



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
JULIO DE MESQUITA FILHO
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS
EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso
Curso de Graduação em Física

Introdução a Cromodinâmica Quântica e seu Formalismo

Pedro Henrique Souza Smagnoto

Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro

Rio Claro-SP
2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Pedro Henrique Souza Smagnoto

Introdução a Cromodinâmica Quântica e seu Formalismo

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2025

S635i Smagnoto, Pedro Henrique Souza
Introdução a cromodinâmica quântica e seu formalismo / Pedro Henrique Souza Smagnoto. -- Rio Claro, 2025
63 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Teoria Quântica de Campos. 2. Cromodinâmica Quântica. 3.
Campos de Gauge. 4. Força Nuclear Forte. 5. Partículas Elementares.
I. Título.

Pedro Henrique Souza Smagnoto

INTRODUÇÃO A CROMODINÂMICA QUÂNTICA E SEU FORMALISMO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (orientador)

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Prof. Dr. Everton Santos Medeiros

Rio Claro, 10 de novembro de 2025

Assinatura do(a) aluno(a)

assinatura do(a) orientador(a)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, minha mãe Ivanilda Oliveira Pereira de Souza Smagnoto e meu pai Ariosvaldo Antônio Smagnoto, já que eles são a razão principal pela qual consegui entrar e me manter na universidade. Mesmo diante de dificuldades, sempre se propuseram a me ajudar e me auxiliar. Desde minha criação, enquanto criança, incentivaram minha curiosidade e interesse científico; até minha adolescência e começo da vida adulta, apoiaram minhas decisões a respeito do meu curso. Agradeço também à minha avó materna, Geralda Oliveira, que sempre me criou com carinho, atenção e cuidado. Meu falecido avô, Joaquim Pereira de Souza, foi meu grande amigo durante minha infância e adolescência, auxiliando-me e instigando-me a sempre ser independente e fazer minhas próprias escolhas.

Agradeço também à minha melhor amiga e namorada, Elisa Yamashita Rodrigues, que me suportou, apoiou, incentivou e respeitou em todos os momentos, sendo fundamental para a escrita deste trabalho, graças às nossas conversas instigantes, à apresentação ao tema de Ciências da Computação e à ajuda ortográfica, que se mostrou fundamental no fim da escrita. Aos meus demais amigos de turma, os que seguiram até o final da graduação e alguns que saíram no caminho, deixo meus mais sinceros agradecimentos pela companhia, momentos de riso, de frustração conjunta e de camaradagem. Em especial, agradeço a Rafa Salandin, Diego Chirai (Kubo), Pedro Luis (Carlinhos), Hermes, todos da turma de 2022 que ainda seguem matriculados, seja na licenciatura ou bacharelado, e também aos meus veteranos de graduação ou pós e calouros de curso, que me ajudaram com questões técnicas ou que aturaram as minhas monitorias. Em especial, agradeço ao Willian Azevedo e Kaynan pela companhia em São Paulo durante o Journeys. Agradeço a todos os membros do grupo de pesquisa de Sistemas Quânticos de Muitos Corpos-UNESP RC. Agradeço aos meus amigos de Piracicaba e/ou que estudaram comigo no ensino médio e me fizeram companhia durante toda minha adolescência e/ou durante as sessões de RPG: Pedro Medina, Pedro Coutinho, Gustavo Alves, Gabriel Lima, Renan, Pedro Nanzer e Vitor (Vetor).

Meus agradecimentos à República Várzea, que me acolheu e me aguentou ao longo de um ano presente e dois anos “EAD”, em especial aos moradores João (Joffis), João (Geogebra/Taturana), Henrique (Curirim), Lucas (Suquinho), Thiago (Thigas) e aos veteranos de república e demais moradores que passaram por lá. Agradeço também a todas as pessoas que moraram comigo ao longo da minha graduação, em especial a toda a casa 6 da moradia estudantil e aos que dividiram quarto ou Kit comigo no meu primeiro ano da graduação.

Por fim, gostaria de agradecer a todo o corpo docente e técnico da UNESP de Rio Claro pelo serviço prestado que contribuíram para minha formação. Em especial ao meu orientador, Professor Dr. Barreiro, por me guiar e ajudar nos tópicos mais complicados de física teórica; aos demais membros da banca, Professor Dr. Paupitz e Professor Dr.

Everton, pela paciência e atenção tanto em suas aulas quanto no auxílio da escrita deste trabalho. Um agradecimento especial ao professor Renato (Renatinho) de Cálculo III e IV, à professora de didática Maria Antônia e ao técnico André.

"Em redor a decadência daquele
destroço colossal, sem limite e vazio
As areias solitárias e planas se
espalham para longe"

Percy Bysshe Shelley

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução detalhada ao formalismo e construção da cromodinâmica quântica (QCD), a teoria de gauge que descreve a força nuclear forte. A motivação para a criação da QCD surgiu da necessidade de explicar o confinamento dos quarks dentro dos hádrons e de resolver questões em aberto, como a aparente violação do princípio de exclusão de Pauli, o que levou à criação de um novo número quântico: a carga de cor. O objetivo principal deste trabalho é derivar o lagrangiano da QCD demonstrando como sua estrutura complexa surge da exigência de uma simetria de gauge local baseada no grupo $SU(3)$. Para isso, o texto parte de uma revisão dos fundamentos da teoria de campos relativística, da física de partículas e da teoria de grupos, para então aplicar o princípio de gauge à equação de Dirac. Mostrando que a natureza não-abeliana do grupo $SU(3)$ gera naturalmente os termos de auto-interação dos glúons, a característica fundamental que distingue a QCD da eletrodinâmica quântica (QED). A partir do lagrangiano, são analisadas as regras de Feynman e as correções quânticas (loops), que causam a variação da constante de acoplamento com a energia de interação. A forma como a constante varia explica os dois fenômenos centrais da teoria: a liberdade assintótica em altas energias, que permite cálculos perturbativos validados experimentalmente e com alto poder preditivo, e o confinamento levando a um regime não perturbativo em baixas energias, que geram os fenômenos de tubo de fluxo e hadronização, acarretando na perda de poder preditivo. Por fim, o trabalho discute o estado da QCD como um dos pilares do modelo padrão, ao mesmo tempo que aborda suas limitações no regime não-perturbativo, que motivam o uso de abordagens computacionais modernas como a QCD na Rede para estudar problemas em aberto, como a força nuclear residual.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos, Cromodinâmica Quântica, Campos de Gauge, Força Nuclear Forte, Partículas Elementares.

Abstract

This work presents a detailed introduction to the formalism and construction of quantum chromodynamics (QCD), the gauge theory describing the strong nuclear force. The motivation for the creation of QCD arose from the need to explain quark confinement within hadrons and to resolve open questions, such as the apparent violation of the Pauli exclusion principle, which led to the creation of a new quantum number: color charge. The main objective of this work is to derive the QCD Lagrangian, demonstrating how its complex structure emerges from the requirement of a local gauge symmetry based on the $SU(3)$ group. To achieve this, the text starts with a review of the fundamentals of relativistic field theory, particle physics, and group theory, then applies the gauge principle to the Dirac equation. It shows that the non-Abelian nature of the $SU(3)$ group naturally generates the gluon self-interaction terms, the fundamental characteristic distinguishing QCD from quantum electrodynamics (QED). From the Lagrangian, Feynman rules and quantum corrections (loops) are analyzed, which cause the variation of the coupling constant with interaction energy. The way the constant varies explains the two central phenomena of the theory: asymptotic freedom at high energies, which allows for experimentally validated perturbative calculations with high predictive power, and confinement leading to a non-perturbative regime at low energies, generating the phenomena of flux tubes and hadronization, resulting in the loss of predictive power. Finally, the work discusses the status of QCD as one of the pillars of the standard model, while also addressing its limitations in the non-perturbative regime, which motivate the use of modern computational approaches like Lattice QCD to study open problems, such as the residual nuclear force.

Keywords: Quantum Field Theory, Quantum Chromodynamics, Gauge Fields, Strong Nuclear Force, Elementary Particles.

Lista de Figuras

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Carga de cor e carga de anti-cor | 14 |
| 2 | (a) Diagrama do propagador livre dos quarks e sua regra de Feynman. (b) Diagrama do propagador livre dos glúons e sua regra de Feynman. | 40 |
| 3 | (a) Diagrama de interação quark-glúon e sua regra de Feynman. (b) Diagrama de interação de três glúons e sua regra de Feynman. (c) Diagrama de interação de quatro glúons e sua regra de Feynman. | 41 |
| 4 | Diagrama de aniquilação de um elétron e um pósitron | 42 |
| 5 | Diagramas de loop para dois vértices | 43 |
| 6 | Processo de blindagem da QED | 44 |
| 7 | Processo de anti-blindagem e blindagem da QCD | 45 |
| 8 | Conjunto de dados experimentais para a constante de estrutura fina da QCD α_s em função da energia de interação. Imagem retirada de [1]. | 46 |
| 9 | Linhas de campo do campo elétrico a esquerda e do campo de cor a direita | 47 |
| 10 | Tubo de fluxo e hadronização | 47 |

Lista de Tabelas

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Léptons carregados e seus pares neutros | 13 |
| 2 | Propriedades dos seis sabores de quarks [1] | 15 |
| 3 | Propriedades dos oito tipos de glúons | 19 |

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Revisão Teórica | 3 |
| 2.1 | Notação Relativística | 3 |
| 2.2 | Equação de Klein Gordon | 5 |
| 2.3 | Teoria de Campos | 7 |
| 2.4 | Teorema de Noether | 10 |
| 2.5 | Física de Partículas | 12 |
| 2.6 | Teoria de Grupos | 16 |
| 3 | Obtendo a Lagrangiana da QCD | 21 |
| 3.1 | Equação de Dirac | 21 |
| 3.2 | Teoria de Gauge abeliana | 26 |
| 3.3 | Lagrangiana da QCD | 29 |
| 4 | Regras de Feynman Para QCD | 36 |
| 4.1 | Diagramas de Feynman para a QCD | 37 |
| 4.2 | Fenomenologia da QCD | 43 |
| 5 | Conclusão | 49 |
| | Referências | 50 |

1 Introdução

O século XX foi fundamental para a física e ciências no geral, sendo acompanhado do desenvolvimento de teorias e descobertas com impactos tremendos, essa grande quantidade de produção científica culminou no desenvolvimento do modelo padrão, modelo esse que se baseia em uma descrição via campos quânticos, para explicar as forças fundamentais da natureza, esse modelo foi fundamental para a unificação das forças eletromagnéticas e da força nuclear fraca. Junto a isso novas partículas foram detectadas experimentalmente levando a um “zoológico de partículas”, sendo que algumas dessas partículas eram constituintes internos dos prótons e nêutrons [2], que se mantinham unidas devido uma nova força da natureza, introduzindo assim a necessidade da formulação de uma teoria capaz de explicar essa força que foi chamada de força nuclear forte. Junto a isso surgiram problemas relacionados ao princípio de exclusão de Pauli em hádrons compostos por três quarks de mesmo sabor que levaram a necessidade da criação de um novo número quântico chamado de carga de cor [3, 4, 5]. Com isso ao longo dos anos de 1960 até 1970 foi criada a teoria que estudava essa nova força, chamada cromodinâmica quântica (QCD), essa nova teoria produziu explicações matemáticas, fenomenológicas e um alto poder preditivo para se compreender o comportamento das partículas que carregavam essa nova carga.

Esse trabalho foca em dois objetivos, sendo o primeiro o de deduzir o lagrangiano da cromodinâmica quântica (QCD) e discutir sua estrutura complexa, mostrando as necessidades e consequências das estruturas matemáticas utilizadas, juntamente com o segundo objetivo que é construir isso de uma forma pedagógica e em uma “escada conceitual”, permitindo uma compreensão das ferramentas matemáticas e sua aplicação para a construção da QCD. Assim esse trabalho é dividido em um capítulo de revisão que abordará a linguagem matemática fundamental para a descrição de uma teoria de campos, sendo a notação relativística, mecânica lagrangiana e o teorema de Noether, levando a uma introdução e contextualização em física de partículas e finalizando com uma base de teoria de grupos. Sendo os demais capítulos a construção em si de uma teoria de Gauge para força nuclear forte e uma discussão conceitual dos fenômenos observáveis causados por essa força.

Atualmente a cromodinâmica quântica é um pilar fundamental para o modelo padrão com uma altíssima validação experimental em décadas de experimentos. Essa teoria se manifesta em dois regimes, um regime de altas energias chamado de liberdade assintótica onde é possível utilizar métodos perturbativos e onde a teoria apresenta um alto poder preditivo. Contudo existe um regime de baixas energias altamente não perturbativo o que leva ao fenômeno de confinamento. As escalas desse regime são abaixo de 200MeV , isso é escalas de energia usais. Nessa escala de energia existe um desafio em aberto para a física atualmente, pois a teoria perde sua capacidade preditiva, apesar de manter uma capacidade de explicação conceitual validada empiricamente. É nesse regime que se tem em aberto a dificuldade de explicar a força nuclear residual. Para isso foi desenvolvido

uma teoria chamada de QCD na rede que utiliza de métodos não perturbativos para explicar os fenômenos da QCD[6]. Essa nova teoria demanda um alto custo computacional que fomenta e acompanhando o rápido desenvolvimento computacional dos anos 2010 até atualmente. A QCD enquanto teoria de Yang-Mills também faz parte de um dos problemas do milênio relacionados a sua prova matemática.

Por fim a importância desse trabalho se manifesta no caráter introdutório de uma teoria altamente fundamental para a física moderna e na relevância para a explicação de problemas em abertos na física nuclear e de partículas.

2 Revisão Teórica

É necessário que tomemos uma revisão da teoria necessária para compreender os tópicos que serão abordados ao decorrer desse trabalho. A revisão será feita com a intenção de trazer um entendimento básico a respeito de relatividade e notação de Einstein, juntamente com a compreensão de uma equação que permite analisar a mecânica quântica do sistema, sendo essa a equação de Klein Gordon seguida de sua contextualização.

Por esse trabalho ser focado em teoria de campos se torna indispensável elucidar alguns pontos a respeito dessa teoria, trazendo uma base a respeito da mecânica lagrangiana e sua aplicação nas teorias de campos, com uma nova formulação referente a campos, se torna necessária uma rápida revisão sobre o teorema de Noether que é fundamental para compreensão das relações de simetria e conservação.

E por fim será apresentado de forma rápida e introdutória dois pontos fundamentais para a compreensão matemática e conceitual dos tópicos futuros, sendo esses pontos uma análise curta no que tange o tópico de física de partículas com um foco na apresentação da força nuclear forte e dos férmions com carga de cor (quarks) e do bóson responsável pela mediação da força forte (glúon). Com o último ponto abordado sendo álgebra de Lie e teoria de grupos, onde será apresentado as definições básicas desse grupo e algumas representações dos grupos unitários $U(1)$ e $SU(N)$.

2.1 Notação Relativística

A relatividade de Einstein se originou no início do século XX através de estudos e tentativas de se explicar fenômenos relacionados a movimento de corpos, propagação de ondas eletromagnéticas e uma série de análises de referenciais, sua base se deu através de experimentos da época que demonstravam a não existência do éter¹, tornando necessário assim uma nova forma de compreender e entender os mecanismos por detrás de fenômenos físicos associados a dinâmica e movimento, Einstein em seus trabalhos analisou a possibilidade de uma grandeza física com velocidade constante em todos referenciais no vácuo, essa grandeza já conhecida na sua época seria a velocidade da luz.

Com a elaboração de tal teoria e com os estudos de outros físicos de sua época, surgiram diversas análises a respeito de sistemas inerciais e seu comportamento, sendo então definido uma nova forma de medição de intervalo entre dois elementos [7],

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (1)$$

sendo essa invariante em todos os sistemas de referenciais inerciais² conforme os postulados da relatividade especial [8], por meio da definição em (1) torna-se interessante uma nova

¹Éter era o que se acreditava na época ser um fluido que permeava o espaço e era o meio pelo qual se propagava as ondas eletromagnéticas.

²Invariância de Lorentz.

notação, denominada quadrivetorial que é definida para os elementos do vetor posição como.

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (2)$$

Observa-se em (2) que o primeiro termo é associado a coordenada temporal e os demais termos associados as coordenadas espaciais assim sua representação também pode ser definida por

$$x^\mu = (x^0, x^i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Ou também.

