos um Número Inteiro Relativo com seu oposto ou simétrico?

A atividade 3 apresenta a situação envolvendo um jogo que oportuniza aos estudantes realizarem operações de adição entre Números Inteiros Relativos para completarem uma tabela. Essa atividade permite explorar a ideia na qual em $\mathbb{Z}$, somar um número negativo, é o mesmo que subtrair seu oposto. Além disso, para concluir a atividade os estudantes devem responder algumas questões sobre a adição de Números Inteiros Relativos, tanto com sinais opostos, quanto com sinais iguais, podendo validar hipóteses com relação à referida operação.

Nesse caso, a relação de base que predomina na atividade é a composição entre duas medidas em uma terceira (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009), pois a união de pontos em cada rodada, resultam em uma totalidade que se pretende encontrar em cada item.

Na atividade 4 os estudantes devem descobrir a operação realizada por meio da observação de regularidades. A descoberta do padrão envolvido (adição, no caso), proporciona a possibilidade do preenchimento de cada bloco por meio da composição

entre duas medidas em uma terceira (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009). Após isso, os alunos devem refletir sobre a estratégia que os levou à conclusão da atividade.

A atividade 5 envolve a transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009). Nesse momento, os estudantes devem realizar as adições para encontrarem as temperaturas pedidas nos itens, considerando que eles conhecem a temperatura inicial, cada aumento ou diminuição representa uma relação entre o estado final e o inicial (temperatura antes e depois da transformação).

A atividade 6 diz respeito à composição de duas transformações e à relação de comparação (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009). Isso acontece pois, “ganhar pontos” representa uma transformação positiva, enquanto “perder pontos” é inerente a uma transformação negativa e a união delas dá lugar a quantidade de pontos finais de cada jogador, ou seja, a uma só transformação. O fato de comparecer na atividade um item que o estudante deve calcular quantos pontos um jogador fez a mais que outro, evidencia uma relação de comparação.

Já a atividade 7 é inerente à transformação de uma relação (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009). Nesse caso, pagar uma conta ou uma dívida concebe uma transformação que opera sobre um estado relativo, que pode ser representado por um saldo bancário ou dívida com uma pessoa. Tal transformação de uma relação dá lugar a somente uma relação (ainda dever dinheiro ao banco ou a pessoa).

A atividade 8 refere-se à composição de duas relações. Ao resolver essa situação os alunos encontram dois estados relativos, uma vez que uma pessoa deve dinheiro à outra. Ao realizar a adição, a composição desses estados relativos passa a dar lugar a um novo estado relativo, que na atividade é representado por uma pessoa ainda dever dinheiro ou ter crédito com a outra.

Por fim, a atividade 9 visa à sistematização da operação de adição. Por meio de uma tabela, os estudantes devem relacionar os números presentes nas linhas A e B e realizar as operações $A + B$ e $B + A$, proporcionando a adição entre dois números positivos, negativos e positivos com o zero, números com sinais opostos e envolvendo dois números negativos.

Com a exploração da propriedade comutativa da adição, os alunos podem perceber que adicionar um número positivo ao negativo resulta em um valor igual ao obtido se subtrair esse número negativo do positivo em questão, ou seja $-A + B = B + (-A) = B - A$. Além disso, também pode-se explorar a adição de dois números com sinais

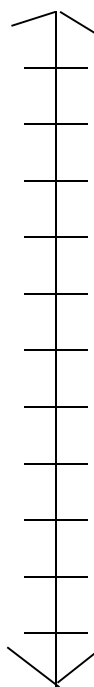
opostos, de um modo que leve o estudante a perceber que a soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se os valores absolutos, dando-se o sinal do número que tiver maior valor absoluto. Por fim, há a possibilidade de proporcionar ao estudante a compreensão de que a adição de dois números negativos pode ser calculada se somar os seus módulos e conservar o sinal negativo no resultado.

8.10.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre adição de Números Inteiros Relativos.

Atividade 1 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica):
Laura entrou no elevador do Shopping com o objetivo de ir ao cinema, mas antes precisava ir ao banco retirar o dinheiro para comprar seu ingresso. Laura estava no térreo, então desceu 2 andares para ir ao banco e, em seguida, subiu 6 andares para chegar ao cinema.

a) Utilize a reta numérica a seguir para representar os deslocamentos realizados por Laura sabendo que:

- Ela partiu do térreo (representado pelo ponto zero ou ponto de origem) e desceu 2 andares para chegar ao banco. Represente na reta numérica a posição do banco.
- Ela saiu do banco e subiu 6 andares para chegar ao cinema. Represente na reta numérica a posição do cinema.



b) Após representar os deslocamentos no item anterior, escreva em qual andar do Shopping encontra-se o cinema.

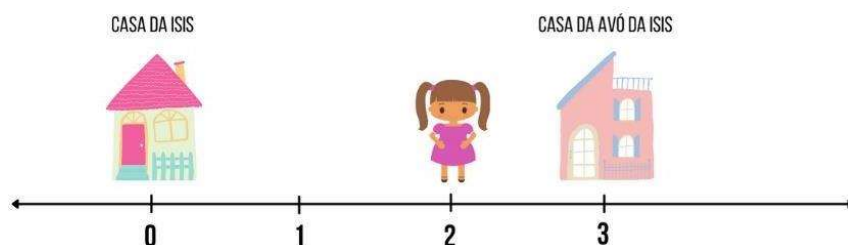
c) Como representar o andar do cinema utilizando Números Inteiros Relativos?

d) Seria possível, utilizando a linguagem matemática, escrever o ponto de chegada de Laura, ou seja, o andar onde se encontra o cinema como uma soma dos deslocamentos feitos por ela?

(Ação do professor): levar o estudante à compreensão de que os deslocamentos podem ser representados como uma adição. No caso da atividade em questão, deslocar-se “para baixo” é resultado de uma soma da posição inicial com um número inteiro negativo. Consequentemente, deslocar-se “para cima” indica uma soma da posição inicial com um número inteiro positivo.

Atividade 2 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Isis e sua avó moram na mesma avenida e todos os dias Isis vai visitá-la. A distância entre as duas casas é de 3 quilômetros. Ao final do dia, Isis foi visitar sua avó, mas após andar 2 quilômetros percebeu que havia esquecido o bolo que tinha feito para ela, então voltou para sua casa para buscá-lo.

Figura 19: Representação da casa de Isis e de sua avó na reta numérica



Fonte: elaborado no programa Residência Pedagógica

a) Associando a casa de Isis ao nosso ponto de origem, e sabendo que ela andou 2 quilômetros até perceber que havia esquecido o bolo, como representar este deslocamento utilizando um Número Inteiro Relativo?

b) Quando Isis retorna a sua casa para buscar o bolo, qual foi o sentido do percurso que ela fez em relação à casa de sua avó?

c) Como representar, utilizando Números Inteiros Relativos, o deslocamento realizado por Isis para buscar o bolo?

d) Após realizar o percurso de 2 quilômetros rumo à casa de sua avó e retornar 2 quilômetros no sentido de sua casa, qual foi o ponto de chegada de Isis?

e) Seria possível representar, utilizando Números Inteiros Relativos, o ponto de chegada do percurso realizado por Isis para buscar o bolo como uma soma de deslocamentos?

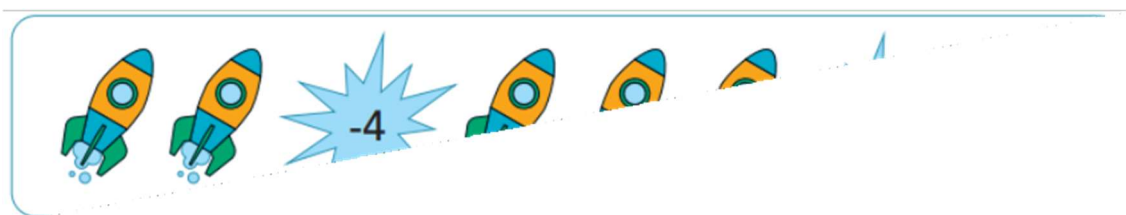
f) O que aconteceria se Isis caminhasse, no sentido da casa de sua vó, 5 quilômetros a partir de sua casa e depois tomasse a direção oposta e também caminhasse 5 quilômetros? Como representar o ponto de chegada de Isis utilizando Números Inteiros Relativos?

g) Após realizar o item anterior, responda: o que acontece quando somamos um número inteiro com seu oposto ou simétrico?

(Ação do professor): o professor deve trabalhar, principalmente com a ideia de oposição. Nesta atividade os sinais positivo e negativo representam o sentido do deslocamento. Quando Isis caminha uma determinada distância para um sentido e repete essa distância em sentido oposto, ela volta ao local de origem, o ponto zero, no caso. Diante disso, o professor deve levar o estudante a realizar uma síntese importante no caso da adição de inteiros: quando somamos um número inteiro com seu oposto, obtemos zero.

Atividade 3¹¹ (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Matheus ganhou um jogo em seu aniversário, onde acertando os foguetes, eles se transformam em valores que devem ser adicionados à pontuação de cada jogador. Números positivos representam pontos ganhos e números negativos representam pontos perdidos. O jogo termina quando o jogador atingir a pontuação mínima de +10 pontos.

Figura 20: Jogo dos foguetes



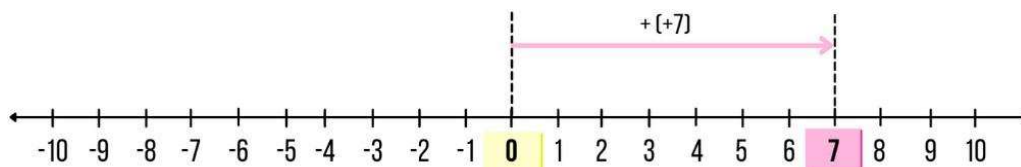
Fonte: Caderno do Professor (SP FAZ ESCOLA) do 7º ano - Volume 2

● 1ª rodada

¹¹ Atividade Adaptada do Caderno do Professor (SP FAZ ESCOLA) – 7º ano – Ensino Fundamental – Volume 2 – página 65 – atividade 4.2

Matheus iniciou a rodada com pontuação igual a 0 e acertou o foguete com o número +7.

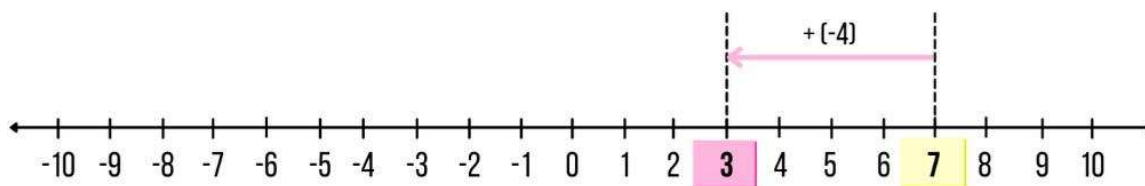
O que ocorreu com Matheus pode ser representado na reta numérica: partindo do ponto zero, podemos acrescentar um deslocamento de 7 unidades no sentido positivo, ou seja, 7 a mais que o zero.



Note que ao final desta rodada, a pontuação de Matheus é igual a _____

● **2ª rodada**

Uma nova jogada fez aparecer o número -4. Partindo do ponto +7, podemos acrescentar um deslocamento de 4 unidades no sentido negativo, ou seja, 4 a menos que o +7. Representando na reta numérica temos a seguinte situação.



Note que ao final desta rodada, a pontuação de Matheus é igual a _____

Agora é sua vez. Observe com atenção os dados que estão preenchidos na tabela a seguir e complete aqueles que estão faltando.

Situação – problema inicial.	Representação da adição entre a pontuação inicial de Matheus em cada rodada com o valor que aparece ao acertar um foguete.	Cálculo do resultado de cada uma dessas adições.
1ª rodada: Matheus iniciou Sem pontos e acertou o foguete +7.	$0 + (+7)$	$0 + (+7) = 0 + 7 =$
2ª rodada: Matheus estava com +7 pontos e acertou o foguete -4.		
3ª rodada: Matheus acertou o foguete -3.		
4ª rodada: Matheus acertou o foguete -6.		
5ª rodada: Matheus acertou o foguete -1.		
6ª rodada: acertou o foguete +10.		
7ª rodada: acertou o foguete +8.		

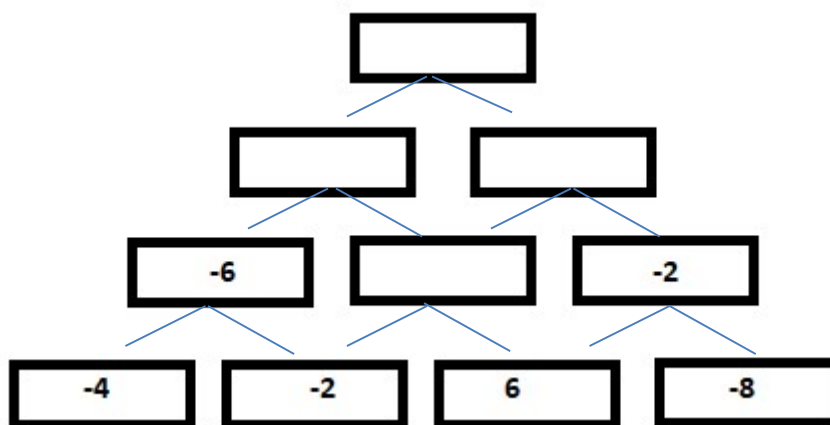
Após preencher com atenção os dados faltantes da tabela anterior, responda:

- O jogo termina na 7ª rodada? Justifique sua resposta.
- O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição entre 2 números inteiros positivos?
- O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição entre 2 números inteiros negativos?
- O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição entre 2 números inteiros com sinais diferentes?

(Ação do professor): Nesta atividade, o professor deve explorar diversas situações envolvendo adição de inteiros, tais como: soma de inteiros com sinais iguais e com sinais opostos. As questões propostas após o preenchimento da tabela podem colaborar para a reflexão envolvendo a operação de adição no âmbito dos **Números Inteiros Relativos**.

Atividade 4 (Elaborada pelo autor): A figura a seguir esconde uma operação misteriosa. Descubra o segredo, complete cada bloco com os números que estão faltando e responda à questão.

Figura 21: Blocos com a operação misteriosa



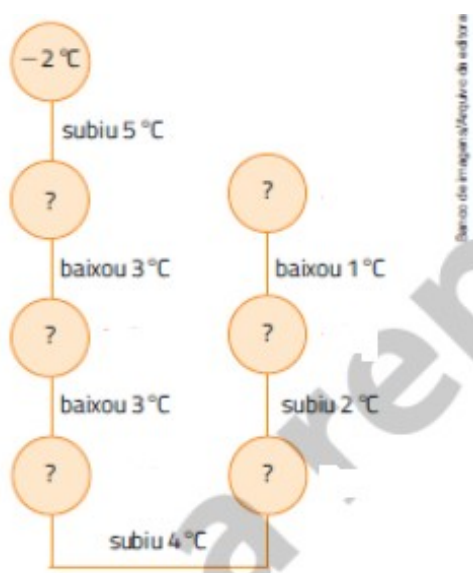
Fonte: Elaborado pelo autor

a) Qual é a operação misteriosa envolvida na atividade? Explique como você a descobriu.

(Ação do professor): o professor deve auxiliar os alunos na reflexão sobre a operação envolvida na atividade. Feito isso, deve observar se as adições estão sendo realizadas de maneira correta pelos estudantes.

Atividade 5: (Reelaborada pelo autor. Adaptada de Telaris, 2018) Para um experimento de Ciências, Lúcio mediu a temperatura do ambiente em 7 momentos de um dia e anotou-as como neste esquema. Observe o esquema e responda às questões.

Figura 22: Temperatura do ambiente



Fonte: Telaris (2018)

a) Substitua os sinais “?” pelas medidas de temperatura corretas.

b) Em seguida, registre matematicamente a operação para obter a última medida de temperatura registrada.

(Ação do professor): verificar o que os alunos compreendem pelas expressões “baixou” e “subiu” relacionadas às temperaturas. Explorar a operação de adição envolvendo Números Inteiros Relativos, inclusive quando há uma diminuição de temperatura (pode ser representada como uma adição de um número negativo).

Atividade 6 (Reelabora pelo autor. Adaptada de Matemática Bianchini, 2018): Lucas e Rafaela estão fazendo um jogo que tem as seguintes regras: Sorteia-se uma carta com 6 perguntas. O jogador escolhe 3 perguntas para que o adversário responda. A cada resposta correta, o adversário soma 3 pontos, e a cada resposta incorreta, somam-se -4 pontos. Lucas acertou 4 perguntas e errou 5. Rafaela acertou 5 e errou 4. Sendo assim, responda:

a) Quantos pontos Lucas fez? Como você representa matematicamente essa situação?

b) Quantos pontos Rafaela fez? Como você representa matematicamente essa situação?

c) Quantos pontos Rafaela fez a mais que Lucas?

(Ação do professor): verificar como os estudantes representam matematicamente as pontuações referentes às questões corretas e incorretas. Analisar as estratégias dos estudantes para a soma dos pontos de cada um, uma vez que a adicionar uma pontuação perdida aos pontos ganhos resulta em uma pontuação igual ao subtrair essa pontuação.

Atividade 7 (Reelaborada pelo autor. Adaptada de Araribá, 2018): Represente os valores a seguir com números inteiros e efetue as operações.

a) No dia 3, havia R\$ 120,00 em minha conta corrente. No dia seguinte, depusitei nela R\$ 85,00. Quanto tenho agora?

b) O saldo da conta corrente de Eva estava negativo em 95 reais. Depois de pagar uma dívida de 175 reais, que saldo Eva tem na conta corrente?

c) Alex devia 138 reais a Cintia e pagou 67 reais. Quanto ele ainda deve a ela?

(Ação do professor): com as situações descritas anteriormente, explorar às ideias de: adição envolvendo dois inteiros positivos (resulta em um número positivo), entre dois negativos (resulta em um número negativo) e entre números com sinais opostos (o sinal é determinado pelo número de maior módulo).

Atividade 8 (Elaborada pelo autor): No domingo, Pedro estava devendo R\$ 120,00 para sua amiga Isabela e na segunda-feira pegou mais R\$ 200,00 emprestado dela. Na terça-feira, o carro de Isabela quebrou e Pedro lhe emprestou R\$ 425,00 para o conserto.

a) Utilizando os Números Inteiros Relativos, represente a situação matematicamente.

b) Com relação a Pedro, Isabela está devendo ou está com crédito? De quantos reais?

(Ação do professor): verificar o que os estudantes entendem por “pegar emprestado”, que pode ser representado pela soma de uma dívida. Verificar as estratégias dos alunos para a resolução do item b), ou seja, analisar como eles fizeram para comparar as dívidas e como e a calcularam.

Atividade 9¹²: (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica) Relacione a coluna A com a coluna B, realizando as operações indicadas, completando a tabela. Após o preenchimento, responda as questões propostas.

A	B	A+B	B+A
19	7	$19+7=26$	$7+19=26$
-5	13		
-9	0		
-8	-12		
0	23		
11	-11		

a) O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição entre 2 números inteiros positivos?

b) O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição entre 2 números inteiros negativos?

¹² Questão 4.7 adaptada, SP faz escola: Matemática - 7º ano, volume 2

- c) O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição entre 2 números inteiros com sinais diferentes?
- d) O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição entre 2 números inteiros opostos ou simétricos?
- e) O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição de 0 com um número inteiro positivo?
- f) O que podemos concluir sobre o sinal do resultado de uma adição de 0 com um número inteiro negativo?

(Ação do professor): conduzir os estudantes na validação de hipóteses sobre as propriedades da adição envolvendo Números Inteiros Relativos, apresentando mais exemplos para auxiliar na discussão entre eles.

8.11 Subtração de Números Inteiros Relativos

Nesse tópico temos por objetivo salientar que nos Números Inteiros Relativos a subtração é uma operação sempre possível. Para tanto, devemos ampliar a compreensão do conceito de subtração com os Números Naturais em que a subtração está associada às ideias de “tirar” algo ou alguma quantidade, de comparar quantidades e de completá-las.

Portanto, se nos Números Naturais temos as ideias de tirar, de comparar e de complementar, no Conjunto $\mathbb{Z}$ a subtração determina, também, a ideia de operação inversa da adição (TEIXEIRA, 1993). Assim sendo, neste conjunto numérico quando pensamos em subtração, estamos relacionando com o conceito de “oposto de um número apresentado”. Em suma, estamos trabalhando com operadores negativos. Logo a ideia presente aqui é sobre números que operam com transformações de oposição. Por exemplo: $-(+7) = -7$, porque a subtração significa o oposto de 7 positivo, que é igual a 7 negativo e $-(-7) = +7$, porque a subtração significa o oposto de 7 negativo, que é igual a 7 positivo.

Na atividade 1 a ideia é trabalhar com uma variedade de situações que envolvem a subtração de Números Inteiros Relativos. Questionamentos que envolvem expressões de comparação como “quantos pontos um jogador tem a mais que outro” ou “quantos pontos faltam para vencer”, levam o estudante a realizar operação de subtração e exploram os significados inerentes à operação em questão.

No caso da atividade 2, os estudantes são levados a trabalhar com gastos e ganhos. A sistematização por meio de tabelas também se faz presente, corroborando a representação dos dados encontrados na atividade em linguagem matemática. O item

referente à “retirada de um gasto” visa o trabalho com a ideia de subtrair um número inteiro negativo, o que causa certa dificuldade para os estudantes (VERGNAUD, 2009; BORBA, 2009)

Nas atividades 3 e 4 o contexto para o trabalho com a subtração é o de temperatura. Isso exposto, a terceira situação-problema refere-se à variação de temperatura, ou seja, a subtração entre a temperatura final e a inicial. Nesta atividade, os estudantes devem calcular tal variação e utilizar a linguagem matemática para a representação da operação envolvida, no caso, a subtração. Já na quarta atividade, os estudantes podem perceber a operação de subtração envolvida na situação ao representarem a “queda de temperatura” nos termômetros.

Na atividade 5 as operações envolvem o contexto de datas antes de Cristo. Assim sendo, considerando o ano de nascimento o estado inicial, a quantidade de anos vividos a transformação e o ano de morte o estado final, temos, de acordo com Vergnaud (2009), três categorias de problemas:

- A partir do estado inicial e da transformação, encontrar o estado final;
- A partir da transformação e do estado final, encontrar o estado inicial;
- A partir dos estados final e inicial, encontrar a transformação.

Portanto, o item a) remete ao cálculo da transformação pela diferença entre o estado final -196 e o estado inicial -276. Já em b), há o cálculo do estado inicial pela inversão da transformação direta +74 e aplicação da transformação inversa -74 ao estado final -497.

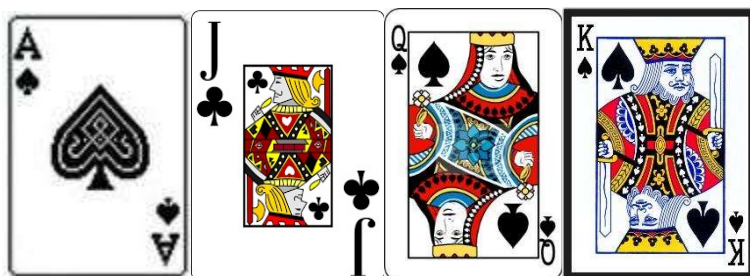
A atividade 6 trabalha a subtração de números inteiros em uma sequência numérica. Ao descobrirem o padrão que condiciona os elementos da sequência é uma subtração, os estudantes podem encontrar os demais termos pedidos nas atividades.

Por fim, na sétima atividade o contexto escolhido foi o bancário. No item a) os estudantes devem compreender que as dívidas são representadas por números negativos, enquanto os créditos por positivos. Assimilando essas ideias, podem perceber que a soma de duas dívidas resulta em uma dívida, e consequentemente, que a adição de dois números negativos resulta em um número negativo. Já no item b) a partir de uma subtração dos estados final (saldo depois do depósito) e inicial (saldo antes do depósito) os estudantes devem encontrar a transformação (valor depositado) (VERGNAUD, 2009). Ao realizarem essa operação os alunos podem perceber que subtrair um valor negativo pode ser escrito como uma adição desse valor.

8.11.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre subtração de Números Inteiros Relativos

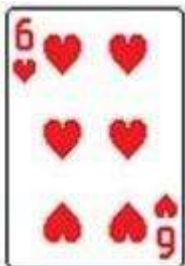
Atividade 1 (Elaborada em Parceria com o Programa Residência Pedagógica): Ana e Luiz estavam jogando um jogo com cartas em que a regra era bem simples: ao retirar duas cartas do baralho, primeiramente o jogador deveria somar o valor da primeira carta ao seu saldo atual. Depois, o jogador deveria subtrair desse saldo o valor da segunda carta, uma vez que todos os participantes começavam com pontuação igual a 0. Seria vencedor quem fizesse primeiro uma pontuação mínima de 10 pontos.

Para a realização deste jogo, consideraram-se as cartas de Ás (A), Valete (J), Rainha (Q) e Rei (K) valendo 1, 11, 12 e 13 pontos, respectivamente.



Ao final da primeira rodada, Ana e Luiz tiraram as seguintes cartas:

Figura 23: Cartas de Ana e Luiz

Cartas de Ana		Cartas de Luiz	
			

Fonte: Programa Residência Pedagógica

Sendo assim, a pontuação de Ana foi de +2 e a de Luiz foi +7. A tabela a seguir mostra a pontuação dos dois participantes ao final das quatro primeiras rodadas de uma partida. Por meio das informações apresentadas, preencha o restante da tabela.

	1ª rodada	2ª rodada	3ª rodada	4ª rodada
Pontuação de Ana	+2	-2	-3	-2
Pontuação de Luiz	+7	+1	0	-1
Quanto pontos Luiz tem a mais do que Ana em cada rodada?				
Quanto pontos faltam para Ana atingir a pontuação final e ser vencedora?				
Quanto pontos faltam para Luiz atingir a pontuação final e ser vencedor?				
Ao tirar um ponto de Luiz em cada rodada, qual seria sua nova pontuação?				

(Ação do professor): o professor deve explorar os significados inerentes à subtração: tirar, comparar e completar. Expressões como “tem a mais”, “faltam” e “tirar”, presentes na atividade em questão colaboram para a abordagem de tais significados.

Atividade 2¹³ (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Na aula de Educação Financeira, Giovana está aprendendo a organizar seus gastos. Ela elaborou uma planilha eletrônica com os gastos do mês de maio.

¹³ Questão 4.6 adaptada, SP faz escola: Matemática - 7º ano, volume 2.

Figura 24: Despesas de Giovana

Despesas mensais – Maio	
Lanche	R\$ 12,00
Lazer	R\$ 10,00
Revistas	R\$ 8,00
Diversos	R\$ 9,00
Saldo	

Fonte: Questão 4.6, SP faz escola: Matemática - 7º ano, volume 2.

Além dos gastos indicados na planilha, ela esqueceu de incluir R\$15,00 referente à compra de um presente de aniversário de sua mãe.

- Sabendo que ela ganhou R\$50,00 de mesada, calcule o saldo de Giovana.
- O valor da mesada será suficiente para pagar todos os gastos?
- Agora, preencha a tabela a seguir.

Escrita utilizando a linguagem materna	Representação na linguagem matemática
Ganho de 50 reais de mesada	
Despesas mensais de 39 reais	
Gasto extra na compra de um presente que custou 15 reais	
Gasto de 15 reais somado ao total de despesas de Giovana	
Gasto total de 54 reais	

Ao chegar em casa, Giovana percebeu que o presente estava com defeito e voltou à loja para realizar a troca. Como não havia mais produtos iguais ao que Giovana comprou

no estoque, a loja devolveu para ela o dinheiro da compra. Escreva como podemos representar essa retirada de uma dívida do saldo de Giovanna e calcule seu novo saldo.

(Ação do professor): nessa questão alguns aspectos referentes à subtração envolvendo Números Inteiros Relativos podem ser explorados pelo professor, tais como: diferença entre um número positivo (valor da mesada) e um negativo (gastos de Giovana) e oposição de uma dívida (estorno).

Atividade 3¹⁴ (Reelaborada pelo pesquisador): No final do outono em São Paulo, a temperatura era de 20°C. Com a entrada de uma frente fria, a temperatura baixou para 9°C.

a) Calcule a variação de temperatura em São Paulo no final de outono. Explique qual operação você utilizou para calcular essa variação.

b) Calcule a variação de temperatura registrada em um certo dia de inverno em Pequim, capital da China, onde ao amanhecer os termômetros marcavam -2°C e no início da tarde +10°C. Explique qual operação você utilizou para calcular essa variação.

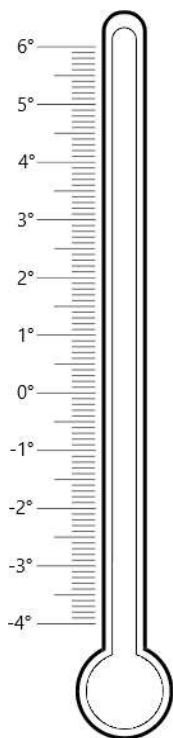
(Ação do professor): Na presente atividade, o professor deve verificar o que os estudantes entendem por variação de temperatura e qual operação utilizam para calculá-la. O sinal do número que inerente à variação também deve ser discutido, por exemplo, com relação à cidade de São Paulo, apesar das duas temperaturas serem acima de zero, a temperatura diminuiu, logo a variação deve ser representada por um número inteiro negativo. O contrário ocorre em Pequim, em que a temperatura aumentou ao longo da tarde e, portanto, a variação foi positiva, sendo concebida por um número inteiro maior que zero.

Atividade 4¹⁵ (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica). Na cidade de São Joaquim, a temperatura era de 4°C ao anoitecer. Durante a madrugada, a temperatura teve uma queda de 6°C. Utilizando um lápis colorido, marque no termômetro 1, a temperatura inicial de 4°C e a queda de 6°C. No termômetro 2, registre a nova temperatura encontrada após esta queda de 6°C.

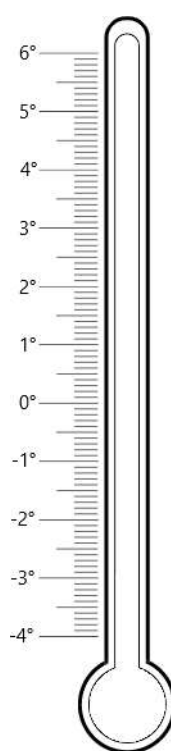
¹⁴ Questão 3.6 adaptada, SP faz escola: Matemática - 7º ano, volume 2.

¹⁵ Questão 3.9 adaptada, SP faz escola: Matemática - 7º ano, volume 2

Termômetro 1:



Termômetro 2:



a) Represente, utilizando Números Inteiros Relativos, a nova temperatura registrada.

b) Seria possível escrever uma subtração de números inteiros para registrar na linguagem matemática esta queda de temperatura?

(Ação do professor): verificar como os estudantes representaram a diminuição da temperatura e a nova temperatura registrada, tanto no termômetro, quanto em linguagem matemática.

Atividade 5: (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de Araribá, 2018) calcule o que se pede.

a) O primeiro matemático da Antiguidade a medir a circunferência da Terra foi Eratóstenes. Ele nasceu no ano 276 a.C. e morreu em 196 a.C. Quantos anos Eratóstenes viveu?

b) Pitágoras viveu 74 anos. Se ele morreu em 497 a.C., em que ano nasceu?

(Ação do professor): Verificar como os alunos estão representando matematicamente e realizando as operações propostas. Caso necessário, propor que

eles representem as situações em retas numéricas, com o intuito de facilitar a visualização de cada item.

Atividade 6 (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de Matemática e Tecnologia, 2018) A professora do 7º ano pediu aos alunos que escrevessem uma sequência de oito números. Observe a sequência que Renato fez.

84, 64, 44, 24, 4, -16, -36, -56

- a) Essa sequência é crescente ou decrescente?
- b) Explique como você acha que Renato pensou para escrever essa sequência.
- c) De acordo com a resposta do item c, quais seriam os próximos dois números dessa sequência?

(Ação do professor): conversar com os alunos a fim de identificar se eles perceberam que, ao adicionar -20 ou subtrair 20, obtém-se o próximo número da sequência, a partir de 84.

Atividade 7 (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de SP faz escola 3.7. e 3.8) Responda às atividades:

- a) Luciano fez uma dívida de R\$ 50,00 e outra de R\$ 96,00, ambas para serem pagas no próximo mês. Quanto ele está devendo? Como você representaria matematicamente a operação envolvida?
- b) O gerente do banco informou a Eduardo que sua conta estava com saldo negativo de R\$ 130,00. Ele fez um depósito e seu saldo agora é de R\$ 64,00. Qual foi o valor depositado? Como você representaria matematicamente a operação envolvida?

(Ação do professor): analisar como os estudantes representam matematicamente as duas situações apresentadas. Verificar se os alunos entenderam que a soma de dois números negativos, resulta em um negativo (item a) e que subtrair um número negativo é o mesmo que somar esse número (item b).

8.12 Multiplicação de Números Inteiros Relativos

A multiplicação no Conjunto dos Números Naturais representa uma adição de parcelas iguais, já nos inteiros, além de conferir esse significado, também concebe operações de transformação, fazendo manter ou inverter a posição do número na região a que pertenciam (Exemplo: $-2 \times (+5) = -10$) (TEIXEIRA, 1993; VERGNAUD, 1986, 2009).

Sabemos que o uso do princípio multiplicativo é difícil e envolve o domínio de várias situações que ultrapassam a identificação da multiplicação como a adição de parcelas iguais. Portanto, assimilar que a multiplicação tem vários significados é um obstáculo que faz com que os alunos apresentem dificuldades nessa operação (VERGNAUD; 1983, 2009).

Neste âmbito, Teixeira, Vasconcellos e Guimarães (2009) ressaltam que a multiplicação é uma operação complexa e requer processos cognitivos abstratos, os quais o professor precisa conhecer para interpretar e direcionar a aprendizagem do estudante na sala de aula.

Nesse sentido, as atividades envolvendo multiplicação de inteiros têm por objetivo explorar as regularidades da operação para que os estudantes construam a regra que envolve o produto entre dois números com sinais opostos e entre dois números negativos. Conforme salienta Ponte (2009), o trabalho com regularidades, segundo regras que os estudantes podem formular por si próprios, corrobora o desenvolvimento da capacidade de abstração e contribui para a formação do pensamento algébrico.

Na atividade 1 os estudantes devem realizar multiplicações que envolvem Números Inteiros Relativos, ao passo que, cada questão correta tem o valor de 10 pontos, enquanto, cada questão errada, perdem-se 15 pontos. Assim sendo, para calcular a pontuação final, os alunos devem resolver uma multiplicação envolvendo dois números positivos e outra multiplicação entre dois números de sinais opostos. Portanto, nessa questão é abordada a proporção simples (VERGNAUD, 2009), pois há correspondências entre os pontos ganhos e perdidos e a pontuação total, ou seja, sabe-se o valor de uma questão correta ou errada e a partir da multiplicação (valor de cada acerto ou erro x quantidade de acertos ou erros) dessas informações, encontra-se a pontuação total.

No caso da atividade 2, há uma questão que os estudantes são levados a elaborar uma tabela de multiplicação de números inteiros que tem como resultado -24. Nesse caso, os estudantes devem utilizar números com sinais opostos, já que o resultado deve ser um número negativo.

Na atividade 3 utilizamos a tabela de multiplicação para explorar todas as situações envolvendo a multiplicação de Números Inteiros Relativos: entre dois números negativos, entre números de sinais opostos e entre zero e um inteiro qualquer. O fato de a atividade conter a propriedade comutativa, viabiliza a ideia de que a multiplicação de dois números de sinais opostos sempre resulta um número negativo, não importando a ordem dos fatores.

A atividade 4 requer que o estudante realize multiplicações entre o número de tampinhas e a pontuação que cada uma representa. Acreditamos que a ideia de trabalhar com pontos ganhos e pontos perdidos, pode colaborar com a aprendizagem da multiplicação entre números com sinais iguais e entre números com sinais opostos.

Na atividade 5, por meio da observação das regularidades das sequências numéricas construídas, os estudantes podem completar as tabelas com os produtos dos negativos pelos positivos e dos negativos pelos negativos, mantendo o padrão numérico observado (adicionar 2, no caso). A partir disso, os alunos podem inferir sobre o resultado da multiplicação de um número negativo por um positivo e entre dois números negativos.

A atividade 6 leva em consideração o isomorfismo de medidas (VERGNAUD, 2009). Para encontrar a quantidade de pontos ganhos, os estudantes devem relacionar a quantidade de “caras” (4) que saíram nas rodadas com o respectivo valor de cada uma (+7). De maneira análoga, para calcular a quantidade de pontos perdidos, devem relacionar quantas coroas saíram nas rodadas (11) com o valor de cada uma (-9).

Na atividade 7, os estudantes devem descobrir qual é o padrão numérico apresentado na figura, para que assim possam realizar os cálculos para encontrarem o número que é solicitado. Nessa atividade os estudantes utilizarão a multiplicação de dois números com sinais iguais e com sinais opostos.

Por fim, na atividade 8 há a correspondência de medidas. Em cada item são tratadas medidas de profundidade, inerente aos números negativos e altitude, que se refere a números positivos. Assim sendo, para resolverem as situações propostas, os estudantes devem relacionar as multiplicações de medidas de diferentes naturezas.

8.12.1 Atividades a serem desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre multiplicação de Números Inteiros Relativos

Atividade 1 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): A professora Eliane promoveu uma gincana de matemática para sua turma. A regra da gincana diz que, ao acertar a resposta, o participante ganha 10 pontos, e perde 15 pontos em caso de erro. A turma da professora Eliane acertou 20 das 60 questões. Qual foi a pontuação final da turma da professora Eliane? Explique sua resposta.

(Ação do professor): na atividade, o professor deve explorar a representação, por meio de Números Inteiros Relativos, de cada situação envolvida: ganhar 10 pontos (+10) e perder 15 pontos (-15), no caso. Além da multiplicação de números inteiros com sinais iguais, há também a possibilidade do trabalho com essa operação

envolvendo números com sinais opostos. Para o cálculo da pontuação final os alunos devem recorrer à adição entre pontos ganhos e pontos perdidos.

Atividade 2 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Flávia utilizou a calculadora e realizou uma multiplicação e o resultado registrado no visor foi -24 . Elabore uma tabela com todas as situações envolvendo números inteiros em que a multiplicação resulte em -24 .

(Ação do professor): discutir com os estudantes todas as situações que envolvem a multiplicação em questão. Levar os alunos a compreenderem que os números que multiplicados resultam em um inteiro negativo devem ter sinais opostos.

Atividade 3¹⁶(Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Relacione a coluna A com a coluna B, realizando as operações indicadas, completando a tabela.

A	B	A x B	B x A
8	-2	$8 \cdot (-2) = -16$	$(-2) \cdot 8 = -16$
5	5		
6	-1		
-4	2		
-10	-5		

Fonte: Programa Residência Pedagógica

Agora, responda as questões.

