



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Inferência Bayesiana para testes acelerados "step-stress" com dados de falha sob censura e distribuição Gama

Karlla Delalibera Chagas

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Abril de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Inferência Bayesiana para testes acelerados "step-stress" com dados de falha sob censura e distribuição Gama

Karlla Delalibera Chagas

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Diretoria Técnica
de Biblioteca e Documentação - UNESP, Campus de Presidente Prudente

Chagas, Karlla Delalibera.
C424i Inferência Bayesiana para testes acelerados "step-stress" com dados de
falha sob censura e distribuição Gama / Karlla Delalibera Chagas. - 2018
180 f. : il.

Orientador: Fernando Antonio Moala
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018
Inclui bibliografia

1. Testes acelerados. 2. MCMC. 3. Funções de perda. I. Moala, Fernando
Antonio. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e
Tecnologia. III. Título.

Claudia Adriana Spindola
CRB-8ª/5790

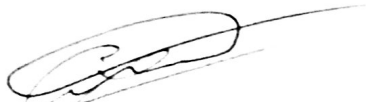
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Inferência Bayesiana para testes acelerados "step-stress" com dados de falha sob censura e distribuição Gama

AUTORA: KARLLA DELALIBERA CHAGAS

ORIENTADOR: FERNANDO ANTONIO MOALA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. FERNANDO ANTONIO MOALA

Departamento de Estatística / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. MARIO HISSAMITSU TARUMOTO

Departamento Estatística / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. JORGE ALBERTO ACHCAR

FMRP/Departamento de Medicina Social / Universidade de São Paulo

Presidente Prudente, 16 de abril de 2018

Agradecimentos

O maior objetivo deste trabalho é a discussão e a reflexão que poderá causar. Fiz esse trabalho pelo compartilhamento do conhecimento gerado e os questionamentos que ele poderá causar.

Muitas pessoas fazem parte deste trabalho. Certamente a maior parte delas indiretamente. Agradeço a toda minha família, de modo incondicional aos meus pais e irmão, Maria de Lourdes, Carlos e Victor, por serem o alicerce da pessoa que sou hoje e que me norteará todos os dias da minha vida. Por sempre me mostrarem o caminho da simplicidade e dedicação em qualquer situação. Foi somente através deles que cheguei aqui. Serei eternamente grata por isso.

A Deus por toda força concedida para que eu lutasse em busca dos meus objetivos.

Agradeço aos meus amigos Enrico, Clícia, Tânia, Débora, Thaís, Paulo e etc, por todos os dias de estudos, por todo carinho, apoio, risadas e por se tornarem aos poucos, mas intensamente, companheiros, nesse tempo acadêmico que enfrentamos.

Agradeço de modo especial ao meu grande amigo Enrico, por todo companheirismo e amizade nesses anos, por sempre me ensinar, me apoiar, me incentivar em minhas escolhas e principalmente por me mostrar que a vida irá continuar não importe o que aconteça. Agradeço a Joice, por todo apoio, paciência, incentivo e por me mostrar que os sonhos são ainda melhores quando compartilhados.

A todos os professores por todo conhecimento transmitido ao longo desses 2 anos. Ao meu orientador Fernando A. Moala, por me deixar livre para buscar aquilo que desejei. Pelas discussões e pela orientação durante esses anos na graduação e no mestrado. Agradeço novamente a ele e aos professores, Sérgio M.Oikawa e Cássio O. Machiaveli, por todo conhecimento passado e pela seriedade que colocam na pesquisa.

*"Coragem, coragem, se o que você quer é aquilo que pensa e faz
Coragem, coragem, eu sei que você pode mais".
Por quem os sinos dobram, Raul Seixas*

Resumo

Neste trabalho iremos realizar uma abordagem sobre a modelagem de dados que advém de um teste acelerado. Consideraremos o caso em que a carga de estresse aplicada foi do tipo "step-stress". Para a modelagem, utilizaremos os modelos step-stress simples e múltiplo sob censura tipo II e censura progressiva tipo II, e iremos supor que os tempos de vida dos itens em teste seguem uma distribuição Gama. Além disso, também será utilizado o modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando a presença de riscos competitivos. Será realizada uma abordagem clássica, por meio do método de máxima verossimilhança e uma abordagem Bayesiana usando prioris não-informativas, para estimar os parâmetros dos modelos. Temos como objetivo realizar a comparação dessas duas abordagens por meio de simulações para diferentes tamanhos amostrais e utilizando diferentes funções de perda (Erro Quadrático, Linex, Entropia), e através de estatísticas verificaremos qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Palavras-Chave: *Testes acelerados, step-stress, MCMC, Máxima Verossimilhança, Distribuição Gama, funções de perda, riscos competitivos.*

Abstract

In this work, we will perform an approach to data modeling that comes from an accelerated test. We will consider the case where the stress load applied was of the step-stress type. For the modeling, we will use the simple and multiple step-stress models under censorship type II and progressive censorship type II, and we will assume that the lifetimes of the items under test follow a Gamma distribution. In addition, the simple step-stress model under censorship type II will also be used considering the presence of competitive risks. A classical approach will be performed, using the maximum likelihood method and a Bayesian approach using non-informative prioris, to estimate the parameters of the models. We aim to compare these two approaches by simulations for different sample sizes and using different loss functions (Quadratic Error, Linex, Entropy), and through statistics, we will check which of these approaches is closer to the true values of the parameters.

Keywords: *Accelerated testing, step-stress, MCMC, Maximum Likelihood, Gamma distribution, loss functions, competitive risks.*

Lista de Figuras

1.1	Função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada da distribuição Gama considerando diferentes valores para α e β	21
1.2	Função de sobrevivência e função de risco da distribuição Gama considerando diferentes valores para α e β	22
2.1	Figura ilustrativa das curvas de estresse constante.	39
2.2	Figura ilustrativa das curvas de estresse do tipo "step-stress".	39
2.3	Figura ilustrativa das curvas de estresse do tipo progressivo.	40
2.4	Figura ilustrativa das curvas de estresse do tipo cíclico.	40
2.5	Figura ilustrativa do modelo de exposição cumulativa.	42
3.1	Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	57
3.2	Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	58
3.3	Gráfico temporal, de autocorrelação e histograma para α , θ_1 e θ_2	60
4.1	Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	81
4.2	Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	82
4.3	Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo de parâmetro reduzido sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	93
4.4	Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo de parâmetro reduzido sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	94
4.5	Gráfico temporal, de autocorrelação e histograma para α , β_0 e β_1	97
5.1	Figura ilustrativa de um esquema de censura progressiva tipo II utilizando um estresse do tipo step-stress simples.	101
5.2	Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	114
5.3	Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.	115

-
- 6.1 Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura. 136
- 6.2 Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura. 137
- 7.1 Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, considerando tanto 40% quanto 20% de censura. 168
- 7.2 Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, considerando tanto 40% quanto 20% de censura. 169
- 7.3 Gráficos do EQM versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, considerando tanto 40% quanto 20% de censura. 170

Lista de Tabelas

1.1	Estimador de Bayes e Risco a posteriori para diferentes funções de perda. .	31
2.1	Esquema do experimento fictício de testes acelerados.	41
3.1	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 14$	54
3.2	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 20$	54
3.3	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 34$	55
3.4	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 50$	55
3.5	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 100$	56
3.6	Tempos de falha no primeiro e segundo nível de estresse.	59
3.7	Tabela de resultados obtidos a partir da amostra ilustrativa.	60
4.1	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 =$ 4.481689 , $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 14$	76
4.2	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 =$ 4.481689 , $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 20$	77
4.3	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 =$ 4.481689 , $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 34$	78
4.4	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 =$ 4.481689 , $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 50$	79
4.5	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 =$ 4.481689 , $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 100$	80
4.6	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 2.5$ e $n = 14$	90
4.7	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 2.5$ e $n = 20$	90
4.8	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 2.5$ e $n = 34$	91
4.9	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 2.5$ e $n = 50$	91
4.10	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 2.5$ e $n = 100$	92
4.11	Tempos de falha no primeiro, segundo e terceiro nível de estresse.	95
4.12	Tabela de resultados obtidos a partir da amostra ilustrativa.	96

5.1	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 14$	111
5.2	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 20$	111
5.3	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 34$	112
5.4	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 50$	112
5.5	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 100$	113
6.1	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 14$. . .	131
6.2	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 20$. . .	132
6.3	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 34$. . .	133
6.4	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 50$. . .	134
6.5	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 100$. .	135
7.1	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 20$	164
7.2	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 35$	165
7.3	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 50$	166
7.4	Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 100$	167

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	10
Capítulos	
1 Introdução	17
1.1 Considerações Iniciais	17
1.2 Análise de Confiabilidade	19
1.2.1 Tipos de Censura	19
1.3 Distribuição Gama	20
1.4 Análise Clássica	22
1.4.1 Estimador de Máxima Verossimilhança para dados com censura tipo II	22
1.4.2 Estimador de Máxima Verossimilhança para dados com censura pro- gressiva tipo II	24
1.4.3 Método iterativo de Newton-Raphson	26
1.5 Análise Bayesiana	26
1.5.1 Distribuição a Priori	27
1.5.2 Distribuição a Posteriori	28
1.5.3 Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov	29
1.5.4 Funções de Perda	30
1.6 Riscos competitivos: uma abordagem da forma latente	33
2 Testes de vida acelerados	37
2.1 Tipos de Testes acelerados	37
2.2 Tipos de Aceleração dos Testes	38
2.3 Tipos de Aplicação do Nível de Estresse	38
2.4 Modelo de Exposição Cumulativa	40
2.5 Modelos de testes acelerados usuais	43
2.5.1 Relação de Arrhenius	44
2.5.2 Relação Lei de Potência Inversa	44
2.5.3 Relação de Eyring	44
3 Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II	45
3.1 Descrição do modelo	45
3.2 Análise Clássica do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II	46
3.2.1 Intervalos de Confiança Aproximados	49

3.3	Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II . . .	51
3.4	Estudo de simulação	52
3.4.1	Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II	52
3.4.2	Descrição da Simulação	53
3.4.3	Resultados Numéricos	53
3.4.4	Exemplo Ilustrativo	59
4	Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II	63
4.1	Descrição do modelo	63
4.2	Análise Clássica do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II	64
4.2.1	Intervalos de Confiança Aproximados	69
4.3	Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II . . .	73
4.4	Estudo de simulação	74
4.4.1	Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II	74
4.4.2	Descrição da Simulação	75
4.4.3	Resultados Numéricos	75
4.5	Modelo de parâmetro reduzido	83
4.5.1	Análise Clássica do Modelo de parâmetro reduzido sob censura tipo II	84
4.5.2	Intervalos de Confiança Aproximados	86
4.5.3	Análise Bayesiana do Modelo de parâmetro reduzido	88
4.5.4	Estudo de simulação	89
4.5.5	Exemplo Ilustrativo	95
5	Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II	99
5.1	Descrição do modelo	99
5.2	Análise Clássica do Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II	101
5.2.1	Intervalos de Confiança Aproximados	105
5.3	Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II	108
5.4	Estudo de simulação	109
5.4.1	Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II	109
5.4.2	Descrição da Simulação	110
5.4.3	Resultados Numéricos	110
6	Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II	117
6.1	Descrição do modelo	117
6.2	Análise Clássica do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II	118
6.2.1	Intervalos de Confiança Aproximados	124
6.3	Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II	129
6.4	Estudo de simulação	130
6.4.1	Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II	130
6.4.2	Resultados Numéricos	131

7	Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos	139
7.1	Descrição do modelo	139
7.2	Análise Clássica do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos	142
7.2.1	Intervalos de Confiança Aproximados	147
7.3	Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos	160
7.4	Estudo de simulação	161
7.4.1	Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos	162
7.4.2	Resultados Numéricos	163
8	Conclusão	173
8.1	Perspectivas Futuras	174
	Referências	174
	Apêndices	

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Ao observarmos o cenário industrial dos últimos anos, é possível perceber o progressivo desenvolvimento tecnológico que tivemos, sendo este também gerador da competição industrial e da busca de produzir produtos de maior sofisticação e qualidade.

Avaliar de forma adequada a confiabilidade ou a qualidade desses produtos, de modo que o tempo entre a sua produção e a inserção do mesmo no mercado seja mínima, não é uma tarefa fácil. Sendo assim, quando estamos interessados em inferir sobre a confiabilidade de um produto, faz-se necessário a realização de alguns testes.

Podemos pensar de maneira intuitiva, que quanto maior é a qualidade de um produto, mais difícil é avaliar a sua confiabilidade. Veja que este processo se torna algo custoso, porque se realizarmos os testes em condições normais de funcionamento do produto, isto é, elaborarmos um teste colocando n produtos em funcionamento e esperarmos até que eles falhem, muito tempo seria exigido. Sendo assim, é nesse contexto que surge o testes de vida acelerados.

De maneira superficial, pois será detalhado nos próximos capítulos, o principal objetivo da técnica de testes acelerados é de apressar a ocorrência da falha de um produto, colocando o mesmo em condições de estresse mais elevadas do que o normal.

Quando estamos interessados em realizar um experimento em que será utilizada as técnicas de testes acelerados, uma das coisas mais importantes que devemos nos preocupar, é definir o tipo de carga de estresse que será aplicada nos itens. Como descrito por Nelson (2009), existem diferentes cargas de estresse, sendo a carga constante a mais comum e utilizada. Nesse tipo de carga, os itens em estudo são submetidos a um determinado nível de estresse elevado e constante. Porém, após ter fixado o nível de estresse, as unidades em teste deverão ficar submetidas a este nível até o final do estudo ou até falharem.

Uma das desvantagens que surge ao utilizar a carga de estresse constante é o tempo exigido, que muitas vezes pode ser grande, caso deseja-se obter um alto número de falhas, ou então uma quantidade grande de itens censurados, caso o estudo dure até um tempo pré-determinado. Devido a isso, uma alternativa seria aplicar uma carga de estresse do tipo step-stress, em que este conjunto de produtos é submetido a um nível de estresse alto por um período de tempo pré-definido. De modo que caso esses produtos não falhem até esse período, o nível de estresse é elevado para um novo nível, e o procedimento se repete até o final do estudo. É fácil ver que devido a esse aumento de níveis, obtemos de maneira mais rápida as falhas.

Após realizar um experimento de testes acelerados do tipo step-stress, os tempos de falhas obtidos podem ser modelados por diversas distribuições de probabilidades, como pode ser visto em Nelson (2009). Além disso, é extremamente importante levar em consideração na análise os níveis de estresse utilizados para obter as falhas, e esta informação pode ser inserida relacionando esses níveis de estresse com os parâmetros da distribuição de probabilidade, por meio do modelo de exposição cumulativa (maiores detalhes deste modelo será apresentado nos próximos capítulos).

Em meio a esse contexto, nos últimos tempos surgiu diversos estudos na literatura de confiabilidade sobre formas de modelar dados que advêm de um teste acelerado do tipo step-stress. Podemos citar alguns, como por exemplo, em 1996 Dorp et al. (1996) propôs o modelo step-stress múltiplo, sem censura, considerando a distribuição Exponencial na qual realizou uma análise bayesiana. Em 1998 Khamis e Higgins (1998) apresentaram um modelo step-stress simples usando a distribuição Weibull. Neste mesmo ano Xiong (1998) propôs o modelo step-stress simples considerando a distribuição Exponencial sob dados de censura tipo II. Em 2007 Wang e Yu (2007) apresentaram o modelo step-stress simples com censura progressiva tipo II utilizando a distribuição Exponencial. Já em 2008 Kateri e Balakrishnan (2008), proporam o modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando a distribuição Weibull. Neste mesmo ano Lee e Pan (2008), fizeram uma análise bayesiana do modelo proposto por Xiong (1998).

Em 2009 Balakrishnan, Beutner e Kateri (2009) apresentaram o modelo step-stress múltiplo sob censura tipo I e tipo II considerando a distribuição Exponencial. Em 2011 Lee e Pan (2011), fizeram uma análise bayesiana do modelo sob censura tipo II proposto por Balakrishnan, Beutner e Kateri (2009). Em 2012 Wang et al. (2012) apresentaram o modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II considerando a distribuição Geométrica. Em 2014 Chandra, Khan e Pandey (2014) proporam o modelo step-stress múltiplo, sem censura, considerando a distribuição Lomax.

Em 2016, El-Din et al. (2016) apresentaram o modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II, considerando uma extensão da distribuição Exponencial e utilizando a função de perda Linex. Em 2017, Abdelmonem e Jaheen (2017), realizaram uma análise bayesiana utilizando modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, considerando a distribuição Exponencial Generalizada.

Por fim, em 2012 Alkhalfan (2012) desenvolveu sua tese de doutorado realizando uma análise clássica dos modelos step-stress simples e múltiplo, considerando a distribuição Gama sob diferentes tipos de censura. Este trabalho, sem sombra de dúvidas, foi a principal referência e motivação desta dissertação, uma vez que foi realizado uma análise clássica e bayesiana de alguns dos modelos propostos por Alkhalfan (2012) considerando diferentes funções de perda.

Além do mais, sabemos que diversos estudos na área de testes acelerados do tipo step-stress levam em consideração a existência de um único modo de falha para os itens em teste. Todavia, é comum na análise de confiabilidade que a falha de um item em estudo esteja associada a uma de k possíveis causas e que, em termos mais simples, essas causas estariam competindo para ocasionar a falha no item.

Sendo assim, quando realizamos um estudo no qual consideramos que um item pode falhar por k possíveis causas, existem modelos adequados para modelar o tempo de vida desses itens, e esses modelos são conhecidos como riscos competitivos.

Com base nisso, neste trabalho também foi construído um modelo de testes acelerados do tipo step-stress simples sob censura tipo II em que os tempos de falhas dos itens seguiam uma distribuição Gama, e também foi considerado a existência de duas possíveis causas de falha para esses itens.

1.2 Análise de Confiabilidade

A competitividade industrial está fazendo com que mercado tenha cada vez mais interesse em produzir produtos de maior qualidade, buscando posteriormente avaliar adequadamente a confiabilidade destes produtos.

De um modo geral essa avaliação é realizada colocando alguns produtos em teste por um período de tempo, e posteriormente é realizada algumas análises estatísticas, a fim de estimar características desse produto, como por exemplo, o tempo médio de vida. Sendo assim, a área de Análise de Confiabilidade, visa estudar formas de avaliar corretamente a confiabilidade de um produto.

Como visto em Giolo e Colosimo (2006), podemos definir a análise de confiabilidade ou análise de sobrevivência, como o tempo até a ocorrência de um determinado evento. Por exemplo, o tempo até a quebra de um equipamento ou o tempo até a morte de um paciente.

Dentro dessa metodologia de estudo podemos utilizar um conjunto de técnicas estatísticas que podem nos auxiliar a obter informações relacionadas ao produto. Ou seja, por meio dessas técnicas faz-se possível realizar um estudo sobre a confiabilidade de um produto utilizando a função de confiabilidade, que nos fornece a probabilidade de funcionamento de um produto ser maior ou igual a um determinado tempo t , e também de realizar um estudo sobre a forma em que o risco de falha se comporta por meio da função de risco.

Temos que uma das grandes vantagens da análise de confiabilidade, é poder trabalhar com informações censuradas. Consideramos que uma informação é censurada, por exemplo, quando o produto em teste não falhou até o final do experimento. De um modo geral, dizemos que um item é censurado quando não foi possível observar o evento de interesse durante o tempo de estudo. É importante ressaltar, que apesar dos itens classificados como censurados não fornecerem informações relacionadas aos tempos de falha, os mesmos são úteis pois nos fornecem informações associadas ao tempo de sobrevivência dos itens em estudo, sendo imprescindível incorporá-las na análise estatística.

Por fim, apresentaremos a seguir alguns tipos de mecanismos de censura.

1.2.1 Tipos de Censura

Como dito anteriormente, as informações censuradas são extramente importantes em uma análise estatística, pois elas nos fornecem informações relacionadas ao tempo de vida do produto em estudo.

Motivada por Giolo e Colosimo (2006), podemos representar as observações completas e censuradas por meio dos pares (t_i, δ_i) , em que $i = 1, \dots, n$. De modo que t_i representa o tempo de falha ou de censura do i -ésimo item, e a variável δ_i indica se este item é censurado ou não. Ou seja,

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & , t_i \text{ é uma informação completa} \\ 0 & , t_i \text{ é uma informação censurada} \end{cases} \quad (1.1)$$

Sendo assim, apresentaremos a seguir de forma resumida alguns dos principais tipos de censura.

1. **Censura à direita:** A censura à direita é muito frequente na análise de confiabilidade. Neste tipo de censura não é possível observar o tempo de falha, uma vez que este tempo é maior que o tempo observado. Dentro da censura à direita, há vários

tipos de censura, na qual vamos destacar a censura do Tipo I, Tipo II e progressiva tipo II, em que apresentaremos logo a seguir.

- **Censura do Tipo I:** É considerado um caso de censura do tipo I, quando realizamos um experimento e o mesmo só terminará após um período de tempo pré-determinado. Ou seja, os itens em teste que não falharem até esse tempo, são consideradas como censurados.
- **Censura do Tipo II:** Consideramos um caso de censura do tipo II, em situação em que o experimento só acabará após ter ocorrido r eventos de interesse. Deste modo, se realizarmos um estudo com n itens e desejarmos que falhem r , então os $n - r$ itens restantes serão censurados.

Neste tipo de censura, utilizamos a mesma ideia do caso de censura do tipo II. Ou seja, fixamos um número de eventos de interesse que gostaríamos de observar. Contudo, no caso da censura progressiva do tipo II, a cada evento de interesse que ocorre, é retirado de modo aleatório um determinado número de unidades que ainda não falharam. Como visto em Brito (2014), a diferença entre a censura tipo II e a censura progressiva tipo II está na sutileza do conceito, isto é, neste caso se um equipamento falhar por um determinado motivo, então haverá outros que iram falhar por esse mesmo motivo, devido a isso é realizado a retirada dos itens.

- **Censura progressiva tipo II:**
2. **Censura à esquerda:** A censura a esquerda, surge quando não foi possível observar o momento exato da ocorrência da falha, porém sabemos que este evento ocorreu antes do tempo que foi observado.
 3. **Censura intervalar:** É considerado censura intervalar quando o evento de interesse ocorre dentro de um intervalo de tempo conhecido.

1.3 Distribuição Gama

Como visto em Giolo e Colosimo (2006), há uma ampla quantidade de modelos probabilístico que podem ser utilizados na análise de confiabilidade e na análise de sobrevivência. Dentre todos esses modelos podemos destacar as distribuições Weibull, Exponencial, Gama entre outras.

Neste trabalho adotamos a distribuição Gama, pois a mesma é frequentemente utilizada em problemas de análise de confiabilidade.