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x}) = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A presença do elemento sobrescrito não é meramente simbólica, ela carrega uma definição a respeito de vetores e espaços vetoriais sendo (4) o que é definido por uma grandeza contravariante nesse caso um contravetor x^μ , desta forma é possível verificar a existência de um outro quadrielemento denominado como uma grandeza covariante sendo este um covetor.

$$x_\mu = (x_0, -\vec{x}) = (ct, -\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Naturalmente nota-se que existe uma relação entre um contravetor (4) e um covetor (5) essa relação fica mais clara se destrincharmos o covetor em um produto de duas matrizes

$$x_\mu = \begin{bmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{a_{\mu\nu}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x^\nu} \quad (6)$$

evidenciando assim a relação entre x^μ e x_μ por meio de um segundo elemento $a_{\mu\nu}$ que atua sobre x_μ , esse novo elemento é definido por métrica e está intimamente relacionado a geometria do espaço que estamos trabalhando, sendo esse espaço dos quadrivetores um espaço plano de Minkowski [9], com sua métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (7)$$

essa métrica (7) se torna muito útil uma vez que ela permite transformar qualquer elemento no espaço de Minkowski³ de uma grandeza covariante para uma contravariante e de uma contravariante para uma covariante, formalizando assim as seguintes relações

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (8)$$

com essas relações em (8) obtemos que a métrica covariante é igual a métrica contravariante.

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (9)$$

Cabe agora definir o produto escalar nessa notação, tendo em vista que o produto escalar é uma operação no espaço vetorial que atua em duas grandezas vetoriais e tem como saída um escalar

$$x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (10)$$

o resultado de (10) é um escalar de Lorentz condizente e análogo com a equação (1) mostrando a característica invariante de um intervalo segundo a relatividade como evidenciado pelos postulados da relatividade restrita.

Por convenção é comum nas áreas de relatividade e campos trabalhar com o sistema de unidades naturais [10], $c = \hbar = k = 1$ que será utilizado daqui em diante.

Utilizando dessa notação compacta define-se os operadores diferenciais com as derivadas parciais na forma covariante

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (11)$$

e a contravariante.

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (12)$$

É interessante obtermos o produto escalar entre as derivadas contravariante e covariante

$$\partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square \quad (13)$$

que é chamado Operador d'Alembertiano [7].

2.2 Equação de Klein Gordon

Com o desenvolvimento teórico e experimental da teoria da relatividade e da mecânica quântica, naturalmente surgiram propostas de se unificar matematicamente essas duas teorias, uma vez que ambas eram generalizações da mecânica clássica. As primeiras

³Uma ressalva importante é que essa métrica definida em (7) é válida apenas para transformações no espaço de Minkowski.

tentativas se deram ao trabalhar com os operadores da mecânica quântica no espaço de posições [9], em conjunto da definição de energia relativística.

A Energia relativística é obtida através do produto escalar do quadrimomento [11], onde o quadrimomento é definido na forma contravariante como

$$p^\mu = (E, p) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \vec{p}) \quad (14)$$

e covariante como

$$p_\mu = (E, -p) = (E, -p_x, -p_y, -p_z) = (E, -\vec{p}) \quad (15)$$

utilizando a definição do produto escalar em (10) e as equações (14) e (15) temos

$$p^\mu p_\mu = (E)^2 - (\vec{p} \cdot \vec{p}) = E^2 - p^2 \quad (16)$$

trazendo a definição do momento através da conhecida relação ⁴

$$p^\mu = mw^\mu, \quad p_\mu = mw_\mu \quad (17)$$

Um detalhe fundamental nas relações de (17) é que os termos w^μ e w_μ denominados quadriovelocidades próprias [8] são obtidos através da derivada da quadriposição pelo tempo próprio, τ uma vez que esse é um invariante de Lorentz preservando assim a estrutura invariante da álgebra no espaço de Minkowski. Com a velocidade própria é dada por

$$w^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \quad w_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (18)$$

desta maneira o produto escalar do quadrimomento também tem por resultado

$$p^\mu p_\mu = m^2 \quad (19)$$

e substituindo (19) em (16) obtemos.

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (20)$$

Tomando que os operadores energia e momento da mecânica quântica no espaço de posições são dados por

$$\hat{E} \rightarrow \frac{i\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} \rightarrow -i\nabla \quad (21)$$

substituindo em (20) e tomando que essa nova equação deve atuar em uma função que nesse caso é um campo escalar real ou complexo denotado por ϕ e ϕ^* respectivamente

⁴É apenas a relação $p = mv$ escrito na forma relativística e invariante de Lorentz.

[12], ficamos com

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)}_{\beta} \phi + m^2 \phi = \underbrace{\partial^\mu \partial_\mu}_{\beta} \phi + m^2 \phi = 0 \quad (22)$$

onde o termo β é justamente o operador d'Alembertiano (13) temos então

$$(\square + m^2) \phi = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \quad (23)$$

sendo está a equação de Klein Gordon [9].

A equação de Klein Gordon (23) é útil para se estudar o comportamento de partículas de spin nulo⁵, contudo ao se analisar a densidade de probabilidade dessa equação é possível obter como solução valores negativos [7], com uma nova reinterpretação através da teoria quântica de campos esse problema pode ser resolvido. Porém ao se estudar partículas de spin semi inteiro existe a ausência de uma estrutura matemática para analisar essas partículas, o que leva a impossibilidade de se estudar férmions⁶, culminando na necessidade de uma formulação de uma nova equação que será abordada posteriormente nesse trabalho denominada equação de Dirac.

2.3 Teoria de Campos

O uso da mecânica lagrangiana é a base para a construção da teoria de campos tanto a clássica quanto a quântica⁷ uma vez que naturalmente esse formalismo é invariante sob transformações de Lorentz devido sua natureza escalar, e é possível obter as equações de movimento a partir desta. Assim é interessante e necessário mostrar a construção de tal formalismo para a teoria de campos, tomemos por definição de lagrangiana

$$L = T - V \quad (24)$$

com T estando associado a energia cinética e V a energia potencial, essa definição é muito útil pois está intimamente relacionada a conservação de energia⁸ e a possibilidade de se escrever equações de movimentos para sistemas com forças que possam ser escritas através de um potencial generalizado [13], a lagrangiana é definida através de posições generalizadas e suas velocidades generalizadas, essa notação é útil pois elimina as necessidades de considerar vínculos e restrições [14], sendo então

$$L(\dot{q}_i, q_i), \quad V(q_i), \quad T = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \quad (25)$$

⁵Bósons escalares.

⁶Partículas de spin semi inteiro como elétrons e quarks.

⁷A construção da Teoria quântica de campos também se baseia em outros formalismos como via espaço de Fock e da segunda quantização [12].

⁸Para sistemas onde não há dependência do tempo.

assim

$$L(\dot{q}_i, q_i) = \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 - V(q_i) \quad (26)$$

também é definido uma grandeza conhecida como ação [11], que está relacionada ao comportamento dinâmico do sistema sendo,

$$S(\dot{q}_i, q_i) = \int_{t_i}^{t_f} L(\dot{q}_i, q_i) dt \quad (27)$$

a ação definida desta forma leva naturalmente a um questionamento físico sobre a dinâmica da natureza e os caminhos prováveis de um evento, surgindo assim o princípio de Hamilton ou princípio de mínima ação [13], que diz que entre todas as possíveis trajetórias de um sistema o escolhido será aquele que extremize a ação, sendo que buscamos o que minimize a ação

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(\dot{q}_i, q_i) dt = 0 \quad (28)$$

a resolução de (28) leva a equação de Euler-Lagrange [14], dada por

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (29)$$

usada para obter as equações de movimento do sistema.

Contudo ao se utilizar de campos não é possível uma descrição via esse método que é útil para sistemas de muitas partículas discretas, mas uma vez que campos são definidos como um sistema físico de infinitos graus de liberdade no espaço, torna-se necessário uma notação diferente, essa nova notação trabalha com o que é chamado de densidade lagrangiana ou lagrangiano \mathcal{L} [7], onde sua transformação para uma lagrangiana é dada por

$$L = \int \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi) d^3x \quad (30)$$

com a ação agora definida como

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int \mathcal{L} d^3x = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} d^4x \quad (31)$$

e utilizando do princípio de mínima ação (28)

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi) d^4x = 0 \quad (32)$$

rescrevendo essa variação na forma diferencial

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \quad (33)$$

o segundo termo pode ser trabalhado utilizando do teorema de Clairaut-Schwarz [15]

$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ e da regra do produto

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \quad (34)$$

rescrevendo essa nova relação no segundo termo da integral

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) \right] \delta\phi + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \right]}_{=0} \quad (35)$$

a segunda integral é nula devido as condições de contorno do sistema, definidas como $\delta\phi = 0$ para $x \in \Omega$ onde Ω é a fronteira do sistema, isso é análogo a situação da variação fixa nas extremidades de uma corda na mecânica clássica, e está intimamente relacionada a inexistência de flutuações para fora do sistema definido pelo hiper-volume do espaço tempo [16], por fim a integral será

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) \right] \delta\phi = 0 \quad (36)$$

onde para essa equação o termo $\delta\phi$ mesmo que infinitesimal ainda é não nulo uma vez que $\delta\phi$ são variações arbitrárias dentro do hiper-volume o que leva que para essa integral ser nula o único termo possível para ser anulado é o dentro dos colchetes resultando em

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \quad (37)$$

sendo a equação (37) conhecida como equação de Euler-Lagrange para campos, análoga a equação de Euler-Lagrange clássica (29), e assim como a versão clássica está permite obter as equações de movimento, contudo nesse caso as equações de movimento de campos.

A densidade de lagrangiana para campos escalares é dada por [16], com o termo de energia cinética relativística $(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi)$ e um termo de massa $-m^2\phi^*\phi$ ambos invariantes de Lorentz, desta maneira a densidade de lagrangiana para campos escalares é

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi \quad (38)$$

aplicando (38) na equação de Euler-Lagrange para campos (37) obtemos as seguintes equações de movimento

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi^*, \quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \square\phi^*, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = -m^2\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = \square\phi \quad (39)$$

substituindo esses termos em (37) resulta na equação de Klein-Gordon (23), demonstrando a utilidade dessa nova versão de mecânica lagrangiana baseada em campos para se obter as equações de movimento dos campos.

2.4 Teorema de Noether

Toda a teoria quântica de campos se baseia em simetrias e conservações de grandezas, isso leva a necessidade de um arcabouço matemático robusto e eficiente que consiga descrever essas relações da natureza, essa base matemática se deu através dos trabalhos de Emmy Noether no início do século XX [17], trabalhos esses fundamentais para solidificar a estrutura matemática da própria natureza.

Em suma o Teorema de Noether define que se existe uma invariância de um sistema por meio de determinadas transformações então existe uma grandeza física conservada, o exemplo mais clássico desse teorema é quando uma lagrangiana é invariante sob transformações temporais, tem-se conservação de energia do sistema [14].

Pode-se definir um conjunto de três transformações usuais para campos sendo essas do tipo

$$\text{Transformações em } x^\mu = \begin{cases} \text{Translação: Conservação da Energia e/ou Momento.} \\ \text{Rotação: Conservação do Momento Angular.} \end{cases}$$

e o terceiro tipo sendo transformações diretas sobre ϕ onde essas levam a rotações sobre grupos internos que acarretam na conservação de números quânticos no tempo [16], as transformações desse tipo são responsáveis pelo surgimento por exemplo da carga elétrica, carga de cor e isospin dentro da teoria quântica de campos, essa base será melhor abordada ao decorrer desse trabalho quando for apresentado teoria de grupos.

Uma transformação sobre o campo ϕ do tipo $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha\Delta\phi$, sendo $\alpha\Delta\phi = \delta\phi$, uma transformação infinitesimal sobre o campo, essa transformação leva a uma variação na ação do tipo

$$\alpha\Delta S = \int d^4x \Delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \alpha\Delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\alpha\Delta\phi) \right] \quad (40)$$

análogo ao que foi feito em (34) chegamos em

$$\alpha\Delta S = \int d^4x \left\{ \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right]}_{=0} \alpha\Delta\phi + \alpha\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi \right] \right\} \quad (41)$$

onde o termo nulo é a equação de Euler-Lagrange para campos (37), e o termo não nulo passa a ser definido como

$$\alpha \int d^4x \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi \right]}_{J^\mu} = \alpha \int d^4x \partial_\mu J^\mu \quad (42)$$

com o termo J^μ definido como corrente de Noether

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta \phi}{\alpha} \quad (43)$$

a ação deve ser invariante pela transformação $\phi \rightarrow \phi'$ assim

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (44)$$

Analisando a componente temporal J^0 que será chamada de Carga:

$$Q = \int d^3x J^0 \quad (45)$$

utilizando da relação (44)

$$0 = \int d^3x \partial_\mu J^\mu = \int d^3x \partial_0 J^0 + \int d^3x \partial_i J^i \quad (46)$$

a segunda integral da igualdade é tratada como nula uma vez que é baseado na não existência de fluxo de corrente para fora ou para dentro do sistema e o termo de superfície deve se anular ao tomar a superfície indo para o infinito, com o termo J^i se anulando suficientemente rápido no infinito [16], desta forma o termo não nulo é escrito como

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int d^3x J^0}_Q = \frac{d}{dt} Q = 0 \quad (47)$$

assim existe uma conservação de carga mediante transformações em ϕ .

Devido a natureza desse trabalho o interesse no teorema de Noether se dá pelas transformações de campo, contudo como já citado existem transformações relacionadas as coordenadas espaciais e temporais, sendo essas do tipo $x^\mu \rightarrow x^\mu + b^\mu$ onde o termo b é um deslocamento constante que cria $\phi(x^\mu) \rightarrow \phi(x^\mu + b^\mu)$ e a variação do campo é do tipo $\delta \phi = \phi(x^\mu + b^\mu) - \phi(x^\mu)$, esse tipo de transformação vai levar a variações na densidade de lagrangiana que com o desenvolvimento acabará na seguinte relação [9]

$$\mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi = T_\nu^\mu \quad (48)$$

sendo este o tensor energia-momentum que segue a relação $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$, cujo a análise de suas componentes temporal T_0^0 e espaciais T_i^0 pela lei de conservação leva à

$$\frac{d}{dt} \int d^3x T_\nu^0 = 0 \quad (49)$$

onde a conservação da energia é pela coordenada temporal e a conservação do momento pelas coordenadas espaciais [16], análogo ao caso clássico.

2.5 Física de Partículas

A evolução das ideias a respeito dos blocos básicos que constituem a matéria datam de mais de dois mil anos, sendo tão antiga quanto a própria curiosidade que move a humanidade na busca de respostas sobre o funcionamento da natureza. Pode-se traçar o que seria as primeiras ideias mais elaboradas a respeito desse tópico com os filósofos gregos dando contribuições sobre como se imaginavam a estrutura da matéria [18].

Demócrito sugeriu que a matéria era composta por partículas denominadas átomos cujo significado é aquilo que não pode ser dividido [19], ao longo da história essas ideias se mantiveram sem grandes avanços significativos por boa parte do período da idade média e idade moderna. Contudo mesmo nesses períodos existiram algumas ideias dentro da alquimia (que futuramente viria a ser a química). Avanços significativos nas bases da química foram dados pelos estudos de Antoine Lavoisier no final da idade moderna e começo da idade contemporânea.

De fato por quase todo século XIX, quem mais se dedicou aos estudos da matéria foram os químicos, dando avanços nas ideias de átomo, como as propostas de Dalton que resgatava muito da visão de Demócrito. Contudo a rápida evolução e expansão das ciências aliada a revolução industrial levaram a novas descobertas de substâncias e elementos, e com essas descobertas se tornou claro a existência de padrões entre certos grupos de elementos, o que por sua vez culminou nos trabalhos do químico Mendeleiev criando o que viria a ser a tabela periódica [20].

Com as noções de padrões e periodicidade surgiram indagações sobre os blocos elementares da matéria e sobre a sua indivisibilidade, juntamente aos avanços nas teorias eletromagnéticas e na descoberta do elétron no fim do século XIX [18], rapidamente surgiram experimentos no início do século XX para se estudar o átomo, sendo um dos mais famosos desse período o experimento da folha de ouro de Rutherford que levou a comprovação experimental do próton, surgindo assim agora uma nova partícula.

Não demorou muito para o desenvolvimento de hipóteses a respeito da existência de uma partícula de massa quase idêntica ao próton mas de carga neutra denominada nêutron, essa que viria a ser descoberta em 1932 por James Chadwick, sendo o que parecia ser a última partícula que constituía o átomo [19].