- O que podemos concluir sobre a multiplicação de um número positivo por um número negativo?
- O que podemos concluir sobre a multiplicação do zero por um número negativo? E por um número positivo?
- O que podemos concluir sobre a multiplicação de dois números negativos?

(Ação do professor): o professor, nesta atividade, deve incentivar os estudantes à reflexão sobre a multiplicação entre dois números inteiros positivos, negativos e com sinais opostos. O preenchimento da tabela pelos alunos em conjunto com as respostas dos itens a), b) e c) presentes na questão podem auxiliar no processo de reflexão e sistematização das regras de sinais da multiplicação.

¹⁶ Adaptada- Situação de aprendizagem 2- SP FAZ ESCOLA

Atividade 4 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Yara e Tobias estão brincando com um alvo feito de materiais recicláveis. Na brincadeira, colocam o alvo no chão e cada um lança seis tampinhas a certa distância. Cada tampinha que parar na região verde do alvo indica 2 pontos ganhos (+2) e, na região azul, 4 pontos perdidos (-4). Observe as tampinhas lançadas por Yara na primeira partida (figura ao lado). Na vez de Tobias, ele acertou 5 tampinhas na região verde e 1 tampinha na região azul. Ajude Yara e Tobias a preencher a tabela a seguir.

Figura 25: Jogo entre Yara e Tobias



Fonte: Programa Residência Pedagógica

	YARA	TOBIAS
QUAL A QUANTIDADE DE TAMPINHAS NA REGIÃO VERDE?		
QUANTOS SÃO OS PONTOS GANHOS POR CADA TAMPINHA QUE ESTÁ NA REGIÃO VERDE?		
QUAL É A PONTUAÇÃO OBTIDA NA REGIÃO VERDE?		
QUAL A QUANTIDADE DE TAMPINHAS NA REGIÃO AZUL?		
QUANTOS SÃO OS PONTOS GANHOS POR CADA TAMPINHA QUE ESTÁ NA REGIÃO AZUL?		
QUAL É A PONTUAÇÃO OBTIDA NA REGIÃO AZUL?		
QUAL É A PONTUAÇÃO TOTAL? (PONTUAÇÃO NA REGIÃO VERDE + PONTUAÇÃO NA REGIÃO AZUL)		
QUAL É A REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DESTA PONTUAÇÃO TOTAL		

(Ação do professor): na atividade, o professor deve ressaltar que o preenchimento da tabela é necessário para que os estudantes possam calcular os resultados dos pontos ganhos e perdidos no jogo por meio de multiplicação de inteiros. Deve ficar atento à maneira que os alunos estão representando matematicamente cada elemento descrito na tabela: pontos ganhos devem ser representados por números positivos, enquanto pontos perdidos por números negativos.

Atividade 5 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica):

Observe as tabelas a seguir e termine de completá-las. Após isso, responda às questões

2 X	+3	$2 \times (+3) = (+3) + (+3) = +6$
	+2	
	+1	
	0	
	-1	
	-2	
	-3	

X	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
-2	-6	-4	-2				

- A partir das respostas encontradas na sequência (ou seja, -6,-4,-2, ...) presente na tabela anterior, o que você observa que está acontecendo?
- Ainda sobre essa sequência, qual o número que viria após o (+6)? E depois?
- O que podemos concluir sobre a multiplicação de um número positivo por um número negativo?
- O que podemos concluir sobre a multiplicação do zero por um número negativo? E por um número positivo?
- O que podemos concluir sobre a multiplicação de dois números negativos?

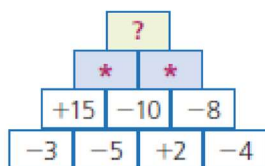
(Ação do professor): Após propor o preenchimento das tabelas propostas, o docente deve discutir com os estudantes sobre as propriedades da multiplicação envolvendo números inteiros. Deve ficar atento à maneira que os alunos percebem os padrões propostos na atividade, para que no momento da discussão, possa validar as hipóteses que eles apresentem.

Atividade 6: (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de Bianchini, 2018)
Roberto lançou 15 vezes uma moeda e obteve os seguintes resultados: 4 caras e 11 coroas. Para cada cara, Roberto ganha 7 pontos e, para cada coroa, perde 9 pontos.

- a) Represente com um Número Inteiro Relativo o total de pontos ganhos e o total de pontos perdidos.
- b) Crie uma expressão matemática que forneça o saldo de pontos obtidos por Roberto.
- c) Qual foi o saldo de pontos obtidos por Roberto nessa jogada?
- d) Qual é a pontuação máxima que Roberto poderia conseguir? E a mínima?

(Ação do professor): nessa atividade, o professor deve atentar-se ao modo que os estudantes representam com números inteiros cada situação proposta. Lembrar os estudantes que “perder pontos” pode ser representado pela adição de um número negativo.

Atividade 7: (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de A conquista da Matemática, 2018) Descubra o segredo da figura e dê o número inteiro que deve estar no quadrinho que se encontra no topo, o qual possui o sinal de ?. Lembre-se de escrever como você descobriu!



(Ação do professor): verificar como os estudantes descobriram o padrão proposto na atividade. Se perceber dificuldade, dar dicas (sem falar a operação envolvida) sobre a construção do padrão, para que os alunos possam encontrar a operação que relaciona os números na figura e avançar na resolução da situação-problema.

Atividade 8 (Elaborada pelo pesquisador): Represente cada uma das situações a seguir por meio de uma operação com números inteiros e, depois, responda às questões.

- a) Um submarino estava na superfície do mar quando começou a descer 100 m a cada intervalo de meia hora. Após 2 horas, a quantos metros abaixo do nível do mar o submarino se encontrava?
- b) Um avião voava à altitude de 500 m. Para escapar de uma tempestade, o piloto começou a subir 25m a cada minuto. Que altitude o avião atingiu após 8 minutos?

c) César pratica salto ornamental. De um trampolim que está a 1 m do nível da água ele salta e consegue descer, abaixo do nível da água, até 3 vezes essa distância. A que profundidade César consegue descer?

(Ação do professor): verificar como os alunos representam matematicamente as situações descritas. Caso haja dificuldade dos alunos, sugerir que os estudantes representem cada item em forma de desenho ou na reta numérica, visando à compreensão e resolução das atividades propostas

8.13 Divisão de Números Inteiros Relativos

Nessa sequência de atividades o objetivo é construir com os estudantes hipóteses sobre o sinal do quociente obtido na divisão de dois Números Inteiros Relativos, utilizando a ideia de que multiplicação e divisão são operações inversas. Para tanto, trabalharemos com atividades que evidenciam a divisão com dois significados: partição equitativa e medida.

Na atividade 1, por exemplo, a partição equitativa se faz presente, pois devemos dividir o preço da televisão pela dada quantidade de parcelas e encontrar o valor de cada uma delas.

Já as atividades 2 e 3, além de abordarem a partição equitativa, também envolvem o significado de medida, no momento que se objetiva encontrar o número de parcelas, porque o valor de cada uma delas já é conhecido. Ao abordar elementos como a “metade da dívida” a ênfase é em uma comparação multiplicativa (VERGNAUD, 2000)

Por fim, a atividade 4 envolve a divisão de Números Inteiros Relativos. A tabela a ser completada pelos estudantes proporciona elementos para discussões posteriores sobre o resultado da divisão entre dois números de sinais opostos e com sinais iguais.

8.13.1 Atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano da educação básica sobre divisão de Números Inteiros Relativos

Atividade 1 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): Roberto, pai de um aluno do 7º ano, deseja muito adquirir uma nova televisão. Ele pesquisou e encontrou uma oferta imperdível; a televisão que estava procurando por R\$1.300,00, podendo ser paga em 4 vezes fixas e sem juros. Chegando em casa reuniu a família e explicou a situação. Roberto ganha em seu trabalho o valor de R\$1.800,00 por mês e a soma de todas as despesas é de R\$1.500,00.

Agora é a sua vez....

Pense e responda:

- a) Utilizando Números Inteiros Relativos represente a nova dívida que Roberto irá fazer comprando a TV?
- b) Se R\$1300,00 é uma dívida a ser assumida por Roberto, quanto será a dívida de cada parcela?
- c) O salário de Roberto será suficiente para pagar as despesas mensais e mais a prestação da TV? Por quê?

(Ação do professor): levar o estudante a perceber que o quociente da dívida pelo número de parcelas é representado por um número inteiro negativo, já que se refere ao valor da parcela a ser paga. Isso é resultado de uma divisão entre um número negativo, que representa a dívida e um positivo, inerente à quantidade de parcelas.

Atividade 2 (Elaborada em parceria com o Programa Residência Pedagógica): A professora Érica propôs a seguinte situação-problema dividida em duas partes. Alice, mãe de uma aluna do 7º ano faz bombons deliciosos para serem vendidos na cantina da escola.

a) Na primeira semana de agosto, ela teve um lucro de R\$100,00 dessa venda de bombons e pretende dividir esta quantia entre seus 5 filhos de modo que todos eles recebam o mesmo valor. Quanto cada filho irá receber?

b) Depois de algumas semanas, num dia de muito calor, Alice acabou perdendo sua produção de bombons que derreteram e não puderam ser vendidos. Esta perda gerou para Alice, um prejuízo de R\$300,00. Ela pediu um empréstimo para sua irmã, pois não contava com a falta deste dinheiro naquele momento. Em quantas parcelas Alice deverá dividir esse prejuízo, de modo que em cada uma delas o valor a ser pago seja de R\$60,00? Como esta situação pode ser representada com Números Inteiros Relativos?

c) Para formalizar os conceitos a professora pediu aos alunos que após a resolução das situações (A) e (B) os valores, operações e resultados fossem apresentados na forma de uma tabela. Sendo assim, preencha a tabela a seguir.

Resumo da Situação-Problema	O que é pedido?	Qual Operação Matemática deve ser usada nesta Situação?	Indicação da Operação	RESULTADO
-----------------------------	-----------------	---	-----------------------	-----------

LUCRO DE 100 REAIS A SER DIVIDIDO IGUALMENTE ENTRE 5 FILHOS				
PREJUÍZO DE 300 REAIS PARA SER PAGO EM PARCELAS DE 60 REAIS CADA				

(Ação do professor): o trabalho do professor nessa questão é levar o estudante a entender a divisão entre dois inteiros negativos: “menos com menos, sendo igual a mais”. Para tanto, o prejuízo e o valor das parcelas são negativos. Ao realizarem a divisão, a quantidade ou o número de parcelas resultantes, por ser uma contagem, é representada por um número inteiro positivo.

Atividade 3: (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de Realidade e Tecnologia, 2018) Júlia não controlou bem suas despesas e o saldo bancário de sua conta ao final de janeiro ficou em -R\$636,00, ou seja, saldo negativo. Após planejar melhor seus gastos, conseguiu que o saldo da conta, ao final de fevereiro, correspondesse à metade daquele do mês anterior.

a) Qual foi o saldo da conta bancária de Júlia ao final de fevereiro? Represente matematicamente essa situação.

b) Em março, o banco propôs um acordo para que Júlia pagasse a sua dívida: parcelas de R\$53,00 por mês sem juros. Se Júlia aceitar o acordo, em quantos meses terminaria de pagar a dívida do final de fevereiro? Represente matematicamente essa situação.

(Ação do professor): reforçar para os estudantes que tanto a dívida total, quanto o valor das parcelas, devem ser representadas por números negativos. Já o número de parcelas, por um valor positivo, já que não existe quantidade negativa de parcelas.

Atividade 4: (Reelaborada pelo pesquisador. Adaptada de SP faz escola) Relacione a coluna A com a coluna B, realizando a operação indicada, completando a tabela. Após isso, responda às questões.

A	B	A : B
----------	----------	--------------

8	-2	
5	-5	
6	-1	
-12	2	
-21	3	
-28	7	
-10	-5	
-8	-2	
-6	-1	
0	-2	
10	2	
0	10	

a) A divisão exata de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo resulta em um número inteiro positivo ou negativo?

b) Qual é o resultado da divisão de zero por um número inteiro negativo?

c) Em uma divisão exata de números inteiros, os dois números possuem o mesmo sinal. Essa divisão tem como resultado um número inteiro positivo ou negativo?

d) Qual é o resultado da divisão de zero por um número inteiro positivo?

(Ação do professor): levar os estudantes a discutirem aspectos relacionados à divisão exata entre inteiros. Propor mais exemplos desse tipo de divisão para que os alunos possam validar as hipóteses levantadas na discussão.

9 OS RESULTADOS DA PESQUISA

Neste capítulo, iniciamos a discussão e a análise dos dados levantados sobre o objeto de estudo aqui proposto. Para tanto, dividimos os resultados da pesquisa em oito eixos de análise que serão abordados nas seções a seguir: Significado de Número Inteiro Relativo, Número Inteiro Relativo e sua representação na reta numérica, Módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo, Ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos, Adição de Números Inteiros Relativos, Subtração de Números Inteiros Relativos, Multiplicação de Números Inteiros Relativos e Divisão de Números Inteiros Relativos.

9.1 Significado de Número Inteiro Relativo: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

As quatro primeiras atividades didáticas abordaram o significado do Número Inteiro Relativo. As compreensões e dificuldades dos estudantes estão sistematizadas a seguir.

Buscamos levantar na primeira atividade os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a utilização/percepção dos Números Inteiros Relativos. Os dados relativos a essa atividade se encontram na Tabela 1.

Tabela 1: Frequência das respostas sobre percepções iniciais dos alunos de 7º anos sobre o Número Inteiro Relativo

Categorias	Percepções referentes a	F	%
Situações extraescolares	- Temperaturas/ Termômetros	13/92	14,1
	- Celulares/ Calculadoras/ Computadores/ Tablet/TV	10/92	10,9
	- Saldos bancários/Dívidas	9/92	9,8
	- Mercados/ Lojas	8/92	8,7
	- Jornais	6/92	6,5
	- Situações de Vida/Cotidiano	4/92	4,3
	- Vídeos do YouTube	2/92	2,2
Subtotal		52/92	56,5
Situações escolares	- Aprendizagens na escola/ Aulas de Matemática	10/92	10,9
	- Apostilas e livros	8/92	8,7
	- Problemas Matemáticos	7/92	7,6
	- Operações (adição e subtração)	9/92	9,8
	- Planos cartesianos	3/92	3,3
	- Receber pontos negativos	3/92	3,3

Subtotal		40/92	43,5
TOTAL		92/92	100

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022
N= 92 (Número de Respostas)

Os itens de percepções relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos sobre o significado de Número Inteiro Relativo (Tabela 1) demonstraram o predomínio das situações extraescolares. Vale ressaltar que, apesar de comparecerem em maior número, as respostas referentes às situações extraescolares não contaram com justificativas, sendo apenas citadas pelos estudantes participantes da pesquisa.

As situações escolares (40 respostas, representando 43,5% do total) apontadas pelos estudantes, podem ser constatadas nas respostas de alguns alunos: “[...] na aprendizagem. Para fazer contas, pois sem o sinal de + ou – não tem como fazer conta nenhuma” (A4), “[...] quando quero fazer uma conta utilizo o sinal + e -” (A10), [...] a importância é ter a facilidade para sabermos adicionar e subtrair, pois sem os sinais, não teremos contexto e não entenderemos o que fazer (A13), [...] para você saber se vai adicionar ou subtrair (B6).

Em que pesem as características relacionadas à utilização de Números Inteiros Relativos, para a representação de conceitos em determinados contextos, principalmente no que tange ao sinal do número, a atividade 2 considerou dados numéricos associados à quantidade de alimentos em uma situação de compra e venda. A maneira de representar o contexto envolvido na atividade pelos estudantes está presente a seguir (Tabela 2).

Tabela 2: Frequência de respostas relacionadas à representação conceitual em contextos relacionados ao NIR

Tipo de representação	Compreensões ou dificuldades	F	%
Não representação/ Representação de outras formas	Aluno compreendeu o problema, mas não representou a situação	12/37	32,4
	Aluno compreendeu o problema, mas representou a situação utilizando a língua materna	7/37	18,9
		19/37	51,4
Representação com NIR	Aluno compreendeu o problema e utilizou os NIR corretamente para representar cada item da situação	10/37	27
	Aluno compreendeu o problema e utilizou os NIR corretamente para representar a totalidade da situação	4/37	10,8
Subtotal		14/37	37,8

Não compreensão do problema	Aluno não compreendeu o significado do NIR no contexto apresentado	4/37	10,8
Subtotal		4/37	10,8
TOTAL		37/37	100

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022 N= 37

No caso das respostas relacionadas à categoria de maior incidência, houve o predomínio da ausência da representação da situação, com 12 indicações (32,4%). Apesar da aparente compreensão do contexto em questão, fundamentada em respostas como “vai ter os produtos, mas não a mesma quantia” (A4), [...] ela terá que levar uma quantidade menor” (A18) “[...] acontece que está faltando a quantidade desejada” (B7), “[...] não há a mesma quantidade da lista e do armazém [...] o que ela quer vai passar” (B13), os estudantes não representaram a situação solicitada no problema utilizando Números Inteiros Relativos.

Em menor número, 7 indicações (18,9%), compreensões relacionadas à representação conceitual da situação utilizando a Língua Portuguesa também comparecem nas respostas. De igual modo, as indicações reforçaram que os estudantes compreenderam o contexto relacionado ao Número Inteiro Relativo, porém as representações ocorreram, predominantemente, na forma escrita, desconsiderando os sinais dos números, como podemos observar em: [...] não será possível comprar a quantidade de itens que ela quer, faltaria o arroz, feijão e o leite” (A11), “[...] não, pois Anna tem 1 kg a mais de arroz, 4kg a mais de feijão e 1l a mais de leite” (A16), “[...] Ela queria 10 kg de arroz, mas só havia 9kg, ela queria 5kg de feijão, mas só tem 1, 2 litros de leite, mas só tem 1” (B9).

As respostas relacionadas à representação conceitual da situação proposta com Números Inteiros Relativos foram 14 (37,8%) e determinaram aspectos inerentes à utilização correta desses números em tal situação.

Cabe ressaltar que em ambos os casos há registros de compreensão da atividade, porém em 10 respostas (27%) os estudantes compreenderam que as quantidades faltantes de alimentos poderiam ser representadas com Números Inteiros Relativos de modo individualizado, como podemos perceber nas seguintes respostas: “o que acontece nesse caso é que está faltando a quantidade desejada. -1 kg de arroz. -4 kg de feijão, +13 kg de açúcar e -1 l de leite” (B5), “[...] não, irá faltar os itens da lista dela por que mais do que tem no estoque, (representações) -1/-4/+13/-1” (B14), ao passo que em 4 indicações (10,8%), não houve a representação por item, mas sim a da totalidade, ou seja, provavelmente somaram as quantidades faltantes de alimentos e utilizaram somente um

número inteiro para representar tal raciocínio, como podemos perceber na seguinte resposta: “não, vai faltar -6 dos alimentos da sua lista” (B1).

Por fim, respostas relacionadas à incompreensão da atividade remeteram a 4 indicações (10,8%). Podemos perceber essa característica em determinadas respostas que não comparam as quantidades de alimentos da lista com o estoque do armazém, como por exemplo em “não, porque passará de 100 reais” (A19), ou que se referem a indicações equivocadas/incompletas “todos seriam 1 kg, menos o açúcar” (A2).

Na terceira atividade envolvendo o significado de Número Inteiro Relativo trabalhamos o contexto de saldo de gols em campeonatos de futebol, principalmente no que se refere à representação deste saldo com a utilização do sinal positivo ou negativo. Nesse sentido, as compreensões dos estudantes nessa atividade estão distribuídas na tabela 3 a seguir.

Tabela 3: Frequências de Compreensões relativas ao sinal de um Número Inteiro Relativo quando associado a um contexto

Significado identificado para o sinal do NIR	Compreensões/dificuldades relativas a:	F	%
Sinal para representar um estado qualitativo (Sinal predicativo)	- comparações entre situações	22/56	39,3
	- resultados (ganhar/perder)	4/56	7,1
	- atribuições de características (bom/ruim)	2/56	3,6
Subtotal		28/56	50
Sinal associado à operação (Sinal operatório)	- resultado de uma subtração	24/56	42,9
Subtotal		24/56	42,9
Dificuldade em entender o significado do sinal no contexto apresentado (Dificuldade para manipular quantidades isoladas)	- ideias equivocadas para a atribuição do sinal do número	4/56	7,1
Subtotal		4/56	7,1
Total		56/56	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N= 56

Referente ao significado predicativo atribuído ao sinal, ou seja, à representação utilizada para demonstrar um estado qualitativo (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015), as compreensões relacionadas a tal entendimento

remeteram à comparação entre situações em 22 indicações (39,3%), como podemos perceber em “[...] (o sinal positivo) significa que eles fizeram mais gols do que tomaram” (A4), “[...] o saldo foi obtido comparando os gols marcados com sofridos. Ele ficou positivo, pois eles marcaram mais do que sofreram” (B5), “[...] porque o positivo significa que o time tem mais gols marcados do que sofridos e o outro porque os sofridos foram maiores.” (B12).

As compreensões relativas a resultados como perder ou ganhar compareceram em 4 respostas (7,1%) no âmbito do sinal predicativo. Nesse caso, o sinal atribuído ao saldo de gols remeteu, na compreensão dos estudantes, a ganhar ou perder gols nos jogos. Tal compreensão pode ser percebida na seguinte resposta: “[...] significa que ele ganhou +10 gols no total [...] significa que ele perdeu -19 gols do total” (B18).

Em menor proporção, a atribuição de características como bom ou ruim foi indicada em 2 respostas (3,6%), corroborando aspectos referentes ao sinal para indicar a qualidade do saldo em questão: “[...] (sinal negativo) significa que ele tem saldo de gols ruins e baixo [...] (sinal positivo) significa que o saldo de gols está bom (A8).

No caso do significado do sinal associado à operação (sinal operatório) houve 24 respostas (42,9%), sendo relacionadas ao resultado da subtração: “[...] subtrai gols marcados por gols sofridos, (sinal negativo) significa a diferença” (B11), “[...] o saldo é -19, significa a subtração de gols marcados pelos gols sofridos” (B15).

Aspectos relacionados a não compreensão do sinal no contexto abrangeram 4 respostas (7,1%). Indicações como “[...] (sinal negativo) significa um critério importante” (B13), “[...] um fez -19 gols e o outro mais” (A5) demonstraram que não houve entendimento do sinal nesse contexto, portanto, mesmo que em menor quantidade de respostas, houve a presença ideias equivocadas para a atribuição do sinal do número.

No que se refere à quarta atividade sobre significado do Número Inteiro Relativo, em que os estudantes deveriam realizar a conversão da representação em língua materna para o registro algébrico, não houve dificuldades, uma vez que percebemos nas respostas de todos os 39 alunos participantes da pesquisa a associação, de maneira correta, da frase presente em cada item com o sinal negativo ou positivo.

Em síntese, os dados relativos a compreensões e dificuldades dos estudantes sobre o significado do Número Inteiro Relativo reforçaram, em um primeiro momento, o predomínio da associação de situações extraescolares ao referido conceito.

Ainda, os aspectos relacionados à utilização de Números Inteiros Relativos para a representação de conceitos em determinados contextos demonstraram duas características

distintas. A primeira se referiu à compreensão das situações-problema propostas, porém com o comparecimento das dificuldades na representação, as quais superaram as compreensões, principalmente no que tange ao contexto relacionado à quantidade de alimentos em uma situação de compra e venda.

Já a segunda característica encontrada demonstrou que a constatação anterior se inverteu no caso da utilização de Números Inteiros Relativos para a representação do saldo de gols em campeonatos de futebol. Nesse caso, os dados sugeriram a compreensão, pela maior parte dos estudantes, da utilização do Número Inteiro Relativo para representar o contexto citado, atribuindo características operatórias ou predicativas ao sinal dos números.

Por fim, no que tange à conversão de representações em língua materna em linguagem matemática (DUVAL, 2012) houve a compreensão da totalidade dos estudantes, uma vez que os estudantes associaram sem dificuldades os Números Inteiros Relativos, positivos ou negativos, a cada situação proposta na atividade.

9.1.1 Análise das respostas dos estudantes sobre o significado de Número Inteiro Relativo

Elucidar compreensões e dificuldades sobre o significado de Número Inteiro Relativo implicou, inicialmente, analisar os conhecimentos prévios dos estudantes com relação ao conceito.

Compreender a natureza dos conhecimentos prévios está em consonância com as ideias de Vergnaud (1986, 1990, 1998, 2009), que consideram de suma importância as concepções iniciais apresentadas pelos estudantes referentes a um conceito. A partir disso tem-se a possibilidade de reconhecer as compreensões do conceito por parte dos estudantes, pois as concepções equivocadas só mudam se entrarem em conflito por meio da diversidade de situações as quais o estudante se depara (VERGNAUD, 1986, 1990, 1998, 2009).

Nesse âmbito, tornou-se importante que os estudantes elencassem situações em que se deparam com os Números Inteiros Relativos, destacando, na primeira atividade, as que remetem à utilização e importância dos sinais positivo e negativo (TABELA 1). Nesse caso, em se tratando das compreensões e dificuldades dos estudantes, percebemos que houve predomínio das situações extraescolares em comparação com as situações escolares.

Em que pesem essas considerações, ressalta-se que as situações escolares citadas pelos estudantes (TABELA 1), em sua maioria, não se referiram ao conjunto dos números inteiros propriamente dito, tampouco às características predicativas de tais números, mas sim aos sinais positivo (+) e negativo (-) em contextos operatórios (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015).

Nesse sentido, analisando as respostas, percebemos que remetem à ideia de dificuldade, apresentada por Cid (2003), em que os Números Inteiros Relativos foram tratados como se fossem naturais, sendo que o sinal de menos ou sinal negativo é relacionado somente a um símbolo que representa a operação de subtração entre Números Naturais.

Tal característica observada também faz referência à dificuldade em dar sentido às quantidades negativas isoladas (GLAESER, 1985; CID, 2000), pois diante das respostas apresentadas pelos estudantes, é possível entender que os sinais negativo e positivo apresentam-se somente associados a operações matemáticas a serem realizadas, não indicando, portanto, a qualidade dessas quantidades.

Esta dificuldade também compareceu quando os estudantes deveriam realizar a representação do conceito de Número Inteiro Relativo em determinados contextos.

As respostas denotaram a dificuldade dos estudantes em duas situações: relacionar o que está sobrando/faltando a um número positivo/negativo (TABELA 2) e utilizar os sinais no contexto de representação do saldo de gols em campeonatos de futebol (TABELA 3). Nesse caso, há indícios de dificuldades epistemológicas, mais precisamente, dar sentido e manipular quantidades negativas isoladas (GLAESER, 1985; CID, 2000).

Em ambos os casos, apesar das dificuldades elencadas, as duas primeiras atividades didáticas exploradas foram necessárias para verificar quais as concepções iniciais os estudantes apresentavam sobre o conceito de Número Inteiro Relativo e sua utilização em situações em que os Números Naturais não eram suficientes para representação, principalmente no que tange ao sinais positivo e negativo, que nos inteiros podem representar o significado em uma determinada situação ou contexto que não está necessariamente associado à ideia de contagem (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015; OLIVEIRA, 2020).

Possivelmente a explicação de tais dificuldades esteja no fato de os estudantes não terem contato, em outros momentos escolares, com o conceito de Número Inteiro

Relativo, como percebemos nas indicações da tabela 1, em que as situações extraescolares, envolvendo o conceito, predominaram sobre as escolares.

Dado o teor das dificuldades apresentadas pelos estudantes, elucidadas nas tabelas 2 e 3, remetemo-nos a Vergnaud (1986, 1990, 1998, 2009), quando este afirma que há situações em que o estudante não possui todas as competências necessárias para a resolução de um problema, passando assim por um processo de tentativa e erro e reflexões.

Diante disso, há que se ressaltar que, principalmente no contexto relacionado à quantidade de alimentos em uma situação de compra e venda (TABELA 2), percebeu-se que os estudantes tiveram a competência parcial para compreender e representar a situação em linguagem materna, porém, no momento de realizar a conversão da representação em linguagem matemática (DUVAL, 2012), houve certa dificuldade.

A não compreensão dos estudantes sobre o significado do Número Inteiro Relativo em um determinado contexto, mesmo que em menor proporção (quatro indicações (10,8%) na tabela 2 e quatro indicações (7,1%) na tabela 3), revelou dificuldades que alguns alunos tiveram em interpretar a situação matemática proposta.

Porém, conforme salienta a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), é necessário que os estudantes desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos.

No que se refere às compreensões sobre o significado dos Números Inteiros Relativos, a presença de categorias relacionadas à utilização correta desse conjunto para representar situações (TABELA 2) e a associação do sinal do número a características predicativas e operatórias (TABELA 3) revelaram que parte dos estudantes, mesmo no início dos processos de ensino e aprendizagem do conceito de Números Inteiros Relativos, compreendeu que os Números Naturais não eram suficientes para a representação do contexto.

Para tanto, esses estudantes utilizaram a conversão da representação em língua materna para a linguagem matemática (DUVAL, 2012). Isso também possibilitou a oportunidade pedagógica para discutirmos o processo de ampliação dos naturais para os inteiros, conforme esclarece Caraça (2003), além da possibilidade da superação da dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas (GLAESER, 1985; CID, 2000).

Como visto, as atividades trabalhadas com os estudantes nessa seção foram fundamentais para a formação do conceito de Número Inteiro Relativo, pois esta deve

transcorrer entre diversas situações e representações com o objetivo de que o estudante perceba o que permanece inalterado, apesar de suas propriedades, em cada situação (VERGNAUD, 1986, 1990, 1998, 2009) e representação (DUVAL, 2012).

Em síntese, o trabalho pedagógico com as três primeiras atividades didáticas presentes nessa seção abrangendo diferentes situações foi importante para buscar a melhoria do processo de aprendizagem do conceito de Número Inteiro Relativo dos estudantes.

Tanto é que, após a realização das três primeiras atividades, o fato de os estudantes relacionarem corretamente, na quarta atividade, as expressões “abaixo de zero”, “saldo devedor” e “abaixo do nível do mar” a números inteiros negativos, além de “acima do nível do mar” a números inteiros positivos, demonstrou que estes iniciaram o processo de compreensão do sinal do número utilizado para representar uma qualidade numérica quanto a um referencial em diferentes contextos (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015).

9.2 O Número Inteiro Relativo e sua representação na reta numérica: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

Nessa seção buscamos evidenciar as compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à reta numérica como contexto de representação dos Números Inteiros Relativos. Assim sendo, apresentaremos sínteses e análises das atividades propostas, discutindo, à luz de referenciais teóricos, aspectos relacionados a compreensões/dificuldades dos estudantes com relação ao conceito abordado.

A primeira atividade relativa à temática anunciada versou sobre a representação de uma situação do cotidiano por meio de uma ilustração. A situação cotidiana era sobre as medidas de altitude, profundidade e nível do mar. Nesse sentido, objetivou-se que os estudantes também representassem matematicamente as medidas presentes no desenho por eles realizado, buscando desenvolver o conceito de Números Inteiros Relativos no contexto de reta numérica. Os dados envolvendo os tipos de representação que 36 estudantes (3 deixaram em branco) desenvolveram na questão estão categorizados a seguir (Tabela 4).

Tabela 4: compreensões e dificuldades dos estudantes relacionadas à introdução da temática reta numérica

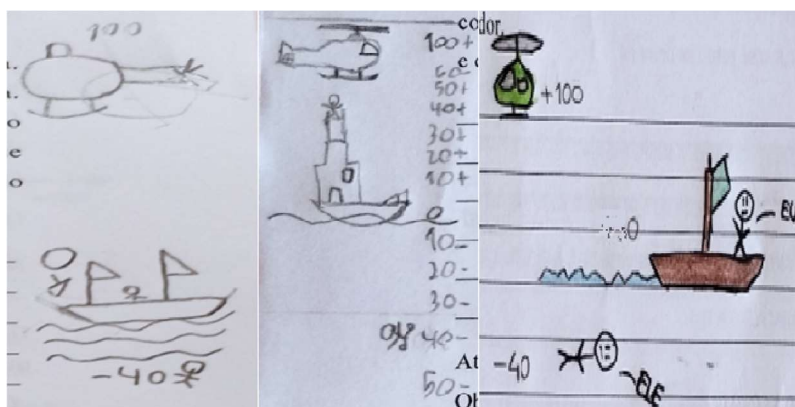
Categorias	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Representação correta	Estudante atribuiu NIR corretamente ao desenho realizado, considerando o sinal do número	27/36	75,0
Subtotal		27/36	75,0
Representação incorreta/incomplete	Estudante atribuiu NIR incorretamente ao desenho realizado	5/36	13,9
	Estudante não atribuiu NIR ao desenho realizado	3/36	8,3
Subtotal		8/36	22,2
Não compreensão da atividade	Estudante desenhou somente a reta	1/36	2,8
Subtotal		1/36	2,8
TOTAL		36/36	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N= 36

Considerando os dados elencados na tabela 4, temos que as 27 (75%) indicações referentes à representação correta da situação proposta retrataram na ilustração a utilização dos Números Inteiros Relativos e dos seus respectivos sinais do modo esperado. Alguns exemplos de representação dos estudantes estão presentes na figura 26 a seguir.

Figura 26: representação dos alunos A5, A16 e B11 (Atividade 1)



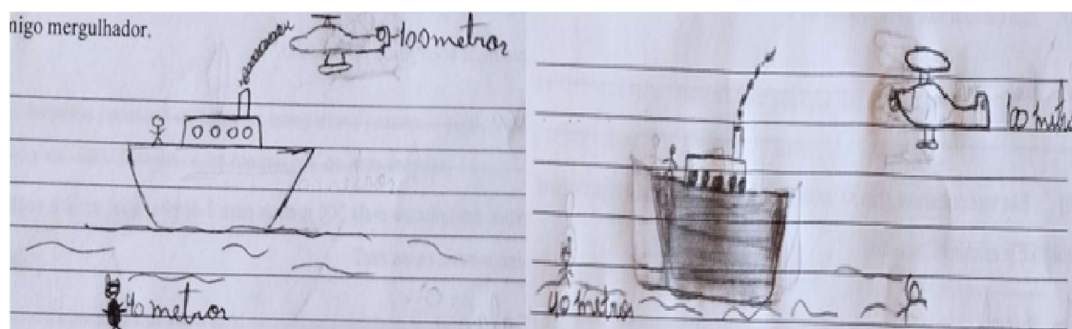
Fonte: dados da pesquisa, 2022

Os exemplos presentes na figura anterior, de como os estudantes interpretaram a situação proposta, demonstraram que a compreensão total da atividade por 27 (75%) estudantes referiu-se, principalmente, à capacidade de relacionar a situação ilustrada à representação matemática utilizando Números Inteiros Relativos, ou seja, o desenho do barco localizado ao nível do mar no ponto zero, do helicóptero acima do nível do mar em

+100 e do mergulhador a 40 metros de profundidade evidenciou que houve a conversão da linguagem materna em linguagem matemática: “[...] eu fiz assim: 100 o helicóptero, porque ele está acima, o barco 0, porque ele está no meio e a pessoa -40, porque está abaixo” (B11).

No caso da representação incorreta/incompleta houve 8 respostas (22,2%). Nesse sentido, respostas relacionadas à atribuição errônea dos Números Inteiros Relativos, para representar a situação proposta, contribuíram com 5 indicações (13,9%) que retrataram ilustrações corretas (barco ao nível do mar, mergulhador abaixo do nível do mar e helicóptero acima do nível do mar), porém com números incorretos, principalmente no que se refere à posição do mergulhador, que por estar abaixo do nível do mar deveria ser representada por um número negativo, nesse caso, conforme percebemos na Figura 27.

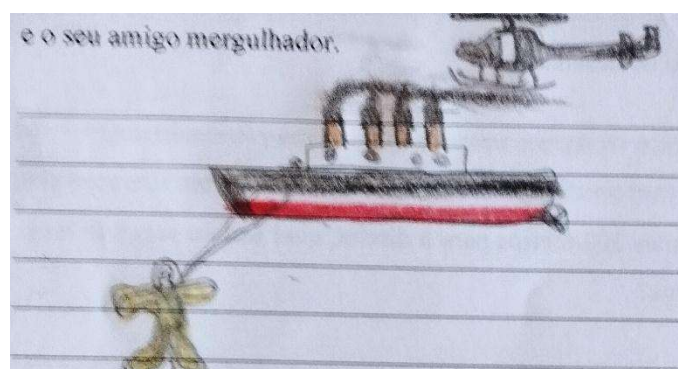
Figura 27: representação dos estudantes A9 e A11 (Atividade 1)



Fonte: dados da pesquisa, 2022

Também compareceram em 3 respostas (8,3%) questões relacionadas a não atribuição de Números Inteiros Relativos para ilustrar a situação, demonstrando a incompletude da representação, ou seja, apesar do desenho aparentemente correto, houve a falta da atribuição de números para completar o que foi proposto na atividade, como observamos na figura 28 a seguir.

Figura 28: representação do estudante A10 (Atividade 1)



Fonte: dados da pesquisa, 2022

Por fim, 1 resposta (2,8%) indicou a incompreensão da atividade proposta, uma vez que não houve ilustração para representar a situação, somente uma reta numérica descontextualizada com o que foi proposto.

Com relação à segunda atividade, os estudantes deveriam realizar deslocamentos à esquerda e à direita utilizando a reta numérica, além de identificar locais mais próximos e mais distantes de um ponto de referência representado pelo zero, nesse caso. As compreensões e dificuldades relativas estão presentes na tabela 5 a seguir.

Tabela 5: Compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à reta numérica dos NIR

Categorias	Subcategorias	F	%
Compreensões dos estudantes referentes à utilização da reta numérica dos NIR	Estudante considerou o ponto de referência ou zero de origem entendendo a sua direita como “o lado positivo” e a sua esquerda “como o “lado negativo” na reta	26/74	35,1
	Estudante realizou os deslocamentos na reta numérica de maneira correta	25/74	33,8
Subtotal		51/74	68,9
Dificuldades dos estudantes em unificar a reta numérica dos NIR	Estudante desconsiderou os locais que estavam à esquerda do zero na reta	11/74	14,9
	Estudante desconsiderou o zero nos deslocamentos realizados na reta	7/74	9,5
	Estudante iniciou a contagem no deslocamento a partir do “local que estava”	5/74	6,8
Subtotal		23/74	31,1
TOTAL		74/74	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N= 74 (2 em branco 37 estudantes responderam)

Para essa atividade, 37 dos 39 estudantes (2 não responderam) indicaram 74 respostas referentes aos objetivos que analisamos, levando em consideração as compreensões e as dificuldades relativas à utilização da reta numérica dos Números Inteiros Relativos.

Quanto às compreensões dos estudantes com relação à utilização da reta numérica dos inteiros, houve 51 (68,9%) indicações, sendo 26 (35,1%) relacionadas aos estudantes considerarem os “lados” positivo e negativo da reta numérica, ao indicarem locais mais próximos e mais distantes de um ponto de referência (origem-ponto zero): “Distantes: Correio (+300) e a casa de Elvira (-300). Próximos: Padaria (+100) e a Praça (-100)” (A1); e 25 (33,8%) que evidenciaram os deslocamentos realizados de maneira correta pelos estudantes: “padaria, banco, correio, igreja, no final parou na praça” (B14); “ela parou na praça, pois saiu de sua casa, foi para padaria e depois para banco e depois para correio, igreja e depois para praça” (B16).