Sendo assim, seja T uma variável aleatória com distribuição Gama, na qual podemos denotar por $Gama(\alpha, \beta)$, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t|\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{t}{\beta}\right\}, \quad (1.2)$$

em que $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. A função gama, $\Gamma(\alpha)$, pode ser definida do seguinte modo:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx. \quad (1.3)$$

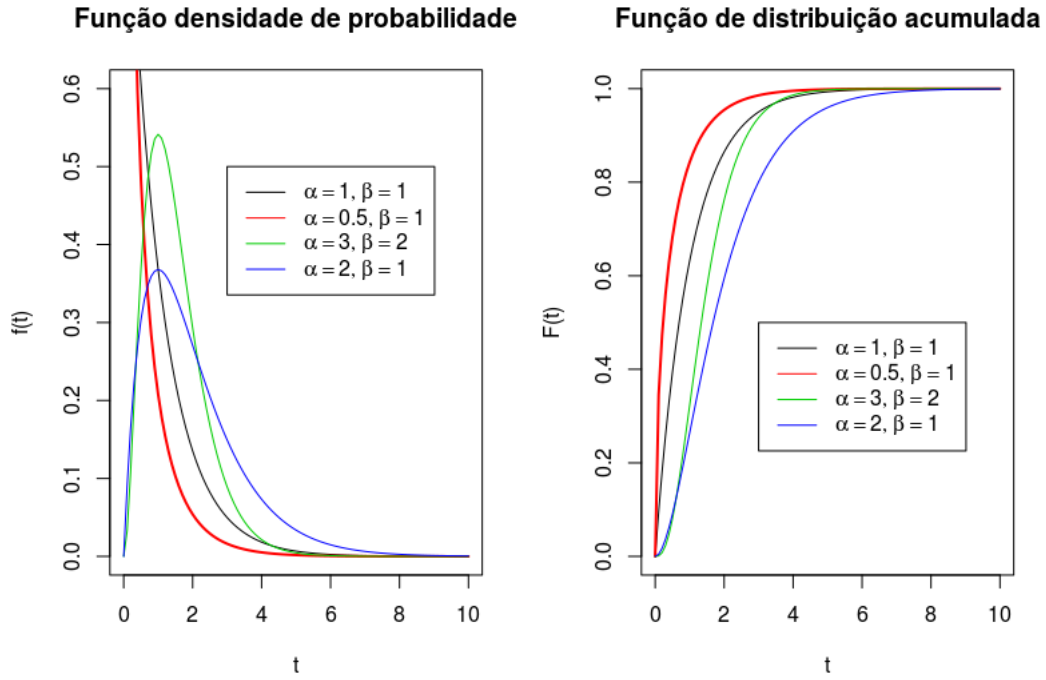
A função de distribuição acumulada da variável aleatória é dada por:

$$F(x|\alpha, \beta) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{t}{\beta}\right\} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x}{\beta}} v^{\alpha-1} e^{-v} dv, \quad (1.4)$$

em que $v = \frac{t}{\beta} > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

A seguir apresentaremos algumas formas de como se comporta a função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada da distribuição Gama, considerando diferentes valores para os parâmetros.

Figura 1.1: Função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada da distribuição Gama considerando diferentes valores para α e β .



Fonte:Elaborada pela autora.

Temos que a média e a variância da distribuição Gama é dada do seguinte modo:

$$E(T) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad Var(T) = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (1.5)$$

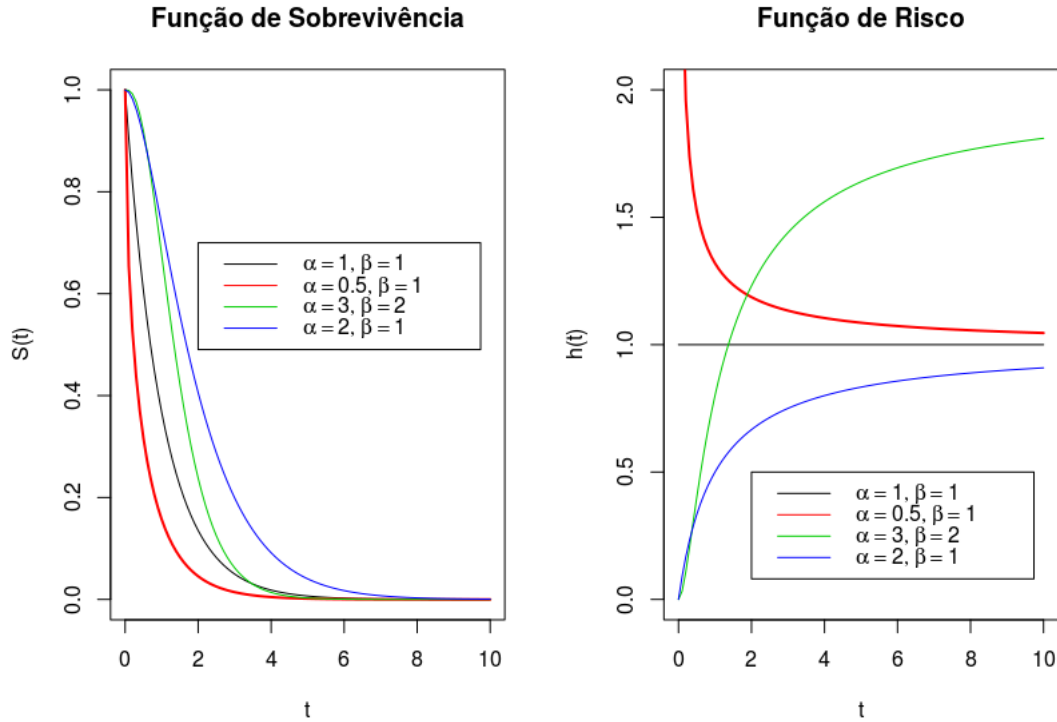
Como visto em Giolo e Colosimo (2006), as funções de sobrevivência e de risco da distribuição Gama, são dadas respectivamente por:

$$S(x|\alpha, \beta) = \int_x^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{t}{\beta}\right\} dt \quad \text{e} \quad h(t|\alpha, \beta) = \frac{f(t|\alpha, \beta)}{S(t|\alpha, \beta)}, \quad (1.6)$$

em que $f(t|\alpha, \beta)$ está expressa em (1.2).

Podemos ver a seguir algumas formas de como se comporta as funções de sobrevivência e de risco da distribuição Gama, considerando diferentes valores para os parâmetros.

Figura 1.2: Função de sobrevivência e função de risco da distribuição Gama considerando diferentes valores para α e β .



Fonte:Elaborada pela autora.

Ao observarmos o gráfico da função de risco, podemos perceber que a distribuição Gama apresenta riscos: crescentes, constantes e decrescentes.

1.4 Análise Clássica

Nesta seção apresentaremos os principais conceitos teóricos e matemáticos da inferência clássica que são imprescindíveis para a construção dos modelos que serão apresentados nos próximos capítulos.

Iremos apresentar a seguir as funções de verossimilhança considerando dois tipos de censura, como também a distribuição assintótica dos estimadores.

1.4.1 Estimador de Máxima Verossimilhança para dados com censura tipo II

Dentre alguns métodos de estimação existentes na inferência clássica, podemos destacar o método de máxima verossimilhança. Este método é frequentemente usado devido as suas ótimas propriedades assintóticas. Quando estamos em um contexto em que temos dados censurados e queremos incluir a censura na análise, o estimador de máxima verossimilhança é um dos métodos de estimação clássica que podemos aplicar.

Quando utilizamos o método de Máxima Verossimilhança, temos como objetivo principal encontrar o vetor de parâmetros Θ que maximiza a função de verossimilhança. Em outras palavras, a finalidade deste método é encontrar os valores desse vetor de parâmetros, que nos dê a maior chance de ocorrer a amostra que já temos novamente.

Sendo assim, iremos mostrar de forma intuitiva a construção da função de verossimilhança para dados sob censura tipo II. Para isso, considere T_i de $i = 1, \dots, n$, variáveis

aleatórias independentes e identicamente distribuídas que representam tempos de falha, com função densidade de probabilidade dada por $f(\cdot; \Theta)$ e função distribuição dada por $F(\cdot; \Theta)$, em que Θ é um vetor de parâmetros. Vamos denotar por r ($r < n$) o número de falhas que desejamos obter.

Deste modo, seja uma amostra do tipo $t_1, \dots, t_n$ e considerando uma situação de censura tipo II, temos que é possível formar um total de $\frac{n!}{(n-r)!}$ combinações com essa amostra, pois só teremos observado os tempos de falha de r elementos. Veja que os $n-r$ outros elementos não possuímos conhecimento do momento que falharam, uma vez que foram censurados no tempo t_r .

Para uma das possíveis combinações de valores observados, podemos escrever a função de verossimilhança do seguinte modo:

$$L(\Theta|\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \Theta). \quad (1.7)$$

É fácil ver que esta ideia pode ser estendida para cada uma das $\frac{n!}{(n-r)!}$ combinações. Portanto, considerando todos os possíveis casos temos que:

$$L(\Theta|\mathbf{t}) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r f(t_i; \Theta). \quad (1.8)$$

Pelo conceito de censura tipo II, sabemos que $t_{r+1} = \dots = t_n = t_r$, pois temos conhecimento de que até o último tempo observado, que foi o tempo de vida da r -ésima falha, esses elementos não falharam. Deste modo, essa informação é de extrema importância e deve ser inserida na função de verossimilhança, por meio da função de sobrevivência.

Logo, a função de verossimilhança para dados sob censura tipo II é dado por:

$$L(\Theta|\mathbf{t}) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r f(t_i; \Theta) [1 - F(t_r; \Theta)]^{n-r}. \quad (1.9)$$

Para mais informações é possível consultar Arnold, Balakrishnan e Nagaraja (2008) e Lawless (2011).

Após ser obtida a função de verossimilhança, o nosso interesse a seguir é maximizar esta função. Temos que maximizar esta função é o mesmo que maximizar o seu logaritmo. Portanto, se tivermos trabalhando com um modelo que possui p parâmetros, e a função de verossimilhança for diferenciável em cada um deles, faz-se possível obter as chamadas equações de verossimilhança do seguinte modo:

$$\frac{\partial l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (1.10)$$

em que $l(\Theta|\mathbf{t})$ é o ln da função de verossimilhança.

Com base nisso, podemos obter os estimadores de máxima verossimilhança simplesmente resolvendo esse sistema de equações apresentada em (1.10). Vale ressaltar que em muitos casos, será necessário resolver esse sistema de equações por meio de métodos iterativos, como por exemplo, o Método de Newton-Raphson.

Com base na teoria de inferência clássica, sabemos que quando estamos em situação em que temos um tamanho amostral pequeno, os estimadores de máxima verossimilhança são viciados. Contudo, como visto em Bolfarine e Sandoval (2001), se considerarmos um

vetor de parâmetros Θ com p parâmetros, um tamanho amostral grande e além disso algumas condições de regularidade satisfeitas, temos que os estimadores são não-viciados e com distribuição assintótica dada por:

$$(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_p(0, I^{-1}(\Theta)), \quad (1.11)$$

na qual $I(\Theta)$ é a matriz de informação de Fisher, e podemos representa-lá da seguinte forma:

$$I(\Theta) = \begin{pmatrix} I_{11}(\Theta) & \dots & I_{1p}(\Theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{1p}(\Theta) & \dots & I_{pp}(\Theta) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

em que $I_{ij}(\Theta)$ pode ser expressa do seguinte modo:

$$I_{ij}(\Theta) = E \left[\left(\frac{\partial \log(f(\mathbf{t}|\Theta))}{\partial \theta_i \theta_j} \right)^2 \right] = -E \left[\frac{\partial^2 \log(f(\mathbf{t}|\Theta))}{\partial \theta_i \theta_j} \right], \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (1.13)$$

Com isso, faz-se possível construir intervalos de confiança assintóticos aproximados para cada um dos parâmetros θ_i , de $i = 1, \dots, p$,

Sendo assim, os intervalos de confiança assintóticos com nível $100(1 - \gamma)\%$ podem ser construídos do seguinte modo:

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\gamma/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_i)}, \quad (1.14)$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

Como visto em Bolfarine e Sandoval (2001), uma propriedade extremamente importante do estimador de máxima verossimilhança é a *propriedade de invariância*. Esta propriedade é importante, pois se considerarmos um parâmetro $\theta \in A$ e uma função bijetora $g(\theta) \in B$, em que $g : A \rightarrow B$, então se $\hat{\theta}$ é um estimador de máxima verossimilhança para θ , temos que $g(\hat{\theta})$ é o estimador de máxima verossimilhança para $g(\theta)$.

1.4.2 Estimador de Máxima Verossimilhança para dados com censura progressiva tipo II

Com a mesma motivação apresentada na subseção 1.4.1, iremos apresentar a construção da função de verossimilhança para dados sob censura progressiva tipo II.

Sendo assim, como visto em Brito (2014) e Alkhalfan (2012), vamos considerar um estudo em que n componentes são colocados em teste, e desejamos observar o tempo de falha de r ($r < n$) componentes. Contudo, a medida que ocorrer uma falha iremos retirar do estudo R_i componentes que ainda não falharam, na qual R_i , de $i = 1, \dots, r$, são valores pré-estabelecidos.

Para um melhor entendimento, vamos imaginar que n itens estão em um experimento. Após ocorrer a primeira falha, serão retirados R_1 itens dos $(n - 1)$ restantes que ainda não falharam, permanecendo no estudo um total de $n - R_1 - 1$ elementos. Agora vamos considerar o caso em que ocorra a segunda falha, de modo que iremos retirar R_2 itens dos $n - R_1 - 2$ que ainda restam, permanecendo no estudo um total de $n - R_1 - R_2 - 2$ elementos. Seguindo esse mesmo processo até que ocorra a r -ésima falha, é fácil ver que no momento que ocorrer a r -ésima falha, todos os $R_r = n - R_1 - R_2 - \dots - R_{r-1} - r$ itens restantes que estão em funcionamento serão censurados, uma vez que já observamos as r falhas de interesse. Vale ressaltar que o número de unidades a serem retiradas após

a cada falha, (R_i) , pode ser pré-determinado ou aleatório. Sendo assim, para a escolha de qual seria esse melhor número é importante realizar um planejamento de experimentos.

É interessante observarmos nesse tipo de censura, que se ocorrer $R_1 = R_2 = \dots = R_{r-1} = 0$, cairemos no caso de censura tipo II.

Como o nosso intuito é a construção da função de verossimilhança, vamos considerar T_i , de $i = 1, \dots, r$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas referente aos tempos de falha ordenados dos r itens que iram falhar, com função densidade de probabilidade dada por $f(\cdot; \Theta)$ e função distribuição dada por $F(\cdot; \Theta)$. Vamos denotar por R_i , de $i = 1, \dots, r$, o número de unidades que iremos retirar após a i -ésima falha.

Imaginando uma situação de censura progressiva tipo II, vamos representar os tempos de falhas dos r componentes que falharam por $t_1, \dots, t_r$. Com o propósito de obter a função de verossimilhança e como visto em Brito (2014), temos que a probabilidade de observar a primeira falha é dada por:

$$P(T_1 = t_1) = nf(t_1; \Theta)[1 - F(t_1; \Theta)]^{n-1}, \quad (1.15)$$

uma vez que um dos n componentes falharam, e os outros $n - 1$ ainda permanecem em teste. Vamos considerar que após a primeira falha, serão retirados R_1 itens.

Veja que temos um total de $n - R_1 - 1$ componentes em teste. De acordo com Lawless (2011), podemos pensar que os tempos de vida dos itens que ainda estão em teste tem uma distribuição truncada a esquerda. Assim a probabilidade de observar a segunda falha, dado que $T_1 = t_1$ e R_1 elementos foram retirados, é dado por:

$$P(T_2 = t_2 | T_2 > t_1) = (n - R_1 - 1)f(t_2; \Theta) \frac{[1 - F(t_2; \Theta)]^{n-R_1-2}}{[1 - F(t_1; \Theta)]^{n-R_1-1}}. \quad (1.16)$$

Mantendo este mesmo pensamento até ocorrer a r -ésima falha, podemos observar que:

$$\begin{aligned} P(T_r = t_r | T_r > t_{r-1}) &= (n - R_1 - \dots - R_{r-1} - r + 1) \\ &\times f(t_r; \Theta) \frac{[1 - F(t_r; \Theta)]^{n-R_1-\dots-R_{r-1}-r}}{[1 - F(t_{r-1}; \Theta)]^{n-R_1-\dots-R_{r-1}-r+1}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Considerando o pressuposto de independência, a função de densidade conjunta pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f_{T_1, \dots, T_r}(t_1, \dots, t_r) &= P(T_1 = t_1)P(T_2 = t_2 | T_2 > t_1) \times \dots \\ &\times P(T_r = t_r | T_r > t_{r-1}) \\ &= C \prod_{i=1}^r f(t_i; \Theta)[1 - F(t_i; \Theta)]^{R_i}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

em que $t_1 < \dots < t_r$ e $C = n(n - R_1 - 1) \dots (n - R_1 - \dots - R_{r-1} - r + 1)$.

Deste modo, a função de verossimilhança para dados sob censura progressiva tipo II é dado por:

$$L(\Theta | \mathbf{t}) = C \prod_{i=1}^r f(t_i; \Theta)[1 - F(t_i; \Theta)]^{R_i}. \quad (1.19)$$

Encontrada a função de verossimilhança, faz-se possível realizar o mesmo processo que foi apresentado na subseção 1.4.1, ou seja, maximizar esta função a fim de obter os estimadores, como também obter a distribuição assintótica dos mesmos.

1.4.3 Método iterativo de Newton-Raphson

Como dito anteriormente, grande parte das vezes não é simples obter de forma analítica os estimadores de máxima verossimilhança, fazendo-se necessário a utilização de métodos iterativos.

Como visto em Bolfarine e Sandoval (2001), um dos métodos iterativos que podemos utilizar, é o método de Newton-Raphson. Para entendermos como é construído este procedimento vamos denotar por $U(\theta)$ a função escore, ou seja,

$$U(\theta) = \frac{\partial l(\theta|t)}{\partial \theta} . \quad (1.20)$$

Para o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, temos que $U(\hat{\theta}) = 0$. De acordo com Bolfarine e Sandoval (2001), se expandirmos $U(\hat{\theta}) = 0$ em série de Taylor de ordem 1 em torno de um ponto inicial θ_0 , obtemos:

$$0 = U(\hat{\theta}) \cong U(\theta_0) + (\hat{\theta} - \theta_0)U'(\theta_0) , \quad (1.21)$$

após algumas manipulações, temos que:

$$\hat{\theta} \cong \theta_0 - \frac{U(\theta_0)}{U'(\theta_0)} . \quad (1.22)$$

Portanto o método iterativo de Newton-Raphson pode ser expresso do seguinte modo:

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \frac{U(\theta_j)}{U'(\theta_j)} . \quad (1.23)$$

Para iniciarmos o processo de iteração, precisamos dar um chute inicial θ_0 , e o processo se encerra até que algum critério de convergência seja satisfeito, como por exemplo:

$$|\theta_{j+1} - \theta_j| < \varepsilon . \quad (1.24)$$

Por fim, o processo se estabiliza sobre o ponto $\hat{\theta}$ que é tomado como o estimador de máxima verossimilhança de θ .

1.5 Análise Bayesiana

Nesta seção abordaremos os conceitos teóricos e matemáticos mais importantes da inferência Bayesiana, que nos auxiliaram para a construção dos modelos que serão apresentados nos próximos capítulos.

Uma das motivações para se trabalhar com a inferência Bayesiana está no simples fato de poder inserir na análise estatística informações de um especialista ou de estudos anteriores, isto é, a estimativa dos parâmetros do modelo não depende só dos dados, mas também da informação a priori que podemos fornecer e inserir.

Quando temos uma amostra e estamos interessados em trabalhar de forma paramétrica para analisar esses dados, o nosso intuito é buscar uma função de probabilidade que modele o comportamento da variável aleatória, ou seja, queremos encontrar um modelo probabilístico na qual podemos assumir como gerador daqueles dados.

Ao optarmos em utilizar a inferência clássica para realizar a análise, assumimos um modelo probabilístico com um vetor paramétrico Θ fixo e desconhecido. De modo que a tratabilidade desse vetor Θ como fixo e desconhecido, está baseado em resultados assintóticos. Quando optamos pela inferência Bayesiana, este mesmo vetor de parâmetros Θ é tratado como uma variável aleatória, permitindo desta maneira que informações externas sejam incorporadas na análise dos dados.

Sendo assim, ao querermos inserir na análise informações externas, podemos quantificar essas informações por meio da distribuição a priori, que a partir do Teorema de Bayes (1763), podemos combinar essa informação com as informações fornecidas pelos dados através da função de verossimilhança, obtendo então a distribuição a posteriori, mais atualizada.

1.5.1 Distribuição a Priori

A distribuição a priori é uma parte fundamental da análise bayesiana. Por meio dessa distribuição faz-se possível modelar, de modo coerente, o conhecimento atual que se tem sobre a quantidade desconhecida θ .

A escolha da distribuição a priori pode causar ou não uma influência significativa sobre a distribuição a posteriori. Deste modo, podemos utilizar prioris de caráter informativo ou não-informativo.

As distribuições a priori informativas, como o próprio nome diz, são utilizadas quando temos alguma informação a priori. Contudo quando temos uma informação a priori, devemos utilizar métodos adequados para transformar essa informação que temos sob a forma de uma distribuição de probabilidade, e esses métodos são conhecidos como elicitação de prioris. Para obter mais detalhes desses métodos podemos consultar Garthwaite, Kadane e O'Hagan (2005).

As prioris não-informativas são frequentemente usadas quando se tem pouco informação ou então nenhuma informação sobre θ . Quando optamos em utilizar esses tipos de prioris, o nosso intuito é dizer que a informação que temos é vaga, quando comparada com a informação que provém da amostra.

As vezes quando utilizamos prioris não-informativas, podemos nos deparar com a situação em que optamos em utilizar distribuições a priori impróprias, mas que geram distribuições a posteriori próprias, sendo estas de maior interesse. Para mais informações podemos consultar Kass e Wasserman (1996).

1.5.1.1 Priori Uniforme

Uma distribuição usualmente utilizada como distribuição a priori é a distribuição Uniforme. Ao considerarmos essa distribuição, estamos dando as mesmas chances para todos os possíveis e finitos resultados que θ pode ter.

Se estivermos em uma situação que temos um vetor de parâmetros do tipo $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, podemos assumir uma distribuição a priori Uniforme para cada θ_i , e se considerarmos independência entre os parâmetros, podemos obter a distribuição a priori conjunta, que neste caso é o produto das prioris. Sendo assim, a distribuição a priori conjunta de Θ é dada por:

$$\pi_U(\Theta) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{b_i - a_i}, \quad (1.25)$$

tal que $a_i \leq \theta_i \leq b_i$, em que a_i e b_i , de $i = 1, \dots, p$, são os hiperparâmetros conhecidos.