O átomo agora era composto por um núcleo extremamente denso de prótons e nêutrons e orbitado por elétrons, porém análogo ao descobrimento dos elementos e seus padrões o mesmo ocorreu com o próton e o nêutron. Com o avanço da ciência dos aceleradores e colisores de partículas, das técnicas de emulsão e compreensão dos processos radioativos, ocorreu um verdadeiro enfeverar da física de partículas, com novas partículas sendo descobertas, novos padrões identificados, novas teorias sendo criadas e novas subdivisões sendo evidenciadas, até culminar na descoberta de partículas elementares verdadeiramente indivisíveis.

Todas essas descobertas e teorias levou ao longo da segunda metade do século XX

naquela que é uma das senão a mais bem sucedida teoria das ciências naturais: o Modelo Padrão [21], que categoriza as partículas fundamentais que constituem a matéria. Sendo esses os quarks e léptons, e as partículas responsáveis pela mediação das forças fundamentais como a Eletromagnética, Nuclear Fraca, Nuclear Forte e Gravitacional sendo esses os bósons de calibre e um bóson escalar denominado bóson de Higgs, responsável pelo mecanismo que da massa aos bósons da força fraca.

Por esse trabalho ser sobre teoria de campos e não de física de partículas, não será aprofundado tópicos mais complexos a respeito da física de partículas, o interesse nessa revisão está nas classificações das partículas, sua constituição, propriedades e relações de interação.

A classificação mais básica e fundamental para partículas elementares⁹ se dá através de dois grupos

$$\text{Tipos de partículas: } \begin{cases} \text{Férmions: Partículas de spin semi inteiro.} \\ \text{Bósons: Partículas de spin inteiro.} \end{cases}$$

sendo que os férmions seguem a estatística de Fermi-Dirac e o princípio da exclusão de Pauli e os bósons seguem a estatística de Bose-Einstein não seguindo o princípio da exclusão de Pauli [22].

Dentro dos férmions existem duas subdivisões, quarks e léptons e sua subdivisão se dá por meio que quais forças eles interagem, os léptons não interagem por meio da força forte interagindo apenas por meio da força eletromagnética e força fraca, onde existem os léptons carregados e os léptons neutros, cada lépton carregado tem seu lépton neutro associado [23] como visto na tabela 1.

Tabela 1: Léptons carregados e seus pares neutros

| | |
|---------------|-----------------------------|
| Elétron e^- | Neutrino do Elétron ν_e |
| Múon μ^- | Neutrino do múon ν_μ |
| Tau τ^- | Neutrino do Tau ν_τ |

Os quarks foram inicialmente propostos através de uma tentativa de refinar a classificação octal, sistema de agrupamento e categorização de partículas denominadas bárions, sendo previstos como blocos elementares desse tipo de partícula [21], quarks foram detectados experimentalmente na década de sessenta, suas características totalmente diferentes como carga elétrica fracionada, a incapacidade de serem detectados isolados e o que parecia ser novos números quânticos, causou um desenvolvimento rápido de diversas teorias para explicar essas características.

Hoje sabe-se que os quarks carregam além da carga elétrica um outro tipo de carga, conhecida como carga de cor, proposta para explicar como os quarks poderiam existir no

⁹Que não podem ser divididas.

interior de hádrons sem violar o princípio da exclusão de Pauli¹⁰, criando assim um novo grau de liberdade interna, esse tipo de carga vem por convenção na forma de três cores, vermelho (r), azul (b) e verde (g).

A forma de classificar está nova carga foi baseada no fato de não se observar partículas constituídas de quarks com carga de cor líquida diferente de zero, efeito esse conhecido como confinamento, levando a criação desse sistema inspirado nas cores primárias onde a soma das três cores resultam no branco, neutro de cor.

Na realidade existem seis cores, já que existem os antiquarks que carregam consigo as anti-cores, sendo o anti-vermelho(\bar{r}) o ciano, o anti-azul(\bar{b}) o amarelo e o anti-verde(\bar{g}) o magenta, baseado no sistema de cores subtrativos onde a soma das três cores tem como resultado o preto¹¹ também neutro de cor [21] essa divisão pode ser vista na figura 1.

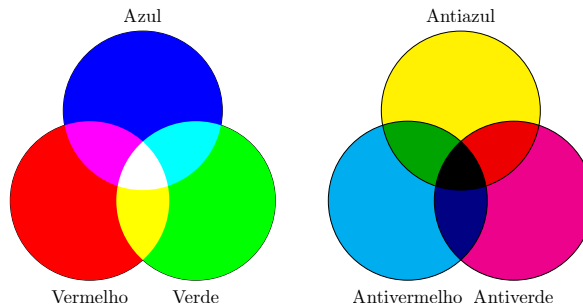


Figura 1: Carga de cor e carga de anti-cor

Assim os dois grupos de férmions passam agora a serem os léptons sem cores isto é brancos, e os quarks coloridos, essa nova carga de cor surge matematicamente através de uma simetria global pelo grupo $SU(3)$ de cor[3].

Os quarks também carregam um número quântico conhecido por numero bariônico de valor $+1/3$ para os quarks e $-1/3$ para os antiquarks. Atualmente se conhece a existência de seis quarks onde seus nomes são dados pelos seus sabores up, down, charm, strange, top e bottom, assim quarks carregam, carga elétrica (Q), carga de cor que é dinâmica¹², número bariônico (B) e cinco números quânticos de sabor sendo, isospin (I_3), charm (C), strangeness (S), topness (T) e bottomness (B') como pode ser visto na tabela 2.

O segundo grupo denominado bósons são responsáveis pela mediação das forças da natureza, existindo os bósons elementares sendo esses divididos em cinco tipos de bósons de spin não nulo e um bóson escalar, e os bósons compostos denominados mésons, os

¹⁰O bárion $\Delta^{++}(uuu)$ [4], apresentava três quarks de mesmo sabor, mesmo momento angular e mesmo spin sendo sua função de onda simétrica.[24].

¹¹Não existe cor preta na cromodinâmica quântica, mesmo para anti-cores o resultado da soma das três cores é por definição a cor branca, a cor preta na imagem é apenas resultado do sistema subtrativo de cor.

¹²Quarks trocam cores através dos gluôn.

Tabela 2: Propriedades dos seis sabores de quarks [1]

| Nome | Símbolo | Q | B | I_3 | C | S | T | B' | m |
|---------|---------|--------|-------|--------|-----|------|------|------|----------------------|
| up | u | $+2/3$ | $1/3$ | $+1/2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $2,2 \text{ MeV}$ |
| down | d | $-1/3$ | $1/3$ | $-1/2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $4,7 \text{ MeV}$ |
| charm | c | $+2/3$ | $1/3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $1,27 \text{ GeV}$ |
| strange | s | $-1/3$ | $1/3$ | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 96 MeV |
| top | t | $+2/3$ | $1/3$ | 0 | 0 | 0 | $+1$ | 0 | $173,21 \text{ GeV}$ |
| bottom | b | $-1/3$ | $1/3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | $4,18 \text{ GeV}$ |

bósons elementares de spin não nulos e as respectivas forças que eles mediam são [25].

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fóton } \gamma : \text{Força eletromagnética.} \\ \text{Bósons } W^\pm \text{ e Bóson } Z^0 : \text{Força nuclear fraca.} \\ \text{Glúon } g : \text{Força nuclear forte.} \end{array} \right.$$

Para a cromodinâmica quântica o interesse se dá nos glúons, existindo oito glúons, o diferencial desses glúons se dá pelo fato deles também carregarem a carga de cor¹³, desta forma acontecem fenômenos de auto-interação, fundamentais para compreender a fenomenologia da cromodinâmica quântica, como será abordado futuramente nesse trabalho.

Dentre as forças da natureza a força nuclear forte é de longe a mais intensa tendo um fator de escala de $\sim 10^{38}$ em relação a força gravitacional, contudo a força nuclear forte também é uma das com menor alcance com um alcance da escala dos núcleons¹⁴ de $\sim 10^{-15}m$. Existem também os bósons compostos por quarks denominados mésons, que interagem pela força forte, dentro desses os píons desempenham um papel fundamental na coesão nuclear, onde diversos processos de troca de píons entre prótons e nêutrons são responsáveis por esse efeito [24].

Uma terceira categoria de partículas são os hádrons, porém esses não são de fato um grupo distinto mas sim um apanhado de representantes dos férmions e dos bósons, hádrons são partículas compostas por quarks que podem ser divididas em dois subgrupos com base na quantidade e tipo dos quarks que as compõem sendo [21]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Férmions: Bárions e antibárions} \rightarrow \psi = \psi(qqq), \psi = \psi(\bar{q}\bar{q}\bar{q}) \\ \text{Bósons: Mésons} \rightarrow \psi = \psi(q\bar{q}) \end{array} \right.$$

com o próton sendo construído por $p^+ = (uud)$ e o nêutron $n^0 = (udd)$, ambos bárions [21].

O número bariônico de uma partícula segue a seguinte relação $B = \frac{1}{3}(n_q - n_{\bar{q}})$, existe também a denominada hipercarga que sua quantidade é definida por $Y = B + C + S + T' + B'$, e a carga elétrica para hádrons é então escrita como $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$, é fácil verificar

¹³Sendo uma cor e uma anti-cor.

¹⁴Prótons e nêutrons.

para o próton e o nêutron que essas grandezas são válidas, uma vez que:

$$\begin{cases} \text{Próton : } B = 1, S = 0 \rightarrow Y = 1, I_3 = +\frac{1}{2} \rightarrow Q = +1 \\ \text{Nêutron : } B = 1, S = 0 \rightarrow Y = 1, I_3 = -\frac{1}{2} \rightarrow Q = 0 \end{cases}$$

Notavelmente a “criação” do conceito de carga de cor representa um passo fundamental e inovador para as explicações fenomenológicas da matéria hadrônica, contudo essa hipótese deve ser acompanhada de um modelo matemático para sua descrição e formulação rigorosa. Onde a teoria de grupos e mais especificamente o grupo $SU(3)$ fornecerão a estrutura matemática adequada para essa descrição, como será analisado em capítulos subsequentes.

2.6 Teoria de Grupos

O interesse pela teoria de grupos nesse trabalho se deve as relações de grupos com simetrias, que desempenham um papel fundamental na física como discutido em 2.4, teoria de grupos é um ramo complexo e abstrato da matemática, portanto esse trabalho não tem como objetivo um aprofundamento nos tópicos mais rigorosos e densos desse tema mas sim coletar algumas ferramentas matemáticas que se mostram úteis na elaboração de tópicos futuros.

Um grupo é definido como um conjunto G de elementos (a, b, c, \dots) e operação (\odot) que estabelecem as seguintes propriedades mediante operações [26]

- a) Fechamento: $\forall a, b \in G, a \odot b = c \in G$
- b) Associatividade: $\forall a, b, c \in G, (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$
- c) Elemento identidade: $\exists I \in G \mid \forall a \in G, a \odot I = I \odot a = a$ (I é chamado de elemento identidade)
- d) Elemento inverso: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \mid a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = I$ (a^{-1} é chamado elemento inverso)

também define-se que se para um determinado grupo onde $a \odot b = b \odot a$ este é chamado de grupo abeliano e se $a \odot b \neq b \odot a$ este é chamado de grupo não abeliano.

Os grupos unitários são grupos que respeitam a relação $UU^\dagger = U^\dagger U = I$, onde U é uma matriz, U^\dagger é sua adjunta e I a matriz identidade, $U(N)$ é o conjunto de todos grupos unitários $N \times N$, sendo seu representante mais simples o grupo $U(1)$ que é definido por um escalar. Elementos de um grupo podem ser representados mediante parâmetros que possuem analogias as relações de entrada e saída de um função $y = f(x)$ [26], onde o termo de entrada é o x , assim elementos de um determinado grupo G são escritos através de um conjunto finito de parâmetros $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$ onde o elemento g do grupo G pode ser definido como

$$g = G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) \quad (50)$$

e o elemento identidade I é definido com todos os parâmetros nulos.

$$I = G(0, 0, 0 \dots 0) \quad (51)$$

Diferentemente dos grupos discretos discutidos até então, existe um conjunto especial de grupos cujos parâmetros são contínuos. Por serem diferenciáveis, esses grupos permitem uma abordagem via expansões infinitesimais através da série de Taylor. Essa estrutura possibilita que elementos do grupo estejam infinitesimalmente próximos da identidade, permitindo uma expansão em torno da identidade na forma $U(\delta\theta) \approx \mathbb{I} - i\delta\theta^a T^a$. Esse tipo de grupo, em especial, leva o nome de Grupo de Lie, onde o termo T^a é definido como um gerador do grupo.

Os geradores são responsáveis por determinar a estrutura matemática local do grupo e tem uma álgebra própria definida através do comutador. Devido à propriedade de fechamento, o comutador de dois geradores deve resultar em uma combinação linear dos próprios geradores do grupo. Assim, define-se a Álgebra de Lie através da seguinte relação fundamental[11].

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (52)$$

chamada de álgebra de Lie, onde T^a, T^b, T^c são denominados geradores ¹⁵ do grupo e $f^{abc} \in \mathbb{R}$ são chamados constantes de estrutura do grupo.

Pode-se representar um elemento de um grupo unitário através da notação da álgebra de Lie dada da seguinte maneira

$$U = e^{-i\theta^a T^a} \quad (53)$$

com o parâmetro θ podendo ser números reais ou funções.

Para o caso do grupo $U(1)$ fica claro que seu comutador é nulo e portanto este é um grupo abeliano

$$U_1 U_2 = e^{-i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{-i\theta_2} e^{-i\theta_1} \quad (54)$$

transformações via elementos de grupos são permitidas e válidas para o teorema de Noether, sendo possível uma transformação do tipo

$$\phi \rightarrow \phi' = U\phi = e^{-i\theta^a T^a} \phi \quad (55)$$

onde no caso do grupo $U(1)$ que tem apenas um gerador dado por $T = 1$ essa transformação fica

$$\phi' = e^{-i\theta^a} \phi \quad (56)$$

sendo essa uma rotação no círculo unitário complexo, uma vez que uma densidade de lagrangiana é invariante mediante essa transformação então uma carga é conservada como

¹⁵Os subíndices a, b, c para esse tópico e futuros onde aparecerem grupos, não estão relacionados a notação relativística de contravetores e covetores, são apenas termos para denotar a numeração dos gerados dos grupos.

será mostrado futuramente nesse trabalho.

Existem também os grupos especiais unitários denominados $SU(N)$ sendo esses subgrupos dos grupos $U(N)$, onde esses grupos além de seus elementos serem unitários esses também tem $\det = 1$ enquanto seus geradores tem $\text{Tr} = 0$ [26], e a quantidade de geradores desses grupos é dado pela relação $n_G = N^2 - 1$, e o seu rank^{16} é dado por $N - 1$.

Para o estudo de teoria quântica de campos e as teorias que descrevem as forças da natureza os grupos relacionados são o grupo $U(1)$ com um gerador e que é responsável pela descrição da força eletromagnética, o grupo $SU(2)$ na sua representação fundamental¹⁷ tem os três geradores determinados pelas matrizes de Pauli dadas por [27]

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

com seu gerador sendo

$$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad (58)$$

e sua álgebra de Lie do tipo

$$[T^a, T^b] = i\frac{1}{2}\sigma^c \quad (59)$$

sendo esse grupo responsável pela descrição da força nuclear fraca.

Para o estudo da força nuclear forte e por consequência da cromodinâmica quântica, o grupo que descreve essa teoria é o grupo $SU(3)$ com oito geradores dados por $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ com λ^a sendo as matrizes de Gell-Mann [11]

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & (60) \\ \lambda^7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo que as matrizes de Gell-Mann tem traço nulo, e respeitam a seguinte relação de

¹⁶Quantidade de matrizes que podem ser diagonalizadas simultaneamente no grupo, portanto comutam entre todos os elementos do grupo [26].

¹⁷Grupos podem ser representados na forma fundamental, isso é sua menor representação possível, ou na forma adjunta, que pode conter quaisquer matrizes $N \times N$, desde que essas respeitem a álgebra de Lie do grupo, isto é sua relação de comutação [24].

comutação

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i \sum_{c=1}^8 f^{abc} \lambda^c, \quad [T^a, T^b] = i \sum_{c=1}^8 f^{abc} T^c \quad (61)$$

com o traço definido por.

$$\text{Tr} [T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (62)$$

Essas matrizes também respeitam a relação da álgebra de Lie (52), onde as constantes de grupo não nulas são

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{165} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{376} = \frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (63)$$

por meio desse grupo se baseia a estrutura do grupo $SU(3)_C$ de cor, onde a carga de cor pode ser representada por meio das seguintes matrizes [25]

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

e a anti-cor via as seguintes matrizes.