No caso das dificuldades em unificar a reta numérica dos Números Inteiros Relativos evidenciadas pelos estudantes, houve 23 (31,1%) respostas, sendo que 11 (14,9%) foram relativas ao fato de desconsiderar locais que se encontravam à esquerda do que foi determinado como origem como próximos ou distantes, considerando somente os dispostos ao lado direito desta origem: “mais distante é o correio (+300), mais próximo é a padaria (+100)” (A5).

Outras 7 (9,5%) indicações referiram-se ao estudante desconsiderar o zero nos deslocamentos na reta, ou seja, nesse tipo de dificuldade houve a ideia de que o local que se encontrava localizado no número zero não deveria ser contado, levando à solução incorreta da atividade: “pararia no banco pois é -200 a esquerda. Se andasse mais 300 metros para a direita ela vai parar na padaria” (B10).

Por fim, 5 (6,8%) respostas foram inerentes à dificuldade de contagem do deslocamento. Nesse sentido, as indicações revelaram que os estudantes não iniciaram o deslocamento a partir do zero, mas sim do 100, que indicava a padaria.

A quarta atividade referente à reta numérica dos Números Inteiros Relativos objetivou o trabalho com os deslocamentos à esquerda e à direita do zero. A tabela 6 apresenta dados de compreensões e de dificuldades dos estudantes na atividade.

Tabela 6: Compreensões e dificuldades dos estudantes relativas às propriedades da reta numérica dos NIR

Categorias	Subcategorias	F	%
Compreensões dos estudantes relativas aos deslocamentos na reta numérica dos NIR	Estudante relacionou os deslocamentos à esquerda e à direita do zero ao sinal do número	24/37	64,9
	Estudante relacionou os deslocamentos à esquerda e à direita do zero aos aumentos ou diminuições dos números	8/37	21,6
Subtotal		32/37	86,5
Dificuldades dos estudantes referentes às propriedades da reta numérica dos NIR	Estudante considerou somente o valor absoluto dos números na reta	4/37	10,8
	Estudante apresentou compreensões equivocadas das expressões “à esquerda” e “à direita” do zero	1/37	2,7
Subtotal		5/37	13,5
TOTAL		37/37	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N= 37

No que se refere às compreensões apresentadas houve predomínio da associação dos deslocamentos à esquerda e à direita do zero ao sinal do número nas respostas de 24

(64,9%) estudantes, como por exemplo em: “Para direita os números têm o sinal + e na esquerda o sinal -” (A1); “[...] depois do zero, para a direita, os números são positivos e para a esquerda os números são negativos” (A19); “[...] à direita é acima do zero e à esquerda abaixo de zero. Então à direita positivo e à esquerda negativo” (B1); “[...] quando para o lado direito se afasta é porque passará para o positivo, para o lado esquerdo é porque irá passar para o negativo” (B5).

Compreensões relativas à associação dos deslocamentos na reta numérica a aumentos ou diminuições dos números também compareceram nas indicações de 8 (21,6%) estudantes. Algumas respostas evidenciaram tais compreensões: “[...] à direita está aumentando, já à esquerda está diminuindo” (A8); “Quando se deslocam para a direita eles aumentam e para a esquerda eles diminuem (A16)”; “(para direita) eles aumentam. Quando se deslocam para esquerda eles diminuem” (B13).

Já as dificuldades, mesmo que em menor número, compareceram em 4 (10,8%) respostas relativas ao fato de os estudantes considerarem somente o valor absoluto do número inteiro, como percebemos em: “Eles aumentam de lados diferentes” (A12); “o aumento dos números positivos, o aumento dos números negativos” (B17).

Por fim, 1 (2,7%) estudante apresentou compreensões equivocadas no que tange às expressões “esquerda” e “direita”. Possivelmente, não soube identificar o sentido dos deslocamentos apresentados pelas expressões, como percebemos na seguinte resposta: “[...] quando os números se afastam do zero para direita representa menos e para esquerda representa mais” (A11).

A construção da reta numérica para comparação de inteiros foi abordada na quinta atividade. Assim sendo, houve ênfase em três objetivos: comparar dois números inteiros negativos, um positivo com um negativo e dois inteiros positivos com auxílio da reta numérica. As compreensões e dificuldades dos estudantes com relação aos objetivos propostos estão detalhadas a seguir (Tabela 7).

Tabela 7: compreensões e dificuldades observadas na comparação de NIR utilizando a reta numérica

Objetivo do item	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	Item	F	%
Comparação entre dois inteiros negativos utilizando a reta	Estudante comparou corretamente os números	-4 é menor que -3?	23/39	59
		-2 é maior que -4?	18/39	46,2
	Estudante não comparou corretamente e justificou com a lógica de comparação dos naturais	-4 é menor que -3?	14/39	35,9
		-2 é maior que -4?	17/39	43,6

	Estudante não comparou corretamente e não justificou	-4 é menor que -3?	2/39	5,1
		-2 é maior que -4?	4/39	10,2
Comparação entre inteiro positivo e inteiro negativo utilizando a reta	Estudante comparou corretamente os números	+5 é maior que -5?	38/39	97,4
		-2 é menor que +4?	38/39	97,4
		+2 é maior que -4?	38/39	97,4
	Estudante não comparou corretamente e não justificou	+5 é maior que -5?	1/39	2,6
		-2 é menor que +4?	1/39	2,6
		+2 é maior que -4?	1/39	2,6
Comparação entre dois inteiros positivos utilizando a reta	Estudante comparou corretamente os números	+2 é menor que +4?	38/39	97,4
	Estudante não comparou corretamente e não justificou	+2 é menor que +4?	1/39	2,6

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

Aspectos relacionados à comparação entre números inteiros com sinal negativo com auxílio da reta numérica revelaram que houve a compreensão de mais da metade dos estudantes, 23 (59%), no caso do item “-4 é menor que -3?”. Algumas respostas nos auxiliam a compreender as estratégias dos estudantes para comparar corretamente esses números, como a de relacionar valores negativos ao zero, “invertendo” a lógica prevista nos Números Naturais, por exemplo: “[...] porque o -3 está mais perto do zero” (A3); “[...] pois o -4 está mais distante do zero, já o -3 está mais perto do zero” (A5); “[...] pois nos Números Naturais o 4 é maior que 3 e no negativo esse valor despenca” (B5); ou a de relacionar os números negativos à distância para chegar ao zero: “o -3 demora menos para chegar em 0” (B14).

Nesse item, as dificuldades observadas na comparação estão relacionadas, principalmente, à utilização da lógica da comparação dos Números Naturais aos números inteiros, como constatado nas respostas de 14 estudantes (35,9%). Algumas justificativas nos ajudam a ilustrar tais dificuldades: “porque o 4 é maior que o 3” (A17). Cabe ressaltar que 2 (5,1%) estudantes não compararam corretamente os números, porém não apresentaram justificativas para as respostas.

Ainda na comparação entre dois números inteiros negativos, o item “-2 é maior que -4?” foi respondido corretamente por 18 (46,2%) estudantes, enquanto 21 (53,8%) responderam incorretamente, desses, 17 (43,6%) justificaram e 4 (10,2%) não.

Diferentemente do item anterior, menos da metade dos estudantes respondeu o item corretamente, porém as justificativas para as conclusões, praticamente, não se diferenciaram, ou seja, o fato de um número negativo estar mais próximo de zero que outro, implica ser maior: “[...] porque o -2 está mais perto do 0 que o -4” (A1).

As dificuldades encontradas nesse item, verificadas nas respostas de 17 (43,6%) estudantes, também se referiram à possível utilização da lógica de comparação de Números Naturais no conjunto dos inteiros. Justificativas como: “[...] porque 2 é menor que 4” (A18); “[...] eu penso que nem os Números Naturais 2 é menor que 4” (B8), corroboram para a compreensão das estratégias que os estudantes tiveram para realizar a comparação equivocada.

No caso das comparações entre inteiros, sendo estes um número positivo e um negativo e entre dois números positivos, com base nos dados apresentados, percebemos que os estudantes não tiveram dificuldade na resolução dos itens. Somente 1 (2,6%) deles não comparou corretamente nas questões apresentadas. Todos os demais, 38 (97,4%) estudantes, compararam corretamente os números inteiros descritos na atividade, em ambos os casos.

As justificativas corretas desenvolvidas pelos estudantes para os itens que envolviam a comparação de números com sinais opostos compreenderam a ideia de que todo número positivo é maior que qualquer número negativo, como constatamos nas seguintes respostas: “[...] o número negativo é menor que o positivo” (A4); “[...] porque o número positivo é maior que o número negativo” (A7); “[...] porque o +5 é um número positivo e o -5 é um número negativo” (A18); “[...] porque +5 é um número positivo, maior que 0 e -5 é menor que zero” (B16).

No caso do item envolvendo a comparação de dois inteiros positivos, conforme salientado, também houve grande parte de acertos. Para a comparação “+2 é menor que +4?” os estudantes levantaram as seguintes hipóteses como justificativas: “Sim, porque +2 está mais perto do zero (A8)”; “[...] porque não deve nem 2 nem 4, mas o quatro possui 2 a mais (A16); “[...] +2 vem antes” (B1), “[...] o +2 está mais perto do zero (B14).

Com relação à atividade 6 envolvendo a reta numérica dos inteiros, os estudantes deveriam identificar quais números pertenciam ao intervalo determinado em cada item.

No item a) objetivamos que os estudantes identificassem quais números inteiros se encontravam à direita de zero e à esquerda de +5, ou seja, que determinassem os números positivos entre zero e cinco.

Já no item b) trabalhamos com a “parte negativa” da reta, posto que buscamos que os estudantes identificassem números inteiros à esquerda de zero e à direita de -6, em suma, entre zero e seis negativos.

Por fim, no item c), a impossibilidade de identificar números inteiros que se encontram simultaneamente à direita de zero e à esquerda de -2 pautou a atividade.

As compreensões e dificuldades dos estudantes com relação aos aspectos citados se encontram a seguir (Tabela 8).

Tabela 8: compreensões e dificuldades apresentadas pelos estudantes com relação a intervalos na reta numérica

Objetivo do item	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Identificar números inteiros em um “intervalo positivo”	Estudante identificou todos os números inteiros positivos que compõem o intervalo determinado na atividade	28/36	77,8
	Estudante identificou parcialmente os números inteiros positivos que compõe o intervalo determinado na atividade	8/36	22,2
TOTAL		36/36	100
Identificar números inteiros em um “intervalo negativo”	Estudante identificou todos os números inteiros negativos que compõem o intervalo determinado na atividade	25/36	69,4
	Estudante identificou parcialmente os números inteiros negativos que compõe o intervalo determinado na atividade	11/36	30,6
TOTAL		36/36	100
Constatar a impossibilidade de existência de inteiros no intervalo	Estudante considerou números entre o intervalo determinado na atividade	16/36	44,4
	Estudante considerou partes do intervalo determinado na atividade	16/36	44,4
	Estudante constatou a impossibilidade de existir números inteiros no intervalo determinado na atividade	4/36	11,1
TOTAL		36/36	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022 N=36

Levando em consideração os 39 participantes da pesquisa, cada item referente à sexta atividade foi respondido por 36 estudantes, pois 3 deixaram em branco.

No item (a), que objetivou identificar Números Inteiros Relativos em um intervalo composto por números positivos, analisamos que 28 (77,8%) estudantes responderam corretamente ao item proposto, enquanto 8 (22,2%) identificaram parcialmente os números que compuseram o intervalo.

O item (b) versou sobre a identificação de números inteiros pertencentes ao “intervalo negativo”. Nesse item, 25 (69,4%) estudantes obtiveram êxito na resolução da

atividade, escrevendo todos os números inteiros presentes entre zero e seis. Ainda, 11 (30,6%) não indicaram todos os números, porém, assinalaram corretamente, pelo menos um que pertence ao intervalo citado.

As estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução completa dos itens (a) e (b) elucidaram a construção da reta numérica como fundamental para compreensão da atividade, como percebemos nas seguintes respostas: “[...] nós fizemos a reta numérica, fomos do zero ao cinco e voltamos à esquerda” (A8); “[...] “são o +1, +2, +3, +4, pois todos são à direita do 0 e à esquerda do 5 na reta” (B3), no caso do item a) e “[...] fizemos a reta numérica, fomos do zero ao -6 e voltamos para a direita” (A9); “-5,-4,-3,-2,-1, porque está à esquerda zero e à direita de -6 na reta”, no item b).

Já os estudantes que resolveram parcialmente esses itens, ao invés de citarem todos os inteiros pertencentes ao intervalo, escolheram os que se encontram imediatamente ao lado para responder a situação proposta, como por exemplo em: “+4, pois o +4 está do lado do +5 e à direita do zero” (B1); “1 e 4, porque o 1 é depois do 0 e o 4 é antes do 5” (B17); “-1, está à esquerda do 0 e à direita do -6 na reta” (A5).

De modo contrário, o item (c) demonstrou as dificuldades dos estudantes em identificar a impossibilidade de existir números em determinados intervalos, ao passo que 32 (88,8%) responderam, equivocadamente, a questão.

As tentativas de 16 (44,4%) estudantes, de encontrar algum número que satisfizesse as condições definidas na atividade, referiram-se a considerar o intervalo de zero a dois negativos, porém sem se atentarem à indicação do sentido, direita da origem e esquerda de -2, nesse caso. Tal estratégia levou à resposta -1, pois é o número inteiro que se encontra entre 0 e -2, como percebemos em “[...] -1, pois ele está entre o 0 e o -2” (B8).

De maneira análoga, 16 (44,4 %) estudantes dividiram o intervalo elencado na atividade em duas partes. Assim sendo, consideraram, erroneamente, números maiores que zero e menores que dois negativos em suas respostas, levando a indicações como: “1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (maiores que 0), -3, -4, -5, -6, -7, -8 (menores que -2)” (A16) ou “[...] são todos os números positivos e todos os negativos abaixo do -2” (B1).

Por fim, somente 4 (11,1%) participantes da pesquisa conseguiram responder que não existe um número inteiro que satisfaça as duas condições elencadas no item simultaneamente, ou seja, é impossível dizer um número que se encontra à direita de 0 e à esquerda de -2, como constatou um estudante: “não irá ser nenhum número, pois eles não se encontram na reta” (B6), “-1, o número na frente de -2 e atrás de 0” (B16).

Em síntese, os dados referentes ao estudo da reta numérica dos Números Inteiros Relativos evidenciaram que, mesmo no início do trabalho com a temática, as compreensões superaram as dificuldades, principalmente no que se refere à representação matemática de situações contextualizadas.

Esse aspecto se repetiu no contexto de realização de deslocamentos à esquerda e à direita de um determinado ponto de referência, uma vez que as respostas dos estudantes evidenciaram que, além de considerar corretamente as “partes positiva e negativa” da reta numérica, houve a realização de deslocamentos na reta numérica de maneira correta. Em menor proporção, as dificuldades evidenciadas nas respostas tiveram relação, principalmente, com o fato de o estudante desconsiderar a “parte negativa” e o zero durante os deslocamentos na reta numérica.

Em que pesem os aspectos relacionados à comparação de Números Inteiros Relativos com auxílio da reta numérica, as principais compreensões dos estudantes foram ao comparar inteiros positivos com negativos e entre dois números inteiros positivos. Por sua vez, as dificuldades surgiram quando os estudantes deveriam comparar dois números inteiros negativos, mesmo com o auxílio da reta numérica.

Por fim, com relação aos intervalos na reta numérica, os dados revelaram que houve a compreensão dos estudantes quando deveriam identificar quais números inteiros pertenciam a um “intervalo positivo” e a “intervalo negativo”. Assim sendo, a principal dificuldade ocorreu diante da impossibilidade da existência de Números Inteiros Relativos em um determinado intervalo.

9.2.1 Análise das respostas dos estudantes sobre o Número Inteiro Relativo e sua representação na reta numérica

Analisar compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à reta numérica dos Números Inteiros Relativos exigiu que explorássemos diferentes situações envolvendo a temática: a representação de situações, deslocamentos à esquerda e à direita, comparação de inteiros usando a reta e indicação de números pertencentes a intervalos. Nas diferentes situações, as compreensões dos estudantes com relação à reta numérica superaram as dificuldades.

Os dados da tabela 4 revelaram que os estudantes não só conseguiram ilustrar, mas também utilizar Números Inteiros Relativos para elucidar a situação proposta. Nesse caso, a associação da posição do barco ao zero, do mergulhador ao -40 e o helicóptero ao +100 constatou a compreensão dos estudantes, pois conseguiram representar a situação

transformando a escrita em língua materna em linguagem matemática (DUVAL, 2012; HENRIQUES; ALMOULOU, 2016).

Contatamos que, no caso dos exemplos apresentados na figura 27, os estudantes conseguiram representar o contexto proposto na atividade por meio do desenho, porém no momento da utilização de Números Inteiros Relativos houve dificuldades, principalmente, no que tange à posição do mergulhador que se encontra a 40 metros abaixo do nível do mar, devendo ser escrito como -40 .

Considerando que o objetivo da primeira atividade foi levar os estudantes a representar as posições de elementos abaixo e acima do nível do mar com um desenho e matematicamente, utilizando Números Inteiros Relativos, buscando iniciar o desenvolvimento do conceito de reta numérica, podemos afirmar que a situação proposta possibilitou atingi-lo, uma vez que, mesmo por se tratar de uma atividade introdutória, as compreensões superaram as dificuldades.

Em síntese, apesar de alguns estudantes não considerarem o sinal do número na representação matemática envolvendo a primeira atividade, a grande maioria desenhou os elementos em sua posição correta, possibilitando que pudéssemos discutir, a partir dela, a conversão de representações (DUVAL, 2012; HENRIQUES; ALMOULOU, 2016).

No caso dos dados relativos à utilização da reta numérica para realização de deslocamentos (Tabela 5), as compreensões superaram as dificuldades.

As respostas dos estudantes demonstraram que eles realizaram corretamente os deslocamentos e consideraram as “partes positiva e negativa” da reta numérica durante a indicação de locais mais próximos e mais distantes de um determinado ponto de referência. Cabe destacar, mesmo que em menor número, que as dificuldades nesse sentido se assemelham ao obstáculo de unificar a reta numérica dos Números Inteiros Relativos (GLAESER, 1985; CID, 2000).

Aspectos relacionados ao fato de os estudantes não citarem os locais que estão na “parte negativa” da reta, desconsiderarem o zero durante os deslocamentos realizados na reta e não iniciarem a contagem a partir do zero, determinaram a incompreensão que o local inicial do deslocamento representaria um ponto de referência, ou seja, o zero “móvel” (TEIXEIRA, 1993; OLIVEIRA, 2019).

Os dados relacionados às propriedades da reta numérica dos Números Inteiros Relativos (Tabela 6) complementam as compreensões relativas à discussão anterior (Tabela 5). Em maior número, os estudantes relacionaram corretamente os deslocamentos

ao sinal do Número Inteiro Relativo, ou seja, à esquerda do zero há números negativos e à direita números positivos.

Além disso, houve a relação dos deslocamentos à aumentos e diminuições dos Números Inteiros Relativos, ou seja, a compreensão de que a reta numérica é um campo numérico ordenado da esquerda para a direita (OLIVEIRA, 2019).

Assim sendo, apesar das dificuldades levantadas, o trabalho com as três primeiras atividades proporcionou uma maior aceitação dos Números Inteiros Relativos em um contexto de pontos de referência, principalmente no que se refere à importância do zero no conjunto. Cabe ressaltar que sem o domínio do significado do zero nos Números Inteiros Relativos, o aluno dificilmente compreende esse conjunto numérico e, conseqüentemente, a reta numérica (SALVADOR; NACARATO, 2003)

De fato, a ideia de levar os estudantes a representar matematicamente (DUVAL, 2012; HENRIQUES; ALMOULOU, 2016) locais mais pertos/mais distantes, acima/abaixo do nível do mar ou à esquerda/à direita de um determinado ponto de referência, presente nas atividades didáticas citadas, possibilitou “[...] trabalhar com números cujos valores se modificam conforme a posição ou que se deslocam, proporcionando que os estudantes assimilassem “[...] os mecanismos básicos da reversibilidade por compensação” (TEIXEIRA, 1993, p. 63).

Por sua vez, as dificuldades relativas às propriedades da reta numérica (Tabela 6) demonstraram que os estudantes desconsideraram o sinal do Número Inteiro Relativo, ou seja, por pressuposto, compreenderam que tanto à direita, quanto à esquerda do zero na reta, os números aumentam, pois somente o valor absoluto dos números foi levado em consideração nessas respostas.

Tal incompreensão, exposta nas respostas de alguns estudantes, também se refere ao obstáculo de unificar a reta numérica dos Números Inteiros Relativos (GLAESER, 1985; CID, 2000).

O entendimento da reta como duas semirretas opostas, que têm origem no zero, tanto para a direita como para a esquerda do mesmo, não leva em consideração a necessária ideia de campo numérico crescente e ordenado da esquerda para a direita (CID, 2000; CARAÇA, 2003).

As características observadas na comparação de Números Inteiros Relativos, com o auxílio da reta numérica (Tabela 7), demonstraram que a comparação entre um número inteiro positivo e um inteiro negativo e entre dois inteiros positivos não suscitaram dificuldades nos estudantes.

Possivelmente isso se explique pela ideia consolidada, conforme percebemos nas indicações, que eles têm de que um número negativo sempre será menor que um número positivo e pela facilidade que eles têm em comparar números positivos, pois o trabalho pedagógico com os Números Naturais ocorre desde o início do processo de escolarização.

Os aspectos mencionados anteriormente são importantes, pois conforme Teixeira (1993) a compreensão de um número negativo avança na medida em que o estudante descobre que se um número negativo é menor que um número positivo então existe um ponto de referência de onde negativo e positivo se originam.

Outro fator importante que pode estar relacionado à compreensão das comparações citadas refere-se ao fato de que a atividade em questão solicitou, primeiramente, que os estudantes completassem a reta com os Números Inteiros Relativos faltantes. Provavelmente, visualizar a reta numérica, mesmo com números faltando, proporcionou o estabelecimento de regularidades para completá-la: a direita do zero, números positivos e a esquerda, números negativos. A partir disso, a comparação entre os Números Inteiros Relativos presentes na atividade poderia ser mais trivial.

Por fim, na sexta atividade, os estudantes demonstraram a capacidade de identificar quais Números Inteiros Relativos pertencem a um intervalo determinado (Tabela 8) quando este é positivo ou negativo.

Destaca-se que mesmo aqueles estudantes, que não identificaram todos os números pertencentes aos intervalos descritos, conseguiram citar pelo menos um inteiro que pertencesse a tais intervalos, revelando compreensão de elementos que se encontram à esquerda e à direita de determinados números, nesses casos.

Nesse sentido, a principal dificuldade se revelou diante da impossibilidade da existência de Números Inteiros Relativos em um determinado intervalo.

Considerando a potencialidade da reta numérica presente na atividade anterior e em todas as outras atividades, consideramos que um dos motivos que pode ter levado a essa dificuldade, possivelmente, foi relacionado ao fato de a atividade em questão não contar também com uma reta numérica para que os estudantes pudessem completar. Nesse caso, poucos deles consideraram desenhar uma reta para encontrar os números pertencentes ao intervalo.

Apesar de os itens a), b e c) contarem com a expressão “na reta numérica”, provavelmente, se a atividade em questão contasse com a reta numérica construída, mesmo que parcialmente, haveria menos erros dos estudantes, principalmente diante da impossibilidade da existência de Números Inteiros Relativos em um determinado

intervalo, pois eles poderiam visualizar as situações propostas por meio de uma diferente representação (DUVAL, 2012; HENRIQUES; ALMOULOU, 2016).

9.3 Módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

O trabalho com os conceitos de módulo/valor absoluto e oposto/simétrico no âmbito dos Números Inteiros Relativos compreendeu três atividades didáticas.

A primeira dessas atividades objetivou que os estudantes compreendessem o conceito de módulo ou valor absoluto de um Número Inteiro Relativo. Logo, deveriam, antes, encontrar as distâncias de duas pessoas localizadas em pontos opostos à origem da reta numérica, para que assim, posteriormente, buscassem associá-las ao conceito trabalhado.

Como visto, a distância das duas pessoas em relação à origem era a mesma, sendo que a diferença era que elas se encontravam em lados opostos a esta origem.

Assim, o objetivo principal da atividade era que o estudante entendesse que, apesar de uma pessoa estar em uma posição positiva na reta numérica e outra em uma posição negativa nesta reta, a distância de cada uma delas em relação ao que se determinou como origem é a mesma, ou seja, independentemente do sentido.

Portanto, essa distância possui um valor absoluto ou um módulo, que por definição é um número maior que zero.

As compreensões e dificuldades dos estudantes evidenciadas nas respostas da atividade se encontram categorizadas na tabela 9 a seguir.

Tabela 9: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre módulo de um NIR

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Encontrar a distância de algo a um ponto de referência (zero) (itens a e b)	Estudante associou corretamente a distância de um ponto ao ponto determinado como origem na reta numérica a um número positivo	34/39	87,2
	Estudante associou equivocadamente a distância de um ponto ao ponto determinado como origem na reta numérica a um número negativo	5/39	12,8
Comparar as distâncias presentes na atividade	Estudante afirmou corretamente que as distâncias são iguais, apesar dos pontos estarem localizados em lados opostos	30/39	76,9
	Estudante afirmou equivocadamente que as distâncias são diferentes	9/39	23,1

Relacionar as distâncias encontradas ao conceito de módulo ou valor absoluto	Estudante relacionou corretamente as distâncias dos pontos ao ponto determinado como origem na reta numérica ao conceito de módulo/valor absoluto	35/39	89,7
	Estudante não compreendeu o conceito de módulo/valor absoluto, associando-o a números negativos	4/39	10,3

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

Em relação aos objetivos iniciais da atividade “encontrar a distância de algo a um ponto de referência (zero)” e “comparar as distâncias presentes na atividade”, percebemos que as compreensões dos estudantes superaram suas dificuldades, tanto que, com relação ao primeiro objetivo, dos 39 estudantes, 34 (87,2%) associaram corretamente a distância de um ponto à origem a um número positivo.

“Ele (Pedro) vai caminhar 5 metros também” (A15);

“5 metros, pois ele também está no -5 e porque o 0 conta” (A16);

“[...] deve percorrer 5m, pois é 1m de casa em casa” (B1).

Nessa mesma atividade 5 (12,8%) alunos utilizaram um número negativo para representar o contexto: “[...] a distância que João deve percorrer é de -5 metros” (B15).

Já no caso do segundo objetivo, 30 (76,9%) alunos afirmaram corretamente que as distâncias são iguais, apesar dos pontos localizados em lados opostos, como constatamos em: “[...] estão igualmente a mesma distância, porém muda lados” (A3); “Os dois estão na mesma distância, Pedro está a 5m a direita e João 5m a esquerda” (A20).

Por conseguinte, 9 (23,1%) alunos salientaram, equivocadamente, que as distâncias eram diferentes: “[...] Pedro, porque ele está na direita que está sempre aumentando e João está na esquerda, está diminuindo” (A9); “[...] Pedro, porque a direita os números estão aumentando” (A11); “Eu acho que João, pois está subindo por conta que o valor aumenta e o Pedro desce pois o valor cai como se eles estivessem encontrando o plano que é o 0” (B5).

Tais compreensões refletiram no entendimento do conceito de módulo/valor absoluto pelos participantes da pesquisa.

Corroborar a informação o fato de 35 (89,7%) estudantes relacionarem corretamente as distâncias dos pontos, localizados em lados opostos, à origem ao conceito de módulo/valor absoluto do modo esperado: “Módulo de + ou -5 = 5” (B8); “[...] módulo de -5 até o 0 é de 5 e o módulo de 5+ até o 0 também é 5” (B10); “O módulo é 5 em ambos” (B13), enquanto somente 4 (10,3%) estudantes ainda associaram tal conceito a

números negativos, evidenciando a incompreensão da ideia de módulo/valor absoluto no contexto dos Números Inteiros Relativos.

Com relação à segunda atividade, houve o objetivo de elucidar o conceito de oposto e simétrico no conjunto dos inteiros. Assim sendo, antes de trabalharmos com o conceito em si, buscamos relacionar a distância de pontos até a origem utilizando uma situação do cotidiano que envolveu a distância de três casas, sendo uma delas localizada no ponto -4, outra no ponto + 4 e uma em zero, ou seja, sendo as duas primeiras opostas com relação à origem.

A partir daí, buscamos que os estudantes relacionassem as posições em que as casas se encontravam ao conceito de oposto/simétrico. As compreensões e dificuldades dos 39 participantes da pesquisa se encontram categorizadas na tabela 10 a seguir.

Tabela 10: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre oposto/simétrico de um NIR

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Encontrar a distância de algo a um ponto de referência (zero) (itens a e b)	Estudante associou corretamente a distância de um ponto em relação à origem a um número positivo	30/39	76,9
	Estudante associou equivocadamente a distância de um ponto em relação à origem a um número negativo	9/39	23,1
Relacionar a posição de pontos em relação à origem ao conceito de oposto/simétrico	Estudante associou a posição dos pontos a expressões que indicam a ideia de oposto/simétrico (lados contrários, lados opostos, lados diferentes, lado direito e lado esquerdo)	28/39	71,8
	Estudante considerou somente a posição dos pontos e não a associou ao conceito de oposto/simétrico	6/39	15,4
	Estudante considerou somente as distâncias equivalentes e não as associou ao conceito de oposto/simétrico de um NIR	5/39	12,8
Encontrar o oposto/simétrico de um NIR	Estudante encontrou corretamente o oposto/simétrico dos NIR presentes na atividade	37/39	94,9
	Estudante associou equivocadamente o conceito de oposto/simétrico à distância de um ponto à origem	2/39	5,1

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

Observando os dados presentes na tabela anterior, percebemos que as compreensões superaram as dificuldades em todos os aspectos trabalhados na atividade, desde encontrar a distância dos pontos à origem e relacionar a posição destes ao conceito citado, até encontrar o oposto/simétrico de um Número inteiro Relativo.

Apesar dos pontos se encontrarem em lados opostos da reta, sendo um representado por um número inteiro negativo e outro por um positivo, algumas justificativas nos auxiliam a compreender como os 30 estudantes mencionados relacionaram acertadamente as distâncias a um número positivo: “[...] 4 metros, porque como a casa B está no ponto de origem, não contamos ela, porém contamos o -4 que é o que a casa A está”; “[...] distância é de 4 metros, porque não existe distância negativa (B18)”.

Outras respostas evidenciaram a dificuldade de associar o conceito de distância sempre a um número positivo, como por exemplo em: “[...] 4 metros negativos, pois a casa A é representado aumentando e a C é diminuindo” (A5); “[...] -4 por estar à esquerda da origem que é a B e se for pra frente vai parar no -4” (B2).

Em ambas as respostas percebemos a dificuldade citada, pois a posição negativa da casa e a distância que ela se encontra do zero foram compreendidas como equivalentes para os estudantes.

No caso de relacionar a posição de pontos em relação à origem ao conceito de oposto/simétrico, 28 (71,8%) estudantes conseguiram associar a posição dos pontos a expressões que indicam a ideia de oposto/simétrico, demonstrando compreender a ideia.

“[...] as casas estão no mesmo lugar, porém do lado oposto” (A1);

“[...] a casa A está do lado oposto da C e a casa C está no lado oposto da A” (A9);

“[...] as duas casas (A, C) estão em 4 metros de distância, mas em lados opostos” (B5);

“[...] as duas casas estão a 4 metros da B, mas uma casa é negativa e outra positiva e uma à direita e outra à esquerda e elas estão em lados opostos” (B16).

Outros 11 (28,2%) demonstram não conseguiram relacionar a posição das casas à ideia de oposto, sendo que 6 (15,4%) consideraram somente a posição dos pontos: “[...] a casa A é representada por um número positivo e a C, negativo. A casa B é a origem” (A4), enquanto 5 (12,8%) focaram somente nas distâncias equivalentes: “[...] as duas casas têm 4 metros de distância em relação à casa B” (A14); “[...] as duas levam a mesma distância de 4m para chegar na casa B, portanto a casa B está no centro de tudo” (B1).

Constatamos que, em ambos os casos, os participantes da pesquisa não associaram as características observadas ao conceito de oposto/simétrico de um Número Inteiro Relativo.

Apesar de comparecerem tais dificuldades durante itens voltados à contextualização do conceito, no momento que deveriam encontrar o oposto/simétrico de um número inteiro positivo e de um negativo, somente 2 (5,1%) estudantes associaram equivocadamente o conceito à distância de um ponto à origem, ou seja, possivelmente “confundiram” com o módulo de um Número Inteiro Relativo. Os outros 37 (94,9%) encontraram corretamente o oposto/simétrico dos Números Inteiros Relativos presentes na atividade.

Consideramos que as compreensões relativas aos dois conceitos evidenciadas nas primeiras atividades, baseadas nas respostas dos estudantes, refletiram na realização da terceira, pois o objetivo de propor uma síntese dos conhecimentos adquiridos sobre módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo foi alcançado, uma vez que, a totalidade dos estudantes realizou a atividade corretamente.

Em síntese, os dados referentes às três atividades didáticas relacionadas aos conceitos de módulo e simétrico demonstraram que os estudantes compreenderam o que foi proposto.

Especificamente com relação ao conceito de módulo de um Número Inteiro Relativo, a maioria dos estudantes conseguiu associar e comparar as distâncias de elementos com relação a um ponto de referência, no caso o zero. Além disso, também associaram o conceito de distância a um número positivo, relacionando corretamente as distâncias dos pontos à origem ao conceito trabalhado.

Por fim, no que se refere ao conceito de oposto/simétrico de um Número Inteiro Relativo, um maior número de estudantes associou a distância de um ponto à origem a um número positivo, relacionando a posição de tais pontos em relação à origem ao conceito abordado. De igual modo, a grande maioria determinou corretamente o oposto/simétrico de Números Inteiros Relativos presentes nas atividades didáticas.

9.3.1 Análise das respostas dos estudantes sobre módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo

Analisar compreensões e dificuldades relativas aos conceitos de módulo e valor absoluto de um Número Inteiro Relativo implicou abordar atividades didáticas que envolveram a distância de um ponto à origem, representado pelo zero, no caso.

Nas duas primeiras atividades trabalhadas o conceito de distância se fez presente.

Tanto na atividade em que abordamos o conceito de módulo/valor absoluto (Tabela 9), quanto na que trabalhamos com o conceito de oposto/simétrico (Tabela 10) iniciamos questionando os estudantes sobre qual a distância de pontos opostos à origem, para que eles pudessem perceber que, mesmo que o ponto esteja localizado antes do zero na reta, o módulo, que representa a distância até este ponto, é sempre positivo e, a partir disso, concluir que se um número inteiro positivo e um negativo possuem o mesmo módulo, eles são opostos (TEIXEIRA, 1992; CARAÇA, 2003; BORBA; NUNES, 2014).

Constatamos que nessas atividades as compreensões superaram as dificuldades, pois com relação ao conceito de módulo (Tabela 9), apesar de alguns estudantes relacionarem a distância a um número inteiro negativo e afirmarem que as distâncias entre pontos opostos ao zero eram diferentes, no momento de relacionar tais medidas ao conceito trabalhado, praticamente 90% dos estudantes associaram corretamente ao módulo/valor absoluto.

Analogamente, no que se refere ao conceito de oposto (Tabela 10), ainda que alguns estudantes tenham apresentado dificuldades em encontrar a distância de pontos localizados em lados opostos à origem e em relacionar a posição de tais pontos ao conceito abordado, somente 2 (5,1%), dos 39 alunos que responderam, não encontraram corretamente o oposto de cada Número Inteiro Relativo, conforme proposto na atividade.

O desenvolvimento das duas primeiras atividades com os estudantes demonstrou a importância do trabalho com a reta numérica no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de módulo e simétrico de Números Inteiros Relativos. A utilização desse recurso propiciou aos estudantes a possibilidade de explorar diferentes tipos de representações (DUVAL, 2012; HENRIQUES; ALMOULOU, 2016) para que pudessem compreender os conceitos abordados nessa seção.

Isso se justifica, pois de acordo com Duval (2012) o ensino de conceitos matemáticos deve se basear em uma maior diversidade de representações, já que as concepções dos estudantes, geralmente, são moldadas pelas situações que eles se deparam.

Partindo desse pressuposto, a característica presente nas atividades citadas de propor aos estudantes relacionar a posição dos elementos à distância de um ponto de referência, tanto numericamente quanto em língua materna, contando com o auxílio da reta numérica, ou seja, por meio de um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (VERGNAUD, 1986, 1990), possivelmente colaborou para a construção do

conhecimento pelos estudantes: o módulo de um Número Inteiro Relativo é sempre positivo, pois esse conceito é associado à distância à origem e dois números são opostos quando representados em uma reta numérica, possuírem a mesma distância da origem em relação a outro número.

Assim sendo, constatamos que o trabalho numa reta orientada foi um interessante recurso que permitiu que os estudantes pudessem “visualizar o ponto de referência (origem) a partir da qual se definem os dois sentidos” e “identificar um número e seu oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero” (BRASIL, 1998, p. 98).

Nesse sentido, o objetivo de levar os estudantes a construir os conceitos de módulo e simétrico de Números Inteiros Relativos foi alcançado por meio das atividades propostas desenvolvidas utilizando a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica ECHEVERRÍA; POZO, 1998, VAN DE WALLE, 2009, ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

A terceira atividade abordada com essa temática confirmou essa tendência, pois por se tratar de uma síntese dos conceitos elucidados exigiu que os estudantes demonstrassem compreensões relativas ao módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo. Neste caso, todos os estudantes realizaram a atividade corretamente.

9.4 Ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

Nesta seção abordamos a temática ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos. Portanto, apresentaremos e analisaremos as compreensões e dificuldades dos estudantes em cada uma das seis atividades desenvolvidas sobre esse tema.

Na primeira atividade buscamos trabalhar a ordenação e a comparação de Números Inteiros Relativos no contexto bancário. Para isso, os estudantes deveriam comparar saldos negativos, positivos e entre ambos, além de ordenar saldos negativos. As compreensões e dificuldades, referentes a cada objetivo evidenciado, estão presentes na tabela 11 a seguir.

Tabela 11: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre comparação e ordenação de NIR em um contexto bancário

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Comparar números em um conjunto contendo somente inteiros negativos	Estudante indicou corretamente o maior e o menor dos saldos bancários negativos	33/39	84,6
	Estudante não indicou corretamente o maior e o menor dos saldos bancários negativos	6/39	15,4
Comparar números em um conjunto contendo apenas inteiros positivos	Estudante indicou corretamente o maior e o menor dos saldos bancários positivos	36/39	92,3
	Estudante não indicou corretamente o maior e o menor dos saldos bancários positivos	3/39	7,7
Comparar números em um conjunto contendo inteiros positivos e inteiros negativos	Estudante indicou corretamente o maior e o menor dos saldos bancários (considerando saldos positivos e negativos)	30/39	76,9
	Estudante indicou corretamente o maior saldo, porém erroneamente o menor	9/39	23,1
Ordenar números inteiros negativos	Estudante ordenou corretamente os saldos negativos	36/39	92,3
	Estudante considerou somente o valor absoluto dos números para ordenar	3/39	7,7

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

No que se refere ao objetivo de comparar números em um conjunto contendo somente inteiros negativos, ressaltamos que a maior parte dos estudantes compreendeu a atividade, indicando corretamente o maior e o menor dos saldos negativos listados na situação apresentada.

