unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA

MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

UMA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DAS TÉCNICAS DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA E GENERALIZADA

REYNALDO D'ALESSANDRO NETO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

REYNALDO D’ALESSANDRO NETO

UMA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DAS TÉCNICAS DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA E GENERALIZADA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como requisito para o processo de obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Rio Claro

2021

D999c

D'Alessandro Neto, Reynaldo

Uma construção histórica das técnicas da transformada integral clássica e generalizada / Reynaldo D'Alessandro Neto. -- Rio Claro, 2021

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

1. História da Matemática. 2. Equação Diferencial Parcial - EDP. 3. Transformada Integral; Técnica da Transformada Integral Clássica – (CITT).

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

REYNALDO D'ALESSANDRO NETO

UMA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DAS TÉCNICAS DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA E GENERALIZADA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como requisito para o processo de obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira – Orientador
(IGCE/UNESP/Rio Claro-SP)

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela
(DFQM/UFSCar/Sorocaba-SP)

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
(IFSP/São Roque-SP)

Prof. Dr. Henrique Lazari
(IGCE/UNESP/Rio Claro-SP)

Prof. Dr. Wladimir Seixas
(DM/UFSCar/São Carlos-SP)

Resultado: **Aprovado**

Rio Claro, 07 de julho de 2021.

Para Jesus Cristo

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, em especial, aos amigos, professores e funcionários, que fazem desse programa uma referência na pesquisa em Educação Matemática. Em todos os momentos que estive como aluno, fui muito bem acolhido e sempre me senti parte dessa família que é o PPGEM.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira, que sempre foi uma pessoa aberta as ideias que apresentei e ajudou de todas as formas na construção desse trabalho em História da Matemática. Um sonho que pude realizar graças as suas orientações e confiança depositada.

Ao Prof. Dr. Renato Machado Cotta, que tão cordialmente me atendeu e conversou por WhatsApp e Skype. Cedendo materiais e informações extremamente relevantes para essa pesquisa, além de ser uma figura importantíssima na história da CITT.

Aos meus pais, Maria Teresa Aparecida Alves D'Alessandro e Reynaldo José D'Alessandro, que tanto me ajudaram, incentivaram e acompanharam em diversas viagens de Sorocaba a Rio Claro. Levando almoço e boas conversas durante a estrada. Como esquecer das tentativas de tirar fotos do pôr-do-sol ou dos salgadinhos que comíamos durante o caminho.

Agradeço à Jéssica Carpim Ambar, minha noiva, por todo apoio, carinho e força que me deu nessa finalização de tese. Ao me dar esperanças e mostrar o real sentido do amor, pude renovar minhas energias e, junto a ela, ganhar forças para concluir esse trabalho.

Ao Colégio O Farol, em especial, ao Diretor Cláudio Roberto Silva e as Coordenadoras Edenize Oliveira Silva e Alessandra Reis, que sempre me apoiaram nos ajustes de horários de aula e compreenderam minhas ausências quando estava participando de algum evento ou disciplina do PPGEM.

Agradeço aos professores que aceitaram o convite de participar da minha banca examinadora: Prof. Dr. Wladimir Seixas, Prof. Dr. Antonio Noel Filho, Prof. Dr. Henrique Lazari e Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela, obrigado por dedicarem parte do seu tempo de trabalho para contribuir com o trabalho que desenvolvi. Destaco um agradecimento especial aos professores Noel e Venezuela, que foram peças fundamentais em minha vida acadêmica, sendo meus orientadores de TCC e dissertação de Mestrado, respectivamente.

Agradeço a Universidade Virtual do Estado de São Paulo - UNIVESP pela oportunidade de receber durante o biênio (2019-2020) a bolsa Facilitador de Aprendizagem – Doutorado, foi

uma experiência muito importante para a minha formação, que gerou a conclusão de uma especialização Lato Sensu em Formação Didático-Pedagógico para Cursos na Modalidade a Distância.

Por fim, agradeço a Jesus Cristo e sua Mãe Nossa Senhora de Aparecida, por me dar força e sabedoria, sempre lembrando de seu ensinamento que nos nossos dias está tão esquecido: **“Amarás teu próximo como a ti mesmo”** Mateus 22:38-39.

Mais uma vez, obrigado a todos!

“A vida é arte do encontro, embora haja tanto desencontro pela vida”

Vinícius de Moraes

Imagine
(John Lennon)

Imagine there's no heaven
It's easy if you try
No hell below us
Above us only sky

Imagine all the people
Living for today (ah ah ah)

Imagine there's no countries
It isn't hard to do
Nothing to kill or die for
And no religion, too

Imagine all the people
Living life in peace

You may say that I'm a dreamer
But I'm not the only one
I hope someday you'll join us
And the world will be as one

Imagine no possessions
I wonder if you can
No need for greed or hunger
A brotherhood of man

Imagine all the people
Sharing all the world

You may say that I'm a dreamer
But I'm not the only one
I hope someday you'll join us
And the world will live as one

RESUMO

Esta pesquisa insere-se na linha de pesquisa Relações entre História e Educação Matemática e tem como objetivo descrever a evolução histórica que culmina na concepção da Técnica da Transformada Integral Clássica, e as motivações que levaram a sistematização do seu modelo generalizado. As técnicas têm como foco resolver Equações Diferenciais Parciais (EDP) a princípio não tratáveis pelas teorias clássicas, como o conhecido método da separação de variáveis. Pretendemos fazer uma construção histórica, considerando o contexto do seu surgimento e desenvolvimento, passando pelas diversas modificações sofridas até se tornar uma técnica analítica e, posteriormente analítico-numérica, que acompanha a velocidade das abordagens puramente numéricas e os avanços do mundo tecnológico. Para atingir esse objetivo, descrevemos a Transformada Integral por N.S. Koshlyakov e os estudos detalhados realizados por G.A. Grinberg (1948) e M.D. Mikhailov (1972). Para assim, podermos entender e apresentar os conceitos que surgiram com o formalismo da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT - Generalized Integral Transform Technique), proposta por Özisik e Murray (1974). E, por fim, mostramos a unificação das propostas que geraram a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT – Classical Integral Transform Technique) de Özisik e Mikhailov (1984).

Palavras-Chave: História da Matemática; Equação Diferencial Parcial - EDP; Transformada Integral; Técnica da Transformada Integral Clássica – (CITT); Técnica da Transformada Integral Generalizada – (GITT).

ABSTRACT

This research is part of the research line Relations between History and Mathematical Education and aims to describe the historical evolution that culminates in the conception of the Classical Integral Transform Technique, and the motivations that led to systematization of its generalized model. The techniques focus on solving partial differential equations (PDE) at first not treatable by classical theories, such as the known method of variable separation. We intend to make a historical construction, considering the context of its emergence and development, going through the various modifications undergone until it becomes an analytical and, later, numerical-analytical technique that follows the speed of purely numerical approaches and the advances of the technological world. To achieve this goal, we describe the Integral Transform by N.S. Koshlyakov and the detailed studies by G.A. Grinberg (1948) and M.D. Mikhailov (1972). For this, we can understand and present the concepts that emerged with the formalization of the Generalized Integral Transform Technique (GITT), proposed by Özisik and Murray (1974). And, finally, we show the unification of the proposals that generated the Technique of the Classical Integral Transform Technique (CITT) of Özisik and Mikhailov (1984).

Keywords: Math History; Partial Differential Equations – (PDE); Integral Transform; Technique of the Classical Integral Transform – (CITT); Generalized Integral Transformation Technique – (GITT).

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A vida é boa por apenas duas coisas: Descobrir matemática e ensinar matemática
Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

1.1. Das motivações e procedimentos de investigação

Durante o mestrado, participei do grupo de Simulação e Experimentos para Microfiltração e Ultrafiltração da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba. Nesse grupo, estudei modelagens matemática relacionadas aos problemas de filtração tangencial. Dentre as metodologias que se aplicavam aos problemas, as Técnicas da Transformada Integral Clássica (*Classical Integral Transform Technique* - CITT) e Generalizada (*Generalized Integral Transform Technique* - GITT) eram as mais estudadas. E com o interesse sobre o assunto, tive um contato direto com diversos materiais de estudo que trazem embasamento relacionado a suas aplicações.

Dentre os trabalhos desenvolvidos, destacamos um incipiente estudo histórico da CITT, parte da minha dissertação de mestrado que teve como objetivo a aplicação para encontrar a solução da equação de condução de calor.

Nesse estudo, realizei um breve histórico sobre Equações Diferenciais Parciais (EDP) e suas técnicas de solução, destacando a CITT nesse panorama. Indo ao encontro dos objetivos da dissertação, demonstramos a equação do calor por meio da Lei de Resfriamento de Fourier. Por fim, resolvemos via CITT a equação do calor e fizemos uma análise por meio de gráficos e tabelas da solução encontrada, validando a mesma por meio de comparação com soluções encontradas na literatura.

Durante o processo da escrita da dissertação, percebi a necessidade de um estudo histórico sobre a teoria, devido a dificuldade de se encontrar informações relativas ao tema. Assim, iniciamos um levantamento e verificamos a originalidade de tal estudo.

É importante ressaltar que esse levantamento foi feito por meio de buscas no banco de teses e dissertação da CAPES, e após as pesquisas feitas no portal, não encontramos nenhum trabalho histórico acerca do tema. Nas pesquisas, observamos algumas teses e dissertações da área de Engenharia Mecânica que, antes da implementação da técnica, constroem breves resumos históricos, que nos ajudaram na construção do projeto de pesquisa dessa presente tese.

E sabemos da importância de se fazer uma pesquisa histórica de conteúdos matemáticos, pois, através delas podemos perceber que todas as descobertas se deram com o estudo de outras feitas por matemáticos que viveram anteriormente, como se cada nova descoberta fosse apenas mais uma etapa da construção de um conhecimento universal na busca de resolver algum problema.

Para assim, segundo Nobre (2004), não cometermos nenhum “equívoco histórico”, que é evitado pela pesquisa na área. Pois, tais “equívocos” podem ter sido feitos por falta de conhecimento, ou se são interpretações conduzidas. Ainda segundo Nobre (2004), há três situações que determinam esses equívocos históricos: Informações históricas sem provas concretas, informações históricas distorcidas e informações históricas ocultas.

Com isso, uma pesquisa que envolva a história de um conteúdo matemático tem grande relevância para a Matemática, pois pode servir como um instrumento para o futuro pesquisador como um compilado de informações relevantes, no nosso caso, da técnica estudada.

Assim, podemos entender quais foram os problemas de aplicação que motivaram o desenvolvimento de tal conteúdo. Como comenta D’Ambrosio (2000, p.162):

> Em todas as conceituações, os estudos de História dependem fundamentalmente do reconhecimento de fatos, de datas e de nomes e de interpretação ligados ao objeto de nosso interesse, isto é, do corpo de conhecimentos em questão. Esse reconhecimento depende de uma definição do objeto de nosso interesse. No nosso caso específico, depende do que se entende por Matemática.

No caso da Educação Matemática, vemos que a relevância da História se dá no melhor entendimento da realidade que se deu o desenvolvimento do determinado conteúdo. Para assim, facilitar nas construções de hipóteses que auxiliam o ensino do conteúdo, como afirma Mendes (2009, p.91):

> As informações históricas podem ser usadas desde que o professor consiga inserir em suas aulas uma dinâmica experimental investigatória (a pesquisa como princípio científico e educativo) através do levantamento e da testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas históricos investigados e de atividades manipulativas extraídas da História da Matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a conexão entre os conceitos com seu contexto histórico constitui um grande meio para formar um olhar mais crítico, possibilitando uma melhor compreensão. Como vemos no documento oficial, PCN (1998, p. 42):

> A história da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

Cabe ressaltar que a construção dos conceitos envolvendo as Equações Diferenciais se deu devido às contribuições de diversos matemáticos em diferentes períodos históricos. Cada matemático, ao seu tempo, desenvolveu novas ideias e aperfeiçoou métodos para o estudo e as aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. É também interessante destacar a evolução tecnológica que houve em todo esse período, e que foi motivação para o desenvolvimento das técnicas de resolução de Equações Diferenciais, portanto, um estudo como esse pode ser de grande valia, a fim de entender como ocorre a evolução matemática em vista das mais diversas aplicações e problemas do mundo moderno.

E assim, observamos que o estudo da História da Matemática deve visar não somente à vida e à obra de matemáticos, mas, refletir, conhecer e discutir sobre como constitui historicamente o saber matemático. Para auxiliar na melhor compreensão do desenvolvimento da ciência e possibilitar um auxílio no ensino.

No que diz respeito aos procedimentos de investigação e metodologia empregada para o desenvolvimento da pesquisa, pensamos que para delimitar o objeto de estudo, utilizamos da abordagem historiográfica, no seu tratamento e nos métodos. Acreditamos que para a construção histórica de um conteúdo matemático, a escolha dessa metodologia se torna a mais assertiva, pois, a pesquisa acontece através da busca de fontes (livros, documentos e estudos) e a análise detalhada de cada um, como comenta D'Ambrósio (2000, p. 242):

> Uma vez identificados os objetos do estudo, a relação de fatos, datas e nomes depende de registros, que podem ser de natureza muito diversa: memórias, práticas, monumentos e artefatos, escritos e documentos. Essas são as chamadas fontes históricas. A interpretação das chamadas fontes históricas depende muito de uma ideologia e de uma metodologia de análise dessas fontes. O conjunto dessas metodologias, não só na análise, mas também na identificação das fontes, é o que se chama historiografia.

Desse modo, queremos entender a realidade social que envolve a história do conteúdo matemático, pois acreditamos que essa é uma relevância da pesquisa para a Educação Matemática. Para isso, Saito (2013, p.2) explica como identificar tais questões:

> Por historiográfica, entendemos a "escrita da história", ou seja, os diferentes níveis discursivos presentes nas obras de história da ciência. Designamos por epistemológica, a análise interna dos documentos por meio da qual procuramos reconstituir a episteme de uma época, ou seja, a concepção de conhecimento, bem como os critérios de validade desse mesmo conhecimento devidamente contextualizado. E, por contextual, referimo-nos às relações sociais, políticas e culturais que podem ser detectadas nos próprios documentos, ou seja, o processo que é flagrado ao mobilizamos instrumentos de análise que possibilitem recortar a malha analítica na qual se inserem os documentos considerados para a análise.

E assim, os limites do processo de investigação não se estabelecem no início, mas são obtidos e postos pelas características encontradas na documentação e bibliografias que se consegue reunir, nesse ponto dizia Marc Bloch (2001, p.11): "Causas não são postuladas, são buscadas". Ao invés de definir um método desde o início, só o descobrimos ao desenvolver a pesquisa, que passou pelas etapas de localização, identificação, seleção e organização de fontes que foram constituídas em documentos mediante as indagações que foram tecidas a esses, ou seja, nesse momento já demos início à análise.

Entendemos que com esse procedimento de investigação, podemos verificar os resultados através da construção histórica do conteúdo, que será observado após a organização das fontes e sua descrição, desde os primeiros registros até os dados históricos mais recentes, analisando cada contribuição.

1.2. Acerca da delimitação do tema e objetivos da pesquisa

Ao longo do desenvolvimento de soluções para Equações Diferenciais Parciais (EDP), diversas técnicas na forma de métodos puramente numéricos, métodos analíticos e ainda métodos híbridos analítico-numéricos foram desenvolvidos.

Dentre as técnicas analíticas, temos o clássico método da Separação de Variáveis, importante técnica que determina a solução de equações diferenciais parciais, mas de abrangência bastante reduzida, uma vez que o modelo matemático deve obedecer a uma série de restrições para que o problema seja separável.

Para resolver EDP a princípio não tratáveis pela Separação de Variáveis, surgem novas abordagens, dentre essas, a Técnica da Transformada da Integral Clássica (CITT). O método elimina totalmente a necessidade de o problema ser separável, por exemplo, as equações diferenciais que governam os processos de difusão (principalmente a de calor).

Segundo o professor Renato Machado Cotta, no seu artigo de 2012, intitulado *The Unified Integral Transforms (**UNIT**) algorithjm with total and partial transformation: A tribute to Prof. Mikhail D. Mikhailov*, e o professor Aleksei Luikov, no seu livro *Heat and Mass Transfer* de 1972, as ideias precursoras que culminaram na concepção da CITT foram sugeridas por N.S. Koshlyakov em seu livro *Basic Differential Equations of Mathematical Physics*, de 1936. Nesse livro, Koshlyakov define um tipo de transformação integral que ficou conhecida posteriormente como Transformada Integral Finita.

Por meio de um operador integral, um problema deve ser transformado de tal forma que se possa eliminar a derivada parcial com relação a uma de suas variáveis, o que resulta em um problema mais simples denominado transformada. Assim, resolvido o problema, usamos o operador inverso ou transformada inversa para encontrar a função desconhecida que é a solução para o problema original.

Luikov (1972) diz que Koshlyakov propõe uma ordem de aplicação da Transformada Integral. Para o caso de uma transformação integral dentro de limites finitos, os principais passos são: Estabelecer a validade de usar um operador no problema em questão, encontrar o núcleo (kernel) do operador, escrever o problema transformado, encontrar a solução do problema transformado, escrever a solução do problema original na forma da série.

Depois das primeiras ideias, G.A. Grinberg fez um desenvolvimento mais detalhado das transformações integrais no livro *Selected Problems of Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Effects,* de 1948. Segundo Luikov (1972), Grinberg generalizou o método de Koshlyakov, construindo um passo-a-passo para o caso em que haja uma mudança das propriedades do meio físico em questão, na direção da coordenada ao longo da qual a transformação é realizada. A necessidade de se fazer essa construção aconteceu devido as equações que o autor abordava, já que estava em busca de soluções para problemas que explicavam efeitos magnéticos e elétricos.

Mas foi o artigo escrito por M.D. Mikhailov em 1972 intitulado *General Solution of the Heat Equation in Finite Regions*, que deu uma contribuição extremamente significativa para a consolidação da técnica de Koshlyakov. No estudo, o autor elabora uma proposta de um núcleo de processamento geral que unificou as várias transformações ao obter uma solução geral para a equação da difusão linear em regiões finitas.

Finalmente, M.N. Özisik e R.L. Murray em 1974 no artigo *On the Solution of Linear Diffusion Problems With Variable Boundary Condition Parameters,* utilizaram as ideias dos autores citados anteriormente e, aplicaram pela primeira vez uma nova técnica para a resolução de sistemas de Equações Diferenciais Parciais (EDP), chamada posteriormente de Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). A aplicação se deu em problemas que envolviam a difusão de calor com condições de contorno variáveis com a posição e com o tempo.

Em alguns casos de problemas propostos por Özisik e Murray (1974) se caracterizava pela presença de termos não transformáveis pela GITT, que mesmo assim foram inseridos na fórmula de inversão, o que resultou em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para o problema transformado.

Para a recuperação do problema original, foram obtidas soluções aproximadas deste sistema de equações diferenciais, nasce aí a natureza híbrida analítico-numérica do procedimento adotado e os primeiros passos na Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT).

Em 1984, Özisik e Mikhailov, no livro *Unified Analysys and Solution of Heat and Mass Difusion,* apresentaram uma maneira sistemática de aplicação da Técnica da Transformada Integral para a solução de diversos problemas lineares de difusão, divididos em sete grandes classes que foram definidas partindo de inúmeros problemas de transferência de calor e massa disponíveis na literatura. Desta forma, os autores sistematizaram os conceitos da Transformada Integral para a solução de uma grande variedade de problemas lineares difusivos e difusivo convectivos. Desse trabalho surgiram as unificações das propostas de Mikhailov (1972) e Özisik e Murray (1974) que geraram a conhecida CITT.

As nomenclaturas CITT e GITT foram propostas e utilizadas a partir das publicações do professor Renato Machado Cotta: *Diffusion in Media with Prescribed Moving Boundaries: Application to Metals Oxidation at High Temperatures* de 1986, no livro *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow* de 1993 e no texto escrito juntamente com Özisik, *Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature,* em 1986. Renato Cotta é um importante estudioso da GITT e colaborador de Özisik.

Foram nesses trabalhos que se convencionou chamar de CITT a união entre a GITT e as novas extensões da técnica. A CITT é amplamente utilizada, pois é uma técnica que associa a precisão das técnicas analíticas com a grande versatilidade das técnicas numéricas, consolidando como uma importante ferramenta na solução de problemas de Transferência de Calor e Massa e Mecânica dos Fluidos.

Essas evoluções, segundo Cotta (2012), ocorreram devido ao período da corrida tecnológica espacial, especialmente nos anos 1960 e 1970, onde diversos países do Leste Europeu como a então URSS e Bulgária, tiveram suas pesquisas concentradas no desenvolvimento de ferramentas analíticas, tal como a Técnica da Transformada Integral, buscando economizar os recursos computacionais quase que indisponíveis nestes países.

Concomitantemente, os Estados Unidos e Europa concentravam-se no desenvolvimento aos métodos puramente numéricos, como os conhecidos: Métodos de Diferenças Finitas, Elementos Finitos e Volumes Finitos, que se tornaram viáveis com o advento do computador.

E assim, durante a década de 1980, vários pesquisadores norte-americanos, soviéticos e búlgaros trabalharam conjuntamente, visando desenvolver técnicas híbridas, que conseguissem unir as características positivas de cada tipo de abordagem do problema.

Como essa introdução ao tema, podemos delimitar nossos objetivos, que para essa pesquisa será descrever a evolução histórica que culmina na concepção da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) e as motivações que levaram aos formalismos do seu modelo clássico (CITT), com a intenção de formar um compilado para futuros pesquisadores e professores que pesquisem e/ou ensinem na área.

Para atingirmos tais propostas, o trabalho foi estruturado da seguinte forma:

Inicialmente construímos uma breve biografia dos envolvidos neste estudo: N.S. Koshlyakov, M. N. Özisik, M.D. Mikhailov, R.M. Cotta, R.L. Murray e G.A. Grinberg.

Após as biografias, apresentamos um breve histórico a respeito do desenvolvimento das Equações Diferenciais, em especial as (EDP), e suas principais definições. Bem como alguns aspectos históricos a respeito das soluções analíticas, com um enfoque nas Transformadas Integrais, e um breve panorama sobre as soluções numéricas.

Com essa base histórica apresentada, descrevemos a Técnica da Transformada Integral por N.S. Koshlyakov, peça inicial para a construção da CITT.

Após a proposta de Koshlyakov apresentada, discutimos o desenvolvimento detalhado das Transformações Integrais realizado por G.A. Grinberg (1948) e M.D. Mikhailov (1972).

E assim, mostramos que ao utilizar as ideias dos autores citados anteriormente, Özisik e Murray (1974), aplicaram pela primeira vez, uma nova técnica para a resolução de sistemas de Equações Diferenciais Parciais (EDP), posteriormente chamada de Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

Por fim, descrevemos a sistematização e os conceitos que surgiram com a Técnica Transformada Integral Clássica (CITT), proposta por Özisik e Mikhailov (1984) e que solucionava uma grande variedade de problemas lineares difusivos e difusivo convectivos**.** Nesse capítulo, trouxemos um olhar mais atual sobre o desenvolvimento da técnica, descrito através de uma entrevista com o Prof. Renato Machado Cotta.

Ressaltamos que, para chegarmos aos nossos objetivos, optamos por fazer a descrição das contribuições supracitadas. Desse modo, será mostrado todo o desenvolvimento matemático feito nos trabalhos de cada um, com a manutenção da linguagem, numeração de equações, incógnitas e o rigor matemático utilizado pelos autores.

2. BIOGRAFIAS

Trouxemos neste capítulo, uma breve biografia dos principais estudiosos envolvidos no desenvolvimento das ideias que culminaram na concepção da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) e Generalizada (GITT). São eles: N.S. Koshlyakov, M. N. Özisik, M.D. Mikhailov, R.M. Cotta, R.L. Murray e G.A. Grinberg.

2.1. Nikolai Sergeevich Koshlyakov[1]

As informações biográficas de Koshlyakov foram retiradas de pesquisas no site oficial da Academia de Ciências Russa[2].

Figura 1 – N.S. Koshlyakov

Fonte: Academia de Ciências Russa

Nikolai Sergeevich Koshlyakov nasceu em 11 de julho de 1891 em São Petersburgo e morreu em 23 de setembro de 1958 em Moscou. Foi matemático e membro correspondente da Academia de Ciências da URSS no Departamento de Ciências Matemáticas e Naturais.

Koshlyakov nasceu em na família de um alto funcionário, chefe inspetor de Correios e Telégrafos da Rússia, Sergey Aleksandrovich Koshlyakov. No antigo ginásio, Nikolai Sergeevich demonstrou grande interesse pela matemática e, quando ingressou na Faculdade de Física e Matemática da Universidade de São Petersburgo, dominou de maneira autodidata os cálculos diferencial e integral.

Durante seus estudos na universidade, Koshlyakov se interessou por questões relativas à teoria dos números e, o contato com Georgy Feodosevich Voronoi e seus trabalhos, tiveram uma influência significativa, especialmente pessoal, em todas as suas atividades científicas posteriores.

Depois de se formar na universidade, Koshlyakov ficou com Voronoi e após passar com sucesso em seus exames de mestrado, recebeu o cargo de professor assistente na Universidade de Perm, onde trabalhou até 1919. Durante 1919-1925, Koshlyakov trabalhou na Universidade

---

[1]Imagem disponível em: <http://www.mi-ras.ru/index.php?c=inmemoriapage&id=39475&l=1> Acesso em: 21 agosto 2019.

[2] Disponível em: < http://www.mi-ras.ru/index.php?c=inmemoriapage&id=39475&l=1> Acesso em: 06 março 2019.

da Criméia como professor associado. Naquela época, muitos cientistas de destaque trabalhavam na universidade, em especial, os matemáticos N. M. Krylov e D. A. Grave.

Um dos jovens professores da Universidade de Tauride era na época M.M. Smirnov, com quem Koshlyakov foi posteriormente associado a muitos anos de trabalho conjunto na Universidade de Leningrado. Smirnov possui trabalhos publicados sobre a Técnica da Transformada Integral, estudos posteriores que ajudaram na divulgação das pesquisas de Koshlyakov.

Em 1925, Koshlyakov mudou-se para Leningrado, onde ocupou o cargo de professor na Universidade Estadual de Leningrado. Lá, chefiava o departamento de matemática geral e, a partir de 1941, atuou como chefe interino do departamento de equações diferenciais e integrais. Em 1926, ele foi eleito chefe do departamento de matemática superior no Instituto Eletrotécnico de Leningrado. Em 1933-1936, trabalhou no Departamento de Matemática do Instituto de Física e Matemática.

Koshlyakov também lecionou em outras instituições de ensino superior de Leningrado: Na Academia Naval e nos institutos pedagógicos nomeados posteriormente de Pokrovsky e Herzen.

Ele era um excelente professor. Suas palestras, diferenciadas pela precisão e clareza de apresentação, tiveram o mesmo sucesso com o público. O livro *Basic Differential Equations of Mathematical Physics,* escrito por ele em 1936, era muito popular entre os estudantes.

Em 1964, M.M. Smirnov e E.B. Gliner publicaram o livro *Differential Equation of Mathematical Physics,* com autoria dividida com Koshlyakov. Essa publicação apresenta um compilado dos principais textos de 1936 e outros escritos de modo conjunto entre Smirnov, Gliner e Koshlyakov.

Além desses textos, o livro apresenta uma seção escrita originalmente por Koshlyakov, denominada material suplementar. Nesse material, encontramos as principais ideias da Transformada Integral que estudaremos no próximo capítulo dessa pesquisa. Por esse motivo, deixaremos para o momento oportuno uma maior apreciação dos escritos.

Mas para essa biografia, vale ressaltar um trecho do prefácio da edição, escrito por Smirnov e Gliner, destacando a devoção de Koshlyakov para o ensino de novos engenheiros.

Figura 2 - Trecho do Livro *Differential Equation of Mathematical Physics*

plied problems, Prof. Koshlyakov always devoted a great deal of attention to the mathematical education of engineers. An excellent lecturer and teacher, he enjoyed the constant respect and devotion of his listeners and students. His textbook Osnovnye Differentsial'nye Uravneniya Matemati-

Fonte: Koshlyakov; Gliner e Smirnov (1964, p.7)

Juntamente com o trabalho de ensino, N. S. Koshlyakov sempre conduziu atividades científicas intensivas, principalmente no campo da teoria analítica dos números e funções especiais. Ele publicou uma série de artigos e notas sobre essas questões em publicações da Academia de Ciências da URSS, bem como em revistas estrangeiras conhecidas.

Em 1933, Koshlyakov foi eleito membro correspondente da Academia de Ciências da URSS. Em 1936, após a apresentação de Godfrey Harold Hardy, ele foi eleito membro estrangeiro da London Mathematical Society.

No inverno de 1942, auge do cerco de Leningrado, Koshlyakov junto a um grupo de cientistas, entre os quais estavam o matemático A. M. Zhuravsky, foram presos pelo serviço secreto de inteligência Russa - NKVD e todos condenados à morte, substituído depois por 10 anos no campo de aprisionamento. O grupo de cientistas possuíam tendências políticas contrárias ao então governo soviético.

A família de Koshlyakov não foi submetida à repressão e, no verão de 1942, sua esposa e dois filhos foram evacuados de Leningrado para um dos centros distritais da Região de Novosibirsk. Antes de partir, o filho mais velho teve a ideia de levar consigo uma série de impressões das obras de Koshlyakov. Estas impressões, assim como o segundo volume do Curso de Análise Moderna de Whittaker e Watson, puderam ser enviadas a Koshlyakov no início de 1943, quando a comunicação postal foi restabelecida.

No campo, Koshlyakov sofreu com problemas de saúde complicados pela pelagra (um tipo de dermatite), foi tratado como inválido, e não foi enviado ao trabalho geral. A possibilidade de um retorno à ciência teve uma grande influência para a melhora da sua condição de vida**.**

Porém, isso era muito difícil, já que muitos trabalhos importantes lhe faltavam e, além disso, devido à grande escassez de papel, ele precisava fazer cálculos grosseiros em uma folha de madeira compensada. No entanto, no período 1943-1944, Koshlyakov escreveu duas grandes memórias (tradução nossa): *Investigação de algumas questões da teoria analítica de um campo racional e quadrática* e *Investigação de uma classe de funções transcendentais determinadas pela equação de Riemann generalizada.*

O destino do segundo trabalho acabou por ser inesperado para a época. Foi publicado em 1949, e mesmo antes do lançamento, as autoridades enviaram-na a Moscou para a aprovação da administração do NKVD, e de lá ela foi enviada para exame no Instituto de Matemática.

V.A. Steklov da Academia de Ciências da URSS, depois de rever o conteúdo do trabalho deu ao diretor do instituto I. M. Vinogradov que repassou a S. N. Bernstein. O conteúdo do livro de memórias parecia tão forte para eles que, além de uma resposta positiva ao pedido do

NKVD, foi decidido publicar este trabalho. Mesmo com a permissão obtida, foi publicada pelo instituto sob o nome de N.S. Sergeev. O editor científico do trabalho foi Yu V. Linnik.

A alta apreciação dos estudos de Koshlyakov ao lado de I. M. Vinogradov, S. N. Bernshtein e Yu V. Linnik contribuiu para aliviar o seu destino. O texto da Academia de Ciências Russa destaca que V. I. Smirnov forneceu grande assistência moral e financeira à família de N. S. Koshlyakov.

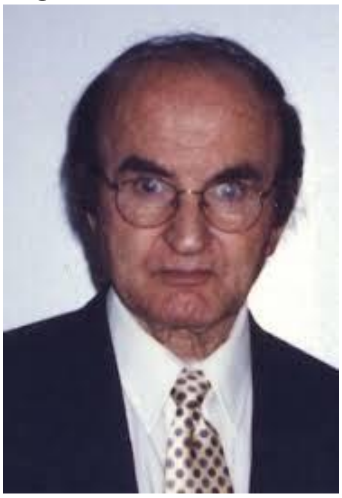
No final de 1944, N. S. Koshlyakov foi transferido para Moscou, onde começou a trabalhar no departamento teórico do departamento de design SB-1 (atualmente - NPO Almaz em homenagem a A. A. Raspletin), e, graças a uma melhoria significativa na condição de vida, sua saúde foi gradualmente restaurada.

Nesse momento ele começa a trabalhar intensamente em problemas aplicados. Sendo muito útil em suas habilidades analíticas de primeira classe e capacidade de resolver problemas específicos, levando-os até o fim. A atividade de Koshlyakov na indústria foi muito utilizada. No outono de 1951, cerca de um ano antes do final do período de aprisionamento, ele foi libertado, seguido pela reabilitação total. Koshlyakov recebeu um apartamento em Moscou, e sua família logo se mudou.

Em 3 de fevereiro de 1953, Koshlyakov recebeu o Prêmio Estadual da URSS com a apresentação simultânea da Ordem de Lênin. O presidente da Academia de Ciências da URSS restituiu-o à lista de membros correspondentes. Após a sua aposentadoria e até sua morte, permaneceu como consultor científico e membro do Conselho Acadêmico. Suas últimas publicações referem-se a 1958.

2.2. Mehmet Necati Özisik[3]

Figura 3 - M. Necati Özisik



Fonte: International Journal of Heat and Mass Transfer

No site oficial do International Journal of Heat and Mass Transfer, consta um obituário com informações biográficas de Özisik. Com isso, baseamos essa breve biografia nas informações retiradas do texto de Helcio R.B. Orlande, Renato M. Cotta, W.J. Minkowycz, Mikhail D. Mikhailov, Sadik Kakaç, Yaman Yener, Yildiz Bayazitoglu, Woo S. Kim, T. Nejat Veziroglu, E.M. Sparrow e Jean François Sacadura[4].

M. Necati Özisik nasceu em 17 de junho de 1923 em Istambul. Depois de passar pela educação básica na Turquia, ele se mudou para a Inglaterra, onde obteve seu doutorado da Universidade de Londres em 1950.

Antes de se tornar membro do corpo docente da Universidade Estadual da Carolina do Norte (NCSU) em 1963, o Prof. Özisik era o Chefe do Departamento Técnico das Empresas do Estado Turco em Ancara (1955-1957) e pesquisador na ASHRAE (Sociedade Americana), no laboratório de Aquecimento, Refrigeração e Ar Condicionado (1957-1959) e no Laboratório Nacional de Oak Ridge (1959-1963).

Özisik se aposentou como Professor Emérito do Departamento de Engenharia Mecânica e Aeroespacial da NCSU (Universidade Estadual da Carolina do Norte) em 1998, onde passou a maior parte de sua carreira acadêmica. Ele também foi professor visitante por várias ocasiões no INSA-Lyon, na Universidade de Nantes e no ETH-Zurique.

Em relação ao seu trabalho, Özisik dedicou sua vida à educação e pesquisa em transferência de calor. Suas contribuições destacadas fizeram com que ele recebesse vários prêmios desde 1952, incluindo o Heat Transfer Memorial Award da Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos em 1987 e o Outstanding Engineering Educator Award da Sociedade Americana de Educação em Engenharia em 1992.

Ele recebeu o Prêmio do Conselho de Pesquisa Científica e Técnica da Turquia, o maior prêmio científico dado pelo governo turco e foi agraciado a Özisik pelo Presidente da Turquia em uma cerimônia especial.

Özisik foi o orientador de mais de 50 estudantes de doutorado, a maioria deles atualmente ocupando posições acadêmicas proeminentes em todo o mundo. Publicou mais de trezentos

[3] Imagem disponível em: < wattandedison.com/Ozisik_m.pdf> Acesso em: 21 agosto 2019.
[4] Disponível em: < http://wattandedison.com/Ozisik_m.pdf> Acesso em: 06 março 2019.

trabalhos de pesquisa em revistas e congressos internacionais e autor de onze livros, a maioria deles best-sellers que foram reeditados várias vezes e publicados em diferentes idiomas, dentre eles, *Heat Conduction* de 1980 e *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion de* 1984, este último em parceria com M.D. Mikhailov e que será estudado nessa pesquisa.