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Uma característica fundamental dos grupos dentro de uma análise de teoria quântica de campos é que o número de geradores de um grupo é exatamente o número de portadores de uma determinada força em uma teoria [7], para o eletromagnetismo que é descrito pelo grupo $U(1)$, existe apenas um gerador que é descrito como o portador da força eletromagnética o fóton (γ), para a força nuclear fraca o grupo $SU(2)$, tendo três geradores sendo os portadores bósons (W^\pm, Z^0), e para a força nuclear forte o grupo $SU(3)$ tem oito geradores, sendo que existem oito glúons (g), e esses geradores atuarão como operadores de transformação de cor do seu respectivo glúon, onde os respectivos glúons e suas matrizes associadas são

Tabela 3: Propriedades dos oito tipos de glúons

| Tipo de glúon | Matriz associada | Função de onda | Ação de cor |
|---------------|------------------|---|---|
| 1 | λ_1 | $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{g} + g\bar{r})$ | Troca cor entre vermelho e verde |
| 2 | λ_2 | $\frac{-i}{\sqrt{2}}(r\bar{g} - g\bar{r})$ | Troca cor entre vermelho e verde |
| 3 | λ_3 | $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g})$ | Conserva a cor interagindo com vermelho e verde |
| 4 | λ_4 | $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r})$ | Troca cor entre vermelho e azul |
| 5 | λ_5 | $\frac{-i}{\sqrt{2}}(r\bar{b} - b\bar{r})$ | Troca cor entre vermelho e azul |
| 6 | λ_6 | $\frac{1}{\sqrt{2}}(g\bar{b} + b\bar{g})$ | Troca cor entre verde e azul |
| 7 | λ_7 | $\frac{-i}{\sqrt{2}}(g\bar{b} - b\bar{g})$ | Troca cor entre verde e azul |
| 8 | λ_8 | $\frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$ | Conserva a cor interagindo com todas as cores |

e como esperado de uma teoria quântica, os glúons físicos são uma superposição de

combinações de cor e anti-cor.

Também existe a relação que o rank do grupo está relacionado com o número de quantidades conservadas independentes que podem ser diagonalizadas simultaneamente por esse grupo [24], no caso do $SU(3)$ é possível diagonalizar simultaneamente duas matrizes, levando a representação simultânea do isospin I_3 pela matriz λ_3 e da hipercarga Y pela matriz λ_8 .

3 Obtendo a Lagrangiana da QCD

Com a revisão das principais ferramentas necessárias para a construção e entendimento de uma teoria quântica de campos, será efetivamente construída a base para a dedução da densidade de lagrangiana da QCD.

Como citado anteriormente a QCD é a teoria que estuda a força nuclear forte e seus elementos são férmions e bósons de spin não nulo. Para isso, é necessário a construção de uma nova equação que permite analisar a natureza matemática dos spins e então aplicar os conceitos de transformações globais e locais nessa equação e analisar as consequências de tais transformações.

Desta forma o primeiro passo a ser dado é a dedução e análise conceitual desta nova equação.

3.1 Equação de Dirac

Retomando a discussão em 2.2, a equação de Klein-Gordon (23), foi a primeira tentativa de descrever partículas relativísticas, contudo dentro de uma análise da mecânica quântica existe uma incongruência física a respeito de sua densidade de probabilidade que pela mecânica quântica é definida como $J^0 = \psi^* \psi = |\psi|^2$ [27], sendo este um valor estritamente positivo.

Contudo ao se obter a densidade de probabilidade da equação de Klein Gordon via a densidade de lagrangiana de um campo escalar complexo (38) através das seguintes transformações infinitesimais

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^* \quad (66)$$

sendo essas transformações via U(1) e invariantes, com o termo α constante, as variações infinitesimais são

$$\delta\phi = i\alpha\phi, \quad \delta\phi^* = -i\alpha\phi^* \quad (67)$$

utilizando da definição do teorema de Noether, define-se a existência de uma corrente associada, na mecânica quântica essa corrente tem como interpretação a corrente de probabilidade, sendo essa corrente calculada pela equação (43)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi \quad (68)$$

e anexando com as derivadas infinitesimais calculadas em (67) tem-se

$$J^\mu = (\partial^\mu \phi^*)(i\phi) + (\partial^\mu \phi)(-i\phi^*) = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \quad (69)$$

com a densidade de probabilidade sendo

$$J^0 = i(\phi\partial^0\phi^* - \phi^*\partial^0\phi) \quad (70)$$

onde essa densidade de carga é perfeitamente conservada via (44), contudo a interpretação de J^0 como uma densidade de probabilidade falha, pois a equação (70) pode assumir valores negativos [12].

Essa incongruência física só foi resolvida algumas décadas após sua introdução e veio através da teoria quântica de campos, que via agora a corrente de Noether e a corrente de probabilidade não mais como probabilidade mas sim como carga, assim passa a ser permitido valores negativos para a densidade de corrente, uma vez que nessa nova interpretação esses valores negativos são vistos como antipartículas de carga $-Q$.

Desta maneira a equação de Klein-Gordon passou a ser utilizada novamente, contudo a sua descrição se limitava apenas a campos escalares, não contendo nela as ferramentas matemáticas necessárias para descrever campos spinoriais e portanto não podendo descrever campos fermiônicos.

A descrição para campos fermiônicos, veio através de uma tentativa de corrigir a equação de Klein-Gordon, com uma equação dada por Paul Dirac.

A equação de Schrödinger não é um invariante de Lorentz uma vez que é definida como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \quad (71)$$

sendo que essa apresenta uma assimetria temporal e espacial, já que carrega derivadas de segunda ordem para o espaço mas de primeira ordem para o tempo [27]. Isso foi corrigido na equação de Klein-Gordon incorporando uma simetria espaço-temporal mediante derivadas de segunda ordem para ambos, porém que levavam ao problema da interpretação de probabilidades negativas como discutido anteriormente.

Para se obter uma equação com densidade de probabilidade positiva essa deve ser de primeira ordem tanto no espaço quanto no tempo operando no spinor ψ , desta forma essa nova equação pode ser inicialmente definida a partir de uma proposta do tipo [23]

$$i\partial_0\psi = \underbrace{(-i\alpha^k\partial_k + \beta m)}_H\psi \quad (72)$$

sendo que nessa equação o termos α^k e β são parâmetros a serem descobertos e o termo ∂_k são as derivadas parciais a respeito da posição, por convenção será utilizado que os índices espaciais serão $i, k = 1, 2, 3$ para evitar confusão com a unidade imaginária i . A equação estabelece uma relação com o hamiltoniano H , análogo a equação de Schrödinger. Como essa nova equação proposta deve ser invariante mediante rotações espaciais os termos α^k e β não podem ser escalares, e devem ser matrizes $N \times N$ hermitianas para que H seja hermitiano, garantindo uma densidade de probabilidade positiva.

É esperado que as componentes ψ também satisfaçam a equação de Klein-Gordon uma vez que essa segue a descrição correta da energia relativística [24]. Desta forma a ideia é que ao quadrar essa proposta de equação de Dirac ela possa retornar a relação $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, assim a dupla composição do termo H de (72), leva à

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\sum_{i,j} \frac{1}{2} (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) \partial_i \partial_j \psi - im \sum_{i=1}^3 (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \partial_i \psi + \beta^2 m^2 \psi \quad (73)$$

onde essa nova equação deve ser igual a equação de Klein-Gordon (23), portanto uma análise dos termos leva a que o termo à esquerda da igualdade da equação (73) é justamente a derivada de segunda ordem temporal do operador d'Alembertiano, e o primeiro termo à direita deve ser referente as componentes espaciais do operador assim seguem duas propriedades a serem respeitadas

$$(\alpha^i)^2 = \mathbb{I}_{N \times N}, \quad (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) = 2\delta^{ij} \mathbb{I}_{N \times N} \quad (74)$$

o ultimo termo da equação (73) é muito próximo ao termo de massa da equação de Klein-Gordon, com a diferença do termo β^2 , portanto para a igualdade ser respeitada

$$\beta^2 = \mathbb{I}_{N \times N} \quad (75)$$

e por fim o penúltimo termo da equação (73) deve ser nulo uma vez que não existe um termo equivalente para a equação de Klein-Gordon portanto.

$$(\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) = \mathbb{O}_{N \times N} \quad (76)$$

O termo ψ é então um spinor do tipo

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad (77)$$

onde cada termo do spinor deve individualmente satisfazer a equação de Klein-Gordon, também existe uma quadricorrente conservada com sua densidade positiva e a equação é invariante de Lorentz como proposto inicialmente.

Para obter a equação de continuidade e assim verificar a correção para as probabilidades negativas é necessário obter o adjunto do spinor que será

$$\psi^\dagger = \left[\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \cdot \quad \cdot \quad \psi_N^* \right] \quad (78)$$

multiplicando assim a equação de Dirac proposta em (72) a esquerda pelo adjunto

$$i\psi^\dagger \partial_0 \psi = -i\psi^\dagger \alpha^k \partial_k \psi + m\psi^\dagger \beta \psi \quad (79)$$

fazendo o mesmo agora porém pegando a equação de Dirac com o complexo conjugado e multiplicando pelo ψ a direita ficamos com

$$-i(\partial_0 \psi^\dagger) \psi = i(\partial_k \psi^\dagger) \alpha^{k\dagger} \psi + m\psi^\dagger \beta^\dagger \psi \quad (80)$$

subtraindo as equações (79) e (80) o resultado é

$$\partial_0 \underbrace{(\psi^\dagger \psi)}_{J^0} = - [(\partial_k \psi^\dagger) \alpha^{k\dagger} \psi + \psi^\dagger \alpha^k (\partial_k \psi)] + im(\psi^\dagger \beta^\dagger \psi - \psi^\dagger \beta \psi) \quad (81)$$

como α^k e β são hermitianas então $\alpha^k = \alpha^{k\dagger}$ e $\beta = \beta^\dagger$, a equação (81), pode ser escrita como uma equação de continuidade com o termo J^0 sendo a densidade de probabilidade estritamente positivo, e o termo de densidade de corrente sendo

$$J^i = \psi^\dagger \alpha^i \psi \quad (82)$$

onde esses satisfazem a equação da continuidade definida por

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (83)$$

sendo que essa equação de continuidade é a mesma que foi definida em (44), que na interpretação da teoria quântica de campos é uma corrente de carga conservada. Desta maneira a equação de Dirac, consegue agora descrever partículas de spin 1/2 e para o contexto pré interpretação da teoria quântica de campos resolvia também o problema físico da densidade de probabilidade negativa, contudo ainda falta determinar os coeficientes α^k e β .

Utilizando de (76), é possível perceber que os termos α^i e β anti-comutam, e pelas relações (74) e (75) sabe-se que o quadrado de ambas é \mathbb{I} , portanto seus autovalores devem ser ± 1 , desta forma a relação (76) pode ser multiplicada à direita por β e assim se tornando uma nova relação dada por

$$\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta \quad (84)$$

utilizando da invariância cíclica do traço

$$\text{Tr} \alpha^i = -\text{Tr} \beta \alpha^i \beta = -\text{Tr} \alpha^i \beta^2 = -\text{Tr} \alpha^i \implies \text{Tr} \alpha^i = 0 \quad (85)$$

de forma análoga $\text{Tr} \beta = 0$.

Assim com toda estrutura algébrica que as matrizes α^i e β devem seguir, é possível tirar algumas conclusões. Sendo que pelo traço de ambas ser nulo, elas devem ser de dimensão $N \times N$ par, pois devem conter de forma igual autovetores positivos e negativos, a dimensão $N \times N = 0$ não é uma opção pois é a solução óbvia, contudo existe um conjunto de matrizes complexas de dimensão dois sendo essas as matrizes de Pauli, $\sigma_i \in M[2, \mathbb{C}]$, existindo três matrizes de Pauli, todavia, é necessário que existam quatro matrizes que anti-comutam mutuamente, dessa forma a menor dimensão possível que respeite a estrutura algébrica de (74), (75) e (76) é $N = 4$, e é da forma

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \sigma^a \\ \sigma^a & \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (86)$$

multiplicando a equação de Dirac (72) pelo termo β a esquerda

$$i\beta\partial_0\psi + i\beta\alpha^k\partial_k\psi - m = 0 \quad (87)$$

e definindo

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i \quad (88)$$

onde essas novas matrizes denominadas matrizes de Dirac, respeitam a álgebra de Clifford¹⁸ $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$ e satisfazem

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (89)$$

escrevendo agora a equação (87) com as matrizes de Dirac e na forma diferencial covariante

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (90)$$

sendo esta a equação de Dirac na sua forma completa, definindo que $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ e tomando o hermitiano conjugado da equação (90) tem-se

$$(i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi}) = 0 \quad (91)$$

onde essa é equação de Dirac na forma adjunta.

A densidade de lagrangiana que gera as equações (90) e (91) é a densidade de lagrangiana de Dirac ou campo de spinores e é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (92)$$

¹⁸A Álgebra de Clifford generaliza os números complexos e os quatérnios, fornecendo a estrutura matemática natural para a descrição de geometria e spin. A relação de anticomutação apresentada é a condição definidora desta álgebra no espaço-tempo de Minkowski, sendo fundamental para garantir a invariância de Lorentz da equação de Dirac.

sendo essa invariante para transformações do tipo $\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta}\psi$ e $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\theta}$ que acarretam como mostrado em (2.4) e (2.6) uma corrente de Noether do tipo

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (93)$$

e essa corrente é a corrente de carga definida pelo número de antipartículas e partículas do sistema. A carga Q definida por (47) é a carga líquida do sistema dada pelo número de partículas menos as antipartículas. Sendo essa corrente de Noether conservada via (44).

3.2 Teoria de Gauge abeliana

Pode-se definir dentro das transformações infinitesimais dadas por (55) dois tipos, sendo as seguintes.

$$\begin{cases} \text{Transformações Globais : } \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta^a T^a} \psi, & \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\theta^a T^a} \\ \text{Transformações Locais : } \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta^a(x) T^a} \psi, & \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\theta^a(x) T^a} \end{cases} \quad (94)$$

No caso das transformações globais é nítido que essas não dependem das coordenadas no espaço-tempo e, portanto para o grupo $U(1)$ com seu gerador de grupo sendo $T^a = 1$, essa transformação é apenas uma mudança de fase. Análogo ao caso quântico onde se tem a corrente de probabilidade do tipo $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ e uma mudança de fase global do tipo $|\psi\rangle \rightarrow e^{-i\theta} |\psi\rangle$ onde a corrente de probabilidade é a mesma mediante tal transformação. Para o caso da densidade lagrangiana de Dirac essa invariância leva a uma corrente de Noether do tipo (93), como discutido em (3.1).

Existe um segundo caso de transformação como citado as transformações locais, onde os parâmetros θ dependem das coordenadas espaço-temporais e levam a simetrias que variam com essas coordenadas, para essa transformação a lagrangiana de Dirac fica da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi') &= \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} e^{i\theta^a(x)} i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-i\theta^a(x)} \psi - m \bar{\psi} e^{i\theta^a(x)} e^{-i\theta^a(x)} \psi \\ &= \bar{\psi} e^{i\theta^a(x)} i\gamma^\mu \left[(\partial_\mu e^{-i\theta^a(x)}) \psi + e^{-i\theta^a(x)} (\partial_\mu \psi) \right] - m \bar{\psi} \psi \\ &= \underbrace{\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi}_{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}} - i^2 \bar{\psi} e^{i\theta^a(x)} e^{-i\theta^a(x)} \gamma^\mu \partial_\mu \theta^a(x) \psi \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{J^\mu} \partial_\mu \theta^a(x) = \mathcal{L}' \end{aligned} \quad (95)$$

sendo que claramente não existiu uma invariância mediante uma transformação local uma vez que $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \neq \mathcal{L}'$. A corrente de Noether J^μ aparece naturalmente no termo extra estando acoplado com o fator $\partial_\mu \theta^a(x)$ sugerindo que deve existir um campo extra que esteja relacionado a interação e que levará a uma invariância da densidade de lagrangiana.