“Menor- Paulo: -525. Maior: Paulo -98, “Paulo menor -525,00, [...] vendo qual o número mais distante do zero” (A7)

“Paulo maior -98,00, [...] se eu estou devendo mais preciso de mais dinheiro e se estiver devendo menos preciso de menos dinheiro” (B2).

Os estudantes que demonstraram dificuldades, ao compararem os saldos, levaram em consideração somente o valor absoluto dos números, desconsiderando os seus respectivos sinais, como percebemos em: “Paulo: o dia do menor saldo é 15/11 (-R\$ 98,00) e o maior é 12/11 (-R\$ 525). Olhando o dia e o valor de cada um” (B16).

Com relação à comparação de números em um conjunto contendo somente inteiros positivos, grande parte dos estudantes compreendeu e realizou a atividade de acordo com o objetivo proposto, ou seja, eles indicaram corretamente o maior e o menor dos saldos bancários positivos.

Nesse caso, as dificuldades, mesmo que em menor proporção, compareceram ao indicarem o maior saldo, conforme as seguintes indicações, por exemplo: “Joana – Maior 2/11 (R\$ 535,00), menor 12/11 (R\$ 56,00)” (A20); “Joana de 56,00 no dia 12/11 e o maior de 535,00” (B10).

A comparação de números pertencentes a um conjunto contendo inteiros positivos e negativos também foi objetivo desta atividade.

As compreensões relativas ao objetivo, ou seja, considerando saldos positivos e negativos e o fato de indicarem corretamente o maior e o menor dos saldos bancários elencados na atividade estão ilustradas nas seguintes respostas e justificativas:

“Larissa: maior 02/11 (R\$ 723,00), menor 15/11 (-R\$ 127,00), [...] vendo se o número está com sinal de menos” (A1);

“Larissa: menor -127,00 dia 15/11 e o maior 723, 2/11” [...] analisando os números e as pontuações e comparando a distância dos números até o zero” (B9).

Em que pese os estudantes terem demonstrado dificuldades na atividade, houve a indicação somente do maior saldo corretamente e do menor incorretamente: “Larissa = O menor foi dia 12/11(-56,00) e o maior 2/11 (723,00)” (B6).

Por fim, no objetivo de ordenar números inteiros negativos, a maior parte dos estudantes demonstrou compreender a atividade, ordenando os saldos do menor para o maior de acordo com o indicado, conforme evidenciado na resposta a seguir: “12/11 (-525,00), 05/11 (-356,00), 02/11 (-250,00), 15/11 (-98,00)” (A1). Enquanto poucos estudantes demonstraram dificuldades, mais precisamente, consideraram somente o valor absoluto dos números, propondo uma ordenação dos saldos incorreta, como por exemplo em: “O menor é de -98,00, -250,00, -356,00, -525,00” (B16).

Na segunda atividade buscamos evidenciar a comparação de Números Inteiros Relativos em um contexto de temperaturas abaixo e acima de zero em cidades do Mundo.

As compreensões e dificuldades relativas a esse objetivo estão elencadas na tabela 12 a seguir.

Tabela 12: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre comparação de NIR em um contexto de temperatura

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Comparar números em um conjunto contendo inteiros positivos e inteiros negativos	Estudante indicou corretamente a maior e a menor das temperaturas	34/39	87,2
	Estudante indicou corretamente a maior temperatura, porém erroneamente a menor	5/39	12,8
Comparar um número inteiro positivo com um número inteiro negativo	Estudante comparou corretamente as duas temperaturas indicadas na atividade, justificando pelo sinal do número	24/39	61,6
	Estudante comparou corretamente as duas temperaturas indicadas na atividade, justificando pelas propriedades da comparação de NIR e da reta numérica	10/39	25,6
	Estudante comparou corretamente as duas temperaturas indicadas na atividade, mas não justificou	5/39	12,8

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

As compreensões inerentes ao objetivo de comparar números em um conjunto contendo inteiros positivos e negativos foram evidenciadas nas respostas dos estudantes que indicaram corretamente as maiores e menores temperaturas dentre as expostas na atividade

“[...] menor é de Moscou com -9 e a maior é Porto Alegre com 12” (A3);

“Moscou o mais frio com -9 e Porto Alegre o mais quente com 12” (B4).

Em menor proporção, as dificuldades compareceram nas indicações dos estudantes que assinalaram a maior temperatura corretamente, porém não conseguiram definir com êxito a menor, utilizando a lógica da comparação nos naturais, como em: “Chicago com -3 e maior Porto Alegre com 12” (A20).

No caso do objetivo de comparar um número inteiro positivo com um número inteiro negativo, percebemos que todas as respostas se relacionaram a compreensões, uma

vez que todos os estudantes compararam corretamente as temperaturas. A diferença entre o teor das respostas está nas justificativas para tal comparação.

Nesse sentido, 34 (87,2%) estudantes apresentaram justificativas e quatro (12,8%) não, indicando somente a comparação correta. Dos que justificaram, 24 (61,6%) enfatizaram o sinal do número como principal determinante para a comparação das temperaturas.

“[...] menor, porque tem o sinal negativo” (A1);

“[...] menor, porque a de Viena é -8 e São Paulo é 10 sem sinal negativo” (A3);

“Viena é a menor, pois é número negativo e São Paulo é número positivo (A5)”;

“[...] menor. A temperatura de São Paulo é um número positivo” (B14).

Além disso, 10 (25,6%) justificaram as respostas de acordo com propriedades da comparação de Números Inteiros Relativos e da reta numérica

“[...] menor, pois Viena está com 8 graus abaixo de zero, enquanto São Paulo está com 10 graus acima de zero” (A16);

“[...] menor, porque -8 é menor que 10” (A18); “[...] menor, pois o -8 está abaixo de zero” (B1);

“[...] menor, porque o -8 está mais à esquerda do 0” (B13).

A terceira atividade objetivou que os estudantes ordenassem em ordem crescente alguns Números Inteiros Relativos e explicassem quais estratégias para realizar tal ordenação. As compreensões e dificuldades estão presentes na tabela 13 a seguir.

Tabela 13: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre ordenação de NIR

Objetivos da atividade	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Ordenar Números Inteiros Relativos	Estudante ordenou corretamente os números presentes na atividade, justificando que fez “do menor para o maior”	24/38	63,2
	Estudante ordenou corretamente os números presentes na atividade, justificando com as propriedades da reta numérica e comparação de NIR	10/38	26,3
	Estudante não ordenou corretamente os números presentes na atividade, considerando somente os valores absolutos	4/38	10,5
TOTAL		38/38	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022 N=38

A atividade foi respondida por 38 estudantes (um deixou em branco). Percebemos que houve compreensão do objetivo da atividade por 34 (89,5%) estudantes e dificuldades evidenciadas nas respostas de quatro (10,5%) participantes da pesquisa.

As compreensões referiram-se à ordenação correta dos Números Inteiros Relativos presentes na atividade, porém com diferentes justificativas.

A primeira delas, exposta nas indicações de 24 (63,2%) estudantes, buscou enfatizar que ordenou em ordem crescente, como nos seguintes exemplos: “-19, -15, -12, -11, -10, -8, -7, -6, -5, -4, +2 e +3 [...] do menor para o maior” (A11); “-19, -15, -12, -11, -10, -8, -7, -6, -5, -4, +2 e +3. Levei o jogador por números crescentes e achei o caminho que o levava à taça” (A16); “-19, -15, -12, -11, -10, -8, -7, -6, -5, -4, +2, +3. Analisei o trajeto e utilizei do menor para o maior” (B12).

Já a segunda justificativa referiu-se às propriedades da reta numérica e comparação de Números Inteiros Relativos e foi utilizada por 10 (26,3%) estudantes, como percebemos em: “-19, -15, -12, -11, -10, -8, -7, -6, -5, -4, +2 e +3. Do número que está à esquerda até à direita” (A12); “-19, -15, -12, -11, -10, -8, -7, -6, -5, -4, +2, +3 [...] lembrando que os menores (negativos) são os que estão mais distantes do 0” (B1); “-19, -15, -12, -10, -8, -7, -6, -5, -4, 0, +2, +3. Eu fui se aproximando do zero como se fosse uma reta numérica e passando para o positivo” (B5); “-19, -15, -12, -10, -8, -7, -6, -5, -4, 0, +2, +3. Nós fomos da esquerda para direita” (B6).

Por fim, as dificuldades evidenciadas nas respostas de 4 (10,5%) estudantes demonstraram a ordenação incorreta dos Números Inteiros Relativos na atividade, devido ao fato de os estudantes considerarem somente o valor absoluto, não levando em consideração ou não colocando o sinal dos números.

Algumas respostas ilustram esse aspecto, tais como: “2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 16, 18” [...] fui pelo trajeto que ganha mais ponto (A6); “+2, +3, -4, -5, -6, -7, -8, -10, -11, -12, -15, -19 [...] fui da esquerda para à direita” (B7).

A quarta atividade, referente à ordenação e comparação de ordenação de Números Inteiros Relativos, também envolveu o contexto de temperaturas.

Ao abordar a temperatura média de alguns planetas, a atividade objetivou ordenar, comparar e identificar Números Inteiros Relativos em determinados intervalos.

As compreensões e dificuldades dos 37 estudantes que responderam a atividade proposta (dois deixaram em branco) estão descritas na tabela 14 a seguir.

Tabela 14: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre comparação e ordenação de NIR

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Ordenar Números Inteiros Relativos	Estudante ordenou as temperaturas corretamente	34/37	91,9
	Estudante não ordenou as temperaturas corretamente	3/37	8,1
Comparar dois números inteiros negativos	Estudante comparou as temperaturas negativas corretamente	32/37	86,5
	Estudante não comparou as temperaturas negativas corretamente	5/37	13,5
Identificar Números Inteiros Relativos pertencentes a um intervalo	Estudante identificou corretamente temperaturas pertencentes ao intervalo	22/37	59,5
	Estudante não identificou corretamente as temperaturas pertencentes ao intervalo	15/37	40,5

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=37

Com relação ao objetivo de ordenar Números Inteiros Relativos constatamos que as compreensões compareceram em maior número de respostas com relação às dificuldades. Grande parte dos estudantes ordenou as temperaturas corretamente: “-225, -210, -180, -150, -53, -15, 420, 456” (A9). Outros, por considerarem somente o valor absoluto dos números, erraram a ordenação, conforme constatamos na resposta: “15, 53, 150, 180, 210, 220, 235, 420, 456” (A6).

No caso da comparação entre dois Números Inteiros Relativos, mais uma vez as compreensões superaram as dificuldades.

Aspectos relacionados à comparação correta de duas temperaturas negativas (-150°C e -180°C) apresentaram-se nas respostas da maior parte dos estudantes.

“Saturno -180 °C” (B14), ao passo que as dificuldades ficaram evidentes em poucas indicações dos participantes da pesquisa, remetendo principalmente a não consideração do sinal do número, ou seja, à ordenação levando em conta somente valores absolutos, como ilustrado em: “Júpiter, pois ele tem -150° C” (A7); “Júpiter, pois é menor que Saturno” (A16);

Por fim, considerações evidenciadas pelo objetivo de identificar Números Inteiros Relativos pertencentes a um intervalo demonstraram equilíbrio entre compreensões e dificuldades.

Tem-se que pouco mais da metade (59,5%) dos estudantes compreenderam a atividade, ou seja, identificaram corretamente os planetas pertencentes ao intervalo definido de acordo com a temperatura média (entre -200 e 430°C): “Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Mercúrio” (B19), enquanto 40,5% apresentaram dificuldades, assinalando alguns planetas com temperaturas fora do intervalo determinado: “Mercúrio 420°C , Netuno -225°C , Urano -210°C ” (B5).

Em síntese, um maior número de estudantes demonstrou compreensões ao comparar Números Inteiros Relativos em um contexto bancário, ou seja, indicou corretamente o maior e menor saldos entre negativos, entre positivos e em um conjunto contendo saldos abaixo e acima de zero.

No contexto de temperaturas representadas por Números Inteiros Relativos, as compreensões também superaram as dificuldades. Os estudantes, em maior número, conseguiram indicar corretamente a maior e a menor temperaturas, sendo elas acima e abaixo de zero. A principal dificuldade presente nesse caso foi a identificação de temperaturas pertencentes a um intervalo determinado.

Por fim, no caso da ordenação de Números Inteiros, as principais respostas da atividade se referiram à ordenação correta. Poucos estudantes consideraram somente o valor absoluto dos Números Inteiros Relativos durante a ordenação, apresentando dificuldades na resolução da atividade.

9.4.1 Análise das respostas dos estudantes sobre ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos

O desenvolvimento de aspectos referentes à ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos nas atividades propostas envolveu diferentes contextos, tais como: saldos bancários, temperaturas, números inteiros isolados.

Isso se faz necessário pois, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) é preciso levar em consideração que os estudantes desenvolvem, já nas séries iniciais, uma noção intuitiva dos números negativos que advém de experiências do cotidiano, como perder no jogo, identificar saldos negativos, observar variações de temperaturas, comparar alturas, altitudes etc. Essas noções intuitivas possibilitam as primeiras comparações entre inteiros.

Assim sendo, os dados da Tabela 11 revelaram que um maior número de estudantes indicou corretamente o maior e o menor saldo bancário em um conjunto contendo saldos abaixo de zero na atividade. Isso se repetiu quando os estudantes compararam um conjunto contendo somente saldos bancários positivos e saldos positivos e negativos.

As dificuldades referentes às comparações, mesmo que em menor quantidade, apareceram no âmbito de considerar somente o valor absoluto dos saldos, isto é, desconsiderar o sinal negativo dos números.

Possivelmente, alguns alunos tiveram o seguinte questionamento ao resolver a atividade: “se o saldo é mais negativo, porque é menor?”, levando às indicações equivocadas na comparação. Essa confusão não é incomum, pois na comparação entre dois números positivos o maior é o que apresenta maior valor absoluto, já entre negativos tal lógica se inverte, ou seja, o maior é o que apresenta menor valor absoluto (CARAÇA, 2003).

No contexto de temperaturas (Tabela 12) a comparação também não suscitou muitas dificuldades nos estudantes, uma vez que em um conjunto contendo temperaturas acima e abaixo de zero a maior parte dos estudantes conseguiu indicar qual era a maior e a menor.

A principal dificuldade foi encontrar a menor temperatura, comparar números negativos, no caso. Talvez isso se explique pela mesma lógica anterior: “afinal, se a temperatura é mais negativa, por que ela é menor?”. Tal erro provavelmente advém da dificuldade de compreender que “dados dois negativos será maior o que estiver mais próximo do zero” (BRASIL, 1998, p. 99).

Ainda, na comparação entre uma temperatura positiva e uma negativa, representadas por Números Inteiros Relativos (Tabela 12), os estudantes demonstraram compreender a propriedade “um número positivo é sempre maior que um número negativo” (CARAÇA, 2003), uma vez que muitos justificaram a comparação correta pelo sinal do número: um número com sinal positivo é sempre maior que um número negativo (CARAÇA, 2003) ou enunciando propriedades inerentes à reta numérica: dentre dois números inteiros, o maior é o que está mais à direita (CID, 2000; OLIVEIRA, 2019).

Levando em consideração que um dos objetivos das duas primeiras atividades era o de comparar saldos/temperaturas negativas, foi importante trabalhar com esses contextos e levantar tais obstáculos, pois durante a fase depois da lição (VAN DEL

WALLE, 2009), objetivando a discussão entre os estudantes, houve a oportunidade para que eles pudessem chegar a hipóteses válidas de comparação.

Isso porque, os estudantes apresentaram em suas reflexões citadas anteriormente competências parciais para a resolução das atividades, passando por um processo de tentativa e erro, reflexões e hesitações (VERGNAUD, 1990), que posteriormente, possibilitou a construção do conceito de ordenação de Números Inteiros Relativos, principalmente no caso envolvendo os negativos. Nesse sentido, a exposição e discussão de ideias entre os estudantes proporcionou o desenvolvimento das demais atividades propostas nessa seção.

Os dados referentes à ordenação de Números Inteiros Relativos isolados (Tabela 13) também revelaram a compreensão de propriedades da reta numérica anunciadas anteriormente. Esse aspecto é necessário, pois entender que a reta numérica é um campo ordenado da esquerda para a direita é de extrema importância para a aprendizagem dos Números Inteiros Relativos, principalmente com relação à ordenação e à comparação.

Quanto às dificuldades, uma pequena quantidade de estudantes ainda revelou que não compreendeu a questão da importância dos sinais dos números e de propriedades da reta numérica. A origem dessa dificuldade não se dá somente pelo fato de os alunos desconsiderarem o sinal do número, mas também remete ao obstáculo de unificação da reta numérica (GLAESER, 1985; CID, 2000).

Assim sendo, o desenvolvimento da atividade em questão foi primordial para confirmar a tendência observada nos contextos anteriores: grande parte dos estudantes compreendeu a lógica presente na ordenação dos Números Inteiros Relativos. Nesse caso, a comparação se deu no contexto entre inteiros isolados, uma vez que, o objetivo principal era o de identificar um número maior que o anterior para levar o jogador à taça

Por fim, em mais uma atividade envolvendo o contexto de temperaturas na ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos (Tabela 14) as compreensões e dificuldades não se diferenciaram das encontradas na atividade de natureza semelhante (Tabela 12).

Como tal atividade, além das comparações já realizadas, também trabalhou com a identificação de Números Inteiros Relativos pertencentes a um intervalo, mais precisamente elencar temperaturas entre um valor positivo e negativo, cabe ressaltar uma dificuldade: cerca de 40% dos estudantes não responderam a atividade conforme esperado.

Como visto anteriormente, em se tratando do item d) da atividade quatro, dificuldade de semelhante natureza também ocorreu na sexta atividade apresentada na temática reta numérica.

Igualmente, os estudantes não utilizaram estratégias possíveis para a identificação de Números Inteiros Relativos em um determinado intervalo, tais como a construção de uma reta numérica ou a comparação dos números dois a dois. Tal como na referida atividade, essa dificuldade também poderia ser superada se na situação proposta houvesse uma reta numérica construída com os valores máximo e mínimo das temperaturas. Assim, os estudantes poderiam dispor de mais uma representação (DUVAL, 2012) que poderia auxiliá-los a identificar as temperaturas pertencentes ao intervalo determinado.

9.5 Adição de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

Nessa seção apresentamos as compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à operação de adição de Números Inteiros Relativos.

Nas tabelas a seguir, os dados revelam os resultados, com base nas respostas dos estudantes, de oito atividades relacionadas à temática investigada.

Assim sendo, na primeira atividade os estudantes deveriam inicialmente representar e localizar os pontos referentes aos deslocamentos, tanto com Números Inteiros Relativos, como com uma adição envolvendo tais números. Os dados referentes à atividade encontram-se a seguir (Tabela 15).

Tabela 15: Compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à representação e adição de deslocamentos

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Representar deslocamentos na reta numérica	Estudante construiu a reta numérica corretamente e representou os deslocamentos	34/39	87,2
	Estudante não representou os deslocamentos/ não construiu a reta numérica corretamente	5/39	12,8
Representar uma situação utilizando NIR	Estudante utilizou NIR para representar a situação corretamente	37/39	94,9
	Estudante não representou a situação utilizando NIR corretamente	2/39	5,1

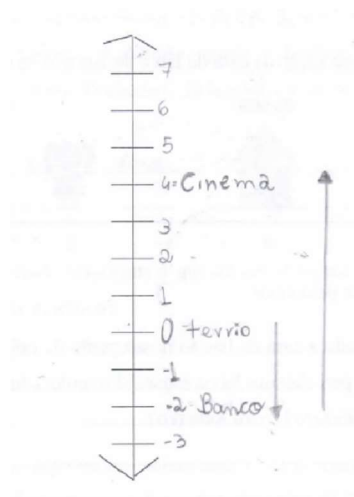
Representar uma situação utilizando uma adição de NIR (transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final)	Estudante representou a situação com uma soma de deslocamentos	27/39	69,2
	Estudante representou somente os deslocamentos, mas não indicou a operação	10/39	25,6
	Estudante indicou somente o resultado da operação	2/39	5,2

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

Com relação ao objetivo de representar os deslocamentos na reta numérica, 34 (87,2%) estudantes indicaram compreender a atividade, ou seja, após construírem corretamente a reta numérica indicando os locais dispostos na atividade, representaram os deslocamentos de acordo com o proposto, exposto na figura a seguir (Figura 29).

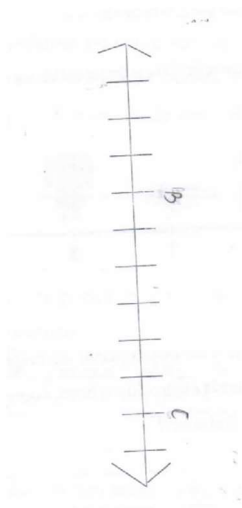
Figura 29: exemplo de estudante que construiu a reta numérica corretamente e representou os deslocamentos



Fonte: dados da pesquisa, 2022

Por sua vez, 5 (12,8%) apresentaram dificuldades em representar o deslocamento, pois não conseguiram construir a reta numérica corretamente, como no exemplo da figura a seguir (Figura 30).

Figura 30: exemplo de estudante que não construiu a reta numérica corretamente



Fonte: dados da pesquisa, 2022

No que se refere à representação de situações utilizando Números Inteiros Relativos as compreensões também superaram as dificuldades.

Dos 39 estudantes que responderam a questão, 37 (94,9%) utilizaram Números Inteiros Relativos para representar a situação proposta na atividade, ou seja, a localização do cinema, como percebemos em: “[...] quatro andares acima do zero (+4)” (A11); “[...] o andar do cinema +4 (acima do térreo)” (B5). Dois (5,1%) estudantes apresentaram dificuldades para representar a situação utilizando Números Inteiros Relativos: “[...] no quarto andar, -4” (A7); “[...] no quarto andar acima do térreo (-4)” (A17).

Indicações dos estudantes relacionadas à representação de situações utilizando adição de Números Inteiros Relativos, demonstraram que 27 (69,2%) estudantes apresentaram compreensões, uma vez que representaram a situação proposta com uma soma de deslocamentos: “ $-2 + 6 = +4$ ” (A1).

Por sua vez, 12 (30,8%) tiveram dificuldades, pois 10 (25,6%) representaram somente os deslocamentos, não indicando a adição: “Laura desceu -2 para baixo e depois subiu +6 andares” (A5); “[...] ela estava no 0 e desceu -2 andares para chegar no banco e depois subiu +6 andares para chegar no cinema que está no +4” (B1); dois (5,1%) indicaram somente o resultado da operação, +4 no caso.

Na segunda atividade também há o trabalho com deslocamentos em determinados locais, representados por pontos da reta numérica. Nesse sentido, os deslocamentos também deveriam ser representados por meio da operação de adição. Os dados referentes a essa atividade estão a seguir (Tabela 16).

Tabela 16: Compreensões e dificuldades referentes à representação e adição de deslocamentos

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Representar deslocamentos na reta numérica com NIR	Estudante representou corretamente com NIR o deslocamento à esquerda de um referencial	37/39	94,9
	Estudante representou corretamente com NIR o deslocamento à direita de um referencial	36/39	92,3
	Estudante atribuiu incorretamente um NIR negativo à um deslocamento à direita de um referencial	3/39	7,7
	Estudante representou o deslocamento à esquerda com a língua materna (Não utilizou NIR)	2/39	5,1
Representar uma situação utilizando uma adição de NIR (transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final)	Estudante representou a situação com uma soma de deslocamentos corretamente	26/39	66,7
	Estudante representou somente os deslocamentos, mas não indicou a operação	10/39	25,6
	Estudante indicou somente o resultado da operação	3/39	7,7
Inferir sobre o resultado da soma de um NIR com seu oposto/simétrico	Estudante concluiu que a soma de um NIR com seu oposto sempre resulta em zero	37/39	94,9
	Estudante não compreendeu a soma de NIR nesse contexto	2/39	5,1

Fonte: elaborado pelo autor, 2022 N=39

O objetivo de representar deslocamentos na reta numérica com Números Inteiros Relativos contou com 78 respostas, pois se referiu a dois itens da atividade. Assim sendo, as compreensões dos estudantes superaram as dificuldades, pois 73 (93,6%) respostas demonstraram que houve a representação correta, utilizando Números Inteiros Relativos, dos deslocamentos a partir de um referencial.

Nos deslocamentos à esquerda houve 37 (94,9%) indicações nas quais os estudantes utilizaram corretamente os Números Inteiros Relativos para a representação, como por exemplo em: “Ela voltou -2” (A5); “-2 (para esquerda)” (B1); “[...] ela terá andado + 2 e depois voltou -2 para pegar o bolo” (B6).

As dificuldades, compreendendo 2 (5,1%) indicações, foram inerentes a não utilização de tais números para a representação, mais precisamente à utilização da linguagem materna para descrever a característica do deslocamento, como percebemos em: “[...] ela estava no 2 e voltou no 0 para buscar o bolo” (B5).

Quanto aos deslocamentos à direita também houve a compreensão da maior parte dos estudantes, contando com 36 (92,3%) indicações, como constatamos em: “[...] ela andou + 2km até perceber que havia esquecido o bolo” (B1).

Mesmo abrangendo uma menor quantidade de respostas, as dificuldades, contando com 3 (7,7%) respostas, referiram-se à atribuição de um número inteiro negativo a um deslocamento à direita de um referencial, -2 ao invés de +2, no caso.

Com relação ao objetivo de representar uma situação utilizando uma adição envolvendo Números Inteiros Relativos, as compreensões compareceram em 26 (66,7%) indicações, enquanto as dificuldades compreenderam 13 (33,3%) respostas.

No que se refere às compreensões, na quantidade de respostas indicadas anteriormente, os estudantes demonstraram que representaram a situação com uma soma de deslocamentos corretamente: “[...] zero, $2 + (-2) = 0$ ” (A9); “ $+2 + (-2) = 0$ (Isis voltou para sua casa)” (A14).

Já as dificuldades abrangeram dois aspectos: em 10 (25,6%) indicações os estudantes representaram somente os deslocamentos, mas não indicaram a adição envolvida: “Ela andou + 2 e -2” (A6); “[...] vendo o percurso que ela fez, ela saiu do 0, andou +2 e depois voltou -2” (B16). Em 3 (7,7%) respostas os estudantes indicaram somente o resultado da operação: “[...] chegou no 0 (centro), a casa dela” (B2); “[...] ela chegou no 0 que é sua própria casa” (B3).

Aspectos relacionados a inferências sobre o resultado da adição de um Número Inteiro Relativo com o seu oposto/simétrico revelaram a compreensão do item em 37 (94,9%) indicações e as dificuldades em 2 (5,1%) respostas.

Inerente às compreensões, os estudantes concluíram corretamente que a soma de um Número Inteiro Relativo com seu oposto sempre resulta zero: “[...] sempre vai dar o número 0, nem positivo nem negativo” (B2); “Independentemente do número e do oposto a soma é sempre é zero” (B18), enquanto as dificuldades revelaram à incompreensão da adição entre os números no contexto determinado na atividade, como podemos perceber em: “[...] ficará do mesmo jeito, porque seria a mesma quantidade” (B17).

A terceira atividade apresentou a adição de Números Inteiros Relativos envolvendo um jogo de pontos ganhos e perdidos. Após preencherem uma tabela referente a cada rodada do jogo, os estudantes responderam questões com que objetivaram formular hipóteses sobre a adição entre inteiros com sinais iguais e com sinais opostos. Os dados referentes à atividade estão presentes a seguir (Tabela 17).

Tabela 17: compreensões e dificuldades dos estudantes na realização e formulação de hipóteses envolvendo adições de NIR

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Realizar adições envolvendo NIR (composição entre duas medidas em uma terceira)	Estudante realizou sucessivas adições envolvendo NIR chegando ao resultado correto da atividade	33/39	84,6
	Estudante realizou incorretamente a adição entre dois inteiros negativos	5/39	12,8
	Estudante não compreendeu como realizar a adição de inteiros no contexto	1/39	2,6
TOTAL		39/39	100
Levantar hipóteses sobre a adição de dois NIR positivos	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros positivos resulta em um número inteiro positivo	29/39	74,3
	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros positivos resulta em um número inteiro maior e positivo	9/39	23,1
	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros positivos resulta em um número inteiro maior que os somados	1/39	2,6
TOTAL		39/39	100
Levantar hipóteses sobre a adição de dois NIR negativos	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro negativo	26/39	66,6
	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro menor/mais negativo e com sinal negativo	9/39	23,1
	Estudante inferiu equivocadamente que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo	3/39	7,7
	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro menor que os somados	1/39	2,6
TOTAL		39/39	100
Levantar hipóteses sobre a adição de dois NIR com sinais opostos	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos pode resultar em um número positivo ou negativo	19/39	48,7
	Estudante inferiu que o sinal do resultado da soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos é atribuído de acordo com o sinal do “maior número”	18/39	46,2
	Estudante inferiu equivocadamente que a soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos resulta somente em um número positivo	2/39	5,1
TOTAL		39/39	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

No item referente à realização de adições envolvendo Números Inteiros Relativos, 33 (84,6%) respostas demonstraram a compreensão dos estudantes, pois estes realizaram corretamente as somas, chegando ao resultado esperado na atividade proposta: “Porque o jogo termina quando algum jogador faz 10 pontos e Matheus fez 11” (A1); “+11. Matheus

acertou o foguete de número +8 e sabendo que ele tem +3, dando nisso, +11” (A5); “[...] porque ele fez 11 pontos, 1 a mais do que é necessário” (A8).

As dificuldades foram inerentes a 6 (15,4%) indicações, referindo-se, em cinco (12,8%), à realização incorreta da adição entre dois inteiros negativos: “[...] sim, porque ele fez 13 pontos, 3 a mais do que é necessário” (realizou a adição $-6 + (-1)$ incorretamente, afirmando que a resposta seria -5) (A9); e em 1 (2,6%), a não compreensão de como realizar as adições de inteiros no contexto determinado (estudante (A14) não considerou a pontuação acumulada em cada rodada antes de realizar as adições).

No que se refere ao objetivo de levantar hipóteses sobre a adição entre dois Números Inteiros Relativos positivos, nas 39 respostas, houve somente aspectos ligados às compreensões.

Vinte e nove (74,3%) dos estudantes inferiram corretamente que a soma de dois números inteiros positivos resulta em número inteiro positivo: “[...] o resultado da positivo” (A2); “[...] o resultado sempre será positivo” (A16); “[...] uma conta normal e vai dar um resultado positivo” (B2).

Já para 9 (23,1%) estudantes, além de ressaltarem o sinal positivo da soma, houve menção ao resultado maior do que os dois números a serem adicionados: “Vai dar um número maior e positivo” (A9); “[...] quando são dois números positivos o sinal continua o mesmo e o resultado é um número positivo mais alto” (B5).

Em 1 (2,6%) indicação houve a conclusão de que a soma de dois números inteiros positivos resulta em um número inteiro maior que os somados: “[...] vira maior que os dois positivos anteriores” (B16).

Com relação às hipóteses levantadas pelos estudantes sobre a adição de dois Números Inteiros Relativos negativos, 36 (92,3%) indicações remeteram a compreensões.

Em 26 (66,6%) respostas os estudantes afirmaram que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro negativo: “[...] se juntarmos daria um número negativo” (A6); “[...] o resultado sempre será negativo” (A13).

Nove (23,1%) estudantes indicaram que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro menor ou “mais negativo” e possui o sinal negativo: “Vai dar um número menor e negativo” (A10); “[...] seria negativo menor que todos” (B18).

Um (2,6%) estudante ressaltou que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro menor que os somados: “[...] daria um número menor, pois está mais longe do zero” (A5).

Em que pesem as dificuldades, nesse caso, 3 (7,7%) estudantes indicaram aspectos relacionados ao sinal da adição entre dois inteiros negativos, afirmando equivocadamente que a referida resulta em um número inteiro positivo: “[...] daria o resultado com adição” (A7).

No objetivo de levantar hipóteses sobre a adição de dois Números Inteiros Relativos diferentes com sinais opostos, 19 (48,7%) respostas indicaram que os estudantes ressaltaram, sem justificar, que a soma de dois números inteiros distintos com sinais opostos pode resultar em um número positivo ou negativo: “Pode dar um número positivo ou negativo” (A11).

Em 18 (46,2%), houve a afirmação de que sinal do resultado da soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos é atribuído de acordo com o sinal do “maior número”: “se o número positivo for maior que o negativo o resultado é positivo, mas se for ao contrário o resultado é negativo” (B9); “[...] se o positivo for maior será positivo, mas se o negativo for maior que o positivo será negativo” (B17).

Por fim, em 2 (5,1%) respostas os estudantes inferiram equivocadamente que a soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos resulta somente em um número positivo: “[...] qualquer número que dar no resultado vai dar positivo, porque o número positivo é maior que o negativo” (A3).

A quarta atividade objetivou o trabalho com a adição de Números Inteiros Relativos por meio de padrões/regularidades. Os estudantes deveriam descobrir a operação realizada, adição no caso, por meio da observação de tais regularidades. As respostas de 38 estudantes (1 não respondeu) para essa atividade estão categorizadas a seguir (Tabela 18).

Tabela 18: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à descoberta da operação da adição em um padrão pré-determinado

Objetivos da atividade	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Descobrir a operação envolvida no padrão numérico pré-determinado	Estudante determinou a operação correta para completar o padrão (adição)	18/38	47,4
	Estudante indicou erroneamente a operação de subtração para completar o padrão	14/38	36,8

	Estudante não indicou a operação que utilizou para completar o padrão	6/38	15,8
TOTAL		38/38	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=38

No caso do objetivo de descobrir a operação envolvida no padrão numérico pré-determinado, as dificuldades, demonstradas em 20 (52,6%) respostas, superaram as compreensões que foram relativas a 18 (47,4%) indicações.

Isso ocorreu, pois em 18 (47,4%) indicações os estudantes determinaram a operação correta para completar o padrão, afirmando que seria a adição: “[...] adição, somando os números” (A1); “[...] eu observei os números que já estavam feitos e descobri que os números eram somados entre eles” (A12).

Já em 14 (36,8%) respostas houve a indicação da subtração como operação que foi utilizada para completar o padrão: “[...] eu descobri analisando as linhas [...] certeza que era para fazer conta de menos (subtração)” (B12).

Em 6 (15,8%) não houve a indicação da operação: “[...] descobrindo e fazendo conta” (A5); “[...] a operação era chegar no 0” (B7); “[...] fazendo as contas com base no exemplo (B17).

Na quinta atividade os estudantes realizaram adições envolvendo Números Inteiros Relativos no contexto de pontos ganhos e pontos perdidos, objetivando explorar a composição de duas transformações e realizar comparações entre medidas negativas.

As compreensões e dificuldades de 37 estudantes (2 não responderam), de acordo com as respostas da atividade, estão presentes a seguir (Tabela 19).

Tabela 19: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à realização de adições de NIR em um determinado contexto

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Realizar adições envolvendo NIR em um determinado contexto (composição de duas transformações)	Estudante considerou a pontuação referente aos acertos e erros, calculando corretamente a adição (item a)	34/37	91,9
	Estudante considerou a pontuação referente aos acertos e erros, calculando corretamente a adição (item b)	31/37	83,8
	Estudante calculou somente os pontos ganhos/considerou somente a quantidade de acertos (item a)	3/37	8,1
	Estudante calculou somente os pontos ganhos/considerou somente a quantidade de acertos (item b)	3/37	8,1

	Estudante não considerou a pontuação de cada questão correta/errada de acordo com o proposto na atividade	3/37	8,1
Realizar comparações entre duas medidas negativas	Estudante comparou as duas pontuações e chegou à conclusão correta de que o resultado seria um NIR positivo	28/37	75,7
	Estudante não chegou à resposta esperada, pois calculou as pontuações incorretamente nos itens anteriores	5/37	13,5
	Estudante comparou as duas pontuações e chegou à conclusão equivocada de que o resultado seria um NIR negativo	4/37	10,8

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=37

No que se refere ao objetivo de realizar adições de Números Inteiros Relativos no contexto de pontos ganhos e perdidos, a maior parte dos estudantes considerou a pontuação referente aos erros e acertos, calculou e representou corretamente a adição no item a), como por exemplo em: “-8, ele perdeu 12 pontos e ganhou 20: $12 + (-20) = -8$ ” (A4); “ $4 \times 3 = 12$, $5 \times 4 = 20$, $12 + (-20) = -8$. Lucas fez -8 pontos” (A9). Nesse mesmo item, as dificuldades apresentadas pelos estudantes se deram, pois calcularam somente a quantidade de pontos ganhos: “12, porque 4×3 da doze” (A11) ou consideraram somente a quantidade de acertos para determinarem a pontuação final: “Ele está com +4 inteiros” (B2).

Com relação ao item b) que também objetivou o cálculo de pontuação utilizando adição de Números Inteiros Relativos, os estudantes apresentaram compreensões, pois calcularam corretamente a adição após considerarem a pontuação referente aos erros e acertos: “Primeiro ela fez 15 pontos corretos (5×3), depois errou 16 pontos (4×4). Ela terminou com -1 a operação é representada com $15 - 16$ ” (A13); “Rafaela fez +15 pontos e perdeu -16 pontos, no total ela ficou com -1” (B1).

Já as dificuldades relativas a esse item compreenderam seis indicações (16,2%): 3 (8,1%) estudantes calcularam somente os pontos ganhos ou consideraram somente a quantidade de acertos para determinarem a pontuação final: “Rafaela fez +5” (B2) e 3 (8,1%) não calcularam a soma de acordo com o proposto na atividade, ou seja, não levaram em conta a pontuação de cada questão correta ou errada conforme o item, como por exemplo em: “Rafaela fez 2 pontos positivos” (A14).

Aspectos referentes ao objetivo de realizar comparações entre duas medidas negativas (determinar quantos pontos uma pessoa fez a mais que outra, no caso da atividade) demonstraram que as compreensões superaram as dificuldades.

Isto porque, 28 (75,7%) estudantes compararam as duas pontuações e chegaram à conclusão de que o resultado seria um Número Inteiro Relativo positivo: “Rafaela fez +7 pontos a mais que Lucas” (A17), enquanto 9 (24,3%) não apresentaram a resposta esperada para o item, indicando um inteiro negativo como resposta, como por exemplo em: “Rafaela fez -7 pontos a mais que Lucas” (A21) ou considerando somente a quantidade de acertos, sem levar em conta a pontuação, como ilustrado em: “1 a mais (+1)” (A4).