Suas características pessoais foram evidentes em todos esses livros, onde o material foi rigorosamente apresentado de forma clara, organizada e sistemática.

Como resultado, seus livros se tornaram padrões nos cursos de graduação e pós-graduação em muitos países. Suas principais contribuições incluíram técnicas de solução analítica, numérica e híbrida para problemas diretos e inversos, para modos de transferência de calor acoplados e desacoplados.

Özisik era um homem que amava as artes através da música e da pintura, e também se dedicava ao esporte, onde podia ser encontrado correndo diariamente no ginásio da NCSU até a sua aposentadoria. Faleceu em 04 de outubro de 2008, enquanto dormia em sua casa na Turquia. Seu legado principal deixado foi no rico campo da Transferência de Calor.

2.3. Mikhail Dimitrov Mikhailov[5]

Figura 4 - Mikhail Dimitrov Mikhailov

Fonte: International Journal of Heat and Mass Transfer

No site oficial do International Journal of Heat and Mass Transfer, vemos um texto em homenagem ao 80º aniversário de Mikhailov. Desse modo, construímos essa biografia com base nas informações retiradas do escrito de Renato M. Cotta, Sadik Kakac, Leonard Vasiliev, Franz Mayinger, Yaman Yener, James P. Hartnett e W.J. Minkowycz[6].

Mikhail Dimitrov Mikhailov nasceu em Pavel, Bulgária, em 27 de janeiro de 1934. Possui formação em engenharia na Universidade Técnica de Sofia, obtendo sua graduação em 1958, o mestrado em 1969, doutorado em Ciências em 1976, um grau mais avançado entregue na União Soviética.

Trabalhou na Universidade Técnica de Sofia desde 1958, tornando-se Professor Associado em Termodinâmica e Transferência de Calor em 1968, e Professor Catedrático em 1978. De 1978 a 1995, foi o Chefe do Departamento de Ciência da Computação no Instituto de Matemática Aplicada, também em a Universidade Técnica de Sofia.

Mikhailov foi Presidente do Conselho Científico Búlgaro de 1992 a 1995, Presidente do Comitê de Ciências Técnicas da Fundação Nacional de Ciências da Bulgária de 1993 a 1995, e desde 1966 é membro do Conselho Científico do Centro Internacional de Transferência de Calor e Massa.

Foi professor visitante na Universidade Estadual da Carolina do Norte (NCSU), Raleigh, EUA (1984, 1986, 1987 e 1989), na Universidade de Pisa, Itália (1988), na Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil (1990-1991, 1995–2009), Comissão Nacional de Energia Nuclear, Brasil (2009–2010), Instituto Nacional de Metrologia, INMETRO, Brasil (2011–2014).

Ele tem participado de conselhos editoriais de periódicos internacionais de prestígio como o International Journal of Heat and Mass Transfer, International Communications of Heat and Mass Transfer, Journal of Engineering Physics (1966-presente) e Drying Technology (1985-1990).

---

5 Imagem disponível em: < http://wattandedison.com/Mikhailov_80.pdf > Acesso em: 21 agosto 2019.
6 Disponível em: <http://wattandedison.com/Mikhailov_80.pdf> Acesso em: 06 março 2019.

Mikhailov construiu uma reputação e reconhecimento internacional muito notável, colaborando com vários pesquisadores em todo o mundo, e diversas participações como palestrante convidado em várias reuniões internacionais. Já foi um dos ilustres palestrantes dos Institutos de Estudos Avançados da OTAN, realizados na Turquia, em diferentes eventos sobre vários tópicos importantes de transferência de calor e massa. Ao longo de sua carreira, foi ativo na disseminação de métodos analíticos e numéricos, como transformações integrais, motivo dessa pesquisa, diferenças finitas e elementos finitos.

Publicou mais de 250 artigos na área de transferência de calor, difusão em massa, métodos numéricos, modelagem matemática e ciência da computação, orientou mais de 20 estudantes de doutorado e dirigiu mais de 10 projetos, incluindo os em conjunto com o Instituto Luikov para transferência de massa de calor e Instituto de Engenharia Nuclear, Minsk, Bielorússia.

É autor ou co-autor de livros de grande destaque para a área, incluindo o tratado que será estudado nessa pesquisa: *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, dividindo a autoria com N. Özisik, e *Condução de Calor: Análise Lumped, Computação Simbólica, Transformações Integrais*, em conjunto com Renato M. Cotta.

Nos anos que morava no Brasil e trabalhava na Universidade Federal do Rio de Janeiro e, mais recentemente, no Instituto Nacional de Metrologia, INMETRO, ele se concentrou no desenvolvimento de métodos computacionais e híbridos simbólicos, baseados no “software” de plataforma conhecido como Mathematica. Devido ao falecimento de sua esposa Zeza, que o acompanhou durante toda sua vida, o Prof. Mikhailov teve que finalmente retornar a Sofia, Bulgária, em janeiro de 2014, após mais de 20 anos dedicados ao avanço das ciências da engenharia no Brasil.

2.4. Renato Machado Cotta[7]

Para a construção da breve biografia de Renato Cotta, coletamos informações do site do COPPE (Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro)[8].

Figura 5 - Renato Machado Cotta

Fonte: Nanoengineered Systems LAB - UCL

Renato Machado Cotta é bacharel em Engenharia Nuclear pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), em 1981, e seu Ph.D. em Engenharia Mecânica e Aeroespacial pela North Carolina State University (NCSU), EUA, em 1985, onde conheceu o Professor M. Necati Özisik.

Nascido em 05 de março de 1960 em Venda da Cruz, bairro de Niterói. No início, seu sonho era ser diplomata, para isso, começou a se preparar desde os sete anos de idade, estudando inglês e, mais tarde, francês e alemão. Segundo o próprio Cotta, não sabia dizer exatamente o que o levou a optar pela diplomacia, acredita que se deve ao fato de a profissão abrir portas para outros países e exigir poder moderador, um dom que, segundo ele próprio, o acompanha desde criança.

Aos 15 anos, ainda no segundo ano do Segundo Grau, passou no vestibular para Engenharia Mecânica na Universidade Federal Fluminense (UFF). Munido de mandado de segurança expedido pelo juiz, chegou a cursar o primeiro semestre. Mas não quis continuar porque estava pensando em cursar Engenharia Nuclear, estimulado pelo pai de sua namorada e engenheiro nuclear de Furnas, que chegou a levá-lo para ver uma exposição no MAM sobre o Programa Nuclear Brasileiro, mostrando o projeto da usina de Angra I, que estava sendo construída à época.

Foi nesse momento, aos 15 anos, que ele decidiu cursar Engenharia Nuclear. Para isso, trancou a matrícula na UFF, ingressou no curso Bahiense para terminar o Segundo Grau e inscreveu-se no vestibular para a UFRJ. No ano seguinte, prestou o vestibular, classificando-se em 5º lugar para a UFRJ. No segundo ano da faculdade, Cotta, fez iniciação científica com os

---

[7] Imagem disponível em: < https://mecheng.ucl.ac.uk/nano/people/profile/prof-renato-cotta > Acesso em: 21 agosto 2019.

[8] Disponível em: <http://www.pent.coppe.ufrj.br/index.php/corpo-docente/175-renato-machado-cotta.html> Acesso em: 06 março 2019.

professores Luiz Pinguelli Rosa e João Lizardo, que ministravam uma disciplina no Programa de Engenharia Nuclear da COPPE.

Após trabalhar dois anos nesse projeto, Cotta, disse à Pinguelli que gostaria de atuar na área Nuclear. Assim, trabalhou um ano e meio com o professor Nilson Costa Roberto, do Programa de Engenharia Nuclear. Com ele desenvolveu o tema de projeto final de curso, estudando o comportamento das varetas de combustível nuclear. O trabalho foi tão bem recebido que recebeu por sugestão do professor Quassim Cassam, então coordenador do programar, de ir direto para o Doutorado.

Assim, em 1982, aos 21 anos, podendo escolher entre uma bolsa do CNPq e outra da Comissão Nacional de Energia nuclear (CNEN), o pesquisador resolveu ir para os EUA, onde foi cursar seu Doutorado na Universidade da Carolina do Norte (NCSU), a primeira universidade americana a ter um reator para pesquisa.

Embora pretendesse trabalhar com um tema mais diretamente voltado para a área Nuclear, acabou por mudar de ideia por dois motivos: Assim que chegou aos EUA, dois professores com quem pretendia trabalhar afastaram-se da universidade, um deles se aposentou e o outro assumiu um cargo no governo. Além disso, previa-se uma crise na área, devido ao baixo preço do petróleo.

Cotta então optou pela Mecânica e foi orientado pelo professor Necati Ozisik. Em 1985, Cotta defendeu sua tese, intitulada: Um estudo fundamental em convecção de calor nos três regimes de tempo. A tese combinou métodos analíticos com numéricos nas áreas de térmica e de fluidos. A ideia era não deixar as técnicas analíticas clássicas se perderem. Na sua tese, Cotta utiliza a Técnica da Transformada Integral Clássica.

Ao voltar para o Brasil, no ano de 1985, foi trabalhar no ITA, em São José dos Campos. Para ele, foi a oportunidade de dar continuidade aos temas que dedicou no doutorado, voltados para os setores aeronáutico e aeroespacial.

Mas em 1987 recebeu um convite de retornar à COPPE feito pelos professores Nísio e Figueiredo, do Programa de Engenharia Mecânica, e Pinguelli, à época diretor da instituição. Veio para a COPPE-Mecânica e, em seguida, fez concurso para a Universidade. Trouxe com ele dois projetos de pesquisa que foram acolhidos pela instituição: O desenvolvimento de duas ultracentrífugas de enriquecimento de urânio, à cargo da Marinha e, anos mais tarde, instaladas em Resende-RJ, projeto cuja simulação trabalhara desde 1986.

Para realizá-lo, passou quatro meses literalmente internado na COPESP, em São Paulo, com o objetivo de validar os resultados experimentais com dados da simulação feita por ele. Neste projeto Cotta diz ter desafiado o método híbrido no qual trabalhou no doutorado.

O outro projeto, voltado para análise térmica de veículos espaciais, foi desenvolvido em parceria com o Centro Técnico Aeroespacial (CTA) de São José dos Campos. Tratava também de um projeto estratégico, voltado para a construção da primeira plataforma orbital brasileira. Cotta e sua equipe analisaram a proteção térmica para que o microsatélite SARA.

Na COPPE, Cotta orientou 22 teses de Doutorado e 30 dissertações de Mestrado. Com 310 artigos científicos publicados e cinco livros de sua autoria.

Cotta está à frente de inúmeras pesquisas de ponta e coordenou o desenvolvimento do primeiro túnel de vento climático do Hemisfério Sul, inaugurado na Coppe em 2014, que testa componentes aeronáuticos em condições climáticas extremas de voo. Sob sua coordenação, neste túnel vem sendo testada uma técnica de revestimento para impedir o congelamento do Pitot de uma aeronave, principal causa da queda do avião da Air France, em 2009, que vitimou 228 pessoas, incluindo sua filha Bianca Cotta e seu genro Carlos Eduardo Lopes de Mello, recém-casados e que passariam sua lua de mel em Paris.

Um dos mais importantes instrumentos de segurança de uma aeronave, o Pitot, que fica na parte externa do avião, é um sensor que capta informações externas do avião, como temperatura e velocidade. Para evitar que fique sujeito a congelamento devido a baixas temperaturas, pesquisadores da COPPE (incluindo Cotta) desenvolveram um revestimento com película hidrofóbica, que impede a “fixação” da água sobre o Pitot, eliminando assim a possibilidade de formação de gelo.

Cotta é membro do Conselho Editorial Honorário do International Journal of Heat and Mass Transfer e Int. Comm. de Transferência de Calor e Massa (revista que contém os artigos de M. Necati Özisik e R.L. Murray (1974) que serão estudados nessa pesquisa), Revista Internacional de Ciências Térmicas, Revista Internacional de Métodos Numéricos em Calor e Fluxo de Fluidos, Ciências Térmicas Computacionais, Valorização de Resíduos e Biomassa, e Jornal de Tecnologia Aeroespacial e Manag.

Ele também foi o Editor-Chefe para o periódico internacional Hybrid Methods in Engineering, é editor regional da revista High Temperatures - High Pressures e editor associado dos Anais da Academia Brasileira de Ciências. Cotta contribui como Presidente eleito da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, ABCM, em 2000-2001, para o Conselho Científico do Centro Internacional de Transferência de Calor e Massa, desde 1993.

Além de ser membro eleito da National Honor Society de Phi Kappa Phi, EUA (1984), ganhador do Prêmio ICHMT Hartnett-Irvine 2010 e membro eleito da Ordem Nacional do Mérito Científico, Ministério da Ciência e Tecnologia, Brasil, 2007. Cotta também é membro efetivo eleito da Academia Nacional de Engenharia, Brasil, da Academia Brasileira de Ciências, e da Academia de Ciências do Mundo em Desenvolvimento (TWAS), Itália.

2.5. Raymond LeRoy Murray[9]

Figura 6 - Raymond L. Murray

Fonte: NCSU - News

As informações que serviram de base para a construção biográfica de Raymond Murray, foram coletadas em uma publicação da Universidade Estadual da Carolina do (NCSU)[10].

Raymond L. Murray, foi professor emérito de engenharia nuclear na NCSU e um pioneiro da era atômica.

Murray nasceu em Lincoln, Nebraska (EUA), em 14 de fevereiro de 1920, falecido em 2011. Frequentou a Universidade de Nebraska, se formou em educação científica em 1940 e fez mestrado em Física no ano seguinte.

Nos anos seguintes, contribuiu para o Projeto Manhattan, onde pesquisou e ajudou na construção da primeira bomba atômica. Murray foi físico pesquisador no Laboratório de Radiação da Universidade da Califórnia em Berkeley de 1942-43. De 1943 até o final da Segunda Guerra Mundial, serviu em Oak Ridge, Tennessee, como supervisor de produção de separação de isótopos de urânio e como físico sênior em prevenção de criticalidade nuclear. Posteriormente, recebeu seu PhD em física pela Universidade do Tennessee em 1950.

Nos anos 50, Murray ingressou no corpo docente do novo programa de engenharia nuclear na NCSU e como professor de física. Contribuiu para o projeto, construção e operação do primeiro reator universitário do país.

Durante esses primeiros anos, a engenharia nuclear foi um programa em ascensão no departamento de física do NCSU, e Murray foi um dos cinco membros do corpo docente que trabalharam para estabelecer um novo currículo.

Seus esforços foram bem-sucedidos, e em 1951, a NCSU concedeu o primeiro bacharelado em engenharia nuclear. O programa de mestrado também foi iniciado em 1954. Em 1961, o programa assumiu o nome atual - Departamento de Engenharia Nuclear - e transferido para a então Escola de Engenharia.

Com a ajuda de Murray, o programa de engenharia nuclear projetou, construiu e operou três reatores sucessivos depois que o primeiro se tornou operacional em 1953, trabalho que

[9] Imagem disponível em: <https://www.engr.ncsu.edu/news/2011/06/24/remembering-atomic-age-pioneer-raymond-murray-who-helped-establish-nuclear-engineering-at-nc-state/> Acesso em: 21 agosto 2019.
[10] Disponível em: <https://www.engr.ncsu.edu/news/2011/06/24/remembering-atomic-age-pioneer-raymond-murray-who-helped-establish-nuclear-engineering-at-nc-state/ > Acesso em: 06 março 2019.

coincidiu com a transição do campo nuclear de experimentos básicos para poder comercial. Cada reator forneceu treinamento prático para estudantes, oportunidades de pesquisa e serviços para outras organizações na Carolina do Norte e nos Estados Unidos.

Murray liderou o Departamento de Engenharia Nuclear de 1963 a 1974. Durante seu mandato como chefe de departamento, construiu prédios e o reator PULSTAR, que permanece em uso até hoje. Murray tinha um ótimo relacionamento com seus alunos, que se lembram com afeto de suas contribuições para o departamento.

De acordo com depoimento para o site da NCSU, seu ex-aluno, C. Richard Vaughn, formado em engenharia nuclear em 1961, diz: "Dr. Murray foi o único professor que eu tive na faculdade que eu lembro até hoje. Eu posso lembrar seu rosto. Eu me lembro de suas palestras. Eu posso lembrar de tudo sobre ele", disse Vaughn que financiou a renovação e nomeação de um laboratório do Estado da Carolina do Norte em homenagem a Murray.

Murray foi um membro da equipe da Bechtel Corporation que realizou o programa de recuperação do reator nuclear danificado "Three Mile Island". Seus cálculos ajudaram a garantir a remoção segura, o armazenamento e o envio de combustível nuclear.

Sua aposentadoria do ensino ocorreu em 1980, mas continuou a se manter ativo em pesquisa e consultoria e como defensor dos aspectos benéficos da energia nuclear. Essas atividades incluíam dirigir a Autoridade de Gerenciamento de Lixo Radioativo de Baixo Nível da Carolina do Norte por sete anos e ministrar uma palestra anual para executivos do setor no Massachusetts Institute of Technology.

Ele foi o autor de mais de 75 artigos técnicos e muitos livros, incluindo: Introdução à Engenharia Nuclear, o primeiro livro didático de faculdade em engenharia nuclear, física de Reatores Nucleares, Física: Conceitos e Consequências, Entendendo Resíduos Radioativos e Energia Nuclear. Muitos de seus livros foram publicados em várias edições e traduzidos para outras línguas. Ele serviu por 11 anos como editor dos EUA do Journal of Nuclear Energy.

Murray recebeu muitas honras, incluindo o Prêmio O. Max Gardner, do sistema da Universidade da Carolina do Norte; o Arthur Holly Compton e o Eugene Wigner Reactor Physicist prêmios da Sociedade Nuclear Americana.

2.6. Georgy Abramovich Grinberg[11]

Figura 7 - G.A. Grinberg

Fonte: Academia de Ciências Russa

Poucas informações são encontradas a respeito de Georgy Abramovich Grinberg. As que encontramos estão de acordo com as pesquisas biográficas no website oficial da Academia de Ciências da URSS[12].

Sabe-se que Grinberg nasceu em 1900 e faleceu em 1991, foi físico e membro correspondente da Academia de Ciências da URSS desde 1946. Pode-se encontrar no livro *Alexander A. Friedmann: The Man who Made the Universe Expand* um comentário de Grinberg sobre Friedmann, importante matemático e cosmólogo russo, considerado um dos "pais" da teoria da expansão do universo e do Big Bang. No comentário, Grinberg diz que enquanto alguns acreditavam que Friedmann não sabia muito bem o que ele representava para a física, para ele, o físico sabia bem o que ele fez pela ciência.

Figura 8 – Grinberg sobre Friedmann

Georgy Abramovich Grinberg, a Corresponding Member of the USSR Academy of Sciences, once observed: "It was said that he himself did not realize what he had done. Nonsense! He understood quite well what he was."

Fonte: Alexander A. Friedmann: The Man who Made the Universe Expand (1993, p. 175)

Seus principais trabalhos estão nas áreas da eletrônica, propagação de ondas eletromagnéticas (nesses se encontram os estudos na área da Transformada Integral) e Física-Matemática teórica. Recebeu o notável Prêmio Nacional da URSS em 1949 pelas suas contribuições no estudo da Física. Era irmão de Aleksandr Abramovich Grinberg, importante químico soviético que estudou teorias ácido-base, propriedades de óxido-redução em compostos complexos e equilíbrios em soluções aquosas.

---

[11] Imagem disponível em: <http://www.ras.ru/win/db/show_per.asp?P=.id-50226.ln-ru.dl-.pr-inf.uk-0> Acesso em: 21 agosto 2019.

[12] Disponível em: < http://www.ras.ru/win/db/show_per.asp?P=.id-50226.ln-ru.dl-.pr-inf.uk-0> Acesso em: 06 março 2019.

3. ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS (EDP)

Neste capítulo, apresentamos um breve histórico a respeito do desenvolvimento das Equações Diferenciais, em especial, as (EDP) e suas principais definições. Para entendermos as motivações das construções da GITT e CITT, descrevemos alguns aspectos históricos a respeito das soluções analíticas e um panorama sobre as soluções numéricas.

3.1. Um pouco de história das Equações Diferenciais

A história das Equações Diferenciais se confunde com a história do Cálculo Diferencial e Integral. Os primeiros registros de Cálculo, segundo Boyer (2009) datam de 1.800 a.C., e desde a antiguidade, grandes nomes, como os matemáticos gregos Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C) e Arquimedes de Siracusa (287 a.C - 212 a.C), deram suas contribuições. Algumas ideias do Cálculo, ainda segundo Boyer (2009) também podem ser encontradas em trabalhos do início do século XVI de René Descartes (1569-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Jhon Wallis (1615-1703) e Isaac Barrow (1630-1677).

Mas foi no século XVII, que Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfriend Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) chegaram, de forma independente, a importantes resultados no campo do Cálculo, e por isso, são considerados os "criadores" do Cálculo. O cálculo se torna uma grande invenção par a humanidade, como comenta Diacu (2004, p.10):

> Para a ciência, a invenção do Cálculo Diferencial foi um passo gigantesco. Pela primeira vez na história humana, a concepção de infinito, que tinha intrigado filósofos e poetas desde tempos imemoriais, tinha recebido uma definição matemática, que abria inúmeras possibilidades novas para a análise dos fenômenos naturais.

Boyce e Diprima (2006) explicam que as descobertas de Newton circulavam privadamente entre seus amigos, mas por ser muito sensível a críticas, Newton só começou a publicar seus resultados a partir de 1687. E foi neste ano que surgiu sua obra mais famosa, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Newton, se apoiando na Mecânica, teve a base para aplicar Equações Diferenciais no século XVIII.

Para isso, Newton classifica as Equações Diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas: $\frac{dy}{dx} = f(x), \frac{dy}{dx} = f(y)$ e $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Foi desenvolvido por ele um método para resolver a última equação em que $f(x,y)$ é um polinômio em x e y, usando séries infinitas.

Ainda sobre a origem do Cálculo, Boyer (2009) lembra de Gottfriend Wilhelm Leibniz, que nasceu em Leipzig em 1646 na Alemanha, onde aos quinze anos entrou na universidade e aos dezessete obteve o grau de bacharel. Aos seus vinte anos concluiu seu doutorado na Universidade de Altdorf em Nuremberg. Daí em diante, Leibniz, autodidata em Matemática, chegou aos resultados fundamentais do Cálculo independentemente e um pouco depois de Newton. Porém, foi o primeiro a realizar publicações sobre o conteúdo em 1684. Ele compreendia a importância de um simbolismo geral, mais formal e rigoroso, ou seja, a criação de um cálculo manipulável.

A notação para derivada, $\frac{dy}{dx}$, e o sinal de integral $\int$ são devidos a Leibniz. Em relação específica às Equações Diferenciais, Boyer (2009) diz que Leibniz desenvolveu o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694. A separação de variáveis é um método analítico de resolução de Equações Diferenciais, ou seja, uma metodologia baseada em procedimentos matemáticos que nos levam a resolução da Equação.

Além disso, Leibniz manteve contato com outros matemáticos através de cartas, o que proporcionou a resolução de muitos problemas em Equações Diferenciais, em especial com os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), nascidos em Basiléia na Suíça, os quais contribuíram muito para o desenvolvimento das aplicações das Equações Diferenciais.

Boyer (2009) comenta que Jakob Bernoulli resolveu a Equação Diferencial $y' = \left[\frac{a^3}{b^2y-a^3}\right]^{\frac{1}{2}}$ em 1690 e, neste mesmo arquivo, utilizou pela primeira vez a palavra "integral". Em 1694, Johann Bernoulli resolveu a Equação Diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ e o problema da catenária.

Daniel Bernoulli (1700- 1782) nasceu em Groningen, nos Países Baixos, filho Johann Bernoulli, e conforme Boyce e Diprima (2006), ele se interessava por Equações Diferenciais e suas aplicações, tendo seu nome associado à "Equação de Bernoulli"

$$y_0 + P(x)y = Q(x)y^n$$

Leonhard Euler (1707-1783), nasceu em Basiléia na Suíça, foi aluno de Johann Bernoulli na universidade. Visto como o matemático que mais contribuiu com resultados concretos em todos os tempos, suas obras completas somam mais de 70 volumes. Boyer (2009) comenta que "Entre livros e artigos, Euler publicou trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais 47 anos".

De acordo com Boyce e Diprima (2006), Euler identificou a condição para que Equações Diferenciais de primeira ordem sejam exatas, por volta de 1734 - 1735, desenvolveu a teoria de fatores integrantes e encontrou solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743. Em 1750-1751 estendeu este último resultado para equações lineares não homogêneas, usando com frequência séries de potências para resolver Equações Diferenciais. Por volta de 1768-1769, Euler propôs um procedimento numérico e fez contribuições importantes em Equações Diferenciais Parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações. Segundo Boyer (2009, p. 326),

> Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre Equações Diferenciais, e até muito problemas específicos que aparecem em livros texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo - Institutiones calculi differentialis (Petersburgo, 1755) e Institutiones calculi integralis (Petersburgo, 1768-1770, 3 volumes).

A Equação Diferencial:

$$x^n y^n + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_n y^0 = f(x)$$

em que os expoentes indicam a ordem da derivada, é conhecida atualmente como Equação Diferencial de Euler.

Outro grande matemático que contribuiu de forma significativa a Teoria das Equações Diferenciais foi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Boyer (2009) explica que Lagrange nasceu em Turim na Itália, tornou-se professor de Matemática em Turim e sucedeu a Euler na cadeira de Matemática na Academia de Berlim em 1766. Muito conhecido por seu trabalho "*Mécanique analytique*" em 1788, Lagrange mostrou, no período de 1762-1765, que a solução geral de uma Equação Diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Em 1774- 1775 desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros. Sendo também conhecido pelo seu trabalho fundamental em Equações Diferenciais Parciais e cálculo de variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) viveu na Normandia e depois foi para Paris em 1768 deixando sua marca nos meios científicos, destacando-se no campo da Mecânica Celeste e no desenvolvimento de soluções para Equações Diferenciais. O Método da Transformada de Laplace permite resolver uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de coeficientes constantes por meio da resolução de uma equação algébrica, e será discutido com mais detalhes posteriormente.

No final do século XVIII, muitos métodos elementares para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias já tinham sido descobertos e no século XIX, inicia-se a investigação de questões relacionadas a teoria e a unicidade dos problemas. Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) alemão e Algustin-Louis Cauchy (1789-1857) francês, deram suas contribuições no desenvolvimento das teorias e conceitos de funções de variáveis complexas.

Nessa mesma época as Equações Diferenciais Parciais (EDP) começaram a ser estudadas, à medida que se tornou claro o seu papel em Física-Matemática. Com tudo isso, muitas funções, soluções de certas Equações Diferenciais, começaram a aparecer em muitas situações e foram estudadas mais profundamente. Conhecidas como funções transcendentais, muitas destas funções são associadas a nomes de matemáticos, tais como: Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel, entre outros.

O comportamento das soluções de Equações Diferenciais começou a ser analisado, do ponto de vista geométrico e analítico, a partir do século XX. Com o auxílio da tecnologia computacional, fenômenos descritos por equações desse tipo puderam ser mais explorados. Isso será muito evidenciado nessa pesquisa, pois foram os grandes motivos do desenvolvimento de técnicas como a CITT e GITT.

3.2. Equações Diferenciais Parciais (EDP)

A fim de entendermos e contextualizarmos as ideias sobre (EDP) que serão trabalhadas ao longo da pesquisa, levantamos as principais definições e exemplos acerca do tema. Para isso, utilizamos a construção teórica feita por Iório (2017). A ordenação/numeração das definições e exemplos foi de nossa escolha, mas todas baseadas na referência citada.

Definição 1. Uma Equação Diferencial (ED) é uma equação que envolve uma ou mais variáveis dependentes e suas derivadas até uma determinada ordem.

Definição 2. Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma Equação Diferencial em que sua variável dependente (ou suas variáveis dependentes) dependem de uma única variável.

Definição 3. Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma Equação Diferencial que envolve uma (ou mais de uma) variável dependente de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo 1: A (EDP) conhecida como Equação de Laplace, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, é muito utilizada no estudo dos campos eletrostáticos, que visa descrever a função potencial num meio sem cargas elétricas. Analisando esta equação, temos como variável dependente u e variáveis independentes x, y. Portanto, a Equação de Laplace é um exemplo de Equação Diferencial Parcial.

Definição 4. A ordem de uma (EDP) é a ordem da derivada parcial de maior ordem presente na equação. Assim, uma Equação Diferencial Parcial de ordem k com uma variável dependente em n variáveis independentes $x_1, \dots, x_n$ é uma expressão da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = g(x_1, \dots, x_n) \qquad (1)$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \Omega \subset \Re^n$ e $u: \Omega \to \Re^n$ é a variável dependente.

Exemplo 2:

1. Em Matemática Aplicada, a Equação de Burger com viscosidade, descrita por $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ modela a dinâmica de gases. Este é um exemplo de (EDP) de ordem 2.

2. A equação conhecida por Korteweg-de Vries (KdV): $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ modela inúmeros fenômenos da mecânica dos fluidos, física de partículas, entre outras coisas. A Equação KdV, é um exemplo de EDP de ordem 3.

Definição 5. Uma solução para a EDP (1) em Ω é uma função $u: \Omega \to \Re$, k vezes derivável, tal que u e suas derivadas satisfazem a igualdade (1).

Exemplo 3:

A função

$$u(x, y) = e^{-x} sen(y)$$

é uma solução da Equação de Laplace em $\Re^2$. De fato, neste caso temos:

$$u_x = -e^{-x} sen(y) \Rightarrow u_{xx} = e^{-x} sen(y)$$

$$u_y = -e^{-x} cos(y) \Rightarrow u_{yy} = -e^{-x} sen(y)$$

assim,

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-x} sen(y) + \left(-e^{-x} sen(y)\right) = 0$$

3.2.1. Linearidade

Além da ordem, outra classificação importante das (EDP) diz respeito à linearidade ou não da equação. Temos uma teoria matemática bem avançada em se tratando das resoluções das (EDP) lineares, porém, a teoria que envolve a resolução das equações não lineares é bem mais complicada e menos precisa.

Definição 6. Chamamos de parte principal da Equação Diferencial Parcial a parte da equação que contém derivadas parciais em relação a uma ou mais variáveis.

Definição 7. Dizemos que a (EDP) (1) é linear se F é linear em relação a u e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a EDP é não linear:

Definição 8. Uma Equação Diferencial linear é dita homogênea quando a parcela que não possui a variável dependente é identicamente nula $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ em (1), caso contrário diremos que a equação é não-homogênea.

As (EDP) de segunda ordem merecem um destaque maior devido a sua grande aplicabilidade em problemas físicos, por exemplo, em mecânica dos fluidos, movimentos ondulatórios e condução de calor. As equações que descrevem os exemplos citados, estão amparadas por uma teoria bem estruturada e bem desenvolvida com diversos métodos de resolução.

Consideremos a (EDP) linear de 2ª ordem nas variáveis independentes x, y e variável dependente $u = u(x, y)$, sobre o domínio $\Omega \subset \Re^2$, dada por

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \qquad (2)$$

em que os coeficientes $A, B, C, D, E, F \ e \ G$ são funções reais que dependem das variáveis x, y, definidas para todo $(x, y) \in \Omega$. Como a EDP é de segunda ordem, devemos ter

$$A^2(x,y) + B^2(x,y) + C^2(x,y) \neq 0$$

Dizemos que a EDP (2) é:

Hiperbólica, se $B^2 - 4AC > 0$

Parabólica, se $B^2 - 4AC = 0$

Elíptica, se $B^2 - 4AC < 0$

3.2.2. Problemas de Valor Inicial e de Contorno

De modo geral, as (EDP) podem não ter solução ou, até mesmo, possuir infinitas soluções. Segundo Iório (2007), foi provado por H. Lewy, em 1957, que existe uma função f, tal que a EDP, $u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t = f$, não tem solução. Já no caso da EDP linear homogênea $u_{xy} = 0$, para $x, y \in \Re$, tem-se que todas as funções da forma $u(x, y) = f(x) + g(y)$, onde f e g são funções quaisquer, são soluções. Entretanto, pode-se impor algumas condições adicionais a fim de garantir a existência e unicidade de soluções.

Definição 9. Um Problema de Valor Inicial (PVI), ou Problema de Cauchy, consiste em uma Equação Diferencial, juntamente com condições complementares impostas de maneira que, umas das variáveis independentes são fixadas em relação à variável dependente e a suas derivadas.

Exemplo 4: Analisando a (EDP) $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$, notamos que sua solução depende do tempo t, com isso podemos prefixar o que conterá na solução $u(x,t)$ quando $t = 0$. Matematicamente, procuramos uma solução que satisfaça a (EDP) com as duas condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < L$$

Definição 10. Um Problema de Valores de Contorno (PVC), ou Problemas de fronteira, consiste em uma Equação Diferencial, juntamente com condições complementares impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo ou na fronteira da região ($\partial\Omega$).

Algumas condições complementares possuem nomes devido a sua importância para alguns (PVC), como a condição de contorno de Dirichlet (ou de primeiro tipo), que é um tipo de condição de contorno, nomeada em homenagem a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Quando aplicada sobre uma equação diferencial ordinária ou parcial, especifica os valores que uma solução necessita tomar no contorno do domínio. A questão de encontrar-se soluções para tais equações é conhecida como problema de Dirichlet.

E também a condição de contorno de Neumann (ou de segundo tipo), que é um tipo de condição de contorno, nomeada devido a Carl Neumann. Quando aplicada a uma equação diferencial ordinária ou parcial, especifica os valores que a derivada de uma solução deve tomar no contorno do domínio. Enquanto a Condição de contorno de Dirichlet especifica o valor da função no contorno, a condição de contorno de Neumann especifica a derivada normal à função no domínio, ou seja, é um fluxo.

3.2.3. O Princípio da Superposição

Para (EDP) lineares homogêneas, a existência de uma solução não nula, implica diretamente na existência de infinitas soluções. De fato, se u é uma solução da (EDP), então ku também é solução, para qualquer $k \epsilon \mathfrak{R}$. Mais geralmente, se uma (EDP) linear homogênea tem como soluções as funções u e v, então todas as combinações lineares de u e v também são soluções da (EDP). Este resultado, apresentado abaixo, é conhecido como Princípio da Superposição:

Exemplo 5: Consideremos a (EDP),

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{3}$$

A função $u(x,t) = \sin(x)\, e^{-t}$é solução de (3), pois:

$$u_t(x,t) = -\operatorname{sen}(x)\, e^{-t},$$

$$u_x(x,t) = -\cos(x)e^{-t} \Rightarrow u_{xx}(x,t) = -sen(x)e^{-t}$$

assim,

$$u_t - u_{xx} = -\operatorname{sen}(x)\, e^{-t} - (-sen(x)e^{-t}) = 0$$

Agora, consideremos a função $v(x,t) = e^x e^t$. É interessante notar que v também satisfaz a equação diferencial (3), pois, ao calcularmos as derivadas relativas às variáveis independentes, temos:

$$v_t(x,t) = e^x e^t,$$

$$v_x(x,t) = e^x e^t \Rightarrow v_{xx}(x,t) = e^x e^t$$

Daí

$$v_t - v_{xx} = e^x e^t - (e^x e^t) = 0$$

Novamente, consideremos a função $z(x,t) = c_1\, sen(x)e^{-t} + c_2(e^x e^t)$, $c_1, c_2 \in \Re$. Nesse caso, temos:

$$z_t - z_{xx} = -c_1\, sen(x)e^{-t} + c_2(e^x e^t) - [-c_1\, sen(x)e^{-t} + c_2(e^x e^t)] = 0$$

Portanto, $z(x,t) = c_1 u(x,t) + c_2 v(x;\, t)$ também é solução da EDP (3), para quaisquer constantes $c_1, c_2 \in \Re$.