De fato para que a lagrangiana seja invariante é necessário adicionar um novo termo

que deve absorver naturalmente o termo $\partial_\mu \theta^a(x)$ e esse termo é dado por um novo elemento quadrvetorial que por convenção será A_μ , e que deve se acoplar ao termo J^μ , esse termo novo é adicionado buscando forçar uma invariância local para a lagrangiana, sendo que a lagrangiana agora será definida como

$$\mathcal{L}(\psi, A) = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (96)$$

com o termo q sendo uma constante de acoplamento ligada a carga e sua “intensidade” de interação de uma determinada força da natureza, sendo diretamente ligada a constante estrutura fina dessa força via a relação $\alpha = q^2/4\pi$ [25]. Dessa forma uma nova transformação local em ψ e $\bar{\psi}$ igual ao feito anteriormente levará à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\psi', A) &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\theta^a(x) + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \left[A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta^a(x) \right] \end{aligned} \quad (97)$$

assim para que a lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, A)$ seja invariante é exigido que o termo A_μ se transforme mediante um, “deslocamento” da seguinte forma

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta^a(x) \quad (98)$$

onde esse tipo de transformação leva o nome de transformação de Gauge e é justamente o meio pelo qual surge o campo de Gauge de uma determinada teoria quântica de campos, retomando novamente a lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, A)$ e fazendo sua transformação local tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\psi', A') &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\theta^a(x) + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \left[A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta^a(x) \right] \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \left[A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta^a(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta^a(x) \right] \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \mathcal{L}(\psi, A) \end{aligned} \quad (99)$$

portanto agora essa nova lagrangiana é invariante via transformações locais. Contudo, devido às novas transformações feitas e termos adicionados essa invariância passa a ser chamada de uma invariância de Gauge.

O novo termo que surge nessa lagrangiana é chamado de termo de interação $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \mathcal{L}_{\text{Interação}}$, assim a nova lagrangiana é dada por $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Interação}}$, sendo claramente um invariante de Lorentz uma vez que todos seus termos são escalares.

O elemento A_μ adicionado é denominado um campo, sendo esse um campo de Gauge e é esperado que esse campo contribua cineticamente para a lagrangiana mediante um novo termo que obviamente também deve ser um invariante de Lorentz e de Gauge esse

novo termo é dado através da construção de um tensor do tipo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (100)$$

sendo essa a estrutura algébrica mais simples que respeita a álgebra imposta, com o tensor (100) sendo antissimétrico. Como o novo termo deve ser um escalar para manter a invariância de Lorentz da lagrangiana ele passa a ser definido mediante o produto escalar de (100)

$$\mathcal{L}_{\text{Cinético}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (101)$$

o termo $-\frac{1}{4}$, é uma constante de proporcionalidade que surge devido a escolha de unidades utilizada.

Assim a nova lagrangiana completa é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Interação}} + \mathcal{L}_{\text{Cinético}} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} i\gamma^\mu (\partial_\mu - iqA_\mu) \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (102)$$

sendo que essa nova lagrangiana difere da lagrangiana original de Dirac apenas pelo novo termo cinético e pelo termo interno $\partial_\mu - iqA_\mu$ onde esse novo pode ser dado por

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad (103)$$

e D_μ passa a ser chamado derivada covariante surgindo sempre que uma simetria de Gauge é imposta ao sistema e está relacionado a um termo de interação associado a uma lagrangiana livre (lagrangiana de Dirac), desta forma simplificando a lagrangiana passa a ser

$$\mathcal{L}_{EM} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (104)$$

sendo que essa é exatamente a densidade de lagrangiana do eletromagnetismo quando consideramos os tensores $F_{\mu\nu}$ como sendo os do campo eletromagnético, o termo de acoplamento sendo e e A_μ sendo o quadripotencial do campo eletromagnético. Essa lagrangiana surge naturalmente ao impor uma simetria local por rotações do grupo de simetria $U(1)$, tendo um único portador da força eletromagnética denominado fóton (γ) que surge naturalmente mediante a exigência da invariância local pelo grupo $U(1)$ e estando presente no termo de interação via acoplamento da corrente J^μ com o campo de Gauge A_μ e no termo cinético via o campo de Gauge A_μ , sendo essa teoria denominada eletrodinâmica quântica ou (QED) em inglês.

Toda essa estrutura respeita as bases matemáticas impostas mediante teorias anteriores em (2.4) e (2.6). Sendo o número de geradores de um grupo igual ao número de

portadores de uma teoria, e as equações de movimento obtidas mediante a equação de Euler-Lagrange para campos (37) são as equações de movimento que descrevem entre outros as equações de Maxwell mediante a corrente de Noether $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J^\mu$, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$, sendo o primeiro termo a corrente elétrica de elétrons e pósitrons.

3.3 Lagrangiana da QCD

Como citado em (53) existem os grupos não abelianos, esses tem por característica seu comutador diferente de zero, seguem uma álgebra de Lie e respeitam objetos matemáticos de estruturas do grupo. Existem então transformações locais mediante esses grupos de simetrias não triviais, onde essas transformações são as dadas por (94). Diferente do caso para o grupo $U(1)$ de $T = 1$, os grupos que não comutam tem geradores não triviais. Para a construção da lagrangiana da QCD é utilizado o grupo $SU(3)$. Esse tipo de transformações mediante grupos não abelianos são categorizados e estudados pela teoria de Yang-Mills. Para a lagrangiana da QCD inicialmente é proposto uma transformação do lagrangiano de Dirac análoga ao feito em (95) porém pelo grupo $SU(3)$ assim ficando

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi') &= \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} e^{i\theta^a(x)T^a} i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-i\theta^a(x)T^a} \psi - m\bar{\psi} e^{i\theta^a(x)T^a} e^{-i\theta^a(x)T^a} \psi \\
&= \bar{\psi} e^{i\theta^a(x)T^a} i\gamma^\mu [(\partial_\mu e^{-i\theta^a(x)T^a}) \psi + e^{-i\theta^a(x)T^a} (\partial_\mu \psi)] - m\bar{\psi} \psi \\
&= \underbrace{\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi}_{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}} - i^2 \bar{\psi} T^a e^{i\theta^a(x)T^a} e^{-i\theta^a(x)T^a} \gamma^\mu \partial_\mu \theta^a(x) \psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu T^a \psi}_{J^{\mu a}} \partial_\mu \theta^a(x) = \mathcal{L}'
\end{aligned} \tag{105}$$

novamente essa lagrangiana não é invariante mediante uma transformação local. Contudo existe um diferencial, a nova corrente de Noether carrega um novo termo T^a , sendo esse um gerador do grupo $SU(3)$. Essa corrente de Noether é conservada em transformações globais e está ligada ao surgimento da carga de cor e sua conservação. Novamente esse termo aparece acoplado ao fator $\partial_\mu \theta^a$. Para forçar uma invariância é necessário novamente introduzir um novo termo dado por um campo de Gauge. Porém, esse novo termo não será mais um objeto trivial dado por A_μ , mas sim um objeto matemático que carregue consigo também a estrutura matemática do grupo $SU(3)$ sendo definido por

$$G_\mu = G_\mu^a T^a \tag{106}$$

onde G_μ^a é definido como oito campos de Gauge.

Assim a nova lagrangiana é análoga a (96) com os novos termos T^a e G_μ^a , ficando:

$$\mathcal{L}(\psi, G) = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + g\bar{\psi}\gamma^\mu T^a \psi G_\mu^a = \bar{\psi} i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig \underbrace{G_\mu^a T^a}_{G_\mu}) \psi - m\bar{\psi} \psi \tag{107}$$

com uma nova lagrangiana de interação dada por

$$\mathcal{L}_{\text{Int}} = g\bar{\psi}\gamma^\mu G_\mu^a T^a \psi \quad (108)$$

e neste caso a derivada covariante D_μ se torna

$$D_\mu = \partial_\mu - igG_\mu^a T^a \quad (109)$$

onde a constante de acoplamento forte é dada por g .

Para essa nova lagrangiana ser uma invariante de Gauge é necessário que a derivada covariante cancele os termos extras que surgem mediante a transformação local, portanto, a transformada covariante deve se transformar da forma

$$(D_\mu \psi)' = e^{-i\theta^a(x)T^a} (D_\mu \psi) \quad (110)$$

assim

$$(\partial_\mu - igG_\mu^a T^a) e^{-i\theta^a(x)T^a} \psi = e^{-i\theta^a(x)T^a} (\partial_\mu - igG_\mu^a T^a) \psi \quad (111)$$

para compactar a notação é convencionalizado chamar $e^{-i\theta^a(x)T^a}$ de U e $e^{i\theta^a(x)T^a}$ de U^\dagger análogo à definição de (53), compactamos também $G_\mu^a T^a = G_\mu$, $\theta^a(x)T^a = \theta$, assim

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - igG'_\mu) U\psi &= U (\partial_\mu - igG_\mu) \psi \\ (\partial_\mu U) \psi + U(\partial_\mu \psi) - igG'_\mu U\psi &= U(\partial_\mu \psi) - igUG_\mu \psi \end{aligned} \quad (112)$$

eliminando os termos $U(\partial_\mu \psi)$ e retirando o ψ que é arbitrário, ficamos com

$$(\partial_\mu U) - igG'_\mu U = -igUG_\mu \quad (113)$$

aplicando U^\dagger a esquerda dessa equação e isolando o termo que carrega G'_μ tem-se

$$-igU^\dagger G'_\mu U = -igG_\mu - U^\dagger(\partial_\mu U) \quad (114)$$

multiplicando ambos os lados por $(\frac{i}{g})$

$$U^\dagger G'_\mu U = G_\mu - \frac{i}{g} U^\dagger(\partial_\mu U) \quad (115)$$

por fim aplicando simultaneamente U a esquerda e U^\dagger a direita

$$G'_\mu = UG_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \quad (116)$$

é notável que se a transformação dada por U e U^\dagger fossem mediante grupos abelianos seria possível alterar a ordem dos produtos no primeiro termo da igualdade restando apenas

G_μ , já no segundo termo as exponenciais se cancelariam restando apenas o fator que é derrubado pela derivada. De fato nesse cenário recuperamos exatamente a proposta de transformação de Gauge para o caso do eletromagnetismo mediante grupo $U(1)$ como pode ser visto em (98). Porém as transformações impostas nesse caso não comutam entre si, desta forma uma proposta válida é uma vez que consideramos inicialmente que essas são transformações infinitesimais, isto é $|\theta| \ll 1$, é possível abrir as exponenciais via expansões de Taylor, ficando então

$$U = e^{-i\theta} \simeq 1 - i\theta - \mathcal{O}(\theta^2), \quad U^\dagger = e^{i\theta} \simeq 1 + i\theta + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (117)$$

onde termos de segunda ordem e maiores podem ser desprezados, assim a equação (116) passa a ser

$$G'_\mu \simeq (1 - i\theta)G_\mu(1 + i\theta) - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta) \quad (118)$$

desenvolvendo os termos

$$G'_\mu \simeq G_\mu + \underbrace{iG_\mu\theta - i\theta G_\mu}_{i[G_\mu, \theta]} + \mathcal{O}(\theta^2) - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta) \quad (119)$$

desprezando os termos de segunda ordem de θ e com o termo do comutador aparecendo devido a que tanto θ quanto G_μ dependem dos geradores do grupo $SU(3)$, tem-se

$$G'_\mu = G_\mu + i[G_\mu, \theta] - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta) \quad (120)$$

expandindo os termos de (G'_μ) e (θ) em termos dos geradores de grupo e desenvolvendo a equação (120)

$$G'^d_\mu T^d = G^d_\mu T^d + iG^b_\mu \theta^c [T^b, T^c] - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta^d) T^d \quad (121)$$

utilizando da álgebra de Lie definida pela equação (52)

$$G'^d_\mu T^d = G^d_\mu T^d + iG^b_\mu \theta^c (if^{bcd}T^d) - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta^d) T^d \quad (122)$$

sendo a componente na direção (T^d) dada por

$$G'^d_\mu = G^d_\mu - G^b_\mu \theta^c f^{bcd} - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta^d) \quad (123)$$

utilizando das propriedades de permutação cíclica da estrutura de grupo (f^{bcd}) e deixando os índices na forma dada por (abc) temos

$$G'^a_\mu = G^a_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) - f^{abc}G^b_\mu\theta^c \quad (124)$$

sendo essa a equação para a transformação de Gauge para o grupo $SU(3)$ e invariante

mediante transformações desse grupo, e que carrega um termo extra associado a estrutura do grupo $SU(3)$, termo esse responsável pela natureza de auto-interação dos glúons como será visto adiante.

De fato a equação (124) é a equação generalizada para transformações de Gauge, dada pela teoria de Yang-Mills. Na equação (124) consideramos os geradores de grupos e a constante de estrutura sendo pertencentes ao grupo $SU(3)$, mas se fosse considerado a constante de estrutura e os geradores do grupo $U(1)$, retornaríamos novamente na equação (98).

Novamente como feito no caso do eletromagnetismo, devemos considerar a existência de um termo cinético para o campo de Gauge, nesse caso o campo de glúons, propondo novamente um tensor como o dado por (100) tem-se

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a \quad (125)$$

e verificando sua transformação de Gauge

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a \\ &= \partial_\mu \left(G_\nu^a - \frac{1}{g} \partial_\nu \theta^a(x) - f^{abc} G_\nu^b \theta^c(x) \right) - \partial_\nu \left(G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) - f^{abc} G_\mu^b \theta^c(x) \right) \\ &= \underbrace{\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a}_{G_{\mu\nu}^a} + \frac{1}{g} \underbrace{(-\partial_\mu \partial_\nu \theta^a(x) + \partial_\nu \partial_\mu \theta^a(x))}_0 + f^{abc} (G_\mu^b \partial_\nu \theta^c(x) - G_\nu^b \partial_\mu \theta^c(x)) \neq G_{\mu\nu}^a \end{aligned} \quad (126)$$

é evidente a existência de um termo extra¹⁹, isto é, o fato de ser utilizado um grupo não abeliano levou ao surgimento de um termo extra na transformação do campo de Gauge que depende da constante de grupo, que resulta diretamente em um novo termo no campo de glúons. Isso leva à conclusão que o campo de cor livre não é um invariante de Gauge, portanto o campo “cromo-elétrico” e “cromo-magnético” não são grandezas físicas observáveis.