1.5.1.2 Priori Gama

Uma distribuição comumente utilizada como distribuição a priori, é a distribuição Gama. Ela é vastamente empregada como distribuição a priori, em situações em que o parâmetro θ possui um espaço paramétrico positivo.

Como dito na seção 1.5.1.1, podemos ter o caso em que temos um vetor de parâmetros do tipo $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ e assumirmos uma distribuição a priori Gama para cada θ_i . Assim considerando independência a priori, faz-se possível obter a priori conjunta. Sendo assim, a distribuição a priori conjunta de Θ é dada por:

$$\pi_G(\Theta) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\Gamma(a_i)b_i^{a_i}} \theta_i^{a_i-1} \exp\left\{-\frac{\theta_i}{b_i}\right\}, \quad (1.26)$$

em que a_i e b_i , de $i = 1, \dots, p$, são os hiperparâmetros conhecidos.

1.5.1.3 Priori Normal

Uma distribuição muito importante e comumente utilizada como distribuição a priori, é a distribuição Normal. Podemos usá-la como distribuição a priori, em situações em que o parâmetro θ possui um espaço paramétrico pertencente aos Reais.

Como já dito na seção 1.5.1.1, caso tenhamos um vetor de parâmetros do tipo $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, podemos assumir uma distribuição a priori Normal para cada θ_i . Assim, assumindo independência a priori, faz-se possível obter a priori conjunta. Sendo assim, a distribuição a priori conjunta de Θ é dada por:

$$\pi_N(\Theta) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_i - \lambda_i}{\phi_i}\right)^2\right\}, \quad (1.27)$$

em que λ_i e ϕ_i^2 , de $i = 1, \dots, p$, são os hiperparâmetros conhecidos.

1.5.2 Distribuição a Posteriori

Podemos olhar para a distribuição a posteriori, como uma distribuição de probabilidade de θ atualizada por meio do teorema de Bayes. Para um melhor entendimento, vamos considerar o parâmetro θ desconhecido, de modo que a distribuição a priori desse parâmetro pode ser representada por $p(\theta)$. Sabemos que a informação sobre este parâmetro pode ser aumentada pela probabilidade condicional $p(\mathbf{x}|\theta)$, na qual podemos representar também essa informação através da $L(\theta|\mathbf{x})$, que nada mais é do que a função de verossimilhança e caracteriza a informação que vem dos dados. Então pelo teorema de Bayes tem-se:

$$p(\theta|\mathbf{x}) = \frac{p(\theta)p(\mathbf{x}|\theta)}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\theta)p(\mathbf{x}|\theta)}{\int_{\theta} p(\theta)p(\mathbf{x}|\theta)} = \frac{\pi(\theta)L(\theta|\mathbf{x})}{\int_{\theta} \pi(\theta)L(\theta|\mathbf{x})}, \quad (1.28)$$

em que $p(\theta|\mathbf{x})$ é chamado de distribuição a posteriori.

Podemos observar que $\int_{\theta} \pi(\theta)L(\theta|\mathbf{x})$ não depende de θ , desempenhando um papel de constante normalizadora. Devido a isso, tomando a parte proporcional, a distribuição a posteriori é dada por:

$$p(\theta|\mathbf{x}) \propto \pi(\theta)L(\theta|\mathbf{x}). \quad (1.29)$$

Vale ressaltar que $\int_{\theta} \pi(\theta) L(\theta|\mathbf{x})$ foi substituída em (1.29) pela relação de proporcionalidade.

Após obter a distribuição a posteriori, sabemos que toda a informação que temos a respeito do parâmetro θ se encontra nessa distribuição. De modo que se tivermos interessados em fazer inferências sobre o parâmetro, devemos realizar o cálculo de algumas esperanças da distribuição a posteriori, ou seja:

$$E_{\theta|\mathbf{x}}[g(\theta)] = \int_{\Theta} g(\theta) p(\theta|\mathbf{x}) d\theta, \quad (1.30)$$

em que $g(\theta)$ é uma função real mensurável (JAMES, 1996).

Uma dificuldade que nos deparamos na inferência Bayesiana, é que grande parte das vezes as densidades a posteriori obtidas são altamente complicadas de serem tratadas, tornando-se difícil a realização do cálculo analítico dessas esperanças, e fazendo-se necessário a utilização de métodos computacionais.

1.5.3 Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov

Como dito no final da subseção (1.5.2), muitas vezes é preciso utilizar métodos computacionais para realizar determinados cálculos, como por exemplo, resolver integrais de alta complexidade analítica.

Com base nisso, Metropolis e Ulam (1949) criaram o método de Monte Carlo. Este método é baseada em um processo de simulação estocástica para aproximações de integrais.

A teoria deste método está alicerçada na Lei Forte dos Grandes números (ver James (1996)), e possuir um entendimento sobre ela é imprescindível para entender o método. Em um contexto Bayesiano e de maneira informal, a Lei Forte dos Grandes números nos garante que se obtermos uma amostra aleatória da distribuição a posteriori, então ao calcular a média desses valores, temos um valor aproximado para a expressão (1.30). De maneira mais elegante temos:

$$\widehat{E_{\theta|\mathbf{x}}[g(\theta)]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta^{(i)}) \quad (1.31)$$

$$\xrightarrow{q.c.} E_{\theta|\mathbf{x}}[g(\theta)].$$

Contudo gerar valores da distribuição a posteriori não é uma tarefa simples. Embora haja diversos métodos para gerar valores de uma distribuição, estes acabam não tendo um bom desempenho quando temos modelos mais complexos e de dimensões elevadas.

E foi com base nisso que surgiu um dos métodos mais importantes e utilizados na inferência Bayesiana para simular valores da distribuição a posteriori, que é o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), ou seja, é o método de Monte Carlo utilizando cadeias de Markov.

Como discutido por Gamerman (2013), trabalhar com o método de Monte Carlo utilizando cadeias de markov foi essencial, pois é por meio dessas cadeias que é possível desenvolver um processo iterativo durante a simulação, de modo que para realizar a próxima iteração precisamos apenas da anterior. Assim, Robert (2004) apresentam que perante algumas condições, se realizarmos um número elevado de iterações no processo de simulação, podemos dizer que a cadeia convergirá para distribuição de equilíbrio, em um contexto bayesiano, se aproximará da distribuição a posteriori.

Sendo assim, este método de aproximação é fundamental na análise bayesiana, permitindo desta maneira gerarmos amostras para um vetor de parâmetros Θ .

Há dois algoritmos que se destacam nas cadeias de Markov, são eles: o algoritmo de Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970) e o amostrador de Gibbs (GEMAN; GEMAN, 1984). De maneira resumida, a ideia do algoritmo de Metropolis-Hastings é gerar um valor de uma distribuição auxiliar, de modo que este valor será aceito com uma dada probabilidade. Além disso, esse algoritmo é baseado em um mecanismo de aceitação-rejeição, que garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio, em um contexto bayesiano, para a distribuição a posteriori. Já no amostrador de Gibbs, os valores são gerados a partir das distribuições condicionais completas, em que neste caso não há um mecanismo de aceitação-rejeição desses valores.

Neste trabalho utilizaremos o algoritmo de Metropolis-Hastings, a fim de gerar possíveis valores das distribuições a posteriori de nosso interesse.

Para entendermos como esse método funciona, vamos supor que queremos gerar valores de uma densidade a posteriori. Definindo um valor inicial $\theta^{(t)}$, e utilizando uma distribuição de probabilidade auxiliar $q(\theta, \cdot)$, gera-se possíveis valores da distribuição a posteriori, de modo que será aceito esse valor se:

$$\alpha(\theta^{(t)}, \theta^{(*)}) = \min \left[1; \frac{p(\theta^{(*)}|\mathbf{x})q(\theta^{(t)}|\theta^{(*)})}{p(\theta^{(t)}|\mathbf{x})q(\theta^{(*)}|\theta^{(t)})} \right] \geq u(0, 1) . \quad (1.32)$$

Por meio dessa condição apresentada em (1.32) é possível garantir a convergência da cadeia para a distribuição a posteriori.

O algoritmo de Metropolis-Hastings pode ser realizado seguindo os seguintes passos:

1. Escolha uma distribuição auxiliar $q(\theta, \cdot)$ para gerar valores de θ da distribuição a posteriori e inicie o contador da cadeia de $t = 1$;
2. Escolha um valor inicial para $\theta^{(t)}$;
3. Depois disso gere um valor $\theta^{(*)}$ utilizando a distribuição auxiliar escolhida;
4. Faça um teste para verificar se a condição $\alpha(\theta^{(t)}, \theta^{(*)}) \geq u(0, 1)$ está sendo satisfeita ou não;
5. Se a condição estiver sendo satisfeita, então: $\theta^{(t+1)} = \theta^{(*)}$ e retorne ao passo 3;
6. Se a condição não estiver sendo satisfeita, então: $\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)}$ e retorne ao passo 3;
7. Faça isso até obter a convergência da cadeia.

1.5.4 Funções de Perda

Quando realizamos uma estimação e conhecemos o verdadeiro valor do parâmetro, é possível observar que grande parte das vezes existe diferença entre o valor estimado e o valor verdadeiro. Por exemplo, vamos considerar $\hat{\theta}$ uma estimativa de θ . Como visto em Islam (2011), uma maneira de calcular a perda que ocorre quando estimamos um parâmetro, é por meio da diferença entre a estimativa e o verdadeiro valor, isto é, $\hat{\theta} - \theta$. Se tivermos o caso em que $\hat{\theta} = \theta$, podemos concluir que a estimativa coincidiu com o verdadeiro valor. Se tivermos a situação em que $\hat{\theta} < \theta$, dizemos que houve uma subestimação, e por último se tivermos a situação em que $\hat{\theta} > \theta$, dizemos que houve uma superestimação.

Desta maneira, a perda que cometemos quando estimamos um parâmetro θ por $\hat{\theta}$ pode ser representada por meio da função de perda, na qual podemos denotar por $l(\hat{\theta}, \theta)$. De

acordo com Islam (2011), a função de perda é definida como uma função real que deve satisfazer as seguintes condições:

- $l(\hat{\theta}, \theta) \geq 0$, em que $\theta \in \Theta$.
- $l(\hat{\theta}, \theta) = 0$, para $\hat{\theta} = \theta$.

Na literatura de inferência Bayesiana, usualmente encontramos dois tipos de funções de perda: a do tipo simétrica e a do tipo assimétrica. Usualmente grande parte dos trabalhos utilizam as funções de perda simétrica, que possuem como estimador de Bayes a média, a mediana e a moda a posteriori. Estas funções de perda tem como característica considerar pesos iguais quando ocorre uma superestimação ou subestimação. Em outras palavras, a gravidade de ocorrer uma superestimação ou subestimação é a mesma.

Todavia, em muitos casos, utilizar funções de perda simétrica não é recomendável. Ellah (2009) discute que em situações em que temos interesse em estimar a função de confiabilidade ou a função de risco, ter uma superestimação é muito mais grave do que uma subestimação. Devido a isso, utilizar funções de perda assimétrica é o mais indicado.

Como visto em Dey, Ali e Park (2015), apresentaremos a seguir algumas funções de perda simétrica e assimétrica utilizadas na literatura de inferência Bayesiana.

Tabela 1.1: Estimador de Bayes e Risco a posteriori para diferentes funções de perda.

Nome	Função de perda	Estimador de Bayes	Risco a posteriori.
Função de perda quadrática	$(\theta - \hat{\theta})^2$	$E(\theta x)$	$var(\theta x)$
Função de perda quadrática ponderada	$\frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\theta}$	$(E(\theta^{-1} x))^{-1}$	$E(\theta x) - (E(\theta^{-1} x))^{-1}$
Função de perda quadrática modificada	$\left(1 - \frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^2$	$\frac{E(\theta^{-1} x)}{E(\theta^{-2} x)}$	$1 - \frac{E(\theta^{-1} x)^2}{E(\theta^{-2} x)}$
Função de perda de precaução	$\frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\hat{\theta}}$	$\sqrt{E(\theta^2 x)}$	$2 \left(\sqrt{E(\theta^2 x)} - E(\theta x) \right)$
Função de perda K	$\left(\sqrt{\frac{\hat{\theta}}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{\hat{\theta}}} \right)$	$\sqrt{\frac{E(\theta x)}{E(\theta^{-1} x)}}$	$2 \left(\sqrt{E(\theta x)E(\theta^{-1} x)} - 1 \right)$

Fonte: (DEY; ALI; PARK, 2015) .

De maneira mais detalhada, apresentaremos agora as duas funções de perda assimétrica que serão utilizadas neste trabalho, que são: a função de perda LINEX e a função de perda de entropia geral.

1.5.4.1 Função de perda LINEX

A função de perda LINEX é uma das mais importantes funções de perda assimétrica utilizadas na literatura. Como visto em Ellah (2009), esta função foi introduzida por Varian (1975) e pode ser expressa do seguinte modo:

$$l(\hat{\theta}, \theta) \propto \exp(c\Delta) - c\Delta - 1, \quad (1.33)$$

em que $c \neq 0$, $\Delta = (\hat{\theta} - \theta)$ e $\hat{\theta}$ é uma estimativa para θ .

Podemos interpretar o parâmetro c , como um parâmetro que dá forma a função. Segundo Ellah (2009), para valores de $c > 0$ iremos considerar que a superestimação tem maior gravidade que a subestimação. Por outro lado, se $c < 0$, a subestimação é mais grave que a superestimação. Além disso, para valores de c próximos de zero, a função de perda LINEX é quase simétrica.

O nosso objetivo agora é encontrar o estimador de Bayes quando utilizamos essa função. Para isso, temos que o risco a posteriori utilizando a função de perda LINEX pode ser obtido do seguinte modo:

$$R(\hat{\theta}) = \int_{\Theta} l(\hat{\theta}, \theta) p(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

$$R(\hat{\theta}) = \int_{\Theta} \left[e^{c(\hat{\theta}-\theta)} - c(\hat{\theta}-\theta) - 1 \right] p(\theta|\mathbf{x}) d\theta \quad (1.34)$$

$$R(\hat{\theta}) = e^{c\hat{\theta}} E_{\theta|\mathbf{x}}(e^{-c\theta}) - c\hat{\theta} + cE_{\theta|\mathbf{x}}(\theta) - 1,$$

em que $E_{\theta|\mathbf{x}}(\cdot)$ é a esperança a posteriori em relação a densidade a posteriori de θ .

Portanto o estimador de Bayes da função de perda LINEX, é o valor de $\hat{\theta}$ que minimiza a expressão (1.34), ou seja,

$$\frac{dR(\hat{\theta})}{d\hat{\theta}} = ce^{c\hat{\theta}} E_{\theta|\mathbf{x}}(e^{-c\theta}) - c = 0. \quad (1.35)$$

Fazendo algumas manipulações, temos:

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{1}{c} \ln\{E_{\theta|\mathbf{x}}(e^{-c\theta})\}, \quad (1.36)$$

em que $\hat{\theta}_{BL}$ é o estimador de Bayes. Isto é válido apenas quando $E_{\theta|\mathbf{x}}(e^{-c\theta})$ existe e é finita.

Como visto em Sindhu, Feroze e Aslam (2013) o risco integrado ou à posteriori de Bayes utilizando a função de perda LINEX pode ser expresso da seguinte forma:

$$R(\hat{\theta}) = \ln[E_{\theta|\mathbf{x}}(\exp(-c\theta))] + cE_{\theta|\mathbf{x}}(\theta), \quad (1.37)$$

1.5.4.2 Função de perda de Entropia geral

A função de perda de Entropia geral é outra importante função de perda assimétrica utilizada na literatura. Esta função foi introduzida por Calabria e Pulcini (1996) e pode ser expressa do seguinte modo:

$$l(\hat{\theta}, \theta) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, \quad (1.38)$$

em que q ($q \neq 0$) é um parâmetro de forma da função e $\hat{\theta}$ é uma estimativa para θ .

Como visto em Calabria e Pulcini (1996), para valores de $q > 0$ iremos considerar que o erro positivo tem maior gravidade que um erro negativo. Consequentemente se $q < 0$, o erro negativo é mais grave que o erro positivo.

Seguindo a mesma ideia apresentada na seção (1.5.4.1), o nosso objetivo é obter o estimador de Bayes dessa função. Para isso, temos que o risco a posteriori utilizando a função de perda de Entropia geral é dado por:

$$R(\hat{\theta}) = \int_{\Theta} l(\hat{\theta}, \theta) p(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

$$R(\hat{\theta}) = \int_{\Theta} \left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1 \right] p(\theta|\mathbf{x}) d\theta \quad (1.39)$$

$$R(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^q E_{\theta|\mathbf{x}}(\theta^{-q}) - q \ln(\hat{\theta}) + q E_{\theta|\mathbf{x}}[\ln(\theta)] - 1,$$

em que $E_{\theta|\mathbf{x}}(\cdot)$ é a esperança a posteriori em relação a densidade a posteriori de θ .

Portanto o estimador de Bayes da função de perda de Entropia geral, é o valor de $\hat{\theta}$ que minimiza a expressão (1.39), ou seja,

$$\frac{dR(\hat{\theta})}{d\hat{\theta}} = q\hat{\theta}^{q-1}E_{\theta|\mathbf{x}}(\theta^{-q}) - \frac{q}{\hat{\theta}} = 0. \quad (1.40)$$

Fazendo algumas manipulações, temos:

$$\hat{\theta}_{BE} = [E_{\theta|\mathbf{x}}(\theta^{-q})]^{-\frac{1}{q}}, \quad (1.41)$$

em que $\hat{\theta}_{BE}$ é o estimador de Bayes e $E_{\theta|\mathbf{x}}(\cdot)$ é a esperança a posteriori em relação a densidade a posteriori de θ . Isto é válido apenas quando a $[E_{\theta|\mathbf{x}}(\theta^{-q})]$ existe e é finita.

É possível observar que para $q = -1$, o estimador de Bayes da função de perda de Entropia geral será igual o da função de perda quadrática (função de perda simétrica), isto é, será a média a posteriori.

Como visto em Sindhu, Feroze e Aslam (2013) temos que o risco integrado ou à posteriori de Bayes utilizando a função de perda de Entropia geral pode ser expresso da seguinte forma:

$$R(\hat{\theta}) = \ln[E_{\theta|\mathbf{x}}(\theta^{-q})] + qE_{\theta|\mathbf{x}}[\ln(\theta)] . \quad (1.42)$$

1.6 Riscos competitivos: uma abordagem da forma latente

Sabemos que um item pode falhar por diversas causas, e em um contexto de testes acelerados, a falha da unidade em teste as vezes pode não estar associado a variável de aceleração que estamos considerando. Sendo assim, sabemos que a falha de um item em estudo pode estar associada a uma de k possíveis causas, e que em termos mais simples, essas causas estariam competindo para ocasionar essa falha.

Com base nisso, ao elaborarmos um estudo em que vamos levar em consideração que um item pode falhar por k possíveis causas, existem modelos adequados para modelar o tempo de vida desses itens, e esses modelos são conhecidos como riscos competitivos.

Como visto em Pintilie (2006), os riscos competitivos podem ser abordados de duas maneiras: a primeira abordagem é baseada apenas nos dados observáveis e a segunda abordagem é da forma latente. Vale ressaltar que neste trabalho vamos somente abordar a forma latente.

Motivada por Assane (2013), seja $T_1, T_2, \dots, T_k$ os tempos de falha associados a cada uma das k possíveis causas de falha. Isto é, podemos interpretar cada $T_1, T_2, \dots, T_k$ como um "tempo de falha provável" que iria ser observado se as outras causas de falha não tivessem presentes.

Neste tipo de abordagem, assume-se que os tempos de falhas associados a cada uma das k possíveis causas são diferentes, isto é, a falha de um item irá ocorrer por uma única causa dentre as k possíveis, ou seja, não é possível que um item falhe por duas ou mais causas conjuntamente.

Cientes de que não é possível observar simultaneamente os $T_1, T_2, \dots, T_k$, observamos apenas o tempo mínimo entre eles (T) e a sua equivalente causa de falha, na qual denotaremos por (C). Assim:

$$\begin{aligned}
T &= \min(T_1, T_2, \dots, T_k) \\
C &= \arg \min_j \{T_j : j = 1, 2, \dots, k\}
\end{aligned}
\tag{1.43}$$

O problema de riscos competitivos é formulado em termos da função de sobrevivência conjunta. Com base neste contexto, temos que a função de sobrevivência conjunta pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
S(t_1, t_2, \dots, t_k) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_k > t_k) \\
&= \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_2}^{\infty} \dots \int_{t_k}^{\infty} f(u_1, u_2, \dots, u_k) du_k \dots du_2 du_1,
\end{aligned}
\tag{1.44}$$

em que $t_j > 0$, para $j = 1, 2, \dots, k$, e $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ é a densidade de probabilidade conjunta.

Baseado em Elandt-Johnson e Johnson (1999), a função de sobrevivência marginal é dada por:

$$S_j(t_j) = S(0, 0, \dots, t_j, \dots, 0), \tag{1.45}$$

em que podemos interpretar como a função de sobrevivência para a causa da falha j (GAIL, 1975).

As funções de risco relacionadas as funções de sobrevivência marginal e conjunta, são dadas por:

1. Função de risco "net".

Como visto em Elandt-Johnson e Johnson (1999), a função de risco associada a função de sobrevivência marginal apresentada em (1.45) é dada por:

$$h_j(t) = \frac{-\frac{\partial S_j(t_j)}{\partial t_j}}{S_j(t_j)} = -\frac{\partial \ln S_j(t_j)}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{1.46}$$

Na qual podemos interpretar a expressão (1.46) como a taxa instantânea de falha pela causa j no tempo t , quando j é a única causa de falha atuando.

2. Função de risco "crude".

Como visto em Elandt-Johnson e Johnson (1999), a função de risco por causa específica associada a função de sobrevivência conjunta, isto é, na presença de todas as possíveis causas de falha é dada por:

$$\lambda_j(t) = -\frac{\partial \ln S(t_1, t_2, \dots, t_k)}{\partial t_j} \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_k=t}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{1.47}$$

Em que podemos interpretar a expressão (1.47) como a taxa instantânea de falha pela causa j no tempo t , quando todas as possíveis causas de falha estão atuando.