Definição 11. Consideremos as (EDP) descritas em (1). Definimos o operador diferencial parcial L como:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = L[u]$$

Desta forma, a equação (1) pode ser escrita como

$$L[u] = g$$

Princípio da Superposição: Seja L um operador diferencial linear de ordem k, cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subset \Re^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^k em Ω satisfazendo a (EDP) linear homogênea ($L[u] = 0$). Se $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m(x) \qquad (4)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω, então u satisfaz $L[u] = 0$.

Demonstração: Enunciamos a proposição no caso geral, mas a demonstraremos no caso em que $k = 2$. Seja o operador diferencial parcial dado por:

$$L[u](x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u(x)$$

Neste caso, por hipótese, quaisquer que sejam $x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n,$; temos que as séries:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

por hipótese, são convergentes. Assim, para todo $x \in \Omega$,

$$L[u](x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u(x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + c(x) \sum_{m=1}^{\infty} a_m \, u_m(x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + c(x) \sum_{m=1}^{\infty} a_m \, u_m(x)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{ij}(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^{\infty} b_j(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + c(x) u_m(x) \right] =$$

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (L[u_m])(x) = 0$$

Portanto,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m(x)$$

é solução do operador L.

3.3. Elementos históricos sobre o desenvolvimento das Transformadas Integrais e as soluções analíticas para (EDP)

Como já mencionado, um dos grandes motivos para o desenvolvimento das Equações Diferenciais e suas soluções foram os problemas de aplicação prática, em particular os problemas de Física-Matemática, que também ficou marcado pelas Transformadas ou Transformações Integrais. A Transformada aparece como uma metodologia analítica, que se caracteriza por uma solução totalmente baseada em relações e fórmulas matemáticas, alternativa ao método da Separação de Variáveis, que em muitos casos se torna muito difícil sua aplicação, devido ao problema não ser facilmente "separável".

Segundo Deakin (1985), os estudos considerados como precursores das Transformações Integrais são do matemático Leonhard Euler. Deakin comenta que as primeiras ideias de transformação devem ser encontradas em um fragmento de Euler (1763) dedicado a resolução de uma equação diferencial em específico. Mais tarde, em um capítulo do conhecido livro *Institutiones Calculi Integralis* de Euler (1769), o tratamento é mais geral, mesmo sendo muito incipiente. Esses trabalhos envolvem transformações integrais de grande reconhecimento.

Seguindo na evolução dos problemas de aplicação, Cotta et al. (2017) comentam sobre o trabalho de Fourier de (1807), *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides,* e seu tratado, *Theorie Analytique de la Chaleur* de 1822, onde lá foi consolidada a formulação matemática de fenômenos de condução de calor em termos de uma Equação Diferencial Parcial para a temperatura dentro de um corpo, com as variáveis de espaço e tempo. Para Cotta et al. (2017), a contribuição de Fourier já seria um avanço na ciência, mas ficou muito longe em propor o tratamento analítico da equação diferencial parcial, seja na forma de séries de Fourier ou nas integrais de Fourier.

De acordo com Cotta et al. (2017), somente mais tarde que Dirichlet foi capaz de fornecer uma solução exata para cada formulação diferencial parcial, incluindo análise da equação de condução de calor no sistema de coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas.

Mesmo assim, Fourier comenta no capítulo 1 de sua obra de 1822 que estava ciente da importância de suas descobertas, tanto em termos físicos e matemáticos. Segundo Fourier (1822 apud Cotta et al. 2017, p. 2, tradução nossa):

> As equações gerais da propagação do calor são equações diferenciais parciais e, embora sua forma seja muito simples, os métodos conhecidos não fornecem nenhum modo geral de integrá-los; portanto, não poderíamos deduzir deles os valores das temperaturas após um tempo definido. A interpretação numérica dos resultados da análise é, no entanto, necessária, e é um grau de perfeição que seria muito importante dar a toda aplicação de análise às ciências naturais. Enquanto não forem obtidas, pode-se dizer que as soluções permanecem incompletas e inúteis, e a verdade que se propõe descobrir não é menos escondida nas fórmulas de análise do que no próprio problema físico. Nós nos dedicamos com muito cuidado a esse propósito, e fomos capazes de superar a dificuldade em todos os problemas de que tratamos e que contêm os principais elementos da teoria do calor. Não existe um dos problemas cuja solução não forneça meios convenientes e exatos para descobrir os valores numéricos das temperaturas adquiridas ou as quantidades de calor que fluíram quando os valores do tempo e das coordenadas variáveis são conhecido[13].

Cotta et al. (2017) nos mostram que Fourier utiliza da abordagem de "separação de variáveis", uma clássica técnica que é, de fato, uma hipótese, que permite a solução de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), ao ser reduzida à integração direta das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), para todas as variáveis, é depois combinada para satisfazer a EDP original juntamente com o limite e condições iniciais.

Em essência, Cotta et al. (2017) comentam que Fourier naquela época avançou a ideia de separação de variáveis, para manipular e interpretar as soluções da equação de condução de

---

[13] "The general equations of the propagation of heat are partial differential equations, and though their form is very simple, the known methods do not furnish any general mode of integrating them; we could not therefore deduce from them the values of the temperatures after a definite time. The numerical interpretation of the results of analysis is however necessary, and it is a degree of perfection which it would be very important to give to every application of analysis to the natural sciences. So long as it is not obtained, the solutions may be said to remain incomplete and useless, and the truth which it is proposed to discover is no less hidden in the formulae of analysis than it was in the physical problem itself. We have applied ourselves with much care to this purpose, and we have been able to overcome the difficulty in all the problems of which we have treated, and which contain the chief elements of the theory of heat. There is not one of the problems whose solution does not provide convenient and exact means for discovering the numerical values of the temperatures acquired, or those of the quantities of heat which have flowed through, when the values of the time and of the variable coordinates are known. Thus will be given not only the differential equations which the functions that express the values of the temperatures must satisfy; but the functions themselves will be given under a form which facilitates the numerical applications". (FOURIER, 1822 apud COTTA et al. 2017)

calor recém-derivada, após propondo a equação constitutiva conhecida atualmente como Lei de Fourier. Ele deu uma série de exemplos antes de declarar que uma função arbitrária definida em um intervalo finito pode ser expandida em termos de uma série trigonométrica que atualmente é conhecido como a série de Fourier**.**

Fourier, para Cotta et al. (2017), forneceu a matemática moderna a teoria da condução de calor, mas também introduziu a série de Fourier, Integrais de Fourier, e demonstrou um resultado importante que é conhecido como o teorema da integral de Fourier, posteriormente reformulado por Dirichlet, como já mencionado anteriormente.

Algumas soluções das (EDO) precisam satisfazer a propriedade da ortogonalidade, e por isso geram infinitas soluções em forma de expansões e séries infinitas de funções onde o produto interno no espaço de funções entre elas é zero (condição de ortogonalidade). Foi aí que a teoria desenvolvida pelos dois matemáticos franceses entre 1829 e 1837, Sturm-Liouville, obteve uma grande aplicação, pois, resolvendo Equações Diferenciais Lineares de segunda ordem, Sturm-Liouville, começam a examinar o comportamento, ou seja, propriedades das soluções, a expansão em série de funções e os conhecidos problemas de autovalores e autofunções.

Cotta et al. (2017) comentam que por esse motivo fica evidente que as soluções da equação de condução de calor através da separação de variáveis podem ser interpretadas como um tipo de expansão de autofunção da temperatura que depende do tempo e do espaço.

Além da separação de variáveis, o método da Transformada Integral começa a ser mais desenvolvido e estudado. Cotta et al. (2017) destacam que a origem das Transformadas Integrais, após as primeiras ideias de Euler, remonta ao trabalho de Laplace sobre a teoria da probabilidade, *La Théorie Analytique des Probabilities*, na década de 1780, onde é encontrada as ideias da sua Transformada.

Cotta et al. (2017) destacam que as Transformadas Integrais foram usadas com sucesso em diferentes ramos da física, matemática e ciências da engenharia. Esses são os problemas que motivaram o grande desenvolvimento de técnicas de resolução, como a CITT e GITT.

E com o aprimoramento das soluções por meio dessas transformadas, Cotta et al. (2017) comentam que o desenvolvimento matemático que acontecia, estava em acordo com as propriedades das soluções, tais como a expansão em série de funções e o Princípio da Ortogonalidade.

Outras transformações integrais foram introduzidas por Mellin (transformada de Mellin), Hankel (a transformada homônima), Hilbert (a transformada de Hilbert, desenvolvida por Hardy e Titchmarsh), Stieltjes (a transformada homônima).

Dentre as Transformadas mais conhecidas, destacamos a Transformada de Fourier a de Laplace. Para Tonidandel e Araújo (2012), essas Transformadas juntamente com as séries de Fourier, desempenham importante papel em diversas áreas, desde comunicações, processamento de sinais, sistemas de controle, antenas, além de ser extremamente útil na resolução de problemas de valor de contorno. Como exemplo, Tonidandel e Araújo (2012) explicam que para calcular a resposta de um circuito elétrico a um dado valor de entrada, a Transformada de Laplace fornece a resposta transitória e permanente. Já a Transformada de Fourier limita-se ao regime permanente.

A Transformada de Fourier expressa como:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Com sua inversa, expressão na qual obtemos a função original sendo dada por:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Como uma analogia e aplicação Física da Transformada de Fourier, Tonidandel e Araújo (2012) explicam que se imaginarmos a função f como um feixe de luz, então a Transformada de Fourier, como um prisma, quebra a função em diversos componentes de frequência que a compõe, cada uma de intensidade F. As várias frequências seriam chamadas cores e dessa forma, a transformada de Fourier forneceria o espectro de cores do sinal. Fazendo o caminho contrário, a transformada inversa de Fourier combina o espectro, ou seja, combina todas as cores, para retornar à função original.

Já a Transformada de Laplace é definida pela equação:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Com a inversa expressa pela integral:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\tau} F(s)e^{st}ds$$

Tonidandel e Araújo (2012) comentam que mais de um século passaria até que a Transformada evoluisse a partir da forma que Laplace deixou em seus escritos. Isso acontece pois com o aparecimento das sofisticadas aplicações atuais em engenharia, a grande evolução seria dada por Oliver Heaviside na direção de tornar a Transformada de Laplace um método viável na solução de problemas práticos, com a criação da função H que, por algum tempo, levou o seu nome e que mais tarde ficou conhecida como função degrau unitário u.

Cotta et al. (2017) explicam que o método de Transformações Integrais foi amplamente usado na resolução de (EDP) da Física-Matemática ao longo dos anos e forneceu uma ampla coleção de soluções obtidas, por exemplo, na teoria de condução de calor, em comparação com outras abordagens analíticas que existiam.

3.4. Um breve panorama sobre as soluções numéricas para EDP

Com a evolução tecnológica e a necessidade de se resolver (EDP) de modo mais rápido, um dos grandes desafios para a simulação computacional direcionada ao desenvolvimento científico-tecnológico consiste na descoberta de novos procedimentos, objetivando minimizar determinadas restrições que segundo Cotta (2012) são: Longo tempo de processamento, precisão limitada, convergência lenta e enorme esforço despendido na elaboração e expansão de algoritmos numéricos.

Como já mencionado, temos a solução analítica das Equações Diferenciais, entretanto nem sempre é possível obter uma solução analítica ou se torna muito complexo a resolução de uma Equação Diferencial, assim, o desenvolvimento das soluções numéricas começa a tomar um grande espaço. Boyce e Diprima (2006) explicam que os métodos numéricos são algoritmos aritméticos que apresentam resultados aproximados de Equações Diferenciais, desta forma percebe-se que se tem um valor $y_n \cong y_n(x_n)$ como sendo o valor aproximado e $y_n(x_n)$ o valor exato.

De acordo com Boyce e Diprima (2006), os trabalhos iniciais em métodos numéricos se iniciaram com Newton e Leibniz, mas foi com Euler que os métodos numéricos tiveram forma mais concreta, Euler deduziu um processo iterativo que permitia determinar, de forma aproximada, a solução de um problema de condição inicial num determinado ponto. A demonstração deste método foi feita depois por Cauchy e melhorado por Lipschitz.

Boyce e Diprima (2006) continuam explicando que os processos de iteração numérica ou métodos numéricos vieram sobretudo, por Carl Runge em 1895 e 1908 e por Martin Wilhelm Kutta em 1901, tendo sido considerados como generalizações das regras de integração. A maior evolução dos métodos numéricos se deu com o aparecimento dos primeiros computadores.

Desse modo, Cotta (2012) comenta que com o desenvolvimento da engenharia aeroespacial, de novos materiais supercondutores, da tecnologia de fibra ótica e da previsão meteorológica são típicos desafios atuais. Para simular os processos físicos envolvidos, uma extensa cadeia deve ser percorrida, destacando-se o estudo e refinamento das leis governantes, modelos matemáticos associados e desenvolvimento de novas técnicas computacionais para tratamento analítico e numérico.

E assim, o aprimoramento de metodologias para solução de sistemas de equações diferenciais acopladas contribuiu para o avanço tecnológico dos países em desenvolvimento, permitindo a obtenção de materiais e produtos de alta qualidade, a custos reduzidos.

No início da década de 1970, durante o período da corrida espacial, visando minimizar o esforço empregado na elaboração de cálculos, a Rússia e outros países do Leste Europeu proporcionaram um grande avanço no desenvolvimento e aplicação de métodos analíticos (séries e transformadas).

Concomitantemente, Cotta (2012) explica que os Estados Unidos e Europa se concentravam no desenvolvimento de métodos denominados puramente numéricos. Posteriormente, Cotta (2012) nos diz que os cálculos desenvolvidos no ocidente requisitavam um crescente esforço computacional, enquanto as metodologias do Leste Europeu concentravam bastante esforço em extensas manipulações analíticas. Isto permaneceu até meados da década de 1970 Ainda nessa década, muitos pesquisadores buscavam encontrar novas alternativas para tratamento e solução de equações.

E essa foi a tônica, segundo Cotta (2012), em boa parte da segunda metade do século XX, devido à crescente disponibilidade do desempenho computacional após o aprimoramento do hardware e os métodos numéricos desenvolvidos, e o contínuo avanço do papel da simulação computacional na análise e projeto de engenharia. para resolver EDP que modelam várias aplicações de engenharia, incluindo problemas de fluxo de calor e fluido.

Cotta (2012) afirma que os métodos numéricos ainda são responsáveis pela maioria dos desafios e tarefas de simulação que são realizadas e são as mais frequentemente empregadas em software comercial para uso multiuso. Embora os pacotes de simulação comercial baseados em métodos puramente numéricos ainda estejam longe de serem perfeitos em termos de custo-efetividade, confiabilidade, flexibilidade e precisão, sua presença em tarefas rotineiras de empresas do setor e de consultoria é um fato inegável, que, por sua vez, traz uma demanda crescente por melhorias. A evolução dos sistemas de computação simbólica viabiliza ainda mais o investimento em métodos numéricos.

A utilização do *Mathematica*, um *software* de última geração que reúne recursos de computação simbólica, numérica e gráfica, possibilita o desenvolvimento de programas com manipulação automática de expressões analíticas, segundo conjuntos de regras definidas à priori pelo usuário. Incorpora também uma poderosa linguagem simbólica para o desenvolvimento de programas avançados, integrando diferentes paradigmas de programação, tais como:

programação procedural, funcional, lógica e orientada a objetos. Estes recursos favorecem o desenvolvimento de aplicações em inteligência artificial tais como: Prova de teoremas, robótica, reconhecimento de padrões e sistemas especialistas.

As abordagens do tipo analítico não foram, no entanto, totalmente abandonadas durante esse período da grande evolução dos computadores. Em vez disso, eles foram avançados, unificados e formalizados por alguns grupos de pesquisa dedicados a essa herança matemática, conforme ilustrado por alguns compêndios de difusão de calor e massa.

Cotta (2012) explica que esses pesquisadores, de certa forma mais leais à era analítica, e foram em parte motivados pela impressão de que poderiam ajudar para a revolução tecnológica nos métodos numéricos em andamento, oferecendo resultados de referência para validação e calibração de esquemas numéricos. Mais importante ainda, esses pesquisadores fizeram contribuições produzindo a base teórica para conectar novos desenvolvimentos em abordagens híbridas.

Com base nessas observações, Cotta (2012) destaca que várias frentes de pesquisa foram abertas por diferentes grupos acadêmicos em todo o mundo, com o objetivo de aprimorar simultaneamente o processo de simulação em ciências térmicas e engenharia, através da proposição de caminhos de metodologia de solução alternativa.

Nesse contexto, várias metodologias numéricas – analíticas, também conhecidas como híbridas têm aparecido na literatura aberta, que tentam combinar as ideais analíticas clássicas com a atual base de conhecimento em análise numérica, na busca de maior precisão e opções robustas e econômicas para os métodos de solução discreta agora bem estabelecidos. Isso ficará muito claro nas justificativas e conclusões apresentadas nos estudos analisados posteriormente nessa pesquisa, especialmente na entrevista realizada com o Prof. Renato Cotta.

4. TRANSFORMADA INTEGRAL POR KOSHLYAKOV

Neste capítulo, abordamos as Transformadas Integrais por N.S. Koshlyakov. Com o intuito de descrever suas ideias para a resolução de problemas em intervalos finitos e infinitos, que serviram como base do desenvolvimento de CITT e GITT.

4.1. Desenvolvimento de N.S. Koshlyakov

Com a evolução das Transformadas, Cotta et al. (2017) nos explicam que em todos os casos a metodologia geral é a mesma, porém, a grande diferença para cada proposta está no núcleo, pois é ele que pode facilitar a resolução do problema e entregar soluções mais adequadas para cada caso, esse núcleo será discutido no desenvolvimento do próximo capítulo.

E com esse mote, voltado para a resolução de problemas de Física-Matemática, vemos a abordagem da Transformada Integral por N.S. Koshlyakov, e que foi base para o seguimento das ideias da CITT e GITT.

Para entendermos essa relação, Renato Machado Cotta, no seu artigo de 2012, intitulado *The Unified Integral Transforms (U**N**IT) algorithim with total and partial transformation: A tribute to Prof. Mikhail D. Mikhailov*, nos apresenta diversos dados históricos que estão diretamente relacionados as propostas de M.D. Mikhailov, M.N. Özisik, e, posteriormente, na concepção de um algoritmo que facilita a implementação da CITT.

Nesse caminho, Cotta (2012, p. 1, tradução nossa) explica: "O Trabalho de N.S. Koshlyakov (1936) nos forneceu uma primeira ideia ao lidar com equações de difusão não homogêneas e condições de contorno pelo método das Transformações Integrais Finitas" [14]. Com isso, vemos que Koshlyakov nos mostra a primeira proposta de Transformada Integral que culmina nos métodos que estudaremos nessa pesquisa.

Na mesma direção que Cotta (2012), o professor Aleksei Luikov, no seu livro *Heat and Mass Transfer* de 1972, examina diversas soluções de problemas de condução de calor e massa. Dentre essas propostas de solução, Luikov (1972, p. 63, tradução nossa) afirma que: "A primeira ideia da Transformada Integral Finita foi proposta por Koshlyakov (1936)" [15].

No livro de 1936, intitulado *Basic Differential Equations of Mathematical Physics,* do russo, *Osnovnye Differentsial'nye Uravneniya Matematicheskoi Fiziki,* N.S. Koshlyakov,

[14] "The work of (Koshlyakov, 1936) that an idea was provided in handling non-homogeneous diffusion equations and boundary conditions by the method of Finite Integral Transformations" (COTTA, 2012).
[15] "First the idea of the finite integral transform method was proposed by Koshlyakov (1936)" (LUIKOV, 1972)

estuda uma série de problemas físicos que envolvem Equações Diferenciais Parciais de segunda ordem, dada a devida atenção a teoria que está por trás dos problemas.

Com o auxílio do Prof. Renato Cotta, encontramos o exemplar original em Russo de 1936 e comparamos com a publicação de 1964 intitulada *Differential Equations of Mathematical Physics*, escrita por N.S. Koshlyakov, M.M. Smirnov e E.B. Gliner. As duas publicações foram brevemente apresentadas na seção do capítulo anterior onde estudamos a biografia de Koshlyakov.

Com a análise das duas obras, verificamos que a presença da Transformada na publicação de 1936 está de forma diluída no texto, durante a solução de cada problema proposto pelo autor. Já no livro de 1964, vemos um capítulo inteiro dedicado ao trato da Transformada Integral, de um modo didático e compreensível. É importante ressaltar que, após a comparação, observamos que a técnica apresentada em 1936 é rigorosamente a mesma da descrita na publicação de 1964.

E assim, por esse motivo e também por facilidade de compreensão e tradução da língua, utilizamos o livro de 1964, com tradução para a língua inglesa publicada após o falecimento de Koshlyakov. A edição original do livro, na língua russa, foi publicada em 1955. Após a conversa com o Prof. Renato Cotta, o mesmo comentou que a tradução em língua inglesa é extremamente fiel ao original.

Dentre os problemas estudados em ambos os livros, estão: Vibração em cordas e membranas; oscilação elétrica; problemas eletrostáticos; emissão de ondas eletromagnéticas; emissão e dispersão sonora**;** ondas mecânicas em superfície de líquidos e condução de calor em corpos. Nos capítulos são mostrados os problemas e a proposta de solução com seu desenvolvimento e técnicas matemáticas envolvidas.

Na introdução do texto de 1964, os coautores Smirnov e Gliner destacam que a publicação foi uma homenagem a sua dedicação ao ensino de matemática para engenheiros. Assim, eles deixam claro que mantiveram os textos originais da publicação de 1936 e acrescentaram alguns que foram escritos de maneira conjunta com Koshlyakov.

O livro está dividido em quatro partes, na primeira é tratado os problemas físicos que são modelados por equações diferenciais do tipo hiperbólico, os do tipo elíptico são tratados na segunda e do tipo parabólico na terceira. Na quarta e última parte, os autores apresentam um material suplementar que foi escrito por Koshlyakov. Segundo o que informa a introdução do livro, as partes I, II e III possui revisão e inserção de textos escritos por Smirnov e Gliner.

O objeto de nosso estudo está presente na parte IV desse livro. No primeiro capítulo dessa seção e XXXI do livro, vemos o título: *The use of integral operators in solving problems in mathematical physics.*

Figura 8 - Sumário do Capítulo XXXI

Part IV. Supplementary material

Fonte: Koshlyakov; Smirnov e Gliner (1964, p. 14)

Podemos observar no sumário (Figura 8), que Koshlyakov apresenta as definições básicas, métodos de aplicação, condições de uso e a Transformada Integral para casos de intervalos finitos e infinitos.

Nos próximos subitens mostramos integralmente cada tópico desse capítulo, com o objetivo de entender as ideias propostas pelo autor e que serviram de base para o desenvolvimento da CITT e GITT.

4.2.1. Definições básicas

Nesse item, Koshlyakov define "operador integral"[16] e explica que esses termos são aplicados aos resultados de uma transformação. Assim, para Koshlyakov, a transformação da forma:

$$\bar{f}(\gamma_1,\ \gamma_2,\gamma_3,\dots,\gamma_m;x_{m+1},\dots,x_n) = \int\int\dots\int_S K(x_1,\dots,x_m;\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m)\, f(x_1,\dots.x_n)dx_{1..}dx_m \qquad (1)$$

onde a Equação (1) é a Operação (Transformada) Integral na região S (superfície) pela qual a função original $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ em relação às n variáveis é transformada em uma função $\bar{f}(\gamma_1,\ \gamma_2,\gamma_3,\dots,\gamma_m;x_{m+1},\dots,x_n)$ com m variáveis $(\gamma_1,\gamma_2,\dots.\gamma_m)$ e $n-m$ variáveis $(x_{m+1},\dots,x_n)$, com núcleo (Kernel) $K(x_1,x_2,\dots,x_m\ ;\ y_1,y_2,\dots,y_m)$ dado que $m \leq n$.

[16] No livro de (1936), Koshlyakov utiliza o termo “operador integral”. Na edição de 1964, M.M. Smirnov e E.B. Gliner adicionam ao lado um parêntese com o termo transformação, para mostrar que o significado matemático é o mesmo.

Koshlyakov define que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ são chamadas variáveis de transformação e a operação é feita em relação a elas. O autor chama atenção para a notação da transformada, ele denota as funções transformadas pelos mesmos símbolos que são utilizados antes da transformação, com a adição de um marcador. Como no exemplo citado anteriormente, onde $\bar{f}$ é a transformada de f .

Além disso, para deixar claro em qual variável foi feita a transformação, o autor usa de exemplo a expressão $\bar{f}(\gamma_1, x_2, x_3)$, como a Transformação Integral em relação a variável x_1 da função $f(x_1, x_2, x_3)$. Ele não utiliza as generalizações x_i e γ_i para evitar má interpretação.

Em continuação a definição, o autor mostra o que ele chama de retransformação, que seria a operação de transformar $\bar{f}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m; x_{m+1}, \ldots, x_n)$ na original $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, isso seria a inversa da operação integral ou simplesmente operador inverso. Na Equação (1) temos o operador direto e a observação de que nem sempre um operador inverso é um operador integral, ou seja, pode acontecer da operação inversa não possuir solução.

Koshlyakov diz que será utilizada apenas a operação integral em relação a uma variável. O procedimento geral de aplicação da solução do problema de Física-Matemática consiste nos seguintes passos: Por meio de um operador integral, o problema deve ser transformado de tal forma que se possa eliminar a derivada parcial com relação a uma de suas variáveis, o que resulta em um problema mais simples em uma função denominada transformada. Assim, resolvido o problema mais simples, usamos o operador inverso ou transformada inversa para encontrar a função desconhecida que é a solução para o problema original.

Se necessário, caso o problema transformado pela primeira vez ainda não se torne de simples resolução, Koshlyakov sugere que se use várias transformações integrais, para eliminar sucessivamente operações diferenciais com relação às diferentes variáveis até que se tenha uma equação transformada mais simples. Tendo resolvido o problema transformado, usamos os operadores inversos para obter a função desejada.

4.2.2. Condições de uso do Operador Integral

Nesse item, chamado de condições que permitem o uso do operador integral, Koshlyakov inicia com um problema de alguma região que envolva uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\mathfrak{M}\mathrm{u} = f \tag{2}$$

onde:

$$\mathfrak{M}\mathrm{u} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=0}^{3} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{3}$$

A Equação (3) é uma expressão diferencial de segunda ordem com coeficientes variáveis e f é uma função conhecida com variáveis x_0, x_1, x_2 e x_3(que podem ser coordenadas de um ponto no espaço e tempo), com constantes $a_{\alpha\beta}$. Em geral, é adicionada condições ao problema que garantem uma solução única, essas condições podem ser: iniciais, condições de contorno ou fronteira, condições ao infinito, condições de periodicidade de soluções com relação a certas coordenadas, entre outras. O autor comenta que a transformada irá ser aplicada tanto a equação como as condições suplementares.

Com relação as funções que serão transformadas, Koshlyakov diz que devemos assumir que todas que estarão sujeitas a Transformação Integral possuem propriedades que tornam possíveis tal procedimento. Ao examinar problemas específicos, é importante verificar a questão da aplicabilidade do operador em questão. Assim, Koshlyakov, diz que irá mostrar as condições suficientes para garantir a transformação de um problema que possui uma forma em que é possível aplicar as operações diferenciais e integrais com relação as varáveis de transformação.

Inicialmente, é necessário escolher os limites da integração para que o operador entre em um caminho que coincida com os limites (a, b) da variação das variáveis de transformação (x_i), de outra forma, os valores da função transformada fora do intervalo de integração não seriam levados em conta ou a integração seria estendida para uma região em que a função transformada não seria definida. Portanto, se a variável de transformação varia com limite finito, a operação integral tem que possuir limites finitos; analogamente se for infinito, o operador integral deve possuir limites infinitos. Tendo em vista isso, Koshlyakov diz que irá realizar o estudo distinguindo entre operador integral finito e infinito.

Ao tomar a Equação (2) em um intervalo (a, b) da variação das variáveis (x_i), tomando esse valor como fixo, para um operador integral com núcleo $K(x_i, \gamma)$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(\sum_{\alpha,\beta \neq i} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha \neq i} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) K(x_i, \gamma) dx_i \\ &\qquad + \int_a^b \left(a_{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{\beta \neq i} a_{i\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_\beta} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right) K(x_i, \gamma) dx_i \\ &\qquad = \bar{f} \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\bar{f}$ é a Transformada Integral do termo livre f. Para assim, Koshlyakov mostrar as condições suficientes em forma de relações que devem ser satisfeitas para que a integral seja transformada em uma equação diferencial em relação à Transformada Integral:

$$\bar{u} = \int_a^b u\, K(x_i, \gamma) dx_i$$

de uma função desconhecida u.

Se os coeficientes a_{jk}e b_j com $j, k \neq i$ não dependem da variável de transformação x_i, a primeira parcela da Equação (4) ficará da forma:

$$\sum_{\alpha,\beta \neq i} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha \neq i} b_\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha}$$

Nesse caso, por exemplo,

$$\int_a^b a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} K(x_i, \gamma) dx_i = a_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_a^b u K(x_i, \gamma) dx_i = a_{jk} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_j \partial x_k}$$

Ao resolver a segunda parcela do lado esquerdo da Equação (4), usando a técnica de integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(a_{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{\beta \neq i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_\beta} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right) K(x_i, \gamma) dx_i \\ &\qquad = \left| \left[a_{ii} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left(b_i - \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} \right) u + 2 \sum_{\beta \neq i} a_{i\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right] K(x_i, \gamma) - u a_{ii} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right|_a^b \\ &\qquad + \int_a^b \left(\frac{\partial^2 a_{ii} K}{\partial x_i^2} - \frac{\partial b_i K}{\partial x_i} + cK \right) u dx_i - 2 \sum_{\beta \neq i} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \frac{\partial a_{i\beta} K}{\partial x_i} dx_i \end{aligned} \tag{5}$$

A equação transformada (5) não contém termos integráveis se:

$$\sum_{\beta \neq i} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \frac{\partial a_{i\beta} K}{\partial x_i} dx_i = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 a_{ii} K}{\partial x_i^2} - \frac{\partial b_i K}{\partial x_i} + cK = -\lambda^2 K \tag{7}$$

Sendo λ^2 é um valor real que não depende de x_i (em nota de rodapé, Koshlyakov afirma que adota o λ ao quadrado por mera conveniência).

O termo será satisfeito se:

$$a_{ij} = 0 \text{ para } j \neq i; \tag{8}$$

Isto é, se a Equação Diferencial (3) é da forma:

$$f = \mathfrak{M}\mathrm{u} = \mathfrak{M}_i\mathrm{u} + \mathfrak{M}'\mathrm{u} \tag{9}$$

Sendo:

$$\mathfrak{M}_i\mathrm{u} = a_{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \tag{10}$$

E $\mathfrak{M}'$u é uma expressão que não contém derivadas em relação a x_i.

Se a Equação (7) for satisfeita, aplicamos a $\int_a^b K(x_i, \gamma)dx_i$ e usando a Equação (4) temos:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial^2 a_{ii}K}{\partial x_i^2} - \frac{\partial b_i K}{\partial x_i} + cK\right)udx_i = -\lambda^2 \int_a^b uKdx_i = -\lambda^2\bar{u}$$

Se, além disso, os coeficientes $a_{ii}, b_i e\ c$,não dependem das variáveis x_j (onde j = i), o valor $-\lambda^2$ não dependerá de x_j. Então, Koshlyakov comenta que a Equação (7) pode ser considerado como a equação para definir o núcleo $K(x_i, \gamma)$.

Quando é satisfeita a condição dada pela Equação (8), a integral do lado direito da Equação (5) pode ser escrita na forma:

$$\int_a^b \left[\left(a_{ii}\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_i u\right)K - u\frac{\partial a_{ii}K}{\partial x_i}\right] \tag{11}$$

Esta expressão contém os valores da função u e suas derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ em $x_i = a$ e $x_i = b$. Para efetuar o cálculo, o autor comenta que é necessário que as condições do problema (limite, inicial e assim por diante) admitam uma expressão das condições em relação à variável x_i em termos de funções conhecidas das variáveis x_j (onde $j \neq i$). Caso contrário, Koshlyakov comenta que a equação transformada conteria não apenas $\bar{u}$ mas outras funções desconhecidas. Contudo, este requisito, para Koshlyakov, por si só não é suficiente, uma vez que os valores de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ não podem ser dados arbitrariamente para dois valores diferentes de x_i e, consequentemente, eles não podem aparecer simultaneamente nas condições do problema. Isso não permite tomar uma solução arbitrária de Equação (7) para se determinar o núcleo do operador. No entanto, Koshlyakov comenta que se o núcleo for submetido a requisitos adicionais, que serão discutidos nos próximos itens desse capítulo do seu livro, a Equação (11) pode ser resolvida. Isso possibilita a exclusão de operações diferenciais e integrais em relação à variável x_i da equação do problema inicial.

Para excluir as operações integrais em relação à variável x_i, o autor considera a transformação com as condições do problema. As condições do problema para a equação original (3) se aplicam ao conjunto inteiro de variáveis x_j. A equação transformada não contém diferenciais com relação a x_i e, consequentemente, as condições para a transformação do problema devem se aplicar apenas às variáveis x_j para $j \neq i$.

Desse modo, as condições com relação à variável x_i podem ser expressas em termos de funções conhecidas das variáveis x_j para $j \neq i$. Se, além disso, as condições com relação a x_j, para $j \neq i$ não contém coeficientes dependendo de x_i nem derivadas de u em relação a x_i, então, quando transformamos essas condições usando o operador integral com o núcleo escolhido, podemos obter as condições para a função transformada $\bar{u}$. Por exemplo, a condição de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta u = \varphi \; ; \; x_j = a_j$$

Supondo que a mudança da ordem de diferenciação e integração é válido é transformado para a forma:

$$\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + \beta \bar{u} = \bar{\varphi} \; ; \; x_j = a_j$$

Com coeficientes constantes fornecidos α e β que não dependem de x_i.

Concluindo esse item, Koshlyakov enumera as condições que são suficientes para nos permitir eliminar operações diferenciais e integrais com relação a uma das variáveis pelo uso de uma transformação integral, são:

1. O lado esquerdo da Equação (3) deve ser a soma de duas expressões, uma contendo derivadas apenas no que diz respeito à variável de transformação e a outra não contém derivadas em relação a esse variável nem coeficientes dependentes dela.
2. As condições suplementares do problema (contorno, fronteira, inicial, etc.) devem ser divididos em dois grupos, um expressando a condição com relação à variável de transformação (isto é, para $x_i = a$ e $x_i = b$) em termos de funções dadas das outras

variáveis, e a outra não contendo nenhuma derivada em relação à variável de transformação e nenhum coeficientes que são dependentes dela.

3. Os limites de integração no operador devem coincidir com os limites de variação da variável de transformação, e o núcleo do operador deve ser uma solução de Equação (7) e satisfazer os requisitos suplementares Equação (11).

Koshlyakov destaca que nas próximas sessões serão discutidos de modo mais preciso os requisitos do núcleo do operador e apresentar o método da Transformada Integral e a fórmula do operador inverso.