Queremos que esse tensor seja covariante, carregue o campo de glúons e é esperado que ele seja antissimétrico, dessa forma existe um operador matemático que consegue descrever esse comportamento, sendo esse o comutador, e o objeto matemático que será analisado é a derivada covariante

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - igG_\mu^a T^a, \partial_\nu - igG_\nu^b T^b] \quad (127)$$

¹⁹O termo zerado se da pela propriedade $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$.

desenvolvendo a equação

$$\begin{aligned}
[\partial_\mu - igG_\mu^a T^a, \partial_\nu - igG_\nu^b T^b] &= (\partial_\mu - igG_\mu^a T^a) (\partial_\nu - igG_\nu^b T^b) - \\
&\quad - (\partial_\nu - igG_\nu^b T^b) (\partial_\mu - igG_\mu^a T^a) \\
&= \underbrace{(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)}_{=0} - ig \partial_\mu G_\nu^b T^b + ig \partial_\nu G_\mu^a T^a - \\
&\quad - \underbrace{g^2 G_\mu^a G_\nu^b T^a T^b + g^2 G_\nu^b G_\mu^a T^b T^a}_{=-g^2 G_\mu^a G_\nu^b [T^a, T^b]} \\
&= -ig \partial_\mu G_\nu^b T^b + ig \partial_\nu G_\mu^a T^a - g^2 G_\mu^a G_\nu^b \underbrace{[T^a, T^b]}_{ifabcT^c} \\
&= -ig \partial_\mu G_\nu^b T^b + ig \partial_\nu G_\mu^a T^a - ig^2 f^{abc} G_\mu^a G_\nu^b T^c \\
&= -ig \underbrace{(\partial_\mu G_\nu^c - \partial_\nu G_\mu^c + gf^{abc} G_\mu^a G_\nu^b)}_{G_{\mu\nu}^c} T^c
\end{aligned} \tag{128}$$

estabelecendo a relação fundamental entre o comutador das derivadas covariantes com o tensor de campo

$$[D_\mu, D_\nu] = -igG_{\mu\nu}^c T^c \tag{129}$$

o novo tensor difere da proposta original pelo termo extra relacionado a comutatividade do grupo $SU(3)$. Sendo esse termo extra que vai garantir a covariância mediante transformações de Gauge. O tensor final fica na forma

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + gf^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \tag{130}$$

onde esse novo termo é um covariante de Gauge, portanto se transforma de maneira controlada e bem definida. Contudo este ainda não é um invariante de Gauge pois sua transformação se da seguinte maneira

$$G_{\mu\nu}^{\prime a} = U G_{\mu\nu}^a U^\dagger \tag{131}$$

porém não queremos o tensor puro, mas sim seu termo escalar, isso é o tensor ao quadrado, e esse sim é um invariante de Gauge e um invariante de Lorentz, verifica-se essa invariância utilizando de

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] &= \text{Tr} [G_{\mu\nu}^a T^a G^{\mu\nu b} T^b] \\
&= G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu b} \underbrace{\text{Tr} [T^a T^b]}_{\frac{1}{2} \delta^{ab}} \\
&= \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu b} \delta^{ab} \\
&= \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}
\end{aligned} \tag{132}$$

onde é facilmente verificável que este é um invariante de Gauge

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} [G'_{\mu\nu} G'^{\mu\nu}] &= \mathrm{Tr} [(UG_{\mu\nu}U^\dagger) (UG^{\mu\nu}U^\dagger)] \\ &= \mathrm{Tr} [UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}U^\dagger] \\ &= \mathrm{Tr} [G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]\end{aligned}\quad (133)$$

portanto a lagrangiana de termo cinético fica

$$\mathcal{L}_{\text{Cinético}} = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr} [G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \quad (134)$$

é interessante verificar que essa lagrangiana vai gerar termos extras além dos termos quadrados que estão ligados a contribuição cinética usual, para isso abre-se o produto escalar e verificar esses novos termos

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} &= (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + gf^{abc} G_\mu^b G_\nu^c) (\partial^\mu G^{\nu a} - \partial^\nu G^{\mu a} + gf^{abc} G^{\mu b} G^{\nu c}) \\ &= \underbrace{(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) (\partial^\mu G^{\nu a} - \partial^\nu G^{\mu a})}_{\text{Termo cinético puro}} +\end{aligned}\quad (135)$$

$$+ \underbrace{4gf^{abc} (\partial_\mu G_\nu^a) G^{\mu b} G^{\nu c}}_{\text{Termo cúbico}} + \quad (136)$$

$$+ \underbrace{g^2 f^{abc} f^{ade} G_\mu^b G_\nu^c G^{\mu d} G^{\nu e}}_{\text{Termo quártico}} \quad (137)$$

esses novos termos não usuais indicam uma natureza única para os grupos não abelianos, que é a auto-interação de seus bósons portadores, no caso da QCD, temos interações triplas dado pelo termo (136) e interações quádruplas mediante o termo (137). Assim os glúons não apenas se propagam livremente contribuindo para um termo cinético usual (135), mas também geram termos de auto-interação que ocorrem devido ao fato dessas partículas também carregarem carga de cor, como visto em (2.5).

Como na QCD, temos seis sabores de quarks, chamamos ψ de ψ_f e $\bar{\psi}$ de $\bar{\psi}_f$ dados pelos seguintes espinores no espaço de cor.

$$\psi_f = \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi}_f = \begin{bmatrix} r & g & b \end{bmatrix} \quad (138)$$

com f , sendo os seis sabores de quarks, o lagrangiano final fica

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Interação}} + \mathcal{L}_{\text{Cinético}} = \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_f + g\bar{\psi}_f \gamma^\mu T^a \psi_f G_\mu^a - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \quad (139)$$

simplificando os termos pela derivada covariante tem-se

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (140)$$

4 Regras de Feynman Para QCD

Uma vez obtida a lagrangiana da cromodinâmica quântica, é interessante e relevante a análise de seus termos para obter as equações matemáticas que descrevem algumas interações fundamentais, o método para obtenção desses termos de interação, é dado “sondando” as ações (31) de cada termo da lagrangiana, essa “sondagem” é feita via derivadas funcionais no espaço dos momentos, isso ocorre pois o formalismo da teoria quântica de campos é feito via quantização de Feynman, por meio de integrais de trajetórias e via métodos funcionais, como esse é um tópico extenso e complexo não será discutido nesse trabalho²⁰. Essa sondagem extrai as respectivas regras de Feynman de cada vértice de interação [28], os termos de propagação livre dos glúons e dos quarks são mais complicados de obter e são baseados em um funcional gerador.

As regras de Feynman são uma teoria perturbativa, ou seja, buscam expandir em séries de potência as perturbações de um campo quântico via sua ação, para calcular amplitudes de espalhamento. Onde a amplitude é encontrada através de um funcional gerador definido como

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi] e^{iS} \quad (141)$$

sendo que a ação pode ser separada na ação de interação e na ação livre

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi] e^{iS_{\text{Livre}}} e^{iS_{\text{Int}}} \quad (142)$$

a parte perturbativa da interação vem justamente de expandir a exponencial de ação da interação ficando então

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi] e^{iS_{\text{Livre}}} + \int \mathcal{D}[\psi] iS_{\text{Int}} e^{iS_{\text{Livre}}} + \int \mathcal{D}[\psi] \frac{(iS_{\text{Int}})^2}{2!} e^{iS_{\text{Livre}}} \dots \quad (143)$$

a primeira parte da equação é justamente a parte que leva as regras para os propagadores livres, e as demais partes levam para as regras dos vértices de interação. O interesse na amplitude de espalhamento se dá em um estudo de física de partículas em aceleradores e/ou colisores de partículas, facilitando os cálculos que seriam feitos mediante métodos tradicionais por um potencial efetivo e por soluções da equação de Schrödinger.

Devido a complexidade dessas obtenções e desse tópico, esse trabalho não ira se aprofundar no formalismo matemático para a dedução dessas regras, focando apenas em mostrar as regras, seus diagramas e uma respectiva discussão fenomenológica.

²⁰Esse tema é discutido em detalhes no capítulo 9 da referência [16] ou o capítulo 5 da referência [7].

4.1 Diagramas de Feynman para a QCD

Com a lagrangiana da QCD pronta, é possível expandir ela nos termos livres e de interação

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_f - \frac{1}{4} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) (\partial^\mu G^{\nu a} - \partial^\nu G^{\mu a}) \quad (144)$$

$$+ g \bar{\psi}_f \gamma^\mu G_\mu^a T^a \psi_f - g f^{abc} (\partial_\mu G_\nu^a) G^{\mu b} G^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} G_\mu^b G_\nu^c G^{\mu d} G^{\nu e} \quad (145)$$

sendo que os termos contidos em (144) são respectivamente o termo de propagação livre dos quarks e glúons, enquanto os termos de (145) são respectivamente os termos de interação quark-glúon, três glúons e quatro glúons. Tomando primeiramente a ação da lagrangiana de interação do quark-glúon temos

$$S_{\text{Int}} = \int d^4x g \bar{\psi}_f \gamma^\mu G_\mu^a T^a \psi_f \quad (146)$$

passando essa ação para o espaço dos momentos utilizando das seguintes definições

$$\psi(x) = \int d^4p_3 \psi(p_3) e^{-ip_3 \cdot x}, \quad \bar{\psi}(x) = \int d^4p_1 \bar{\psi}(p_1) e^{ip_1 \cdot x}, \quad G_\mu^a(x) = \int d^4p_2 G_\mu^a(p_2) e^{ip_2 \cdot x} \quad (147)$$

substituindo esses termos em (146)

$$S_{\text{Int}} = \underbrace{\int d^4x \left[e^{i \overbrace{(p_1 + p_2 - p_3)}^P \cdot x} \right]}_{(2\pi)^2 \delta^4(P)} g \left[\int d^4p_1 \bar{\psi}(p_1) \right] \gamma^\mu \left[\int d^4p_2 G_\mu^a(p_2) \right] T^a \left[\int d^4p_3 \psi(p_3) \right] \quad (148)$$

reorganizando os termos obtemos

$$S_{\text{Int}} = \int (d^4p_1) (d^4p_2) (d^4p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3) [g \bar{\psi}_f(p_1) \gamma^\mu G_\mu^a(p_2) T^a \psi_f(p_3)] \quad (149)$$

a equação (149) é a ação da interação de um quark-glúon escrito no espaço dos momentos, onde o momento total deve ser conservado e seu sentido de “entrada” ou “saída” é definido pelo termo $(p_1 + p_2 - p_3)$.

Para obter a equação que define a interação de um quark-glúon utilizamos das derivadas funcionais na equação (149) para “filtrar” o termo de interesse que nesse caso é uma interação de um quark ou antiquark, emitindo ou absorvendo um glúon e passando a ser um novo quark ou antiquark, preservando o momento, carga de cor e número de partículas/antipartículas. Esse método se apresenta aplicando a seguinte derivada funcional no

termo de ação da interação

$$\frac{\delta^3 S_{\text{Int}}}{\delta \bar{\psi}_f(p') \delta G_\mu^a(k) \delta \psi_f(p)} = \frac{\delta^3}{\delta \bar{\psi}_f(p') \delta G_\mu^a(k) \delta \psi_f(p)} \quad (150)$$

$$\times \int (d^4 p_1) (d^4 p_2) (d^4 p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3) [g \bar{\psi}_f(p_1) \gamma^\mu G_\mu^a(p_2) T^a \psi_f(p_3)]$$

aplicando as derivadas funcionais suscetivamente em relação ao objeto de interesse temos

$$\frac{\delta S_{\text{Int}}}{\delta \bar{\psi}_f(p')} = \int (d^4 p_2) (d^4 p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p' + p_2 - p_3) [g \gamma^\mu G_\mu^a(p_2) T^a \psi_f(p_3)]$$

$$\frac{\delta^2 S_{\text{Int}}}{\delta \bar{\psi}_f(p') \delta G_\mu^a(k)} = \int (d^4 p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p' + k - p_3) [g \gamma^\mu T^a \psi_f(p_3)]$$

$$\frac{\delta^3 S_{\text{Int}}}{\delta \bar{\psi}_f(p') \delta G_\mu^a(k) \delta \psi_f(p)} = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k - p) g \gamma^\mu T^a \quad (151)$$

assim obtemos a regra de Feynman que governa a interação quark-glúon, o termo algébrico do vértice da interação é dado retirando os termos de conservação do momento e multiplicada por um fator da unidade imaginaria

$$V_{\text{Int}} = ig \gamma^\mu T^a \quad (152)$$

para os demais termos de interação o processo é análogo, ou seja é escrita a ação no espaço dos momentos do termo de interação da lagrangiana da QCD de interesse e aplica-se as derivadas funcionais respectivas aos termos.

A equação da ação para a interação de três glúons (136) escrita no espaço dos momentos é

$$S_{3g} = \int (d^4 p_1) (d^4 p_2) (d^4 p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) [ig f^{abc} p_1 G_\nu^a(p_1) G^{\mu b}(p_2) G^{\nu c}(p_3)] \quad (153)$$

aplicando as derivadas funcionais nessa equação tem-se

$$\frac{\delta^3 S_{3g}}{\delta G_\mu^a(k_1) \delta G_\nu^b(k_2) \delta G_\rho^c(k_3)} = \frac{\delta^3}{\delta G_\mu^a(k_1) \delta G_\nu^b(k_2) \delta G_\rho^c(k_3)}$$

$$\times \int (d^4 p_1) (d^4 p_2) (d^4 p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) [ig f^{abc} p_1 G_\nu^a(p_1) G^{\mu b}(p_2) G^{\nu c}(p_3)] \quad (154)$$

porém para esse caso existe um diferencial, como os glúons são partículas idênticas e seus respectivos campos são indistinguíveis, qualquer troca entre eles na regra do vértice, deve ser indiferente, mas a expressão S_{3g} não é simétrica pois existe um termo de derivada que atua apenas em um campo, portanto é necessário levar em conta todas as 3! permutações dos campos e somar ao final, assim o resultado final é

$$V_{3g} = -gf^{abc} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2) + g_{\nu\rho}(k_2 - k_3) + g_{\rho\mu}(k_3 - k_1)] \quad (155)$$

a dependência de termos no momento surge justamente devido a presença da derivada na equação da ação.

Por fim para obter a regra de Feynman da interação de quatro glúons seguimos o mesmo procedimento feito para a interação de três vértices, porém com as respectivas adaptações para as permutações necessárias. A ação do termo de interação quártico no espaço dos momentos é

$$S_{4g} = \int (d^4p_1) \dots (d^4p_4) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left[-\frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} G_\mu^b(p_1) G_\nu^c(p_2) G^{\mu d}(p_3) G^{\nu e}(p_4) \right] \quad (156)$$

aplicando as derivadas funcionais

$$\frac{\delta^4 S_{4g}}{\delta G_\mu^a(k_1) \delta G_\nu^b(k_2) \delta G_\rho^c(k_3) \delta G_\sigma^d(k_4)} = \frac{\delta^4}{\delta G_\mu^a(k_1) \delta G_\nu^b(k_2) \delta G_\rho^c(k_3) \delta G_\sigma^d(k_4)} \times S_{4g} = \int (d^4p_1) \dots (d^4p_4) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left[-\frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} G_\mu^b(p_1) G_\nu^c(p_2) G^{\mu d}(p_3) G^{\nu e}(p_4) \right] \quad (157)$$

levando em conta as 4! permutações possíveis a regra de feynman final é

$$V_{4g} = -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) + f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \right] \quad (158)$$

o diferencial da interação de vértice de quatro glúons é a intensidade da força que é medida por um fator de g^2 e diferente do vértice de três glúons não existe uma dependência do momento, justamente pela lagrangiana de quatro campos de glúons não carregar um termo de derivada. As regras para os propagadores livres são mais complexas de serem obtidas, pois dependem de um funcional gerador no vácuo. Este funcional está intimamente ligado às Funções de Green no contexto de equações diferenciais, onde elas se manifestam como a resposta a uma perturbação pontual através das equações de movimento. Desta forma, a regra para o propagador livre surge matematicamente como o inverso do operador diferencial da equação de movimento de um quark no espaço de momentos. Assim, é possível definir a regra para o propagador livre do quark da seguinte forma²¹

$$\frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \delta_{ij} \quad (159)$$

o termo δ_{ij} está no espaço de cor dos quarks do grupo $SU(3)$ e garante que a cor de um

²¹Como esta é uma teoria perturbativa, a regra apresentada para o propagador livre corresponde apenas ao termo de ordem zero. A Função de Green completa é, de fato, a soma de todas as “regras” possíveis para o propagador (incluindo correções de loop que serão apresentadas futuramente).

quark é conservada durante sua propagação livre. O propagador livre dos glúons é

$$\frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \quad (160)$$

onde o termo δ^{ab} está no espaço dos glúons do grupo $SU(3)$ e garante que o tipo de glúon é o mesmo durante toda sua propagação.

As regras de Feynman podem ser representadas por figuras ao invés de regras algébricas, essa técnica é extremamente útil, pois facilita elaborar as várias interações que um sistema real pode ter, e ao utilizar de diagramas basta elaborar a soma de todos possíveis diagramas do sistema, analisar suas regras de vértice e impor a conservação dos momentos, essas figuras levam o nome de diagramas de Feynman²².