Como visto em Tarumoto (2001) e considerando $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_k)$, temos que a função de risco total, em termos de riscos por causa específica, é dada por:

$$\lambda_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) . \quad (1.48)$$

Além do mais, a função de risco total apresentada em (1.48) pode também ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda_T(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t P(T > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t S_T(t)} \\ &= \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{1}{S_T(t)} \frac{\partial F_T(t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{S_T(t)} \frac{\partial [1 - S_T(t)]}{\partial t} = \frac{1}{S_T(t)} \frac{\partial [-S_T(t)]}{\partial t} = -\frac{\partial \ln S_T(t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Se integrarmos a expressão (1.49) em ambos os lados sobre o intervalo de $(0, t)$, temos:

$$\int_0^t \lambda_T(u) du = -\ln[S_T(t)] , \quad (1.50)$$

após algumas manipulações algébricas, temos que:

$$\begin{aligned} S_T(t) &= \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_T(u) du \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \sum_{j=1}^k \lambda_j(u) du \right\} \\ &= \prod_{j=1}^k \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_j(u) du \right\} = \prod_{j=1}^k G_j(t), \end{aligned} \quad (1.51)$$

em que $G_j = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_j(u) du \right\}$ para $j = 1, 2, \dots, k$. e $S_T(t)$ é a função global de sobrevivência.

Como visto em (Kalbfleisch e Prentice (1980) apud Tarumoto (2001)), se $T_1, T_2, \dots, T_k$ forem independentes, temos que $h_j(t) = \lambda_j(t)$ e conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \lambda_T(t) &= \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) = \sum_{j=1}^k h_j(t), \\ S_T(t) &= \prod_{j=1}^k G_j(t) = \prod_{j=1}^k S_j(t), \end{aligned} \quad (1.52)$$

em que $S_j = \exp \left\{ - \int_0^t h_j(u) du \right\}$ para $j = 1, 2, \dots, k$. Para mais informações ver (ELANDT-JOHNSON; JOHNSON, 1999) e (TARUMOTO, 2001).

De acordo com (Kalbfleisch e Prentice (1980) apud Tarumoto (2001)), a probabilidade de um item falhar antes do tempo t pela causa j , considerando a presença de todas as possíveis causas de falha, pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned} F_j(t) = P(T \leq t, C = j) &= P(T_i \leq t, T_i < T_l, i \neq l) \\ &= \int_0^t \lambda_j(u) S_T(u) du. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Consequentemente, temos que a função de distribuição de T pode ser obtida do seguinte modo:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\min(T_1, T_2, \dots, T_k) \leq t) = \sum_{j=1}^k F_j(t). \quad (1.54)$$

Por fim, através da expressão (1.53) podemos obter a função densidade de probabilidade conjunta entre T e a causa da falha j , isto é:

$$f_j(t) = \lambda_j(t) S_T(t), \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (1.55)$$

Testes de vida acelerados

Neste capítulo iremos abordar de maneira clara os principais conceitos que regem este trabalho, ou seja, iremos apresentar os mais importantes pontos da teoria dos testes de vida acelerados.

Uma das motivações para se realizar um estudo sobre testes acelerados, nasceu da observação do cenário tecnológico atual. Devido a competitividade industrial e o desenvolvimento de tecnologias cada vez mais sofisticadas, as grandes indústrias tem se mostrado cada vez mais preocupadas em produzir produtos de maior qualidade, buscando em um segundo momento analisar da melhor forma e de maneira rápida a confiabilidade destes produtos.

Se estamos interessados em inferir sobre a confiabilidade de um produto, é evidente que devemos realizar alguns tipos de testes. Como discutido na seção 1.1, se realizarmos os testes em condições normais de funcionamento do produto, muito tempo de teste será exigido. Sendo assim, uma alternativa para superar essa dificuldade, é o uso dos testes de vida acelerados. O objetivo dos testes de vidas acelerados é de acelerar a ocorrência da falha de um produto, submetendo o mesmo a condições elevadas de estresse.

Abordaremos a seguir algumas das formas que existem para se realizar esta aceleração, contudo de uma forma geral, esta aceleração ocorre quando submetemos algumas variáveis que estão relacionadas ao funcionamento de produtos a altos níveis de estresse, ou seja, quando aumentamos a temperatura, pressão, taxa de uso e etc.

2.1 Tipos de Testes acelerados

Como visto em Vieira (2006), iremos abordar a seguir dois tipos de testes acelerados que usualmente são utilizados em aplicações de análise de confiabilidade.

1. **Testes de degradação acelerados:** Quando optamos em usar esse tipo de teste, o nosso interesse se encontra em alguma medida relacionada a degradação do produto, como por exemplo o desgaste, que é algo que podemos observar ao longo do tempo de vida do mesmo. Neste caso, objetivo é estudar a degradação do produto por um determinado tempo, para posteriormente inferir sobre seu tempo de vida.
2. **Testes de vida acelerados:** Ao utilizar os testes de vida acelerados, temos como objetivo "forçar" a falha do item em teste, pois o nosso interesse é observar o tempo até a sua falha. Nesse tipo de teste, os itens são colocados a vários níveis elevados de estresse, e são observados seus tempos de falha. Os itens que não falharam até o final do estudo, são considerados como censurados. Feito isso, por meio de um modelo

específico, é realizado uma extrapolação dos resultados obtidas para as condições normais de uso dos itens, para posteriormente realizarmos afirmações sobre a sua confiabilidade.

2.2 Tipos de Aceleração dos Testes

Como visto em Vieira (2006), ao elaborarmos algum tipo de experimento, só é possível classificá-lo como um experimento de testes acelerados, caso o produto em estudo seja exposto a níveis de estresse maiores do que são utilizados normalmente.

Contudo, quando temos a intenção de realizar um experimento de testes acelerados, devemos nos preocupar com a forma de aceleração que iremos aplicar. Com base nisso, podemos determinar essas formas de acordo com dois tipos de estresse:qa

1. **Por alta taxa de uso:** Neste tipo de aceleração o produto que está sendo testado é colocado em execução, porém com uma carga de utilização bem mais elevada do que o normal.
2. **Por altos níveis de estresse:** Ao utilizar esta forma de aceleração, o nosso intuito é agilizar a quebra do produto submetendo a elevados níveis de estresse variáveis que estão totalmente relacionadas ao seu funcionamento. Em outras palavras, iremos acelerar as variáveis que influenciam no funcionamento e desempenho do produto, que é a temperatura, a tensão, a umidade, etc. Podemos ver em Freitas e Colosimo (1997), uma lista sobre quais variáveis de estresse podem ser utilizadas para determinados tipos de produtos que podem ser estudados.

2.3 Tipos de Aplicação do Nível de Estresse

Quando optamos em realizar um experimento de testes acelerados, na qual a forma de aceleração será por altos níveis de estresse, é imprescindível definir qual carga de estresse será aplicado nos itens que serão testados.

Como há alguns tipos de carga de estresse, um modo de escolher qual utilizar, é se basear no comportamento que se espera que ocorra na realidade com o produto e assim ver qual carga mais se aproxima desse comportamento. Como apresentado por Nelson (2009), existem cinco formas de estresse e será descrito a seguir.

1. **Constante:** Se escolhermos em utilizar essa carga, cada produto é submetida a um determinado nível de estresse elevado e constante. De modo que, após fixado o nível de estresse para este produto, o mesmo deverá permanecer neste nível até o final do estudo.

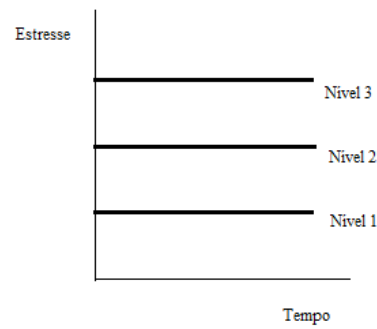


Figura 2.1: Figura ilustrativa das curvas de estresse constante.

2. **"Step-Stress"**: Se escolhermos utilizar essa carga, cada produto em teste é submetido a um determinado nível de estresse alto por um período de tempo pré-fixado. Caso o produto em teste não falhe até esse período, o nível de estresse é aumentado para um novo nível, e esse processo se repete até o final do estudo.

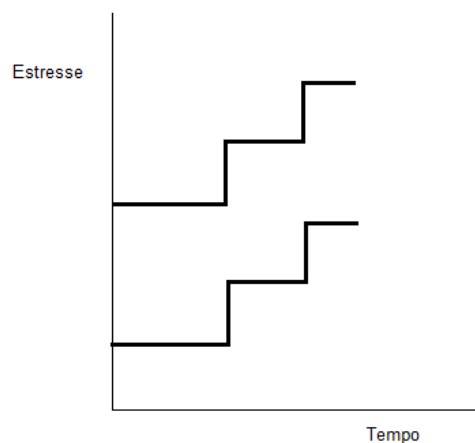


Figura 2.2: Figura ilustrativa das curvas de estresse do tipo "step-stress".

3. **Progressivo**: Se utilizarmos essa carga, todos os produtos são submetidos a um nível de estresse crescente. De modo, que este aumento não é feito em estágios como no caso do "step-stress", mas sim, aos poucos até o final do estudo.

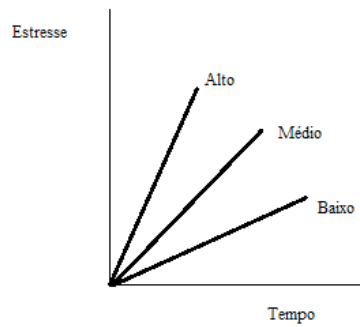


Figura 2.3: Figura ilustrativa das curvas de estresse do tipo progressivo.

4. **Cíclico:** Se utilizarmos essa carga de estresse, os produtos em estudos permaneceram em níveis de estresse alto e a níveis de estresse baixo, de maneira cíclica até o final do estudo.

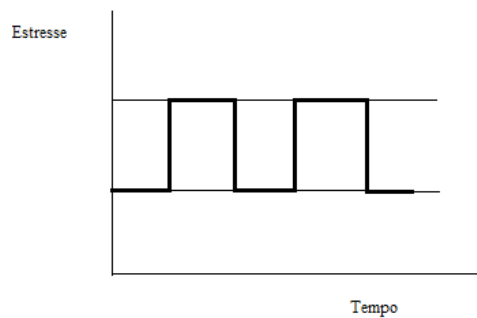


Figura 2.4: Figura ilustrativa das curvas de estresse do tipo cíclico.

5. **Aleatório:** Se utilizarmos essa, os produtos em estudo serão colocados em níveis de estresse que vão variando de forma aleatória, até o final do estudo.

2.4 Modelo de Exposição Cumulativa

Apresentaremos agora o conceito que rege toda a modelagem deste trabalho, na qual será exibida nos próximos capítulos.

Sendo assim, quando utilizamos a técnica de testes acelerados com níveis de estresse que se alteram no tempo, ou seja, considerando uma carga do tipo step-stress, encontramos dois tipos de modelos na literatura que podem ser utilizados: o modelo de "tampered random variable" (TRV), e o modelo de exposição cumulativa.

Primeiramente vamos abordar o modelo TRV, na qual foi inicialmente proposto por DeGroot e Goel (1979), e após algum tempo foi modificado por Bhattacharyya e Soejoeti (1989), sendo este modelo frequentemente aplicado em situações de testes parcialmente acelerados. Nesses tipos de testes, temos que um conjunto de itens é submetidos a um experimento em suas condições normais de uso por um período de tempo específico. Os itens que não falharem até esse tempo, são submetidos a um nível de estresse mais elevado.

A essência do modelo TRV está na forma que é tratada a mudança dos níveis de estresse. Neste caso, como visto em Pinto (2004) a consequência de mudar de um nível de estresse x_1 para um nível x_2 , é o de multiplicar a vida residual dos itens por um fator desconhecido $1/\alpha$, na qual este fator depende dos níveis de estresse. A generalização desse modelo para situação em que temos vários níveis de estresse, pode ser visto em (MADI, 1993).

É importante ressaltar que quando optamos realizar um experimento de testes parcialmente acelerados, precisamos ter até o final do estudo itens que tenham falhado tanto nas condições normais de uso, quanto nos outros níveis de estresse elevado. Veja que devido a essa condição, podemos nos deparar com uma dificuldade, que é no caso em que o nível de estresse é a condição normal de uso do item, pois o tempo até que haja ao menos uma falha poderá ser grande.

O modelo de exposição cumulativa proposto por Nelson (2009), tem um olhar diferente sobre as mudanças dos níveis de estresse, este leva em consideração o efeito cumulativo dos níveis de estresse nos itens que foram testados. Para um melhor entendimento sobre o que é e como é feita a formulação do modelo de exposição cumulativa, vamos imaginar a seguinte situação.

Vamos considerar o caso em que um determinado conjunto de 10 itens idênticos foram submetidos a um nível de estresse começando em 6V, e após um período de 100 horas, os itens que não falharam passaram para o nível 8V. Os itens em teste no nível 8V foram observados por mais 70 horas, e aqueles que não falharam até 170 horas, passaram para o nível 10V na qual foram observados por mais 50 horas.

Tabela 2.1: Esquema do experimento fictício de testes acelerados.

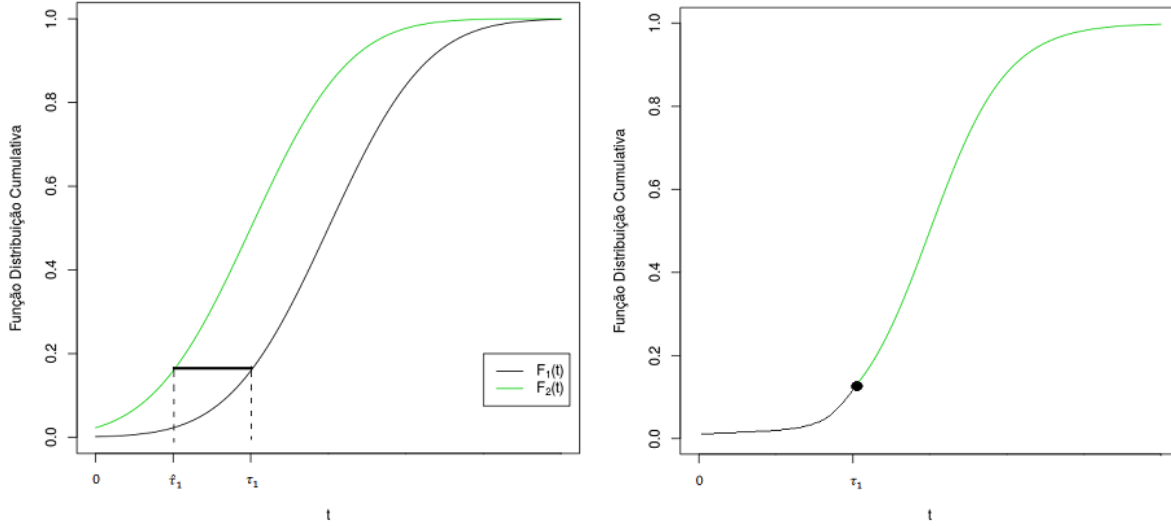
Nível	Horas
6V	0 – 100
8V	100 – 170
10V	170 – 220

Neste exemplo, vamos supor que a primeira falha tenha ocorrido as 120 horas, quando o nível de estresse era 8V. Porém devemos lembrar que durante o teste, este item permaneceu um período de tempo no nível 6V. Sendo assim, é de extrema importância levar em consideração em uma análise esse período de tempo que o item permaneceu no nível 6V, e podemos fazer isso por meio do modelo de exposição cumulativa.

Como visto em Balakrishnan, Zhang e Xie (2009), este modelo relaciona a distribuição do tempo de vida dos itens em um nível de estresse, com as distribuições dos níveis de estresse anteriores. Além disso, ao formular esse modelo assumi-se que as vidas residuais dos itens dependem apenas da exposição cumulativa atual dos itens, e que os mesmos não se lembram como essa exposição foi acumulada.

Para um melhor entendimento, vamos nos concentrar em um caso de step-stress simples, ou seja, quando consideramos apenas dois níveis de estresse. Neste caso, um conjunto de componentes é colocado em teste com um nível de estresse inicial x_1 e os mesmos permanecem nesse nível até um tempo pré-fixado τ_1 . Após esse tempo τ_1 , o nível de estresse é elevado para um nível x_2 e o estudo continua até obter um determinado número de componentes que falharam ou até um tempo pré-fixado.

Vamos indicar por $F_1(t)$ e $F_2(t)$, as distribuições dos tempos de vida nos níveis x_1 e x_2 , respectivamente. Veja a figura a seguir.



(a) Figura ilustrativa das funções de distribuição para o caso "step-stress" simples. (b) Figura ilustrativa da Função de distribuição cumulativa do tempo de vida.

Figura 2.5: Figura ilustrativa do modelo de exposição cumulativa.

Por meio da Figura 2.5 (a), explicaremos como é construído a função de distribuição acumulado do tempo de vida. No primeiro nível de estresse a função de distribuição acumulado do tempo de vida vai ser a própria $F_1(t)$, em que $0 < t < \tau_1$. Já no segundo nível de estresse, o tempo de início equivalente (vamos denotar por $\hat{\tau}_1$) é aquele que teria produzido a mesma função de distribuição do primeiro nível. Ou seja, $\hat{\tau}_1$ é a solução de:

$$F_1(\tau_1) = F_2(\hat{\tau}_1). \quad (2.1)$$

Deste modo, como visto em Pinto (2004), o efeito da mudança do nível de estresse de x_1 para x_2 , vai ser mudar a distribuição de vida de x_2 , que é $F_2(t)$ para $F_2(t - \tau_1 + \hat{\tau}_1)$, em que $\tau_1 \leq t < \infty$. Assim, esta é a distribuição acumulada do tempo de vida no segundo nível.

Como visto em Alkhalfan (2012) para sabermos quem é $\hat{\tau}_1$, precisamos assumir que θ_1 e θ_2 são parâmetros de escala associados as funções de distribuição $F_1(t)$ e $F_2(t)$, respectivamente, e que ambas distribuições pertencem a mesma família. Além disso, iremos assumir continuidade absoluta da função de distribuição cumulativa do tempo de vida (ver Figura 2.5 (b)). Logo:

$$\hat{\tau}_1 = \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1. \quad (2.2)$$

Na qual podemos generalizar para situações em que temos mais que dois níveis de estresse, ou seja, $k = 1, 2, 3, \dots, m$ do seguinte modo:

$$\hat{\tau}_k = \frac{\theta_{k+1}}{\theta_k} (\tau_k - \tau_{k-1} + \hat{\tau}_{k-1}). \quad (2.3)$$

Assim, com base nos pressupostos citados anteriormente, a função de distribuição acumulada do tempo de vida, considerando uma situação de step-stress simples, é dada por:

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = F_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ G_2(t) = F_2(t - \tau_1 + \hat{\tau}_1) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (2.4)$$

e a função de densidade de probabilidade correspondente, é dada por:

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = f_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ g_2(t) = f_2(t - \tau_1 + \hat{\tau}_1) & , \tau_1 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (2.5)$$

As expressões (2.4) e (2.5) podem ser generalizadas para situações em que temos mais que dois níveis de estresse, ou seja, $k = 1, 2, 3, \dots, m$ do seguinte modo:

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = F_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ G_2(t) = F_2(t - \tau_1 + \hat{\tau}_1) & , \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ G_3(t) = F_3(t - \tau_2 + \hat{\tau}_2) & , \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & \\ G_k(t) = F_k(t - \tau_{k-1} + \hat{\tau}_{k-1}) & , \tau_{k-1} \leq t < \infty \end{cases} , \quad (2.6)$$

e a função de densidade de probabilidade correspondente, é dada por:

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = f_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ g_2(t) = f_2(t - \tau_1 + \hat{\tau}_1) & , \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ g_3(t) = f_3(t - \tau_2 + \hat{\tau}_2) & , \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & \\ g_k(t) = f_k(t - \tau_{k-1} + \hat{\tau}_{k-1}) & , \tau_{k-1} \leq t < \infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.5 Modelos de testes acelerados usuais

Vamos imaginar um experimento de testes acelerados, na qual o nosso interesse é acelerar o tempo até a falha de um determinado produto, submetendo a altos níveis de estresse uma variável X que está totalmente relacionada ao funcionamento do produto. Sendo assim, podemos pensar que o tempo até a falha (resposta) está relacionado com o estresse aplicado (variável de estresse X), segundo o modelo Relação Estresse-Resposta geral dado por (KLEIN; BASU, 1981):

$$\lambda_i = \exp\{-(Z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)\} , \quad (2.8)$$

em que:

- $X = -\log(V_i)$ para o modelo Potência Inversa e $X = \frac{1}{V_i}$, para os modelos Arrhenius e Eyring.
- $Z = -\log(V_i)$ para o modelo de Eyring e 0 para os modelos Potência Inversa e Arrhenius.
- $\beta_0 = \log(\alpha)$ para o modelo Potência Inversa, e $\beta_0 = -\alpha$ para os modelos Arrhenius e Eyring.
- $\beta_1 = \beta$ para os três modelos (Potência Inversa, Arrhenius e Eyring).

Sendo α e β parâmetros desconhecidos a serem estimados e V_i o nível de estresse.

A seguir apresentaremos os três modelos mais conhecidos e utilizadas na metodologia de testes acelerados. Esses três modelos são: a relação de Arrhenius, a relação Lei de Potência Inversa e a relação de Eyring. Esses modelos usualmente utilizados em testes acelerados podem ser obtidos como casos particulares de (2.8).

2.5.1 Relação de Arrhenius

A relação de Arrhenius é indicada a ser utilizada quando a variável de estresse é a temperatura. Esta relação é baseada na Lei de Arrhenius, que assume que um produto irá falhar, quando uma quantidade crítica de produto químico reagir. Segundo Mann, Singpurwalla e Schafer (1974) essa relação pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\lambda_i = \exp \left\{ \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right\}, \quad (2.9)$$

em que V_i é o i -ésimo nível de estresse, α e β são parâmetros desconhecidos tais que $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

2.5.2 Relação Lei de Potência Inversa

Segundo Mann, Singpurwalla e Schafer (1974) a relação Lei de Potência Inversa é utilizada para qualquer outro tipo de variável de estresse. Essa relação pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\lambda_i = \frac{V_i^\beta}{\alpha}, \quad (2.10)$$

em que V_i é o i -ésimo nível de estresse, α e β são parâmetros desconhecidos tais que $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$.

2.5.3 Relação de Eyring

Segundo Mann, Singpurwalla e Schafer (1974) a relação de Eyring é frequentemente utilizada, quando deseja-se realizar um estudo em que sua variável de estresse é a tensão ou a umidade. Essa relação pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\lambda_i = V_i \exp \left\{ \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right\}, \quad (2.11)$$

em que V_i é o i -ésimo nível de estresse, α e β são parâmetros desconhecidos tais que $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II

Neste capítulo apresentaremos toda formulação teórica e matemática que foi utilizada para a construir o modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando a distribuição Gama.

Iremos apresentar a análise clássica realizada, ou seja, vamos mostrar os estimadores de Máxima Verossimilhança obtidos para o modelo proposto, como também a distribuição assintótica desses estimadores.

Mostraremos também a análise bayesiana desenvolvida para realizar a estimação dos parâmetros do modelo, na qual adotamos a distribuição Gama como distribuição a priori para os parâmetros do modelo.