4.1.3.Transformada Integral Finita

Nesse item, Koshlyakov mostra o procedimento da Transformada Integral de uma variável que se transforma dentro de limites finitos. Para isso, o autor considera um núcleo do operador direto na forma:

$$K(x_i,\gamma) = \frac{1}{C_\gamma}\rho(x_i)\overline{K}(x_i,\gamma) \tag{12}$$

em que $x_i \in \,]a,b[, C_\gamma, \rho(x_i)$ e $\overline{K}(x_i,\gamma)$ são funções (a serem determinadas posteriormente) de argumentos indicados. No texto, o autor nomeia a função C_γ de argumento e γ de divisor de normalização. Quando se substitui a Equação (12) em (7), obtemos:

$$a_{ii}\rho\frac{\partial^2\overline{K}}{\partial x_i^2} + \left(2\frac{da_{ii}\rho}{dx_i} - b_i\rho\right)\frac{\partial\overline{K}}{\partial x_i} - q\overline{K} = -\lambda^2\rho\overline{K} \tag{13}$$

sendo:

$$q = -\left(\frac{d^2a_{ii}\rho}{dx_i{}^2} - \frac{db_i\rho}{dx_i} + c\rho\right) \tag{14}$$

Para determinar a função ρ, Koshlyakov usa a condição:

$$\frac{da_{ii}\rho}{dx_i} = b_i\rho \tag{15}$$

na qual:

$$a_{ii}\frac{d\rho}{dx_i} + \left(\frac{da_{ii}}{dx_i} - b_i\right)\rho = 0$$

Vemos que a solução desta equação será a função:

$$\rho(x_i) = \exp\left[-\int\frac{1}{a_{ii}}\left(\frac{da_{ii}}{dx_i} - b_i\right)dx_i\right] \tag{16}$$

Segue da Equação (15) que a equação (13) é da forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - q\bar{K} + \lambda^2 \rho \bar{K} = 0 \tag{17}$$

sendo:

$$p = a_{ii}\rho \text{ e } q = -c\rho \tag{18}$$

é uma Equação da forma (17) frequentemente encontrada em problemas de física-matemática e que, segundo Koshlyakov, tem sido intensamente estudado em conexão com o clássico problema de Sturm-Liouville para encontrar os valores do parâmetro λ^2 (autovalores do problema), para os quais a Equação (17) tem uma solução não igual a zero (autofunções do problema) satisfazendo as condições de contorno homogêneas:

$$\left[\alpha_a \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - \beta_a \bar{K}\right]_{x_i = a} = 0 \qquad \left[\alpha_b \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} + \beta_b \bar{K}\right]_{x_i = b} = 0 \tag{19}$$

Com coeficientes constantes fornecidos α e β que não dependem de x_i. Koshlyakov destaca que será utilizado os resultados da teoria de Sturm-Liouville sem prova, uma vez que para o autor, prová-los exigiria um desenvolvimento completo da teoria das equações integrais.

Para isso, o autor supõe que:

1) As funções $p, \frac{dp}{dx_i}, q\ e\ \rho$ são contínuas no intervalo $a\ \leq x_i \leq b$ e $p \geq 0,\ q \geq 0, \rho_o \leq \rho \leq \rho_1$, onde $\rho_o\ e\ \rho_1$ são constantes positivas,

2) A integral:

$$\int_a^b \frac{dx_i}{p}$$

converge e

3) Que os números $a_a\ e\ \beta_\alpha$ e também $a_b\ e\ \beta_b$ são não negativos e que os membros de cada par não são simultaneamente iguais a zero.

Os autovalores λ^2 do problema Sturm-Liouville formam uma sequência infinita de números positivos $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2$ .... .

(1) Para cada autovalor λ_γ^2 corresponde uma autofunção $\overline{K}_\gamma(x_i)$, que é uma função que reduz a Equação (17) a uma identidade e satisfaz a Equação (19).

(2) O sistema de autofunções $\overline{K}_\gamma$ $(\gamma = 1,2,3,\dots)$ está completo no sentido de convergência média; isto é, uma função arbitrária de integração de $f\ (x_i)$ no intervalo (a, b) pode ser representado na forma de uma série:

$$f(x_i) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_\gamma \overline{K}_\gamma \tag{20}$$

que converge para a função f. Koshlyakov ressalta que essa é uma série conhecida e converge, com isso, a Equação (20) pode ser integrada multiplicando por qualquer função integrável.

(4) As autofunções $\overline{K}_\alpha$ e $\overline{K}_\beta$ constituem um par ortogonal com peso $\rho(x)$, isto é:

$$\int_a^b \rho(x_i)\overline{K}_\alpha\,\overline{K}_\beta \mathrm{d}x_i = \begin{cases} 0\,;\ \alpha \neq \beta \\ C_\alpha \neq 0;\ \alpha = \beta \end{cases} \tag{21}$$

Se a integral

$$\int_a^b \frac{dx_i}{p}$$

Não converge, mas as integrais:

$$\int_a^{a+\epsilon} \frac{x_i - a}{p} dx_i, \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} \frac{dx_i}{p}, \int_{b-\epsilon}^{b} \frac{b - x_i}{p} dx_i$$

convergem para algum ϵ positivo, os mesmos resultados, mas as condições de contorno (19), segundo Koshlyakov, devem ser substituídas por outras condições no limite $a\ ou\ b$ em que $p\ (x_i) = 0$ (ou em ambos os limites se $p(a) = p\ (b) = 0$). Ordinariamente, estas são as condições para a finitude das autofunções.

Mesmo se a função $\rho = 0$ em um dos limites a, b, esses resultados podem permanecer válido. Especificamente, Koshlyakov comenta que este é o caso da equação da Equação de Bessel, Equação de Legende, entre outras.

Quando os coeficientes na equação de Sturm-Liouville têm os mesmos valores nos pontos finais do intervalo (a, b) e, em vez de condições da Equação (19), temos a condição de periodicidade mencionada por Koshlyakov:

$$\left[\alpha\frac{\partial\bar{K}}{\partial x_i}+\beta\bar{K}\right]_{x_i\,=\,a} = \left[\alpha\frac{\partial\bar{K}}{\partial x_i}+\beta\bar{K}\right]_{x_i\,=\,b}, \tag{22}$$

Então, resultados da Equação (22) permanecerão válidos, exceto que para cada autovalor normalmente corresponderá não a um, mas a duas autofunções linearmente independentes, que podem ser estendidas como funções periódicas além dos pontos finais do intervalo (a,b). O autor renumera de tal forma que o autovalor λ_a^2 corresponda às autofunções $\bar{K}_{2a-1}(x_i)$ e $\bar{K}_{2a}(x_i)$. Como no caso da Equação (19), as autofunções correspondentes aos diferentes autovalores são mutuamente ortogonais. As funções $\bar{K}_{2a-1}(x_i)$ e $\bar{K}_{2a}(x_i)$ correspondentes ao mesmo autovalor pode, por causa de sua independência inicial, ser sempre escolhidos de tal maneira que sejam mutuamente ortogonais. Então, a Equação (21) ficará satisfeita, com o resultado de que a analogia para esta variante das condições de contorno será mais completa.

Aqui, o autor diz que foi usada a formulação da teoria de Sturm-Liouville em termos de convergência em média e não, por exemplo, em convergência uniforme. Nesse momento, Koshlyakov faz um breve comentário, ele diz que será apresentado o conceito de solução generalizada, e, que só pode ser notado isso porque está sendo usado o conceito de convergência, isso quer dizer que o método desenvolvido abaixo, em geral, incluirá as soluções generalizadas.

Koshlyakov diz que as soluções generalizadas têm o mesmo significado físico que as clássicas. Portanto, se um problema não tiver uma solução clássica, mas tiver uma solução generalizada e se esta solução é única e depende continuamente nas condições dadas, a afirmação do problema permanece correta. Notamos também que, se um problema tiver uma solução clássica única, deve ter uma solução generalizada, que coincide com a clássica.

Vamos retornar à Equação (12) e definir:

$$\bar{K}(x_i,\gamma) = \bar{K}_\gamma(x_i) \tag{23}$$

Então, o núcleo $K(x_i,\gamma)$ do operador direto será uma solução de Equação (7) porque sob a Equação (12), as Equações (7) e (17) são equivalentes. De acordo com Koshlyakov, para mostrar a viabilidade de uso da técnica, é preciso, ainda, calcular a Equação (11). Para isso, de acordo com as Equações (15) e (18), reduzimos essa expressão para a forma:

$$\left|\frac{1}{C_\gamma}p\left(\bar{K}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial\bar{K}}{\partial x_i}u\right)\right|_a^b \tag{24}$$

Ao considerar as condições de contorno não homogênea:

$$\left[\alpha_a \frac{\partial u}{\partial x_i} - \beta_a u\right]_{x_i = a} = \varphi_a \qquad \left[\alpha_b \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta_b u\right]_{x_i = b} = \varphi_b \tag{25}$$

Se $\alpha_a \neq 0$ e $\alpha_b \neq 0$, escolhemos (para construir o núcleo da transformada) um sistema de autofunções que serve para homogeneizar condições de contorno, como segue:

$$\left[\alpha_a \frac{\partial \bar{K}_\gamma}{\partial x_i} - \beta_a \bar{K}_\gamma\right]_{x_i = a} = 0 \qquad \left[\alpha_b \frac{\partial \bar{K}_\gamma}{\partial x_i} + \beta_b \bar{K}_\gamma\right]_{x_i = b} = 0 \tag{26}$$

A Equação (24) assume a forma:

$$\left|\frac{1}{C_\gamma}\left(\frac{1}{\alpha_b} p(b)\varphi_b \bar{K}_\gamma(b) - \frac{1}{\alpha_a} p(a)\varphi_a \bar{K}_\gamma(a)\right)\right| \tag{27}$$

Pode ser computado, uma vez que existem apenas funções conhecidas nele. Se $\alpha_a = 0$, $\alpha_b \neq 0$ e $\beta_a \neq 0$, primeira das Equações (25) pode, sem perda de generalidade, ser escrito na forma $-u = \varphi_a$. Na construção do sistema de autofunções, estabelecemos:

$$\left|\bar{K}_\gamma\right|_{x_i = a} = 0 \quad , \tag{28}$$

A Equação (24) assume a forma:

$$\left|\frac{1}{C_\gamma}\left(\frac{1}{\alpha_b} p(b)\varphi_b \bar{K}_\gamma(b) - p(a)\varphi_a \left(\frac{\partial \bar{K}_\gamma}{\partial x_i}\right)_{x_i = a}\right)\right| \tag{29}$$

De maneira análoga, o autor diz que é possível verificar para os casos de $\alpha_b = 0$ e $\alpha_a = \alpha_b = 0$. As Equações (27) e (29) que são obtidas e podem ser calculadas a partir das condições de contorno (25) do problema. Assim, a Transformação Integral necessária pode ser realizada.

Koshlyakov supõe que a solução do problema em questão é periódica em relação à coordenada x_i com período igual ao intervalo (a, b). Se as funções $\bar{K}_\gamma(x_i)$ também satisfazem esta condição de periodicidade, a expressão (24) desaparecerá, pela condição de periodicidade, e, consequentemente, será conhecida. A partir desses resultados, é possível realizar uma transformação integral em relação à variável x_i, que varia em um intervalo (a, b) e a equação $\mathfrak{M}\mathrm{u} = f$ é transformada para:

$$\mathfrak{M}'\mathrm{u} - \lambda_\gamma \bar{u} = \bar{f} + \bar{N}_a - \bar{N}_b \tag{30}$$

em que $\bar{u}\ e\ \bar{f}$ são a transformadas integral das funções u, f, $\bar{N}_a e\ \bar{N}_b$ são funções cuja forma é determinada pelas condições dadas pela coordenada x_i e no ponto final do intervalo (a, b). Quando as Equações (25) dadas:

$$\bar{N}_a = \begin{cases} \dfrac{1}{C_\gamma \alpha_a} p(a) \bar{K}_\gamma(a) \varphi_a, & se \qquad \alpha_a \neq 0, \\ \dfrac{1}{C_\gamma} p(a) \left.\dfrac{\partial \bar{K}_\gamma}{\partial x_i}\right|_{x_i = a} \varphi_a, & se \qquad \alpha_a = 0 \text{ e } \beta_a = -1 \end{cases}$$

(31)

$$\bar{N}_b = \begin{cases} \dfrac{1}{C_\gamma \alpha_b} p(b) \bar{K}_\gamma(b) \varphi_b, & se \qquad \alpha_b \neq 0, \\ \dfrac{1}{C_\gamma} p(b) \left.\dfrac{\partial \bar{K}_\gamma}{\partial x_i}\right|_{x_i = b} \varphi_b, & se \quad \alpha_b = 0\ e\ \beta_b = -1 \end{cases}$$

Sob a condição de periodicidade com relação a coordenada x_i, temos $\bar{N}_a - \bar{N}_b = 0$.

Finalmente, o autor diz que para determinar a função original u a partir da transformada $\bar{u}$, devemos executar a operação inversa. Para fazer isso, recorremos a função u em uma série:

$$u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_\gamma \bar{K}_\gamma \tag{32}$$

Em termos de um sistema completo de autofunções $\bar{K}_\gamma$ do problema de Sturm-Liouville. Quando multiplicamos a Equação (32) por $\rho \bar{K}_\gamma$e integramos, obtemos, por causa das condições de ortogonalidade dada pela Equação (21):

$$a_\gamma = \frac{1}{C_\gamma} \int_a^b \rho \bar{K}_\gamma \, u dx_i$$

Sendo C_γé uma função do parâmetro γ, definido pela fórmula (21). Se usarmos a função C_γ como um divisor de normalização na Equação (12), notando que a quantidade $\frac{1}{C_\gamma} \rho \bar{K}_\gamma$ é o núcleo $K(x_i, \gamma)$ do operador direto, e assim obtemos:

$$a_\gamma = \int_a^b K(x_i, \gamma)\, u(x_i) dx_i = \bar{u}(\gamma) \tag{33}$$

Seguindo a Equação (32):

$$u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \bar{u}(\gamma)\, \overline{K_{\gamma}} \tag{34}$$

com isso, foi encontrada a função desejada u, utilizando a Transformada Integral para Intervalos Finitos proposta por Koshlyakov.

4.1.4.Transformada Integral Infinita

Nesse item, Koshlyakov mostra o procedimento da Transformada Integral de uma variável que se transforma dentro de limites infinitos. Para isso, o autor considera a fórmula da Integral de Fourier:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) cos\zeta(\xi - x) d\xi = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \tag{35}$$

Em que f é uma função do argumento unidimensional x, definido no eixo real inteiro e satisfazendo certas condições adicionais. Por exemplo, para Koshlyakov é suficiente exigir que a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$$

Converge. Então, a fórmula de Fourier é válida para todos os valores de x cuja vizinhança da função f é de variação de contorno. Além disso, se a função f é contínua no ponto x, o lado direito da fórmula de Fourier é igual a f.

A fórmula integral de Fourier pode ser obtida a partir de uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\vartheta=1}^{\infty} (a_{\vartheta} cos \frac{\pi\vartheta}{\iota} x + b_{\vartheta}\, sen \frac{\pi\vartheta}{\iota} x)$$

Ao passar para o limite conforme o intervalo $(-\iota, \iota)$. Quando é notado que a série de Fourier representa uma expansão de autofunções do problema particular de Sturm-Liouville:

$$u'' + \lambda^2 u = 0\, ; u|_{x=-\iota} = u|_{x=\iota}$$

Koshlyakov comenta que é imprescindível supor que, no caso geral, uma expansão sobre um intervalo finito é possível. Esta suposição é válida sob certas condições. As fórmulas integrais são obtidas e tornam possível aplicar as transformações integrais e excluir os diferenciais em relação as variáveis cujos domínios são intervalos infinitos.

Assim, o autor supõe que a função f é definida no intervalo infinito $0 \leq x < \infty$. É possível estender a definição para o intervalo $-\infty < x \leq 0$. Por exemplo, podemos definir $f(-x) = f\,(x)$ e $f\,(-x) = -f(\,x)$. No primeiro caso,

$$\int_{-\infty}^{0} f(\xi) cos\zeta(\xi - x) d\xi = \int_{0}^{\infty} f(\xi) cos\zeta(\xi + x) d\xi$$

em que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) cos\zeta(\xi - x) d\xi = \int_{0}^{\infty} f(\xi)[cos\zeta(\xi - x) + cos\zeta(\xi + x)] d\xi$$
$$= 2(cos\zeta x) \int_{0}^{\infty} f(\xi) cos\zeta(\xi) d\xi$$

A Fórmula de Fourier da Equação (35) pode ser escrita na forma:

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} cos\zeta x d\zeta \int_{0}^{\infty} f(\xi) cos\zeta(\xi) d\xi = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \tag{36}$$

No segundo caso, quando $f\,(-x) = -f(x)$, Koshlyakov, de maneira semelhante, obtém a fórmula:

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} sen\zeta x d\zeta \int_{0}^{\infty} f(\xi) sen\zeta(\xi) d\xi = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \tag{37}$$

Tanto na Equação (36) quanto na Equação (37) as fórmulas são válidas em todo o intervalo $0 \leq x < \infty$ onde está definida a f dada a extensão par ou ímpar, respectivamente, da função f na metade negativa do eixo real.

O autor agora utiliza a seguinte relação:

$$cos\zeta(\xi - x) = \frac{1}{2} e^{i\zeta(\xi - x)} + \frac{1}{2} e^{-i\zeta(\xi - x)}$$

Para transformar a Equação (35) em:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\zeta\xi} d\xi = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \tag{38}$$

Novamente, Koshlyakov assume que a função f é definida apenas para x não-negativo e vamos estender sua definição para incluir todos os valores negativos de x, definindo

$f\ (x) =\ 0$ para x negativo. Consideramos a função definida por $f\ (x) = e^{-\eta x}$, onde η é um número positivo. A integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)e^{-\eta x}| d\xi,$$

Converge, segundo Koshlyakov, mesmo quando a função $y = f(\xi)$ aumenta exponencialmente (desde que o número η é suficientemente grande). Na equação (38), o autor substitui a função f com a função definida por $f\ (x) = e^{-\eta x}$. Multiplicando ambos os lados por $e^{-\eta x}$, lembrando que $f\ (x)\ =\ 0$ para valores negativos de x, obtemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\eta - i\zeta)x} d\zeta \int_{0}^{\infty} f(\xi)e^{-(\eta - i\zeta)\xi} d\xi = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \quad (x \geq 0)$$

Se fizermos a substituição:

$$(\eta - i\zeta) = \gamma \text{ e } d\zeta = \frac{-d\gamma}{i}$$

obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} e^{\gamma x} d\gamma \int_{0}^{\infty} f(\xi)e^{-\gamma\xi} d\xi = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \qquad (39)$$

Que é chamado, segundo Koshlyakov, de integral de Laplace-Mellin. Se, nesta fórmula, fizermos a substituição:

$$\gamma = -\gamma \text{ e } x = lnx\ e\ \xi = ln\xi \text{ e } \eta = -\eta$$

obtemos a fórmula:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} \frac{d\gamma}{x^{\gamma}} \int_{0}^{\infty} f(\xi)e^{\gamma - 1} d\xi = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]\ (x \geq 0) \qquad (40)$$

Que Koshlyakov denomina de "*integral de Mellin*".

O autor agora considera a função definida por $e^{in\theta}f(x)$, onde n é algum número real inteiro positivo e x e θ são coordenadas polares no plano. Denotando por $g(x_1, x_2)$ as expressões as coordenadas cartesianas $x_1\ e\ x_2$. E, para Koshlyakov, assumindo por simplicidade de cálculo, que a função g é contínua, vamos aplicar a fórmula integral de Fourier Equação (38), tomando a coordenada x_1, como variável de integração, obtemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta_1 x_1} d\zeta_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1; x_2) e^{-\zeta_1 \xi_1} d\xi_1 = g(x_1; x_2)$$

Vamos aplicar a fórmula integral de Fourier em relação à coordenada x_2, em que, depois de algumas manipulações simples, é dada por:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\zeta_1\xi_1+\zeta_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = g(x_1; x_2)$$

Por meio das relações $x_1 = r\, cos\theta, x_2 = r\, sen\theta, \xi_1 = \xi\, cos\theta, \xi_2 = \xi\, sen\theta', \zeta_1 = \zeta\, cos\theta'', \zeta_2 = \zeta\, sen\theta'$, Koshlyakov introduz as coordenadas polares. Ao denominar que $d\xi_1 d\xi_2 = \xi d\xi d\theta', d\zeta_1 d\zeta_2 = \zeta d\zeta d\theta''$, e que, nas coordenadas polares r, θ, a função gé dada pela expressão $e^{in\theta} f(x)$, transformamos a fórmula em:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{\infty} \zeta d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\theta'' \exp[i(r\zeta\, cos(\theta-\theta'))] \int_0^{\infty} \xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' f(\xi) \exp[-i(\xi\zeta\, cos(\theta' - \theta''))] = f(r)$$

Notamos que, no caso geral, isto é, sem assumir que função $g(x_1; x_2)$ é contínua, obtemos, no lado direito desta fórmula, a expressão $\frac{1}{2}[f(r+0)+f(r-0)]$, que, segundo Koshlyakov, será estudado em uma discussão subsequente. Com isso, ele define:

$$\theta' - \theta'' = \frac{1}{2}\pi + \varphi,$$

então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(\xi\zeta\, cos(\theta'-\theta'') - n\theta')]d\theta' = \int_{\frac{-3}{2}\pi-\theta''}^{\frac{1}{2}\pi-\theta''} \exp[i(n\varphi - \xi\zeta sen\varphi)] \exp\left[in(\theta'' + \frac{1}{2}n\pi)\right] d\varphi = \exp\left[sen(\theta'' + \frac{1}{2}\pi)\right] \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(n\varphi - \xi\zeta sen\varphi)]d\varphi$$

Como o integrando é periódico com o período 2π, chegamos novamente aos limites da integração $(-\pi, \pi)$ na última integral. Se, definido:

$$\theta'' - \theta = \psi - \frac{1}{2}\pi$$

obtemos:

$$\exp\left[\frac{1}{2}in\pi\right]\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i(r\zeta\cos(\theta-\theta'')-n\theta)+in\theta'']\,d\theta''=\int_{-\pi}^{\pi}\exp\,[i(n\psi-r\zeta sen\psi)d\psi$$

Koshlyakov substitui as integrais transformadas na fórmula geral e ressalta que, para n maior que $-\frac{1}{2}$, de acordo com a fórmula:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i(n\tau-zsen\tau)]\,d\tau=2\pi J_n(z)$$

onde $J_n(z)$ é a função de Bessel de primeira espécie de ordem n, assim, obtemos a fórmula Integral de Fourier-Bessel, para $\left(x\geq 0, n>-\frac{1}{2}\right)$:

$$\int_0^{\infty}J_n(x\zeta)\,\zeta d\zeta\int_0^{\infty}f(\xi)J_n(\xi\zeta)\xi d\xi=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] \qquad (41)$$

As condições dadas em conexão com a fórmula integral de Fourier são, para o autor, suficientes para a aplicabilidade da fórmula de Fourier-Bessel.

Consideramos as integrais internas nas Equações (36) até (41) como transformações integrais da função f que aparecem no integrando. A integral externa representa o operador inverso, que também é um operador integral, para um intervalo infinito de variação da variável.

Koshlyakov apresenta os operadores que ele classifica como utilizáveis para intervalos infinitos e suas respectivas condições para utilização:

1. Transformada de Fourier:

$$\bar{u}(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)e^{-i\gamma\xi}d\xi \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(\gamma)e^{i\gamma x}d\gamma=u(x) \qquad (42)$$

As condições suficientes para sua aplicação são que a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|(u(x)|dx$$

convirja e que, as funções $u\,(x)$ são contínuas por partes e de variação limitada em um intervalo finito arbitrário.

2. A transformação cosseno de Fourier:

$$\bar{u}(\gamma)=\int_0^{\infty}u(\xi)\cos(\gamma\xi)\,d\xi$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{u}(\gamma)\cos\gamma x\, d\gamma = \begin{cases} u(x) \text{ se } x > 0 \\ u(-x) \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{43}$$

As condições suficientes para sua aplicação são que a integral:

$$\int_0^\infty |(u(x)| dx$$

Convirja e que, para as funções não-negativas x, as funções u são contínuas, por partes e de variação de contorno em um intervalo finito arbitrário.

3. A transformada de seno de Fourier:

$$\bar{u}(\gamma) = \int_0^\infty u(\xi) \operatorname{sen} \gamma\xi\, d\xi$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{u}(\gamma) \operatorname{sen} \gamma x\, d\gamma = \begin{cases} u(x) \text{ se } x > 0 \\ -u(-x) \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{44}$$

As condições de aplicabilidade são as mesmas da transformada cosseno de Fourier.

4. A transformada de Laplace:

$$\bar{u}(\gamma) = \int_0^\infty u(\xi) e^{-\gamma\xi} d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{n-i\infty}^{n+i\infty} \bar{u}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = \begin{cases} u(x) \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{45}$$

As condições suficientes para sua aplicabilidade são que a função u para x positivo seja contínua, em um intervalo finito arbitrário e que exista um número a tal que o produto $u\ (x)$ e e^{-ax} permaneça limitado com x crescendo sem limites. Aqui, precisamos tomar η maior que a para o operador inverso.

5. A transformação de Mellin (para x positivo):

$$\bar{u}(\gamma) = \int_0^\infty u(\xi) \xi^{\gamma-1} d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{n-i\infty}^{n+i\infty} \bar{u}(\gamma) \frac{d\gamma}{x^\gamma} d\gamma = u(x); x > 0 \tag{46}$$

As condições suficientes para sua aplicabilidade são que a função u seja contínua e em um intervalo finito arbitrário de valores positivos de x e que existam números $a > 0, \gamma_1\ e\ \gamma_2$ (com $\gamma_1\ < \gamma_2$) tal que as integrais:

$$\int_0^a |u(\xi)e^{\gamma_1-1}|d\xi \text{ e } \int_a^\infty |u(\xi)e^{\gamma_2-1}|d\xi$$

convirjam. Aqui, para o operador inverso, precisamos tomar $\gamma_1 < \eta < \gamma_2$. Outras condições suficientes para a aplicabilidade da Transformada de Mellin são que existam números inteiros η_1e η_2 com $\eta_1 < \eta_2$ tal que para $\eta_1 < \eta < \eta_2$, a integral:

$$\int_{n-i\infty}^{n+i\infty} |\bar{u}(\gamma)|\, d\gamma$$

Converge e que a função definida por $y = \bar{u}(\eta + ix)$ que é uma função analítica e se aproxima de zero à medida que x se aproxima de $\pm\infty$.

6. A transformada de Hankel, para $x > 0, n > -\frac{1}{2}$:

$$\bar{u}(\gamma) = \int_0^\infty u(\xi)J_n(\xi\gamma)\xi d\xi \text{ e } \int_0^\infty \bar{u}(\gamma)J_n(\gamma x)\gamma d\gamma = u(x); x > 0 \tag{47}$$

As condições para sua aplicabilidade são as mesmas que para a Transformada de Fourier.

Koshlyakov comenta a lista de operadores foi escrito $u(x)$ em vez de $\frac{1}{2}[u(x+0) + u(x-0)]$, por facilidade. Esses operadores encontraram amplas aplicações práticas, mas sem esgotar a lista de operadores integrais que podem ser úteis em algum caso particular.

Com um intervalo infinito, o autor comenta que a escolha do operador integral aplicável para resolver um determinado problema é condicionada pelas mesmas considerações que no caso de um intervalo finito. Em particular, o núcleo do operador deve ser uma solução de Equação (7) tal que a Equação (11) pode ser calculada. Se este núcleo é um dos núcleos que aparecem nas transformações nas Equações (42) até (47), podemos realizar as transformações diretas e inversas pelos métodos fornecidos.

Porém, Koshlyakov também mostra que em alguns casos podemos resolver do mesmo modo que foi feito para intervalos finitos. Com isso, o autor retoma o núcleo $K(x_i, \gamma)$do operador integral direto em relação à variável x_i na forma do produto:

$$\frac{1}{C_\gamma}\rho(x_i)\bar{K}(x_i, \gamma)$$

onde ρ é a função definida pela Equação (16) e C_γ é um divisor de normalização. Como no caso de um operador integral finito, obtemos uma Equação da forma (17) para determinar a função $\overline{K}(x_i, \gamma)$.

A variável de transformação pode, em um intervalo infinito, ser interpretada como uma coordenada espacial ou temporal. No primeiro caso, a escolha da solução da Equação (17) está condicionada as mesmas considerações do caso finito do operador integral.

Koshlyakov considera o segundo caso. Quando a equação para a qual o problema é apresentado é do tipo hiperbólica, as condições dadas contêm ambos os valores da função desconhecida u e os valores de sua derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ no instante inicial. Consequentemente, a Equação (11) pode ser calculada no limite inferior. No que diz respeito ao limite superior, o núcleo do operador pode geralmente ser escolhido de modo que a Equação (11) desapareça nesse ponto. No entanto, quando a equação é do tipo parabólico, as condições dadas contêm apenas o valor da quantidade desconhecida $u(x)$ no instante inicial e não os valores de sua derivada. Entretanto, aqui, somente a primeira derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ da função desconhecida, aparece na equação que estamos estudando, isto é, $a_{ii} = 0$, de modo que a Equação (11) toma a forma:

$$b_i u K \Big|_{t=0}^{\infty}$$

e pode novamente ser calculado no limite inferior. Como no caso anterior, geralmente podemos fazer com que a Equação (11) desapareça no limite superior, como resultado do desaparecimento do k do operador.

4.1.5. Sumário dos resultados

Para finalizar e facilitar o uso dos métodos dos operadores integrais, Koshlyakov fornece um resumo dos resultados básicos e fórmulas.

Para isso, o autor inicia novamente explicando que através do uso de um operador integral, podemos eliminar operações diferenciais em relação à variável x_i, que varia em um intervalo finito (a, b) quando as seguintes condições suficientes são satisfeitas, conforme abaixo:

1. A equação diferencial do problema pode ser representada na forma:

$$f = \mathfrak{M}\mathrm{u} = \mathfrak{M}_i\mathrm{u} + \mathfrak{M}'\mathrm{u} \tag{48}$$

sendo

$$\mathfrak{M}_i\mathrm{u} = a_{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \tag{49}$$

É uma Equação Diferencial com coeficientes dependendo apenas da variável x_i e $\mathfrak{M}'$u é uma Equação Diferencial com coeficientes não dependentes de x_i ou de derivadas em relação a , $a_{ii} \geq 0, c \leq 0, a_{ii}, c, \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i}$ são contínuos no intervalo (a, b), e a integral:

$$\rho(x_i) = \exp\left[-\int \frac{1}{a_{ii}}\left(\frac{da_{ii}}{dx_i} - b_i\right)d\xi\right] \tag{50}$$

Tem uma derivada contínua em relação a x_i no intervalo (a, b); onde há um número não negativo ϵ tal que:

$$\int_a^{a+\epsilon}\frac{x_i - a}{p(x_i)}dx_i;\ \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon}\frac{dx_i}{p(x_i)};\ \int_{b-\epsilon}^{b}\frac{b - x_i}{p(x_i)}dx_i; (\,p(x_i) = a_{ii}\rho) \tag{51}$$

Converge

2. Se as condições de contorno forem dadas entre a variável x_i da transformação, elas devem, para $p(a) \neq 0$ e $p(b) \neq 0$, ser representáveis na forma:

$$\left[\alpha_a\frac{\partial u}{\partial x_i} - \beta_a u\right]_{x_i\,=\,a} = \varphi_a \quad \text{e} \quad \left[\alpha_b\frac{\partial u}{\partial x_i} - \beta_b u\right]_{x_i\,=\,b} = \varphi_b \tag{52}$$

Onde as quantidades $\alpha_b, \alpha_a, \beta_\alpha, \beta_b$ são não-negativas e os termos em cada par não são simultaneamente iguais a zero, e onde $\varphi_a; \varphi_b$ são funções conhecidas das variáveis x_i para $(i \neq j)$.

Para $p\,(a) = 0\ (p\,(b) = 0)$, a condição de contorno para $x_i = a\ (x_i = b)$ deve satisfazer as exigências do teorema sobre expansão nas autofunções correspondentes do problema de Sturm-Liouville. Isso significa que u deve ser finito para $x_i = a\ (x_i = b)$.

3. As condições do problema em termos das variáveis x_j (para $i \neq j$) não contêm derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ em relação à variável x_i da transformação nem coeficientes dependentes de x_i.

4. O núcleo do operador é igual a:

$$K(x_i, \gamma) = \frac{1}{C_\gamma}\rho(x_i)\overline{K}_\gamma(x_i)$$

onde $\overline{K}_\gamma(x_i)$ é a solução para a equação diferencial homogênea:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - q\bar{K} + \lambda^2 \rho \bar{K} = 0 \;\; (q = -cp) \tag{53}$$

satisfazendo:

a) Condições de contorno homogêneas

$$\left[\alpha_a \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - \beta_a \bar{K}\right]_{x_i = a} = 0 \quad \text{e} \quad \left[\alpha_b \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - \beta_b \bar{K}\right]_{x_i = b} = 0 \tag{54}$$

Se as condições de contorno da forma (52) são dadas para a variável x_i;

b) A condição de periodicidade, se a condição de periodicidade for dada para a variável x_i.

c) Para *p(a)=0 e p(b)=0*, a primeira (segunda) condição da Equação (54) deve ser substituída pela condição seguinte à exigência para a expansão em autofunções correspondentes do problema de Sturm-Liouville.

Após verificar que estas condições são satisfeitas, Koshlyakov lista os seguintes passos:

1. A Equação (53) tem soluções não identicamente iguais a zero para valores de λ^2 que formam uma sequência crescente infinita $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots, \lambda_\gamma^2, \dots$ de números positivos λ_γ^2 (os autovalores do problema da Equação (53)). Se, as condições de contorno são dadas em termos da variável x_i, então para cada autovalor λ_γ^2 corresponde apenas uma solução linearmente independente da Equação (53), $K_\gamma(x_i)$, isto é, para um valor fixo da variável x_i, haverá apenas uma expressão para o núcleo:

$$K(x_i, \gamma) = \frac{1}{C_\gamma} \rho(x_i) \bar{K}_\gamma(x_i)$$

Se a condição de periodicidade em relação à variável x_i é dada, então, para cada autovalor λ_η^2, corresponderão, ordinariamente, duas soluções periódicas distintas, independentes e linearmente independentes da Equação (53), que, por uma transformação linear, podem ser feitas mutuamente ortogonais.

É conveniente denotar estas duas soluções por $\bar{K}_{2\eta-1}(x_i)$ e $\bar{K}_{2\eta}(x_i)$. A função $\bar{K}_\gamma(x_i)$ com argumentos integrais γ também aparece no núcleo do operador, mas para cada par de valores de γ (igual a 2η e $2\eta - 1$ para $\eta = 1, 2, 3, \dots$), irá corresponder a um autovalor λ_η^2.