A representação para os propagadores livres é a seguinte.²³

$$\begin{array}{ll} q^b \longrightarrow q^b & g^{g\bar{b}} \text{ (linha verde ondulada) } g^{g\bar{b}} \\ \text{(a) } \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \delta_{ij} & \text{(b) } \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \end{array}$$

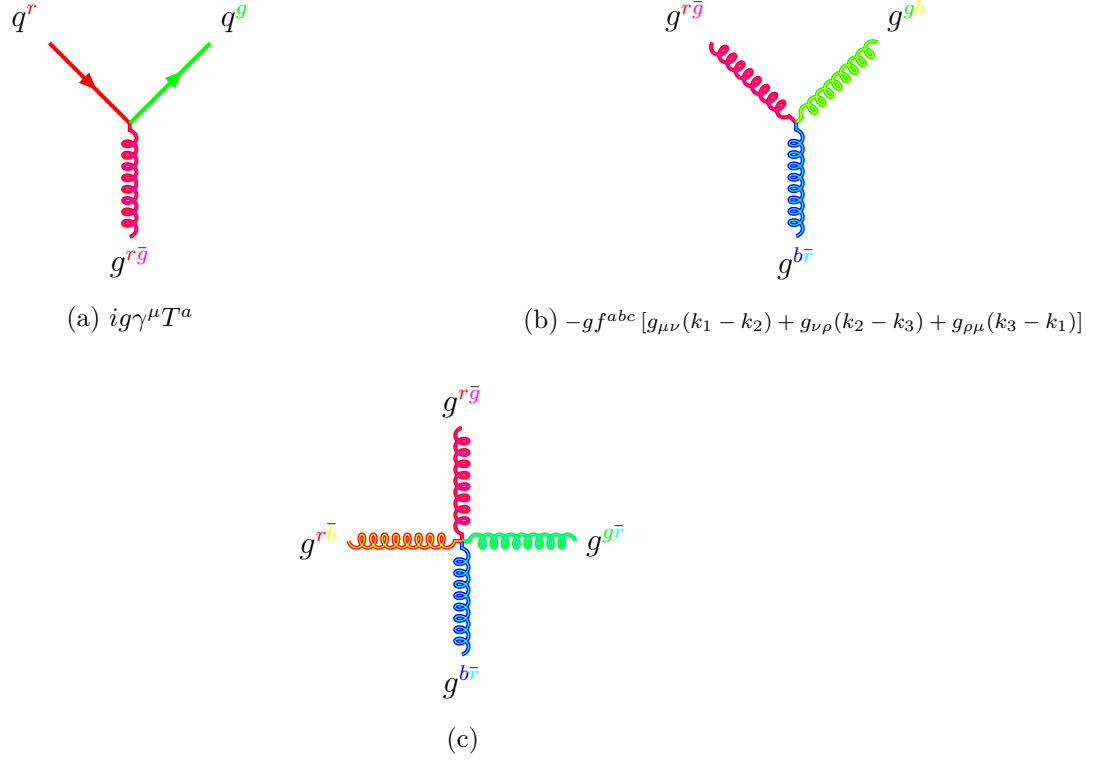
Figura 2: (a) Diagrama do propagador livre dos quarks e sua regra de Feynman. (b) Diagrama do propagador livre dos glúons e sua regra de Feynman.

Na figura (2), é possível verificar na imagem (2a) um quark de cor azul se propagando no espaço e preservando sua cor, como esperado pela equação (159), e na imagem (2b) um glúon do tipo verde-anti-azul se propaga no espaço permanecendo o mesmo, respeitando a equação (160).

Para as interações da QCD também é possível construir os diagramas, com o diferencial que os diagramas apresentam vértices que podem ser vistos na figura (3), onde esses vértices respeitam as equações (152,155)

²²Nesse caso as figuras são apenas vértices de interação e propagadores livres.

²³Nos diagramas de Feynman quarks são representados por linhas sólidas e os glúons por linhas “encaracoladas”.



$$-ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) + f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \right]$$

Figura 3: (a) Diagrama de interação quark-glúon e sua regra de Feynman. (b) Diagrama de interação de três glúons e sua regra de Feynman. (c) Diagrama de interação de quatro glúons e sua regra de Feynman.

na imagem (3a) é possível verificar um quark de cor vermelha emitindo um glúon do tipo vermelho-anti-verde, e se transformando em um quark verde que pode ser dado por uma equação do tipo $(q^r \rightarrow q^g + g^{r\bar{g}})$, de fato esse diagrama e sua regra de vértice, não representa apenas processos de mudança de cor de quarks via emissão de glúons ele representa todas as possíveis combinações de interação de quarks mediante glúons, sendo possível também, processos de absorção de um glúon, aniquilação de um par quark-antiquark e criação de pares, tendo por exemplos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Emissão: } q^r \rightarrow q^g + g^{r\bar{g}} \\ \text{Absorção: } q^g + g^{r\bar{g}} \rightarrow q^r \\ \text{Aniquilação: } q^r + q^{\bar{g}} \rightarrow g^{r\bar{g}} \\ \text{Criação de Pares: } g^{r\bar{g}} \rightarrow q^r + q^{\bar{g}} \end{array} \right.$$

Portanto fica evidente que a presença de um único campo de glúon na lagrangiana de interação(108), leva que apenas um glúon pode participar dessa interação, enquanto o gerador de grupo T^a associado ao vértice, define as regras dessa interação definindo quais quarks irão interagir nesse vértice e quais serão as rotações de cor dos quarks interagentes. O que define qual das quatro possíveis interações ocorrera é o sentido do momento das

partículas e como a análise de referencial é feito ²⁴.

Esse diagrama (3a) também fornece um argumento da necessidade dos glúons carregarem a carga de cor, para o caso da QED uma aniquilação do tipo ($e^- + e^+ = \gamma$) como pode ser visto na figura (4), leva a uma conservação de carga apenas pelo balanço líquido das cargas do elétron e do pósitron que se aniquilam, assim a carga inicial líquida que era nula, permanece nula na interação e nula ao fim da interação, por consequência o fóton não pode carregar a carga elétrica, pois isso quebraria a conservação de cargas. porém analisando um mesmo tipo de diagrama para a QCD, a aniquilação de um quark via anti-quark não ocorre de uma única forma, pois o fato de existirem três cores e três anti-cores, leva a cenários de um quark e um anti-quark com cores e anti-cores não opostas, portanto a única solução para a preservação da carga de cor, surge com o próprio portador carregar a carga e não apenas a cor mas também uma anti-cor.

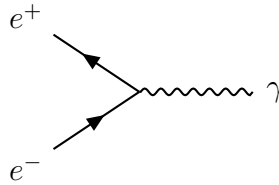


Figura 4: Diagrama de aniquilação de um elétron e um pósitron

Para os casos de interação tripla vista na imagem (3b) e interação quadrupla (3c), as regras de possibilidade para a interação são definidas para quais geradores de grupo não zeram a constante de estrutura do grupo f^{abc} para o caso de vértice triplo, e quais geradores de grupo não anulam a equação (158), portanto existe limitações sobre quais tipos de glúons podem interagir nesses vértices, e o tipo da interação é muito mais complexa que simplesmente processos de emissão, absorção, aniquilação ou criação de pares, uma vez que dependendo de qual par se analisa para o caso de quatro vértices, pode existir um misto de interações, existindo também processos de fusão ($gg \rightarrow g$) e divisão ($g \rightarrow gg$) para o caso triplo e de espalhamento ($gg \rightarrow gg$) para o caso quadruplo.

Como comentado inicialmente, as regras de Feynman são efetivamente determinadas através de uma teoria de perturbação, via expansão do termo de interação, que estão contidas em uma integral de trajetória [7], portanto o número de vértices de um diagrama é definido pela seguinte relação

$$e^{iS_{\text{Int}}} \approx \underbrace{1}_{\text{Ordem 0}} + \underbrace{iS_{\text{Int}}}_{\text{Ordem 1}} + \underbrace{\frac{(iS_{\text{Int}})^2}{2!}}_{\text{Ordem 2}} + \dots \quad (161)$$

ou seja o termo de primeira ordem da expansão é responsável por todas as regras que levam a diagramas de um vértice, sendo os três presentes na imagem (3), e os termos de

²⁴na interpretação de Feynman antipartículas são partículas voltando no tempo com momento oposto a sua partícula contraparte.

ordens superiores são responsáveis a um maior número de vértices, esses novos diagramas tem as correções dos propagadores livres, contudo são extremamente complexos de serem calculados, portanto serão tomados apenas três diagramas de segunda ordem, que estão ligados a loops.

Os diagramas de loop estão apresentados na figura (5)

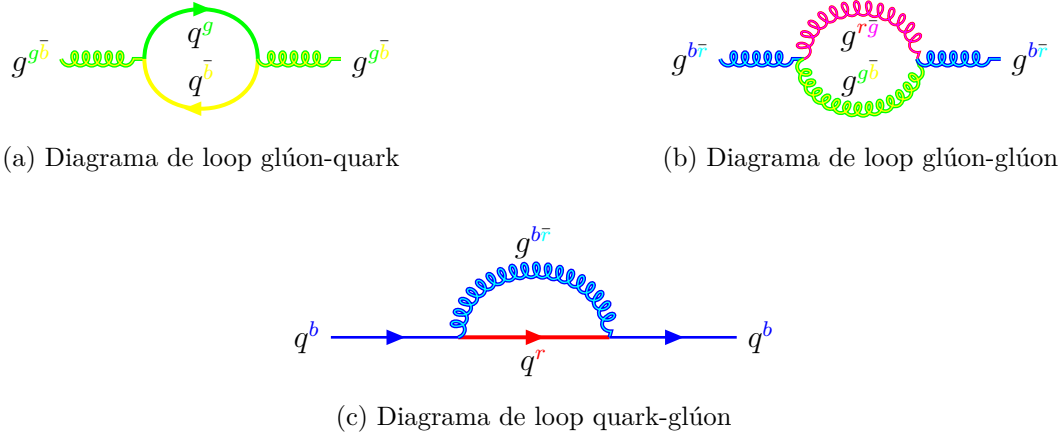


Figura 5: Diagramas de loop para dois vértices

onde a imagem (5a) é um loop referente a uma correção de segunda ordem para o propagador do glúon, é possível verificar que a equação (160), foi respeitada, pois o tipo do glúon inicial é o mesmo que o do final, com o diferencial que o primeiro e segundo vértice desse diagrama são vértices do tipo (3a). Para a imagem (5b), o mesmo é válido porém o diferencial é que seus vértices correspondem a (3b). A imagem (5c) corresponde a uma correção de segunda ordem para o propagador do quark, novamente sua propagação respeita a equação (159), ou seja a cor do quark inicial é a mesma do final e seus dois vértices correspondem ao diagrama (3a). Com esses diagramas de loops apresentados é possível verificar que podem existir mais vértices adicionados sobre os loops extras que aparecerão, criando assim correções de ordens superiores não triviais.

Com o aumento do número de vértices existe simultaneamente um aumento nas potências de g devido que, em diagramas e regras de Feynman a potência total de g em um diagrama é dada via a combinação das potências de g dos vértices individuais que compõem esse diagrama, por exemplo para o diagrama (5a) a dependência é de g^2 , devido a presença de dois vértices do tipo (3a) que tem um termo de g^1 .

O processo de loop e sua relação com o aumento da potência de g para diagramas de ordens maiores é fundamental para compreender alguns processos da fenomenologia da QCD que serão discutidos e abordados com mais detalhes no subcapítulo seguinte.

4.2 Fenomenologia da QCD

A QCD é repleta de fenômenos sem um análogo clássico, alguns desses fenômenos já foram parcialmente introduzidos ao decorrer desse trabalho como por exemplo a auto-

interação e confinamento, porém agora com um grau maior da estrutura matemática dessa teoria é possível descrever suas consequências e detalhá-las de uma forma mais profunda.

Como comentado em (2.6), a constante de acoplamento está ligado a força da interação e como visto na subseção anterior as expansões em série da exponencial que contem a ação levam aos diagramas de vértices. Sendo que esses diagramas dependem diretamente da potência de g que cresce com o número de vértices e por consequência α também cresce. Ou seja para o caso onde $g < 1$ essa série converge pois $g^n \ll g$, porém se $g > 1$ a série vai divergir no infinito pois $g^n > g$ e toda a descrição via regras de Feynman e diagramas deixa de ser válida e a capacidade preditiva da teoria se perde. Acontece que g não é de fato uma constante pois esse depende do regime de energia, ou seja podem existir cenários onde $g > 1$ e onde $g < 1$, e esses cenários são possíveis de determinar graças as correções de ordens superiores, isso é os diagramas de loop.

Existe um fenômeno chamado polarização do vácuo que está associado ao surgimento de partículas virtuais e portanto cargas entorno de uma partícula/carga nua [29], por exemplo analisando o cenário da QED ocorre que ao se colocar um elétron no vácuo partículas virtuais serão criadas em torno desse elétron, tanto pósitrons quanto elétrons, os pósitrons são atraídos para próximo do elétron, enquanto os elétrons são repelidos, criando uma nuvem de partículas virtuais, com fótons virtuais mediando a interação, ocorre que para a QED, também existem diagramas de correção de ordens superiores para o propagador do fóton sendo um desses análogo ao diagrama (5c). Essa nuvem de partículas virtuais criada leva a uma atenuação da carga nua, assim um observador que se afastasse da carga nua, viria essa carga e portanto sua constante de acoplamento ficando cada vez mais difusa e fraca, e conforme se aproxima da carga nua, viria um aumento desta, pois estaria penetrando na nuvem virtual e começando a medir o valor real da carga nua, esse processo leva o nome de blindagem e pode ser visualizado na imagem (6)

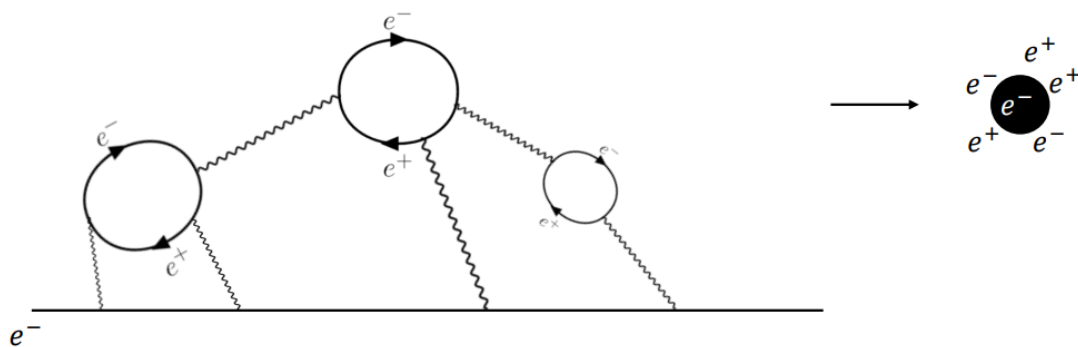


Figura 6: Processo de blindagem da QED

onde a carga nua nesse caso um elétron é representada pela linha sólida denominada e^- , e o processo de criação e interação de partículas virtuais ocorre acima dessa linha sólida, com a visualização do observador sendo representado na figura a direita, é possível fazer uma analogia ao caso clássico de um material dielétrico com um campo elétrico

aplicado.

Dessa forma é possível concluir que de fato g e α variam com parâmetros relacionados a distância/energia de interação, para a QED a constante α diminui, conforme a energia diminui e a distância aumenta. O que permite calcular essa taxa de variação e fazer previsões em regimes extremos são justamente as correções de ordem superior, elas levam a uma função β que entrega a relação de α e/ou g com a energia [30]. Para a QED o cenário é que α diminui com a distância chegando ao valor para longas distâncias de $\alpha \approx 1/137$, valor esse conhecido por constante de estrutura fina. Portanto para a QED, a descrição via expansão de séries converge e tem um alto poder preditivo, mesmo para curtíssimas distâncias e escalas de energia massiva. Dentro de uma teoria de campos, a energia onde a constante de acoplamento se torna infinita é chamada de polo de Landau e para a QED sua energia é da escala de $10^{286} eV$. [7]

Para a QCD o mesmo experimento mental pode ser feito, ocorrendo uma polarização de vácuo análogo ao da QED, isso é ao colocarmos uma carga nua por exemplo um quark de cor azul, partículas virtuais irão se formar ao redor dele, nesse caso, quarks azul e anti-azul, levando a um efeito de blindagem, porém a QCD não apresenta apenas diagramas de correção do tipo (5c), mas também correções do tipo (5b), correções essa que são consequência direta dos vértices (3b,3c) e da auto-interação dos glúons que surge naturalmente na descrição via o grupo não abeliano $SU(3)$, dessa forma, a nuvem em torno da carga nua não terá apenas quarks e antiquarks contribuindo para a constante de acoplamento g , mas também os próprios glúons emitidos pela carga nua e pela nuvem virtual, esses glúons interagem entre si podendo produzir mais glúons ou se fundir via diagramas (3b,3c), assim carregando a cor da carga nua e transferindo ela no vácuo, portanto essa nuvem de glúons agora não abafam mais a carga nua, mas amplificam ela, esse efeito é conhecido por anti-blindagem, efeito esse que pode ser comparado ao caso clássico de um material paramagnético imerso em um campo magnético [28], ambos os efeitos da QCD podem ser vistos na figura (7)

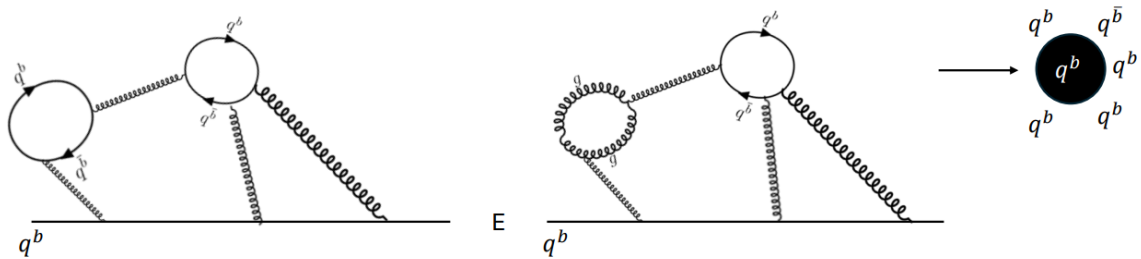


Figura 7: Processo de anti-blindagem e blindagem da QCD

onde novamente a linha sólida representa a carga nua, a primeira imagem a esquerda é o processo de blindagem análogo ao da QED (6) e o processo de anti-blindagem pode ser visto na segunda imagem, com um loop de dois vértices de tripla interação dos glúons. Por fim a última imagem na direita representa como o observador veria a carga nua.