3.1 Descrição do modelo

Para construir o modelo step-stress simples sob censura tipo II, vamos utilizar o modelo de exposição cumulativa. Além disso, vamos assumir que os tempos de falha observados tanto no nível de estresse x_1 quanto no nível de estresse x_2 , seguem uma distribuição Gama com parâmetro de forma comum α e parâmetros de escala θ_1 e θ_2 .

Vamos indicar por F_1 e F_2 , as funções de distribuição dos tempos de falha nos níveis de estresse x_1 e x_2 , nesta ordem. Além do mais, vamos considerar que θ_1 e θ_2 são os parâmetros de escala associados a essas funções, respectivamente.

Sendo assim, a função de distribuição acumulada do modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando a distribuição Gama, para os níveis de estresse x_1 e x_2 , é dado por:

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = F_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ G_2(t) = F_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (3.1)$$

em que:

$$F_1(t) = \int_0^{\frac{t}{\theta_1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad F_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) = \int_0^{\frac{t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1}{\theta_2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

na qual $t > 0$ e $\alpha > 0$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ são parâmetros desconhecidos. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = f_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ g_2(t) = f_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (3.2)$$

em que:

$$f_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_1^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{t}{\theta_1}\right\}.$$

$$f_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_2^\alpha} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)\right\}.$$

Para melhor entendermos o modelo step-stress simples sob censura tipo II adotado neste trabalho, vamos imaginar o caso em que começamos com n unidades em teste, na qual essas unidades são submetidas a um nível de estresse inicial x_1 . Feito isso, essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1 . Após esse tempo, as unidades que não falharam serão submetidas a um nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_2 .

Como estamos considerando um caso de censura tipo II, o experimento só acabará quando r unidades falharem, de modo que as $n - r$ unidades que não falharam serão censuradas. Sendo assim, vamos denotar por n_1 , o número de unidades que falharam no primeiro nível de estresse, e vamos denotar por n_2 , o número de unidades que falharam no segundo nível de estresse.

A seguir apresentaremos um esquema da ordem dos tempos de falhas.

$$t_{1:n} < \cdots < t_{n_1:n} < \tau_1 \leq t_{n_1+1:n} < \cdots < t_{r:n}. \quad (3.3)$$

Nas próximas seções apresentaremos os dois principais métodos de estimação, que é o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano, para o modelo descrito.

3.2 Análise Clássica do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II

Para realizar uma análise clássica considerando este modelo, iremos utilizar o método de Máxima Verossimilhança.

Sendo assim, vamos considerar uma amostra aleatória como apresentado em (3.3). Como visto na seção 1.4.1, a função de verossimilhança de α , θ_1 e θ_2 baseado em uma amostra com censura tipo II, pode ser escrita do seguinte modo:

$$L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r g(t_{i:n}) \{1 - G(t_{r:n})\}^{n-r} \right], \quad (3.4)$$

em que $r = n_1 + n_2$. Motivada por Alkhalafan (2012) e utilizando as expressões apresentadas em (3.1) e (3.2), faz-se possível construir a função de verossimilhança para α , θ_1 e θ_2 , considerando três possíveis casos:

1. Para o caso de $n_1 = r$ e $n_2 = 0$, a função de verossimilhança em (3.4) é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} f_1(t_{i:n}) \right\} \{1 - F_1(t_{r:n})\}^{n-r} \\ &= \frac{n! \left(\prod_{i=1}^{n_1} t_i \right)^{\alpha-1}}{(n-r)! \theta_1^{\alpha n_1} (\Gamma(\alpha))^{n_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n_1} t_i \right\} \{1 - F_1(t_{n_1})\}^{n-r}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que $0 < t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \tau_1$.

2. Para o caso de $n_1 = 0$ e $n_2 = r$, a função de verossimilhança em (3.4) é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_2} f_2 \left(t_{i:n} - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\} \\ &\times \left\{ 1 - F_2 \left(t_{r:n} - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\}^{n-r} \\ &= \frac{n! \left(\prod_{i=1}^{n_2} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right)^{\alpha-1}}{(n-r)! \theta_2^{\alpha n_2} (\Gamma(\alpha))^{n_2}} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n_2} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right\} \\ &\times \left\{ 1 - F_2 \left(t_{n_2} - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\}^{n-r}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que $\tau_1 \leq t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty$.

3. Para o caso de $1 \leq n_1 \leq r-1$, a função de verossimilhança em (3.4) é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} f_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r f_2 \left(t_{i:n} - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\} \\ &\times \left\{ 1 - F_2 \left(t_{r:n} - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\}^{n-r} \\ &= \frac{n! \left(\prod_{i=1}^{n_1} t_i \right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=n_1+1}^r t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right)^{\alpha-1}}{(n-r)! \theta_1^{\alpha n_1} \theta_2^{\alpha n_2} (\Gamma(\alpha))^r} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i \right) - \frac{1}{\theta_2} \left(\sum_{i=n_1+1}^r t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\} \\ &\times \left\{ 1 - F_2 \left(t_r - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\}^{n-r}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que $0 < t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} < \tau_1 \leq t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty$.

Dentre esses três casos apresentados, trabalharemos com a função de verossimilhança descrita em (3.7). Deste modo, sabemos que maximizar a função de verossimilhança é o mesmo que maximizar o seu logaritmo. Sendo assim, a função log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
 l(\beta, \alpha_1, \alpha_2 | \mathbf{t}) &= \ln(L(\beta, \alpha_1, \alpha_2 | \mathbf{t})) \\
 &= \ln \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n_1} \ln(t_i) \\
 &+ (\alpha - 1) \sum_{i=n_1+1}^r \ln \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \\
 &- r \ln(\Gamma(\alpha)) - \alpha n_1 \ln(\theta_1) - \alpha n_2 \ln(\theta_2) - \frac{1}{\theta_1} \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i \right) \\
 &- \frac{1}{\theta_2} \left(\sum_{i=n_1+1}^r t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) + (n-r) \ln \left[1 - F_2 \left(t_r - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que $0 < t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} < \tau_1 \leq t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty$.

Derivando a equação (3.8) em relação aos parâmetros de interesse α , θ_1 e θ_2 e igualando a zero, teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^{n_1} \ln(t_i) + \sum_{i=n_1+1}^r \ln \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) - r\psi(\alpha) - n_1 \ln(\theta_1) \\
 &- n_2 \ln(\theta_2) + \frac{(n-r)}{(1-F_2(w))} [\psi(\alpha) F_2(w) \\
 &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{w/\theta_2} x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1} &= -\frac{(\alpha-1)\tau_1\theta_2}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right)} - \frac{\alpha n_1}{\theta_1} + \frac{\tau_1 n_2}{\theta_1^2} \\
 &+ \frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} t_i + \frac{(n-r)}{(1-F_2(w))} \frac{\tau_1}{\theta_1^2 \Gamma(\alpha)} \left(\frac{t_r - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{\alpha-1} \\
 &\times \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2} &= -\frac{\alpha n_2}{\theta_2} + \frac{(\alpha - 1)\tau_1}{\theta_1} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)} \\
&+ \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=n_1+1}^r (t_i - \tau_1) + \frac{(n-r)}{(1-F_2(w))} \frac{(t_r - \tau_1)}{\theta_2^2 \Gamma(\alpha)} \\
&\times \left(\frac{t_r - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Em que $\psi(\alpha) = \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}$ e $w = t_r - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1$.

Assim as equações apresentadas em (3.9), (3.10) e (3.11) são chamadas de equações de verossimilhança. Logo, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , θ_1 e θ_2 , podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações. Como este sistema não pode ser resolvendo analiticamente, faz-se necessário a utilização de métodos iterativos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

3.2.1 Intervalos de Confiança Aproximados

Pela teoria de inferência clássica e como visto em Bolfarine e Sandoval (2001), dado o vetor de parâmetros $\Theta = (\alpha, \theta_1, \theta_2)$, um tamanho amostral grande e com algumas condições de regularidade sendo satisfeitas, temos que a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (EMV) de Θ é:

$$(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_3(0, I^{-1}(\Theta)), \tag{3.12}$$

de modo que estes estimadores são assintoticamente não viciados. A matriz de variância e covariância desses estimadores é dado por $I^{-1}(\Theta)$, que é inversa da matriz de informação de Fisher observada, na qual podemos representar essa matriz da seguinte forma:

$$I^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \theta_2} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1 \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2 \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{3.13}$$

Os elementos da matriz de informação de Fisher observada são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \alpha^2} &= r\psi'(\alpha) + \frac{(n-r)}{(1-F_2(w))^2} \{ [(\psi'(\alpha) - \psi(\alpha)^2)F_2(w) \\
&+ 2\psi(\alpha)A_1(s) - A_2(s)](1-F_2(w)) - [\psi(\alpha)F_2(w) - A_1(s)]^2 \}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \theta_1} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1 \partial \alpha} = -\frac{n_1}{\theta_1} - \frac{\tau_1 \theta_2}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)} \\
&+ \frac{(n-r)\tau_1 s^{\alpha-1} e^{-s}}{(1-F_2(w))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^2} \{ \ln(s)(1-F_2(w)) - \psi(\alpha) + A_1(s) \}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \theta_2} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2 \partial \alpha} = -\frac{n_2}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1\right)} \\
&+ \frac{(n-r)(t_r - \tau_1)s^{\alpha-1}e^{-s}}{(1-F_2(w))^2 \Gamma(\alpha) \theta_2^2} \{\ln(s)(1-F_2(w)) - \psi(\alpha) + A_1(s)\}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1^2} &= \frac{\alpha n_1}{\theta_1^2} - \frac{2}{\theta_1^3} \sum_{i=1}^{n_1} t_i - \frac{2n_2 \tau_1}{\theta_1^3} + \frac{2(\alpha-1)\theta_2 \tau_1}{\theta_1^3} \\
&\times \sum_{i=n_1+1}^r \frac{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{2\theta_1} \tau_1\right)}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1\right)^2} + \frac{(n-r)\tau_1 s^{\alpha-1}e^{-s}}{(1-F_2(w))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^4} \\
&\times \left\{ [(1 - (\alpha-1)s^{-1})\tau_1 - 2\theta_1](1-F_2(w)) - \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}e^{-s} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = -\frac{(\alpha-1)\tau_1}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{t_i - \tau_1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1\right)^2} \\
&+ \frac{(n-r)(t_r - \tau_1)s^{\alpha-1}e^{-s}}{(1-F_2(w))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^2 \theta_2^2} \{ [(1 - (\alpha-1)s^{-1})\tau_1](1-F_2(w)) \\
&- \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}e^{-s} \}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2^2} &= -\frac{2}{\theta_2^3} \sum_{i=n_1+1}^r (t_i - \tau_1) - \frac{(\alpha-1)\tau_1^2}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1\right)^2} \\
&+ \frac{\alpha n_2}{\theta_2^2} + \frac{(n-r)(t_r - \tau_1)s^{\alpha-1}e^{-s}}{(1-F_2(w))^2 \Gamma(\alpha) \theta_2^4} \{ [(1 - (\alpha-1)s^{-1})(t_r - \tau_1) \\
&- 2\theta_2](1-F_2(w)) - \frac{(t_r - \tau_1)}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}e^{-s} \}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Em que $\psi(\alpha) = \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}$, $w = t_r - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1$, $s = \frac{t_r - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1}$,

$$A_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx \quad e \quad A_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx .$$

Com isso, faz-se possível construir intervalos de confiança assintóticos aproximados para os parâmetros α , θ_1 e θ_2 . Sendo assim, os intervalos de confiança assintóticos com nível $100(1 - \gamma)\%$ podem ser construídos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{EMV})} \\ \hat{\theta}_{1EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{1EMV})} , \\ \hat{\theta}_{2EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{2EMV})} \end{aligned} \quad (3.20)$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

3.3 Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II

Nessa seção, apresentaremos toda análise bayesiana realizada utilizando o modelo step-stress simples sob censura tipo II e considerando a distribuição Gama, na qual mostraremos as distribuições a priori que foram utilizadas e também a distribuição a posteriori obtida.

Olhando para as expressões (3.2) do modelo construído, e sabendo que os parâmetros desconhecidos α , θ_1 e θ_2 , pertencem ao espaço paramétrico de $\alpha, \theta_1, \theta_2 > 0$, torna-se razoável assumir uma distribuição a priori Gama para cada um dos três parâmetros.

Deste modo, vamos considerar que cada um dos parâmetros seguem uma distribuição Gama, ou seja, $\alpha \sim Gama(a_1, b_1)$, $\theta_1 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\theta_2 \sim Gama(a_3, b_3)$. Veja a seguir:

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1}} \alpha^{a_1-1} e^{-\alpha/b_1} \\ p(\theta_1) &= \frac{1}{\Gamma(a_2)b_2^{a_2}} \theta_1^{a_2-1} e^{-\theta_1/b_2} , \\ p(\theta_2) &= \frac{1}{\Gamma(a_3)b_3^{a_3}} \theta_2^{a_3-1} e^{-\theta_2/b_3} \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 e b_3 são conhecidos.

Como não temos nenhuma informação, nem de estudos anteriores e nem de especialistas, vamos assumir um caráter não-informativo para os parâmetros, ou seja, consideraremos $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0.01$. Isto é, espera-se que o valor médio de cada parâmetro a priori seja 1 e sua variância seja 100. Podemos pensar na variância, como uma representação da certeza que temos sobre a natureza dos parâmetros, por isso a escolha de uma variância relativamente alta.

Vamos assumir também independência a priori para os parâmetros, fazendo-se necessário determinar a priori conjunta, em que neste caso é o produto das prioris. Deste modo, a priori conjunta para os parâmetros é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \theta_1, \theta_2) &= \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1}} \alpha^{a_1-1} e^{-\alpha/b_1} \right\} \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_2)b_2^{a_2}} \theta_1^{a_2-1} e^{-\theta_1/b_2} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_3)b_3^{a_3}} \theta_2^{a_3-1} e^{-\theta_2/b_3} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\pi(\alpha, \theta_1, \theta_2) = \frac{\alpha^{a_1-1} \theta_1^{a_2-1} \theta_2^{a_3-1}}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1} \Gamma(a_2)b_2^{a_2} \Gamma(a_3)b_3^{a_3}} \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha}{b_1} + \frac{\theta_1}{b_2} + \frac{\theta_2}{b_3} \right) \right\}.$$

A distribuição a posteriori para os parâmetros α, θ_1 e θ_2 pode ser representada de forma mais simples, que é a forma proporcional ao produto da função de verossimilhança (3.7) e da distribuição a priori conjunta (3.22), resultado em:

$$\begin{aligned} p(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &\propto \frac{\alpha^{a_1-1} \theta_1^{a_2-1} \theta_2^{a_3-1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} t_i \right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=n_1+1}^r t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))^r \theta_1^{\alpha n_1} \theta_2^{\alpha n_2}} \\ &\times \exp \left\{ - \frac{\alpha}{b_1} - \frac{\theta_1}{b_2} - \frac{\theta_2}{b_3} - \frac{1}{\theta_1} \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i \right) - \frac{1}{\theta_2} \left(\sum_{i=n_1+1}^r t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\} \\ &\times \left\{ 1 - F_2 \left(t_r - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\}^{n-r}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

É possível ver que a densidade a posteriori apresentada em (3.23) é analiticamente complexa de ser tratada, fazendo-se necessário a utilização de métodos numéricos.

3.4 Estudo de simulação

A fim de comparar o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, será realizado simulações considerando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censuras.

Isto é, serão geradas várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente será realizado a aplicação das duas metodologias, com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori e viés.

3.4.1 Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II

Como visto em Alkhalfan (2012), o algoritmo utilizado para gerar valores aleatórios do modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando a distribuição Gama, é dado do seguinte modo:

1. Simular n estatísticas de ordem a partir da distribuição Uniforme(0,1), $U_1, \dots, U_n$.

2. Encontrar n_1 tal que $U_{n_1} \leq F_1(\tau) \leq U_{n_1+1}$.
3. Para $i \leq n_1$, faça $T_i = \theta_1 G^{-1}(U_i)$, onde $G(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.
4. Para $n_1 + 1 \leq i \leq r$, faça $T_i = \theta_2 G^{-1}(U_i) + \tau - \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau$.

3.4.2 Descrição da Simulação

Para a realização da comparação entre o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano, foram realizadas simulações utilizando a linguagem de programação R.

Assim, foram geradas amostras de diferentes tamanhos, isto é $n = (14, 20, 34, 50, 100)$, com 50% e 70% de censura, em que para cada tamanho amostral diferente considerado houveram 1000 amostras. Os valores dos parâmetros foram fixados anteriormente, e foi aplicado os dois métodos inferenciais em cada amostra, para assim obter estimativas para os parâmetros.

Utilizando os algoritmos elaborados em linguagem R, foi realizado:

- Para o método Clássico, foram geradas 1000 amostras (para cada tamanho amostral diferente), na qual foi realizado a estimação de máxima verossimilhança para cada uma delas, e posteriormente calculado os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), viés e a média.
- Para o método Bayesiano, foram usadas as mesmas 1000 amostras geradas (para cada tamanho amostral diferente). Considerando a priori Gama foi utilizado o algoritmo de Metropolis-Hastings, em que para cada amostra foram gerados 60000 valores da distribuição a posteriori, descartado os 20000 primeiros valores e aplicado lags de tamanho 30, a fim de diminuir a correlação entre os valores gerados. Posteriormente foi aplicado os estimadores de Bayes referente as funções de perda: Quadrática, LINEX (consideramos $c = 0.7$) e Entropia (consideramos $q = 0.7$) e calculado os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori, viés e a média das estimativas.

3.4.3 Resultados Numéricos

Os resultados obtidos utilizando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura, estão resumidos nas tabelas a seguir. Por meio dos índices calculados, julgaremos qual método obteve os melhores resultados.

As estatísticas apresentadas nas tabelas são a Média (Estimativa), Risco a posteriori, Viés, Probabilidade de Cobertura (PC) e o Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 3.1: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 14$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 14$	$r = 4$	α	Máxima Verossimilhança	4.7370	0.9510	-	2.7370	-3.9923	13.4664
			Quadrática	3.4578	0.9840	11.9273	1.4578	0.7189	10.7804
			Linex	2.0409	0.9840	3.0546	0.0409	0.7189	10.7804
			Entropia	2.1743	0.9840	0.0993	0.1743	0.7189	10.7804
		θ_1	Máxima Verossimilhança	16.1442	0.8110	-	6.6565	-27.2593	59.5478
			Quadrática	30.5287	0.9770	736.8275	21.0410	2.9274	137.9796
			Linex	5.8095	0.9770	24.2508	-3.6781	2.9274	137.9796
			Entropia	12.8491	0.9770	0.2726	3.3614	2.9274	137.9796
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.6569	0.6400	-	-0.8247	-4.2515	11.5654
			Quadrática	9.4190	0.9710	73.608	4.9373	0.9370	47.6903
			Linex	2.8693	0.9710	8.1595	-1.6122	0.9370	47.6903
			Entropia	3.7899	0.9710	0.2491	-0.6917	0.9370	47.6903
	$r = 7$	α	Máxima Verossimilhança	4.0994	0.9610	-	2.0994	-2.1802	10.3792
			Quadrática	3.0965	0.9750	7.4434	1.0965	0.7273	8.5332
			Linex	2.0391	0.9750	2.7334	0.0391	0.7273	8.5332
			Entropia	2.1431	0.9750	0.0876	0.1431	0.7273	8.5332
		θ_1	Máxima Verossimilhança	11.1604	0.7660	-	1.6727	-14.4965	36.8175
			Quadrática	23.7309	0.9840	446.9845	14.2432	2.6671	105.8768
			Linex	5.4637	0.9840	19.1846	-4.0240	2.6671	105.8768
			Entropia	10.6762	0.9840	0.2211	1.1885	2.6671	105.8768
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.9687	0.7210	-	-0.5129	-1.9424	9.8799
			Quadrática	7.8046	0.9680	41.4187	3.3230	1.4832	30.6491
			Linex	3.5133	0.9680	6.9215	-0.9683	1.4832	30.6491
			Entropia	4.5259	0.9680	0.1410	0.0442	1.4832	30.6491

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 3.2: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 20$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 20$	$r = 6$	α	Máxima Verossimilhança	3.3312	0.9470	-	1.3312	-1.6790	8.3415
			Quadrática	2.8114	0.9790	4.6259	0.8114	0.7769	7.3354
			Linex	2.0121	0.9790	2.4839	0.0121	0.7769	7.3354
			Entropia	2.0682	0.9790	0.0726	0.0682	0.7769	7.3354
		θ_1	Máxima Verossimilhança	14.2916	0.8550	-	4.8038	-17.0580	45.6413
			Quadrática	26.3625	0.9750	533.2648	16.8747	3.3555	113.1813
			Linex	6.2494	0.9750	21.1783	-3.2382	3.3555	113.1813
			Entropia	12.8123	0.9750	0.2049	3.3245	3.3555	113.1813
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.0552	0.7220	-	-0.4264	-3.5377	11.6481
			Quadrática	9.6072	0.9710	75.2030	5.1255	1.1891	44.9658
			Linex	3.2441	0.9710	8.3405	-1.2375	1.1891	44.9658
			Entropia	4.3905	0.9710	0.2087	-0.0911	1.1891	44.9658
	$r = 10$	α	Máxima Verossimilhança	3.3363	0.9710	-	1.3363	-0.7337	7.4063
			Quadrática	2.7393	0.9700	3.9868	0.7393	0.8203	6.5475
			Linex	2.0561	0.9700	2.4155	0.0561	0.8203	6.5475
			Entropia	2.1173	0.9700	0.0646	0.1173	0.8203	6.5475
		θ_1	Máxima Verossimilhança	10.7691	0.7980	-	1.2814	-10.3210	31.8593
			Quadrática	20.6341	0.9710	324.3583	11.1463	3.0841	84.8553
			Linex	5.8590	0.9710	16.8707	-3.6287	3.0841	84.8553
			Entropia	10.7678	0.9710	0.1673	1.2800	3.0841	84.8553
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.0463	0.7710	-	-0.4353	-1.0360	9.1286
			Quadrática	6.8918	0.9630	24.2903	2.4101	1.7050	23.5520
			Linex	3.7112	0.9630	6.2185	-0.7704	1.7050	23.5520
			Entropia	4.5709	0.9630	0.1034	0.0892	1.7050	23.5520