A sexta atividade explorou a adição de Números Inteiros Relativos no contexto bancário. Cada item dessa atividade remeteu a uma situação: adição entre dois inteiros positivos, entre dois negativos e entre um negativo e positivo. As compreensões e dificuldades de 37 estudantes (dois não responderam) com relação a essa atividade estão categorizadas a seguir (Tabela 20).

Tabela 20: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à adição de NIR em um contexto bancário

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Realizar adição entre NIR positivos (transformação de uma relação)	Estudante desenvolveu corretamente a adição proposta	33/37	89,2
	Estudante realizou incorretamente uma subtração entre os itens propostos	3/37	8,1
	Estudante errou o algoritmo durante o desenvolvimento da adição	1/37	2,7
Realizar adição entre NIR negativos (transformação de uma relação)	Estudante desenvolveu corretamente a adição proposta	21/37	56,8
	Estudante realizou incorretamente uma subtração entre os itens propostos	16/37	43,2
Realizar adição entre NIR com sinais opostos (transformação de uma relação)	Estudante desenvolveu corretamente a adição proposta	34/37	91,9
	Estudante errou o algoritmo durante o desenvolvimento da adição	3/37	8,1

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=37

No caso do objetivo de realizar adição de Números Inteiros Relativos positivos, 33 (89,2%) estudantes apresentaram compreensões, desenvolvendo corretamente a

operação proposta, como ilustrado nas seguintes indicações: “205 reais ($120 + 85 = 205$)” (A19); “[...] você tem 205,00 reais, pois somei 120,00 reais mais 85,00 reais que dá 205,00” (B5).

Com relação às dificuldades houve a interpretação incorreta da situação evidenciada nas respostas de 3 (8,1%) estudantes, uma vez que realizaram uma subtração entre os itens propostos ao invés da adição: “Ela tem agora R\$35,00 ($120 - 85 = 35$)” (A8). Ainda, 1 (2,7%) estudante errou o algoritmo durante o desenvolvimento da adição: “Ele tem agora 305,00” (A3).

No que se refere ao objetivo de realizar adição entre Números Inteiros Relativos negativos, as compreensões superaram as dificuldades, uma vez que 21 (56,8%) estudantes desenvolveram corretamente a adição proposta no item: “Eva tem -270,00 reais negativos pois somei os dois números negativos com adição” (B6), enquanto 16 (43,2%) apresentaram dificuldades, realizaram incorretamente uma subtração entre os dados da atividade, desconsiderando os sinais negativos das dívidas, como evidenciado em: “ $175 - 95 = 80$. Eva tem 80,00” (A17).

Por fim, o objetivo de realizar adição entre Números Inteiros Relativos com sinais opostos foi compreendido por 34 (91,9%) estudantes que desenvolveram corretamente a adição proposta, conforme exemplificado em: “Alex deve ainda 71 reais ($-138 + 67$)” (B18).

As dificuldades que compareceram nas respostas de 3 (8,1%) estudantes foram inerentes a erros do algoritmo durante o desenvolvimento da adição: “Ele ainda deve a ela R\$ 101,00” (B8).

A situação envolvendo dívidas e créditos no âmbito da adição de Números Inteiros Relativos foi evidenciada na sétima atividade que objetivou o trabalho com a composição de duas relações. As compreensões e dificuldades de 37 estudantes (dois não responderam) estão categorizadas a seguir (Tabela 21).

Tabela 21: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à representação e adição de uma situação envolvendo NIR

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Representar e calcular uma situação utilizando soma de inteiros negativos	Estudante utilizou a adição de inteiros negativos para representar e calcular corretamente a soma das dívidas.	17/37	46
	Estudante utilizou uma adição para representar e calcular a dívida, porém não considerou o sinal negativo das dívidas.	15/37	40,5
	Estudante representou somente as dívidas de maneira isolada utilizando NIR, porém calculou a soma das dívidas corretamente	4/37	10,8
	Estudante utilizou a língua materna para representar a situação, porém calculou a soma das dívidas corretamente	1/37	2,7
TOTAL		37/37	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=37

Aspectos relacionados à representação e o cálculo envolvendo a adição de Números Inteiros Relativos negativos no contexto de dívidas e créditos evidenciaram que as dificuldades superaram as compreensões dos estudantes.

Constatamos que menos da metade dos estudantes (17 estudantes- 46%) utilizou a adição para representar e calcular corretamente a soma das dívidas, conforme ilustrado em: “ $-120 + (-200) = -320 + (+425) = 105$. Isabela está devendo R\$ 105,00 para Pedro” (A16).

Outros 20 estudantes (54%) apresentam dificuldades. 15 deles (40,5%) utilizaram a adição para representar e calcular a dívida, porém não consideraram o sinal negativo das dívidas: “ $120,00 + 200,00 = 320,00 + 425,00$. Ela está devendo R\$105,00”.

Ainda, 4 (10,8%), apesar de calcular a soma das dívidas corretamente utilizaram somente Números Inteiros Relativos para representar as dívidas e não no momento do cálculo: “ $200 + 120 = 320$ (dinheiro que ele pegou). “ $425 - 320 = 105$ (dinheiro que ele emprestou). Devendo, -105 reais” (A7).

Por fim, 1 (2,7%) estudante realizou a soma das dívidas corretamente, apesar disso, utilizou somente a língua materna para representar a situação: “Isabela está devendo 105,00, Pedro estava devendo 120,00 para ela e pegou mais 200 e Pedro deu 425,00 para ela” (B11).

Por conseguinte, a oitava atividade encerrou a temática adição de Números Inteiros Relativos. Nela, os estudantes, após preencherem uma tabela contendo diversas somas envolvendo tais números, deveriam levantar hipóteses sobre o resultado da adição entre dois números inteiros com sinais iguais e com sinais diferentes, sobre a adição entre

dois números opostos/simétricos e com relação ao resultado da soma de Números Inteiros Relativos com zero.

Os dados referentes às respostas de 37 estudantes (2 não responderam) para essa atividade estão categorizados a seguir (Tabela 22).

Tabela 22: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes às propriedades da adição de NIR

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Levantar hipóteses sobre o resultado da adição de dois NIR positivos	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros positivos resulta em um número inteiro com sinal positivo (+)	29/37	78,4
	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros positivos resulta em um número inteiro maior que os somados	4/37	10,8
	Estudante inferiu que para somar dois números inteiros positivos realiza-se a adição e mantém o sinal positivo (+)	2/37	5,4
	Estudante associou equivocadamente a soma de dois números inteiros positivos à distância de um número ao outro	2/37	5,4
Levantar hipóteses sobre o resultado da adição de dois NIR negativos	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro negativo	32/37	86,5
	Estudante inferiu que para somar dois números inteiros negativos realiza-se a adição e mantém o sinal negativo (-)	3/37	8,1
	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro menor que os somados	2/37	5,4
Levantar hipóteses sobre o resultado da adição de dois NIR com sinais opostos	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos pode resultar em um número positivo ou negativo	23/37	62,2
	Estudante inferiu que o sinal do resultado da soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos é determinado pelo sinal do “maior número”	14/37	37,8
Levantar hipóteses sobre o resultado da adição de dois NIR opostos/simétricos	Estudante inferiu que a soma de dois números inteiros opostos/simétricos sempre resulta em zero	35/37	94,6
	Estudante inferiu erroneamente que o sinal da soma de dois números inteiros opostos/simétricos é determinado pelo sinal do “maior número”	2/37	5,4
Levantar hipóteses sobre o resultado da	Estudante inferiu que a soma de um número inteiro positivo com zero resulta no próprio número inteiro positivo	37/37	100

adição de NIR com zero	Estudante inferiu que a soma de um número inteiro negativo com zero resulta no próprio número inteiro negativo	37/37	100
-------------------------------	--	-------	-----

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=37

Os dados apresentados demonstraram que 35 (94,6%) estudantes conseguiram formular hipóteses válidas sobre a adição entre dois Números Inteiros Relativos positivos. Destes, 29 (78,4%) inferiram que a soma de dois números inteiros positivos resulta em um número inteiro com sinal positivo: “[...] vai dar um número inteiro positivo” (A1).

Quatro estudantes (10,8%) salientaram que tal adição resulta em um número inteiro maior que os presentes na soma: “Daria um número positivo maior” (A5); “dá mais valor” (B5) e dois (5,4%) afirmaram que para a realização da adição entre inteiros positivos deve acontecer a soma e manter o sinal positivo: “Soma e mantém o sinal” (B18). Já as dificuldades encontradas nas respostas de 2 (5,4%) estudantes referiram-se à associação equivocada da adição entre dois inteiros positivos à distância de um número ao outro: “[...]resultado da distância de um número a outro” (A4).

No caso da adição entre dois Números Inteiros Relativos negativos as respostas evidenciaram somente hipóteses ligadas à compreensão dos 37 estudantes que responderam a atividade, pois 32 (86,5%) estudantes associaram o resultado da operação a um número inteiro negativo “O número continua negativo” (A10), 3 (8,1%) estudantes inferiram que para realizar essa soma, adiciona-se os dois números e mantém o sinal negativo: “Soma e coloca negativo” (B18) e 2 (5,4%) afirmaram que o resultado dessa adição é um número inteiro menor que os que foram somados: “Daria um número positivo menor, pois tá mais longe da origem” (A5).

Com relação à adição entre dois Números Inteiros Relativos com sinais opostos, também houve aspectos relacionados à compreensão nas respostas dos 37 estudantes. Vinte e três (62,2%) deles inferiram que tal soma pode resultar em um número inteiro positivo ou negativo, apresentando uma compreensão parcial, pois não justificaram a afirmação, como percebemos em: “Dependendo da conta vai dar número positivo ou negativo” (A8).

Além disso, para 14 (37,8%) estudantes o sinal do resultado da soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos é determinado pelo sinal do “maior número”: “[...] vai ter o sinal do número maior” (A1); “depende vai ser positivo ou vai para negativo, exemplo: $(-8) + 5 = -3$ / $(-8) + 9 = 1$ ” (B15).

As hipóteses referentes ao resultado da adição de dois Números Inteiros Relativos opostos/simétricos foram relacionadas, em maior número, às compreensões.

Nesse caso, 35 (94,6%) estudantes inferiram que tal soma sempre resulta em zero: “Vai dar zero” (A2); “Nessa conta daria zero pois são número opostos e simétricos, tipo $-5 + 5$ daria zero” (A5), enquanto 2 (5,4%) apresentando dificuldades afirmaram, erroneamente, que o sinal da adição de dois números inteiros opostos/simétricos é determinado pelo sinal do “maior número”: “O sinal é decidido com base no número maior da adição” (A16).

Por fim, compreensões relativas à adição de zero com um Número Inteiro Relativo foram evidenciadas nas respostas dos 37 (100%) estudantes, uma vez que houve a constatação de que a soma de um número inteiro positivo/negativo com zero resulta no próprio número inteiro positivo/negativo.

Em síntese, os dados demonstraram que em relação à adição de Números Inteiros Relativos os estudantes, em maior número, representaram corretamente o contexto dos deslocamentos como uma soma, sendo o deslocamento à esquerda/para baixo inerente a um número negativo e à direita/para cima a um número positivo.

No caso da adição de Números Inteiros Relativos no contexto de pontos ganhos e perdidos a maior parte dos estudantes realizou as somas corretamente e, conseqüentemente, levantar hipóteses coerentes sobre o resultado dessa operação no âmbito do conjunto Z .

As maiores dificuldades compareceram na adição de Números Inteiros Relativos no contexto de padrões e regularidades. Nesse caso, mais da metade dos estudantes não conseguiu determinar que a operação inerente ao padrão estabelecido na atividade era a adição.

Por fim, as adições entre dois números inteiros negativos também suscitaram dificuldades, principalmente as que envolveram a transformação de uma relação. Os estudantes apresentaram dificuldades em representar as situações bancárias referentes a dívidas com Números Inteiros Relativos negativos.

9.5.1 Análise das respostas dos estudantes sobre adição de Números Inteiros Relativos

Elucidar compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à adição de Números Inteiros Relativos implicou abordar diversos contextos em que essa operação pode ser desenvolvida.

Assim sendo, os dados referentes ao contexto de deslocamentos na adição de Números Inteiros Relativos (Tabela 15 e Tabela 16) revelaram que os estudantes conseguiram compreender que os deslocamentos à direita/para cima e à esquerda/para baixo podem ser representados por números positivos e negativos, respectivamente.

Nesse caso, constatamos que a construção de reta numérica auxiliou nesse entendimento, uma vez que praticamente todos os estudantes, nessa atividade, a construíram corretamente e representaram os deslocamentos, ou seja, converteram a representação da operação numérica para a representação geométrica na reta dos inteiros (DUVAL, 2012). Esse aspecto é importante, pois “[...] é no trânsito entre esses diversos registros de representação que se encontra a “chave” para a aprendizagem em matemática” (HILLESHEIN; MORETTI, 2013, p.123).

Assim, compreendemos que as duas primeiras atividades didáticas dessa seção contribuíram para a introdução do conceito de adição de Números Inteiros Relativos, principalmente no que diz respeito à transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009).

Isso se justifica, pois ao abordar deslocamentos à esquerda/baixo e à direita/cima a atividade possibilitou aos estudantes perceber que tais deslocamentos são representados por um acréscimo e o que os difere é o sentido, que pode ser positivo ou negativo. Tanto é que, praticamente 70% dos estudantes representaram corretamente os deslocamentos com a expressão matemática, na primeira e na segunda atividade, apesar de se tratar de situações iniciais.

Assim sendo, o objetivo da atividade de explorar o cálculo do local de chegada por meio da adição de Números Inteiros Relativos, ou seja, a transformação quantificada de uma medida inicial em uma medida final (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009) foi atingido de modo satisfatório pelos estudantes.

Mesmo os que não apresentaram êxito na representação algébrica, conseguiram representar geometricamente, na reta numérica, a situação proposta. Possivelmente, esse aspecto também possibilitou levar os estudantes à compreensão de que a soma de Números Inteiros Relativos opostos ou simétricos resulta em zero.

Se observarmos as dificuldades que compreenderam tal contexto, percebemos que alguns estudantes não indicaram a operação realizada, somente os deslocamentos e outros, apesar de não indicar nenhum desses, calcularam o resultado da operação. Os últimos citados, ainda que apresentassem dificuldades em representar a adição realizada, conseguiram chegar ao resultado, possivelmente por um cálculo mental.

Provavelmente isso se explique pois, em contextos anteriores, os sinais positivo e negativo remetiam somente às operações aritméticas de adição e subtração entre Números Naturais e não eram utilizados também, como nos Números Inteiros Relativos, para indicar o resultado de uma operação, ou o sentido do deslocamento (CID, 2015), conforme visto nas atividades didáticas trabalhadas. Nesse contexto, a representação dos deslocamentos com uma adição se tornou um obstáculo, pois no conjunto dos Números Inteiros Relativos, os sinais fazem parte da notação usada para representar a qualidade de determinados números (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015).

Por meio de aspectos explorados na atividade referente aos deslocamentos à esquerda e à direita (Tabela 16) os estudantes também puderam inferir sobre o resultado da soma de um Número Inteiro Relativo com seu oposto/simétrico. Houve a compreensão, pois somente dois não inferiram que o resultado dessa adição é zero.

Tais compreensões destacadas são importantes para os processos de ensino e de aprendizagem desse conceito, pois de acordo com Borba e Nunes (2004), os Números Inteiros Relativos têm propriedades que são invariantes, ou seja, se mantêm constantes mesmo que se esteja trabalhando no âmbito de medida, transformação ou relação.

Assim sendo, o entendimento de algumas propriedades, tais como: “números positivos e negativos de mesmo valor absoluto se cancelam; quando dois números negativos são adicionados o resultado é sempre um número negativo menor que qualquer um dos números somados” reforça a compreensão dos estudantes do conceito de Número Inteiro Relativo (BORBA; NUNES, 2004, p.79).

A situação envolvendo pontos ganhos e pontos perdidos na adição de Números Inteiros Relativos (Tabela 17 e Tabela 19) também demonstrou potencialidades na aprendizagem dos estudantes.

A maior parte dos estudantes realizou corretamente adições de Números Inteiros Relativos referentes à composição entre duas medidas em uma terceira, composição de duas transformações e comparações entre duas medidas negativas (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009).

A partir disso, buscaram levantar hipóteses sobre essa operação nesse conjunto (Tabela 17). Assim, apesar de comparecerem em menor número, as dificuldades foram inerentes ao resultado da adição envolvendo dois inteiros negativos e entre dois inteiros com sinais opostos.

Outra potencialidade que destacamos na atividade é referente ao preenchimento da tabela que propiciou aos estudantes a conversão da representação em língua materna em linguagem algébrica (DUVAL, 2015). Ao representarem a adição da pontuação inicial de cada rodada com o valor novo que aparece, os estudantes puderam levantar hipóteses sobre o resultado da operação entre dois números inteiros positivos, entre inteiros negativos e com sinais opostos.

A operação de adição de Números Inteiros Relativos associada a padrões numéricos (Tabela 18) suscitou certa dificuldade nos estudantes.

Em um primeiro momento, essa atividade demonstrou um grande potencial, pois muitos estudantes completaram corretamente o padrão proposto, realizando o preenchimento de cada bloco por meio da composição entre duas medidas em uma terceira (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009). Porém, os dados revelaram que mais da metade deles não indicou a operação utilizada para o preenchimento, ou atribuiu a construção do padrão à subtração.

Possivelmente isso se explique pela dificuldade de ampliação do conceito de adição em $\mathbb{Z}$, que não se restringe à ideia de acrescentar. Afinal, como a adição entre dois números resulta em um número menor? Diminuir não é inerente à subtração, como visto no conjunto dos naturais? A não compreensão possivelmente advém do fato de a adição ganhar mais significados no contexto de como, por exemplo, de associação e de composição (TEIXEIRA, 1993; CID, 2000).

Nesse caso, consideramos fundamental o trabalho com mais atividades envolvendo padrões numéricos de adição de Números Inteiros Relativos. Provavelmente, o desenvolvimento de situações diversas relativas à “descoberta de números que estão faltando” pela observação de regularidades poderia diminuir a dificuldade salientada anteriormente.

No que se refere à adição de Números Inteiros Relativos em um contexto bancário (Tabela 20) os estudantes apresentaram compreensões referentes à adição de inteiros positivos e entre números com sinais opostos.

A principal dificuldade apresentada foi na adição entre inteiros negativos, mais precisamente no cálculo de uma transformação de uma relação (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009). Essa característica se inverteu no caso da soma de inteiros no contexto de composição de duas relações (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009) (Tabela 21), em que os estudantes conseguiram calcular as dívidas, apesar de que um pouco mais da metade teve dificuldades em representar a adição das dívidas.

Tais dificuldades estão em consonância com os estudos de Cid (2015). A autora ressalta, por meio de sua pesquisa, que os estudantes resolvem corretamente os problemas no âmbito da estrutura aditiva dos inteiros, mas utilizam Números Naturais sempre que possível para obter a resposta correta.

Logo, não se produziu a unificação do conjunto dos Números Inteiros Relativos, mas houve a ideia de que os inteiros negativos existem e são opostos aos positivos (CID, 2015).

Possivelmente, isso se justifique, pois somente um item das atividades didáticas dessa seção abordou a soma entre dívidas, ou seja, já havia um saldo negativo que deveria ser acrescido de mais uma dívida. Além disso, é provável que a forma de redação da questão também dificultou sua interpretação, pois os estudantes poderiam entender que os 175 reais seriam para pagar a dívida referente ao saldo negativo de 95 reais da conta-corrente e não que seria mais uma dívida a ser acrescida.

Por fim, no momento de levantar hipóteses sobre o resultado da adição entre Números Inteiros Relativos (Tabela 22) as dificuldades encontradas, mesmo que em um número pequeno de indicações, foram inerentes à adição entre inteiros com sinais positivos e à adição entre dois inteiros opostos/simétricos. Provavelmente, a associação do sinal do resultado da soma entre dois números opostos/simétricos ao sinal do “maior número” foi devido à confusão dos estudantes com a expressão “números inteiros com sinais opostos”.

Se considerarmos os dados referentes à atividade anterior (Tabela 17) percebemos que houve uma melhora significativa em algumas das dificuldades apresentadas.

No caso do objetivo de levantar hipóteses sobre a adição de dois números inteiros negativos, três estudantes haviam inferido equivocadamente que a soma resulta em um número positivo (Tabela 17), enquanto na última atividade dessa seção isso não ocorreu, uma vez que todos os estudantes levantaram hipóteses válidas sobre a operação (Tabela 22).

O mesmo aconteceu no caso da adição de dois números inteiros com sinais opostos. Anteriormente, dois estudantes chegaram à conclusão equivocada de que a soma de dois números inteiros diferentes com sinais opostos resulta somente em um número positivo, enquanto na última atividade essa dificuldade não compareceu.

Aparentemente, o fato de se trabalhar com uma sequência de operações contextualizadas, com a propriedade comutativa e com o preenchimento de tabelas nas atividades propostas corroborou para que os estudantes a compreenderem que a adição

de dois números negativos pode ser calculada se somar os seus módulos e conservar o sinal negativo no resultado. Além disso, contribuiu para que os estudantes pudessem explorar esta operação envolvendo dois números com sinais opostos, de um modo a perceber que a soma entre eles é obtida subtraindo-se os valores absolutos, dando-se o sinal do número que tiver maior valor absoluto.

9.6 Subtração de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

Na primeira atividade referente à subtração de Números Inteiros Relativos buscamos trabalhar com as situações que envolvem os significados de comparar, tirar e completar. Para tanto, o contexto abordado na situação-problema foi o de um jogo em que os participantes a cada rodada ganhavam ou perderiam pontos de acordo com as cartas do baralho retiradas.

Determinar quantos pontos faltam para vencer o jogo, quantos pontos um jogador tem a mais que o outro ou o que acontece quando um deles perde um ponto faz parte do trabalho com os significados evidenciados anteriormente. Os dados referentes às respostas de 36 estudantes (três deixaram em branco) estão presentes a seguir (Tabela 23).

Tabela 23: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação aos significados da subtração

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Realizar subtração entre duas medidas (Comparar)	Estudante comparou corretamente duas medidas positivas (calculou quantos pontos têm a mais)	36/36	100
	Estudante comparou corretamente uma medida positiva com uma medida negativa (calculou quantos pontos têm a mais)	33/36	91,7
	Estudante comparou incorretamente uma medida positiva com uma medida negativa (desconsiderou o sinal das pontuações)	3/36	8,3
	Estudante comparou corretamente duas medidas negativas (calculou quantos pontos têm a mais)	26/36	72,2
	Estudante comparou incorretamente duas medidas negativas (atribuiu um valor negativo)	10/36	27,8
	Estudante comparou corretamente uma medida negativa com zero (calculou quantos pontos têm a mais)	31/36	86,1
	Estudante comparou incorretamente uma medida negativa com zero (atribuiu um valor negativo)	5/36	13,9

Realizar subtração entre duas medidas (Completar)	Estudante completou corretamente duas medidas positivas (calculou quantos pontos faltam)	36/36	100
	Estudante completou corretamente uma medida positiva com uma medida negativa (calculou quantos pontos faltam)	36/36	100
	Estudante completou corretamente uma medida negativa com zero (calculou quantos pontos faltam)	36/36	100
	Estudante completou corretamente duas medidas negativas (calculou quantos pontos faltam)	36/36	100
Realizar subtração entre duas medidas (Tirar)	Estudante subtraiu corretamente uma unidade de uma medida positiva (calculou qual seria a nova pontuação)	36/36	100
	Estudante subtraiu corretamente uma unidade de uma medida negativa (calculou qual seria a nova pontuação)	35/36	97,2
	Estudante subtraiu incorretamente uma unidade de uma medida negativa (desconsiderou o sinal do número)	1/36	2,8
	Estudante subtraiu corretamente uma unidade de zero (calculou qual seria a nova pontuação)	35/36	97,2
	Estudante subtraiu incorretamente uma unidade de zero (atribuiu um valor positivo)	1/36	2,8

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=36

Objetivando subtrair uma medida da outra, para realizar uma comparação, os itens se referiram a quatro situações: comparação entre duas medidas positivas, comparação entre uma positiva e uma negativa, entre duas medidas negativas e entre zero e uma medida negativa. Em todos os casos os estudantes deveriam calcular quantos pontos um jogador tem a mais que o outro.

Nesse sentido, as compreensões relacionadas à comparação entre duas medidas positivas foram evidenciadas nas indicações dos 36 (100%) estudantes que responderam a questão, ou seja, ao calcularem quantos pontos Luiz obteve a mais que Ana na primeira rodada chegaram ao resultado correto de cinco pontos a mais: “ $7-2 = 5$ ” (A12); “Luiz fez 5 pontos a mais” (A14).

Aspectos relacionados à comparação entre uma medida positiva e uma negativa também evidenciaram mais compreensões do que dificuldades dos estudantes, pois 33 (91,7%) compararam corretamente tais medidas, calculando corretamente quantos pontos Luiz obteve a mais que Ana na segunda rodada: “três pontos a mais” (B1); “+3 pontos” (B13). Apesar de em menor número, 3 (8,3%) estudantes apresentaram dificuldades, pois

não compararam corretamente as pontuações envolvidas na rodada: “1 ponto” (A7); “-1 ponto” (A21).

Na comparação entre duas medidas negativas houve 26 (72,2%) indicações referentes a compreensões e 10 (27,8%) a dificuldades. Algumas respostas sugeriram que os estudantes compararam corretamente as pontuações negativas de Luiz e Ana: “+1 ponto” (A1); “1 ponto a mais (B10)”, enquanto outras evidenciaram as dificuldades para realização do item: “-1 ponto a mais” (A8); “-1 ponto” (A9).

No caso da comparação de uma medida positiva com zero, 31 (86,1%) indicações revelaram que os estudantes compararam corretamente as pontuações: “+3 pontos” (A2); “3 pontos a mais” (B1), ao passo que 5 (13,9%) apresentaram dificuldades: “-3 pontos” (A15) (A18).

Com relação ao objetivo de realizar subtrações entre duas medidas para completar, os dados revelaram que em todos os itens referentes ao cálculo de quantos pontos que faltam para os jogadores atingirem a pontuação final e vencerem o jogo, os estudantes apresentaram compreensões. Todas as respostas dos 36 (100%) estudantes reforçaram que eles completaram corretamente duas medidas positivas, duas negativas, negativa e zero e negativa e positiva.

Por fim, no objetivo de realizar subtrações entre medidas para tirar, as compreensões superaram as dificuldades. Dos 36 estudantes que responderam os itens, todos (100%) subtraíram corretamente uma unidade de uma medida positiva, 35 (97,2%) subtraíram corretamente uma unidade de uma medida negativa e 35 (97,2%) subtraíram corretamente uma unidade de zero. Somente 1 (2,8%) estudante apresentou dificuldades, subtraindo incorretamente uma unidade de uma medida negativa e de zero, respectivamente.

A segunda atividade envolvendo a subtração de Números Inteiros Relativos relacionou esta operação ao contexto de ganhos e dívidas. Assim sendo, os estudantes deveriam calcular o saldo a partir dos dados expostos na situação-problema, representar cada contexto por meio de um Número Inteiro Relativo e explorar a ideia de “retirada de uma dívida”. Os dados referentes às respostas de 37 estudantes (2 não responderam) para a atividade estão presentes posteriormente (Tabela 24).

Tabela 24: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à representação e à realização da subtração

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Realizar subtração e adição de NIR em um contexto bancário	Estudante calculou corretamente o saldo final, atribuindo um valor negativo à resposta	34/37	91,9
	Estudante não compreendeu a expressão “saldo”, relacionando à “gasto”	3/37	8,1
Representar situações envolvendo NIR em linguagem matemática	Estudante representou corretamente com um NIR positivo o contexto envolvendo valor “ganho”	37/37	100
	Estudante representou corretamente com um NIR negativo o contexto envolvendo “despesa”	37/37	100
	Estudante não representou corretamente a “soma de despesas” (representou somente o gasto total)	15/37	40,5
	Estudante não representou corretamente a “soma de despesas” (representou somente o gasto parcial)	14/37	37,9
	Estudante representou corretamente a “soma de despesas” com uma adição de NIR	8/37	21,6
Representar e Realizar a subtração de um número negativo – (-)	Estudante utilizou a expressão – (-) para representar a “retirada de uma dívida”	15/37	40,5
	Estudante representou a “retirada de uma dívida” com um NIR positivo	15/37	40,5
	Estudante não compreendeu a “retirada de uma dívida” no contexto dos NIR	4/37	10,8
	Estudante utilizou a subtração para representar a “retirada de uma dívida”	3/37	8,2

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=37

No caso do objetivo de realizar operações de adição e subtração de Números Inteiros Relativos no contexto de ganhos e dívidas (bancário), 34 (91,9%) calcularam corretamente o saldo final, atribuindo um valor negativo à resposta.

“-4, pois ele tá com uma dívida de R\$ 4,00” (A5);

“[...] seu resultado será de -R\$4,00, pois a mesada dela não cobre os gastos” (A12);

“-39 + (-15) = -54. -54 + (+50) = -4” (A20);

“12+10+8+9+15=54, 50-54=-4. O saldo da Giovana é de -4,00 reais” (B9).

As dificuldades foram expostas nas respostas de 3 (8,1%) estudantes que relacionaram a expressão saldo ao valor do gasto total: “[...] o saldo de Giovana será 54,00” (A14); “[...] calculamos as despesas e acrescentamos 15,00 reais que daria 54,00 reais, ou seja, o saldo seria 54,00” (B8).

Compreensões relacionadas à representação de situações envolvendo Números Inteiros Relativos em linguagem matemática demonstraram que 37 (100%) estudantes relacionaram corretamente o valor dos ganhos a um número inteiro positivo e o valor das despesas a um inteiro negativo.

Porém, na soma das despesas os estudantes apresentaram dificuldades, uma vez que 29 (78,4%) não representaram corretamente, sendo que 15 (40,5%) representaram somente o valor total gasto, -54 no caso e 14 (37,9%) representaram somente o gasto parcial, -15, referente valor do presente no contexto trabalhado.

Somente 8 (21,6%) estudantes apresentaram compreensões relativas à atividade, representando corretamente a soma das despesas como uma adição entre Números Inteiros Relativos: $-39 + (-15) = -54$.

Por fim, o objetivo de representar e realizar uma subtração de um número inteiro negativo mostrou mais compreensões que dificuldades, pois 15 (40,5%) estudantes representaram a retirada de R\$15,00 uma dívida corretamente: “- (-15). $-54 - (-15) = -54 + 15 = -39$ ” (A20); “ $-54 - (-15) = -39$ ” (B1).

Outros 15 (40,5%) estudantes compreenderam a retirada da dívida como um número inteiro positivo: “ $-54 + 15 = -39$ ” (A13); “[...]ela gastou 15 [...] depois ela pegou +15 de volta” (B16). Quatro (10,8%) estudantes não compreenderam a retirada de uma dívida no contexto dos Números Inteiros relativos, como exemplificado na seguinte resposta: “ela está com 54 reais” (A6); enquanto três (8,2%) utilizaram erroneamente a subtração para tal representação: “ $54 - 15 = 39$, seu novo saldo será de R\$39,00” (B5); “ $-54 - 15 = 39$ ” (B6).

Na terceira atividade a subtração de Números Inteiros Relativos envolveu o contexto da variação de temperatura, ou seja, o cálculo da diferença entre as temperaturas final e inicial. Portanto, os estudantes deveriam calcular a variação em dois momentos: temperatura final menor que a inicial e temperatura inicial menor que a final.

As compreensões e dificuldades dos 38 estudantes (1 não respondeu) que responderam a atividade se encontram a seguir (Tabela 25).

Tabela 25: compreensões e dificuldades dos estudantes sobre subtração de NIR no contexto da variação de temperatura

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Calcular a variação de temperatura (temperatura final menor que a inicial)	Estudante respondeu incorretamente (atribuiu valor positivo à variação)	14/38	36,8
	Estudante respondeu corretamente qual foi a variação, mas não justificou	12/38	31,6
	Estudante respondeu corretamente qual foi a variação e justificou com cálculos	6/38	15,8
	Estudante respondeu corretamente qual foi a variação e justificou de outras maneiras	6/38	15,8
Calcular a variação de temperatura (temperatura final maior que a inicial)	Estudante respondeu corretamente qual foi a variação e justificou de outras maneiras	16/38	42,1
	Estudante respondeu corretamente qual foi a variação, mas não justificou	14/38	36,8
	Estudante respondeu corretamente qual foi a variação e justificou com cálculos	6/38	15,8
	Estudante respondeu incorretamente (atribuiu valor negativo à variação)	2/38	5,3

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=38

No objetivo de calcular a variação quando a temperatura final é menor que a inicial, 24 (63,2%) estudantes compreenderam totalmente ou parcialmente a atividade e 14 (36,8%) apresentaram dificuldades.

Do total de estudantes que calcularam corretamente tal variação, 12 (31,6%) somente responderam a atividade, mas não justificam a estratégia que utilizaram para chegarem nessa conclusão, como por exemplo em: “-11°C” (A1); “A temperatura varia em -11” (A13).

Seis (15,8%) estudantes responderam corretamente qual foi a variação e justificaram com cálculos: “11-20 = -11, a temperatura diminuiu 11°C durante o dia” (B14); “[...] temperatura baixou bastante, eu usei de subtração, baixou 11°C” (B16). Também, 6 (15,8%) responderam corretamente e justificaram de outras formas, como em: “[...] fizemos a reta e contamos do 9 até 20 e a diferença é -11” (B3); “Caiu 11 graus, chegamos a essa conclusão contando de 1 em 1 na reta” (B5).

As dificuldades evidenciadas nas respostas de 14 (36,8%) estudantes demonstraram que a variação foi compreendida de modo incorreto, pois houve a

atribuição de um valor positivo ao cálculo: “ $20 + (-9) = 11$, conta de menos” (A8); “ $20 - 9 = 11$. Eu subtraí e a variação é 11” (B9).

Com relação ao objetivo de calcular a variação quando a temperatura inicial é menor que a final, 36 (94,7%) estudantes responderam corretamente a atividade e 2 (5,3%) não.

Aspectos relativos à compreensão deste objetivo demonstraram que 16 (42,1%) estudantes responderam corretamente qual foi a variação de temperatura e justificaram de maneiras diversas, como por exemplo:

“-2 até + 10, dá 12, subiu 12°C ” (A5);

“12 C, eu apenas contei do -2 até o + 10 para saber o resultado” (A12);

“A variação é de 12°C . Não fiz nenhuma operação, apenas contei do -2 até o +10” (A16).

“Aumentou 12°C , eu fiz a reta e contei de 1 em 1” (B5);

[...] fui contando do -2 ao +10 que deu 12 (B13); “A variação foi de 12°C positivo é só adicionar 2 até chegar no zero e adicionar 10°C positivos” (B14).

Outros 14 (36,8%) calcularam a variação corretamente, porém não justificaram: “+ 12°C ” (A1); “variação foi de 12°C ” (B1).

Seis (15,8%) responderam corretamente e utilizaram cálculos para explicarem as estratégias: “ $+10 - (-2) = 12$ ” (A4); “Eu calculei $+10 - (-2) = 12$ ” (A6).

Por fim, somente 2 (5,3%) estudantes responderam incorretamente qual foi a variação, pois atribuíram um valor negativo ao aumento de temperatura: “Aumenta - 12°C ” (B6); “Aumentou - 12°C ” (B8).

A quarta atividade também abordou a subtração de Números Inteiros Relativos no contexto de diminuição na temperatura. Os estudantes deveriam representar uma temperatura final após uma queda de 6°C , sendo que a temperatura inicial era de 2°C e a referida subtração que envolveu essa diminuição.

As compreensões e dificuldades dos estudantes estão presentes a seguir (Tabela 26).

Tabela 26: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à representação e subtração de NIR no contexto de temperatura

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Representar uma temperatura utilizando NIR	Estudante representou corretamente a temperatura com um NIR negativo	38/39	97,4
	Estudante representou incorretamente a temperatura com um NIR positivo	1/39	2,6
Representar uma queda de temperatura com uma subtração de NIR	Estudante representou corretamente a queda de temperatura com uma subtração de NIR	26/39	66,6
	Estudante utilizou uma subtração incorreta para representar a queda de temperatura	12/39	30,8
	Estudante não compreendeu como representar a queda de temperatura com uma subtração	1/39	2,6

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

No primeiro item dessa atividade, os estudantes deveriam representar a nova temperatura atingida depois de uma diminuição de 6°C por meio de um Número Inteiro Relativo. Com relação a esse objetivo, 38 (97,4%) estudantes representaram corretamente a temperatura final utilizando um inteiro negativo, -2°C no caso, enquanto somente 1 (2,6%) apresentou dificuldades na resolução da atividade, representando a nova temperatura com um inteiro positivo: “+2 positivo” (A3).

A fim de representar uma queda de temperatura utilizando uma subtração entre Números Inteiros Relativos, 26 estudantes que responderam apresentaram compreensões, respondendo corretamente ao item, como constatamos em: “ $4-6 = -2$ ” (A1); “[...] seria possível $4-6 = -2$ ” (B18).

Doze (30,8%) representaram a situação de maneira incorreta, pois não utilizaram a subtração conforme esperado: “ $6 - 4 = -2$ ” (B1); “[...] a conta é $(+4) - (-6) = -2$ ” (B9)”. Um estudante também apresentou dificuldades, pois não compreendeu como representar a queda de temperatura com uma subtração. Ao ser questionado na atividade sobre a possibilidade de representação com tal operação, respondeu: “sim, utilizando a reta da temperatura” (B3).

A quinta atividade objetivou o trabalho com dois tipos de subtração no contexto dos Números Inteiros Relativos: ao cálculo da transformação pela diferença entre o estado final e o estado inicial e ao cálculo do estado inicial pela aplicação da transformação inversa ao estado final.

As compreensões e dificuldades dos estudantes referentes a essa atividade se encontram categorizadas a seguir (Tabela 27).

Tabela 27: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à operação de subtração no contexto de encontrar a transformação e o estado inicial

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Encontrar a transformação a partir da diferença entre os estados inicial e final	Estudante calculou corretamente a transformação (idade de Eratóstenes)	37/39	94,9
	Estudante calculou incorretamente a transformação	2/39	5,1
Encontrar o estado inicial a partir da diferença entre o estado final e a transformação	Estudante calculou incorretamente o estado inicial (ano de nascimento de Pitágoras) com uma adição de NIR	21/39	53,8
	Estudante calculou corretamente o estado inicial (ano de nascimento de Pitágoras) com uma subtração de NIR	18/39	46,2

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

Aspectos relacionados ao cálculo da transformação por meio da diferença entre os estados inicial e final demonstraram que os estudantes compreenderam tal objetivo, uma vez que 37 (94,9%) calcularam corretamente a idade de Eratóstenes, conforme proposto na situação-problema, como evidenciado nas seguintes respostas: “ $(-276) - (-196) = 80$ ” (A1); [...] viveu 80 anos (B3). Por sua vez, 2 (5,1%) apresentaram dificuldades, calculando incorretamente a transformação: “Ele viveu 472 anos $(276+196)$ ” (A11); “ $-276 + 196 = -80$ ” (B8).