2. A equação do problema $\mathfrak{M}_i \mathrm{u} + \mathfrak{M}' \mathrm{u} = f$ pode, por meio de um operador integral com núcleo:

$$K(x_i,\gamma) = \frac{1}{C_\gamma}\rho(x_i)\bar{K}_\gamma(x_i), \tag{55}$$

onde o divisor de normalização, é igual a:

$$C_\gamma = \int_a^b \rho(x_i)\left[K_\gamma(x_i)\right]^2 dx_i, \tag{56}$$

pode ser reduzido para a forma:

$$\mathfrak{M}'\bar{u} - \lambda_\gamma^2\bar{u} = \bar{f} + \bar{N}_a - \bar{N}_b\ , \tag{57}$$

onde $\bar{u}$ e $\bar{f}$ são as transformadas integrais das funções u e f em relação à variável x_i, λ_γ^2 é o autovalor com número ordinal γ do problema de valor de contorno das Equações (53) e (54). As quantidades $\bar{N}_a$, $\bar{N}_b$ são definidas, quando as condições de contorno na forma da Equação (52) são dadas com relação à variável x_i:

$$\bar{N}_a = \begin{cases} \dfrac{1}{C_\gamma \alpha_a} p(a)\bar{K}_\gamma(a)\varphi_a\ , & se \qquad \alpha_a \neq 0, \\ \dfrac{1}{C_\gamma} p(a)\left.\dfrac{\partial \bar{K}_\gamma}{\partial x_i}\right|_{x_i = a} \varphi_a, & se \qquad \alpha_a = 0; \beta_a = -1 \end{cases} \tag{58}$$

$$\bar{N}_b = \begin{cases} \dfrac{1}{C_\gamma \alpha_b} p(b)\bar{K}_\gamma(b)\varphi_b\ , & se \qquad \alpha_b \neq 0, \\ \dfrac{1}{C_\gamma} p(b)\left.\dfrac{\partial \bar{K}_\gamma}{\partial x_i}\right|_{x_i = b} \varphi_b, & se \qquad \alpha_b = 0; \beta_b = -1 \end{cases} \tag{59}$$

sob a condição de periodicidade com relação a coordenada x_i:

$$\bar{N}_a - \bar{N}_b = 0 \tag{60}$$

3. Condições adicionais em termos das variáveis x_j (para $j \neq i$, que são necessárias para o problema da Equação (57), são obtidas substituindo nas condições correspondentes em relação às variáveis x_j) o problema original para cada uma das funções da variável x_i por sua transformada integral.

4. A solução u do problema original é expressa em termos da solução $\bar{u}_\gamma$ do problema transformado por meio das séries:

$$u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \bar{u}(\gamma)\ \bar{K}_\gamma(x_i) \tag{61}$$

Koshlyakov lista as várias operações que devem ser realizadas no caso de uma Transformada Integral dentro de limites finitos, na seguinte ordem:

(1) Estabelecer a validade de usar um operador no problema em questão.

(2) Calcule (a partir dos valores dos coeficientes a_{ii}, b_i e c da expressão diferencial $\mathfrak{M}_i$u) as funções ρ, p, q.

(3) Encontre a função $K_\gamma(x_i)$.

(4) Encontre o núcleo $\bar{K}_\gamma(x_i)$do operador direto.

(5) Use as Equações (57) até (60) para escrever o problema transformado.

(6) Encontre a solução do problema transformado. (Aqui, em particular, Koshlyakov sugere a aplicação repetida de transformações integrais).

(7) Escreva a solução do problema original na forma da Equação (61).

No caso em que é necessário eliminar operações diferenciais em relação a uma variável que varia dentro de um intervalo infinito, Koshlyakov comenta que esses resultados são modificados seguindo tais passos:

1. O núcleo do operador integral direto deve (até um fator constante) ser igual ao produto:

$$\rho(x_i)\bar{K}(x_i, \gamma) \tag{62}$$

onde $\bar{K}(x_i, \gamma)$ é a solução da equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - q\bar{K} + \gamma^2 \rho \bar{K} = 0 \tag{63}$$

Se o limite inferior a da variação da variável x_i é finito e a condição de contorno é dada em relação à variável x_i, então a função $\bar{K}$ deve, nesse limite, satisfazer a condição homogênea correspondente à condição do problema (isto é, a mesma condição que com relação a variável x_i do problema, mas com o lado direito igual a zero). No limite superior (infinito), a função $\bar{K}$ deve ser tal que a expressão:

$$p(x_i)\left(\bar{K}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} u\right) \tag{64}$$

Seja identicamente nula. Em particular, se é sabido que as funções u e $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ desapareçam no infinito, a função $\overline{K}$ pode ser finita.

Koshlyakov nota que, no caso de operadores integrais dentro de limites infinitos, a quantidade γ assume não uma sequência discreta, mas um continuum de valores.

2. O núcleo do operador integral direto $\rho\overline{K}$ deve pertencer ao conjunto de núcleos para os quais existe um operador inverso. As Equações (42) e (47) somam os operadores integrais diretos e inversos.

3. A equação do problema (como resultado da transformação dentro dos limites infinitos) é reduzida para a forma:

$$\mathfrak{M}'\bar{u} + \gamma^2\bar{u} = \bar{f} + \overline{N}_a \quad (65)$$

A função $\overline{N}_a$ é definida pela Equação (58) é o limite inferior a de variação de x_i é finito, e a condição de contorno é dada para $x_i = a$, é igual à Equação (64) para $x_i = a$, se as condições de Cauchy (condições iniciais) forem dadas.

No caso de transformações integrais dentro de intervalos infinitos, Koshlyakov diz que as operações devem ser realizadas na seguinte ordem:

(1) Mostrar que não há nada para tornar impossível a transformação integral do problema.

(2) Calcule as funções ρ, p, q.

(3) Encontre a solução geral da Equação (63) e use a Equação (62) para determinar a forma geral do núcleo do operador direto.

(4) Começando com o requisito relativo à transformação das condições do problema em questão, escolha um núcleo para o operador direto.

(5) Use as Equações (42) e (47) para encontrar o operador com este núcleo.

(6) Use as Equações (55), (58) e (64) para escrever o problema transformado.

(7) Encontre a solução do problema transformado.

(8) Use a Equação para o operador direto escrever a solução do problema original de forma integral e calcular ou simplificar a relação integral encontrada.

Doravante, na resolução de problemas específicos, Koshlyakov, assume que as Equações dadas nesta seção são conhecidas do leitor e não faz nenhuma referência específica sobre elas.

Para finalizar, Koshlyakov comenta que ao derivar as relações relativas às Transformações Integrais, foram utilizadas algumas suposições como, por exemplo, a de que a ordem de diferenciação e integração poderia ser revertida.

O autor diz que de modo geral, tanto para limites finitos como para infinitos, não podemos, portanto, afirmar que a solução encontrada por meio de Transformações Integrais realmente satisfaz o problema em questão e (em casos duvidosos) torna a verificação da solução necessária.

Esse alerta é dado pois, em alguns casos a solução, pode de alguma forma, não condizer com a real observação do problema físico, portanto, devem ser feitas verificações para sua validação. Essa validação do ponto de vista físico deve ser feita, para não se correr o risco de os resultados obtidos não ter nenhuma conexão com o experimento feito.

4.2. Considerações sobre a proposta de N.S. Koshlyakov

Com toda a descrição acima, vemos a contribuição de Koshlyakov para a construção inicial dessa Transformada Integral, ao mostrar o uso dos operadores integrais para intervalos finitos e infinitos, com núcleos (núcleo) e operadores inversos definidos, bem como toda metodologia para se encontrar cada coeficiente ou função necessária para a técnica. É interessante ressaltar que o método de Koshlyakov é chamado em diversos livros, como nos de Luikov (1972) e Cotta (2012), de Transformada Integral Finita.

Acreditamos que isso se deve ao fato de que a técnica para intervalos finitos se tornou a mais utilizada em problemas de valor de contorno, ou seja, equações diferenciais parciais que possuem condições iniciais para sua resolução. Além de que, após a análise e leitura da proposta de Koshlyakov para intervalos infinitos, vemos que o autor faz uso de manipulações matemáticas e sugere a utilização de transformadas conhecidas, como as de Laplace, Fourier e Hankel, deixando para alguns casos a utilização do método proposto para intervalos infinitos.

As manipulações são fundamentais para a resolução de problemas com esses tipos de intervalos, porém, para problemas que envolvem propagação de calor e fenômenos difusivo/convectivos, os intervalos finitos são mais utilizados, como observaremos nos outros trabalhos estudados nessa pesquisa. Desse modo, os pesquisadores que difundiram a técnica de Koshlyakov, viram na Transformada Integral Finita uma proposta de grande valia para seus estudos.

Veremos nos próximos capítulos que essas ideias apresentadas serviram como base do desenvolvimento da CITT e GITT.

5. DESENVOLVIMENTO DE GRINBERG (1948) E MIKHAILOV (1972)

Neste capítulo, tratamos dos desenvolvimentos das Transformadas Integrais por G.A. Grinberg (1948) e M.D. Mikhailov (1972)

5.1. Desenvolvimento das Transformadas Integrais de G.A. Grinberg (1948)

Por não encontrar a literatura original de G.A. Grinberg - *Selected Problems of Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Effects* de 1948, foi pesquisado livros que fizessem menções e discussões sobre sua contribuição para o desenvolvimento da Transformada Integral. Dentre os estudos encontrados, foi o de A.V. Luikov (1972) que mais detalhou o desenvolvimento realizado por Grinberg.

Luikov em seu livro *Heat and Mass Transfer* de 1972, discute diversos métodos para a resolução de equações diferenciais e problemas de valores de contorno, principalmente em modelos físicos que envolve transferência de calor. Dentre os métodos apresentados, o autor destaca a que ele nomeia de Transformada Integral Finita.

Para Luikov (1972, p. 63, tradução nossa): "As limitações dos métodos da Transformada de Fourier, Hankel e de Laplace, levou à criação de métodos da Transformada Integral Finita" [17]. E, mesmo para problemas que podem ser resolvidos pelos métodos clássicos com a ajuda da série de Fourier ou Fourier-Bessel, a Transformada Integral Finita é um método que pode ser preferível do ponto de vista da simplicidade de abordagem.

Luikov (1972) afirma que após o método da Transformada Integral Finita proposto por Koshlyakov (1936):

$$\bar{f}(p) = \int_a^b K(p,x) f(x) dx \tag{1}$$

A teoria foi mais completamente desenvolvida por G.A. Grinberg (1948). Segundo Luikov (1972, p. 63, tradução nossa): "Após a proposta de Koshlyakov, a teoria foi melhor desenvolvida por Grinberg (1948), que generalizou os métodos para o caso de mudança de

[17] "The scantiness of the Fourier, Hankel, and, to some extent, the Laplace transforms on the one hand, and a crying need for solution of the problems with finite region of the change of variables on the other hand led to creation of finite integral transform methods" (LUIKOV, 1972).

propriedades do meio na direção dessa coordenada ao longo da qual a transformação é executada"[18], principalmente em problemas de cunho físico (eletricidade e magnetismo)

Nesse desenvolvimento detalhado, os núcleos $K(p, x)$ utilizados são as Transformações Integrais Finitas de Fourier e Hankel, escolhidos apropriadamente e com solução encontrada a partir do problema de Sturm-Liouville. Se as autofunções desse problema forem designadas por $X_n(x)$ e a ponderação das funções ρ dentro do intervalo $[a, b]$, então temos:

$$K(p, x) = \rho(x) X_{\,n}(x) \tag{2}$$

Dessa forma, Grinberg faz a sugestão do núcleo e o define a partir dos limites de integração. Luikov comenta que Grinberg diz que se o limite de integração está entre 0 e l com $l \in IR,$ os núcleos do seno finito e cosseno da transformada de Fourier, bem como as transformadas de Hankel (J_v), tem a forma, respectivamente de:

$$K(p, x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\mu x}{l}\right) \quad \text{e} \quad K(p, x) = \cos\left(\frac{\mu x}{l}\right) \tag{3}$$

com condições de contorno do primeiro e do segundo tipo (Condições de Dirichlet) $\mu = n\pi$ e com condições de contorno do terceiro tipo (μ) $que\ s$ão as raízes da equação $\mu \tan \mu = \alpha l / \lambda$ e:

$$K(p, x) = \mathrm{r}\, J_v\left(\frac{\mu x}{l}\right) \tag{4}$$

onde μ é a raiz da equação $J_v(\mu) = 0$ (condição de contorno do primeiro tipo). Com condições de contorno do terceiro tipo μ determinado pela equação:

$$J_v(\mu) = -\frac{\mu\lambda}{\alpha l} J_v'(\mu) \tag{5}$$

A fórmula de inversão é geralmente encontrada com a ajuda da expansão da função em série no que diz respeito às funções ortogonais do problema correspondente de Sturm-Liouville. Assim, as fórmulas de inversão têm a forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[f(p)]_{F,H} X_{\,n}(x)}{\int_a^l \rho(k)\, X_n^2(x) dx} \tag{6}$$

[18] "After the proposed by Koshlyakov. The theory of such integral transforms was more thoroughly developed by Grinberg (1948) who generalized these methods for the case of step-by-step change of properties of the medium in the direction of that coordinate along which the transformation is performed" (LUIKOV, 1972).

Em casos particulares:

(1) Para a transformação do seno:

$$f(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{l} \tag{7}$$

(2) Para a transformação do cosseno:

$$f(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{l} \tag{8}$$

com condições de contorno do segundo tipo; e

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + \left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)^2}{l\left[\mu_n^2 + \left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)^2\right] + \left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)} f_c(\mu_n)\, cos\frac{\mu_n x}{l} \tag{9}$$

com condições de contorno do terceiro tipo, onde a soma converge em relação a todas as raízes positivas da equação:

$$\mu \tan\mu = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

Para a transformada de Hankel,

$$f(x) = \frac{2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} f_H(\mu_n)\frac{J_v(\mu_n \frac{x}{l})}{[J_v'(\mu_n)^2]} \tag{10}$$

em que a soma converge em relação a todas as raízes positivas $J_v(\mu) = 0$ ou

$$f(x) = \frac{1}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} f_H(\mu_n)\frac{\mu_n^2}{\left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)^2 + (\mu_n^2 - v^2)} \cdot \frac{J_v(\mu_n \frac{x}{l})}{[J_v^2(\mu_n)]} \tag{11}$$

a soma converge em relação às raízes positivas de (5).

Com isso, vemos que Grinberg faz diversas propostas de núcleo que possuem a forma da Equação (2). Assim, para superar a dificuldade da escolha do núcleo, Luikov (1972, p. 65, tradução nossa), explica:

> Grinberg (1948) desenvolve um método que, como ideia principal, é a escolha do núcleo da transformada integral $K(p, x)$ realizada em conformidade com a equação

> diferencial e as condições de contorno, isto é, levando em consideração forma geométrica do corpo e da lei de sua interação com o meio físico em questão[19].

isso acontecia por Grinberg trabalhar com fenômenos físicos (eletromagnetismo, por exemplo) em que a interação com o meio era fundamental. Em outras palavras, a transformação da função f é obtida com a ajuda da transformação integral:

$$\bar{f}(p) = \int_0^l K(p, x) f(x) dx \tag{12}$$

Esse procedimento tem sua base física, e a ideia é que qualquer transformação integral tomada em relação às coordenadas espaciais é, do ponto de vista físico, uma média do considerado valor físico. É bastante natural que esta média deva ter em conta não apenas o caráter do processo e a forma do corpo (com a forma da equação diferencial), mas também as condições de contorno.

Para Luikov, a proposta de solução de Grinberg será de especial interesse desde que tal transformação em um sentido físico apresentará a transição da análise dos valores reais das funções consideradas (equação diferencial e condições de contorno) aos valores médios, feitos em conformidade com a situação concreta do problema físico.

Desse modo, vemos através do exposto a influência dos estudos de Koshlyakov nas ideias de Grinberg, que além de ser um grande difusor da Transformada Integral Finita, introduziu ideias que facilitaram sua utilização em importantes problemas físicos.

5.2. Desenvolvimento das Transformadas Integrais de M.D. Mikhailov (1972)

Após o desenvolvimento de Grinberg (1948), os conceitos da Técnica da Transformada Integral Finita já estavam bem documentados em trabalhos científicos como nos livros: *Integral Transform in Mathematical Physics* de C.J. Tranter (1962) e *The Use of Integral Transforms* de I.M. Sneddon (1972).

Foi a obra intitulada: *General Solution of the Heat Equation in Finite Regions*, publicada como artigo em 1972, por M.D. Mikhailov no *International Journal Engineering Sciences,* que deu uma contribuição extremamente significativa para consolidação a técnica.

Segundo Cotta (2012, p. 2, tradução nossa): “A concepção da CITT sofreu uma grande influência das publicações de M.D. Mikhailov, em um período extremamente produtivo. Dentre

[19] “Grinberg (1948) develops a method which, as the main idea, is the choice of the kernel of the integral transform K (p, x) is performed in conformity with the differential equation and boundary conditions, i.e., taking into account the geometric form of the body and the law of its interaction with the surrounding medium” (LUIKOV, 1972).

essas produções, inclui-se o desafio de usar a Transformada Integral Finita para resolver problemas de condução de calor e massa, presente no seu trabalho de 1972”[20].

Mikhailov, no seu trabalho, propõe um núcleo de processamento geral que unificou as várias transformações desenvolvidas até então, obtendo a solução geral para a equação da difusão linear em regiões finitas. Aqui, trouxemos todo o tratamento que entendemos que foi feito nesse artigo.

No resumo do artigo, Mikhailov destaca que utilizando a Transformada Integral Finita, uma solução analítica é encontrada para uma grande classe de problemas de transferência de calor. Esta solução é obtida em forma de séries infinitas e contém termos que o autor denomina de “estáveis” e “transitórios”. No texto também é mostrado que a solução da Equação de Transferência de Calor condutiva obtida por Ölçer (1964) é um caso especial da solução encontrada. Veremos a seguir todas as seções do artigo de M.D. Mikhailov.

5.2.1. Introdução de M.D. Mikhailov (1972)

Na introdução, o autor discute que ao seguir a transformada de Fourier, um imenso número de artigos e livros surgiram com a teoria analítica da transferência de calor, seguindo os princípios de Fourier.

Ao mesmo tempo, os computadores tornaram essas complicadas soluções, acessíveis para aplicações tecnológicas, e com isso, o fluxo de informação neste campo está crescendo mais e mais.

Para Mikhailov, às vezes, é mais fácil resolver e catalogar uma solução de um problema como uma nova. Assim, temos uma justificativa bastante útil para encontrar uma solução geral, que poderia facilmente permitir a obtenção de numerosos casos especiais com aplicação prática. Ölçer (1964) apresentou tais soluções gerais da condução de calor instável em uma região homogênea finita de geometria arbitrária e com condições gerais de contorno, incluindo as condições de contorno do primeiro, segundo e terceiro tipo (com prescrição de temperatura de superfície, fluxo de calor e convecções newtonianas) ou qualquer combinação destes três.

Seguindo no texto, o autor ainda comenta que na época que ele vive, a teoria analítica da transferência de calor está se concentrando em problemas de transferência de calor mais complicados, comparados com os casos condutivos de transferência de calor, por exemplo: Transferência de calor em escoamentos laminares e turbulentos de fluidos newtonianos ou não

[20] “CITT has a very strong influence on the successive publications of Mikhailov along a very productive period of more than one decade, including when he challenged the integral transform method to handle different classes of unified formulations in heat and mass diffusion in this work of the (1972)” (COTTA, 2012).

newtonianos em dutos; transferência de calor pelo fluxo de Hartmenn na região de entrada térmica, etc. E assim, Mikhailov diz que seu trabalho é um desenvolvimento adicional desses resultados em uma forma, que contém em si, como um caso especial, os resultados por ele obtidos.

5.2.2. Apresentação e solução do problema.

O objetivo do estudo de Milhailov será solucionar um problema de valor de contorno, ou seja, resolver a Equação Diferencial Parcial:

$$\varphi(\tau)w(M)\frac{\partial T(M,\tau)}{\partial \tau} = div[(K(M)\ grad\ T(M,\tau)] + [\beta(\tau)w(M) - \rho(M)]T(M,\tau) + P(M,\tau) \tag{1}$$

Em que div é divergente, $grad$ o gradiente, $T(M,\tau)$ é a função com coordenadas M e τ e $\beta, K, \rho, \varphi\ e\ w$ funções dadas na Equação (1), que possui condição inicial:

$$T(M,0) = f_0(M) \tag{2}$$

E condição de contorno geral:

$$A(N)\frac{\partial T(N,\tau)}{\partial n} + B(N)T(N,\tau) = f(N,\tau) \tag{3}$$

Sendo $A, B\ e\ f$ funções dadas na Equação (3). Para iniciar a resolução da Equação (1), Mikhailov comenta que utilizará o problema de Sturm-Liouville:

$$div[K(M)grad\ \psi(M)] + [\mu^2 w(M) - \rho(M)]\psi(M) = 0 \tag{4}$$

$$A(N)\frac{\partial \psi(N)}{\partial n} + B(N)\psi(N) = 0 \tag{5}$$

cuja solução é conhecida. Se $\psi_i(M), \psi_j(M)$ duas autofunções, correspondendo a dois autovalores μ_i, μ_j:

$$\mu_i^2 w(M)\psi_i(M) = \rho(M)\psi_i(M) - div[K(M)grad\ \psi_i(M)] \tag{6}$$

$$\mu_j^2 w(M)\psi_j(M) = \rho(M)\psi_j(M) - div\left[K(M)grad\ \psi_j(M)\right] \tag{7}$$

onde,

$$A(N)\frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n} + B(N)\psi_i(N) = 0 \quad \text{e} \quad A(N)\frac{\partial \psi_j(N)}{\partial n} + B(N)\psi_j(N) = 0 \tag{8}$$

Multiplicando (6) por $\psi_j(M)$, subtraindo do resultado da multiplicação com $\psi_i(M)$ a equação (7) e integrando o resultado obtido, depois de levar em conta o conhecido teorema de Gauss, que transforma a integral do volume em uma integral de superfície, temos:

$$\int_V w(M)\psi_i(M)\psi_j(M)dV = \frac{1}{\mu_i^2 - \mu_j^2}\int_s k(N)\begin{vmatrix} \psi_i(N) & \dfrac{\partial\psi_i(M)}{\partial n} \\ \psi_j(N) & \dfrac{\partial\psi_j(M)}{\partial n} \end{vmatrix} dS \tag{9}$$

Das condições de contorno (8), segue:

$$\begin{vmatrix} \psi_i(N) & \dfrac{\partial\psi_i(M)}{\partial n} \\ \psi_j(N) & \dfrac{\partial\psi_j(M)}{\partial n} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

isto é, as autofunções, correspondendo a diferentes autovalores ($\mu_i \neq \mu_j$) são ortogonais com um peso $w(M)$.

Para resolver a Equação (1) nas Equações (2) e (3) segue a proposta de Transformada Integral Finita de Mikhailov:

$$\tilde{T}_i(\tau) = \int_V w(M)\psi_i(M)T(M,\tau)dV \tag{11}$$

que segundo o Mikhailov será utilizada. É interessante reparar que a transformada sugerida possui um núcleo muito parecido com a sugestão de Grinberg (1948), caracterizado pela inserção da função peso $w(M)$ e as autofunções $\psi_i(M)$. Seguindo, a partir da ortogonalidade das autofunções $\psi_i(M)$, que $T(M,\tau)$ pode ser expandido na série (Operador Inverso) abaixo:

$$T(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{T}_i(\tau) = \int_V G_i\psi_i(M)\tilde{T}_i(\tau) \tag{12}$$

em que,

$$G_i^{-1} = \int_V w(M)\psi_i^2(M)dV \tag{13}$$

E a Equação (12) é chamada de fórmula de inversão para a Equação (11).

Mikhailov realiza a transição de $\mu_i \longrightarrow \mu_j$ na Equação (9). Para a Equação (13) a seguinte expressão é obtida:

$$G_i^{-1} = \frac{1}{2\mu_i}\int_s K(N) \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi(N)}{\partial(\mu)}\right)_{\mu=\mu_i} & \left(\frac{\partial^2\psi(N)}{\partial n\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} \\ \psi_i(N) & \frac{\partial\psi_i(M)}{\partial n} \end{vmatrix} dS \tag{14}$$

Multiplicando a Equação (1) por $\psi_i(M)$, subtraindo do resultado da multiplicação por $T(M,\tau)$ a Equação (4) e integrando o resultado obtido, obtemos, como para determinar a Equação (9):

$$\varphi(\tau)\frac{d\widetilde{T}_i(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 - \beta(\tau)]\widetilde{T}_i(\tau) = \int_s k(N) \begin{vmatrix} \psi_i(N) & \frac{\partial\psi_i(N)}{\partial n} \\ T(N,\tau) & \frac{\partial T(N,\tau)}{\partial n} \end{vmatrix} dS + \int_V \psi_i(M)P(M,\tau)dV \tag{15}$$

Das Equações (3) e (5) $A(N)$ e $B(N)$ são determinados. Depois de somar os resultados, obtemos:

$$\begin{vmatrix} \psi_i(N) & \frac{\partial\psi_i(N)}{\partial n} \\ T(N,\tau) & \frac{\partial T(N,\tau)}{\partial n} \end{vmatrix} = f(N,\tau)\frac{\psi_i(N) - \frac{\partial\psi_i(N)}{\partial n}}{A(N)+B(N)} \tag{16}$$

Após substituir o resultado na Equação (15), $\widetilde{T}_i(\tau)$ é obtido por meio de uma equação diferencial linear de primeira ordem ordinária, que é facilmente resolvida, usando a transformada de acordo com a Equação (11) e a Equação (2). Assim, Mikhailov usa esta solução na fórmula de inversão dada pela Equação (12), e a solução desejada do problema é obtida como segue:

$$T(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\exp\left(\int_0^\tau \frac{\beta(\tau)-\mu_i^2}{\varphi(\tau)}d\tau\right)\left\{\int_V w(M)\psi_i(M)f_0(M)dV + \int_0^\tau \frac{1}{\varphi(\tau)}exp\left(\int_0^\tau \frac{\mu_i^2-\beta(\tau)}{\varphi(\tau)}d\tau\right)[Z_0]\,d\tau\right\} \tag{17}$$

sendo:

$$Z_0 = \int_s K(N) f(N,\tau) \frac{\psi_i(N) - \dfrac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)}\, dS + \int_V \psi_i(N) P(M,\tau) dV$$

Mikhailov atenta que se $\rho(M) = 0$ e $B(N) = 0$ (condições de contorno de segunda ordem), então $\mu = 0$ e ψ_0 =constante, também são autovalores e autofunções do problema Sturm-Liouville nas Equações (4) - (5). Portanto, neste caso, um termo adicional, correspondente ao autovalor-zero, aparece na solução dada pela Equação (17) toma a forma:

$$\begin{aligned} T^*(M,\tau) = {} & \frac{1}{\int_V w(M) dV} \exp\left(\int_0^\tau \frac{\beta(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau\right) \{Z_1\} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \exp\left(\int_0^\tau \frac{\beta(\tau) - \mu_i^2}{\varphi(\tau)} d\tau\right) \{Z_2\} \end{aligned} \tag{18}$$

na qual:

$$\begin{aligned} Z_1 = {} & \int_V w(M) f_0(M) dV \\ & + \int_0^\tau \frac{1}{\varphi(\tau)} \exp\left(-\int_0^\tau \frac{\beta(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau\right) \left[\int_S k(N) \frac{f(N,\tau)}{A(N)} dS + \int_V P(M,\tau) dV\right] d\tau \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z_2 = {} & \int_V w(M) \psi_i(M) f_0(M) dV \\ & + \int_0^\tau \frac{1}{\varphi(\tau)} exp\left(\int_0^\tau \frac{\mu_i^2 - \beta(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau\right) \left[\int_S k(N) f(N,\tau) \frac{\psi_i(N)}{A(N)} dS \right. \\ & \left. + \int_V \psi_i(M) P(M,\tau) dV\right] d\tau \end{aligned}$$

Para Mikhailov, devemos considerar os casos $\varphi(\tau) = 1$ e $\beta(\tau) = 0$, presentes em diversos problemas de calor, onde as Equações (17) e (18) tomam a forma das Equações (19) e (20):

$$T(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \exp(-\mu_i^2 \tau) \left\{ \int_V w(M)\psi_i(M) f_0(M) dV + \int_0^{\tau} \exp(\mu_i^2 \tau)[Z_3] d\tau \right\} \tag{19}$$

em que:

$$Z_3 = \int_S k(N) f(N,\tau) \frac{\psi_i(N) - \frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)} dS + \int_V \psi_i(M) P(M,\tau) dV$$

e

$$T^*(M,\tau) = \frac{1}{\int_V w(M) dV} \{Z_4\} + \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \exp(-\mu_i^2 \tau) \{Z_5\} \tag{20}$$

sendo:

$$Z_4 = \int_V w(M) f_0(M) dV + \int_0^{\tau} \left[\int_S k(N) \frac{f(N,\tau)}{A(N)} dS + \int_V P(M,\tau) dV \right] d\tau$$

e

$$Z_5 = \int_V w(M)\psi_i(M) f_0(M) dV + \int_0^{\tau} \exp(\mu_i^2 \tau) \left[\int_S k(N) f(N,\tau) \frac{\psi_i(N)}{A(N)} dS + \int_V \psi_i(M) P(M,\tau) dV \right] d\tau$$

Mikhailov comenta que as Equações (19) e (20), embora representem soluções exatas, não estão em uma forma conveniente para propósitos práticos. E, que no caso em que as funções dependentes do tempo $f\ (N,\tau)$ e $P\ (M,\tau)$ são dadas pela expansão de séries de Taylor ou por funções exponenciais, as soluções devem ser transformadas em somas de termos quase estáveis e transitórios, prontamente aplicáveis para efeitos de construção de tabelas de convergência numérica. Para isso, Mikhailov comenta que, para uma convergência mais rápida das séries (19) e (20), a integral de tempo contida é integrada por partes em relação ao tempo. Então a solução da Equação (19) se torna:

$$T(M,\tau) = T_0(M,\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \exp(-\mu_i^2 \tau) \left\{ \int_V w(M)\psi_i(M) f_0(M) dV - \frac{1}{\mu_i^2}[Z_6] - \frac{1}{\mu_i^2} \int_0^{\tau} \exp\,(\mu_i^2 \tau)[Z_7] d\tau \right\} \tag{21}$$

onde:

$$Z_6 = \int_S \quad k(N)f(N,0)\frac{\psi_i(N) - \dfrac{\partial\psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)}dS + \int_V \psi_i(M)P(M,0)dV$$

e

$$Z_7 = \int_S k(N)\frac{\partial f(N,\tau)}{\partial\tau}\frac{\psi_i(N) - \dfrac{\partial\psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)}dS + \int_V \psi_i(M)\frac{\partial P(M,\tau)}{\partial\tau}dV$$

sendo,

$$T_0(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\frac{1}{\mu_i^2}[Z_8] \tag{22}$$

na qual:

$$Z_8 = \int_S k(N)f(N,\tau)\frac{\psi_i(N) - \dfrac{\partial\psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)}dS + \int_V \psi_i(M)P(M,\tau)dV$$

Chamado de acordo com Ölçer (1964), de solução *pseudo-estável de ordem-zero*.

Mikhailov diz que é fácil mostrar que a Equação (22) é uma solução para a equação diferencial:

$$div\,[k(M)grad\,T_0(M,\tau)] - \rho(M)T_0(M,\tau) + P(M,\tau) = 0 \tag{23}$$

na condição de contorno:

$$A(N)\frac{\partial T_i(N,\tau)}{\partial n} + B(N)T_0(N,\tau) = f(N,\tau) \tag{24}$$

De fato, depois de multiplicar Equação (23) por $\psi_i(M)$ e subtrair da Equação (4) multiplicada por $T_0(M,\tau)$, o resultado obtido é integrado usando a Transformada Integral Finita (11) e, como na Equação (15), obtém-se:

$$\tilde{T}_{0i} = \frac{1}{\mu_i^2}\left[\int_S k(N)f(N,\tau)\frac{\psi_i(N) - \dfrac{\partial\psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)}dS + \int_V \psi_i(M)P(M,\tau)dV\right] \tag{25}$$

Substituindo a Equação (25) na fórmula de inversão da Equação (12) chegamos à Equação (22).

Portanto, Mikhailov comenta que a solução pseudo-estável de ordem zero pode ser obtida resolvendo a diretamente a Equação (23) na condição de contorno da Equação (24).

A Equação (20), válida na condição de contorno de segunda ordem, após a integração por partes da integral do tempo contida, pode ser escrito, como na Equação (21), na forma:

$$T^*(M,\tau) = T_0^*(M,\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\exp(-\mu_i^2\tau)\left\{\int_V w(M)\psi_i(M)f_0(M)dV - \frac{1}{\mu_i^2}\int_0^{\tau}\exp(\mu_i^2\tau)\,[Z_9]d\tau - \frac{1}{\mu_i^2}[Z_{10}] + \frac{1}{\int_V w(M)dV}\{Z_{11}\}d\tau\right\} \tag{26}$$

sendo:

$$Z_9 = \int_S k(N)\frac{\partial f(N,\tau)}{\partial\tau}\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS + \int_V \psi_i(M)\frac{\partial P(M,\tau)}{\partial\tau}dV$$

e

$$Z_{10} = \int_S k(N)f(N,0)\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS + \int_V \psi_i(M)P(M,0)dV$$

e

$$Z_{11} = \int_V w(M)f_0(M)dV + \int_0^{\tau}\left[\int_S k(N)\frac{f(N,\tau)}{A(N)}dS\right] + \int_V P(M,\tau)dV$$

onde,

$$T_0^*(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\frac{1}{\mu_i^2}[Z_{12}] \tag{27}$$

em que

$$Z_{12} = \int_S k(N)f(N,\tau)\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS + \int_V P(M,\tau)\psi_i(M)dV$$

É a solução pseudo-estável de ordem zero.

Para o caso discutido: $\rho(M) = 0$ e $B(N) = 0$, isto é, $\frac{\partial\psi_i(N)}{\partial n} = 0$, obtemos:

$$\int_V w(M)\psi_i(M)dV = -\frac{1}{\mu_i^2}\int_S K(N)\frac{\partial\psi_i(N)}{\partial n}dS \tag{28}$$

Levando em conta a Equação (28), Mikhailov diz que depois de multiplicar ambas as partes da Equação (27) por $w(M)$ e integrando com o volume, obtemos a seguinte condição, que é atendida pela solução pseudo-estável de ordem zero em condição de contorno de segunda ordem:

$$\int_V w(M)T_0^*(M,\tau)dV = 0 \tag{29}$$

Pode ser mostrado, como na Equação (22), que a Equação (27) é uma solução para a equação diferencial:

$$\begin{gathered}\frac{w(M)}{\int_V w(M)dV}\left[\int_S k(N)\frac{f(N,\tau)}{A(N)}dS + \int_V P(M,\tau)dV\right] \\ = div[k(M)grad\, T_0^*(M,\tau)] + P(M,\tau)\end{gathered} \tag{30}$$

nas condições da Equação (29):

$$A(N)\frac{\partial T_0^*(N,\tau)}{\partial n} = f(N,\tau) \tag{31}$$

Portanto, Mikhailov comenta que a solução pseudo-estável de ordem zero $T_0^*(M,\tau)$ pode ser obtida solucionando diretamente a Equação (30) nas condições das Equações (29) e (31).

As soluções de ordem zero obtidas nas Equações (21) e (26) são particularmente convenientes quando as funções f e P não são funções do tempo.

5.2.3. Soluções de ordem superior

Para esse item, Mikhailov propõe uma convergência ainda mais rápida das séries (19) e (20), que é feita com a integral do tempo contida, onde é q-vezes integrada por partes em relação ao tempo.