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 3.3: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 34$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 34$	$r = 10$	α	Máxima Verossimilhança	2.5000	0.9530	-	0.5000	0.1400	4.8600
			Quadrática	2.3355	0.9640	1.9063	0.3355	0.8862	4.9333
			Linex	1.9566	0.9640	2.0236	-0.0433	0.8862	4.9333
			Entropia	1.9677	0.9640	0.0445	-0.0322	0.8862	4.9333
		θ_1	Máxima Verossimilhança	13.8247	0.9050	-	4.3370	-9.2902	36.9397
			Quadrática	22.6254	0.9480	367.2002	13.1376	4.3270	84.0606
			Linex	7.2565	0.9480	18.4129	-2.2311	4.3270	84.0606
			Entropia	13.5403	0.9480	0.1330	4.0525	4.3270	84.0606
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.2205	0.7580	-	-0.2611	-2.5326	10.9738
			Quadrática	8.7920	0.9600	57.7563	4.3103	1.3946	38.0757
			Linex	3.4512	0.9600	7.7065	-1.0304	1.3946	38.0757
			Entropia	4.5518	0.9600	0.1705	0.0701	1.3946	38.0757
	$r = 17$	α	Máxima Verossimilhança	2.5455	0.9500	-	0.5455	0.3931	4.6979
			Quadrática	2.3662	0.9440	1.5115	0.3662	0.9557	4.7202
			Linex	2.0353	0.9440	2.0666	0.0353	0.9557	4.7202
			Entropia	2.0432	0.9440	0.0397	0.0432	0.9557	4.7202
		θ_1	Máxima Verossimilhança	10.8933	0.8330	-	1.4056	-5.0904	26.8772
			Quadrática	17.6122	0.9470	228.9849	8.1245	3.9453	61.2173
			Linex	6.6937	0.9470	14.6131	-2.7939	3.9453	61.2173
			Entropia	11.2760	0.9470	0.1076	1.7882	3.9453	61.2173
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.4363	0.8420	-	-0.0453	0.2470	8.6255
			Quadrática	6.1297	0.9540	12.6732	1.6481	2.1876	16.1371
			Linex	4.1335	0.9540	5.6243	-0.3481	2.1876	16.1371
			Entropia	4.8526	0.9540	0.0598	0.3709	2.1876	16.1371

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 3.4: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 50$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 50$	$r = 15$	α	Máxima Verossimilhança	2.2581	0.9460	-	0.2581	0.6145	3.9018
			Quadrática	2.1676	0.9490	0.7274	0.1676	0.9919	4.0175
			Linex	1.9548	0.9490	1.8725	-0.0451	0.9919	4.0175
			Entropia	1.9406	0.9490	0.0305	-0.0593	0.9919	4.0175
		θ_1	Máxima Verossimilhança	12.3197	0.9150	-	2.8320	-3.5718	28.2114
			Quadrática	18.1724	0.9420	189.4684	8.6846	4.8152	57.7300
			Linex	7.7022	0.9420	15.1072	-1.7855	4.8152	57.7300
			Entropia	12.6827	0.9420	0.0897	3.1950	4.8152	57.7300
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.0474	0.7590	-	-0.4342	-1.6702	9.7650
			Quadrática	7.6135	0.9670	38.6342	3.1319	1.4759	30.5105
			Linex	3.4488	0.9670	6.7611	-1.0327	1.4759	30.5105
			Entropia	4.3533	0.9670	0.1425	-0.1283	1.4759	30.5105
	$r = 25$	α	Máxima Verossimilhança	2.3427	0.9640	-	0.3427	0.7614	3.9240
			Quadrática	2.2296	0.9530	0.7573	0.2296	1.0674	3.9816
			Linex	2.0284	0.9530	1.9454	0.0284	1.0674	3.9816
			Entropia	2.0205	0.9530	0.0274	0.0205	1.0674	3.9816
		θ_1	Máxima Verossimilhança	9.9142	0.8570	-	0.4265	-1.2752	21.1037
			Quadrática	14.2273	0.9550	97.0564	4.7396	4.3173	41.9089
			Linex	7.0370	0.9550	12.1001	-2.4506	4.3173	41.9089
			Entropia	10.4982	0.9550	0.0733	1.0105	4.3173	41.9089
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.3978	0.8620	-	-0.0838	1.0594	7.7362
			Quadrática	5.4900	0.9580	5.7191	1.0083	2.4118	12.1259
			Linex	4.2241	0.9580	5.1125	-0.2574	2.4118	12.1259
			Entropia	4.7261	0.9580	0.0403	0.2444	2.4118	12.1259

Fonte:Elaborada pela autora.

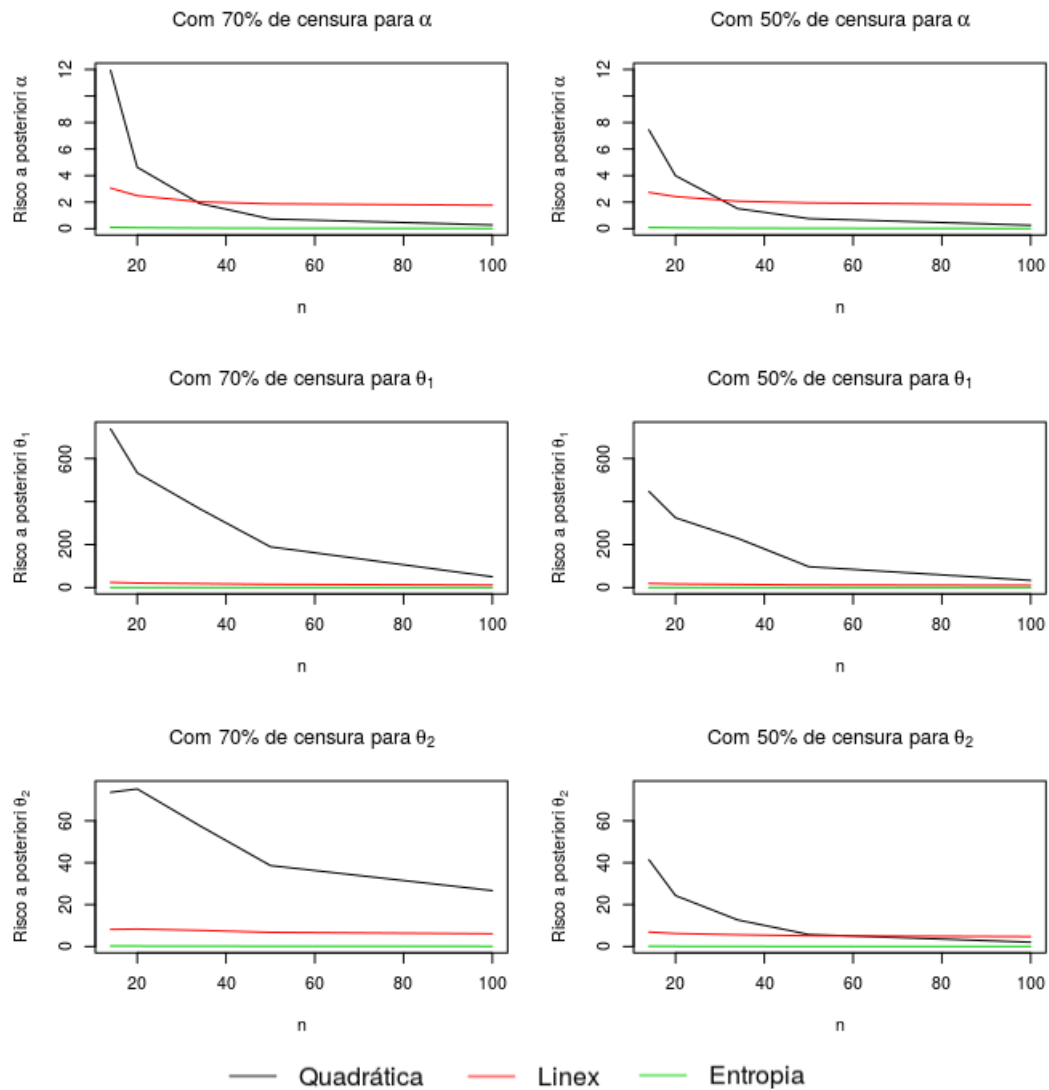
Tabela 3.5: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 100$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	$IC(95\%)$	
								Inferior	Superior
n = 100	r = 30	α	Máxima Verossimilhança	2.0922	0.9520	-	0.0922	1.0634	3.1210
			Quadrática	2.0484	0.9500	0.2799	0.0484	1.2071	3.1728
			Linex	1.9578	0.9500	1.7642	-0.0421	1.2071	3.1728
			Entropia	1.9440	0.9500	0.0149	-0.0559	1.2071	3.1728
		θ_1	Máxima Verossimilhança	11.0627	0.9430	-	1.5749	1.7901	20.3352
			Quadrática	13.5422	0.9520	50.1240	4.0545	5.6879	31.1697
			Linex	8.4605	0.9520	11.6477	-1.0271	5.6879	31.1697
			Entropia	11.4640	0.9520	0.0427	1.9763	5.6879	31.1697
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.3077	0.8020	-	-0.1739	-0.5975	9.2130
			Quadrática	6.7624	0.9590	26.6874	2.2807	1.8269	23.1749
			Linex	3.7508	0.9590	6.0960	-0.7308	1.8269	23.1749
			Entropia	4.5356	0.9590	0.1008	0.0539	1.8269	23.1749
	r = 50	α	Máxima Verossimilhança	2.1271	0.9550	-	0.1271	1.1342	3.1200
			Quadrática	2.0765	0.9490	0.2596	0.0765	1.2576	3.1510
			Linex	1.9928	0.9490	1.8000	-0.0071	1.2576	3.1510
			Entropia	1.9803	0.9490	0.0136	-0.0196	1.2576	3.1510
		θ_1	Máxima Verossimilhança	9.9400	0.8980	-	0.4523	2.1830	17.6971
			Quadrática	11.9428	0.9600	33.3848	2.4551	5.3250	26.2077
			Linex	7.9528	0.9600	10.3999	-1.5348	5.3250	26.2077
			Entropia	10.3151	0.9600	0.0369	0.8273	5.3250	26.2077
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.5118	0.9250	-	0.0301	2.1613	6.8623
			Quadrática	5.0096	0.9520	2.0552	0.5279	2.8997	8.5933
			Linex	4.4282	0.9520	4.7272	-0.0534	2.8997	8.5933
			Entropia	4.6866	0.9520	0.0185	0.2050	2.8997	8.5933

Fonte:Elaborada pela autora.

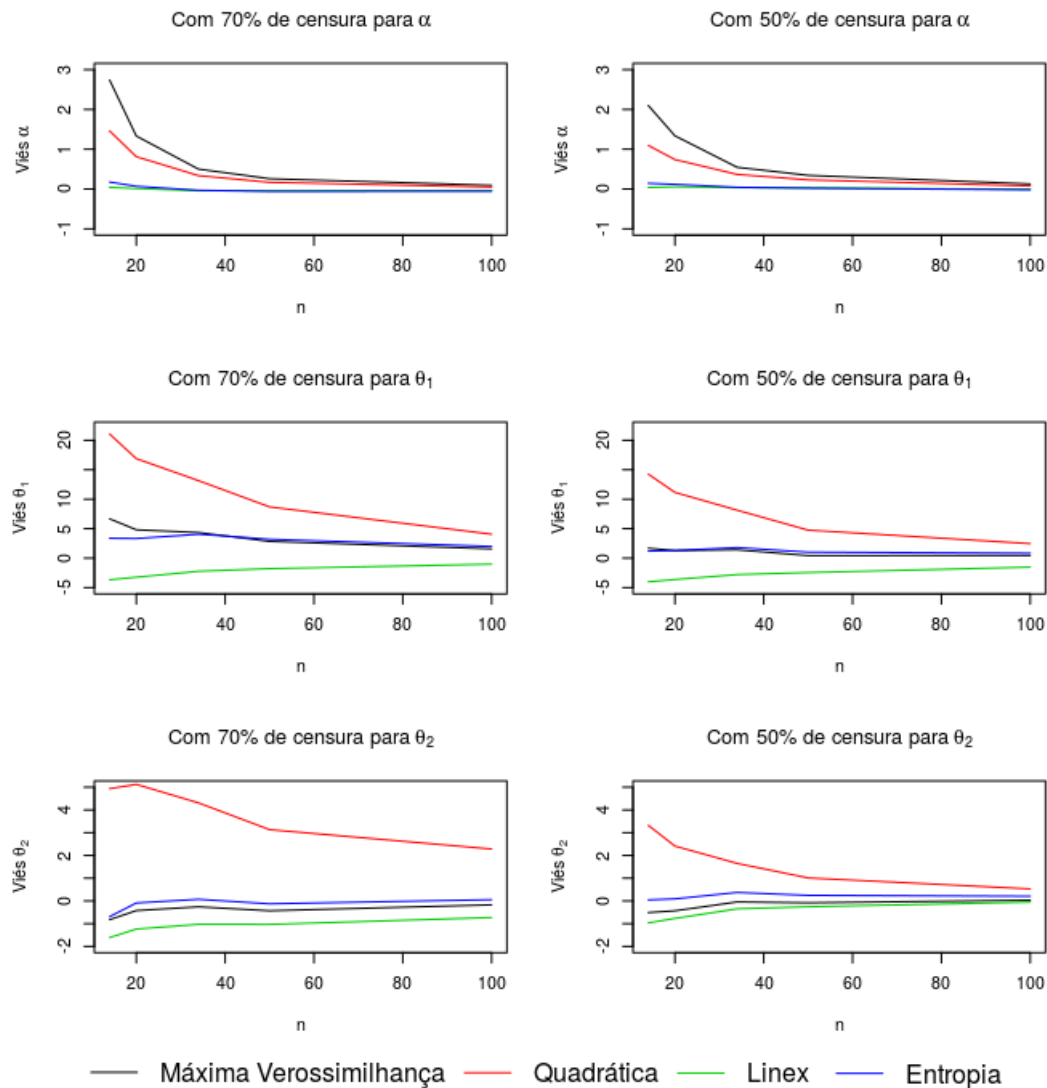
Antes de iniciarmos a explicação dos resultados apresentados nas tabelas, será apresentado duas figuras. A primeira figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de visualizarmos como está se comportando o risco a posteriori a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura. Já a segunda figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de observarmos agora como está se comportando o viés a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.

Figura 3.1: Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Figura 3.2: Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Comparando os resultados que foram apresentados nas tabelas 3.1 a 3.5, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais considerados, tanto para 70% quanto para 50% de censura o método bayesiano com as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia apresentaram as melhores probabilidades de cobertura, isto é, com probabilidades de cobertura próximas de 95%.

Quando olhamos para os valores do risco a posteriori referente as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia, sendo estes valores apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 3.1, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, a função de perda de Entropia apresentou os melhores resultados, isto é, com um risco a posteriori próximo de zero. Portanto, a perda que se espera cometer estimando os parâmetros do modelo proposto considerando a função de perda Entropia, é bem menor quando comparado com as outras funções de perda.

Observando ainda a Figura 3.1 é interessante notarmos que quando consideramos 50% de censura, obtemos valores menores do risco a posteriori do que quando consideramos 70% de censura. Além disso para amostras de tamanho pequeno a função de perda Quadrática,

usualmente utilizada em estudos de inferência Bayesiana, apresentou valores altos do risco a posteriori quando comparado com a função de perda de Entropia, ressaltando mais uma vez a importância de se trabalhar com essa função assimétrica.

Quando olhamos para os valores do viés apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 3.2, podemos perceber que para o parâmetro α as funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados bons e similares, isto é, com um viés próximo de zero. Já para o parâmetro θ_1 , o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados similares. Por fim, embora o método clássico e o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia tenham apresentado um desempenho similar para o parâmetro θ_2 , a função de perda de Entropia ainda apresentou um viés mais próximo de zero para grande parte dos tamanhos amostrais. Podemos perceber também, que a medida que o tamanho amostral aumenta, tanto o método clássico quanto o método bayesiano com diferentes funções de perda, tende a se aproximar de zero. Outro ponto importante de ressaltarmos é que quando consideramos 50% de censura, obtemos um viés menor do que quando consideramos 70% de censura.

Ao compararmos as estimativas realizadas por cada método, podemos perceber que tanto o método clássico quanto o método bayesiano (com funções de perda Linex e Entropia), para quase todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura, se aproximaram razoavelmente do verdadeiro valor dos parâmetros que são $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$ e $\theta_2 = 4.4816$. Podemos perceber, que a medida que o tamanho amostral aumenta essas estimativas pontuais tendem a se aproximar cada vez mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Por meio das tabelas apresentadas, é possível observar que para quase todos os tamanhos amostrais com 70% e com 50% de censura, o limite inferior do intervalo de confiança de 95% obtido para os parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança é um valor negativo, embora esses parâmetros assumam apenas valores positivos.

Sendo assim, de um modo geral podemos concluir que o método bayesiano com função de perda de Entropia obteve os melhores resultados, isto é, se aproximou razoavelmente do verdadeiro valor dos parâmetros, com os menores riscos a posteriori, com os menores viés e as melhores probabilidades de cobertura.

3.4.4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção, vamos considerar como exemplo ilustrativo uma amostra gerada com 50 observações ($n = 50$), em que desejamos observar os tempos de falha de 25 itens ($r = 25$). Para gerar essa amostra consideramos os seguintes parâmetros: $\alpha = 2$, $\theta_1 = 2.7182$, $\theta_2 = 1.6487$ e $\tau_1 = 3$. Os tempos de falhas obtidos são:

Tabela 3.6: Tempos de falha no primeiro e segundo nível de estresse.

Primeiro nível	0.7200469	0.9721706	0.9941022	1.0319965	1.1065589
	1.2781642	1.3386529	1.3448008	1.8845145	1.9875922
	2.0656038	2.5107668	2.8754452	2.9288403	2.9318783
Segundo nível	3.1372543	3.1760631	3.5330053	3.5384624	3.6217480
	3.8210656	3.8495405	3.9570059	4.0296370	4.0367434

Fonte:Elaborada pela autora.

Obtido os tempos de falha, o próximo passo foi aplicar o método clássico e o método bayesiano, já discutidos nesse capítulo. Os resultados que serão apresentados na tabela a

seguir são: a Média (Estimativa), Desvio Padrão (DP) e Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 3.7: Tabela de resultados obtidos a partir da amostra ilustrativa.

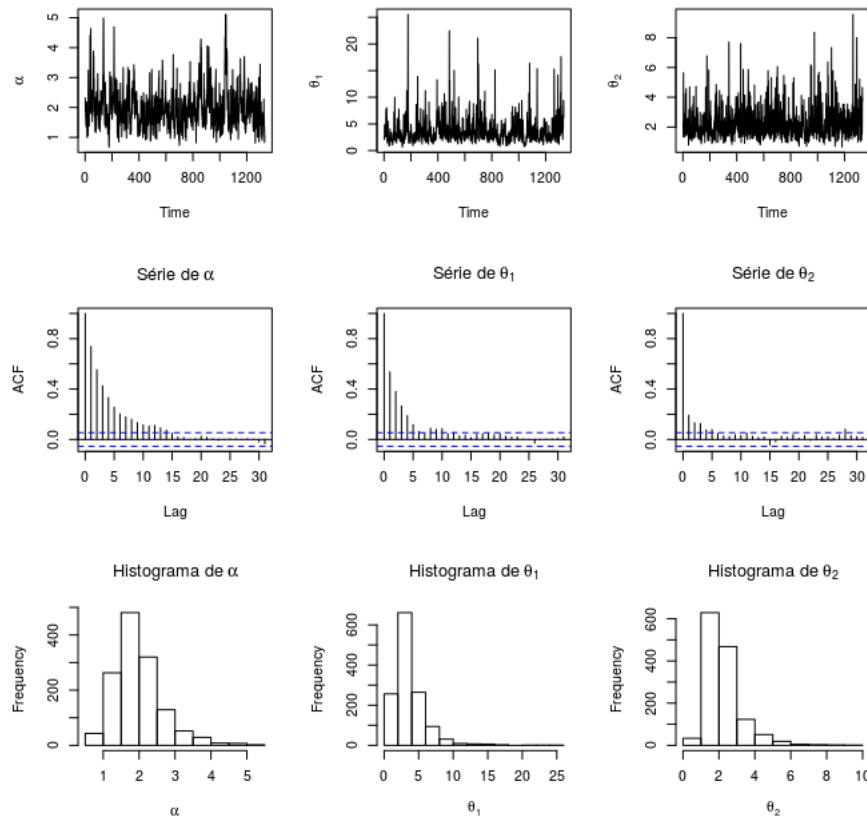
n	r	θ_i	Métodos/Funções de perda	Estimativa	DP	IC(95%)	
						Inferior	Superior
$n = 50$	$r = 25$	α	Máxima Verossimilhança	2.1120	0.6801	0.7789	3.4451
			Quadrática	1.9562	0.6339	0.8895	3.3671
			Linex	1.8287	0.6339	0.8895	3.3671
			Entropia	1.7831	0.6339	0.8895	3.3671
		θ_1	Máxima Verossimilhança	2.5162	1.2711	0.0249	5.0076
			Quadrática	3.8772	3.5836	1.2534	12.2780
			Linex	2.7556	3.5836	1.2534	12.2780
			Entropia	2.8768	3.5836	1.2534	12.2780
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.7807	0.6545	0.4979	3.0636
			Quadrática	2.2865	1.0845	1.0053	4.9078
			Linex	2.0162	1.0845	1.0053	4.9078
			Entropia	1.9838	1.0845	1.0053	4.9078

Fonte:Elaborada pela autora.

Os resultados apresentados na tabela 3.7 mostram que há pouca diferença entre os estimadores clássico e bayesiano. Além disso, podemos ver que o método clássico apresentou o menor desvio padrão para a maioria dos parâmetros, e um intervalo de confiança de 95% mais estreito para os parâmetros.

A seguir, apresentaremos os gráficos temporal, de autocorrelação e histograma da cadeia gerada para os parâmetros α , θ_1 e θ_2 utilizando o método bayesiano com priori Gama.

Figura 3.3: Gráfico temporal, de autocorrelação e histograma para α , θ_1 e θ_2 .



Fonte:Elaborada pela autora.

Por meio da Figura 3.3 é possível perceber que houve a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio, e além disso podemos observar que os valores gerados apresentam um comportamento assimétrico, fazendo-se necessário a utilização da mediana ou da moda para representar o conjunto de valores da distribuição a posteriori.

Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II

Neste capítulo apresentaremos toda formulação teórica e matemática que foi necessária para realizar a construção do modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II considerando uma distribuição Gama.

Seguindo a mesma motivação do capítulo 3, vamos apresentar toda análise clássica desenvolvida, desde os estimadores de Máxima Verossimilhança para o modelo proposto, até a distribuição assintótica dos mesmos.

Mostraremos também toda análise clássica e bayesiana desenvolvida para realizar a estimação dos parâmetros do modelo considerando uma situação que há 3 níveis de estresse.

4.1 Descrição do modelo

O modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, é uma generalização do modelo step-stress simples apresentado no capítulo 3, em outras palavras, este modelo é utilizado quando estamos em uma situação com m níveis de estresse.

Como visto em Alkhalfan (2012), para construir o modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, vamos utilizar novamente o modelo de exposição cumulativa. Ademais, vamos assumir que os tempos de falha observados em cada nível de estresse x_k , para $k = 1, \dots, m$, seguem uma distribuição Gama com parâmetro de forma comum α e parâmetro de escala θ_k . Veja que m representa o número de níveis de estresse utilizados.