O objetivo de encontrar o estado inicial a partir da diferença entre o estado final e a transformação suscitou mais dificuldades nos estudantes, pois 21 (53,8%) utilizando a operação de adição calcularam incorretamente o ano de nascimento de Pitágoras, como podemos constatar em: “ $(-497) + (+74) = 423$ ” (A1); “Ele nasceu em 423 a.C.” (B7)."

As compreensões foram evidenciadas nas respostas de 18 (46,2%) estudantes que determinaram o estado inicial por meio de uma subtração de Números Inteiros Relativos: “Ele nasceu no ano 571 a.C.” (A15); “ $-497 - (+74) = -571$ ” (B8).

Na sexta atividade referente à subtração de Números Inteiros Relativos o contexto utilizado foi o de sequências numéricas.

Em um primeiro momento, os estudantes deveriam observar se a sequência exposta na atividade era crescente ou decrescente e, a partir disso, formular hipóteses sobre a construção da sequência e calcular os próximos elementos. Destaca-se que cada termo da sequência era calculado subtraindo vinte unidades (ou adicionado -20 unidades) ao termo anterior.

As compreensões e dificuldades de 36 estudantes (3 não responderam) relativas a essa atividade estão categorizadas a seguir (Tabela 28).

Tabela 28: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à subtração de NIR no contexto de sequências numéricas

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Descrever as estratégias que foram utilizadas para construção da sequência de NIR	Estudante afirmou que a sequência é decrescente e justificou que a construção foi realizada do maior para o menor	16/36	44,4
	Estudante afirmou que a sequência é decrescente e justificou que a construção foi realizada subtraindo 20 unidades do número anterior	9/36	25
	Estudante afirmou que entre os números positivos a construção da sequência foi subtraindo 20 unidades e entre os números negativos, adicionando -20 unidades	5/36	14
	Estudante afirmou que a sequência é decrescente e identificou um padrão diferente para a construção que foi realizada	3/36	8,3
	Estudante afirmou que a sequência é decrescente e justificou que a construção foi realizada de 20 em 20 sem especificar a operação utilizada	3/36	8,3
Identificar os próximos números de uma sequência de NIR	Estudante identificou corretamente os próximos números da sequência	25/36	69,4
	Estudante não indicou corretamente os próximos números da sequência (indicou os dois antes do primeiro termo/ indicou um número antes do primeiro termo e um depois do último)	6/36	16,7
	Estudante não compreendeu como identificar os próximos números na sequência de NIR	3/36	8,3
	Estudante não considerou o sinal dos números da sequência	2/36	5,6

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=36

No objetivo de descrever as estratégias que foram utilizadas para construção da sequência de Números Inteiros Relativos presente na atividade, 16 (44,4%) estudantes somente afirmaram que tal sequência foi determinada do maior para o menor, sem maior detalhamento, como constatamos em: “[...] ele fez do maior para o menor” (A3); “Do

número maior para o menor (do positivo para o negativo)” (A4); “[...] vem primeiro o maior depois o menor” (B17).

Nove (25%) estudantes justificaram corretamente que a construção da sequência foi realizada subtraindo 20 unidades do número anterior: “Ele pensou em ir tirando de 20 em 20” (B10); “Subtraindo de 20 em 20” (B13); “[...] ele diminui 20 em 20”.

Cinco (14%) estudantes pensaram a construção da sequência em duas partes: afirmaram que entre os números positivos a construção da sequência foi subtraindo 20 unidades e entre os números negativos, adicionando -20 unidades: “[...] estava subtraindo 20 de cada número positivo e trocando o sinal do número negativo ele estava somando - 20” (A12).

Três (8,3%) estudantes salientaram que a sequência é decrescente, justificando que a construção foi realizada de 20 em 20 sem especificar a operação utilizada, como constamos em: “Renato fez uma sequência de 20 em 20” (A1); “[...] fez de 20 em 20” (A19).

Também, 3 (8,3%) estudantes identificaram um padrão diferente para a construção que foi realizada: “[...] Ele colocou primeiro os números que acabaram com 4 e depois os que acabaram com 6” (B6).

Com relação ao objetivo de identificar os próximos números da sequência presente na atividade, os dados revelaram que as compreensões superaram as dificuldades, uma vez que 25 (69,4%) estudantes conseguiram encontrar os próximos dois números, -76 e -96, no caso e 11 (30,6%) não identificaram tais números corretamente.

Dentre os estudantes que apresentaram dificuldades referentes a esse objetivo, 6 (16,7%) indicaram os dois números antes do primeiro termo: “104 e 116” (A19) ou indicaram um número antes do primeiro termo e um depois do último: “-76 e 106” (A4).

Além disso, 3 (8,3%) estudantes não compreenderam como identificar os próximos números na sequência, indicando valores aleatórios, tais como: “18, porque ele está contando em 4 em 4” (A11); “76 no positivo e -64 no negativo”. Por fim, 2 (5,6%) estudantes não consideraram o sinal dos números da sequência, indicando valores absolutos: “76 e 96” (A3, B11).

A sétima atividade utilizou o contexto bancário para abordar a subtração de Números Inteiros Relativos. Nesta atividade, os estudantes deveriam calcular e representar o acúmulo de dívidas, além da transformação, ou seja, o valor depositado, conhecendo os saldos inicial e final por meio de uma subtração.

Os dados referentes às compreensões e dificuldades de 35 estudantes (4 não responderam) para essa atividade estão presentes a seguir (Tabela 29).

Tabela 29: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à subtração de NIR no contexto bancário

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Calcular e representar a operação referente ao acúmulo de duas dívidas	Estudante calculou corretamente a dívida total e representou a operação com uma adição de NIR	18/35	51,4
	Estudante calculou corretamente a dívida, mas não representou qual operação utilizou	13/35	37,2
	Estudante calculou corretamente a dívida total e representou a operação com uma subtração de NIR	2/35	5,7
	Estudante calculou corretamente a dívida total, mas não representou a operação utilizada incorretamente	2/35	5,7
Calcular e representar a operação referente à transformação (subtração entre estados final e inicial)	Estudante desconsiderou o saldo negativo e calculou incorretamente o valor depositado com uma subtração	14/35	40
	Estudante calculou corretamente o valor depositado e representou a operação com uma subtração de NIR/utilizou reta numérica	12/35	34,3
	Estudante calculou corretamente o valor depositado, mas não representou a operação que utilizou	5/35	14,3
	Estudante calculou incorretamente o valor depositado com uma adição	4/35	11,4

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=35

No que se refere ao objetivo de calcular e representar a operação referente ao acúmulo de duas dívidas, 18 (51,4%) estudantes calcularam corretamente e representaram tal operação utilizando uma adição entre Números Inteiros Relativos.

“Ele está devendo R\$146,00, $(-50) + (-96) = -146$ ” (A1);

“Luciano está devendo R\$ -146,00. $(-96) + (-50) = -146$ ” (A5);

“Ele está devendo R\$ 146,00. Eu somei dois números e por eles serem negativos e serem uma soma, dá um alto valor negativado” (B5).

Treze estudantes (37,2%) também informaram corretamente a dívida, porém não representaram a operação utilizada: “Ele está devendo R\$ 146,00 (-146)” (A13); “Ele está devendo -146,00 reais no próximo mês” (B15).

Dois (5,7%) estudantes calcularam corretamente a dívida e a representaram com a operação de subtração: “ $-96 - 50 = -146$. Com uma conta de menos ele está devendo 146 reais” (A10); “Ele está devendo 146,00. Operação de menos, $-90 - 50$ ”.

Por fim, 2 (5,7%) estudantes calcularam corretamente a dívida, mas apresentaram dificuldades na representação, como constatamos em: “R\$ 146,00, $96 - (-50) = -146$ ” (A8).

Para o objetivo de calcular e representar a operação referente ao depósito (transformação) por meio de uma subtração entre saldos final (estado final) e inicial (estado inicial) as dificuldades foram um pouco maiores que as compreensões, de modo que 18 (51,4%) estudantes calcularam incorretamente e 17 (48,6%) corretamente.

A principal dificuldade que levou ao cálculo incorreto, presente nas respostas de 14 (40%) estudantes, foi o fato deles desconsiderarem o saldo negativo inicial, conforme percebemos nas seguintes respostas: “R\$ 66,00, $130 - (+64) = 66$ ” (A9); “Ele depositou R\$ 66,00 (+66)” (A16); “66,00 eu fiz $130,00 - 64$ deu 66,00 reais” (B17). Outros 4 (11,4%) utilizaram uma adição para calcular o valor depositado, levando à resposta incorreta da atividade: “ $-130 + (+64) = -66$ ” (B8).

Aspectos relacionados à compreensão demonstraram que 12 (34,3%) estudantes calcularam o item corretamente e representaram a operação com uma subtração ou utilizaram a reta numérica como justificativa: “ $64 - (-130) = 194$ ” (A14); “Ele fez um depósito de R\$ 194,00. Eu fiz uma pequena reta e contei até o 0 e para chegar no 0 ele teria pagado R\$130,00, mais 64 foram 194” (B5). Por fim, 5 (14,3%) estudantes calcularam corretamente o valor depositado, mas não representaram a operação utilizada: “Ele depositou R\$194,00, +194” (A7); O valor depositado será de 194 (B6).

Em suma, os estudantes demonstraram compreensão com relação à operação de subtração de Números Inteiros Relativos no contexto de pontos ganhos e perdidos, mais especificamente no caso de comparar, completar e tirar.

No contexto bancário na subtração de Números Inteiros Relativos os estudantes também evidenciaram potencialidades, calculando corretamente saldos finais por meio de operações matemáticas. No caso da operação “menos com menos” $-(-)$ cerca de 40% dos estudantes compreenderam a aplicação no contexto, enquanto a mesma porcentagem considerou a síntese, ou seja, $-(-) = +$. Cabe destacar que a principal dificuldade se referiu à subtração entre estados final e inicial.

Na subtração de Números Inteiros Relativos trabalhada por meio da variação de temperaturas as dificuldades compareceram, uma vez que poucos estudantes justificaram a variação negativa com cálculos. De igual modo, na variação positiva também houve a mesma dificuldade, pois apesar de indicarem o valor correto, as justificativas com a

operação de subtração da temperatura final pela inicial compareceram em menor quantidade.

Ainda no contexto da temperatura, mas envolvendo a operação de subtração para representar diminuições, os dados se invertem com relação ao exposto anteriormente. Nesse caso, um maior número de estudantes representou corretamente a queda da temperatura com uma subtração de Números Inteiros Relativos.

Outras dificuldades compareceram no âmbito de cálculos do estado inicial a partir da diferença entre o estado final e a transformação. Um pouco mais da metade dos estudantes utilizou uma adição para o cálculo, ao invés da subtração, conforme esperado.

Por fim, as respostas dos estudantes com relação à operação de subtração de Números Inteiros Relativos trabalhada por meio do contexto de padrões/regularidades também demonstraram potencialidades. Apesar da dificuldade de descreverem quais estratégias foram utilizadas para a construção da sequência de Números Inteiros Relativos (subtração, no caso), os estudantes determinaram corretamente os próximos números da sequência.

9.6.1 Análise das respostas dos estudantes sobre subtração de Números Inteiros Relativos

Analisar compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à subtração de Números Inteiros Relativos exigiu o desenvolvimento de atividades envolvendo diferentes contextos.

Assim sendo, o primeiro contexto explorado foi o de pontos ganhos e perdidos no âmbito de três significados da subtração: comparar, tirar e completar (Tabela 23).

Os dados evidenciam que as compreensões se referiram principalmente à comparação entre duas medidas positivas, à comparação entre uma medida positiva e uma negativa e à comparação entre uma medida negativa e zero.

Nesse sentido, os estudantes calcularam corretamente, por meio de uma subtração, quantos pontos um jogador tem a mais que o outro. Por sua vez, a principal dificuldade surgiu no momento de calcular quantos pontos um jogador tem a mais que o outro entre duas medidas negativas, em que cerca de 30% atribuíram um valor negativo a tal comparação, sendo que a subtração entre as pontuações resultaria em um número inteiro positivo.

É provável que a comparação equivocada aconteceu pela dificuldade que os estudantes têm de compreender que subtrair um número inteiro negativo pode resultar em

inteiro positivo. Isso acontece, pois, de acordo com Teixeira (1993) para operar com inteiros é fundamental que o estudante compreenda que na subtração de Números Inteiros Relativos também deve-se considerar o conceito de inversão e não somente a ideia de tirar. “Subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição” (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

No caso da subtração, com o significado de completar, percebemos que os estudantes, em sua totalidade, calcularam quantos pontos faltavam corretamente nas diferentes situações: envolvendo duas medidas positivas, uma medida positiva e uma negativa e duas medidas negativas.

Ainda nessa atividade, a subtração com significado de tirar também não suscitou dificuldades nos estudantes, uma vez que somente um subtraiu incorretamente uma unidade de uma medida negativa e de zero, enquanto os outros realizaram a operação conforme esperado.

Nesse sentido, observamos que a primeira atividade em questão colaborou com a compreensão dos estudantes sobre os significados da subtração citados anteriormente no contexto dos Números Inteiros Relativos. Consideramos que o contexto utilizado na atividade estimulou os estudantes na resolução.

Além disso, a tabela presente na atividade contando com expressões de comparação como “quantos pontos Luiz tem a mais que Ana em cada rodada?” ou “quantos pontos faltam Luiz atingir a pontuação final e ser vencedor?” foi um diferencial para a compreensão dos significados da operação, pois proporcionou o estabelecimento de regularidades nas subtrações envolvendo Números Inteiros Relativos, mais precisamente entre inteiros positivos, negativos e positivos, zero e negativo e entre negativos.

A subtração de Números Inteiros Relativos também foi abordada no contexto bancário (Tabela 24). Nesse caso, os estudantes calcularam corretamente o saldo, mas a principal dificuldade observada foi com relação à representação de uma retirada de uma dívida. Alguns estudantes desconsideraram o sinal predicativo do número ou não compreenderam como representar esse contexto no âmbito da subtração entre Números Inteiros Relativos.

Tal dificuldade, apesar de encontrada em menor proporção, está em consonância com um dos obstáculos que os estudantes apresentam na aprendizagem de Números Inteiros Relativos apontado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais: “perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos Números Naturais - por exemplo, é

possível adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado, como também é possível subtrair um número de 2 e obter 9” (BRASIL, 1998, p. 98).

Nesse sentido, apesar dos resultados significativos nos demais objetivos da atividade, consideramos que o contexto da retirada de uma dívida não foi suficiente para levar todos os estudantes à compreensão da subtração de um número inteiro negativo e sua representação (- (-)). Possivelmente, os estudantes não associaram a devolução do dinheiro à retirada de uma dívida (subtração de um inteiro negativo), mas sim ao fato de ganhar novamente o dinheiro que havia utilizado, ou seja, a adição de um saldo positivo ao que já possuía.

Já no contexto de variação de temperatura (Tabela 25) as dificuldades compareceram no que se refere ao cálculo da variação quando a temperatura final foi menor que a inicial, que deveria ser representada por um número negativo. Apesar de mais da metade dos estudantes ter respondido corretamente a atividade, somente 15% justificou a resposta com os cálculos esperados. Ainda, 14 estudantes atribuíram equivocadamente um valor positivo à variação.

Cabe ressaltar que essa constatação se inverteu no caso da variação no caso da temperatura final maior que a inicial, ou seja, uma variação positiva. Os dados revelaram que somente dois estudantes responderam a atividade incorretamente.

Assim sendo, nessa atividade, os estudantes utilizaram em maior quantidade a representação em língua materna em detrimento da representação algébrica (DUVAL, 2015) para demonstrar a variação de temperatura, ou seja, ao se referirem à queda de 11°C na temperatura, não remeteram à notação -11°C , mas à afirmação de que houve uma diminuição de 11°C . Provavelmente, houve a dificuldade de compreender o conceito de variação de temperatura e que este poderia ser representado por um número inteiro negativo.

Diferentemente da situação anterior, no âmbito da queda de temperatura (Tabela 26), as compreensões superaram as dificuldades. Ao representar a queda com uma subtração de Números Inteiros Relativos, mais da metade dos estudantes demonstrou compreender que tal operação pode ser utilizada nesse contexto. Chama atenção que cerca de 30% deles representaram incorretamente tal situação, realizando subtrações que não resultaram na temperatura final, confundindo sinais operatórios e predicativos (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015).

Nesse caso, a dificuldade pode ser justificada, hipoteticamente, pela confusão entre a queda de temperatura, abordada nesta atividade, com a variação de temperatura,

trabalhada anteriormente. Provavelmente, se houvesse a inversão de ordem das duas atividades, haveria menos dificuldades dos estudantes, pois, em um primeiro momento seria trabalhado um conceito, relativamente, mais simples, como a queda da temperatura, e após isso, um mais complexo, que é a variação.

Os dados referentes à subtração de Números Inteiros Relativos, trabalhada no contexto do cálculo da transformação pela diferença entre o estado final e o estado inicial e do cálculo do estado inicial pela aplicação da transformação inversa ao estado final (Tabela 27), demonstraram que a principal dificuldade aconteceu no momento de calcular o ano de nascimento de Pitágoras, ou seja, o estado inicial, pois mais da metade dos estudantes adicionou os números ao invés de subtrair.

Supostamente isso aconteceu, pois, “as transformações no tempo e as relações de comparação não podem ser representadas por uma composição de duas quantidades (lei binária interna), pois elas envolvem números relativos” (VERGNAUD, 1986, p. 78).

Partindo desse pressuposto, em que pesem os objetivos da atividade, consideramos que o cálculo em questão seria realizado com mais êxito se, por exemplo, os estudantes utilizassem a reta numérica para representar a situação.

De maneira oposta, encontrar a idade de Eratóstenes, mais precisamente a transformação a partir da diferença entre estados inicial e final, não suscitou dificuldades nos estudantes, uma vez que somente dois não calcularam corretamente na atividade.

A subtração de Números Inteiros Relativos no contexto de sequências numéricas (Tabela 28) determinou mais compreensões do que dificuldades observando as respostas dos estudantes. Os dados evidenciaram que a maior parte dos estudantes descreveu corretamente que a sequência foi construída do maior para o menor, subtraindo 20 unidades ou acrescentando -20.

Mesmo aqueles que não determinaram a operação envolvida afirmam que a sequência foi construída de 20 em 20. Essa tendência se confirmou quando os estudantes deveriam identificar os próximos números da sequência. Nesse momento, cerca de 70% dos que responderam a atividade identificaram corretamente os próximos termos.

Assim sendo, o trabalho com regularidades nesta atividade foi considerável, pois além de apresentar outro contexto, que envolveu números inteiros isolados, proporcionou que os estudantes pudessem perceber que para encontrar o padrão poderiam diminuir o número em questão ou somar o seu oposto ao anterior.

Por fim, a atividade referente ao cálculo da subtração entre estados final e inicial no contexto bancário (Tabela 29) evidenciou dificuldades. Mais da metade dos estudantes

calculou incorretamente o valor depositado, sendo por desconsiderar o valor negativo do saldo ou por utilizar uma adição de Números Inteiros Relativos ao invés de uma subtração.

Nesse sentido, as características evidenciadas anteriormente e, principalmente no que tange ao cálculo da idade inicial (Tabela 27) e do valor depositado (Tabela 29) convergem com o as considerações de Borba (2009), salientando que entender um problema de transformação que o valor final é desconhecido é mais fácil de compreender um que o valor inicial é desconhecido, pois tem que se “coordenar mais operações mentais” (p.67).

Tal dificuldade possivelmente advém da necessidade da reelaboração da operação de subtração a partir da superação de ideias iniciais como tirar ou subtrair um número do outro, pautando-se agora em ideias relacionadas tanto ao resultado de uma operação entre estados como em transformações (aumentos e diminuições) a partir de um ponto (zero origem), relações (“mais que”, “menos que”), posições relativas (três casas para frente, duas casas para trás), dívidas e créditos (VERGNAUD, 2002; TEIXEIRA, 1993; OLIVEIRA, 2019).

O desenvolvimento desta e da quinta atividade que envolveu o cálculo da idade dos matemáticos (TABELA 27), nos demonstrou que o trabalho com situações que envolvem o objetivo de encontrar o estado inicial a partir da diferença entre o estado final e a transformação deve ser reforçado. Isso porque Vergnaud (1986) salienta que a primeira concepção de subtração consiste na diminuição de uma quantidade inicial e que, diante disso, os estudantes podem encontrar dificuldades para ampliar os significados da subtração, principalmente com relação a transformações e relações. Portanto, para diminuir as dificuldades salientadas, julgamos necessário o aumento de atividades, envolvendo diferentes contextos, abordando tais significados.

9.7 Multiplicação de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

A primeira atividade referente à multiplicação de Números Inteiros Relativos envolveu o contexto da proporção simples.

Os estudantes calcularam as pontuações finais de acordo com o valor de cada questão correta ou errada e suas respectivas quantidades, multiplicando números inteiros positivos e com sinais opostos e, após isso, relacionar as pontuações calculadas para

encontrar o valor final. As compreensões e dificuldades de 37 estudantes (2 não responderam) relativas aos objetivos elencados estão categorizadas a seguir (Tabela 30).
Tabela 30: compreensões e dificuldades relacionadas à multiplicação de NIR no contexto de pontuações (proporção simples)

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Calcular a multiplicação entre dois NIR positivos (proporção simples)	Estudante calculou corretamente o total de pontos ganhos (quantidade de acertos x pontuação equivalente a cada acerto)	35/37	94,6
	Estudante não compreendeu que deveria utilizar a multiplicação no contexto da atividade (desconsiderou a pontuação equivalente a cada acerto)	2/37	5,4
Calcular a multiplicação entre dois NIR de sinais opostos (proporção simples)	Estudante calculou corretamente o total de pontos perdidos (quantidade de erros x pontuação equivalente a cada erro)	33/37	89,2
	Estudante não compreendeu que deveria utilizar a multiplicação no contexto da atividade (desconsiderou/mudou a pontuação equivalente a cada erro)	4/37	10,8
Relacionar o resultado das multiplicações anteriores para o cálculo do total	Estudante determinou corretamente a pontuação final e justificou com língua materna	18/37	48,7
	Estudante determinou corretamente a pontuação final e justificou com expressões numéricas	15/37	40,5
	Estudante não calculou corretamente a pontuação final, pois errou alguma multiplicação anterior	4/37	10,8

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=37

Os dados relacionados ao objetivo de calcular a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos positivos revelaram que as compreensões superaram as dificuldades, pois 35 (94,6%) estudantes calcularam corretamente o total de pontos ganhos por meio de um produto entre a quantidade de acertos e a pontuação referente a cada acerto: “200 pontos positivos” (A13); “ $20 \times (+10) = +200$ ” (B9), enquanto somente 2 (5,4%) desconsideraram a pontuação equivalente a cada acerto, ou seja, não compreenderam que deveriam utilizar a multiplicação no contexto da atividade, como por exemplo em: “ele acertou 20 pontos” (B4).

Em que pese o objetivo de calcular a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos com sinais opostos, as compreensões também compareceram em maior número que as dificuldades.

Dos 37 estudantes que responderam a atividade, 33 (89,2%) calcularam corretamente o total de pontos perdidos, multiplicando a quantidade de erros pela pontuação equivalente a cada um deles: “600 pontos negativos” (A16); “ $40 \times (-15) = -600$ ” (B8).

Outros 4 (10,8%) estudantes desconsideraram ou mudaram a pontuação equivalente a cada erro, não compreendendo que deveriam recorrer à multiplicação no contexto da atividade: “eu coloquei $10+20$ que dá 30 e depois somei $30-15$ que deu 25” (A11); “Se tem 60 questões e ele acertou 20, ele perdeu 40” (B4).

Por fim, aspectos relativos ao objetivo de relacionar o resultado das multiplicações anteriores para o cálculo da pontuação total demonstraram diferentes características, pois dos 33 (89,2%) estudantes que calcularam corretamente a pontuação final, 18 (48,7%) justificaram por meio da língua materna.

“-400, pois a turma ganhou 200 e depois perdeu 600” (A8);

“A turma fez 200 pontos positivos e 600 pontos negativos, terminando com -400 pontos” (A15);

“Ela ficou com -400 pontos” (B1).

Além disso, 15 (40,5%) recorreram às expressões numéricas para explicar a resposta da atividade: “ $20 \times (+10) + 40 \times (-15) = 200 + (-600) = -400$ ” (B10); “Eu fiz $10 \times 20 = 200$. $40 \times 15 = 600$, $+ 200 + (-600) = -400$, $200 - 600 = -400$ ” (B17).

Quatro (10,8%) estudantes demonstraram dificuldades, pois erraram alguma multiplicação anterior, não calculando corretamente a pontuação final: “-200 pontos, fiz uma conta de vezes e de menos” (A7); “200 pontos, porque se a turma acertou 20 questões que valiam 10 pontos, eu fiz uma conta de 20×10 que deu 200, então 200 pontos” (B12).

Na segunda atividade, os estudantes elencaram possíveis multiplicações entre dois Números Inteiros Relativos que o resultem em -24. Nesse caso, os números envolvidos deveriam ter sinais opostos, pois a multiplicação entre eles resulta em um número negativo.

Todos os 39 estudantes apresentaram pelo menos três exemplos de multiplicações envolvendo Números Inteiros Relativos que resultam em -24. A princípio, possivelmente compreenderam que o produto entre um inteiro negativo e um positivo resulta em um número inteiro com sinal negativo.

A terceira atividade compreendeu o produto entre Números Inteiros Relativos em uma tabela contendo elementos a serem multiplicados.

Após relacionarem os números inteiros presentes na tabela por meio da multiplicação, os estudantes responderam a questões relacionadas à multiplicação entre dois números negativos, entre números de sinais opostos e entre zero e um inteiro qualquer.

As compreensões e dificuldades dos estudantes relacionadas aos objetivos da atividade estão presentes a seguir (Tabela 31).

Tabela 31: compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à multiplicação de NIR

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Levantar hipóteses sobre a multiplicação entre dois NIR com sinais opostos	Estudante inferiu que a multiplicação entre dois NIR com sinais opostos resulta em um NIR negativo	32/39	82
	Estudante inferiu equivocadamente que o sinal do resultado da multiplicação entre dois NIR com sinais opostos depende do sinal do “maior número”	4/39	10,3
	Estudante inferiu equivocadamente que a multiplicação entre dois NIR com sinais opostos resulta em um NIR positivo	3/39	7,7
Levantar hipóteses sobre a multiplicação de um NIR por zero	Estudante inferiu que a multiplicação de um NIR por zero resulta em zero	36/39	92,3
	Estudante inferiu equivocadamente que a multiplicação de um NIR por zero resulta em um número positivo/negativo	3/39	7,7
Levantar hipóteses sobre a multiplicação entre dois NIR negativos	Estudante inferiu que a multiplicação entre dois NIR negativos resulta em um número positivo	27/39	69,2
	Estudante inferiu incorretamente que a multiplicação entre dois NIR negativos resulta em um número negativo	11/39	28,2
	Estudante inferiu incorretamente que a multiplicação entre dois NIR negativos resulta em zero	1/39	2,6

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=39

No caso de levantar hipóteses sobre a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos com sinais opostos, 32 (82%) estudantes inferiram corretamente que a multiplicação, nesse caso, resulta em um inteiro negativo: “O número do resultado será sempre negativo” (A4); “Podemos concluir que sempre dará negativo” (B5).

Sete (18%) estudantes apresentaram dificuldades, sendo 4 (10,3%) deles inferindo equivocadamente que o resultado de tal multiplicação depende do sinal do “maior número”: “Depende do número maior, o número pode ser positivo ou negativo”

(B11) e 3 (7,7%) que resulta em um inteiro positivo: “Que o resultado vai dar positivo” (A3).

Com relação às hipóteses levantadas sobre a multiplicação de um Número Inteiro Relativo por zero, 36 (92,3%) estudantes inferiram corretamente que o resultado de tal multiplicação é zero: “Sempre vai dar zero” (A2); “Sempre dará zero, pois todo número multiplicado por zero dá zero” (B8), enquanto 3 (7,7%) afirmaram incorretamente que o resultado é um número positivo ou negativo: “Que o número vai dar negativo” (A3).

Por fim, as hipóteses evidenciadas sobre a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos negativos revelaram que 27 (69,2%) estudantes afirmaram que o resultado desse produto é um número positivo: “[...] vai dar positivo” (A18), enquanto 11 (28,2%) inferiram incorretamente que o resultado é um número negativo: “Sempre será um resultado negativo” (A15) e 1 (2,6%) inferiu equivocadamente que a multiplicação resulta em zero: “Podemos concluir que a multiplicação de dois números negativos será 0” (B8).

A quarta atividade abordou a multiplicação de Números Inteiros Relativos no contexto de pontos ganhos e perdidos. O cálculo de pontos ganhos foi realizado pelos estudantes por meio de uma multiplicação entre inteiros positivos, enquanto o de pontos perdidos por um produto entre inteiros com sinais opostos.

A partir da relação entre os dois resultados encontrados os estudantes também calcularam a pontuação total. As respostas de 36 estudantes (3 deles não responderam) referentes a essa atividade estão categorizadas a seguir (Tabela 32).

Tabela 32: Compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à multiplicação de NIR no contexto de pontuação

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Calcular a multiplicação entre dois NIR positivos	Estudante calculou corretamente a pontuação obtida na região verde por Yara e Tobias (quantidade de tampinhas na região verde x pontuação equivalente a cada acerto na região verde)	33/36	91,7
	Estudante não compreendeu que deveria utilizar a multiplicação no contexto da atividade (desconsiderou a pontuação equivalente a cada acerto)	3/36	8,3
Calcular a multiplicação entre dois NIR de sinais	Estudante calculou corretamente a pontuação obtida na região azul por Yara e Tobias (quantidade de tampinhas na região azul x pontuação equivalente a cada acerto na região azul)	32/36	84,8

opostos	Estudante não compreendeu que deveria utilizar a multiplicação no contexto da atividade (desconsiderou/mudou a pontuação equivalente a cada erro)	6/36	15,8
Relacionar o resultado das multiplicações anteriores para o cálculo do total	Estudante representou e determinou corretamente a pontuação final	28/36	77,8
	Estudante não calculou corretamente a pontuação final, pois errou alguma multiplicação anterior	8/36	22,2

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=36

No caso das pontuações ganhas por meio da multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos positivos, 33 (91,7%) estudantes calcularam corretamente a pontuação obtida na região verde por Yara e Tobias, ou seja, o produto entre a quantidade de tampinhas na região verde e a pontuação equivalente a cada acerto na região verde: “Yara +4 e Tobias +10” (B1). Três estudantes (8,3%) apresentaram dificuldades, pois não compreenderam que deveriam utilizar a multiplicação no contexto da atividade: “Yara +2 e Tobias +5” (A20).

Já com relação às pontuações perdidas, 32 (84,8%) estudantes calcularam corretamente a pontuação obtida na região azul por Yara e Tobias (multiplicação da quantidade de tampinhas na região azul pela pontuação equivalente a cada acerto na região azul): “Yara -16 e Tobias -4” (A1), enquanto 6 (15,8%) não compreenderam que deveriam utilizar a multiplicação no contexto da atividade, apresentando dificuldades na atividade, como por exemplo em: “Yara -4 e Tobias -1” (A12).

Por fim, no que se refere ao objetivo de relacionar o resultado das multiplicações anteriores para o cálculo do total as compreensões superaram as dificuldades, por 28 (77,8%) estudantes representaram e determinaram corretamente a pontuação final: “Yara $4 + (-16) = -12$ e Tobias $10 + (-4) = +6$ ” (B1), enquanto 8 (22,2%) não calcularam corretamente tal pontuação, pois erraram alguma das multiplicações anteriores: “Yara $2 - 4 = -2$ e Tobias $5 - 1 = 4$ ” (B11).

A quinta atividade trabalhou com a multiplicação de Números Inteiros Relativos por meio de tabelas envolvendo padrões numéricos. Nesse sentido, os estudantes completaram as tabelas com os produtos dos inteiros negativos pelos positivos e dos negativos pelos negativos observando a regularidade e inferiram sobre os resultados de

tais multiplicações. As compreensões e as dificuldades de 32 estudantes (7 não responderam) relacionadas à atividade estão presentes a seguir (Tabela 33).

Tabela 33: compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à multiplicação de NIR no contexto de padrões numéricos

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Observar regularidades em uma sequência de NIR	Estudante inferiu corretamente que a construção da sequência foi realizada adicionando 2 unidades do termo anterior	16/32	50
	Estudante inferiu corretamente que a construção da sequência foi realizada multiplicando cada termo por -2/dobrando	5/32	15,6
	Estudante inferiu equivocadamente que a construção da sequência foi realizada subtraindo 2 unidades do termo anterior	5/32	15,6
	Estudante inferiu que a construção da sequência foi realizada de 2 em 2 sem especificar a operação utilizada	4/32	12,5
	Estudante inferiu equivocadamente que a construção da sequência foi realizada do maior para o menor	2/32	6,3
Identificar os próximos termos de uma sequência de NIR	Estudante calculou corretamente os próximos números da sequência	26/32	81,2
	Estudante não indicou corretamente os próximos termos da sequência	6/32	18,8
Levantar hipóteses sobre a multiplicação entre dois NIR com sinais opostos	Estudante inferiu que a multiplicação entre dois NIR com sinais opostos resulta em um NIR negativo	29/32	90,6
	Estudante inferiu equivocadamente que o sinal do resultado da multiplicação entre dois NIR com sinais opostos depende do sinal do “maior número”	2/32	6,3
	Estudante inferiu equivocadamente que a multiplicação entre dois NIR com sinais opostos resulta em um NIR positivo	1/32	3,1
Levantar hipóteses sobre a multiplicação de um NIR por zero	Estudante inferiu que a multiplicação de um NIR por zero resulta em zero	29/32	90,6
	Estudante inferiu equivocadamente que a multiplicação de um NIR por zero resulta em um número positivo/negativo	3/32	9,4
Levantar hipóteses sobre a multiplicação entre dois NIR negativos	Estudante inferiu que a multiplicação entre dois NIR negativos resulta em um número positivo	26/32	81,3
	Estudante inferiu incorretamente que a multiplicação entre dois NIR negativos resulta em um número negativo	5/32	15,6
	Estudante inferiu incorretamente que a multiplicação entre dois NIR negativos resulta em zero	1/32	3,1

Fonte: elaborado pelo autor, 2022 N=32

Com relação ao primeiro objetivo da atividade: observar regularidades em uma sequência numérica, 21 (55,6%) estudantes apresentaram compreensões, ao passo que os outros 11 (44,4%), dificuldades.

Aspectos relacionados às compreensões determinaram que 16 (50%) estudantes inferiram corretamente que a construção da sequência numérica $(-6, -4, -2, 0...)$ foi realizada adicionando duas unidades ao termo anterior: “Os números estão aumentando de 2 em 2” (A1); “[...] acontecendo que está somando 2” (B15). Além disso, 5 (15,6%) chegaram à conclusão de que a sequência foi construída multiplicando cada elemento por -2 ou dobrando: “Que está sendo o dobro da conta, eles estão multiplicados por 2” (B2); “Eu vi que ele dobrou e mudou os sinais, inverteu” (B10).

Já as dificuldades referentes às demais respostas levaram em consideração diferentes características. Cinco (15,6%) estudantes inferiram equivocadamente que a construção da sequência foi realizada subtraindo duas unidades do termo anterior: “Está diminuindo de 2 em 2” (A3); quatro (12,5%) ressaltaram que a sequência foi construída de dois em dois, mas sem especificar a operação utilizada: “Que está de 2 em 2” (A19); “Está pulando de 2 em 2” (B5). Dois (6,3%) afirmaram erroneamente que a referida sequência foi construída do maior para o menor: “[...] está indo na sequência do maior para o menor” (A4).

No caso do objetivo de identificar os próximos termos da sequência de Números Inteiros Relativos presente na atividade, 26 (81,2%) estudantes calcularam corretamente os próximos elementos: “+8, +10, +12, +14, +16, +18, +20” (A9), enquanto 6 (18,8%) apresentaram dificuldades, pois não indicaram os próximos termos conforme esperado, como podemos perceber em: “+7, +8, +9, +10” (A6); “-6, depois +7” (A20).

As hipóteses levantadas pelos estudantes sobre a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos com sinais opostos também determinaram mais compreensões que dificuldades, pois 29 (90,6%) estudantes inferiram corretamente que tal produto resulta em um inteiro negativo: “Sempre dará um número negativo” (B9).

Outros 3 (9,4%) estudantes retrataram dificuldades, sendo que 2 (6,3%) afirmaram equivocadamente que o sinal do resultado da multiplicação entre dois inteiros com sinais opostos depende do sinal do “maior número”: “Depende se o negativo for o maior vai dar negativo e se o positivo for maior vai dar positivo” (A5). Um (3,1%) estudante inferiu erroneamente que tal produto resulta em um inteiro com sinal positivo: “Que o número vai dar positivo” (A3).

O objetivo de levantar hipóteses sobre a multiplicação de um Número Inteiro Relativo por zero revelou que 29 (90,6%) estudantes inferiram corretamente que esse produto resulta em zero: “Sempre dará 0” (B1), enquanto 3 (9,4%) salientaram equivocadamente que o resultado seria um inteiro positivo ou negativo: “Que o resultado vai dar positivo” (A3); “Negativo será negativo, positivo será positivo” (A18).

Por fim, o objetivo de levantar hipóteses sobre a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos negativos foi compreendido por 26 (81,3%) estudantes, afirmando que esse produto resulta em um número inteiro positivo: “Menos com menos daria positivo” (B3). Outros 6 (18,7%) apresentaram dificuldades, sendo cinco (15,6%) inferindo incorretamente que esse produto resulta em um número inteiro negativo: “[...] resultado vai dar negativo” (A3) e um (3,1%) que resulta em zero: “resulta em zero” (A10).

Na sexta atividade os estudantes relacionaram o contexto de um jogo de “cara ou coroa” à quantidade de pontos ganhos e perdidos por meio da multiplicação de Números Inteiros Relativos. As compreensões e dificuldades de 33 estudantes (6 não responderam) relacionadas a essa atividade estão categorizadas a seguir (Tabela 34).