Para isso, a Equação (19) pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}T(M,\tau) = \sum_{m=0}^{q} T_m(M,\tau) \\ + \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\exp(-\mu_i^2\tau)\Bigg\{\int_V w(M)\psi_i(M)f_0(M)dV \\ - \sum_{m=0}^{q}\frac{(-1)^m}{\mu_i^{2(m+1)}}[Z_{13}] + \frac{(-1)^{q+1}}{\mu_i^{2(q+1)}}\int_0^{\tau}\exp(\mu_i^2\tau)Z_{14}d\tau\Bigg\}\end{aligned} \tag{32}$$

sendo,

$$Z_{13} = \int_S K(N)\frac{\partial^m f(N,0)}{\partial\tau^m}\frac{\psi_i(N) - \dfrac{\partial\psi_i(N)}{\partial n}}{A(N)+B(N)}dS + \int_V \psi_i(M)\frac{\partial^m P(M,0)}{\partial\tau^m}dV$$

e

$$Z_{14} = \int_S k(N) \frac{\partial^{q+1} f(N,\tau)}{\partial \tau^{q+1}} \frac{\psi_i(N) - \frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)} dS + \int_V \psi_i(M) \frac{\partial^{q+1} P(M,\tau)}{\partial \tau^{q+1}} dV$$

onde,

$$T_m(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \frac{(-1)^m}{\mu_i^{2(m+1)}} \left[\int_S k(N) \frac{\partial^m f(N,\tau)}{\partial \tau^m} \frac{\psi_i(N) - \frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)} dS + \int_V \psi_i(M) \frac{\partial^m P(M,\tau)}{\partial \tau^m} dV \right] \tag{33}$$

É chamado de acordo com a solução de Ölçer (1964) de pseudo-estável de ordem m. Segundo Mikhailov, pode ser mostrado que a Equação (33) é uma solução (quando $m \neq 0$) da equação diferencial:

$$w(M) \frac{\partial T_{m-1}(M,\tau)}{\partial \tau} = div[k(M) grad\, T_m(M,\tau)] - \rho(M) T_m(M,\tau) \tag{34}$$

Na condição de contorno:

$$A(N) \frac{\partial T_m(N,\tau)}{\partial n} + B(N) T_m(N,\tau) = 0 \tag{35}$$

De fato, depois de multiplicar a Equação (34) por $\psi_i(M)$ e subtrair da Equação (4) multiplicada por $T_m(M,\tau)$ o resultado obtido é integrado usando a Transformada Integral Finita da Equação (11) e, como na Equação (15), chegamos:

$$\frac{d\tilde{T}_{m-1,i}(\tau)}{d\tau} + \mu_i^2 \tilde{T}_{m,i}(\tau) = 0 \tag{36}$$

Considerando a Equação (25), a Equação (36) pode ser escrita na forma:

$$\tilde{T}_{m,i}(\tau) = \frac{(-1)^m}{\mu_i^{2(m+1)}} \left[\int_S K(N) \frac{\partial^m f(N,\tau)}{\partial \tau^m} \frac{\psi_i(N) - \frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)} dS + \int_V \psi_i(M) \frac{\partial^m P(M,\tau)}{\partial \tau^m} dV \right] \tag{37}$$

Depois de substituir a Equação (37) na fórmula de inversão dada pela Equação (12), Mikhailov mostra que chegamos à Equação (33). Portanto, a solução de ordem m pseudo-estável pode ser obtida ao resolver diretamente o sistema das Equações (34) - (35). A Equação (20), válida na condição de contorno de segunda ordem, depois de integrar por partes a integral de tempo q-vezes, pode ser escrita na forma:

$$T(M,\tau) = \frac{1}{\int_V w(M)dV}\{Z_{15}\}$$
$$+\sum_{m=0}^{q} T_m^*(M,\tau)$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\exp(-\mu_i^2)\ \ X\ \ \left\{\int_V w(M)\psi_i(M)f_0(M)dV\right. \tag{38}$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\mu_i^{2(m+1)}}[Z_{16}] + \frac{(-1)^{q+1}}{\mu_i^{2(q+1)}}\int_0^{\tau}\exp(\,\mu_i^2\tau)[Z_{17}]\,d\tau\right\}$$

onde:

$$Z_{15} = \int_V w(M)f_0(M)dV + \int_0^{\tau}\left[\int_S k(N)\frac{f(N,\tau)}{A(N)}dS + \int_V P(M,\tau)dV\right]d\tau$$

e

$$Z_{16} = \int_S K(N)\frac{\partial^m f(N,0)}{\partial\tau^m}\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS + \int_V \psi_i(M)\frac{\partial^m P(M,0)}{\partial\tau^m}dV$$

e

$$Z_{17} = \int_S k(N)\frac{\partial^{q+1} f(N,\tau)}{\partial\tau^{q+1}}\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS + \int_V \psi_i(M)\frac{\partial^{q+1} P(M,\tau)}{\partial\tau^{q+1}}dV$$

na qual,

$$T_m^*(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\frac{(-1)^{m+1}}{\mu_i^{2(m+1)}}\left[\int_S K(N)\frac{\partial^m f(N,\tau)}{\partial\tau^m}\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS\right. \tag{39}$$
$$\left.+\int_V \psi_i(M)\frac{\partial^m P(M,\tau)}{\partial\tau^m}dV\right]$$

é a solução pseudo-estável de ordem m em condições de contorno de segunda ordem. Pode ser mostrado, segundo Mijhailov, como para a Equação (37), que a Equação (39) é uma solução para as equações diferenciais:

$$w(M)\frac{\partial T_{m-1}^*(M,\tau)}{\partial\tau} = div[k(M)grad\,T_m^*(M,\tau)] \tag{40}$$

nas condições

$$\frac{\partial T_m(N,\tau)}{\partial n} = 0 \text{ e } \int_V w(M) T_m(M,\tau) dV = 0 \tag{41}$$

Portanto, Mikhailov mostra que a solução pseudo-estável $T_m^*(M,\tau)$ pode ser encontrada resolvendo diretamente Equação (40) nas condições da Equação (41).

A solução das Equações (32) e (38) são particularmente convenientes quando $f(N,\tau)$ e $P(M,\tau)$ podem ser apresentados como polinômios de ordem-q do tempo. Motivo do estudo do próximo item de Mikhailov.

5.2.4. Funções Exponenciais $f(N,\tau)$ e $P(M,\tau)$

Mikhailov estuda nessa seção o caso:

$$f(N,\tau) = f(N)\exp(-d_1\tau) \quad \text{e} \quad P(M,\tau) = P(M)\exp(-d_2\tau) \tag{42}$$

introduzindo estas expressões na Equação (19), obtemos:

$$T(M,\tau) = T_f(M)\exp(-d_1\tau) + T_p(M)\exp(-d_2\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M)\exp(-\mu_i^2\tau)\, X\,\{Z_{18}\} \tag{43}$$

onde:

$$Z_{18} = \int_V w(M)\psi_i(M) f_0(M) dV - \frac{1}{\mu_i^2 - d_1}\int_S k(N) f(N) \frac{\psi_i(N) - \frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)} dS - \frac{1}{\mu_i^2 - d_2}\int_V \psi_i(M) P(M) dV$$

sendo,

$$T_f(M) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \frac{1}{\mu_i^2 - d_1}\int_S k(N) f(N) \frac{\psi_i(N) - \frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)} dS \tag{44}$$

e

$$T_p(M) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \frac{1}{\mu_i^2 - d_2}\int_V \psi_i(M) P(M) dV \tag{45}$$

Para Mikhailov, pode ser mostrado que a Equação (44) é uma solução para a equação diferencial:

$$div\left[K(M) grad\, T_f(M)\right] + d_1 w(M)\, T_f(M) = 0 \tag{46}$$

na condição de contorno:

$$A(N)\frac{\partial T_f(N)}{\partial n} + B(N)T_f(N) = f(N) \tag{47}$$

analogamente, a Equação (45) representa a solução para a equação diferencial:

$$div\left[K(M) grad\, T_p(M)\right] + d_2 w(M)\, T_p(M) + P(M) = 0 \tag{48}$$

na condição de contorno:

$$A(N)\frac{\partial T_p(N)}{\partial n} + B(N)T_p(N) = 0 \tag{49}$$

portanto, $T_f(M)$ e $T_p(M)$ podem ser obtidos resolvendo diretamente os sistemas de Equações (46) - (47) e (48) - (49), respectivamente. Mikhailov introduz as Equação (42) na Equação (20), válida para a condição e contorno de segunda ordem, e assim, obtemos:

$$\begin{aligned} T^*(M,\tau) = {} & T_f^*(M)\exp(-d_1\tau) \\ & + T_p^*(M)\exp(-d_2\tau) + \frac{1}{\int_V w(M)dV}\; X\,\{Z_{19}\} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\exp(-\mu_i^2\tau)\,\{Z_{20}\} \end{aligned} \tag{50}$$

em que:

$$\begin{aligned} Z_{19} = {} & \int_V w(M)f_0(M)dV + \frac{1-\exp\,(-d_1\tau)}{d_1}\int_S k(N)\frac{f(N)}{A(N)}dS \\ & + \frac{1-\exp\,(-d_2\tau)}{d_2}\int_V P(M)dV \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z_{20} = {} & \int_V w(M)\psi_i(M)f_0(M)dV \\ & - \frac{1}{\mu_i^2 - d_1}\int_S k(N)f(N)\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS - \frac{1}{\mu_i^2 - d_2}\int_V \psi_i(M)P(M)dV \end{aligned}$$

onde,

$$T_f^*(M) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(M)\frac{1}{\mu_i^2 - d_1}\int_S k(N)f(N)\frac{\psi_i(N)}{A(N)}dS \tag{51}$$

e

$$T_p^*(M) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \frac{1}{\mu_i^2 - d_2} \int_V \psi_i(M) P(M) dV \tag{52}$$

Pode ser mostrado que a Equação (51) é uma solução para a equação diferencial:

$$\frac{w(M)}{\int_V w(M) dV} \int_S k(N) \frac{f(N)}{A(N)} dS = div\left[K(M) gradT_f(M)\right] + d_1 w(M) T_f^*(M) \tag{53}$$

nas condições de contorno

$$\frac{\partial T_f^*(M)}{\partial n} = \frac{f(N)}{A(N)} \quad \text{e} \quad \int_V w(M) T_f^*(M) dV = 0 \tag{54}$$

Analogamente, a Equação (52) representa a solução para a equação diferencial:

$$\frac{w(M)}{\int_w w(M) dV} \int_S P(M) dV = div\left[K(M) gradT_p^*(M)\right] + d_2 w(M) T_p^*(M) + P(M) \tag{55}$$

Nas condições de contorno:

$$\frac{\partial T_p^*(N)}{\partial n} = 0 \quad \text{e} \quad \int_V w(M) T_p^*(M) dV = 0 \tag{56}$$

Por fim, Mikhailov destaca que $T_f^*(M)$ e $T_p^*(M)$ pode ser obtido resolvendo diretamente os sistemas das Equação (53) - (54) e (55) – (56), respectivamente.

5.2.5. Solução unidimensional de $f(N,\tau)$ e $P(M,\tau)$ independente do tempo

Como uma aplicação da teoria geral, Mikhailov considera o caso unidimensional, descrito pela equação diferencial:

$$w(x) \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x) \frac{\partial (x,\tau)}{\partial x}\right] + P(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1 \text{ e } \tau \geq 0 \tag{57}$$

Nas condições:

$$T(x,0) = f_0(x), \tag{58}$$

$$A_0 \frac{\partial T(x_0,\tau)}{\partial x} + B_0 T(x_0,\tau) = b_0; \;\; A_1 \frac{\partial T(x_1,\tau)}{\partial x} + B_1 T(x_1,\tau) = b_1 \tag{59}$$

As Equações (4) e (5), que definem os autovalores e as autofunções, obtemos a forma:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d\psi_i(x)}{dx}\right] + \mu_i^2 w(x)\psi_i(x) = 0 \,, \tag{60}$$

$$A_0 \frac{d\psi_i(x)}{dx} + B_0\psi_i(x_0) = 0; \; A_1 \frac{d\psi_i(x)}{dx} + B_1\psi_i(x_1) = 0 \tag{61}$$

Mikhailov diz que diferentes métodos são descritos para resolver a Equação (61), chamado de problema unidimensional de Sturm-Liouville.

A Equação (14) será considerada para o caso:

$$G_i^{-1} = \frac{1}{2\mu_i}\left\{k(x_1)\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi(x_1)}{\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} & \left(\frac{\partial^2\psi(x_1)}{\partial x\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} \\ \psi_i(x_1) & \frac{\partial\psi_i(x_1)}{\partial x} \end{vmatrix} - k(x_0)\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi(x_0)}{\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} & \left(\frac{\partial^2\psi(x_0)}{\partial x\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} \\ \psi_i(x_0) & \frac{\partial\psi_i(x_0)}{\partial x} \end{vmatrix}\right\} \tag{62}$$

A solução da Equação (21) para o caso unidimensional será:

$$T(x,\tau) = T_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i\psi_i(x)\exp(-\mu_i^2\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1} w(x)\psi_i(x)f_0(x)dx - \frac{1}{\mu_i^2}[Z_{21}]\right\} \tag{63}$$

em que:

$$Z_{21} = b_1 k(x_1)\frac{\psi_i(x_1) - \frac{\partial\psi_i(x_1)}{\partial x}}{A_1 + B_1} - b_0 k(x_0)\frac{\psi_i(x_0) - \frac{\partial\psi_i(x_0)}{\partial x}}{A_0 + B_0} + \int_{x_0}^{x_1}\psi_i(x)P(x)dx$$

onde a solução pseudo-estável de ordem zero $T_0(x)$ é obtida resolvendo diretamente:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dT_0(x)}{dx}\right] + P(x) = 0 \qquad (64)$$

Nas condições:

$$A_0\frac{dT_0(x_0)}{dx} + B_0T_0(x_0) = b_0 \text{ e } A_1\frac{dT_0(x)}{dx} + B_1T_0(x_1) = b_1 \qquad (65)$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} T_0(x) = {} & \left\{\begin{vmatrix} b_0k(x_0) & A_0 \\ b_1k(x_1) & A_1 \end{vmatrix} + k(x_0)k(x_1)[Z_{22}] \right. \\ & \left. + \left[B_0k(x_0)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{k(x)} - A_0\right][Z_{23}]\right\} X \{Z_{24}\}^{-1} \\ & - \int_{x_0}^{x}\frac{1}{k(x)}\left(\int_{x_0}^{x}P(x)dx\right)dx \end{aligned} \qquad (66)$$

dado:

$$Z_{22} = b_0B_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{k(x)} + \begin{vmatrix} B_0 & b_0 \\ B_1 & b_1 \end{vmatrix}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{k(x)}$$

e

$$Z_{23} = A_1\int_{x_0}^{x_1}P(x)dx + B_1k(x_1)\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{k(x)}\left(\int_{x_0}^{x}P(x)dx\right)dx$$

e

$$Z_{24} = \begin{vmatrix} b_0k(x_0) & A_0 \\ b_1k(x_1) & A_1 \end{vmatrix} + B_0B_1k(x_0)k(x_1)\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dx}{k(X)}\right)$$

A solução da Equação (26), válida para $B_0 = B_1 = 0$, para o caso unidimensional:

$$\begin{aligned} T^*(x,\tau) = {} & T_0^*(x) + \frac{1}{\int_{x_0}^{x_1}w(x)dx}\left\{\int_{x_0}^{x_1}w(x)f_0(x)dx + \tau[Z_{25}]\right\} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty}G_i\psi_i(x)exp(-\mu_i^2\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}w(x)\psi_i(x)f_0(x)dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mu_i^2}[Z_{26}]\right\} \end{aligned} \qquad (67)$$

onde:

$$Z_{25} = k(x_1)\frac{b_1}{A_1} - k(x_0)\frac{b_0}{A_0} + \int_{x_0}^{x_1}P(x)dx$$

e

$$Z_{26} = k(x_1)b_1 \frac{\psi_i(x_1)}{A_1} - k(x_0)b_0 \frac{\psi_i(x_0)}{A_0} \int_{x_0}^{x_1} \psi_i(x)P(x)dx$$

Onde a solução pseudo-estável de condições de contorno de ordem-zero $T_0^*(x)$ é obtida, segundo Mikhailov, resolvendo diretamente:

$$\frac{w(x)}{\int_{x_0}^{x_1} w(x)dx}\left[k(x_1)\frac{b_1}{A_1} - k(x_0)\frac{b_0}{A_0} + \int_{x_0}^{x_1} P(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dT_0^*(x)}{dx}\right] + P(x) \tag{68}$$

nas condições

$$A_0\frac{dT_0^*(x_0)}{dx} = b_0 \text{ e } A_1\frac{dT_0^*(x_1)}{dx} = b_1 \text{ e } \int_{x_0}^{x_1} w(x)T_0^*(x)dx = 0 \tag{69}$$

com resolução:

$$\begin{aligned} T^*(x,\tau) = {} & T_0^*(x) \\ & + \frac{1}{\int_{x_0}^{x_1} w(x)dx}\left\{[Z_{27}][Z_{28}]\right. \\ & + \int_{x_0}^{x_1} w(x)(Z_{29})dx \\ & \left. - k(x_0)\frac{b_0}{A_0}\int_{x_0}^{x_1} w(x)\left(\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{k(x)}\right)dx\right\} + Z_{30} \end{aligned} \tag{70}$$

na qual:

$$Z_{27} = k(x_1)\frac{b_1}{A_1} - k(x_0)\frac{b_0}{A_0} + \int_{x_0}^{x_1} P(x)dx$$

e

$$Z_{28} = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{k(x)}\left(\int_{x_0}^{x} w(x)dx\right)dx - \frac{\int_{x_0}^{x} w(x)\left(\int_{x_0}^{x}\frac{1}{k(x)}\left[\int_{x_0}^{x} w(x)dx\right]dx\right)dx}{\int_{x_0}^{x_1} w(x)dx}$$

e

$$Z_{29} = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{k(x)}\left(\int_{x_0}^{x} P(x)dx\right)dx$$

e

$$Z_{30} = k(x_0)\frac{b_0}{A_0}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{k(x)} - \int_{x_0}^{x}\frac{1}{k(x)}\left(\int_{x_0}^{x} P(x)dx\right)dx$$

5.2.6 Conclusões de M.D. Mikhailov

Na conclusão, Mikhailov diz que o problema tratado por Ölçer (1964) se faz um caso especial do problema geral apresentado nesse estudo. Para obtermos as soluções de Ölçer, é suficiente as seguintes condições: $\varphi(\tau) = 1, w(M) = 1,\ k(M) = 1,\ \beta(\tau) = 0,\ \rho(M) = 0, M = P, \tau = kt,\ P(M,\tau) = \frac{Q(P,t)}{k}$.

Desse modo, o autor diz que é evidente que, pelo uso dos resultados obtidos aqui, de modo mais complicado, comparado com casos condutivos de transferência de calor, podem ser resolvidos e verificados com as soluções conhecidas da literatura.

5.3. Considerações sobre as contribuições de M.D. Mikhailov

Após a leitura, podemos perceber que, Mikhailov ao utilizar as ideias da Transformada Integral Finita de Koshlyakov (1936), com um núcleo de transformada próximo a sugestão de Grinberg (1948), resolve um problema de condução de calor que era de grande importância à época, e assim, propõe uma evolução que será de especial interesse para os pesquisadores de fenômenos difusivos.

As soluções propostas pelo autor destacam a versatilidade da técnica, que se mostrou eficaz ao encontrar soluções para ordem-zero e até para casos gerais de ordem m, que segundo o autor, são importantes para a rápida convergência das séries e são chamadas de soluções pseudo-estáveis. É interessante notar a preocupação numérica de Mikhailov, que nos estudos anteriores aqui apresentados não era tão explícito, e que será bem mais ampliado nos desenvolvimentos futuros.

A contribuição de Mikhailov faz com que muitos estudiosos, preocupados em encontrar a solução não somente numérica de sua EDP, utilizem sua proposta para encontrar a solução analítica. Para muitos físicos e matemáticos, encontrar essa solução aumenta a sensibilidade do problema físico em questão, sendo mais fiel a realidade do experimento.

Cabe ressaltar que essa proposta foi base do texto de Özisik e Mikhailov (1984) e das unificações que geraram a CITT. Esse fato ficará evidente ao mostrarmos o desenvolvimento das soluções dos problemas propostos.

6. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

Neste capítulo, mostramos a Técnica da Transformada Integral Generalizada por M. Necati Özisik e R.L. Murray (1974).

6.1. Transformada Integral Generalizada por Özisik e Murray (1974)

A partir dos diversos estudos e aplicações encontradas, o Prof. Renato Machado Cotta, no seu livro *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow* de 1993, destaca que o desenvolvimento de técnicas de solução para os sistemas diferenciais parciais que governam os fenômenos de difusão-convecção se tornaram um campo de pesquisa bem definido, sendo de grande interesse nos contextos da matemática aplicada e das ciências físicas, fornecendo continuamente feedbacks interessantes para ambas as áreas.

Esse livro será muito utilizado a partir desse momento, pois ele nos traz informações históricas relevantes sobre a CITT, GITT e a nomenclatura da técnica. Isso se deve ao fato de o professor Renato Cotta estar presente na concepção da CITT e publicar diversos trabalhos que a utilizam. Algumas particularidades de Cotta com a CITT serão mostradas na entrevista que tivemos ao longo dessa pesquisa, e que está brevemente relatada na última seção do capítulo dedicado a descrição da técnica.

E assim, dentro deste contexto, Cotta (1993) destaca o surgimento da Técnica da Transformada Integral Generalizada – (GITT - *Generalized Integral Transforms Technique*). A técnica clássica, com essa nomenclatura e sigla propostas e amplamente utilizadas a partir das publicações do professor Renato Machado Cotta: *Diffusion in Media with Prescribed Moving Boundaries: Application to Metals Oxidation at High Temperatures* de 1986, no texto escrito juntamente com Özisik, *Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature,* em 1986, e principalmente no livro já citado, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow,* de 1993. Essas informações foram ratificadas após a entrevista com o professor Cotta.

Os princípios básicos que estão por trás da transformação integral consiste em (depois de encontrar o problema auxiliar de autovalor) transformar a equação diferencial parcial original em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias que pode ser prontamente resolvido.

Cotta (1993) menciona que tal técnica aparece pela primeira vez de maneira sistemática no pioneiro trabalho de Özisik e Murray (1974), em conexão com condições de contorno que se tornam aplicáveis em condução de calor ou de difusão de massa.

Com isso, trouxemos nesse capítulo, todo desenvolvimento do artigo de 1974 de M.N. Necati Özisik e R.L. Murray, intitulado: *On the Solution of Linear Diffusion Problems With Variable Boundary Condition Parameters*, publicado no *Journal of the Heat Transfer*.

6.1.1. Introdução de Özisik e Murray (1974)

Na introdução, os autores comentam que uma grande classe de problemas de valor limite de condução de calor transitória e estável ou difusão de massa podem ser resolvidos pela aplicação dos métodos clássicos de solução descritos em várias referências, como Morse e Feshbach (1953) e Carslaw (1959), ou, podem ser resolvidos de forma mais sistemática pela aplicação da Transformada Integral Finita descrita por Sneddon (1951) e Tranter (1958). Esses últimos, segundo Cotta (2012), foram os grandes transmissores das ideias de Koshlyakov (1936).

No entanto, Özisik e Murray, percebem uma lacuna na literatura no que diz respeito a solução de uma classe de problemas de valor limite envolvendo parâmetros de condição de contorno que variam com o tempo.

Exemplos destes problemas aparecem em várias situações das físicas particuladas, tais como:

(a) Condução térmica transitória em meios homogêneos finitos sujeita a condição de contorno do tipo convectiva com tempo e coeficiente de transferência de calor dependente do espaço. (b) Termização em meios finitos com uma dependência de energia e condição de contorno associada a absorvedores de nêutrons típicos.

Para os autores, as abordagens analíticas clássicas, citadas nas referências anteriores, não podem ser aplicados à solução de tais problemas porque as autofunções e autovalores apropriados do problema dependem do tempo (ou variável independente correspondente).

Em uma tentativa de contornar essa dificuldade, Thompson e Holy (1969) e Holy (1972) separaram o coeficiente de transferência de calor em uma parte constante e dependente do tempo, e usaram o método da expansão da autofunção para transformar o problema, mas a solução da equação integral resultante foi extremamente difícil.

Com esse mote, Özisik e Murray concluem a introdução, e, ao verificarem que ainda não existe um método de solução e análise analítica satisfatória para o problema citado acima, o presente artigo apresentará uma proposta a partir da Técnica da Transformada Integral.

6.1.2. Análise

Para iniciar a discussão do problema, Özisik e Murray consideram o seguinte problema de valor de contorno em uma região finita R:

$$\nabla.\left[k(\underline{r})\nabla \mathrm{u}(\underline{r},t)\right] + c(\underline{r})u(\underline{r},t) + g(\underline{r},t) = w(\underline{r})\frac{\partial u(\underline{r},t)}{\partial t} \quad (1)$$

onde ∇ é o gradiente.

Na região R, com $t > 0$ e sujeita as condições de contorno:

$$k(\underline{r_s})\frac{\partial u(\underline{r_s},t)}{\partial n} + h(\underline{r_s},t)u(\underline{r_s},t) = f(\underline{r_s},t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2)$$

E condição inicial:

$$u(\underline{r},t) = F(\underline{r}); \qquad t = 0 \quad (3)$$

Para Özisik e Murray, a solução analítica deste problema de valor de contorno com a aplicação direta de técnicas matemáticas clássicas apresentará uma dificuldade, porque o coeficiente $h(\underline{r_s},t)$ que aparece na condição de contorno depende da variável espacial r e da variável temporal t.

Dessa forma, Özisik e Murray comentam que se a Transformada Integral Finita, por exemplo, é aplicada para resolver este problema, a transformação da equação diferencial parcial (l) em uma equação diferencial ordinária na variável t não é prontamente possível. Os autores justificam esse fato ao comentarem que o kernel utilizado depende da variável t, e a função $w(\underline{r})$ que aparece do lado direito da equação (1) não depende de t, portanto fica impossível aplicar a transformada com um produto de duas funções com variáveis dependentes diferentes.

Assim, para resolver o problema do valor limite acima, o problema de autovalor apropriado, sugerido por Özisik e Murray é:

$$\nabla.\left[k(\underline{r})\nabla \psi(\underline{r},t)\right] + c(\underline{r})\psi(\underline{r},t) + \lambda^2(t)w(r)\psi(\underline{r},t) = 0 \quad (4)$$

na região R e sujeita as condições de contorno:

$$k(\underline{r_s})\frac{\partial\psi(\underline{r_s},t)}{\partial n}+h(\underline{r_s},t)\psi(\underline{r_s},t)=0 \tag{5}$$

onde, as autofunções e autovalores dependem de t porque $h(\underline{r_s},t)$ depende de t. Os autores mostram que essas autofunções são ortogonais em relação à função peso $w(\underline{r})$, de acordo com a relação:

$$\int_R w(\underline{r})\psi_m(\underline{r},t)\psi_n(\underline{r},t)dr=0\,;m\neq n \tag{6}$$

a integração é sobre a região R.

A função $u(\underline{r},t)$ pode ser expandida em termos da autofunção $\psi_m(\underline{r},t)$ sobre a região R na forma:

$$u(\underline{r},t)=\sum_m a_m(t)\psi_m(\underline{r},t) \tag{7}$$

e os coeficientes de expansão $a_m(t)$ são determinados utilizando as condições de ortogonalidade acima referidas:

$$a_m(t)=\frac{1}{N_m(t)}\int_R w(\underline{r})\psi_m(\underline{r},t)u(\underline{r},t)dr \tag{8}$$

em que:

$$N_m(t)=\int_R w(r)\psi_m^2(\underline{r},t)dr \tag{9}$$

Por conveniência, Özisik e Murray, na análise subsequente, usam a expansão dada pela equação (7), que é agora reescrita como a Transformada Integral Finita e a inversão da função $u(\underline{r},t)$ desenvolvida. É nesse momento que Özisik e Murray introduzem o conhecido par transformada-inversa, peça chave da GITT, nas formas:

Transformada:

$$\bar{u}_m(t)=\int_R w(\underline{r'})K_m(\underline{r},t)u(\underline{r'},t)dr' \tag{10}$$

Inversa:

$$u(\underline{r'},t)=\sum_m K_m(\underline{r},t)\,u_m(t) \tag{11}$$

O kernel $K_m(\underline{r},t)$ é a autofunção normalizada:

$$K_m(\underline{r},t) = \frac{\psi_m(\underline{r},t)}{\sqrt{N_m(t)}} \tag{12}$$

sendo $N_m(t)$ definido em (9).

A transformação integral e a inversão, conforme definido pelas equações (11-12) será agora utilizado para resolver o problema do valor limite dada pela equação (1). A equação (l) é multiplicada por $K_m(\underline{r},t)$ e integrado sobre a região R para produzir:

$$\begin{aligned}\int_R K_m(\underline{r},t)\nabla[(k(\underline{r})\nabla\psi(\underline{r},t)]dr \\ + \int_R c(\underline{r})K_m(\underline{r},t)u(\underline{r},t)dr \\ + \int_R K_m(\underline{r},t)g(\underline{r},t)dr = \int_R w(\underline{r})K_m(\underline{r},t)\frac{\partial u(\underline{r},t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{13}$$

A primeira integral no lado esquerdo da Equação (13) pode ser escrita na forma alternativa como:

$$\begin{aligned}\int_R K_m(\underline{r},t)\nabla[(k(\underline{r})\nabla \mathrm{u}(\underline{r},t)]dr \\ = \int_R u(\underline{r},t)\nabla[(k(\underline{r})\nabla K_m(\underline{r},t)]dr \\ + \int_S k(\underline{r_s})\left[K_m(\underline{r},t)\frac{\partial u(\underline{r_s},t)}{\partial n} - u(\underline{r_s},t)\frac{\partial K_m(\underline{r_s},t)}{\partial n}\right]dS\end{aligned} \tag{14}$$

De acordo com Özisik e Murray, este resultado é obtido integrando a identidade $K_m\nabla(k\nabla u) = u\nabla.(k\nabla K_m) + \nabla[k.(K_m\nabla u - u\nabla K_m)]$sobre a região R e por mudança da integral de volume para uma integral de superfície. Utilizando o problema do autovalor dado pela equação (4), e o integrando da primeira integral no lado direito da equação (14), temos:

$$u(\underline{r},t)\nabla\left[k(r)\nabla K_m(\underline{r},t)\right] = -c(\underline{r})K_m(\underline{r},t)u(\underline{r},t) - \lambda_m^2(t)w(\underline{r})K_m(\underline{r},t)u(\underline{r},t) \tag{15}$$

Utilizando as equações das condições de contorno (2) e (5), Özisik e Murray determinam o integrando da segunda integral do lado direito da equação (14).

$$h\left(\underline{r}_s\right)\left[K_m\left(\underline{r}_s,t\right)\frac{\partial u\left(\underline{r}_s,t\right)}{\partial n} - u\left(\underline{r}_s,t\right)\frac{\partial K_m\left(\underline{r}_s,t\right)}{\partial n}\right] = K_m\left(\underline{r}_s,t\right)f\left(\underline{r}_s,t\right) \tag{16}$$

Substituindo as Equações (15) e (16) no lado direito da Equação (14) e utilizando a definição da transformada de Özisik e Murray como dada pela Equação (10) produz:

$$\int_R K_m(\underline{r},t)\nabla[k(\underline{r})\nabla u(\underline{r},t)]dr = -\int_R c(r)K_m(\underline{r},t)u(\underline{r},t)dr - \lambda_m^2(t)\,\bar{u}_m(t) + \int_S K_m\left(\underline{r}_s,t\right)f\left(\underline{r}_s,t\right) \quad (17)$$

E a substituição da equação (17) pela equação (13) obtemos:

$$Z_m(t) + \lambda_m^2(t)\bar{u}_m(t) = A_m(t) \quad (18)$$

sendo:

$$Z_m(t) = \int_R w(\underline{r})K_m(\underline{r},t)\frac{\partial u(\underline{r},t)}{\partial t}dr \quad (19)$$

$$A_m(t) = \int_S K_m\left(\underline{r}_s,t\right)f\left(\underline{r}_s,t\right)dS + \int_R K_m(\underline{r},t)g(\underline{r},t)\,dr \quad (20)$$

A transformação integral das equações de condição inicial (3) torna-se:

$$\bar{u}_m(t) = \int_R w(\underline{r},t)K_m(\underline{r},t)F(\underline{r})dr = \bar{F}_m(0);\;\; t = 0 \quad (21)$$

Se as autofunções e os autovalores fossem independentes tempo, ou seja, se $h(\underline{r},t)$ fosse independente do tempo, Özisik e Murray comentam que a equação (18) seria uma equação diferencial ordinária em relação a $\bar{u}_m(t)$ e poderia ser facilmente resolvida com a equação de condição inicial (21). Conhecendo $\bar{u}_m(t)$ a função $u(\underline{r},t)$ poderia ser determinada pela inversão equação da fórmula (11). Özisik e Murray comentam que na presente análise, no entanto, isso não é possível porque $Z_m(t)$ dada pela equação (19) não pode ser escrito como $\frac{d\bar{u}_m(t)}{dt}$. Para expressar $Z_m(t)$ em termos de $\bar{u}_m(t)$, consideramos a eventual solução dada pela fórmula de inversão:

$$u(\underline{r},t) = \sum_n K_n(\underline{r},t)\,\bar{u}_n(t) \quad (22)$$

E substituindo (22) na equação (19)

$$Z_m(t) \cong \int_R w(\underline{r})K_m(\underline{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_n K_n(\underline{r},t)\bar{u}_n(t)\right]dr \tag{23}$$

Realizamos a derivada em relação à t no lado direito da equação (23) e obtemos:

$$Z_m(t) \cong \sum_n \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt}\int_R wK_mK_n dr + \sum_n \bar{u}_n(t)\int_R wK_m\frac{\partial K_n}{\partial t}dr \tag{24}$$

ou

$$Z_m(t) = \frac{d\bar{u}_m(t)}{dt} + \sum_n \bar{u}_n(t)\int_R wK_m\frac{\partial K_n}{\partial t}dr \tag{25}$$

sendo $\int_v wK_mK_n dv = \delta_{mn}$ onde δ_{mn} é a função delta de Kronecker. Com isso, Özisik e Murray sugerem que a equação (24) seja escrita em alternativa forma como:

$$Z_m(t) = \frac{d\bar{u}_m(t)}{dt} - \sum_n \bar{u}_m(t)\int_R wK_n\frac{\partial K_m}{\partial t}dr \tag{26}$$

desde que possa ser mostrado que:

$$\int_R wK_m\frac{\partial K_n}{\partial t}dr = -\int_R wK_n\frac{\partial K_m}{\partial t}dr \tag{27}$$

pelas relações

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[K_m(\underline{r},t)K_n(\underline{r},t)\right] = K_m(\underline{r},t)\frac{\partial K_n(\underline{r},t)}{\partial t} + K_n(\underline{r},t)\frac{\partial K_m(\underline{r},t)}{\partial t} \tag{28}$$

e

$$\int_v wK_mK_n dv = \delta_{mn} \tag{29}$$

Quando a Equação (26) é introduzida na equação (18), os seguintes conjuntos de equações diferenciais ordinárias (EDO) acopladas são obtidos para a transformação um $\bar{u}_m(t)$:

$$\frac{d\bar{u}_m(t)}{dt} + \lambda_m^2\bar{u}_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n(t)\bar{B}_{nm}(t) = A_m(t) \tag{30}$$

Sujeita as condições:

$$\bar{u}_m(t) = \bar{F}_m(0);\ \ t = 0 \tag{31}$$

para $m = 1,2,3, \ldots.$, e várias quantidades são definidas como:

$$A_m(t) = \int_S K_m\left(\underline{r}_s, t\right) f\left(\underline{r}_s, t\right) dS + \int_R K_m(\underline{r}, t) g(\underline{r}, t) dr \quad (32)$$

$$\bar{F}_m(0) = \int_R w(\underline{r}) K_m(\underline{r}, 0) F(\underline{r}) dr \quad (33)$$

$$\bar{B}_{mn}(t) = \int_R w(\underline{r}) K_n(\underline{r}, t) \frac{\partial K_m(\underline{r}, t)}{\partial t} dr \quad (34)$$

É notado as seguintes propriedades da função $\bar{B}_{mn}(t)$:

$$\bar{B}_{mn}(t) = -\bar{B}_{mn}(t) \quad (35)$$

$$\bar{B}_{mn}(t) = 0\,; m = n \quad (36)$$

Özisik e Murray dizem que agora a solução formal do problema pode ser considerada como completo. Uma vez que as funções $\bar{u}$ são determinadas a partir da solução das equações simultâneas (30), e a função desejada u é imediatamente obtida pela fórmula de inversão na Equação (10).