Para entendermos melhor a ideia do modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, vamos imaginar a situação em que começamos com n unidades em teste, na qual essas unidades são submetidas a um nível de estresse inicial x_1 . Feito isso, essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1 . Após esse tempo, as unidades que não falharam serão submetidas a um nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_2 , e estas permaneceram nesse nível até um tempo pré-determinado τ_2 . Novamente, após esse tempo as unidades que não falharam serão submetidas a um novo nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_3 , e este processo continua seguindo essa ideia até observarmos um número fixo de r falhas.

Em suma, o experimento que pode ser modelado por este modelo inicia-se em um nível de estresse x_1 , e vai sendo alterado para um nível de estresse $x_2, x_3, \dots, x_m$, em tempos pré-determinados na qual podemos denotar por $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$. O experimento só acabará quando r unidades falharem, de modo que as $n - r$ unidades que não falharam

serão consideradas como censuradas. Vamos denotar por N_1 o número de unidades que falharam no primeiro nível de estresse, por N_2 o número de unidades que falharam no segundo nível de estresse e por N_k , o número de unidades que falharam no k -ésimo nível de estresse, em que $k = 1, 2, \dots, m$.

A seguir apresentaremos um esquema da ordem dos tempos de falhas.

$$\begin{aligned} t_1 < \dots < t_{N_1} < \tau_1 \leq t_{N_1+1} < \dots < t_{N_1+N_2} < \tau_2 \leq \dots < \\ \tau_{m-1} &\leq t_{N_1+\dots+N_{m-1}+1} < \dots < t_r. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para construir o modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, vamos indicar por F_k a função de distribuição dos tempos de falha no nível de estresse x_k , em que $k = 1, 2, \dots, m$. Além do mais, vamos considerar que θ_k é o parâmetro de escala associado a F_k .

Sendo assim, a função de distribuição acumulada do modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II considerando a distribuição Gama, para os níveis de estresse $x_1, x_2, \dots, x_m$, é dado por:

$$F_k(\zeta_k) = \int_0^{\zeta_k} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad (4.2)$$

em que $\zeta_k = \frac{t - \tau_{k-1}}{\theta_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\Delta_j}{\theta_j}$, para $k = 1, 2, \dots, m$ e $\tau_{k-1} \leq t < \tau_k$. E com $\Delta_l = \tau_l - \tau_{l-1}$, sendo $\tau_0 = 0$, $t > 0$, $\alpha > 0$ e $\theta_k > 0$. A função densidade de probabilidade deste modelo pode ser obtida derivando a equação (4.2) em relação a t , isto é:

$$f_k(\zeta_k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_k} \zeta_k^{\alpha-1} e^{-\zeta_k}, \quad (4.3)$$

em que $\tau_{k-1} \leq t < \tau_k$.

4.2 Análise Clássica do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II

Para realizar a análise clássica considerando este modelo, iremos utilizar o método de Máxima Verossimilhança.

De acordo com Alkhalafan (2012), vamos considerar uma amostra aleatória como apresentado em (4.1). Como visto na subseção 1.4.1, a função de verossimilhança para α e θ_k , de $k = 1, 2, \dots, m$, baseado em uma amostra com censura tipo II, pode ser escrita do seguinte modo:

$$L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} f_k(t_{i_k}) \right\} \{1 - F_m(t_{r_m})\}^{n-r}, \quad (4.4)$$

em que $r_0 = 0$, $r_k = \sum_{i=1}^k N_i$, para $k = 1, 2, \dots, m-1$ e $r_m = r$.

Como dito anteriormente, para construção deste modelo estamos considerando que os tempos de falha em todos os m níveis de estresse seguem uma distribuição Gama. Sendo assim, utilizando as expressões apresentadas em (4.2) e (4.3), faz-se possível construir a função de verossimilhança para $\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, isto é:

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^r} \left(\prod_{k=1}^m \frac{1}{\theta_k^{N_k}} \right) \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (\zeta_{i_k})^{\alpha-1} \right\} \\
&\times \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \zeta_{i_k} \right] \right\} \{1 - F_m(\zeta_{r_m})\}^{n-r},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

em que $\zeta_{i_k} = \frac{t_{i_k} - \tau_{k-1}}{\theta_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\Delta_j}{\theta_j}$, para $k = 1, 2, \dots, m$. E com $\Delta_l = \tau_l - \tau_{l-1}$, sendo $\tau_0 = 0$, $t > 0$, $\alpha > 0$ e $\theta_k > 0$.

Vale ressaltar que r é o número total de unidades que falharam, N_k é o número de unidades que falharam no k -ésimo nível de estresse e t_{i_k} são os tempos de falha das unidades no k -ésimo nível de estresse.

A função log-verossimilhança pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}) &= \ln [L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t})] \\
&= \ln \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) - r \ln [\Gamma(\alpha)] - \sum_{k=1}^m N_k \ln(\theta_k) \\
&+ (\alpha - 1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \ln(\zeta_{i_k}) \right\} \\
&- \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \zeta_{i_k} \right] + (n-r) \ln \{1 - F_m(\zeta_{r_m})\},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

em que $t_1 < \dots < t_{N_1} < \tau_1 \leq t_{N_1+1} < \dots < t_{N_1+N_2} < \tau_2 \leq \dots < \tau_{m-1} \leq t_{N_1+\dots+N_{m-1}+1} < \dots < t_r$.

Derivando a equação (4.6) em relação aos parâmetros de interesse α e θ_k e igualando a zero, teremos:

$$\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t})}{\partial \alpha} = -r\psi(\alpha) + \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \ln(\zeta_{i_k}) \right\}$$

$$+ \frac{(n-r)}{[1 - F_m(\zeta_{r_m})]} [\psi(\alpha) F_m(\zeta_{r_m}) - B_1(\zeta_{r_m})] = 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t})}{\partial \theta_j} &= -\frac{N_j}{\theta_j} + (\alpha - 1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{1}{\zeta_{i_k}} \frac{\partial}{\partial \theta_j} (\zeta_{i_k}) \right\} \\
&- \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{\partial}{\partial \theta_j} (\zeta_{i_k}) \right] \\
&+ \frac{(n-r)}{[1-F_m(\zeta_{r_m})]} \frac{(\zeta_{r_m})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{r_m}} \Delta_j}{\Gamma(\alpha) \theta_j^2} = 0,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

em que $j = 1, \dots, m-1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t})}{\partial \theta_m} &= -\frac{N_m}{\theta_m} + (\alpha - 1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{1}{\zeta_{i_k}} \frac{\partial}{\partial \theta_m} (\zeta_{i_k}) \right\} \\
&- \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{\partial}{\partial \theta_m} (\zeta_{i_k}) \right] \\
&+ \frac{(n-r)}{[1-F_m(\zeta_{r_m})]} \frac{(\zeta_{r_m})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{r_m}} (t_{r_m} - \tau_{m-1})}{\Gamma(\alpha) \theta_m^2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Em que $\psi(\alpha) = \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}$ e $B_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx$.

Assim as equações apresentadas em (4.7), (4.8) e (4.9) são chamadas de equações de verossimilhança. Logo, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , θ_j e θ_m , podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações. Como este sistema não pode ser resolvendo analiticamente, faz-se necessário a utilização de métodos iterativos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

Como discutido na seção 1.4.1, faz-se possível obter a distribuição assintótica desses estimadores, de modo que os elementos da matriz de informação de Fisher apresentado em (1.12) podem ser expressos da seguinte forma:

$$I_{ij}(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = -\frac{\partial^2}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} l(\Theta | \mathbf{t}), \tag{4.10}$$

em que $i, j = 1, 2, \dots, p$, $\Theta = (\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ e $p = m+1$ o número de parâmetros a serem estimados.

Para um melhor entendimento vamos considerar um caso em que temos 3 níveis de estresse ($m = 3$). Isto é, vamos imaginar a situação em que começamos com n unidades em teste, na qual essas unidades são submetidas a um nível de estresse inicial x_1 . Feito isso, essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1 . Após esse tempo, as unidades que não falharam serão submetidas a um nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_2 , e estas permaneceram nesse nível até um tempo pré-determinado τ_2 . Feito isso, novamente após esse tempo as unidades que não falharam serão submetidas a um novo nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_3 .

Como estamos em um caso de censura tipo II, o experimento só acabará quando r unidades falharem, de modo que as $n - r$ unidades que não falharam serão censuradas. Para este experimento, vamos denotar por N_1 o número de unidades que falharam no primeiro nível de estresse, N_2 o número de unidades que falharam no segundo nível de estresse e por N_3 o número de unidades que falharam no terceiro nível de estresse.

Podemos simplificar a equação apresentada em (4.5) para o caso em que temos 3 níveis de estresse. Deste modo a função de verossimilhança para α , θ_1 , θ_2 e θ_3 é dada por:

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)! [\Gamma(\alpha)]^r} \left(\frac{1}{\theta_1^{N_1}} \right) \left(\frac{1}{\theta_2^{N_2}} \right) \left(\frac{1}{\theta_3^{N_3}} \right) \\
 &\times \left\{ \prod_{i_1=1}^{N_1} \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right)^{\alpha-1} \right\} \left\{ \prod_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{\alpha-1} \right\} \\
 &\times \left\{ \prod_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{\alpha-1} \right\} \\
 &\times \exp \left\{ - \sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right) - \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right) \right\} \{1 - F_3(\zeta_r)\}^{n-r},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

em que $\zeta_r = \frac{t_r - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2}$.

A função log-verossimilhança pode ser obtida aplicando o $\ln$ na equação (4.11), isto é:

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}) &= \ln [L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})] \\
 &= \ln \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) - r \ln [\Gamma(\alpha)] - N_1 \ln(\theta_1) - N_2 \ln(\theta_2) - N_3 \ln(\theta_3) \\
 &+ (\alpha - 1) \sum_{i_1=1}^{N_1} \ln \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right) + (\alpha - 1) \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \ln \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \\
 &+ (\alpha - 1) \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \ln \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right) \\
 &- \sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right) - \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \\
 &- \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right) + (n-r) \ln [1 - F_3(\zeta_r)],
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

em que $t_1 < \dots < t_{N_1} < \tau_1 \leq t_{N_1+1} < \dots < t_{N_1+N_2} < \tau_2 \leq t_{N_1+N_2+1} < \dots < t_r$.

Derivando a equação (4.12) em relação aos parâmetros de interesse α , θ_1 , θ_2 e θ_3 e igualando a zero, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= -r\psi(\alpha) + \sum_{i_1=1}^{N_1} \ln \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right) + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \ln \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \\ &+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \ln \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right) \\ &+ \frac{(n-r)}{[1 - F_3(\zeta_r)]} [\psi(\alpha)F_3(\zeta_r) - B_1(\zeta_r)] = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1} &= -\frac{N_1}{\theta_1} - \frac{(\alpha-1)N_1}{\theta_1} - (\alpha-1) \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{-1} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] \\ &- (\alpha-1) \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] \\ &+ \sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1^2} \right) + \frac{N_2\tau_1}{\theta_1^2} + \frac{N_3\tau_1}{\theta_1^2} + \frac{(n-r)}{[1 - F_3(\zeta_r)]} \\ &\times \left[\frac{\tau_1}{\theta_1^2 [\Gamma(\alpha)]} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2} &= -\frac{N_2}{\theta_2} - (\alpha-1) \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{-1} \frac{(t_{i_2} - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] \\ &- \frac{N_2\tau_1}{\theta_2^2} + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2}}{\theta_2^2} \right) + \frac{N_3(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2} \\ &- (\alpha-1) \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] \\ &+ \frac{(n-r)}{[1 - F_3(\zeta_r)]} \left[\frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2 [\Gamma(\alpha)]} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_3} &= -(\alpha-1) \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \right. \\ &\times \left. \frac{(t_{i_3} - \tau_2)}{\theta_3^2} \right] - \frac{N_3}{\theta_3} + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3}}{\theta_3^2} \right) - \frac{N_3\tau_2}{\theta_3^2} \\ &+ \frac{(n-r)}{[1 - F_3(\zeta_r)]} \left[\frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_3^2 [\Gamma(\alpha)]} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Deste modo, as equações apresentadas em (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16) são chamadas de equações de verossimilhança. Assim, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , θ_1 , θ_2 e θ_3 podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações utilizando métodos iterativos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

4.2.1 Intervalos de Confiança Aproximados

Pela teoria de inferência clássica e baseado em Bolfarine e Sandoval (2001), dado o vetor de parâmetros $\Theta = (\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, um tamanho amostral grande e com algumas condições de regularidade sendo satisfeitas, temos que a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (EMV) de Θ é:

$$(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_4(0, I^{-1}(\Theta)), \quad (4.17)$$

de modo que estes estimadores são assintoticamente não viciados. A matriz de variância e covariância desses estimadores é dado por $I^{-1}(\Theta)$, que é inversa da matriz de informação de Fisher observada, na qual podemos representar essa matriz da seguinte forma:

$$I^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} -I_{11} & -I_{12} & -I_{13} & -I_{14} \\ -I_{21} & -I_{22} & -I_{23} & -I_{24} \\ -I_{31} & -I_{32} & -I_{33} & -I_{34} \\ -I_{41} & -I_{42} & -I_{43} & -I_{44} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (4.18)$$

em que $I_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} l(\Theta|\mathbf{t})$, para $i, j = 1, \dots, 4$. Os elementos da matriz de informação de Fisher observada são:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3|\mathbf{t})}{\partial \alpha^2} \\ &= -r(\psi(\alpha))' + \frac{(n-r)}{[1-F_3(\zeta_r)]^2} \{[(\psi'(\alpha) - \psi^2(\alpha)) F_3(\zeta_r) \\ &\quad + 2\psi(\alpha)B_1(\zeta_r) - B_2(\zeta_r)](1-F_3(\zeta_r)) - [\psi(\alpha)F_3(\zeta_r) - B_1(\zeta_r)]^2\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} I_{12} = I_{21} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3|\mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \theta_1} \\ &= -\frac{N_1}{\theta_1} - \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{-1} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] \\ &\quad - \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] \\ &\quad + \frac{(n-r)\tau_1(\zeta_r)^{\alpha-1}e^{-\zeta_r}}{[1-F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha)\theta_1^2} \{[1-F_3(\zeta_r)]\ln(\zeta_r) - \psi(\alpha) + B_1(\zeta_r)\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
I_{13} = I_{31} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \theta_2} \\
&= - \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{-1} \frac{(t_{i_2} - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] \\
&\quad - \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] \\
&\quad + \frac{(n-r)(\tau_2 - \tau_1)(\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_2^2} \{ [1 - F_3(\zeta_r)] \ln(\zeta_r) - \psi(\alpha) + B_1(\zeta_r) \}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
I_{14} = I_{41} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \theta_3} \\
&= - \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \frac{(t_{i_3} - \tau_2)}{\theta_3^2} \\
&\quad + \frac{(n-r)(t_{i_3} - \tau_2)(\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_3^2} \{ [1 - F_3(\zeta_r)] \ln(\zeta_r) - \psi(\alpha) + B_1(\zeta_r) \}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1^2} \\
&= \frac{N_1}{\theta_1^2} + \frac{(\alpha-1)N_1}{\theta_1^2} + (\alpha-1) \left\{ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{2\tau_1}{\theta_1^3 \zeta_{i_2}} - \frac{\tau_1^2}{\theta_1^4 \zeta_{i_2}^2} \right\} \\
&\quad + (\alpha-1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{2\tau_1}{\theta_1^3 \zeta_{i_3}} - \frac{\tau_1^2}{\theta_1^4 \zeta_{i_3}^2} \right\} - 2 \sum_{i_1=1}^{N_1} \frac{t_{i_1}}{\theta_1^3} - \frac{2N_2\tau_1}{\theta_1^3} - \frac{2N_3\tau_1}{\theta_1^3} \\
&\quad + \frac{(n-r)\tau_1(\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^4} \left\{ -\frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} + [(1 - \zeta_r^{-1}(\alpha-1))\tau_1 - 2\theta_1] \right. \\
&\quad \times [1 - F_3(\zeta_r)] \}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
I_{23} = I_{32} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\
&= -(\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_1=N_1+1}^{N_2} \frac{(t_{i_2} - \tau_1) \tau_1}{\theta_1^2 \theta_2^2 \zeta_{i_2}^2} \right\} \\
&\quad - (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{(\tau_2 - \tau_1) \tau_1}{\theta_1^2 \theta_2^2 \zeta_{i_3}^2} \right\} + \frac{(n-r) \tau_1 (\tau_2 - \tau_1) (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^2 \theta_2^2} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} + (1 - \zeta_r^{-1} (\alpha - 1)) [1 - F_3(\zeta_r)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
I_{24} = I_{42} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} \\
&= -\frac{(\alpha - 1) \tau_1}{\theta_1^2 \theta_3^2} \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{t_{i_3} - \tau_2}{\zeta_{i_3}^2} \\
&\quad + \frac{(n-r) \tau_1 (t_r - \tau_2) (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^2 \theta_3^2} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} \right. \\
&\quad \left. + (1 - \zeta_r^{-1} (\alpha - 1)) [1 - F_3(\zeta_r)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2^2} \\
&= \frac{N_2}{\theta_2^2} + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_2} \frac{2(t_{i_2} - \tau_1)}{\theta_2^3 \zeta_{i_2}} - \frac{(t_{i_2} - \tau_1)^2}{\theta_2^4 \zeta_{i_2}^2} \right\} \\
&\quad + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^3 \zeta_{i_3}} - \frac{(\tau_2 - \tau_1)^2}{\theta_2^4 \zeta_{i_3}^2} \right\} + \frac{2N_2 \tau_1}{\theta_2^3} - \frac{2}{\theta_2^3} \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} t_{i_2} \\
&\quad - \frac{2N_3(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^3} + \frac{(n-r)(\tau_2 - \tau_1)(\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_2^4} \left\{ -\frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} \right. \\
&\quad \left. + [(1 - \zeta_r^{-1} (\alpha - 1))(\tau_2 - \tau_1) - 2\theta_2] [1 - F_3(\zeta_r)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
I_{34} = I_{43} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} \\
&= -(\alpha - 1) \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{(t_{i_3} - \tau_2)(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2 \theta_3^2 \zeta_{i_3}^2} \\
&\quad + \frac{(n-r)(t_r - \tau_2)(\tau_2 - \tau_1)(\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_2^2 \theta_3^2} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} \right. \\
&\quad \left. + (1 - \zeta_r^{-1}(\alpha - 1)) [1 - F_3(\zeta_r)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
I_{44} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t})}{\partial \theta_3^2} \\
&= \frac{N_3}{\theta_3^2} + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{2(t_{i_3} - \tau_2)}{\theta_3^3 \zeta_{i_3}} - \frac{(t_{i_3} - \tau_2)^2}{\theta_3^4 \zeta_{i_3}^2} \right\} + \frac{2N_3 \tau_2}{\theta_3^3} \\
&\quad - \frac{2}{\theta_3^2} \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r t_{i_3} + \frac{(n-r)(t_r - \tau_2)(\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r}}{[1 - F_3(\zeta_r)]^2 \Gamma(\alpha) \theta_3^4} \left\{ -\frac{(t_r - \tau_2)}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_r)^{\alpha-1} e^{-\zeta_r} \right. \\
&\quad \left. + [(1 - \zeta_r^{-1}(\alpha - 1))(t_r - \tau_2) - 2\theta_3] [1 - F_3(\zeta_r)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Em que:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}, \\
B_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx, \\
B_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx.
\end{aligned}$$

Assim após obter a matriz de informação de Fisher, faz-se possível construir intervalos de confiança assintóticos aproximados para os parâmetros α , θ_1 , θ_2 e θ_3 .

Sendo assim, os intervalos de confiança assintóticos com nível $100(1 - \gamma)\%$ podem ser construídos do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha}_{EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{EMV})} \\
&\hat{\theta}_{1EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{1EMV})} \\
&\hat{\theta}_{2EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{2EMV})} \\
&\hat{\theta}_{3EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{3EMV})}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

4.3 Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II

Apresentaremos a seguir, toda análise bayesiana realizada utilizando o modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II e considerando a distribuição Gama, na qual temos por objetivo mostrar as distribuições a priori que foram utilizadas, como também a distribuição a posteriori obtida.

Ao olharmos para os parâmetros do modelo construído quando consideramos o caso particular de $m = 3$, temos que estes parâmetros são desconhecidos e pertencem ao espaço paramétrico de $\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$, tornando-se razoável assumir uma distribuição a priori Gama para os quatro parâmetros.

Deste modo, vamos considerar que cada um dos parâmetros seguem uma distribuição Gama, ou seja, $\alpha \sim Gama(a_1, b_1)$, $\theta_1 \sim Gama(a_2, b_2)$, $\theta_2 \sim Gama(a_3, b_3)$ e $\theta_3 \sim Gama(a_4, b_4)$. Veja a seguir:

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1}} \alpha^{a_1-1} e^{-\alpha/b_1} \\ p(\theta_1) &= \frac{1}{\Gamma(a_2)b_2^{a_2}} \theta_1^{a_2-1} e^{-\theta_1/b_2} \\ p(\theta_2) &= \frac{1}{\Gamma(a_3)b_3^{a_3}} \theta_2^{a_3-1} e^{-\theta_2/b_3} \\ p(\theta_3) &= \frac{1}{\Gamma(a_4)b_4^{a_4}} \theta_3^{a_4-1} e^{-\theta_3/b_4} \end{aligned} \quad (4.30)$$

em que $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$ são conhecidos.

Como não temos nenhuma informação, nem de estudos anteriores e nem de especialistas, vamos assumir um caráter não-informativo para os parâmetros, ou seja, consideraremos $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = a_4 = b_4 = 0.01$.