Se para a QCD existe um “cabo de guerra” entre os efeitos de blindagem e anti-blindagem é necessário descobrir qual efeito é dominante para determinar a relação da constante de acoplamento com a energia, acontece que como para a QED é possível modelar o comportamento da função β via cálculos dos termos de correção, método esse conhecido como renormalização, esses cálculos são extensos e não serão feitos aqui, é possível ver a descrição matemática desses cálculos com mais detalhe no capítulo 16 da referencia [16] ou capítulo 9 da referencia [7]. Com os devidos cálculos feitos é obtido que a função β da QCD é dada por

$$\beta(g) = \frac{dg}{d(\ln\mu)} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3}n_c - \frac{2}{3}n_f \right) = -\frac{7g^3}{16\pi^2} \quad (162)$$

sendo $n_c = 3$ o número de cores da QCD e $n_f = 6$ o número de sabores de quarks, a função beta é negativa, portanto a constante de acoplamento aumenta com baixas energias e diminui com altas energias, mostrando que o efeito dominante é dos glúons, esse comportamento oposto ao da QED é a causa dos fenômenos de confinamento e liberdade assintótica presente na QCD. As variações da constante de estrutura fina da QCD (α_s) pela energia de interação são medidos via experimentos de colisores de partículas. Os dados experimentais para altas energias encaixam no modelo teórico, mostrando a capacidade preditiva dessa teoria nesse regime, o gráfico pode ser visualizado na figura (8)

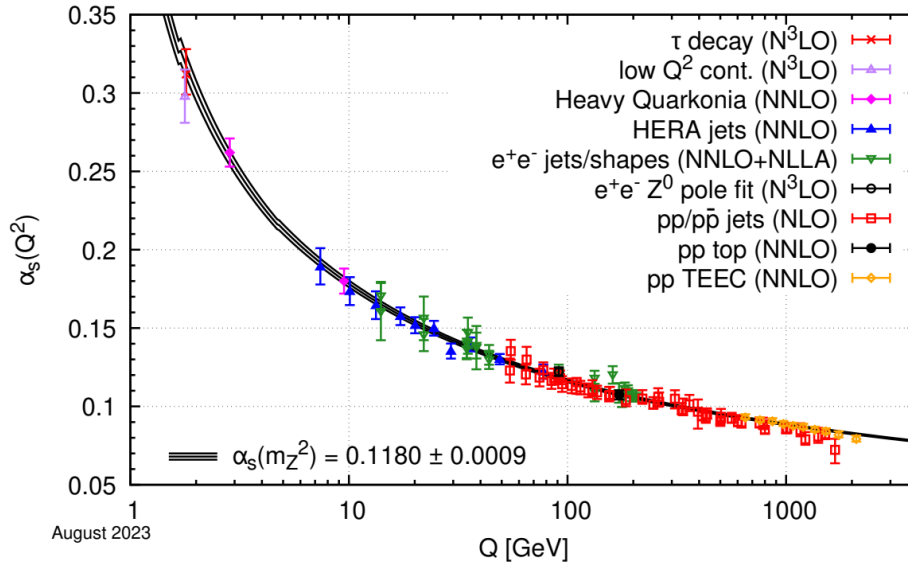


Figura 8: Conjunto de dados experimentais para a constante de estrutura fina da QCD α_s em função da energia de interação. Imagem retirada de [1].

com os dados experimentais e com o modelo teórico, é possível determinar que existe uma escala de energia onde $\alpha_s \approx 1$, esse valor é atingido aproximadamente²⁵ em 200MeV ou 1fm . Para sistemas abaixo dessa energia ou acima dessa distância, toda técnica de expansão em série de potencias perde sua capacidade preditiva pois a série diverge.

²⁵Para parâmetros de comparação a energia do núcleo do sol é da escala de $26,7\text{MeV}$.

A escala de energia onde $\alpha_s > 1$ leva ao fenômeno de confinamento esse está relacionado como citado no capítulo (2.5) a impossibilidade de se observar quarks ou glúons livres, os quarks podem apenas serem vistos em pares. A interpretação visual desse efeito se dá em dois processos, o primeiro é que o próprio campo de glúons entre dois quarks é confinado portanto ele não se dilui no espaço graças as auto-interações dos glúons e ao efeito de anti-blindagem, assim ao contrário da QED onde as linhas de campo elétrica podem ir ao infinito e se diluírem levando a uma diminuição da intensidade da interação entre duas partículas, para o caso da QCD, isto não ocorre, a auto-interação dos glúons pode ser interpretada como uma auto-interação das próprias linhas do campo de cor levando a uma colimação dessas linhas, a comparação para as linhas de campo da QED e QCD podem ser vistas na figura (9).

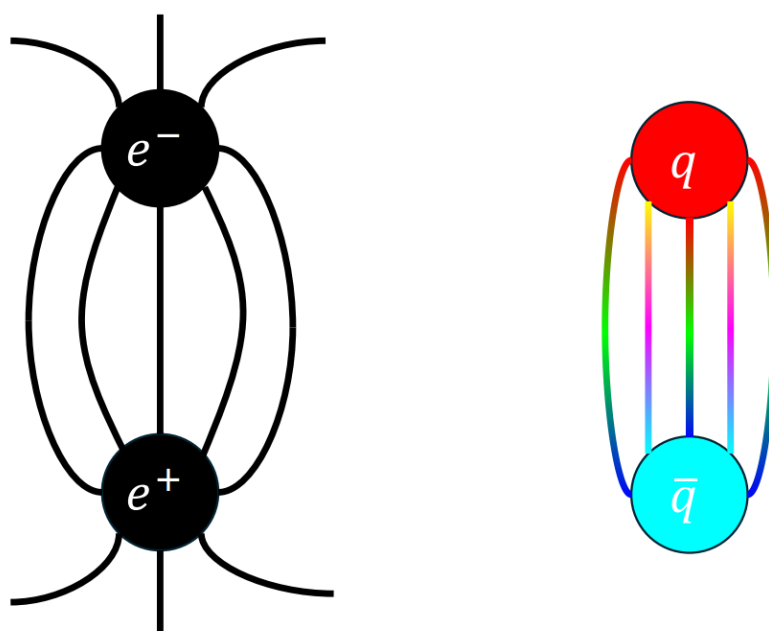


Figura 9: Linhas de campo do campo elétrico a esquerda e do campo de cor a direita

O efeito de confinamento das próprias linhas de campo levam ao fenômeno da hadronização que ocorre pois entre dois quarks existe um tubo de fluxo de glúons, ao se afastar esses quarks esse tubo de glúons se expande e a energia do tubo aumenta graças aos processos de auto-interação e do aumento do próprio g . Assim para aumentar o comprimento do tubo de fluxo a demanda de energia cresce rapidamente, até que chega um ponto que é mais favorável energeticamente a criação de massa na forma de dois quarks extras que continuar expandindo esse tubo de fluxo, a criação do novo par de quarks que leva o nome de hadronização, sendo o limite de estabilidade do tubo de aproximadamente $\approx 1 fm$, esse processo pode ser visualizado na figura (10)

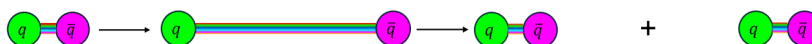


Figura 10: Tubo de fluxo e hadronização

onde inicialmente existem dois quarks interagindo via tubo de fluxo representado pela faixa colorida entre os quarks, então ocorre um processo de afastamento desses quarks até uma eventual ruptura do tubo levando a criação do novo par de quarks.

O cenário onde $g > 1$ acarretam na perda de preditividade da teoria nessas escalas de energia e dimensão e levam a um dos problemas ainda em aberto na física que é uma descrição acurada da força nuclear residual, responsável pela coesão nuclear. Essa dificuldade de descrever a força residual levaram a um dos métodos que melhor apresentou predições para a QCD em regimes de baixa energia, esse método é chamado QCD na rede e foi proposto pelo físico Kenneth G. Wilson [6]. A QCD na rede propõe uma discretização do espaço tempo em um reticulado, onde os quarks são vértices e os glúons arestas que ligam esses vértice, a passagem para um espaço-tempo discreto permite resolver as integrais de trajetórias de uma teoria de campos que agora nesse reticulado passam a ser integrais numéricas e são resolvidas por supercomputadores. porém os custos computacionais dessa técnica são enormes, levando a necessidade de construção de hardware e supercomputadores mais poderosos [31]. Graças a avanços recentes em redes neurais que possibilitam acelerar os cálculos e evoluções nas arquiteturas de memória que permitem simulações maiores, esse método vem se tornando cada vez mais aplicável e relevante para uma descrição da força nuclear forte em regimes de baixa energia, porém ainda apresenta limitações para altas densidades bariônicas.

O gráfico da figura (8) é a prova experimental da liberdade assintótica, isso é em regimes de altíssimas energia é possível verificar a existência de quarks e glúons livres, como dentro dos núcleons, permitindo cálculos e previsões com altas taxas de precisão e exatidão para experimentos de colisões e espalhamentos profundos em colisores de partículas explicando fenômenos experimentais não compreendidos até então como o bombardeamento de elétrons de alta energia em prótons, onde os dados experimentais mostravam que esses elétrons estavam colidindo com partículas pontuais que se comportavam de maneira quase livre [2], partículas pontuais essas que eram justamente os quarks no interior dos prótons.

5 Conclusão

Esse trabalho se propôs a construir o lagrangiano da QCD utilizando uma abordagem detalhada e mostrando a sua construção matemática de uma forma explícita. Onde o objetivo central foi mostrar como a estrutura da cromodinâmica quântica e seus efeitos de auto-interação juntamente com sua fenomenologia são explicadas naturalmente pelas exigências de uma simetria local via grupo $SU(3)$.

Para atingir esse objetivo foi realizado uma “escada conceitual” que se iniciou com um revisão de notação relativística, mecânica lagrangiana e teorema de Noether. Uma contextualização histórica e motivação da física de partículas para a carga de cor. Foi apresentada uma introdução a teoria de grupos para contextualizar a necessidade do grupo $SU(3)$. O passo seguinte foi utilizar da equação de Dirac e das transformações globais e locais para construir o lagrangiano da cromodinâmica quântica, onde as evidências matemáticas de auto-interação dos glúons surgiram naturalmente devido a natureza não abeliana do grupo $SU(3)$ levando as regras de interação tripla e quadrupla dos bósons mediadores dessa teoria, sendo justamente esse o tópico fundamental que distingue essa força da força eletromagnética.

O ponto central do trabalho foi utilizar do lagrangiano da QCD para obter as regras de Feynman, permitindo elaborar os diagramas de interação e autocorreção dos quarks e glúons. Essas regras e diagramas permitem elaborar o efeito de polarização de vácuo que acarreta nos fenômenos de blindagem e anti-blindagem onde isso permite de forma coesa e rigorosa justificar os fenômenos observáveis da força nuclear relacionados aos regimes perturbativos e não perturbativos. Sendo esses o confinamento e a liberdade assintótica. Por fim foi discutido sua fundamentação com base em dados experimentais e observáveis físicos como a hadronização e tubo de fluxo dessa teoria, essa análise veio da utilização de trabalhos de revisão em física de partículas [1].

Por fim nesse trabalho foi introduzido as dificuldades da cromodinâmica quântica de explicar a força nuclear residual devido as escalas de comprimento e energia, e as propostas modernas para contornar esse problema como a QCD na rede que busca explicar os fenômenos da força nuclear forte através de um sistema discretizado do espaço-tempo, abordando também as limitações computacionais para a aplicação desse método[31].

Referências

- [1] S. Navas et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 110(3):030001, 2024.
- [2] Martin Breidenbach, Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall, Elliott D. Bloom, D. H. Coward, H. C. DeStaebler, J. Drees, Luke W. Mo, and Richard E. Taylor. Observed behavior of highly inelastic electron-proton scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23:935–939, 1969.
- [3] M. Y. Han and Y. Nambu. Three-triplet model with double SU(3) symmetry. *Phys. Rev.*, 139:B1006–B1010, Aug 1965.
- [4] O. W. Greenberg. Spin and unitary-spin independence in a paraquark model of baryons and mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:598–602, Nov 1964.
- [5] O. W. Greenberg. The Color charge degree of freedom in particle physics. 5 2008.
- [6] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys. Rev. D*, 10:2445–2459, 1974.
- [7] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [8] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.
- [9] F. Weber. *Introdução a Relatividade Geral e à Física de Estrelas Compactas*. Coleção tópicos de física. Editora Livraria da Física, 2015.
- [10] William B. Rolnick and D. B. Lichtenberg. The fundamental particles and their interactions. *American Journal of Physics*, 63(8):765–766, 08 1995.
- [11] D. McMahon. *Quantum Field Theory Demystified*. Demystified. McGraw Hill LLC, 2008.
- [12] T. Lancaster and S.J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. OUP Oxford, 2014.
- [13] Lev Davidovich Landau. *The classical theory of fields*, volume 2. Elsevier, 2013.
- [14] W. Nolting. *Theoretical Physics 2: Analytical Mechanics*. Springer International Publishing, 2016.
- [15] Hans J Weber and George B Arfken. *Essential mathematical methods for physicists, ISE*. Elsevier, 2003.
- [16] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018.

- [17] Roberta Areas, Marcia C. Barbosa, and Ademir E. Santana. Teorema de emmy n other, 100 anos: Alegoria da misoginia em ciência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(4):e20190017, 2019.
- [18] Caio Mário Castro de Castilho. Quando e como o homem começou a "ver" os átomos! *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25(4):364373, Nov 2003.
- [19] Francisco Caruso and Vitor Oguri. A eterna busca do indivisível: do átomo filosófico aos quarks e léptons. *Química Nova*, 20(3):324334, May 1997.
- [20] Geraldo M. de Lima, Luiz C. A. Barbosa, and Carlos A. L. Filgueiras. Origens e consequências da tabela periódica, a mais concisa enciclopédia criada pelo ser humano. *Química Nova*, 42(10):11251145, Oct 2019.
- [21] Marco Antonio Moreira. A física dos quarks e a epistemologia. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(2):161173, 2007.
- [22] S lvio RA Salinas. *Introdu o a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [23] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2007.
- [24] Barreiro Luiz Ant nio. *Notas de Aula: Física Nuclear e Partículas*. 2024.
- [25] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [26] J.M.F. Bassalo and M.S.D. Cattani. *Teoria de Grupos*. Editora Livraria da Física, 2008.
- [27] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, 1:898, 1986.
- [28] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein. *Quantum Chromodynamics*. Physics and astronomy online library. Springer, 2002.
- [29] Alexandre Deur, Stanley J. Brodsky, and Craig D. Roberts. Qcd running couplings and effective charges. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 134:104081, January 2024.
- [30] Simon Badger, Johannes Henn, Jan Christoph Plefka, and Simone Zoia. *Scattering Amplitudes in Quantum Field Theory*. Springer International Publishing, 2024.
- [31] Peter Boyle, Dennis Bollweg, Richard Brower, Norman Christ, Carleton DeTar, Robert Edwards, Steven Gottlieb, Taku Izubuchi, Balint Joo, Fabian Joswig, Chulwoo Jung, Christopher Kelly, Andreas Kronfeld, Meifeng Lin, James Osborn, Antonin Portelli, James Richings, and Azusa Yamaguchi. Lattice qcd and the computational frontier, 2022.