No entanto, na prática, os autores dizem que não é possível resolver um número infinito de equações diferenciais ordinárias simultâneas, mas aproximações analíticas podem ser obtidas tomando apenas um número finito de termos na soma da Equação (30). Portanto, uma aproximação de ordem-s é obtida tomando-se o número de termos na soma da equação (29), isto é:

$$\frac{d\bar{u}_m(t)}{dt} + \lambda_m^2 \bar{u}_m(t) - \sum_{n=1}^{S} \bar{u}_n(t) \bar{B}_{nm}(t) = A_m(t)\,; m = 1,2,3 \ldots., \infty \quad (37)$$

Que devem ser resolvidos sujeito às condições dadas pela equação (31) para $t = 0$.

A solução de ordem zero é obtida quando Özisik e Murray negligenciam a soma inteiramente (ou seja, $s = 0$) na equação (37), assim, a solução de primeira ordem é obtida tomando o primeiro termo da série (ou seja, $s = 1$), etc. Notamos que soluções analíticas simples são obtidas para um para os casos $s = 0$ e 1.

Para valores de s maiores que um, as primeiras equações (isto é, $m = 1, 2, \ldots, s$) na equação (20) são acopladas e para ser resolvido simultaneamente, as equações restantes $m = s + 1, s + 2, \ldots, \infty$ são desacopladas. Uma vez que estas equações são resolvidas e a transformada integral $\bar{u}_m(t)$, m = $1, 2, \ldots, s \ldots, \infty$ são determinadas, e a função $u\ (\underline{r}, t)$ é obtida pela fórmula de inversão dada pela Equação (11).

É conveniente separar os grupos acoplados e desacoplados na equação (30) e representá-los na forma de matriz, passo fundamental que os autores sugerem.

para $m = 1, 2, \ldots \ldots, s$.

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt} + \Lambda\bar{u}(t) = A(t) \quad (38)$$

$$\bar{u}(0) = \bar{F}(0) \quad (39)$$

onde as várias matrizes e vetores são definidos como:

$$\lambda^2;\ B_{12} \ldots \ldots . B_{1s}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} B_{11}\ \lambda_2^2\ \ldots \ldots B_{1s} \\ . \\ . \\ B_{s1} B_{s2} \cdots\cdots\ \lambda_s^2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ \bar{u}_s(t) \end{pmatrix}; A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ A_s(t) \end{pmatrix};\ \bar{F}(0) = \begin{pmatrix} \bar{F}_1(0) \\ \bar{F}_2(0) \\ . \\ . \\ . \\ \bar{F}_s(t) \end{pmatrix}; \quad (41)$$

para $m = s + 1, s + 2, \ldots, \infty$:

$$\frac{d\bar{u}_m(t)}{dt} + \lambda_m^2(t)\bar{u}_m(t) = c_m(t) \quad (42)$$

$$\bar{u}_m(0) = \bar{F}_m(0) \quad (43)$$

para:

$$c_m(t) \cong A_m(t) + \sum_{n=1}^{S} \bar{u}_n(t)\bar{B}_{mn}(t) \quad (44)$$

No sistema de equações precedente, as equações acopladas (40) são primeiramente resolvidas simultaneamente e a transformação $\bar{u}_n(t), n = 1,2, \ldots \ldots, s$ é determinada. Então as funções $c_m(t)$ presente nas equações (42-44) são consideradas conhecidas, e assim, a solução de equações (42-44) está escrita como:

$$\bar{u}_m(t) = \bar{F}_m(0)e^{-\int_0^t \lambda_m^2(t')dt'} + \int_0^t c_m(t')e^{-\int_{t'}^t \lambda_m^2(t'')dt''} \quad (45)$$

para $m = s + 1, s + 2, \ldots, \infty$:

Conhecendo as transformações $\bar{u}_m(t), m = 1,2, \dots\dots, \infty$, a função $u\ (\underline{r}, t)$ é obtida pela fórmula de inversão dada pela equação (11).

Por exemplo, a solução de ordem zero $u^{(0)}\ (\underline{r}, t)$ é dada por:

$$u^{(0)}\left(\underline{r}, t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(\underline{r}, t) \left[\bar{F}_m(0) e^{-\int_0^t \lambda_m^2(t')dt'} + \int_0^t A_m(t') e^{-\int_{t'}^t \lambda_m^2(t'')dt''} dt' \right] \tag{46}$$

E a solução de primeira ordem $u^{(1)}\ (\underline{r}, t)$ é dada por:

$$u^{(1)}\left(\underline{r}, t\right) = u^{(0)}\left(\underline{r}, t\right) + \sum_{m=2}^{\infty} K_m(\underline{r}, t) \int_0^t E(t') B_{1m}(t')\, e^{-\int_{t'}^t \lambda_m^2(t'')dt''} dt' \tag{47}$$

em que:

$$E(t') = \bar{F}_1(0) e^{-\int_0^t \lambda_1^2(t')dt'} + \int_0^t A_1(t')\, e^{-\int_{t'}^t \lambda_1^2(t'')dt''} dt' \tag{48}$$

Para finalizar, Özisik e Murray deixam claro que os resultados analíticos mais simples são obtidos para ordem zero e um, mas, resultados explícitos não podem ser dados para soluções de ordem superior devido ao fato de as equações estarem acopladas. Isso fica evidente ao observar a equação (47), a qual depende da solução da equação (46).

Considerações sobre as contribuições de Özisik e Murray (1974)

Podemos verificar através da leitura do texto e das considerações de Cotta (1993), que as contribuições de Özisik e Murray para a consolidação da GITT se dão na construção do par transformada-inversa, na escolha do problema de autovalor apropriado, sendo resolvido posteriormente pela solução de Sturm-Liouville, e na resolução do sistema de EDO acoplado que é gerado.

De maneira prática, Özisik e Murray solucionam esse sistema “truncando” o mesmo, e assim, chegam em uma EDO de fácil solução e de fundamental importância para, ao se colocar na fórmula inversa, determinar a função desejada.

Ressaltamos que, Özisik e Murray, na introdução, citam que utilizam a Técnica da Transformada Integral desenvolvida nos estudos de Sneddon (1951) e Tranter (1958) para a resolução do problema, que foram grandes difusores das ideias de Koshlyakov. Porém, a sistemática aplicada pelos autores foi completamente nova, e, portanto, uma evolução das ideias aplicadas anteriormente. Como confirma Cotta (1993, p.7, tradução nossa) ao comentar que: "As ideias de Özisik e Murray (1974) são ferramentas fundamentais para o início da abordagem Generalizada da Transformada Integral"[21], calcada nos estudos anteriores, mas com uma aplicabilidade muito mais abrangente e facilitada.

[21] "The ideas of Özisik & Murray (1974) are fundamental tools for starting the generalized approach for the Integral Transform" (COTTA, 1993).

7. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA (CITT) E APONTAMENTOS HISTÓRICOS DO PROF. RENATO COTTA

Neste capítulo, abordamos a Técnica da Transformada Integral Clássica - CITT por M.N. Necati Özisik e M.D. Mikhailov (1984) e algumas informações históricas relevantes comentadas em uma conversa com o Prof. Renato Machado Cotta.

7.1. Técnica da Transformada Integral Clássica por Özisik e Mikhailov (1984)

Com os avanços das ideias e dos problemas de valor de contorno, Cotta (1993, p.4, tradução nossa) comenta que:

> A GITT, embora extremamente útil nas aplicações apontadas em Özisik e Murray (1974), não se torna flexível o suficiente para permitir a solução analítica de um problema mais geral. Com isso, o método foi progressivamente ampliado e generalizado ao longo da década, e assim, levando ao estabelecimento de uma análise numérica híbrida Técnica de Transformada Integral Clássica (CITT), apresentada em Özisik e Mikhailov (1984) [22].

Assim, desde o trabalho de 1974, várias ideias foram desenvolvidas na direção de estender o procedimento de transformação integral para versões mais gerais de problemas, como os que envolvem difusão de massa e calor.

Para resolver esses problemas, Cotta (1993) destaca o surgimento da Técnica da Transformada Integral Clássica – (CITT - *Classical Integral Transform Techinque*) que foi publicada inicialmente por Özisik e Mikhailov em 1984. Em relação a nomenclatura da técnica, vemos no texto de Özisik e Mikhailov a utilização do nome por extenso (Generalized Integral Transform Techinque). Porém, Cotta (1993) explica que os autores unificam as ideias de Koshlyakov até Özisik e Murray (1974), gerando uma técnica mais completa. Já o termo "clássica" e a sigla CITT se difundem após as publicações de Cotta (1986), Cotta e Özisik (1986) e principalmente no livro de Cotta (1993).

Cotta (1993) elenca os passos básicos da abordagem da CITT:

-Escolher o problema auxiliar relacionado (evitando problemas computacionalmente envolvidos);

- Desenvolvimento do par transformada-inversa;

---

[22] "GITT, while extremely useful in the applications pointed out in Özisik and Murray (1974), does not become flexible enough to allow the analytical solution of a more general problem. Thus, the method has been progressively expanded and generalized over the decade, thus leading to the establishment of a hybrid numerical analysis Classical Integral Transform Technique (CITT), presented in Özisik and Mikhailov (1984)" (COTTA, 1993).

- Resolver a equação transformada até resultar em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas;

- Por fim, truncar o sistema infinito para uma ordem suficientemente grande e resolvê-lo através de procedimentos numéricos clássicos disponíveis em pacotes de sub-rotinas científicas, para produzir a chamada solução completa.

Dentro desses pacotes, vemos a divisão do problema original em outros. Esse procedimento será melhor explicado posteriormente. Mas é nesse passo que a diferença entre a CITT e a GITT é observada, já que a utilização desse procedimento faz com que a abrangência da CITT aumente significativamente.

Para podermos entender o passo-a-passo da CITT, mostramos o estudo de M.N. Özisik e M.D. Mikhailov presente no livro *Unified Analysys and Solution of Heat and Mass Difusion*, publicado em 1984.

Na introdução desse livro, os autores discutem a importância de se estudar as soluções analíticas de problemas de difusão de calor e massa. Para eles, com a disponibilidade de computadores digitais de alta velocidade de alta capacidade e esquemas numéricos aprimorados, foram feitos avanços significativos para a solução dos tipos mais complicados desses problemas. Apesar desses avanços nas técnicas de solução numérica, no entanto, ainda existe uma vasta classe de problemas de importância prática que podem ser estudados por abordagens analíticas. Além disso, soluções analíticas, quando disponíveis, são vantajosas na medida em que fornecem uma boa visão sobre a importância de vários parâmetros do sistema que afetam os fenômenos de transporte.

E assim, para Özisik e Mikhailov, o objetivo deste livro é tentar preencher essa lacuna na literatura, fornecendo algumas unificações das soluções de problemas lineares de difusão de calor e massa.

Para alcançar esse objetivo, os autores dividem em sete classes diferentes de problemas dependentes de tempo, calor linear e difusão em massa. Tal escolha, segundo os autores, embora um pouco arbitrária, abrange um vasto número de casos de interesse prático. As divisões de classe são:

Classe I - Problemas de difusão de massa ou calor constante e instável (uma única espécie) em sólidos sujeitos a condições de contorno e condições iniciais.

Classe II - São as generalizações dos problemas de Classe I, para difusão de calor ou massa em um meio composto finito composto de n sub-regiões, sujeito a condições de contorno generalizadas e condições iniciais.

Classe III - Problemas caracterizados por duas equações de difusão não homogêneas dependentes do tempo, nas quais o acoplamento através das condições de contorno é mais geral do que para os problemas de Classe II.

Classe IV – Problemas caracterizados por um conjunto de equações de difusão nas quais a temperatura ou a concentração de massa em cada ponto no espaço é acoplada por meio de termos origem nas equações.

Classe V - Problemas governados por duas equações de difusão que são acopladas através dos termos de origem em todos os pontos no espaço; diferentemente dos problemas da Classe IV, nesses não há simetria entre os coeficientes que governam o acoplamento das equações.

Classe VI – Problemas caracterizados por um conjunto de equações de difusão, mas seus acoplamentos através das condições de contorno são complicados pelo fato de que um balanço de massa está envolvido ao longo da superfície limite.

Classe VII – Problemas que lidam com uma situação em que a difusão da substância é finita, enquanto que durante o processo de difusão, parte da substância difusora é absorvida por outra com a qual reage quimicamente.

Para resolver esses problemas, os autores utilizam a Técnica de Transformada Integral Generalizada ao longo do desenvolvimento das soluções gerais, para apresentar um método unificado de análise da solução de todas as sete classes diferentes de problemas.

A fim de compreendermos a CITT de Özisik e Mikhailov, estudamos o capítulo II desse livro, o qual é dedicado ao desenvolvimento de soluções formais tridimensionais generalizadas dependentes do tempo para cada uma dessas classes. Por escolha nossa, descrevemos a CITT aplicada na solução dos problemas de classe I.

7.1.1. Soluções gerais para os problemas de classe I

No início do capítulo II, os autores destacam a importância de se ter soluções gerais para os problemas de calor em massa na literatura, segundo Özisik e Mikhailov (1984, p. 21, tradução nossa): “É mais fácil resolver e calcular os resultados de um problema específico do que passar por uma pesquisa de literatura para descobrir se o problema tem uma solução publicada. Portanto, é bastante útil ter soluções gerais disponíveis”[23].

[23] “It is easier to solve and calculate the results of a specific problem than to go through a literature search to find out if the problem has a published solution. Therefore, it is very useful to have general solutions available” (ÖZISIK & MIKHAILOV, 1984).

E assim, o objetivo deste capítulo é desenvolver soluções gerais tridimensionais formais para cada uma das sete classes de problemas descritas anteriormente.

Com esse prólogo, os autores iniciam os estudos das soluções para os problemas de classe I e que serão mostrados nessa pesquisa.

Para mostrar a solução via CITT, Özisik e Mikhailov desenvolvem a solução formal para o seguinte problema de valor de contorno de uma região finita, apresentado por eles no Capítulo I.

$$w(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + LT(x,t) = P(x,t); x \epsilon V \tag{1}$$

Sujeito às condições de contorno

$$BT\ (x,t) = \ \phi\ (x,t); x \epsilon S \tag{2}$$

E a condição inicial

$$T\ (x,0) = \ f\ (x);\ x \epsilon V \tag{3}$$

em que os operadores lineares são definidos como:

$$L\ \equiv -\nabla\ [k\ (x)\nabla] + \ d\ (x) \tag{4}$$

$$B \equiv \alpha(x) + \ \beta(x)k(x)\frac{\partial}{\partial n} \tag{5}$$

onde ∇ é o gradiente.

No caso, $\beta(x);\ \alpha(x)$ são coeficientes de contorno definidos na superfície limite $S, k(x)$ está associado com a definição da lei de difusão linear e $\frac{\partial}{\partial n}$ representa a derivada normal na superfície limite S no sentido para fora. O coeficiente $k(x)$ é considerado uma função contínua da variável espacial x. No caso de $k(x)$ descontínuo pode ser tratado como um problema de Classe II, que é apresentado posteriormente pelos autores.

Na análise a seguir, Özisik e Mikhailov primeiro desenvolvem a Transformada Integral e a fórmula de inversão necessária para a solução do problema do valor limite precedente. O par de transformada-inversa assim desenvolvido é então aplicado para resolver o problema. Aqui vemos ideias similares as apresentadas em Mikhailov (1972) e que acabaram servindo de base para os estudos dos problemas de Classe I.

Além disso, a divisão do problema geral em problemas mais simples é descrita, e o tratamento dos casos especiais que envolvem condições de contorno do segundo tipo para todos os limites, bem como as condições de fronteira que variam periodicamente é discutido e a solução generalizada é obtida.

7.1.2. Desenvolvimento do par de transformada-inversa

Özisik e Mikhailov explicam que o par transformada-inversa, que consiste das ideias da Transformada Integral Clássica, é necessário para a solução do problema anterior, e ele pode ser desenvolvido considerando os seguintes problemas homogêneos auxiliares para a função de variável de espaço $\psi(x)$ na mesma região *V*:

$$\mu^2 w(x)\psi(x) = L\psi(x); x \in V \tag{6}$$

Sujeito às condições de contorno homogêneo:

$$B\psi(x) = 0; x \in S \tag{7}$$

onde os operadores lineares L e B, segundo Özisik e Mikhailov, são definidos pelas equações (4) e (5), respectivamente. O problema homogêneo dado pelas equações (6-7) é o conhecido problema (ou sistema) de Sturm-Liouville.

O sistema (4) tem soluções não triviais apenas para certos valores do parâmetro $\mu^2 = \mu_i^2 (i = 1, 2, \ldots, \infty)$ chamados de autovalores, e as correspondentes soluções não-triviais $\psi(\mu_i, x) = \psi_i(x)$ denomiadas autofunções.

Özisik e Mikhailov consideram a representação do potencial desejado $T\,(x, t)$ em termos das funções próprias $\psi_i(x)$ deste problema auxiliar sobre a região *V* na forma:

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t)\psi_i(x); x \in V \tag{8}$$

onde a soma é tomada em todos os espectros discretos de autovalores μ_i. Para determinar os coeficientes de expansão $A_i(t)$, é necessário a propriedade de ortogonalidade dessas autofunções, que é desenvolvida como será descrito por Özisik e Mikhailov.

A equação (6) é escrita para duas diferentes funções próprias $\psi_i(x)$ e $\psi_j(x)$, correspondendo a dois autovalores diferentes μ_i e μ_j.

$$\mu_i^2 w(x)\psi_i(x) = L\psi_i(x); x \in V \tag{9}$$

$$\mu_j^2 w(x)\psi_j(x) = L\psi_j(x); x \in V \tag{10}$$

A primeira equação é multiplicada por $\psi_j(x)$, a segunda por $\psi_i(x)$, e os resultados são subtraídos e então integrados sobre a região V.

$$\begin{aligned}(\mu_i^2 - \mu_j^2)\int_V w(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dv \\ = \int_V \{\psi_i(x)\nabla\left[k(x)\nabla\,\psi_j(x)\right] - \psi_j(x)\nabla\left[k(x)\nabla\,\psi_i(x)\right]\}dv\end{aligned} \tag{11}$$

A integral de volume do lado direito da equação é transformada na integral de superfície pelo Teorema de Green, operação já utilizada por Mikhailov no seu estudo de 1972:

$$(\mu_i^2 - \mu_j^2)\int_V w(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dv = \int_S k(x)\left[\psi_i(x)\frac{\partial}{\partial n}\psi_j(x) - \psi_j(x)\frac{\partial}{\partial n}\psi_i(x)\right]dS \tag{12}$$

Esta expressão está agora escrita de forma mais compacta na forma:

$$(\psi_i,\psi_j) = \frac{1}{\mu_i^2 - \mu_j^2}\int_S k(x)\begin{vmatrix}\psi_i(x) & \frac{\partial}{\partial n}\psi_i(x)\\ \psi_j(x) & \frac{\partial}{\partial n}\psi_j(x)\end{vmatrix}dS;\, i \neq j \tag{13}$$

onde definimos o produto escalar de duas funções como:

$$(f_1, f_2) \equiv \int_V w(x)\, f_1(x)f_2(x)dv \tag{14}$$

para $\mu_j \to \mu_i$, a equação (13) assume a forma:

$$N_i = (\psi_i,\psi_j) = \frac{1}{2\mu_i}\int_S k(x)\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} & \left(\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial n\,\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i}\\ \psi_i(x) & \frac{\partial\psi_i(x)}{\partial n}\end{vmatrix}dS \tag{15}$$

onde $N_i^{1/2}$ é chamado a norma da autofunção $\partial\psi_i(x)$. Em vista da Equação (7), o resultado na Equação (14) pode ser escrito de forma mais compacta na forma:

$$(\psi_i,\psi_j) = \delta_{ij}N_i \tag{16}$$

em que:

$$\delta_{ij} \equiv \text{Função Delta de Kronecker} = \begin{cases}0; i \neq j\\ 1; i = j\end{cases}$$

Özisik e Mikhailov explicam que a expressão dada pela Equação (16) prova que as autofunções $\psi_i(x)$ do sistema Sturm-Liouville (6) são ortogonais em relação à função peso $w(x)$ na região V.

A relação de ortogonalidade anterior é agora usada para determinar os coeficientes de expansão $A_i(t)$ na Equação (7). Para isso, em ambos os lados da Equação (7), será multiplicado o operador:

$$\int_V w(x)\psi_j(x)dx$$

isto é, multiplicamos ambos os lados da Equação (8) por $w(x)\psi_j(x)$, integramos na região V e utilizamos a relação de ortogonalidade (16) para obtermos:

$$A_i(t) = \frac{1}{N_i}\int_V w(x)\psi_i(x)T(x,t)dv \equiv \frac{(\psi_i, T)}{N_i} \tag{17}$$

Özisik e Mikhailov dizem que a expressão $A_i(t)$ é introduzida na equação (8) e a expansão resultante $T(x,t)$ é dividida em duas partes para definir o par transformada-inversa como:

Inversa:

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i}\psi_i(x)\tilde{T}_i(t) \tag{18}$$

Transformada:

$$\tilde{T}_i(t) = \int_V w(x)\psi_i(x)T(x,t)dv \equiv (\psi_i, T) \tag{19}$$

O par é usado para resolver o problema do valor limite da Classe I definido pelas equações (1-5), como será descrito a seguir.

7.1.3. Método de solução

Para o desenvolvimento da solução, Özisik e Mikhailov multiplicam a Equação (1) por $\psi_i(x)$, a Equação (6) por $T(x,t)$ e os resultados são adicionados, integrados em relação ao volume V, e a definição da transformada integral (19) é utilizada. Assim, encontramos:

$$\frac{d\tilde{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2\tilde{T}_i(t) = \int_V [\psi_i\nabla(k\nabla T) - T\nabla(k\nabla\psi_i)]dv + \int_V \psi_i P dv \tag{20}$$

Quando o primeiro volume da integral à direita é alterado para a integral de superfície, como já feito nas Equações (11-12), e a expressão resultante é escrita na forma dada pela Equação (13), a Equação (20) torna-se:

$$\frac{d\tilde{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \tilde{T}_i(t) = g_i(t) \tag{21}$$

Segue abaixo a expressão de $g_i(t)$:

$$g_i(t) = \int_S \; k(x) \begin{vmatrix} \psi_i(x) & \frac{\partial}{\partial n}\psi_i(x) \\ T(x,t) & \frac{\partial}{\partial n}T(x,t) \end{vmatrix} dS + \int_V \; \psi_i P(x,t) dv \tag{22}$$

O integrando da integral de superfície precedente é agora determinado resolvendo as Equações (2) e (7) para $\alpha(x)\ e\ \beta(x)$, adicionando as expressões resultantes para $\alpha(x)\ e\ \beta(x)$. Encontramos:

$$k(x) \begin{vmatrix} \psi_i(x) & \frac{\partial}{\partial n}\psi_i(x) \\ T(x,t) & \frac{\partial}{\partial n}T(x,t) \end{vmatrix} = \phi(x,t) \frac{\psi_i(x) - k(x)\left[\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial n}\right]}{\alpha(x) + \beta(x)} \tag{23}$$

Então as Equações (21-22) assumem a forma:

$$\frac{d\tilde{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \tilde{T}_i(t) = g_i(t) \tag{24}$$

em que:

$$g_i(t) = \int_S \; \phi(x,t) \frac{\psi_i(x) - k(x)\left[\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial n}\right]}{\alpha(x) + \beta(x)} \; dS + \int_V \; \psi_i(x) P(x,t) dv \tag{25}$$

Assim, Özisik e Mikhailov sugerem a transformação da Equação Diferencial Parcial (1) e sua condição de contorno (2) em uma equação diferencial ordinária para a transformada $\tilde{T}_i(t)$ do potencial $T(x,t)$, como dado pelas Equações (24-25). A condição inicial necessária para a solução das Equações (24-25) é obtida tomando a transformada integral da condição inicial (3) de acordo com a definição da transformada integral dada pela Equação (19). Desse modo, obtemos:

$$\tilde{T}_i(0) = \int_V \; w(x)\psi_i(x) f(x) dv = (\psi_i, f) = \tilde{f}_i \tag{26}$$

A solução das equações diferenciais lineares de primeira ordem (24-25) sujeita à condição inicial (26):

$$\tilde{T}_i(t) = e^{-\mu_i^2 t}\left[\tilde{f}_i \; + \int_0^t g_i(t')e^{\mu_i^2 t'}dt'\right] \tag{27}$$

Substituindo a transformada integral $\tilde{T}_i(t)$ dada pela Equação (27), na fórmula de inversão (18), Özisik e Mikhailov determinam a solução dos problemas da Classe I, definida pelas Equações (1-5), obtida como:

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_i}e^{-\mu_i^2 t}\psi_i(x)\left[\tilde{f}_i \; + \int_0^t g_i(t')e^{\mu_i^2 t'}dt'\right] \tag{28}$$

para:

$$N_i = \frac{1}{2\mu_i}\int_S \; k(x)\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} & \left(\dfrac{\partial^2\psi(x)}{\partial n\,\partial\mu}\right)_{\mu=\mu_i} \\ \psi_i(x) & \dfrac{\partial\psi_i(x)}{\partial n} \end{vmatrix} dS \tag{29}$$

$$g_i(t) = \int_S \; \phi(x,t)\frac{\psi_i(x) - k(x)\left[\dfrac{\partial\psi_i(x)}{\partial n}\right]}{\alpha(x) + \beta(x)} \; dS + \int_V \; \psi_i(x)P(x,t)dv \tag{30}$$

$$\tilde{f}_i = \int_V \; w(x)\psi_i(x)f(x)dv = (\psi_i, f) \tag{31}$$

Os autores atentam para o detalhe de que as autofunções $\psi_i(x)$ são arbitrárias na constante de multiplicação $C(\mu_i)$. Esta arbitrariedade é removida após a substituição de $\psi_i(x)$ na solução (28).

E assim, Özisik e Mikhailov determinam a função potencial média $T_{av}(t)$, definida como:

$$T_{av}(t) = \frac{\int_V \; w(x)T(x,t)dv}{\int_V \; w(x)dv} \cong \frac{(1,T)}{(1,1)} \tag{32}$$

Substituindo a solução (28) na Equação (32), a expressão para o valor médio da função potencial é obtida como:

$$T_{av}(t) \cong \; \frac{1}{(1,1)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_i}e^{-\mu_i^2 t}(1,\psi_i)\left[\tilde{f}_i \; + \int_0^t g_i(t')e^{\mu_i^2 t'}dt'\right] \tag{33}$$

As Equações (28) e (33), embora representem as soluções exatas para o problema, não estão em uma forma conveniente para propósitos práticos, isto é, quando o problema envolve funções de origem não homogêneas. De acordo com Özisik e Mikhailov, a razão para isto é que a solução da Equação (28), obtida pela técnica de expansão de autofunção, converge rapidamente nos pontos no interior da região, mas não converge uniformemente nos limites da condição de contorno, isto porque as autodeterminações não são satisfeitas nos limites de contorno. E assim, para dirimir essa dificuldade, os autores utilizam um procedimento de divisão.

Para os casos em que as funções dependentes do tempo $\phi(x,t)$ e $P(x,t)$ *s*ão representadas por exponenciais nos polinômios t e de ordem q em t, a divisão, segundo Özisik e Milhailov, ocorre para gerar resultados mais interessantes ao se aplicar uma rotina computacional, parte numérica da CITT. Deste modo, a solução do problema geral (1) será dividida em um sistema de estados quase estáveis e partes transientes.

É interessante destacar que a convergência é observada ao se colocar a solução do problema em um software matemático, que elaborará tabelas com diferentes truncamentos da somatória presente.

7.1.4. Divisão do problema geral

Nessa seção, Özisik e Mikhailov irão efetuar a separação do problema geral dado pelas equações (1-5) em um conjunto de problemas mais simples, que serão mais viáveis para a aplicação em rotinas computacionais.

Esse processo conterá: Um problema transitório homogêneo e um conjunto de problemas de estado estacionário para os quais soluções separadas podem ser obtidas com métodos diferentes da técnica de expansão de autofunção. Esses problemas (estacionário e transitório) são, do ponto de vista numérico, melhores aplicáveis em tabelas de convergência, diminuindo assim o erro dos valores encontrados.

Quando os termos não homogêneos $P(x,t)$ e $\phi(x,t)$ são representados por exponenciais e polinômios de ordem q do tempo na forma:

$$P(x,t) = P_e(x)e^{-d_P t} + \sum_{j=0}^{q} P_j(x)t^j; x \in V \tag{34}$$

$$\phi(x,t) = \phi_e(x)e^{-d_\phi t} + \sum_{j=0}^{q} \phi_j(x)t^j; x \in S \tag{35}$$

onde d_ϕ e d_p são constantes, então a solução $T(x,t\ )$ do problema do valor de contorno geral (1) pode ser dividido na solução de problemas mais simples na forma (28):

$$T(x,t) = T_\phi(x)e^{-d_\phi t} + T_p(x)e^{-d_p t} + \sum_{j=0}^{q} T_j\,(x)t^j + T_t(x,t); x \in V \tag{36}$$

Nesse momento, Özisik e Mikhailov descrevem o raciocínio por trás da escolha do processo de divisão na forma dada pela Equação (36).

De acordo com os autores, os termos fonte $P(x,t)$ e $\phi(x,t)$ da equação diferencial e as condições de contorno, respectivamente, sendo representadas por exponenciais e polinômios de ordem q do tempo, funções similares são tentadas para a solução separada, equação (36). Por simplicidade na análise, é considerado apenas um termo exponencial nas equações (34-35) para as funções $P(x,t)$ e $\phi(x,t)$. Entretanto, se houvesse mais termos exponenciais nas equações (34-35), o princípio da superposição os permite usar tantos termos exponenciais na Equação (36) quanto necessário para corresponder àqueles usados nas equações (34-35).

Quando $T(x,t)$ é representado como dado pela equação (36), as funções $T_\phi(x), T_p(x)$; e $T_j(x)$; são as soluções dos seguintes problemas de estado estacionário:

$$LT_\phi = d_\phi w(x)T_\phi(x); x \in V \tag{37}$$

$$BT_\phi(x) = \ \phi_e(x); x \in S \tag{38}$$

$$LT_p(x) = \ d_p w(x)T_p(x) + \ P_e(x); x \in V \tag{39}$$

$$BT_p(x) = 0; x \in S \tag{40}$$

$$LT_q(x) = \ P_q(x); x \in V \tag{41}$$

$$BT_q(x) = \ \phi_q(x); x \in S \tag{42}$$

$$LT_j(x) + (j+1)w(x)T_{j+1}(x) = \ P_j(x); x \in V \tag{43}$$

$$BT_j(x) = \ \phi_j(x); x \in S \tag{44}$$

para $j = q-1, q-2, \dots\dots, 1,0$.

A função $T_t(x,t)$ é a solução do seguinte problema homogêneo transitório:

$$w(x)\frac{\partial T_t(x,t)}{\partial t} + LT_t(x,t) = 0; x \in V \tag{45}$$

$$BT_t(x,t) = 0; x \in S \tag{46}$$

$$T_t(x,0) = f(x) - \ T_\phi(x) - \ T_p(x) - \ T_0(x); x \in V \tag{47}$$

Os autores explicam que a validade do processo de divisão acima definido pelos sistemas (37-47) pode ser verificada substituindo a solução dada pela Equação (36) pelo problema de valor de contorno definido pelas Equações (1-5).

Na sequência, Özisik e Mikhailov descrevem as soluções dos problemas mais simples definidos pelas Equações (37-47).

A solução do problema homogêneo transitório (45) é imediatamente obtida a partir da solução geral (28) como um caso especial:

$$T_t(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i} e^{-\mu_i^2 t} \psi_i(x)\left(\tilde{f}_i - \tilde{T}_{\phi i} - \tilde{T}_{pi} - \tilde{T}_{0i}\right); x \, \epsilon \, V \tag{48}$$

onde $\tilde{f}_i, \tilde{T}_{\phi i}, \tilde{T}_{pi}, \tilde{T}_{0i}$ são as Transformadas Integrais das funções $F(x), T_\phi(x), T_p(x), T_0(x)$, respectivamente, de acordo com a transformação (19).

As transformações $\tilde{T}_{\phi i}, \tilde{T}_{pi}, \tilde{T}_{0i}$ são obtidas pela aplicação da Transformada Integral (19) aos problemas (37-44) pelo procedimento de transformação descrito anteriormente, isto é, para determinar, por exemplo, $\tilde{T}_{\phi i}$, a Equação (37) é multiplicada $\psi_i(x)$, e Equação (6) por $T_\phi(x)$, os resultados são adicionados, integrados sobre a região V, a definição da Transformada Integral (19) é utilizada, e a integral de volume é transformada em uma integral de superfície, com o integrando da integral de superfície determinado de acordo com a Equação (23).

Resumindo os resultados descritos acima:

$$\tilde{T}_{\phi i} = \frac{g_{\phi i}}{\mu_i^2 - d_\phi} \tag{49}$$

$$\tilde{T}_{pi} = \frac{g_{pi}}{\mu_i^2 - d_p} \tag{50}$$

$$\tilde{T}_{qi} = \frac{g_{qi}}{\mu_i^2} \tag{51}$$

$$\mu_i^2 \tilde{T}_j + (j+1)\tilde{T}_{j+1} = g_{ji} \, ; (j = q-1, q-2, \dots \dots, 1, 0 \;) \tag{52}$$

onde

$$g_{\phi i} = \int_S \;\; \phi_e(x) \frac{\psi_i(x) - k(x)\left[\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial n}\right]}{\alpha(x) + \beta(x)} \;\; dS \tag{53}$$

e

$$g_{pi} = \int_V \psi_i(x) P_e(x) dv \, , \tag{54}$$

$$g_{ji} = \int_S \phi_j(x) \frac{\psi_i(x) - k(x)\left[\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial n}\right]}{\alpha(x) + \beta(x)} \, dS + \int_V \psi_i(x) P_j(x) dv; j = 0,2, \dots , q \tag{55}$$

Então, $\tilde{T}_{0i}$, é encontrado como resultado das Equações (51) e (52), e possui a seguinte forma:

$$\tilde{T}_{0i} = \sum_{j=0}^{q} \frac{(-1)^j j! \, g_{ji}}{\mu_i^{2(j+1)}} \tag{56}$$

onde $j! \, = \, 1.2.3 \dots (j \, - 1) \, . j$.

Para finalizar a solução $T_t(x,t)$ do problema homogêneo transitório (45), Özisik e Mikhailov efetuam a substituição das equações (49-40) na equação (56).

As soluções dos problemas de estado estacionário (37-44) são obtidas introduzindo as transformadas integrais dadas pelas Equações (49-52) na fórmula de inversão (18).

No caso de problemas unidimensionais, as soluções dos problemas de estado estacionário (37-47) são encontradas por integração direta.