Tabela 34: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à multiplicação de Números Inteiros Relativos no contexto de pontos ganhos e perdidos

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Representar e calcular uma expressão matemática que representa uma situação determinada	Estudante calculou corretamente os pontos ganhos e perdidos com multiplicações, considerando o sinal referente às pontuações. A partir disso, realizou uma adição para o cálculo da pontuação total	15/33	45,5
	Estudante calculou corretamente os pontos ganhos e perdidos de forma isolada, não considerando o sinal referente às pontuações. A partir disso, realizou uma subtração para o cálculo da pontuação total	8/33	24,2
	Estudante calculou incorretamente os pontos ganhos e perdidos/ calculou incorretamente o saldo/ considerou somente o valor dos pontos ganhos como saldo total	6/33	18,2
	Estudante calculou corretamente os pontos ganhos e perdidos com multiplicações, considerando o sinal referente às pontuações, porém representou equivocadamente a operação de cálculo da pontuação total	4/33	12,1
Inferir e calcular multiplicações que determinam valor máximo e	Estudante calculou corretamente o valor máximo e mínimo das pontuações por meio de multiplicações	23/33	69,7
	Estudante não compreendeu a utilização da multiplicação nesse contexto/ calculou incorretamente as multiplicações	10/33	30,3

mínimo em um context			

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=33

No que se refere ao objetivo de representar e calcular a expressão matemática que determina a situação proposta na atividade, no caso o saldo de pontos do jogo, 27 (81,8%) estudantes calcularam corretamente os pontos ganhos e perdidos por meio de multiplicações, porém 15 (45,5%) consideraram o sinal referente às pontuações e realizaram uma adição para o cálculo da pontuação total: “ $7 \times 4 = 28 / -9 \times 11 = -99$, $28 + (-99) = -71$ ” (A8); 8 (24,2%) não consideraram os sinais das pontuações e realizaram uma subtração para o cálculo da pontuação total: “Ele ganhou 28 e perdeu 99, $28 - 99 = -71$ ” (B11); 4 (12,1%) até consideraram os sinais das pontuações, mas não representaram corretamente a expressão numérica utilizada para o cálculo da pontuação total: “Ele ganhou +28 pontos e perdeu -99 ($4 \times 7 = 28$ e $11 \times -9 = -99$), $28 - (-99) = -71$ ” (A4).

Seis (18,2%) estudantes apresentaram dificuldades na atividade, pois calcularam incorretamente os pontos ganhos e perdidos, o saldo total ou consideraram somente o valor dos pontos ganhos para representar a pontuação final: “Ganhou 27 e perdeu 100. Ele ganhou (27) pontos” (A6); “ $7 \times 4 = 28$ e $11 \times 9 = 99$. Ganhou 28 pontos” (B1).

Na sétima atividade a multiplicação entre Números Inteiros Relativos também foi trabalhada no contexto de descobrir qual é o padrão numérico apresentado na figura, para que assim os estudantes pudessem realizar os cálculos para encontrarem o número que é solicitado. As compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à atividade estão categorizadas a seguir (Tabela 35).

Tabela 35: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à multiplicação de NIR no contexto de padrões numéricos

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Identificar a operação que determina o padrão numérico e calcular próximos termos	Estudante identificou que a “operação misteriosa” é a multiplicação e calculou corretamente os próximos termos solicitados	14/30	46,7
	Estudante não identificou a operação que determinou o padrão	7/30	23,3
	Estudante identificou que a “operação misteriosa” é a multiplicação, porém desconsiderou o sinal dos números, calculando incorretamente os próximos termos solicitados	6/30	20

	Estudante identificou que a “operação misteriosa” é a multiplicação, porém errou o algoritmo da multiplicação	3/30	10
TOTAL		30/30	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=30

Aspectos relativos ao objetivo de identificar a operação que determina o padrão numérico e calcular próximos termos revelaram que as dificuldades presentes nas respostas de 16 (53,3%) estudantes superaram as compreensões que abrangeram as indicações de 14 (46,7%) estudantes.

No caso das dificuldades, sete (23,3%) estudantes não conseguiram identificar a operação que determinou o padrão numérico: “Calculei dois números juntos que dá o número de cima” (B9).

Ainda, 9 (30%) identificaram que tal operação se tratava da multiplicação, porém seis (20%), no momento do cálculo dos demais termos do padrão, desconsideraram o sinal dos números, calculando incorretamente os próximos termos solicitados: “12000. Eu multipliquei 15 x 10 e 10 x 8 e depois multipliquei 150 x 80” (A9).

Três (10%) erraram o algoritmo da multiplicação, como por exemplo em: “A lógica é que os dois quadradinhos por exemplo $-3 \times -5 = +15$ e $+2 \times -4 = -8$ e $-5 \times +2 = -10$, então descobri o resultado e $+15 \times -10$ e -10×-8 que é -150 e $+180$, faz uma conta de x e o resultado é -27000 ” (B1).

As compreensões se fizeram presentes em menos da metade das respostas dos estudantes. Nesse âmbito, 14 (46,7%) identificaram que a “operação misteriosa” que determinou a construção de padrão era a multiplicação e, a partir disso, calcularam corretamente os próximos termos solicitados: “ $(15 \times 10 = -150)$ $(10 \times 8 = 80)$ $(150 \times +80 = -12000)$. Eu fiz conta de multiplicação para descobrir o resultado” (A13); “ -12000 . Fazendo conta de vezes” (B15).

A oitava atividade que envolveu a multiplicação de Números Inteiros Relativos foi trabalhada no contexto de medidas de profundidade, inerente aos números negativos e altitude, que se refere a números positivos. Assim sendo, para resolverem as situações propostas, os estudantes relacionaram as multiplicações de medidas de diferentes naturezas.

As compreensões e dificuldades de 34 estudantes (5 não responderam) relativas a tal atividade estão presentes a seguir (Tabela 36).

Tabela 36: compreensões e dificuldades relativas à multiplicação de NIR no contexto de medidas de profundidade e altitude

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Calcular a multiplicação entre um NIR positivo e um negativo (Correspondência a muitos para muitos)	Estudante calculou corretamente a profundidade que o submarino atingiu com uma multiplicação entre NIR	20/34	58,8
	Estudante não iniciou o cálculo da profundidade pelo nível do mar	4/34	11,8
	Estudante não compreendeu como utilizar a multiplicação no contexto	4/34	11,8
	Estudante não considerou o intervalo de tempo correto para realização da multiplicação	3/34	8,8
	Estudante não atribuiu o sinal negativo para representar a profundidade que o submarino atingiu	3/34	8,8
Calcular a multiplicação entre dois NIR positivos (Correspondência a um para muitos)	Estudante calculou corretamente a altitude do avião com uma multiplicação	19/34	55,9
	Estudante não considerou a altitude inicial do avião para o cálculo final	9/34	26,5
	Estudante não compreendeu como utilizar a multiplicação de NIR no contexto	6/34	17,6
Calcular a multiplicação entre um NIR positivo e um negativo (correspondência um para muitos)	Estudante calculou corretamente a profundidade que o atleta atingiu	13/34	38,2
	Estudante não atribuiu o sinal negativo para representar a profundidade que o atleta atingiu	9/34	26,5
	Estudante iniciou equivocadamente o cálculo da profundidade pelo pela altura do trampolim	7/34	20,6
	Estudante não compreendeu como utilizar a multiplicação de NIR no contexto	5/34	14,7

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=34

No que se refere ao objetivo de calcular a multiplicação entre um Número Inteiro Relativo positivo e um negativo no contexto da atividade, a resposta de 20 (58,8%) estudantes remeteram a compreensões e de 14 (41,2%) a dificuldades.

As compreensões presentes nas indicações de 20 (58,8%) se referiram ao cálculo correto da profundidade que o submarino atingiu por meio de uma multiplicação entre Números Inteiros Relativos: “O submarino estava a -400 metros abaixo do mar” (A14); “ $2 \times 2 = 4$, $4 \times -100 = -400$ ” (B8).

Já as dificuldades compreenderam diferentes respostas: 4 (11,8%) estudantes não iniciaram o cálculo da profundidade pelo nível do mar: “-500 m” (A12); “300 m abaixo do nível do mar” (A20); 4 (11,8%) não compreenderam como utilizar a multiplicação no contexto: “230 m de profundidade” (A10); 3 (8,8%) não consideraram o intervalo de tempo correto para realização da multiplicação: “120000 abaixo do mar ($120 \times -100 = -120000$)” (A16); 3 (8,8%) não atribuíram sinal negativo para representar a profundidade que o submarino atingiu: “400 m ele se encontrava” (B10).

Com relação ao objetivo de calcular a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos positivos as compreensões também superaram as dificuldades, pois 19 (55,9%) estudantes calcularam corretamente a altitude do avião com uma multiplicação entre inteiros: “Ele estava a +700 m de altitude” (A7); “ $8 \times 25 = 200$, $500 + 200 = 700$ ” (B11), enquanto 15 (44,1%) não chegaram ao resultado esperado, sendo 9 (26,5%) que não consideraram a altitude inicial do avião para o cálculo final: “subiu 200 metros” (A3); “ $25 \times 8 = 200$ ” (B8) e 6 (17,6%) que não compreenderam como utilizar a multiplicação no contexto proposto: “503 m de altitude” (A10).

No caso do objetivo de calcular a multiplicação entre um Número Inteiro Relativo positivo e um negativo as dificuldades superaram as compreensões, uma vez que 21 (61,8%) estudantes não desenvolveram a atividade do modo esperado, ao passo que 13 (38,2%) atingiram o objetivo.

Assim sendo, as dificuldades foram inerentes, nas respostas de 9 (26,5%) estudantes, a não atribuição do sinal negativo para representar a profundidade que o atleta atingiu: “3 metros” (B1); “3 m de profundidade” (B2). Também, 7 (20,6%) iniciaram equivocadamente o cálculo da profundidade pelo pela altura do trampolim: “-2 metros” (A1); “César chegou a -2m do nível da água” (A14) e cinco (14,7%) não compreenderam como utilizar a multiplicação no contexto: “6 metros de profundidade” (A17); “4 m de profundidade” (B16). De modo contrário, 13 (38%) estudantes calcularam corretamente a profundidade que o atleta atingiu: “ $-1 \times 3 = -3$. Ele consegue descer a profundidade -3 m (B13).

Em síntese, os dados referentes à multiplicação entre Números Inteiros Relativos revelam que as principais compreensões dos estudantes foram inerentes às proporções simples. Nesse caso, o cálculo de pontuações finais nos diversos contextos apresentados por meio de multiplicações entre inteiros positivos e entre inteiros com sinais opostos foi amplamente entendido pelos estudantes.

As hipóteses levantadas sobre o sinal do resultado da multiplicação entre inteiros também não suscitaram muitas dificuldades. Um maior número de estudantes inferiu corretamente sobre o resultado da multiplicação de Números Inteiros Relativos de sinais opostos e com relação à multiplicação de um inteiro por zero. Mesmo que em menor proporção, as dificuldades compareceram no momento de inferir sobre o resultado da multiplicação entre dois inteiros com sinal negativo.

A representação de situação por meio de multiplicações envolvendo Números Inteiros Relativos suscitou dificuldades nos estudantes. Apesar de realizarem os cálculos corretos, menos da metade dos estudantes utilizou uma expressão numérica envolvendo multiplicação de inteiros para representar o contexto das atividades.

No que se refere ao trabalho com padrões/regularidades envolvendo Números Inteiros Relativos, não houve dificuldades em identificar que a operação envolvida era a multiplicação, porém algumas dificuldades surgiram no momento do cálculo, tais como: desconsiderar o sinal dos números e errar o algoritmo da multiplicação, levando os estudantes a respostas equivocadas para a atividade.

Por fim, aspectos relacionados à multiplicação no contexto de correspondência um para muitos, principalmente no que tange ao produto entre Números Inteiros Relativos com sinais opostos, as compreensões superaram as dificuldades. Os estudantes calcularam corretamente atividades envolvendo diferentes situações de multiplicação. As dificuldades evidenciadas nesse caso se deram mais pela incompreensão total ou parcial do contexto.

9.7.1 Análise das respostas dos estudantes sobre multiplicação de Números Inteiros Relativos

Analisar as compreensões e as dificuldades dos estudantes relativas à multiplicação de Números Inteiros Relativos implicou trabalhar com situações envolvendo os diferentes significados dessa operação. Ainda, abordar a multiplicação entre dois inteiros com sinais iguais e com sinais opostos, além do produto de um número inteiro com zero.

Os dados atribuídos à multiplicação de Números Inteiros Relativos no contexto de pontuações, elucidando principalmente a ideia de proporção simples (Tabela 30), demonstraram que, com relação ao produto de dois inteiros positivos e ao produto de inteiros com sinais opostos, a maior parte dos alunos calculou corretamente a pontuação ganha e a perdida.

A principal dificuldade ocorreu no momento de justificar o cálculo da pontuação total, ou seja, relacionar o resultado das multiplicações anteriores à expressão numérica correspondente. Nesse sentido, apesar de determinar corretamente a pontuação final, menos da metade dos estudantes justificou com expressões numéricas que relacionam as multiplicações anteriores a tal resultado.

Isso ocorreu, pois na atividade em questão somente foi solicitado que os estudantes justificassem sua resposta após os cálculos. Provavelmente, se houvesse um maior detalhamento na atividade, mais precisamente, um pedido para que os estudantes apresentassem uma expressão numérica que resultasse na pontuação final da turma, haveria menos justificativas utilizando língua materna e mais algébricas.

As hipóteses levantadas sobre o resultado da multiplicação entre Números Inteiros Relativos (Tabela 31) assinalaram compreensões relativas dos estudantes sobre o sinal do produto entre números com sinais opostos e de zero por um inteiro. As principais dificuldades foram evidenciadas no levantamento de hipóteses sobre a multiplicação entre dois Números Inteiros Relativos negativos, em que cerca de 30% dos estudantes inferiram incorretamente sobre o sinal de tal multiplicação.

Esses aspectos demonstraram a importância do trabalho com tabelas de multiplicação na atividade, conforme exposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais: “[...] a compreensão dos procedimentos de cálculo envolvidos depende do conhecimento de conceitos, propriedades e processos que implicam identificar regularidades, estabelecer relações, fazer algumas inferências” (BRASIL, 1998, p. 99)

Outra atividade que envolveu o contexto de pontos ganhos e perdidos (Tabela 32) também foi utilizada para explorar a multiplicação de Números Inteiros Relativos. Assim como na atividade de mesma natureza (Tabela 30), os estudantes calcularam as pontuações com a multiplicação entre inteiros de sinais positivos e sinais opostos corretamente, porém apresentaram mais compreensões em relacionar o resultado das multiplicações ao cálculo da pontuação total.

Cabe ressaltar que diferentemente da atividade anterior, nessa havia um item a ser completado na tabela referente à representação matemática da pontuação total, em que os estudantes deveriam escrever a expressão numérica correspondente a cada situação. Diante disso, a natureza da atividade elaborada e seus questionamentos direcionados à representação matemática podem justificar o aumento das compreensões em relação à situação abordada anteriormente.

Tais resultados possivelmente se expliquem a partir de Teixeira (1993, p. 65) dado que “[...] quando o operador multiplicativo é positivo, a assimilação é fácil, porque é possível mostrar que [...] ao multiplicar por um número negativo o resultado permanece na região negativa, valendo o mesmo para o positivo”. Sendo assim, os estudantes ao calcularem os pontos ganhos multiplicando dois números inteiros positivos, perceberam que o resultado permaneceu positivo e ao calcularem os pontos perdidos por meio do produto de inteiros com sinais opostos, constataram que o resultado foi negativo.

No contexto envolvendo padrões numéricos relacionados à multiplicação de Números Inteiros Relativos (Tabela 33), mais da metade dos estudantes conseguiu inferir corretamente como aconteceu a construção de uma sequência numérica e identificar quais os próximos termos.

Isso exposto, consideramos a importância dessa atividade na construção de hipóteses relacionadas à multiplicação de Números Inteiros Relativos, pois a introdução às regras de sinais foi realizada por meio do modelo aritmético que se baseia no prolongamento da reta numérica (MORETTI, 2012) e não somente na mera exposição de tais regras pelo professor.

Nesse tipo de atividade, iniciamos de produtos previamente conhecidos, como por exemplo, os que envolvem um número inteiro positivo e um negativo e, a partir daí houve o desenvolvimento de tabelas de multiplicação que envolvem padrões com intuito de demonstrar que o produto de dois números inteiros negativos resulta em um positivo, por exemplo.

Partindo desses pressupostos, observar tais regularidades na atividade levou os estudantes a não somente continuar levantando hipóteses válidas sobre a multiplicação entre inteiros com sinais opostos e de zero por um inteiro, como também, compreender que o produto entre dois inteiros negativos resulta em um número positivo. Isso ocorreu pois, por meio da “[...] observação das regularidades das sequências numéricas construídas, pode-se completar a tabela com os produtos dos negativos pelos positivos e dos negativos pelos negativos, mantendo o padrão numérico observado” (BRASIL, 1998, p. 99).

Ainda, em outra atividade envolvendo esse contexto (Tabela 35), mais da metade dos estudantes identificou que a operação utilizada para completar o padrão era a multiplicação envolvendo Números Inteiros Relativos, porém cerca de 30% não calculou corretamente os próximos termos, desconsiderando os sinais dos números ou errando o algoritmo da multiplicação.

O fato de os estudantes identificarem a operação relacionada ao padrão demonstrou potencialidades na atividade em questão. Os estudantes compreenderam que os números inteiros foram multiplicados dois a dois para que fosse encontrado um terceiro, e assim, sucessivamente.

Porém, as dificuldades retratadas anteriormente indicaram que na multiplicação de Números Inteiros Relativos o conceito de operador multiplicativo deve ser reconstruído, pois diferentemente dos naturais em que indica o número de vezes que um conjunto se repete, nos inteiros há transformações de aumentos e diminuições dependendo do sinal (TEIXEIRA, 1993).

Em mais uma atividade envolvendo a multiplicação no contexto de pontos ganhos e perdidos (Tabela 34), a maior parte dos estudantes calculou corretamente, porém um pouco menos da metade considerou os sinais das pontuações. Além disso, cerca de 70% dos estudantes calcularam corretamente o valor máximo e mínimo das pontuações por meio de multiplicações entre inteiros positivos e entre inteiros com sinais opostos, respectivamente.

Os dados referentes à multiplicação de Números Inteiros Relativos que foi trabalhada no contexto de medidas de profundidade (Tabela 36) evidenciaram que no caso da correspondência um para muitos, trabalhada pela multiplicação entre inteiros de sinais opostos, cerca de 60% dos estudantes calcularam corretamente o produto, enquanto os outros apresentaram dificuldades referentes à interpretação da situação proposta.

No caso da multiplicação de dois números inteiros positivos para o cálculo da altitude, mais da metade dos estudantes calculou corretamente. As principais dificuldades se referiram a não consideração da altitude inicial do avião para o cálculo final e a não compreensão da multiplicação de inteiros no contexto estabelecido.

Por fim, em outra situação envolvendo o cálculo da profundidade por meio de uma multiplicação entre inteiros com sinais opostos (Tabela 36) as dificuldades superaram as compreensões, principalmente porque parte dos estudantes não atribui sinal negativo para representar a profundidade que o atleta atingiu. Somente cerca de 40% dos estudantes calcularam corretamente tal profundidade.

Possivelmente, os estudantes não associaram na atividade a ideia de profundidade a um número inteiro negativo devido as medidas em metros que, em tese, não poderiam ser negativas. Nesse caso, consideramos que a atividade em questão não colaborou para atingir os objetivos propostos na seção.

9.8 Divisão de Números Inteiros Relativos: respostas dos estudantes (atividades didáticas)

A primeira atividade referente à divisão de Números Inteiros Relativos envolveu o contexto de preço e valor de parcelas. Nesse sentido, os estudantes representaram uma dívida utilizando o Número Inteiro Relativo e, a partir disso, calcularam o valor da parcela por meio de uma divisão.

Os dados referentes às respostas de 36 estudantes (três não responderam) estão categorizados a seguir (Tabela 37).

Tabela 37: compreensões e dificuldades dos estudantes com relação à divisão de NIR no contexto de dívidas e parcelas

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Representar uma situação utilizando NIR	Estudante utilizou um NIR negativo para representar a dívida	29/36	80,6
	Estudante utilizou a língua materna para representar a dívida	4/36	11,1
	Estudante não atribuiu o sinal negativo à dívida	3/36	8,3
Calcular uma divisão entre um NIR negativo e um positivo (partição equitativa)	Estudante calculou a divisão corretamente, atribuindo o sinal negativo à dívida e ao valor da parcela	26/36	72,2
	Estudante calculou o valor da parcela corretamente, mas não atribuiu sinal negativo a ela	10/36	27,8

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=36

Com relação à representação de uma situação com Números Inteiros Relativos no contexto da atividade reforçaram que 29 (80,6%) estudantes utilizaram um número inteiro para representar a dívida: “A dívida é de -1300,00” (A19), 4 (11,1%) recorreram à língua materna para representação: “Ele vai ficar devendo 1300,00” (A15) e 3 (8,3%) não atribuíram sinal negativo à dívida: “R\$ 1300,00” (B17).

No caso de calcular uma divisão entre um Número Inteiro Relativo negativo e um positivo, ou seja, realizar a partição equitativa entre o valor da dívida e a quantidade de parcelas, todos os 36 estudantes que responderam a atividade calcularam a divisão corretamente, porém 26 (72,2%) atribuíram o sinal negativo ao valor da parcela: “A dívida de cada parcela será de -325” (A7) e dez (27,8%) não atribuíram tal sinal a ela: “325 reais” (A20).

Na segunda atividade, a divisão de Números Inteiros Relativos também foi trabalhada no contexto de lucro, dívida e parcelas. Além da partição equitativa (divisão de lucro pela quantidade de filhos), a atividade também objetivou o desenvolvimento da divisão como medida (divisão do prejuízo pelo valor das parcelas). As compreensões e dificuldades de 36 (3 não responderam) estudantes relativas à atividade estão categorizadas a seguir (Tabela 38).

Tabela 38: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes à divisão de NIR no contexto da partição equitativa e de medida.

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Calcular uma divisão entre dois NIR positivos (partição equitativa)	Estudante dividiu corretamente o valor lucro para cada filho	35/36	97,2
	Estudante não compreendeu a divisão de NIR nesse contexto	1/36	2,8
TOTAL		36/36	
Calcular uma divisão entre dois NIR negativos (medida)	Estudante calculou a quantidade de parcelas corretamente, mas não representou a situação com uma divisão de NIR	30/36	83,3
	Estudante calculou a quantidade de parcelas corretamente e representou a situação com uma divisão de NIR	6/36	16,7
TOTAL		36/36	

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=36

No caso do objetivo de calcular uma divisão entre dois Números Inteiros Relativos positivos, ou seja, a partição equitativa entre o lucro e a quantidade de filhos, as compreensões superaram as dificuldades, pois 35 (97,2%) estudantes dividiram corretamente o valor do lucro para cada filho, como constatamos em: “100: 5 = 20. Cada filho irá receber 20 reais” (A1), enquanto somente 1 (2,8%) não compreendeu que deveria utilizar a divisão entre inteiros nesse contexto: “Cada filho receberá 100,00 reais” (A10).

Já com relação ao cálculo da divisão entre dois Números Inteiros Relativos negativos houve uma certa dificuldade. Os 36 estudantes que responderam a atividade calcularam a quantidade de parcelas corretamente, mas 30 (83,3%) não representaram a situação com uma divisão entre dois inteiros negativos: “5 parcelas, 5 x 60 = 300” (A12), ao passo que somente 6 (16,7%) representaram: “-300 : -60 = 5” (A6).

A terceira atividade também explorou a divisão entre Números Inteiros Relativos por meio do contexto bancário. Nesse caso a partição equitativa e o conceito de medida foram trabalhados com o conceito de metade do saldo bancário e com a divisão desse

saldo pelo valor da parcela, respectivamente. As compreensões e dificuldades de 36 estudantes (três não responderam) com relação à atividade estão presentes a seguir (Tabela 39).

Tabela 39: compreensões e dificuldades dos estudantes relativas à divisão de NIR no contexto bancário

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Calcular uma divisão entre NIR negativo e um positivo (partição equitativa)	Estudante calculou corretamente o valor do saldo, mas não considerou o sinal dos números na divisão	25/36	69,4
	Estudante calculou corretamente o valor do saldo e representou matematicamente a situação com uma divisão entre um NIR negativo e um positivo	11/36	30,6
TOTAL		39/39	100
Calcular uma divisão entre dois NIR negativos (medida)	Estudante calculou corretamente a quantidade de parcelas, mas não considerou o sinal dos números na divisão	25/36	69,4
	Estudante calculou corretamente a quantidade de parcelas utilizando uma multiplicação	11/36	30,6
TOTAL		39/39	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=36

No que se refere ao objetivo de calcular a divisão entre um Número Inteiro Relativo negativo e um positivo, ou seja, a partição equitativa do saldo bancário negativo pela metade, todos os 36 estudantes que responderam a atividade calcularam corretamente o saldo, porém 25 (69,4%) não consideraram o sinal dos números na divisão: “-R\$318 ($636:2 = 318$)” (A16), enquanto 11 (30,6%) representaram matematicamente a situação com uma divisão entre um inteiro negativo e um positivo: “-318 reais. $-636:2 = -318$ ” (B1).

Já no objetivo de calcular uma divisão entre dois Números Inteiros Relativos negativos, referindo-se ao conceito de medida, 25 (69,4%) estudantes calcularam corretamente a quantidade de parcelas, mas não consideraram o sinal dos números na divisão: “318:53. Ela termina de pagar em 6 meses” (A19) e 11 (30,6%) utilizaram a operação inversa da divisão para tal cálculo, ou seja, a multiplicação: “Terminaria de pagar depois de 6 meses ($53.6 = 318$)” (A16).

Na quarta atividade, após preencherem uma tabela contendo diversas divisões entre Números Inteiros Relativos, os estudantes levantaram hipóteses sobre os resultados, inferindo sobre a divisão de inteiros com sinais iguais, com sinais opostos e de zero por

um inteiro qualquer. As compreensões e dificuldades de 34 estudantes (5 não responderam) referentes à atividade se encontram a seguir (Tabela 40).

Tabela 40: compreensões e dificuldades dos estudantes referentes às propriedades da divisão de NIR.

Objetivos dos itens	Compreensões ou dificuldades dos estudantes	F	%
Levantar hipóteses sobre a divisão exata entre dois NIR de sinais opostos	Estudante afirmou que o resultado da divisão entre dois NIR com sinais opostos é um número negativo	30/34	88,2
	Estudante afirmou equivocadamente que o resultado da divisão entre dois NIR com sinais opostos é um número positivo	2/34	5,9
	Estudante afirmou equivocadamente que a divisão entre dois NIR com sinais opostos depende do sinal do maior número	2/34	5,9
TOTAL		34/34	100
Levantar hipóteses sobre a divisão de zero por um NIR	Estudante afirmou que o resultado da divisão entre zero e um NIR resulta em zero	33/34	97,1
	Estudante afirmou equivocadamente que o resultado da divisão entre zero e um NIR resulta no próprio número	1/34	2,9
TOTAL		34/34	100
Levantar hipóteses sobre a divisão entre dois NIR com mesmo sinal	Estudante afirmou que a divisão entre dois NIR com mesmo sinal resulta em um número positivo	27/34	79,4
	Estudante afirmou equivocadamente que a divisão entre dois NIR com mesmo sinal resulta em um número negativo	6/34	17,7
	Estudante afirmou equivocadamente que a divisão entre dois NIR com mesmo sinal depende do sinal do maior número	1/34	2,9
TOTAL		34/34	100

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

N=34

Com o objetivo de levantar hipóteses sobre a divisão exata entre dois Números Inteiros Relativos de sinais opostos 30 (88,2%) estudantes apresentaram compreensões e 4 (11,8%) dificuldades.

No caso das respostas associadas às compreensões, 30 (88,2%) estudantes constataram que o resultado da divisão exata entre dois inteiros com sinais opostos é um número negativo: “sempre dará um número inteiro negativo” (A11).

Com relação às dificuldades, 2 (5,9%) estudantes afirmaram equivocadamente que o resultado da divisão entre dois inteiros com sinais opostos é um número positivo: “é positivo, + (A6)” e dois (5,9%) que o resultado depende do sinal do maior número: “depende do número que for maior” (B10).

No caso de levantar hipóteses sobre a divisão de zero por um Número Inteiro Relativo qualquer, 33 (97,1%) estudantes afirmaram que o quociente de tal divisão é zero: “[...] sempre dá zero nos dois casos” (A5). Somente 1 (2,9%) estudante afirmou equivocadamente que o resultado da divisão entre zero e um número inteiro resulta no próprio número: “dá o mesmo número” (B15).

Por fim, o objetivo de levantar hipóteses sobre a divisão entre dois Números Inteiros Relativos com mesmo sinal foi compreendido por 27 (79,4%) estudantes, enquanto 7 (20,6%) apresentaram dificuldades. As compreensões foram associadas às respostas de 27 (79,4%) estudantes que afirmaram que a divisão entre dois inteiros com mesmo sinal resulta em um número positivo: “Positivo nos dois casos” (A11), enquanto as dificuldades foram divididas em dois aspectos: seis (17,7%) estudantes ressaltaram equivocadamente que tal divisão resulta em um número negativo e um (2,9%) que depende do sinal do maior número: depende do número que for maior” (B10).

Em síntese, os dados referentes à divisão de Números Inteiros Relativos no contexto de preços e parcelas demonstraram que os estudantes calcularam corretamente os valores, atribuindo o sinal negativo para as dívidas e para o valor das parcelas.

No contexto bancário essa constatação se inverteu, pois apesar de calcularem corretamente o valor do saldo, os estudantes apresentaram dificuldades em representar matematicamente a situação por meio de uma divisão entre um Número Inteiro Relativo positivo e um negativo e entre dois negativos.

Por fim, no momento de formular hipóteses sobre a divisão exata entre Números Inteiros Relativos, as compreensões superaram as dificuldades. Os estudantes, em maior número, conseguiram inferir corretamente sobre o sinal do resultado da divisão entre Números Inteiros Relativos com sinais opostos, com sinais iguais e de zero por um inteiro.

9.8.1 Análise das respostas dos estudantes sobre divisão de Números Inteiros Relativos

Analisar aspectos referentes ao desenvolvimento do conceito de divisão de Números Inteiros Relativos compreendeu trabalhar com atividades que envolveram a partição equitativa e a medida, abrangendo os contextos bancário com parcelas, dívidas, lucros e saldos.

Nesse sentido, os dados referentes à divisão de Números Inteiros Relativos no contexto de dívidas e parcelas (Tabela 37) revelaram que os estudantes calcularam corretamente o valor da parcela por meio da divisão entre um inteiro negativo e um

positivo (partição equitativa), ou seja, atribuindo corretamente o sinal negativo à dívida e ao resultado. A principal dificuldade não foi referente ao cálculo da divisão em si, mas a não atribuição do sinal negativo à parcela.

A mesma dificuldade foi encontrada nas respostas relacionadas à divisão de inteiros no contexto de medida, trabalhada por meio de lucros e parcelas (Tabela 38). Os estudantes calcularam corretamente a quantidade de parcelas, porém a maioria não representou a situação por meio da divisão entre dois Números Inteiros Relativos. Isso também ocorreu em aspectos relacionados à participação equitativa e à medida referentes à divisão de Números Inteiros Relativos, abordados por meio do contexto bancário (Tabela 39), pois nos dois casos todos os estudantes calcularam corretamente o valor do saldo, mas a maioria não considerou o sinal dos números na divisão.

No que se refere às atividades citadas, possivelmente os estudantes perceberam que a resolução poderia ser realizada utilizando Números Naturais, e que somente o resultado representado por um inteiro. O fato de não considerar o sinal negativo das parcelas remete à concepção em que os Números Inteiros Relativos “são tratados como se fossem números naturais: o sinal '-' é interpretado como um símbolo de subtração entre números naturais ou é ignorado” (CID, 2003 apud COQUIN-VIENNOT, 1985).

Apesar disso, a realização das atividades anteriores colaborou para que as hipóteses levantadas pelos estudantes referentes ao sinal resultante da divisão exata entre Números Inteiros Relativos fossem compreendidas (Tabela 40). No caso da divisão entre dois números inteiros com sinais opostos, a maior parte dos estudantes afirmou corretamente que o resultado é um número negativo.

A divisão de zero por um Número Inteiro Relativo também não suscitou dificuldades nos estudantes, uma vez que somente um deles afirmou equivocadamente que o resultado da divisão entre zero e um inteiro resulta no próprio número. Os demais afirmaram corretamente que o resultado é zero.

Apesar da maioria dos estudantes afirmar corretamente que a divisão entre dois Números Inteiros Relativos com mesmo sinal resulta em um número positivo, as dificuldades compareceram em maior proporção com relação às divisões anteriores.

Nesse caso, cerca de 20% dos estudantes levantaram hipóteses equivocadas sobre o resultado, sendo que alguns afirmaram que a divisão entre dois Números Inteiros Relativos com mesmo sinal resulta em um número negativo e outros que tal resultado depende do sinal do “maior número”.

A dificuldade em questão remete à busca por um modelo unificador que dê sentido tanto a estrutura aditiva, quanto à multiplicativa (GLAESER, 1986, CID, 2002), ou seja, os estudantes que levantaram hipóteses equivocadas, neste caso, reproduziram a “regra” aprendida na adição de Números Inteiros Relativos, inferindo erroneamente que este seria um bom modelo concreto que também poderia justificar a divisão nesse conjunto.

10 CONCLUSÕES

Na presente pesquisa buscamos “elaborar e desenvolver com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, um conjunto de atividades didático- pedagógicas sobre Números Inteiros Relativos apoiadas em seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos e em pressupostos da Resolução de Problemas como metodologia de ensino”.

As atividades desenvolvidas foram referentes às seguintes temáticas envolvendo o conceito de Número Inteiro Relativo: significado (quatro atividades), reta numérica (seis atividades), módulo e simétrico (três atividades), ordenação e comparação (quatro atividades) e operações (nove atividades de adição de inteiros, sete de subtração, oito de multiplicação e quatro de divisão).

Essas atividades foram elaboradas e desenvolvidas sob o constante questionamento sobre quais são as compreensões e dificuldades dos estudantes no processo de aprendizagem do conceito de Número Inteiro Relativo e, no processo de aprendizagem de Número Inteiro Relativo, quais as dificuldades dos estudantes se assemelharam às que o ocorreram historicamente na elaboração desse conceito.

Assim sendo, algumas conclusões serão apresentadas no decorrer desse capítulo, levando em consideração cada temática relacionada ao Número Inteiro Relativo investigada neste trabalho.

Quanto ao significado de um Número Inteiro Relativo

De modo geral, com relação aos resultados alcançados, a pesquisa nos mostrou que inerente à aprendizagem de aspectos envolvendo o significado de Número Inteiro Relativo, em um primeiro momento, os estudantes associaram o conceito a situações extraescolares, tais como: temperaturas, saldos bancários, situações do cotidiano, dentre outras.

As situações escolares citadas pelos estudantes, em sua maioria, não remeteram às características predicativas dos Números Inteiros Relativo, mas à utilização dos sinais positivo (+) e negativo (-) em contextos operatórios (TEIXEIRA, 1993; HILLESHEIM; MORETTI, 2013; CID, 2015).

Possivelmente, isso se explique pelo fato de que, apesar de se depararem com situações envolvendo os Números Inteiros Relativos no cotidiano, no sétimo ano do Ensino Fundamental é a primeira vez que o conceito comparece como conhecimento curricular escolar, o que fez com que os estudantes respondessem às atividades com base

somente no conjunto dos Números Naturais, o qual eles conheciam no momento.

Tanto é que, nas primeiras atividades (armazém e saldo de gols), metade dos estudantes não conseguiu representar as situações propostas utilizando Números Inteiros Relativos. A representação foi em língua materna. Porém, essa característica pareceu ser superada no decorrer do desenvolvimento das atividades, ainda no mesmo eixo, que envolveram o significado do Número Inteiro Relativo.

Corroborando a constatação anterior, o fato de verificarmos que tal dificuldade de aprendizagem não compareceu no momento da utilização destes números para a representação de situações, ou seja, a conversão de representações em língua materna em linguagem matemática (DUVAL, 2012) foi compreendida pela totalidade dos participantes da pesquisa, demonstrando que inferiram que os Números Naturais não seriam suficientes para a representação de alguns contextos propostos nas atividades didáticas.

Quanto à representação de Números Inteiros Relativos na reta numérica

No caso da representação de Números Inteiros Relativos na reta numérica, ressaltamos que nas situações referentes a deslocamentos à esquerda e à direita houve a compreensão da maior parte dos estudantes. Isso se repetiu na representação de elementos “abaixo e acima do nível do mar”.

Nos dois casos, as principais dificuldades, mesmo que em menor proporção, compareceram no fato de alguns estudantes desconsiderarem os números à esquerda/abaixo da origem na reta, ou seja, os números inteiros negativos.

Neste caso, destaca-se que, em uma atividade inicial, cerca de 30% dos estudantes desconsideraram os números negativos na reta, enquanto no decorrer das atividades desse eixo, essa porcentagem diminuiu para 10%.

Com relação à utilização da reta numérica, para a comparação de Números Inteiros Relativos, destacamos a dificuldade dos estudantes em comparar dois números inteiros negativos, mesmo com o auxílio da reta.

Essa dificuldade se confirmou na atividade referente a propriedades da reta numérica, em que alguns estudantes desconsideraram o sinal do número, indicando erroneamente que, tanto em deslocamentos à esquerda, quanto à direita da origem os números aumentaram.

Assim sendo, nos dois casos citados, para a comparação de Números Inteiros houve a utilização da lógica regida pelas propriedades dos Números Naturais. Apesar

disso, no caso da comparação de um número inteiro positivo com um negativo e entre dois positivos, houve a compreensão da maior parte dos estudantes.

No que tange à identificação de Números Inteiros Relativos pertencentes a intervalos da reta numérica, a principal dificuldade ocorreu quando houve a impossibilidade da existência de tais números em um intervalo determinado. Em intervalos positivos e negativos em que a possibilidade de conter números inteiros era evidente, os estudantes obtiveram êxito no desenvolvimento das atividades.

Em suma, constatamos que as dificuldades relacionadas à temática representação de Números Inteiros Relativos em uma reta vêm ao encontro a um obstáculo no desenvolvimento epistemológico do conceito, citado por Glaeser (1985): dificuldade em unificar a reta numérica, ou seja, de considerar a reta numérica como um campo ordenado da esquerda para a direita (CARAÇA, 2003).

Igualmente o fato de desconsiderar o sinal do inteiro ou inferir que os números inteiros negativos aumentam à medida que se afastam do zero reforçam que os estudantes que apresentaram essa dificuldade deixaram de considerar “simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números” (GLAESER, 1985, p.7).

Quanto ao módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo

Nas atividades envolvendo os conceitos de módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo constatamos que os estudantes não apresentaram muitas dificuldades no desenvolvimento. Apesar dessa constatação, no caso do conceito de módulo de um número inteiro, a principal dificuldade, mesmo comparecendo em menor proporção, referiu-se à associação da distância de um ponto localizado à esquerda do zero a um número negativo.

Essa visão equivocada possivelmente refletiu em outras dificuldades relacionadas aos conceitos desenvolvidos nesse eixo, pois levaram alguns estudantes a inferir erroneamente que as distâncias de elementos localizados em posições opostas eram diferentes, associando o conceito de módulo a um número negativo.

Tal característica repetiu-se durante o desenvolvimento da atividade envolvendo o conceito de oposto, porém no momento de calcular o oposto de um número inteiro, somente dois estudantes do total de participantes da pesquisa associaram equivocadamente tal conceito à distância de um determinado ponto à origem, ou seja, aplicaram a ideia de módulo à atividade proposta.