Por fim, os autores determinam que a solução $T(x,t)$ dada pela Equação (36), com a separação do problema, é mais conveniente para rotinas computacionais do que o dado pela equação (28), desde que sejam determinadas as soluções analíticas explícitas para as funções $T_\phi(x)$; $T_p(x)$; $T_j(x)$ definidas pelas Equações (37-47), respectivamente. Com isso, Özisik e Mikhailov garantem que a solução para $T(x,t)$ converge mais rapidamente porque a função $T_t(x,t)$ é a solução de um problema homogêneo que também converge rapidamente.

7.2. Considerações sobre as contribuições de Özisik e Mikhailov (1984)

Com a resolução desses problemas, Özisik e Mikhailov apresentam uma técnica com as mesmas bases da CITT e da Transformada Integral Finita, porém, com a preocupação de se obter uma solução analítica para problemas mais gerais, que ao final devem ser aplicados em softwares e suas soluções possuírem correlação real com o problema físico, além do fato de serem encontradas em menor tempo devido as divisões feitas no problema que geram a rápida convergência dos valores.

Assim, vemos nos formalismos da CITT a contribuição que finaliza esse momento de construção e evolução dessa Transformação Integral, que se inicia com Koshlyakov e perpassa décadas e problemas de aplicação, que exigem um maior tratamento e, por consequência, técnicas mais apuradas e aplicadas em softwares que com o passar do tempo se fazem necessários para a agilidade das pesquisas em engenharia do mundo cada vez mais tecnológico, sem perder a essência física e analítica do estudo.

7.3. A CITT e GITT nos últimos anos: Uma entrevista com Renato Machado Cotta

Durante a escrita dessa pesquisa, tentamos com sucesso um contato com o professor Renato Machado Cotta, atualmente docente da UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) cedido a Marinha do Brasil.

Durante as conversas que tivemos, Cotta nos passou alguns artigos e informações sobre a evolução da Técnica da Transformada Integral. Consolidando as datas e estudos citados ao longo da pesquisa, e dados de como a técnica está sendo desenvolvida desde 1984, data do último trabalho citado aqui.

Além dos artigos recebidos, Cotta nos concedeu uma entrevista por Skype, onde nos relatou algumas informações históricas importantes sobre o desenvolvimento das técnicas e pesquisas atuais que fazem uso delas. Após esse primeiro momento, enviei ao professor os questionamentos feitos na entrevista síncrona para que pudesse relatar com mais detalhes esses dados históricos fundamentais para a nossa pesquisa.

Abaixo segue as respostas dadas pelo tão prestigioso professor. Utilizamos as siglas “E” para entrevistador e “RC” para as respostas do Prof. Renato Cotta.

E: Professor, como o senhor enxerga as influências de Koshlyakov e Grinberg na concepção da CITT?

RC: As transformações integrais têm sido usadas com sucesso em diferentes ramos das ciências físicas, matemáticas e de engenharia por cerca de 200 anos. Acredito que Fourier avançou com a ideia de Separação de Variáveis, de modo a manipular e interpretar as soluções da equação do calor, após propor a conhecida lei de Fourier.

Em 2012 no 14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, eu publiquei um artigo falando sobre o trabalho de Koshlyakov (1936). Nesse artigo, após o levantamento que fiz, podemos entender que Koshlyakov nos traz uma ideia precursora para a manipulação de EDP não-homogênea, já Grinberg, em 1948, desenvolveu e formalizou essa abordagem para problemas de múltiplas camadas, considerando variações das propriedades do material ao longo da transformação.

Mas acredito que é importante incluir as contribuições de Ölçer (1964, 1967), Mikhailov (1967) e Özisik (1968) no campo da transferência de calor. A década de 60 foi um período ativo de pesquisa sobre soluções analíticas exatas de problemas não homogêneos de transferência de calor e massa, com destaque também para a contribuição de Mikhailov (1972, 1973a, 1973b) já antevendo a unificação que seria realizada mais tarde.

E: Vemos que a CITT foi unificada na publicação de Mikhailov e Özisik (1984), como foi que esses dois pesquisadores tão renomados começaram a trabalhar juntos?

RC: Como comentei, os anos 60 foi um período muito intenso para o estudo de métodos analíticos em transferência de calor e massa, e nos anos 70 os estudos continuaram, mas já com um avanço marcante dos métodos numéricos. O renomado Prof. Aleksei Luikov, em 1974, Diretor do então Instituto de Transferência de Calor e Massa em Minsk, antiga URSS, hoje Bielorússia, e autor de importantes livros em Difusão de Calor e Massa (Luikov, 1968, 1973) contatou tanto Özisik quanto Mikhailov, para a publicação conjunta de livros sobre métodos analíticos em condução e convecção de calor. No entanto, Luikov faleceu antes mesmo do início desses projetos, mas Mikhailov e Özisik finalmente se conheceram em 1976, e iniciaram um novo projeto inspirado nas sugestões de Luikov, que teria sido concluído e publicado apenas em 1984, quando uma boa parte das soluções exatas disponíveis na área de difusão de calor e massa através de transformações integrais foram unificadas em sete diferentes classes de problemas e apresentadas em Mikhailov e Özisik (1984).

E: Como foi o seu período de doutoramento na NCSU nos anos 80? E os trabalhos com Özisik e Mikhailov?

RC: Eu iniciei meu período de doutoramento nos EUA em 1982, concluído em 1985, e a partir de 1983 já era orientado pelo Prof. M. Necati Ozisik do Mechanical & Aerospace Engineering Dept. da North Carolina State University (NCSU). Nesse período, tive a oportunidade de revisar todas as equações e deduções do livro *Unified Analysys and Solutions of Heat and Mass Difusion* de M.D. Mikhailov e M.N. Özisik, antes da publicação em 1984, conforme demandado pelo meu orientador, Prof. Özisik.

Também nesse período, eu iniciei uma amizade e sequência de trabalhos com o Prof. M.D. Mikhailov, e tive discussões e cálculos muito importantes que levaram à minha primeira publicação conjunta com ele sobre transformações integrais e problemas de autovalor em Cotta et al. (1987).

Os dois cientistas tinham importantes características complementares que levaram à concepção desse importante tratado em CITT (Mikhailov & Ozisik, 1984). Enquanto o Prof. Mikhailov tem essa característica brilhante de generalizar e unificar soluções, o Prof. Ozisik tinha a capacidade invejável de sintetizar e sistematizar deduções e algoritmos. Fui muito feliz em poder trabalhar com ambos nesse importante período de minha formação avançada, quando as idéias brotavam naturalmente e eram alimentadas de muito estímulo e conhecimento, que até hoje acredito ter sido a fase mais intensa da minha carreira.

E: Hoje, conhecemos a GITT e a CITT mais pelas suas siglas do que pelo seu nome por extenso. Como se deu a origem dessas nomenclaturas? Pois no texto de Özisik e Murray (1974), os autores utilizam a denominação de Transformada Integral Finita, sem os termos "clássica" ou "generalizada".

RC: O que chamamos de CITT, ou transformação integral no seu sentido clássico de encontrar soluções analíticas exatas, é aquela metodologia formalizada por Koshlyakov para problemas não-homogêneos, e unificada com perfeição por Mikhailov & Ozisik em 1984. A publicação de Özisik e Murray em 1974, buscando a solução de um problema de condução de calor com coeficiente de transferência de calor variável com o tempo, traz a primeira flexibilização importante em relação às ideias de Koshlyakov, propondo soluções analíticas aproximadas para problemas a princípio não-transformáveis no sentido clássico. Portanto, acredito que ali se plantou a semente de uma nova técnica mais geral, só bem mais tarde denominada de GITT. Esse conceito de flexibilização da CITT para obter-se soluções analíticas aproximadas para problemas não-transformáveis também foi empregado por Yener & Ozisik (1974), Mikhailov (1975), Ozisik & Guçeri (1977), Bayazitoglu & Ozisik (1980), Bogado Leite et al. (1980, 1982), e Cotta et al. (1985).

Como os problemas então tratados pelo enfoque mais geral eram a princípio não-transformáveis, diferentes dos problemas transformáveis que a (CITT) resolvia, o sistema transformado não era reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias desacoplado, requerendo algum tipo de aproximação na estrutura do sistema (como reter apenas a primeira linha ou a diagonal do sistema) para que uma solução analítica fosse encontrada. No entanto, em um desenvolvimento independente durante o meu doutoramento, quando ainda fazia parte do Nuclear Engineering Dept., estudei um problema de transferência de massa relacionado à oxidação do encamisamento de varetas combustíveis, que só viria a publicar ao final do curso, Cotta (1986), em que esse problema de contorno móvel seria tratado de forma completa, ou seja, resolvendo o sistema transformado completo sem nenhuma aproximação em sua estrutura, apenas seu truncamento em uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada. Surge então a natureza híbrida numérico-analítica da técnica generalizada, em que os campos transformados são obtidos pela solução numérica de um sistema de EDO´s acoplado. Mas dentro da minha tese, ainda pude demonstrar que mesmo em problemas não-transformáveis seria possível encontrar soluções totalmente analíticas do sistema transformado completo, desde que esse sistema permitisse um tratamento analítico, como demonstrado em Cotta e Ozisik (1986).

Quanto a utilização das siglas, penso que elas se deram após as publicações das soluções de problemas de difusão com equações variáveis, que foram formalizadas logo em seguida no meu retorno ao país, em Cotta & Ozisik (1986) e Cotta (1993). Igualmente importantes para o pleno estabelecimento da técnica híbrida foram as primeiras generalizações para domínios irregulares (Aparecido & Cotta, 1987), problemas não lineares (Cotta, 1990), equações de camada limite (Cotta & Carvalho, 1991) e equações de Navier-Stokes (Perez Guerrero & Cotta, 1992). Nessas publicações e em outras do mesmo período já utilizávamos a notação (CITT) e (GITT), mas elas ficam ainda mais destacadas no meu livro de 1993, onde faço uma discussão mais detalhada sobre cada uma. Outros livros posteriores (Cotta & Mikhailov, 1997; Cotta, 1998; Cotta et al., 2016), bem como os capítulos convidados no Handbook of Numerical Heat Transfer (Cotta & Mikhailov, 2006), no Handbook of Thermal Science and Engineering (Cotta et al., 2017), e no livro 50 Years of CFD in Engineering Sciences (Cotta et al., 2020), e eventuais artigos de revisão ao longo desses anos, consolidaram e revisaram esses desenvolvimentos.

E: Em sua opinião, qual foi o impacto da CITT nos estudos posteriores da área?

RC: Posso lhe dizer que a implementação da (CITT) em estudos especialmente da área de Ciências Térmicas é vasta. São milhares de pesquisas que utilizam a técnica híbrida, e um número muito maior empregando a técnica clássica. Nos meus trabalhos, desde o doutorado nos anos 80, venho tendo diversas parcerias e desenvolvendo vários estudos nas áreas de Energia Nuclear, de Petróleo e Gás, Ambiental, Aeroespacial, Química, Biomédica, Energia Solar, Micro e Nanotecnologia, etc.

Posso destacar meu trabalho em conjunto com o Prof. Sadik Kakaç, cientista conhecido mundialmente e atuante na Universidade de Miami por muitos anos, no contexto da aplicação no resfriamento de componentes eletrônicos, que trouxe validação experimental dos modelos de convecção, problemas conjugados e respectivas soluções por (CITT), desde 1989.

Destaco também os estudos com o IAE/CTA e AEB (Centro Técnico Aeroespacial e Agência Espacial Brasileira), desde 1988, para a análise de proteção aerotermodinâmica e térmica de veículos espaciais, incluindo o projeto térmico do satélite SARA para a reentrada atmosférica; o estudo de longo prazo com o CTM-SP (Centro Tecnológico da Marinha, São Paulo), desde 1986, para a simulação e otimização da separação de isótopos em ultracentrífugas para enriquecimento de urânio; a pesquisa com a Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), desde 1989, para a análise de segurança de repositórios de superfície de rejeitos radioativos, incluindo a análise da dispersão acidental de radionuclídeos na biosfera; a pesquisa com o Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello, CENPES, Petrobras, em 2005, para a análise de sistemas de isolamento térmico de tubulações submarinas com aquecimento ativo para exploração ultra profunda de petróleo; de novo, com o CENPES, Petrobras, desde 2006, para a caracterização e simulação de convecção de nanofluidos para utilização em processos de transferência de calor em geração de energia; com as Indústrias Nucleares do Brasil (INB, Brasil), desde 2005, para a avaliação de segurança dos resíduos de mineração e beneficiamento de minério de urânio, incluindo a análise de dispersão de radionuclídeos a longo prazo na geosfera e seu impacto na biosfera, incluindo a análise das lagoas de resíduos líquidos, do repositório de resíduos sólidos e da plataforma de lixiviação de urânio; o Projeto e Construção de Túnel de Vento de Formação de Gelo para Controle Térmico de Sensores Aeronáuticos de Velocidade, com apoio da FAPERJ, desde 2010; com a Eletronuclear, desde 2013, para o projeto de sistemas de refrigeração passiva para o armazenamento (úmido) de elementos combustíveis nucleares exauridos; com a Amazul S.A. e Diretoria Geral de Desenvolvimento Nuclear e Tecnológico, DGDNTM, Marinha do Brasil, desde 2017, e financiamento do PROCAD-Defesa, em análises de dessalinização por destilação com membranas e recuperação de calor, para mencionar apenas alguns projetos mais relevantes aplicando-se a técnica generalizada.

E: Atualmente, como vem sendo utilizada a CITT? Ela continua sendo uma técnica utilizada e fornecendo soluções importantes em pesquisas?

RC: Nos últimos anos, a ênfase que tem sido dada é na unificação e simplificação do uso do (GITT) em uma solução alternativa híbrida para seus problemas. Sabemos que os métodos híbridos se tornam ainda mais presentes e aplicáveis quando sistemas de manipulação simbólica são empregados, que foram amplamente disseminados ao longo das últimas décadas.

O esforço para integrar o conhecimento na aplicação da (GITT) em um algoritmo simbólico-numérico está acontecendo no chamado código **UNIT** (*Unified Integral*

Transforms), proposto inicialmente como projeto em 2007, que é a ponte entre problemas simples que permitem uma solução analítica direta, e situações mais complexas e não-lineares que exigem sistemas de software especializados. O código aberto **U**N**IT** é uma plataforma de implementação e desenvolvimento para pesquisadores e engenheiros interessados em transformar soluções de problemas de difusão e convecção-difusão (Sphaier et al., 2011; Cotta et al., 2013; Cotta et al., 2014).

Alguns avanços recentes na GITT tem se mostrado disruptivos, como recentemente revisado (Cotta et al., 2018; 2019; 2020), incluindo a reformulação de meios heterogêneos e geometrias complexas em um domínio único, expansões em autofunções vetoriais para as equações de Navier-Stokes, adoção de problemas de autovalor convectivos, desenvolvimento de novas transformações integrais para problemas acoplados, e toda uma nova avenida aberta com o desenvolvimento de transformações integrais com problemas de autovalor não-lineares.

Ao final da entrevista, o Prof. Renato Cotta agradeceu e se mostrou extremamente interessado pelos estudos na área da História da Matemática, que se debruçam a entender como se deu a evolução de conceitos e ideias matemáticas.

Após a leitura das respostas, podemos observar que a (CITT) ainda está sendo de grande utilização e aplicação na Engenharia, se mostrando altamente produtiva e com uma roupagem moderna, ao se transformar em um algoritmo simbólico que torna sua implementação ainda mais rápida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde que começamos a estudar a Técnica da Transformada Integral, sempre procuramos informações históricas sobre a mesma, a fim de poder compreender melhor quais foram as motivações que levaram ao seu desenvolvimento e como se deu esse processo.

Após a redação da nossa dissertação de mestrado, percebemos que pouco se havia escrito sobre a história dessa técnica, apenas fragmentos presentes em teses da área de engenharia que usavam da (GITT) para resolver suas Equações Diferenciais Parciais. Com isso, buscamos o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, para propor uma tese de doutorado que tivesse como propósito a construção histórica desse conteúdo matemático.

Ao pesquisarmos a técnica e realizar um levantamento histórico aprofundado, encontramos informações que relacionavam livros, artigos e datas de modo a construir uma linha do tempo bem clara. Acreditamos que após a leitura desta presente tese, podemos entender que a técnica proposta por Koshlyakov em 1936, foi aproveitada por diversos estudiosos como Grinberg e Mikhailov, que de certo modo ampliaram suas ideias e mostraram um novo modo de se resolver EDP que modelavam problemas clássicos da física.

Vimos também a chegada de N. Özisik e R.L. Murray, que utilizaram dos procedimentos de Koshlyakov para determinar um novo método denominado de GITT, para resolver (EDP) presentes em problemas de difusão de calor. Interessante notar que nesse momento, Özisik e Murray definem de maneira mais clara o par transformada-inversa e a ideia de levar a transformada em um sistema matricial de (EDO), que após o truncamento se resolve de maneira simples.

Com a GITT consolidada, novos problemas apareceram e tornaram seu procedimento mais restrito, principalmente com os avanços da tecnologia e a evolução dos softwares com rotinas matemáticas extremamente confiáveis e precisas. Pois, nessa mesma época, mas no Ocidente, começaram a aparecer os primeiros computadores, desenvolvidos para resolverem prioritariamente as tarefas associadas ao cálculo numérico avançado, que são gerados por inúmeros problemas de origem científico-tecnológica, utilizando, por exemplo, a linguagem de programação Formulae Translation – Fortran.

Para acompanhar essa evolução, vimos o surgimento da CITT, descrita por Özisik e Mikhailov no seu livro de 1984. Nessa técnica, vemos a preocupação na unificação das soluções apresentadas de modo que ao colocar em uma rotina computacional os valores apresentem rápida convergência e que tenham relação real com o problema físico em estudo.

Essas evoluções ocorreram devido ao período da corrida tecnológica espacial, diversos países como a URSS e Bulgária, tiveram suas pesquisas concentradas no desenvolvimento de ferramentas analíticas, tal como a Transformada Integral Finita, buscando economizar ao máximo os recursos computacionais disponíveis nestes países, uma vez que eles não eram tão abundantes quanto no Ocidente.

Ao mesmo tempo, Estados Unidos e Europa concentravam-se no desenvolvimento aos métodos puramente numéricos, podem-se mencionar os bem conhecidos Métodos de Diferenças Finitas, Elementos Finitos e Volumes Finitos, que se tornaram viáveis com o advento do computador e continuaram evoluindo com o aumento de capacidade de processamento destas máquinas e são atualmente os mais populares, estando amplamente difundidos em códigos comerciais e baseados na discretização temporal e espacial das equações originais.

Portanto, os cálculos desenvolvidos no ocidente requisitavam um crescente esforço computacional, enquanto as metodologias do Leste Europeu concentravam esforços em extensas manipulações analíticas. Cabendo a pesquisadores como Özisik e Mikhailov, a união dessas duas linhas de pesquisa.

Com essas ideias, acreditamos que esse trabalho contribua para História da Matemática, já que aqui conhecemos estudiosos que dedicaram sua vida no ensino e ao desenvolvimento de um conteúdo matemático ao longo do tempo acompanhando a tecnologia presente.

Esse estudo apresenta caráter interdisciplinar, pois pode ser aproveitado tanto para um pesquisador da matemática, quanto para os da área de engenharia. E, quando falamos em aproveitar, pretendemos que a pesquisa sirva de base para se entender e ensinar essas técnicas, sabendo como foi o desenvolvimento junto aos problemas práticos e limitações que as mesmas possuíam.

Para finalizar, pretendemos fazer uma sugestão de trabalho futuro, como um seguimento dessa pesquisa. Ao terminar esse estudo, pudemos selecionar diversas teses e dissertações que nos auxiliaram na busca de informações sobre a Transformada Integral. Essas pesquisas, na sua maioria, são da área de engenharia e resolvem diversos problemas físicos que possuem uma (EDP) na sua modelagem que são facilmente resolvidas por CITT ou por GITT.

Portanto, acreditamos ser de grande relevância para a História da Matemática e até mesmo para a Engenharia, um trabalho, que discutisse a utilização e desenvolvimento da CITT nas pesquisas realizadas no Brasil.

Diante das buscas que fizemos, não encontramos trabalhos que façam esse levantamento utilizando algum banco de teses e dissertações. Dessa forma, acreditamos que seja de bom aproveitamento esse tipo de estudo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A.R.; COTTA, R.M. *Integral Transform Methodology for Convection-Diffusion Problems in Petroleum Reservoir Engineering*, Int. J. Heat & Mass Transfer, vol.38, no.18, pp.3359-3367. 1995.

APARECIDO, J.B; COTTA, R.M. *Fully Developed Laminar Flow in Trapezoidal Ducts*, 9th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, IX COBEM, V. 1, pp. 25-28, Florianópolis, SC, December. 1987.

BAYAZITOGLU, Y; ÖZISIK, M.N. *On the Solution of Graetz-type Problems with Axial Conduction*, Int. J. Heat & Mass Transfer, vol.23, pp.1399-1402. 1980.

BLOCH, M. *Apologia da História ou o Ofício do Historiador*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor. 2001.

BOGADO LEITE, S.Q; ÖZISIK, M.N; VERGHESE, K. *On the Solution of Linear Diffusion Problems in Media with Moving Boundaries*, Nucl. Sci. Engineering, vol.76, pp.345-350. 1980.

BOGADO LEITE, S.Q; ÖZISIK, M.N; VERGHESE, K. *Diffusion in a Two-Region Slab with an Eroding Boundary*, Int. J. Heat & Mass Transfer, vol.25, pp.1191-1197. 1982.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Tradução: Valéria Magalhães Iório. 8ªed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOYER, C. B.; *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2ªed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

BRASIL; Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais- PCN*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, London. 1959.

COLLEGE OF ENGINEERING NEWS. *R.L. Murray*. Disponível em: <https://www.engr.ncsu.edu/news/2011/06/24/remembering-atomic-age-pioneer-raymond-

murray-who-helped-establish-nuclear-engineering-at-nc-state/ > Acesso em: 06 de março de 2019.

COPPE – UFRJ. *Renato Cotta*. Disponível em:<http://www.pent.coppe.ufrj.br/index.php/corpo-docente/175-renato-machado-cotta.html> Acesso em: 06 de março de 2019.

COTTA, R.M; ÖZISIK, M.N. *Transient Forced Convection in Laminar Channel Flow with Stepwise Variations of Wall Temperature*, ASME Winter Annual Meeting, Miami, FL, November; also, Can. J. Chem. Eng., vol. 64, pp. 734-742, 1985.

COTTA, R.M., *Diffusion in Media with Prescribed Moving Boundaries: Application to Metals Oxidation at High Temperatures*, Proc. of the II Latin American Congress of Heat & Mass Transfer, V. 1, pp. 502-513, São Paulo, Brasil. 1986.

COTTA, R.M.; ÖZISIK, M.N. *Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature*, Int. J. Heat Mass & Transfer, V. 29, no.10, pp. 1495-1501. 1986.

COTTA, R.M.; ÖZISIK, M.N. *Diffusion Problems with General Time-Dependent Coefficients*, Rev. Bras. Ciências Mecânicas, vol. 9, no. 4, pp. 269-292. 1987.

COTTA, R.M. *Hybrid Numerical-Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems*, Num. Heat Transfer, Part B, V. 127, pp. 217-226. 1990.

COTTA, R.M; CARVALHO, T.M.B. *Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems*, 7th Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar & Turbulent Flow, Part 1, pp. 106-115, Stanford CA, July. 1991.

COTTA, R.M. PEREZ GUERRERO, J.S. *Integral Transform Method for Navier-Stokes Equations in Stream Function-Only Formulation*, Int. J. Num. Meth. in Fluids, vol. 15, pp. 399 - 409. 1992.

COTTA, R.M. *Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow*. Boca Raton: CRC Press. 1993.

COTTA, R.M; MIKHAILOV, M.D. *Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*, Wiley-Interscience, N.Y., 1997.

COTTA, R.M. *The Integral Transform Method in Thermal-Fluid Sciences and Engineering*, Begell House Inc., N.Y., 1998.

COTTA, R.M. MIKHAILOV, M.D. *Hybrid Methods and Symbolic Computations*, in: Handbook of Numerical Heat Transfer, 2nd edition, Chapter 16, Eds. W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, and J.Y. Murthy, John Wiley, New York, pp.493-522, 2006.

COTTA, R. M. *The Unified Integral Transforms (**UNIT**) Algorithm With Total and Partial Transformation: A Tribute to prof. Mikhail D. Mikhailov*. 14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Rio de Janeiro, RJ. 2012.

COTTA, R.M; KNUPP, D.C; NAVEIRA-COTTA, C. P; SPHAIER, L.A; QUARESMA, J.N.N. *Unified Integral Transforms Algorithm for Solving Multidimensional Nonlinear Convection-Diffusion Problems*, Num. Heat Transfer, part A - Applications, V.63, pp.1-27, 2013.

COTTA, R.M; KNUPP, D.C; NAVEIRA-COTTA, C. P; SPHAIER, L.A; QUARESMA, J.N.N, *The Unified Integral Transforms (UNIT) Algorithm with Total and Partial Transformation*, Comput. Thermal Sciences, V.6, no.6, pp.507-524, 2014.

COTTA, R.M; KNUPP, D.C; NAVEIRA-COTTA, *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*, Mechanical Eng. Series, Springer-Verlag, 2016.

COTTA, R.M., KNUPP, D.C., QUARESMA, J.N.N. *Analytical Methods in Heat Transfer*, In: Handbook of Thermal Science and Engineering, Chapter 1, Francis A. Kulacki et al., Eds., Springer International Publishing. 2017.

COTTA, R.M; NAVEIRA-COTTA, C.P; KNUPP, D.C; ZOTIN, J.L.Z; PONTES, P.C; ALMEIDA, A.P. *Recent Advances in Computational-Analytical Integral Transforms for Convection-Diffusion Problems*, Heat & Mass Transfer, Invited Paper, V.54, pp.2475–2496, 2018.

COTTA, R.M; LISBOA, K.M; CURI, M.F; BALABANI, S; QUARESMA, J.N.N; PEREZ GUERRERO, J.S; MACEDO, E.N; AMORIM, N.S. *A Review of Hybrid Integral Transform Solutions in Fluid Flow Problems with Heat or Mass Transfer and under Navier-Stokes Equations Formulations*, Num. Heat Transfer, Part B - Fundamentals, V.76, no.2, pp.60-87, 2019.

COTTA, R.M.; MINKOWYCZ., W.J; KAKAÇ, S.; YENER, Y.; BAYAZITOGLU, Y.; KIM, W. S.T.; VEZIROGLU, N.; SPARROW, E.M.; SACADURA, J.F. *80th birthday of Professor M.D. Mikhailov*. Disponível em: < http://wattandedison.com/Mikhailov_80.pdf> Acesso em: 06 de março de 2019.

COTTA, R.M; KNUPP, D.C; LISBOA, K.M; NAVEIRA-COTTA, C.P; QUARESMA, J.N.N; ZOTIN, J.L; MIYAGAWA, H.K. *Integral Transform Benchmarks of Diffusion, Convection-Diffusion, and Conjugated Problems in Complex Domains, 50 Years of CFD in Engineering Sciences - A Commemorative Volume in Memory of D. Brian Spalding*, Ed. A.K. Runchal, Chapter 20, pp.719-750, Springer-Verlag, 2020.

D'AMBROSIO, U. *A interface entre história e matemática: uma visão históricopedagógica*. In: FOSSA, John A. (org.). Facetas do diamante: ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro: Editora da SBHMat. 2000.

DEAKIN, M. A. B. *Euler's Invention of Integral Transforms*. Archive for History of Exact Sciences 33 pp. 307-319. 1985.

DIACU, F.; Introdução a Equações Diferenciais: Teoria e Aplicações. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

EULER, L. *Institutiones Calculi Integral. VoL* 2 (Book 1, Part 2, Section 1). St. Petersburg: Imp. Acad. Sci. Reprinted as *Op. Omn.* I 12. 1769

EULER, L. *Constructio aequationis differentio-differentialis sumto elemento du constante.* Novi Comm. Acad. Sei. Petrop. 8, 150-156. Op. Omn. I 22. 395-402. 1763.

FOURIER, J.B. (1822) *Théorie Analytique de la Chaleur.* Firmin Didot Père & Fils, Paris. Transl. “The analytical theory of heat (unabridged)”. Cosimo, New York. 2007

FOURIER, J.B. *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides*, manuscript., Bibliothèque de l'École des Ponts et Chassées, Paris. 1807

GRINBERG, G.A. *Selected Problems of Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Effects (in russian).* Akad: Nauk SSSR. 1948.

HOLY, Z. J. *Temperature and Stresses in. Reactor Fuel Elements Due to Time- and Space-dependent Heat-transfer Coefficient*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 18, pp. 145-197. 1972.

IÓRIO, V. M.; *EDP: Um Curso de Graduação.* Coleção Matemática Universitária: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2007.

KAKAÇ, S; Li. W.; COTTA, R.M. *Unsteady Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Va.riation of Inlet Temperature*, J. Heat Transfer, vol. 112, pp. 913-920. 1990.

KOSHLYAKOV, N.S. *Basic Differential Equations of Mathematical Physics*. Moscow. 1936.

KOSHLYAKOV, N.S.; SMIRNOV, M.M.; GLINER, E.B. *Differential Equations of Mathematical Physics*. Translated by Scripta Techinca, Inc. North-Holand Publishing Company, New York. 1964.

LUIKOV, A.V. *Analytical Heat Diffusion Theory*. Academic Press, New York. 1968.

LUIKOV, A.V. *Heat and Mass Transfer*. Mir Publishers. Moscow. 1972.

MACHADO, H.A.; COTTA, R.M. *Analysis of Internal Convection with Variable Physical Properties Via Integral Transformation, Num. Heat Transfer – Part A: Applications*, vol.36, no.7, pp.699-724. 1999.

MENDES, I.A. *Matemática e Investigação em Sala de Aula: tecendo redes de cognitivas na aprendizagem*. Ed. Ver. e aum. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2009.

MIKHAILOV, M.D. *Nonstationary Temperature Fields in Skin*, Energiya, Moscow. 1967.

MIKHAILOV, M.D. *General Solution of the Heat Equation in Finite Region*. International Journal Engineering Sciences, vol. 7, pp. 577-591. 1972.

MIKHAILOV, M.D. *General Solution of the Diffusion Equations Coupled at Boundary Conditions*, Int. J. Heat & Mass Transfer, vol.16, pp.2155-2164. 1973a.

MIKHAILOV, M.D. *General Solution of the Coupled Diffusion Equations*, Int. J. Eng. Science, vol.11, pp.235-241. 1973b.

MIKHAILOV, M.D; *On the Solution of the Heat Equation with Time Dependent Coefficient*, Int. J. Heat & Mass Transfer, vol.18, pp.344-345. 1975.

MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York. 1953.

NOBRE, Sergio. *Leitura Crítica da História: Reflexões Sobre a História da Matemática.* Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 531-543. 2004.

ÖLÇER, N. Y. *On the Theory of Conductive Heat Transfer in Finite Regions*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 7, p. 304. 1964.

ÖLÇER, N.Y. *Note on the General Solution of the Heat Equation*, Quart. J. Appl. Math., vol.24, p.380. 1967

ORLANDE, H.R.B.; COTTA, R.M; MINKOWYCZ, W.J.; MIKHAILOV, M. D.; KAKAÇ, S.; YENER, Y.; BAYAZITOGLU, Y. KIM. W. S.T.; VEZIROGLU, N.; SPARROW, E.M.; SACADURA, J.F. *Professor Emeritus M. Necati Özisik*. Disponível em: < http://wattandedison.com/Ozisik_m.pdf> Acesso em: 06 de março de 2019.

ÖZISIK, M.N. *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Int. Textbooks Co. 1968

ÖZISIK, M.N.; MIKHAILOV, M.D. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. John Wiley, New York. 1984.

ÖZISIK, M.N.; MURRAY, R.L. *On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters*. Journal of Heat Transfer, 96c:48–51. 1974.

ÖZISIK, M.N; GUÇERI, S.I. *A Variable Eigenvalue Approach to the Solution of Phase Change Problems,* Can. J. Chem. Eng., vol.55, pp.145-148. 1977.

PEREZ GUERRERO, J.S.; QUARESMA, J.N.N.; COTTA, R.M. *Simulation of Laminar Flow Inside Ducts of Irregular Geometry Using Integral Transforms, Computational Mechanics,* vol.25, no.4, pp.413-420. 2000.

QUARESMA, J.N.N.; COTTA, R.M. *Integral Transform Method for the Navier-Stokes Equations in Steady Three-Dimensional Flow,* Proc. of the 10th ISTP - Int. Symp. on Transport Phenomena, pp.281-287, Kyoto, Japan, November. 1997,

RUSSIAM ACADEMY OF SCIENCES. *Nikolai Sergeevich Koshlyakov*. Disponível em: < http://www.mi-ras.ru/index.php?c=inmemoriapage&id=39475&l=1> Acesso em: 06 de março de 2019.

RUSSIAM ACADEMY OF SCIENCES. *Georgiy Abramovich Grinberg*. Disponível em: < http://www.ras.ru/win/db/show_per.asp?P=.id-50226.ln-ru.dl-.pr-inf.uk-0> Acesso em: 06 de março de 2019.

SAITO, F. *Óptica, magia e ciência no século XVI: O manuscrito de telescópio de Giambattista della Porta*. XVIII Encontro da Associação Brasileira de Planetários. Santo André. 2013.

SNEDDON, I. M. *The Use of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill. 1972.

SPHAIER, L.A; COTTA, R.M; NAVEIRA-COTTA, C.P; QUARESMA, J.N.N. *The UNIT Algorithm for Solving One-Dimensional Convection-Diffusion Problems via Integral Transforms*, Int. Comm. Heat & Mass Transfer, V.38, no.5, pp.565-571, 2011.

THOMPSON, J. J.; HOLY, Z. J. *Axisymetric Thermal Response Problems for a Spherical Fuel Element With Time Dependent Heat Transfer Coefficient*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 9, pp. 29-44. 1969.

TONIDANDEL, D. A. V., ARAÚJO, A. E. A. *Conectando Transformadas: Fourier e Laplace*. Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012.

TRANTER, C.J. *Integral Transform in Mathematical Physics*. New York: John Wiley. 1962.

TROPP, E. A.; FRENKE, V. Y.; CHERNIN, A. D. *Alexander A. Friedmann: The Man Who Made the Universe Expand*. Cambridge U. Press, London. 1993.

WOLFRAM RESEARCH, *Mathematica*, Version 12.1, Champaign, IL 2020.

YENER, Y; ÖZISIK, M.N. *On the Solution of Unsteady Heat Conduction in Multi-Region Media with Time Dependent Heat Transfer Coefficient*, Proc. of the 5th Int. Heat Transfer Conf., Cu2.5, pp.188-192, Sept. 1974.

ANEXO – TERMO DE CESSÃO DE DIREITOS E DE CONSENTIMENTO ESCLARECIDO – PROF. RENATO MACHADO COTTA

TERMO DE CESSÃO DE DIREITOS E DE CONSENTIMENTO ESCLARECIDO

Considerando o depoimento que concedi, registrado em documento de texto digital, em 16 de dezembro de 2020, eu, Renato Machado Cotta, CPF 572.212.867-87, autorizo sua divulgação, cedendo os direitos autorais a Reynaldo D'Alessandro Neto, RG 35.466.166-8, para inclusão em sua tese de doutorado em desenvolvimento na UNESP e eventual menção em publicação científica relacionada à tese. Vale dizer que a entrevista versa sobre a história do Método de Transformação Integral e não tem relação com as atividades por mim desenvolvidas junto à DGDNTM, Marinha do Brasil.

Rio de Janeiro, 3 de maio de 2021

Renato Machado Cotta