Ainda assim, as respostas referentes à atividade de sistematização dos conceitos

confirmaram que os estudantes assimilaram aspectos relacionados aos conceitos de módulo e simétrico de um Número Inteiro Relativo, posto que todos os estudantes realizaram a atividade corretamente.

Quanto à ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos

Os dados relativos à temática ordenação e comparação de Números Inteiros Relativos demonstraram que grande parte dos estudantes compreendeu as situações propostas. Apesar disso, no caso da comparação de inteiros no contexto de saldos bancários, mesmo que em menor proporção, houve dificuldades em indicar qual o menor saldo dentre os abaixo de zero.

No contexto envolvendo comparação e ordenação de temperaturas essa tendência permaneceu, pois os estudantes conseguiram indicar corretamente as cidades com maior e menor temperatura, porém, quando questionados sobre o pertencimento de determinadas temperaturas a um intervalo predefinido, cerca de 40% dos estudantes não conseguiram identificar corretamente as pertencentes ao intervalo.

Tal dado nos demonstrou que, no caso da identificação de números em intervalos definidos, o trabalho com o contexto da temperatura não modificou significativamente o cenário estabelecido, persistindo a dificuldade prévia dos estudantes, pois esta já havia comparecido nas atividades do eixo 2, em que mesmo com o auxílio da reta dos Números Inteiros Relativos, cerca de metade dos estudantes não conseguiu constatar a impossibilidade de conter números em um intervalo.

Ainda, no que se tange à ordenação de Números Inteiros Relativos, os dados revelaram respostas referentes às ordenações corretas. A principal dificuldade, mesmo comparecendo em menor número, consistiu em respostas de estudantes que consideraram somente o valor absoluto dos Números Inteiros Relativos durante a ordenação, levando a comparações equivocadas na resolução das atividades.

Cabe lembrar que tratar o inteiro como um natural e considerar o sinal dos números somente em contextos operatórios foi também uma dificuldade presente no eixo referente ao significado de Número Inteiro Relativo.

Contatamos que essa dificuldade diminuiu significativamente com o desenvolvimento das atividades envolvendo reta numérica e ordenação e comparação, pois, anteriormente, cerca da metade dos estudantes associou o sinal do Número Inteiro Relativo somente à realização de operações matemáticas, e nesse momento, praticamente a totalidade dos estudantes apresentou compreensão inerente às características

predicativas do sinal.

Nesse sentido, consideramos que o trabalho com os contextos bancário e de temperatura desenvolvido demonstrou potencialidade se tomarmos como base as atividades iniciais envolvendo a ordenação e comparação de quantidades isoladas com o auxílio da reta numérica.

Como constatamos anteriormente, com o auxílio da reta numérica, cerca de 40% dos estudantes utilizaram equivocadamente a lógica presente nos naturais para comparar Números Inteiros Relativos, valor que diminuiu durante a realização das atividades específicas para 10% das respostas, em média.

Quanto às operações envolvendo Números Inteiros Relativos

Com relação ao desenvolvimento de atividades envolvendo a adição de Números Inteiros Relativos, alguns contextos foram explorados, tais como: deslocamentos à esquerda e à direita, pontos ganhos e perdidos, saldo bancário e identificação de padrões e regularidades envolvendo a adição.

No contexto envolvendo deslocamentos à esquerda/baixo (negativos) e à direita/cima (positivos), os estudantes conseguiram utilizar corretamente Números Inteiros Relativos para representar tais deslocamentos. Ainda, no cálculo do local de chegada, cerca de 70% dos estudantes compreenderam que a operação a ser realizada seria a adição dos deslocamentos e, praticamente a totalidade, inferiu corretamente sobre a adição de um Número Inteiro Relativo com seu oposto/simétrico. Nesse caso, a principal dificuldade foi a não indicação da operação realizada.

Os dados referentes às respostas das atividades envolvendo pontos ganhos e perdidos no âmbito da adição de Números Inteiros Relativos indicaram compreensões por parte dos estudantes, já que, a maior parte deles calculou corretamente as pontuações totais, levantando hipóteses corretas sobre tal operação. Apesar disso, as dificuldades compareceram na adição de dois inteiros negativos e entre dois inteiros com sinais opostos.

Ainda, no que tange à operação de adição de Números Inteiros Relativos no contexto de padrões numéricos, os estudantes apresentaram dificuldades, pois mais da metade associou a construção da regularidade à operação de subtração, ou seja, nesse momento não ampliaram o conceito de adição em $\mathbb{Z}$, que também pode resultar em uma diminuição, como no caso da atividade abordada.

Em um contexto bancário os estudantes apresentaram compreensões referentes à

adição de inteiros positivos e entre números com sinais opostos. Assim sendo, a principal dificuldade pelos estudantes foi na adição entre inteiros negativos (saldos negativos).

Portanto, as atividades envolvendo adição de Números Inteiros Relativos proporcionaram aos estudantes levantar hipóteses sobre o resultado da adição entre Números Inteiros Relativos. Nesse caso, as dificuldades encontradas, mesmo que em menor número, foram inerentes à adição entre inteiros com sinais positivos e à adição entre dois inteiros opostos/simétricos.

As compreensões se justificam, pois, as atividades, objetivando abordar deslocamentos à esquerda/baixo, à direita/cima e os locais de chegada possibilitaram aos estudantes constatarem que tais deslocamentos são representados por um acréscimo e o que os difere é o sentido, que pode ser positivo ou negativo.

Assim sendo, constatamos que tais características presentes nas atividades corroboram para o aprendizado de situações referentes à soma de um Número Inteiro Relativo com o seu oposto/simétrico e à transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final (VERGNAUD, 1981, 1986, 1990, 2009).

Além disso, as atividades que envolveram o contexto dos pontos ganhos e perdidos, bem como o preenchimento de tabelas com esses dados, também demonstraram potencialidades para o ensino de adição de Números Inteiros Relativos. Isso porque, os estudantes puderam, por meio de cálculos e preenchimento das tabelas, levantar hipóteses sobre o resultado da operação entre dois números inteiros positivos, entre inteiros negativos e com sinais opostos ao representarem a adição da pontuação inicial de cada rodada com o valor da pontuação atual, convertendo a representação em língua materna em linguagem algébrica (DUVAL, 2015).

Na subtração de Números Inteiros Relativos, essa característica se repetiu, ou seja, os estudantes também demonstraram compreensões quando esta foi abordada em atividades que envolveram o contexto de pontos ganhos e perdidos. Além disso, no caso da referida operação, as atividades referentes ao contexto bancário, temperaturas (subtração para representar diminuições) e à identificação de padrões/regularidades também levaram os estudantes às compreensões.

Por conseguinte, as principais dificuldades relativas a tal operação referiram-se à subtração entre estados final e inicial, principalmente no que tange ao cálculo de variações de temperaturas e ao cálculo de transformações, como por exemplo, encontrar o valor que foi depositado, tendo como base os saldos anterior e posterior ao depósito bancário. Também, a subtração entre dois números inteiros negativos, mesmo que em menor

frequência, suscitou dúvidas nos estudantes, principalmente no que se refere à retirada de um número negativo, por exemplo: $- (-3)$.

Um dos motivos do comparecimento dessa dificuldade, possivelmente ocorreu, pois, os estudantes não associaram a ideia da devolução do dinheiro à retirada de uma dívida (subtração de um inteiro negativo), mas sim ao fato de ganhar o dinheiro que havia utilizado, ou seja, a adição de um saldo positivo ao que já possuía. Assim, consideramos que na atividade que evidenciou esse objetivo, o contexto trabalhado (retirada de uma dívida), não foi suficiente para proporcionar a todos os estudantes a compreensão da subtração de um número inteiro negativo e sua representação $(- (-))$

Os resultados referentes à multiplicação entre Números Inteiros Relativos demonstraram que as principais compreensões dos estudantes foram inerentes, principalmente, a atividades envolvendo o cálculo de proporções.

Nesse sentido, alguns contextos foram utilizados nas atividades para o desenvolvimento do conceito, tais como: cálculos de pontos ganhos e perdidos, padrões e regularidades e situações-problema diversas. Nesse caso, as principais dificuldades surgiram na representação de situações utilizando a multiplicação de Números Inteiros Relativos, principalmente no que se refere às justificativas algébricas por meio de expressões numéricas.

Possivelmente, as dificuldades encontradas ocorreram, pois em uma das atividades dessa seção foi pedido que os estudantes justificassem a resposta apresentada, sem um maior detalhamento. Nesse caso, se houvesse na atividade um item referente à representação por meio de uma expressão algébrica, haveria menos respostas utilizando a língua materna.

De fato, quando em outra atividade posterior foi solicitado aos estudantes completar uma tabela com a representação matemática da situação envolvendo a multiplicação, houve menos dificuldades. Nesse caso, o modo que a atividade foi elaborada, principalmente no que se refere aos seus questionamentos direcionados à representação algébrica, pode justificar o aumento das compreensões em relação à situação abordada anteriormente.

Outro tipo de atividade que demonstrou potencialidades para o ensino de multiplicação de Números Inteiros Relativos envolveu padrões numéricos em tabelas.

Consideramos que o trabalho com esse tipo de atividade proporcionou aos estudantes levantar hipóteses válidas sobre a multiplicação entre inteiros com sinais opostos, de zero por um inteiro e entre dois inteiros negativos. Nesse caso, as atividades

possibilitam que as regras de sinais da multiplicação sejam inferidas pelos próprios estudantes e não somente pela mera exposição do professor, pois são realizadas por meio do modelo aritmético que se baseia no prolongamento da reta numérica (MORETTI, 2012).

Os dados relacionados à divisão de Números Inteiros Relativos evidenciaram que no contexto de preços e parcelas os estudantes calcularam corretamente os valores, atribuindo o sinal negativo para as dívidas e para o valor das parcelas.

Já no contexto bancário, os estudantes apresentaram dificuldades em representar matematicamente a situação por meio de uma divisão entre um Número Inteiro Relativo positivo e um negativo e entre dois negativos, apesar de calcularem corretamente o valor do saldo. Apesar disso, no momento de formular hipóteses sobre a divisão exata entre Números Inteiros Relativos, as compreensões superaram as dificuldades.

Provavelmente, tal dificuldade de representação se deu pela natureza das atividades propostas. Isso porque, tais atividades poderiam ser resolvidas utilizando Números Naturais e somente o resultado representado por um Número Inteiro Relativo, pois se referiram a valores de dívidas e parcelas. Assim sendo, de acordo com Cid (2015), os estudantes até conhecem os Números Inteiros Relativos, mas sempre que possível, utilizam Números Naturais para obter respostas corretas.

12. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho nos permitiu compreender aspectos (compreensões e dificuldades) do ensino e da aprendizagem do Número Inteiro Relativo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da implementação de um conjunto de atividades didático-pedagógicas fundamentadas em pressupostos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo e da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica.

Para tanto, na fundamentação teórica, com o intuito de atender ao objetivo específico “Descrever aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo, evidenciando as principais dificuldades na construção desse conceito e nos processos de ensino e aprendizagem escolar”, elucidamos o conceito num ponto de vista histórico-epistemológico a fim de evidenciarmos as dificuldades em sua construção e, conseqüentemente, reflexos de tais obstáculos nos processos de ensino e de aprendizagem escolar atualmente.

Retratados aspectos históricos e obstáculos epistemológicos presentes no desenvolvimento do conceito de Número Inteiro Relativo, a fim de atender o objetivo específico “Descrever como o conceito de Número Inteiro Relativo é abordado em documentos que norteiam os processos de ensino e aprendizagem no âmbito da educação escolar brasileira: Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019)”, buscamos evidenciar como a temática é abordada em documentos oficiais que norteiam a educação escolar brasileira em geral e no estado de São Paulo. Assim sendo, descrevemos como o conceito é apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019).

Percebemos que diferentemente dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), o conceito é somente apresentado nos demais documentos, Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), por meio de códigos e siglas (habilidades), não havendo discussões mais aprofundadas sobre características primordiais dos processos de ensino e de aprendizagem de Números Inteiros Relativos.

Assim sendo, em que medida o objetivo de desenvolver competências e habilidades curriculares relacionadas a Números Inteiros Relativos (NIR), tal como apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e no Currículo

Paulista (SÃO PAULO, 2019), é orientador de um trabalho didático-pedagógico que implique a compreensão do Número Inteiro Relativo pelos alunos?

Constatamos que nestes documentos não estão presentes situações relacionadas a como o estudante pode aprender, quais as principais dificuldades que eles podem ter nesse processo, ou como o professor pode ensinar de forma que eles compreendam da melhor maneira possível um determinado conceito.

Segundo Oliveira (2020), tal aspecto reforça o tecnicismo presente nesses documentos, limitando o trabalho do professor à mera reprodução de conhecimentos, competências e habilidades.

No decorrer deste trabalho percebemos a complexidade do conceito de Número Inteiro Relativo e de todo o conhecimento que o estudante deve mobilizar para seu aprendizado, além das diversas situações, levando em consideração os pressupostos epistemológicos, didáticos e cognitivos, que o docente deve elaborar/abordar/propor para que tal objetivo seja atingido.

Sendo assim, não nos parece razoável que um conceito de difícil aprendizagem pelos estudantes seja limitado a atividades didático-pedagógicas associadas a apenas duas habilidades - EF07MA03 e EF07MA04 - como consta nos documentos que norteiam a educação brasileira e paulista nos últimos anos, ainda que estas sejam de fundamental importância para o desenvolvimento e ampliação de capacidades cognitivas.

Buscando atender ao objetivo específico de “descrever e analisar como a temática dos Números Inteiros Relativos é abordada nos livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental, presentes no PNLD-2020”, elucidamos a perspectiva didática para o ensino de Números Inteiros Relativos com base na descrição e análise de cinco coleções de livros de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental com maior número de escolhas no Brasil, de acordo com os dados do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do ano de 2020.

Ficou evidente que as coleções analisadas têm o objetivo de colaborar com o desenvolvimento das competências gerais, das competências específicas da Matemática e das habilidades, no caso do conceito de Número Inteiro Relativo, tal como segue: “Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração” (BRASIL, 2017, p.307) e “Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros” (BRASIL, 2017, p.307), presentes na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

Aspectos históricos, cognitivos e didáticos inerentes à formação de conceitos matemáticos (VERGNAUD (1981; 1986; 1990; 2009); GLAESER (1985); BOYER (1991); TEIXEIRA (1992; 1993); CARAÇA (2003); BORBA E NUNES (2004); BORBA (2009); DUVAL (2012, 2018); OLIVEIRA (2019)) nos permitiram compreender que a intenção de desenvolver as habilidades citadas não garante por si só a aprendizagem escolar do conceito de Número Inteiro Relativo, pois a complexidade desse conceito requer que o estudante compreenda também a diversidade de significados referentes às quantidades negativas e ao sinal dos números, reconheça os diferentes papéis do zero neste conjunto e perceba que as operações realizadas com Números Naturais se ampliam nos inteiros (BRASIL, 1998).

Ainda assim, de acordo com a análise realizada é possível afirmar que a maioria das atividades presentes nos livros analisados pode auxiliar no processo de aprendizagem do conceito, desde que sejam abordadas de maneira que os estudantes possam formular e discutir hipóteses com a mediação do professor, a partir de um problema apresentado, tendo como ações metodológicas, por exemplo, aquelas caracterizadas pela Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino (ECHEVERRÍA; POZO, 1998; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Outro objeto de reflexão se referiu à perspectiva cognitiva da aprendizagem de Números Inteiros Relativos. Apresentamos conceitos diversos que nortearam o desenvolvimento deste trabalho, que inclusive, constituíram o aporte teórico para a elaboração e implementação das atividades didáticas, como por exemplo a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990; 1993; 1996; 2009).

De fato, compreender como o estudante assimila, em termos cognitivos, o conceito de Número Inteiro Relativo foi crucial para o desenvolvimento deste trabalho.

Outro aspecto ressaltado na fundamentação teórica foi referente às diferentes abordagens da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica.

Nesse sentido sintetizamos, com base nos estudos de Schroeder e Lester (1989), três abordagens: ensinar “sobre resolução de problemas”, ensinar “para resolver problemas” e ensinar “via resolução de problemas”, com o intuito de salientar a perspectiva metodológica utilizada nesse trabalho.

Assim sendo, destacamos que a abordagem utilizada foi a de ensino “via resolução de problemas”, organizando a aula de acordo com as fases propostas por Van de Walle (2009): fase antes de uma lição, fase durante uma lição e fase depois de uma lição.

Diante de todos os aspectos levantados, tendo em vista que as compreensões superaram as dificuldades na maior parte das situações propostas, consideramos que as atividades didático-pedagógicas fundamentadas nos aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos do Número Inteiro Relativo e em pressupostos da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica contribuíram para o aprendizado desse conceito pelos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Em que pesem os resultados alcançados na presente pesquisa, quais são os limites e as potencialidades da Resolução de Problemas nos processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos?

No que se refere aos limites desta metodologia para os processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos, destaca-se a dificuldade inicial de levar os estudantes à compreensão das fases, levando-os a uma “resistência” à maneira de realização das atividades.

Muitos deles, nas primeiras atividades envolvendo Números Inteiros Relativos, queriam que o pesquisador fornecesse a resposta ou legitimasse o que estavam realizando no momento do desenvolvimento das atividades, ou seja, almejavam que fosse dito se a resolução estava “certa ou errada” antes mesmo da fase referente à discussão e à validação das hipóteses.

Neste caso, notamos a ansiedade dos estudantes no momento da resolução das atividades, pois alguns, percebendo que estas demandavam a elaboração de estratégias e não somente a aplicação de regras pré-estabelecidas pelo professor, queriam desistir sem ao menos tentar formular hipóteses iniciais para chegar ao resultado. Além disso, na fase em que os estudantes deveriam apresentar as hipóteses para a validação, inicialmente, muitos apresentaram receio de falar, pois ficaram com medo de errar ou de julgamentos dos demais colegas.

Possivelmente, esta característica que constatamos no desenvolvimento das primeiras atividades didáticas, utilizando a Resolução de Problemas (ECHEVERRÍA; POZO, 1998; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) como perspectiva metodológica, se deu pelo modo como foi ensinado conceitos matemáticos aos estudantes no decorrer do processo de escolarização.

Em muitos casos, há o predomínio do ensino tradicional da Matemática, no qual o professor apresenta a definição do conceito, relaciona exemplos e pede para que os estudantes resolvam exercícios similares aos apresentados para “fixação” (PONTES, 2019; OLIVEIRA, 2019).

Deste modo, o professor é visto como um transmissor de conteúdos e o estudante é inerte ao processo de aprendizagem, ou seja, somente reproduz o que foi dito pelo docente. “O professor tradicional continua guiando os estudantes, dizendo exatamente como usar os materiais de uma maneira bem prescrita. O enfoque da lição está principalmente em obter respostas” (VAN DE WALLE, 2009, p.31).

No caso da Resolução de Problemas, o estudante é protagonista do processo, enquanto o professor é o mediador do conceito, não apresentando respostas ou estratégias prontas para a resolução das atividades, mas levando os estudantes a desenvolverem o raciocínio para atingir o objetivo proposto.

O papel do professor é criar este espírito de pesquisa, de confiança e de expectativa. Neste ambiente, os estudantes são convidados a fazer matemática. Os problemas são apresentados e os estudantes buscam soluções por eles mesmos. O foco está nos estudantes ativamente compreenderem as coisas, testarem ideias e fazerem conjecturas, desenvolverem raciocínios e apresentarem explicações (VAN DE WALLE, 2009, p.33).

Cabe ressaltar que após a realização de algumas atividades a dificuldade retratada foi superada, pois os estudantes, por meio da mediação do pesquisador com base na Resolução de Problemas (ECHEVERRÍA; POZO, 1998; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) como perspectiva metodológica, compreenderam a importância de cada etapa para a aprendizagem do conceito e passaram a discutir cada estratégia utilizada para a resolução das atividades.

Outro fator que pode ser considerado um limite para a utilização da metodologia refere-se ao tempo utilizado para a preparação e desenvolvimento das atividades nessa perspectiva. Vale destacar que devido à complexidade do conceito de Número Inteiro Relativo, este, por si só, requer muitas aulas para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem.

Contudo, o fato de elaborar/reelaborar/selecionar problemas com a intencionalidade de levar os alunos a formularem e validarem hipóteses durante as aulas de Matemática, utilizando a perspectiva da Resolução de Problemas (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, VAN DE WALLE, 2009, ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), demanda uma maior dedicação do professor, mais precisamente, um tempo muito superior de estudos.

Além disso, inerente às etapas presentes na Resolução de Problemas, especificamente o momento de desenvolver as atividades em sala de aula, também

demanda um tempo muito maior com relação ao ensino tradicional de Matemática (PONTES, 2019; OLIVEIRA, 2019).

Essa característica pode levar a um “atraso” no ensino de outros conceitos pré-estabelecidos na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e em outros currículos adotados pelas escolas, por exemplo, o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), resultando possivelmente em cobranças institucionais ao professor que não conseguiu concluir todo o conteúdo de Matemática do ano letivo.

Nessa lógica de trabalho docente, vale levar os alunos à compreensão de poucos conceitos de maneira satisfatória, ou é necessário, simplesmente, arrolar a maior quantidade de conteúdos para “concluir o ano letivo” sem a garantia da assimilação da maior parte dos estudantes?

Não nos parece razoável pensar que ensinar matemática é simplesmente “passar a maior quantidade de conteúdos para os estudantes” sem que eles compreendam ou se apropriem dos aspectos determinantes para a formação de um conceito. De fato, trabalhar com um conjunto de situações, invariantes e representações simbólicas requer um longo período de tempo, principalmente se considerarmos situações-problema para o desenvolvimento do conceito (VERGNAUD, 1996, 1998).

Com relação às potencialidades da Resolução de Problemas (ECHEVERRÍA; POZO, 1998; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) nos processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos, destacamos o aumento do interesse dos estudantes pela aprendizagem do conceito de Número Inteiro Relativo. Apesar de no começo das atividades didáticas eles apresentarem dificuldades para compreender as fases da metodologia, no decorrer das ações metodológicas orientadas pela Resolução de Problemas, observamos que os alunos foram se habituando e passando a querer expor e discutir as estratégias pessoais de resolução.

Em linhas gerais, os estudantes apresentaram uma maior motivação para resolver as atividades, passando a ver as discussões de hipóteses como possibilidade de aprender com os outros colegas e com o pesquisador. Esta fase é importante para a aprendizagem, pois, “[...] os estudantes devem compreender que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas e porque elas estão corretas também é deles. A justificativa deve ser uma parte integrante de suas soluções” (VAN DEL WALLE, 2009).

Outro ponto que ressaltamos diz respeito ao desenvolvimento das atividades didáticas pelos estudantes. O fato delas exigirem soluções criativas e não somente a reprodução do conteúdo, em princípio, mostrou-se um obstáculo para os estudantes.

Porém, no desenvolvimento das ações didático-pedagógicas eles foram se habituando com as características das situações-problema, passando a desenvolver estratégias de resolução próprias.

Em diferentes momentos dessas ações didático-pedagógicas foi possível compreender que as mesmas oportunizavam o desenvolvimento de habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) para o ensino de Matemática, tais como: “raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (p. 266).

A fase referente à utilização da Resolução de Problemas pelo pesquisador também pode ser considerada uma potencialidade da metodologia, uma vez que proporcionou um maior aprofundamento sobre a maneira de ensinar o conceito de Número Inteiro Relativo de um modo que o estudante fosse protagonista do processo de aprendizagem.

De fato, a etapa relacionada à elaboração/reelaboração das atividades didáticas envolveu muito estudo para ser concluída, uma vez que as tarefas deveriam ser escolhidas de acordo com pressupostos didáticos, epistemológicos e cognitivos do conceito de Número Inteiro Relativo.

Diante de todos os resultados apresentados, como, em síntese, esse trabalho contribuiu com relação ao que foi desenvolvido nas pesquisas analisadas no capítulo de levantamento bibliográfico, à produção de conhecimento científico sobre as compreensões e dificuldades dos estudantes sobre o conceito de Número Inteiro Relativo?

No que tange às contribuições deste trabalho em relação às pesquisas analisadas, que compõem o levantamento bibliográfico, consideramos que a elaboração de atividades didático-pedagógicas abrangendo a tríade: aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos do Número Inteiro Relativo foi um diferencial desta pesquisa pois algumas pesquisas consideraram somente características isoladas do conceito, ou seja, algumas focaram somente em obstáculos didáticos e epistemológicos (LUNA, 2018; GONÇALVES, 2020) outras em dificuldades dos estudantes na aprendizagem ou nos aspectos cognitivos (BECK, 2019; DINIZ, 2019).

Além disso, ressaltamos que elaborar e desenvolver com estudantes atividades

que abordaram desde o significado até operações com Números Inteiros Relativos, também representou contribuições desse trabalho para os processos de ensino e aprendizagem deste conceito, uma vez que, a maioria das pesquisas levantadas focaram somente nas operações com os mesmos.

É inegável a contribuição de tais pesquisas para o ensino e aprendizagem de operações com Números Inteiros Relativos, ou seja, envolvendo um conceito tão complexo (CARAÇA, 2003, CID, 2002, TEIXEIRA, 1992, OLIVEIRA, 2019).

Contudo, consideramos um importante avanço também investigar como o estudante compreende o Número Inteiro Relativo desde o início, ou seja, se consegue entender que o seu significado difere de acordo com o contexto atribuído, como passa a perceber a distinção dos sinais de positivo e de negativo, que acompanham um Número Inteiro Relativo em diferentes situações, quais características contextuais e de propriedades do Conjunto Z levam em consideração ao comparar e ordenar inteiros, como entendem os conceitos de módulo e simétrico neste conjunto.

Essa investigação e seus resultados foram primordiais para que pudéssemos investigar quais as principais dificuldades dos alunos para conceituar e operar com Números Inteiros Relativos.

Portanto, apesar do desafio de unir todos esses aspectos apresentados em um trabalho, ressaltamos a importância das abordagens cognitiva, didática e epistemológica do conceito como norteadoras do desenvolvimento dessa pesquisa.

De fato, após a análise dos resultados, nos parece indissociável que para ensinar um conceito dessa importância devemos compreender quais obstáculos se apresentaram na construção dos Números Inteiros Relativos, como os livros didáticos abordam tal conceito e como o estudante o assimila, em termos cognitivos.

Essa compreensão, certamente dá base para antecipar as principais dificuldades que os alunos possam ter na elaboração do conceito de Número Inteiro Relativo, propondo assim atividades didático-pedagógicas que possibilitem superá-las.

Diante dos dados apresentados, concluímos que o desenvolvimento de atividades didáticas com base em pressupostos da Resolução de Problemas (ECHEVERRÍA; POZO, 1998; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) como perspectiva metodológica, em sua maioria, contribuiu para a compreensão de aspectos referentes ao ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental.

Assim sendo, esperamos que os professores utilizem as atividades didáticas

desenvolvidas nesse trabalho, criando novas situações, envolvendo os processos de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos, a partir do referencial teórico discutido, considerando particularidades de seus alunos e do contexto de suas aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas. In: **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, n. 35, 2014.

ALVES, E. L. **Menos com menos é menos ou é mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do ensino regular e da educação de jovens e adultos**. 2012. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

AMORIM, S. R. C. **Números inteiros: Panorama de Pesquisas Produzidas de 2001 a 2010**. 2012. 128 f. 2012. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) -Pontificia Universidade Católica, São Paulo, 2012.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições, 2011.

BASONI, F. **Ensino e aprendizagem de números inteiros utilizando o jogo “cartas matemáticas”**. 2019. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação) – Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus - ES, 2019.

BATISTA, A. R. **A formação inicial do professor de matemática: a perspectiva dos formadores das licenciaturas de Presidente Prudente-SP**. 2018. 294 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018.

BECK, M. M. **Campo Aditivo No Conjunto Dos Números Inteiros: Um Estudo a Partir da Teoria dos Campos Conceituais**. Dissertação do Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matematica e Estatística. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre, RS, 2019.

BIANCHINI, E. **Matemática – Bianchini**. 9 ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto editora, 1994.

BORBA, R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números inteiros negativos. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Orgs). **A pesquisa em educação matemática: repercussões na sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2009. p. 58-102.

BORBA, R.; NUNES, T. Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 6, n. 1, 2004.

BORELLI, S. de S. **Estudos de Aula na formação de professores de Matemática em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental que ensinam números inteiros**. 2019. 247f. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) — Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2019.

BORELLI, S. de S.; PIRES, C.M.C. Mapeamento das pesquisas sobre números inteiros no Brasil no período de 2010 a 2016. **Educação Matemática Debate**, v. 1, n. 1, p. 28-53, 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação Infantil e Ensino Fundamental Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as Diretrizes e Bases da educação nacional. Legislação, Brasília, DF, dez. 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental- 1 ed. – Brasília: MEC/SEF. 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD 2018: matemática**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

CID, E.; GODINO, J. D.; BERNABEU, C. B. **Sistemas numéricos y su didáctica para maestros**. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003.

CID, E. La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. **Pre-publicaciones del Seminario Matemático" García de Galdeano"**, n. 25, p. 1-40, 2003.

CID, E. **Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros**. 2015. 368 f. Tese de Doutorado. Universidad de Zaragoza, España, 2015.

CID, E. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. **Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas**, 2000.

CORREIA, L. P. **Uma intervenção no ensino de operações com números inteiros**. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro: Campos dos Goytacazes, 2017.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

COSTA, A. S. da. Utilização de materiais alternativos numa intervenção pedagógica para uma aprendizagem significativa das operações dos números inteiros. 2015. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2015.

DANCZUK, F. E. **Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos números inteiros**. 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 3 ed. São Paulo: Ática, 2018.

DEIXA, G. V. **Uma abordagem dos números inteiros relativos na 8ª classe: indicadores para uma proposta de formação de professores**. 2014. 155f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2014.

DINIZ, F. de O. **A atividade de situações problema na aprendizagem com números inteiros nas operações aritmética fundamentadas em Galperin e Majmutov com os estudantes de 7º ano do ensino fundamental na Escola Estadual Fernando Grangeiro**. 2019 184 f. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Estadual de Roraima, Boa Vista, 2019.

DUVAL, R. Como Analisar A Questão Crucial Da Compreensão Em Matemática? **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

ECHEVERRÍA, M.D.P.P.; POZO, J.I.; Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J.I.; **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artmed. p. 13-42, 1998.

ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições**. Porto Alegre: AMGH, 2010.

FANTINI, P. **Sugestão de Materiais Didáticos manipuláveis a Fim de Diminuir os Obstáculos na Aprendizagem dos Números Inteiros**. Dissertação. (Mestrado em Educação). Mestrado em Educação Matemática. USP/2018. Universidade De São Paulo, São Carlos, 2018.

FERREIRA, F. I. A. **Uma trajetória de ensino e aprendizagem para o estudo de números inteiros**. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional), UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Londrina, 2019.

FERREIRA, R. N. R. **A sequência Fedathi como proposta de mediação do professor no ensino dos números inteiros**. 2018. 99 f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Estadual do Ceará, Quixadá, 2018

FIorentini, Dario. Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, 2012.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. **Araribá mais: Matemática**. São Paulo: Moderna, 2018.

GARCEZ, B P. **Jogos de matemática voltados para a aprendizagem de números inteiros no ensino fundamental**: propostas a partir da classificação Esar. 2021 50 f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Estadual de Mato Grosso Do Sul, Dourados, 2021.

GIL, Antonio Carlos et al. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GLAESER, G. **Epistemologia dos Números Negativos**. Rio de Janeiro: Boletim GEPEM, 1985.

GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. Revista de administração de empresas, v. 35, p. 57-63, 1995.

GONÇALVES, A. N. da S. **Atividades contextualizadas e o ábaco dos inteiros: recursos didáticos para introduzir os números inteiros e as operações de adição e subtração no 7º ano**. 2020. 217f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação, Belo Horizonte, 2020.

GOODSON, I. F. **Currículo: teoria e história**. Rio de Janeiro: Vozes, 1995.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 22, p. 465-487, 2016.

HILLESHEIM, S. F.; MORETTI, M. T. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2013.

HILLESHEIM, S. F. **Os números inteiros relativos em sala de aula**: perspectivas de ensino para a regra de sinais. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2013.

JUNIOR, G.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 2018.

LIELL, C. C. **Jogo Roletrando dos Inteiros**: Uma Abordagem dos Números Inteiros na 6ª Série do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado. UNIVATES- Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu- Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências Exatas. Lajeado, 2012.

LOMÔNACO, J. F. B., CAON, C. M., HEURI, A. L. P., SANTOS, D. M. D. M., FRANCO, G. T. Do característico ao definidor: um estudo exploratório sobre o desenvolvimento de conceitos. **Psicol. teor. pesqui**, p. 51-60, 1996.

RADFORD, L. **Cognição matemática**: História, antropologia e epistemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

LUNA, E. L. S. de. **O pensamento dos comerciantes medievais como elemento textual para o ensino dos números inteiros na educação básica**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, 2019.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, p. 517-533, 2014.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 691-714, 2012.

OLIVEIRA, A. A. G. de. **Motivando a aprendizagem de números inteiros por meio de materiais manipuláveis: uma experiência no sétimo ano do ensino fundamental**. 2020. 147f. Dissertação (Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2020

OLIVEIRA, F. B. de. Entre liberais e tecnicistas: a didática nas reformas do ensino. **Educação em Revista**, v. 36, 2020.

OLIVEIRA, M. B. A tradição Roschiana. In: OLIVEIRA, M. B. de & OLIVEIRA, M. K. de. **Investigações cognitivas: conceitos, linguagem e cultura**, Porto Alegre: Ed. Artes Médicas. 1999. p. 17-33

OLIVEIRA, M. de S. Uma reflexão sobre a ideia de superação do ensino tradicional na educação matemática: a dicotomia entre a abordagem clássica e abordagens inovadoras em foco. **Revista BOEM**, v. 7, n. 14, p. 79-93, 2019.

OLIVEIRA, R. G. Uma referência para a elaboração de saberes docentes a partir da observação e da reflexão de dificuldades e de erros sobre números inteiros relativos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 5, p. 318 – 332, 2019.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-89, dez. 2011.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Autêntica, 2016.

PINHO, C. de O. **Avaliação do modelo e aplicação do jogo trilha da adição de números inteiros como recurso pedagógico no ensino de adição de números inteiros**. 2017. 107 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Escolar). Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2017.

PINTO, C. E. Pentes de ovos, ovos e as quatro operações básicas da matemática com números inteiros. 2013.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

POMMER, W. M. Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z. **Seminário de Ensino de Matemática/SEMA-FEUSP**, 2010.

PONTES, E. A. S. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. **Revista Sítio Novo**, v. 2, n. 2, p. 44-56, 2018.

PONTES, E. A. S. Os Quatro Pilares Educacionais no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática. **Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología**, n. 24, p. 15-22, 2019.

PONTE, J. P. da. O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. **Interacções**, p. 96-114, 2009.

POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RIOS, N. M. **Os Números Inteiros: Construção Histórica e as Dificuldades Atuais Em Sala de Aula**. UNIFESP/SP, 2017. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade federal de São Paulo. São José dos Campos, 2017.

ROPELATO, G. **Conceitos Básicos dos Números Inteiros A partir De Situações Problema**. Dissertação de Mestrado. Universidade Regional de Blumenau. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM). Blumenau, 2016.

ROQUE, A. C. C. **Uma investigação sobre a participação da história da matemática em uma sala de aula do Ensino Fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

SALVADOR, C. M.; MENDES, A. **Os números relativos em sala de aula: um olhar para o zero**. 2003.

SANTOS, S. G. dos. **Números Inteiros: Estratégias que Visam Facilitar a Compreensão dos Conceitos e Operações**. UFRJ/2016. Dissertação. (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2016.

SÃO PAULO (ESTADO). **Currículo Paulista**. São Paulo: SEE, 2019

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico SARESP - Matemática**. São Paulo: SEE, 2017.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. **Developing understanding in mathematics via problem solving**. New directions for elementary school mathematics, v. 31, p. 42, 1989.

SILVA, L. B. da. **O ensino dos números inteiros relativos com materiais concretos e recursos tecnológicos**. 2013. 47f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática

em Rede Nacional) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, Juazeiro-BA, 2013.

SILVA, L. E. da. Educação matemática e a base nacional comum curricular (BNCC): um desafio para a educação básica. **Humanidades & Inovação**, v. 6, n. 6, p. 51-61, 2019.

SILVA, M.A. **Elaborações de estudantes do 7º ano do ensino fundamental sobre números inteiros e suas operações**. 2012. 122f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas (PPGECE), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

SOUSA, M. A. da S. Jogos pedagógicos como elemento facilitador da aprendizagem dos números inteiros nos anos finais do ensino fundamental. 2016. 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Pau dos Ferros, 2016.

SOUZA, J. R. de. **Matemática: realidade e tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, F. C. **Números Inteiros e suas Operações: Uma proposta de Estudo para Alunos do 6º ano com o Auxílio de Tecnologia**. PUC. São Paulo/2015. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2015.

TEIXEIRA, L. R. M. **Aprendizagem escolar de números inteiros: análise do processo na perspectiva construtivista piagetiana**. 1992. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem Operatória de Números Inteiros: Obstáculos e Dificuldades. **Pro-Posições**, nº 1, v. 4, 1993, p. 60 – 72.

TEIXEIRA, L. R. M.; VASCONCELLOS, M.; GUIMARÃES, S. D. A resolução de problemas multiplicativos de produto de medidas: um caso exemplar. In: **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, p. 77-93, 2009.

TEODORO, M. M. **Obstáculos e Dificuldades Relacionadas aprendizagem de Números Inteiros**. UBA, São Paulo/2013. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação da Universidade Bandeirante Anhanguera. São Paulo, 2013.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Metodologia da pesquisa em ciências sociais**. São Paulo: Atlas, 1997.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

- VASCONCELOS, A. M. **Uma sequência didática para o ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros**. 2020. 202 f. (Mestrado Profissional). Universidade do Estado Do Pará, Belém, 2020.
- VERGNAUD, G. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics. **Education. Journal of Mathematical Behavior**, v.17, n. 2, p. 167 – 181, 1998.
- VERGNAUD, G. **A Criança, a Matemática e a Realidade**. Curitiba: UFPR, 2009.
- VERGNAUD, G. Jean Piaget: quels enseignements pour la didactique. **Revue française de pédagogie**, p. 7-14, 1981.
- VERGNAUD, Gérard. L'explication est-elle autre chose que la conceptualisation. **Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation**, p. 31-44, 2002.
- VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**, p. 41-59, 1994.
- VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, p. 15-27, 2011.
- VERGNAUD, G. Piaget e Vygotsky: convergências e controvérsias. **Revista do GEMPA**, p. 75-83, 1993.
- VERGNAUD, G. Psicologia cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática: Algumas Questões Teóricas e Metodológicas. **Caderno do CEM**. Ano 2, nº2, 1990, p. 19 – 39.
- VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica**, v. 5, p. 75-90, 1986.
- VERGNAUD, G. The theory of conceptual fields. **Theories of mathematical learning**, p. 219-239, 199.