Assumindo independência a priori para os parâmetros, faz-se necessário a construção da priori conjunta, em que neste caso é o produto das prioris. Deste modo, a priori conjunta para os parâmetros é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1}} \alpha^{a_1-1} e^{-\alpha/b_1} \right\} \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_2)b_2^{a_2}} \theta_1^{a_2-1} e^{-\theta_1/b_2} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_3)b_3^{a_3}} \theta_2^{a_3-1} e^{-\theta_2/b_3} \right\} \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_4)b_4^{a_4}} \theta_3^{a_4-1} e^{-\theta_3/b_4} \right\} \\ \pi(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \frac{\alpha^{a_1-1} \theta_1^{a_2-1} \theta_2^{a_3-1} \theta_3^{a_4-1}}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1} \Gamma(a_2)b_2^{a_2} \Gamma(a_3)b_3^{a_3} \Gamma(a_4)b_4^{a_4}} \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha}{b_1} + \frac{\theta_1}{b_2} + \frac{\theta_2}{b_3} + \frac{\theta_3}{b_4} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

O nosso objetivo agora é obter a distribuição a posteriori para os parâmetros $\alpha, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 . Na qual podemos representar essa distribuição de forma mais simples, que é a forma proporcional ao produto da função de verossimilhança (4.11) e da distribuição a priori conjunta (4.31), resultado em:

$$\begin{aligned}
p(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}) &\propto \frac{n!}{(n-r)!} \frac{\alpha^{a_1-1} \theta_1^{a_2-1} \theta_2^{a_3-1} \theta_3^{a_4-1}}{[\Gamma(\alpha)]^r \theta_1^{N_1} \theta_2^{N_2} \theta_3^{N_3}} \\
&\times \left\{ \prod_{i_1=1}^{N_1} \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right)^{\alpha-1} \right\} \left\{ \prod_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{\alpha-1} \right\} \\
&\times \left\{ \prod_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{\alpha-1} \right\} \\
&\times \exp \left\{ - \sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right) - \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right) - \left(\frac{\alpha}{b_1} + \frac{\theta_1}{b_2} + \frac{\theta_2}{b_3} + \frac{\theta_3}{b_4} \right) \right\} \\
&\times \{1 - F_3(\zeta_r)\}^{n-r}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

É possível ver que a densidade a posteriori apresentada em (4.32) é analiticamente complexa de ser tratada, fazendo-se necessário a utilização de métodos numéricos.

4.4 Estudo de simulação

Para a realização da comparação entre o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, será realizado simulações considerando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura.

A ideia desta simulação, é gerar várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente realizar a aplicação das duas metodologias, com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori e viés.

4.4.1 Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura tipo II

Como visto em Alkhalfan (2012), o algoritmo utilizado para gerar valores aleatórios do modelo step-stress múltiplo ($m = 3$) sob censura tipo II e considerando a distribuição Gama, é dado do seguinte modo:

1. Simular n estatísticas de ordem a partir da distribuição Uniforme(0,1), $U_1, \dots, U_n$.
2. Encontrar n_1 tal que $U_{n_1} \leq F_1(\tau_1) \leq U_{n_1+1}$.
3. Para $i \leq n_1$, faça $T_i = \theta_1 G^{-1}(U_i)$, onde $G(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.
4. Encontrar n_2 tal que $U_{n_1+n_2} \leq F_2(\tau_2) \leq U_{n_1+n_2+1}$.

5. Para $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$, faça $T_i = \theta_2 G^{-1}(U_i) + \tau_1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1$.
6. Para $n_1 + n_2 + 1 \leq i \leq r$, faça $T_i = \theta_3 G^{-1}(U_i) + \tau_2 - \frac{\theta_3}{\theta_2} \left(\tau_2 - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right)$.

4.4.2 Descrição da Simulação

A fim de comparar o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano, foram realizadas simulações utilizando a linguagem de programação R.

Sendo assim, foram geradas amostras de diferentes tamanhos, isto é $n = (14, 20, 34, 50, 100)$, com 50% e 70% de censura, na qual para cada tamanho amostral diferente houveram 1000 amostras. Os valores dos parâmetros foram fixados anteriormente, e foi aplicado os dois métodos inferenciais em cada amostra, para assim obter estimativas para os parâmetros.

Utilizando os algoritmos elaborados em linguagem R, foi realizado:

- Para o método Clássico, foram geradas 1000 amostras (para cada tamanho amostral diferente), na qual foi realizado a estimação de máxima verossimilhança para cada uma delas, e posteriormente calculado os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), viés e a média das estimativas.
- Para o método Bayesiano, foram usadas as mesmas 1000 amostras geradas (para cada tamanho amostral diferente). Considerando a priori Gama foi utilizado o algoritmo de Metropolis-Hastings, em que para cada amostra foram gerados 60000 valores da distribuição a posteriori, descartado os 20000 primeiros valores e aplicado lags de tamanho 30, a fim de diminuir a correlação entre os valores gerados. Posteriormente foi aplicado os estimadores de Bayes referente as funções de perda: Quadrática, LINEX (consideramos $c = 0.7$) e Entropia (consideramos $q = 0.7$) e calculado os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori, viés e a média das estimativas.

4.4.3 Resultados Numéricos

Os resultados obtidos utilizando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura, estão resumidos nas tabelas a seguir. Por meio dos índices calculados, julgaremos qual método obteve os melhores resultados.

As estatísticas apresentadas nas tabelas são a Média (Estimativa), Risco a posteriori, Viés, Probabilidade de Cobertura (PC) e o Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 4.1: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 14$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 14$	$r = 4$	α	Máxima Verossimilhança	7.6391	0.9350	-	5.6391	-8.3511	23.6294
			Quadrática	4.0730	0.9830	17.8026	2.0730	0.4003	7.7291
			Linex	1.9891	0.9830	3.6317	-0.0108	0.4003	7.7291
			Entropia	2.0967	0.9830	0.1392	0.0967	0.4003	7.7291
		θ_1	Máxima Verossimilhança	8.3336	0.6600	-	3.8519	-25.5343	42.2016
			Quadrática	21.5392	0.9980	442.8172	17.0575	0.2368	81.0142
			Linex	3.1633	0.9980	17.6116	-1.3183	0.2368	81.0142
			Entropia	5.0521	0.9980	0.4812	0.5705	0.2368	81.0142
		θ_2	Máxima Verossimilhança	6.8608	0.8960	-	4.1425	-11.6256	25.3473
			Quadrática	17.4116	0.9980	285.9567	14.6933	0.5733	54.9332
			Linex	4.2185	0.9980	14.5684	1.5003	0.5733	54.9332
			Entropia	6.8273	0.9980	0.2624	4.1090	0.5733	54.9332
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.0802	0.5480	-	-0.5684	-1.6836	3.8441
			Quadrática	4.9052	0.9410	25.8939	3.2565	0.0688	14.8598
			Linex	1.4374	0.9410	4.2562	-0.2112	0.0688	14.8598
			Entropia	1.2738	0.9410	0.3480	-0.3748	0.0688	14.8598
	$r = 7$	α	Máxima Verossimilhança	6.4140	0.9280	-	4.4140	-6.2598	19.0880
			Quadrática	3.2750	0.9630	8.0466	1.2750	0.3627	6.3320
			Linex	1.8419	0.9630	2.9027	-0.1580	0.3627	6.3320
			Entropia	1.8681	0.9630	0.1254	-0.1318	0.3627	6.3320
		θ_1	Máxima Verossimilhança	7.5194	0.6820	-	3.0378	-20.1331	35.1721
			Quadrática	21.4366	0.9950	473.3370	16.9549	0.2806	79.0308
			Linex	3.2355	0.9950	17.4860	-1.2461	0.2806	79.0308
			Entropia	5.2567	0.9950	0.4382	0.7751	0.2806	79.0308
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.8498	0.8220	-	1.1316	-4.1051	11.8049
			Quadrática	9.3862	0.9990	89.7616	6.6679	0.5328	22.8559
			Linex	3.3436	0.9990	8.2373	0.6253	0.5328	22.8559
			Entropia	4.4476	0.9990	0.1873	1.7293	0.5328	22.8559
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.3545	0.6540	-	-0.2941	-1.2658	3.9750
			Quadrática	4.3272	0.9660	19.9109	2.6785	0.1707	10.4173
			Linex	1.7108	0.9660	3.8037	0.0621	0.1707	10.4173
			Entropia	1.6706	0.9660	0.2321	0.0219	0.1707	10.4173

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 4.2: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 20$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 20$	$r = 6$	α	Máxima Verossimilhança	6.0003	0.9580	-	4.0003	-6.5599	18.5607
			Quadrática	3.4481	0.9840	9.5651	1.4481	0.4605	6.3501
			Linex	1.9749	0.9840	3.0835	-0.0250	0.4605	6.3501
			Entropia	2.0583	0.9840	0.1124	0.0583	0.4605	6.3501
		θ_1	Máxima Verossimilhança	7.7764	0.7190	-	3.2947	-20.2158	35.7686
			Quadrática	21.4718	0.9960	451.5950	16.9901	0.3067	78.6535
			Linex	3.3692	0.9960	17.5267	1.1124	0.3067	78.6535
			Entropia	5.5333	0.9960	0.4247	1.0516	0.3067	78.6535
		θ_2	Máxima Verossimilhança	5.8577	0.8900	-	3.1394	-6.9400	18.6554
			Quadrática	13.0734	0.9930	180.6534	10.3551	0.6851	32.2142
			Linex	4.1162	0.9930	11.1751	1.3979	0.6851	32.2142
			Entropia	6.2602	0.9930	0.1976	3.5419	0.6851	32.2142
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.2103	0.5650	-	-0.4384	-1.5369	3.9576
			Quadrática	4.5991	0.9470	25.4204	2.9504	0.0912	12.2764
			Linex	1.4990	0.9470	3.9833	-0.1497	0.0912	12.2764
			Entropia	1.3968	0.9470	0.3068	-0.2519	0.0912	12.2764
	$r = 10$	α	Máxima Verossimilhança	4.8243	0.9400	-	2.8243	-3.2970	12.9457
			Quadrática	3.0094	0.9610	5.8056	1.0094	0.4355	5.3227
			Linex	1.8990	0.9610	2.6552	-0.1009	0.4355	5.3227
			Entropia	1.9450	0.9610	0.1001	-0.0549	0.4355	5.3227
		θ_1	Máxima Verossimilhança	7.5190	0.7190	-	3.0373	-17.9181	32.9562
			Quadrática	19.7572	0.9890	425.9073	15.2755	0.3665	68.3435
			Linex	3.4208	0.9890	16.1653	-1.0607	0.3665	68.3435
			Entropia	5.6986	0.9890	0.3638	1.2169	0.3665	68.3435
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.4345	0.8490	-	0.7162	-2.3870	9.2561
			Quadrática	7.0453	0.9980	46.7188	4.3270	0.6671	15.3068
			Linex	3.2311	0.9980	6.3264	0.5128	0.6671	15.3068
			Entropia	4.0141	0.9980	0.1383	1.2958	0.6671	15.3068
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.4703	0.7130	-	-0.1783	-1.0657	4.0065
			Quadrática	4.0074	0.9680	17.9504	2.3586	0.2176	8.7262
			Linex	1.7663	0.9680	3.5188	0.1176	0.2176	8.7262
			Entropia	1.7510	0.9680	0.1934	0.1023	0.2176	8.7262

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 4.3: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 34$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
n = 34	r = 10	α	Máxima Verossimilhança	3.9516	0.9420	-	1.9516	-2.3239	10.2273
			Quadrática	2.8072	0.9630	4.3703	0.8072	0.5404	4.7476
			Linex	1.9239	0.9630	2.4743	-0.0760	0.5404	4.7476
			Entropia	1.9693	0.9630	0.0799	-0.0306	0.5404	4.7476
		θ_1	Máxima Verossimilhança	9.9005	0.7880	-	5.4188	-22.0562	41.8573
			Quadrática	22.3692	0.9930	553.7280	17.8875	0.4977	73.8183
			Linex	3.9365	0.9930	18.1447	-0.5451	0.4977	73.8183
			Entropia	7.1236	0.9930	0.3390	2.6419	0.4977	73.8183
		θ_2	Máxima Verossimilhança	5.1415	0.9130	-	2.4232	-3.3810	13.6640
			Quadrática	9.0430	0.9710	70.9130	6.3247	0.9607	20.7867
			Linex	4.1270	0.9710	8.0150	1.4087	0.9607	20.7867
			Entropia	5.5839	0.9710	0.1290	2.8656	0.9607	20.7867
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.3421	0.6600	-	-0.3065	-1.4030	4.0873
			Quadrática	4.5236	0.9530	23.0977	2.8749	0.1189	11.7933
			Linex	1.5805	0.9530	3.9515	-0.0681	0.1189	11.7933
			Entropia	1.5060	0.9530	0.2739	-0.1426	0.1189	11.7933
	r = 17	α	Máxima Verossimilhança	3.1802	0.9390	-	1.1802	-0.9755	7.3361
			Quadrática	2.4698	0.9430	2.8109	0.4698	0.5378	4.0839
			Linex	1.8717	0.9430	2.1339	-0.1282	0.5378	4.0839
			Entropia	1.8916	0.9430	0.0649	-0.1083	0.5378	4.0839
		θ_1	Máxima Verossimilhança	7.8163	0.8010	-	3.3346	-13.5387	29.1714
			Quadrática	17.4703	0.9840	375.5104	12.9886	0.6112	47.7897
			Linex	3.8669	0.9840	14.3951	-0.6147	0.6112	47.7897
			Entropia	6.5550	0.9840	0.2568	2.0733	0.6112	47.7897
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.2687	0.8970	-	0.5504	-0.8338	7.3713
			Quadrática	5.2235	0.9910	15.9671	2.5052	0.9121	10.5154
			Linex	3.2287	0.9910	4.8121	0.5105	0.9121	10.5154
			Entropia	3.7208	0.9910	0.0852	1.0025	0.9121	10.5154
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5882	0.7930	-	-0.0605	-0.6275	3.8039
			Quadrática	3.3204	0.9590	11.3729	1.6716	0.3289	6.3713
			Linex	1.8137	0.9590	2.8902	0.1650	0.3289	6.3713
			Entropia	1.8167	0.9590	0.1370	0.1680	0.3289	6.3713

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 4.4: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 50$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
50	15	α	Máxima Verossimilhança	2.9417	0.9300	-	0.9417	-0.6610	6.5445
			Quadrática	2.4287	0.9470	2.5223	0.4287	0.5992	3.9988
			Linex	1.8833	0.9470	2.1026	-0.1166	0.5992	3.9988
			Entropia	1.9034	0.9470	0.0585	-0.0965	0.5992	3.9988
		θ_1	Máxima Verossimilhança	10.1075	0.8610	-	5.6258	-16.8177	37.0328
			Quadrática	21.1883	0.9850	556.0623	16.7066	0.7053	62.7715
			Linex	4.3821	0.9850	17.2252	-0.0995	0.7053	62.7715
			Entropia	8.1899	0.9850	0.2642	3.7082	0.7053	62.7715
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.7050	0.9480	-	1.9867	-1.4972	10.9073
			Quadrática	7.2827	0.9650	35.0178	4.5645	1.2109	15.8928
			Linex	4.1387	0.9650	6.6065	1.4204	1.2109	15.8928
			Entropia	5.1747	0.9650	0.0915	2.4564	1.2109	15.8928
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.4268	0.7170	-	-0.2218	-1.2285	4.0822
			Quadrática	4.4101	0.9600	20.6522	2.7614	0.1536	10.9722
			Linex	1.6604	0.9600	3.8747	0.0117	0.1536	10.9722
			Entropia	1.6087	0.9600	0.2467	-0.0399	0.1536	10.9722
	25	α	Máxima Verossimilhança	2.7459	0.9430	-	0.7459	-0.0268	5.5187
			Quadrática	2.3659	0.9270	1.7203	0.3659	0.6415	3.7434
			Linex	1.9487	0.9270	2.0493	-0.0512	0.6415	3.7434
			Entropia	1.9573	0.9270	0.0486	-0.0426	0.6415	3.7434
		θ_1	Máxima Verossimilhança	6.8819	0.7850	-	2.4002	-7.9663	21.7301
			Quadrática	14.0214	0.9710	248.9003	9.5397	0.7797	33.1926
			Linex	4.0029	0.9710	11.7424	-0.4787	0.7797	33.1926
			Entropia	6.4641	0.9710	0.1901	1.9824	0.7797	33.1926
		θ_2	Máxima Verossimilhança	2.9902	0.8750	-	0.2719	0.0431	5.9373
			Quadrática	4.2214	0.9850	6.8044	1.5032	1.0885	7.8913
			Linex	3.0723	0.9850	3.9282	0.3540	1.0885	7.8913
			Entropia	3.3612	0.9850	0.0584	0.6429	1.0885	7.8913
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5117	0.8170	-	-0.1369	-0.2186	3.2421
			Quadrática	2.6507	0.9650	4.1638	1.0019	0.4136	5.1977
			Linex	1.7561	0.9650	2.2985	0.1074	0.4136	5.1977
			Entropia	1.7094	0.9650	0.1036	0.0607	0.4136	5.1977

Fonte:Elaborada pela autora.

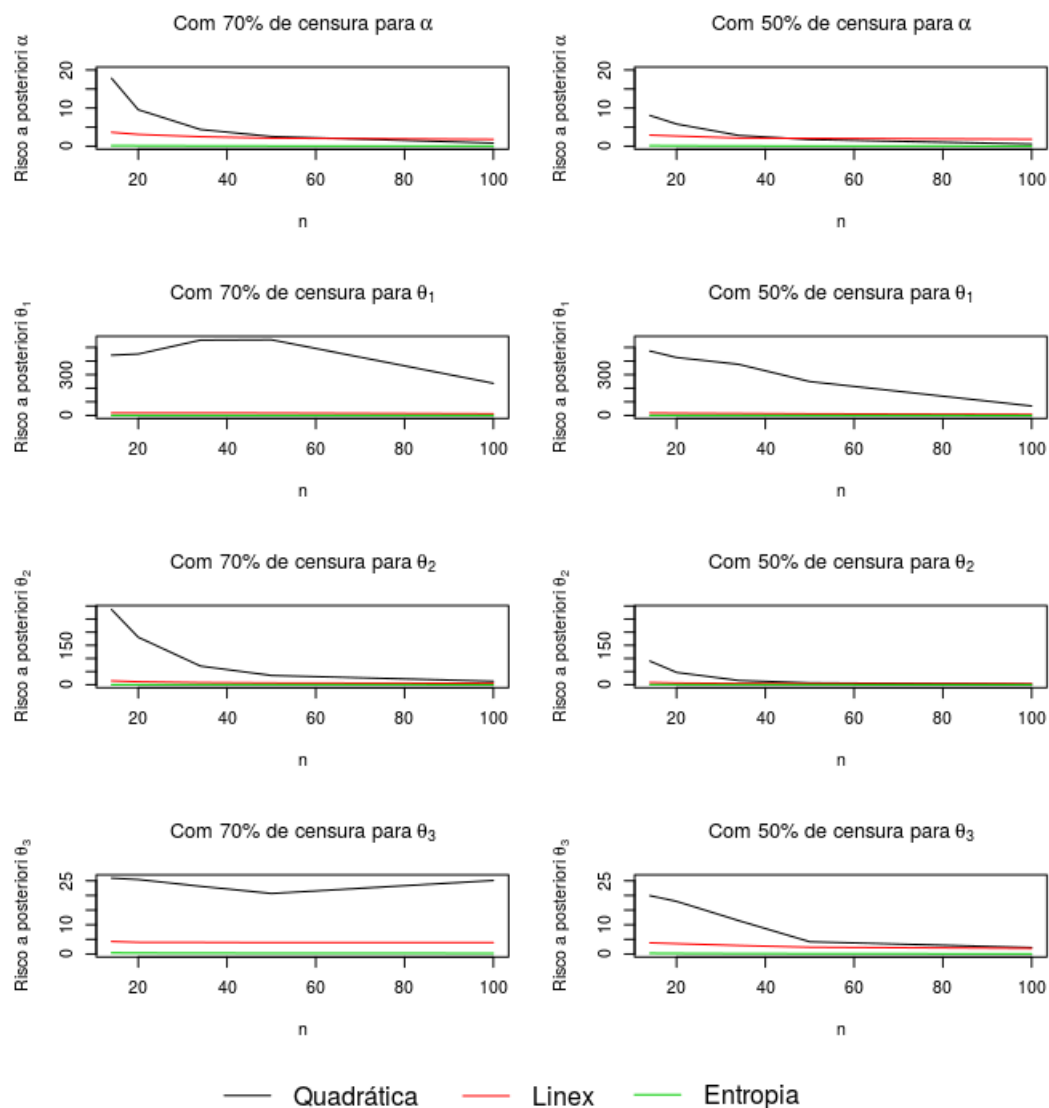
Tabela 4.5: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ e $n = 100$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 100$	$r = 30$	α	Máxima Verossimilhança	2.2510	0.9200	-	0.2510	0.4984	4.0035
			Quadrática	2.1061	0.9070	0.8217	0.1061	0.7662	3.3028
			Linex	1.8824	0.9070	1.7923	-0.1175	0.7662	3.3028
			Entropia	1.8686	0.9070	0.0320	-0.1313	0.7662	3.3028
		θ_1	Máxima Verossimilhança	8.2996	0.9140	-	3.8179	-6.8968	23.4960
			Quadrática	14.6716	0.9770	236.1760	10.1899	1.1700	33.9065
			Linex	4.9064	0.9770	12.3251	0.4248	1.1700	33.9065
			Entropia	7.9910	0.9770	0.1486	3.5093	1.1700	33.9065
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.3638	0.9870	-	1.6455	0.4808	8.2467
			Quadrática	5.6469	0.8920	13.1466	2.9286	1.7329	10.6461
			Linex	4.1650	0.8920	5.2557	1.4468	1.7329	10.6461
			Entropia	4.7243	0.8920	0.0475	2.0060	1.7329	10.6461
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.6131	0.7170	-	-0.0355	-1.1249	4.3513
			Quadrática	4.4584	0.9540	25.0856	2.8097	0.2050	10.1256
			Linex	1.7378	0.9540	3.8741	0.0890	0.2050	10.1256
			Entropia	1.7718	0.9540	0.2176	0.1231	0.2050	10.1256
	$r = 50$	α	Máxima Verossimilhança	2.2301	0.9510	-	0.2301	0.7809	3.6792
			Quadrática	2.1084	0.9330	0.5540	0.1084	0.8878	3.1560
			Linex	1.9418	0.9330	1.8135	-0.0581	0.8878	3.1560
			Entropia	1.9267	0.9330	0.0250	-0.0732	0.8878	3.1560
		θ_1	Máxima Verossimilhança	5.3765	0.8650	-	0.8948	-1.9408	12.6938
			Quadrática	8.7941	0.9710	68.8858	4.3125	1.2483	17.1697
			Linex	4.2368	0.9710	7.7415	-0.2448	1.2483	17.1697
			Entropia	5.7074	0.9710	0.0983	1.2257	1.2483	17.1697
		θ_2	Máxima Verossimilhança	2.8693	0.9200	-	0.1511	0.9861	4.7526
			Quadrática	3.4610	0.9690	1.9232	0.7427	1.4713	5.6562
			Linex	2.9906	0.9690	3.2534	0.2723	1.4713	5.6562
			Entropia	3.1051	0.9690	0.0286	0.3868	1.4713	5.6562
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.6328	0.8750	-	-0.0158	0.2529	3.0127
			Quadrática	2.2415	0.9760	2.1709	0.5928	0.6384	3.6710
			Linex	1.7853	0.9760	1.8963	0.1366	0.6384	3.6710
			Entropia	1.7586	0.9760	0.0548	0.1099	0.6384	3.6710

Fonte:Elaborada pela autora.

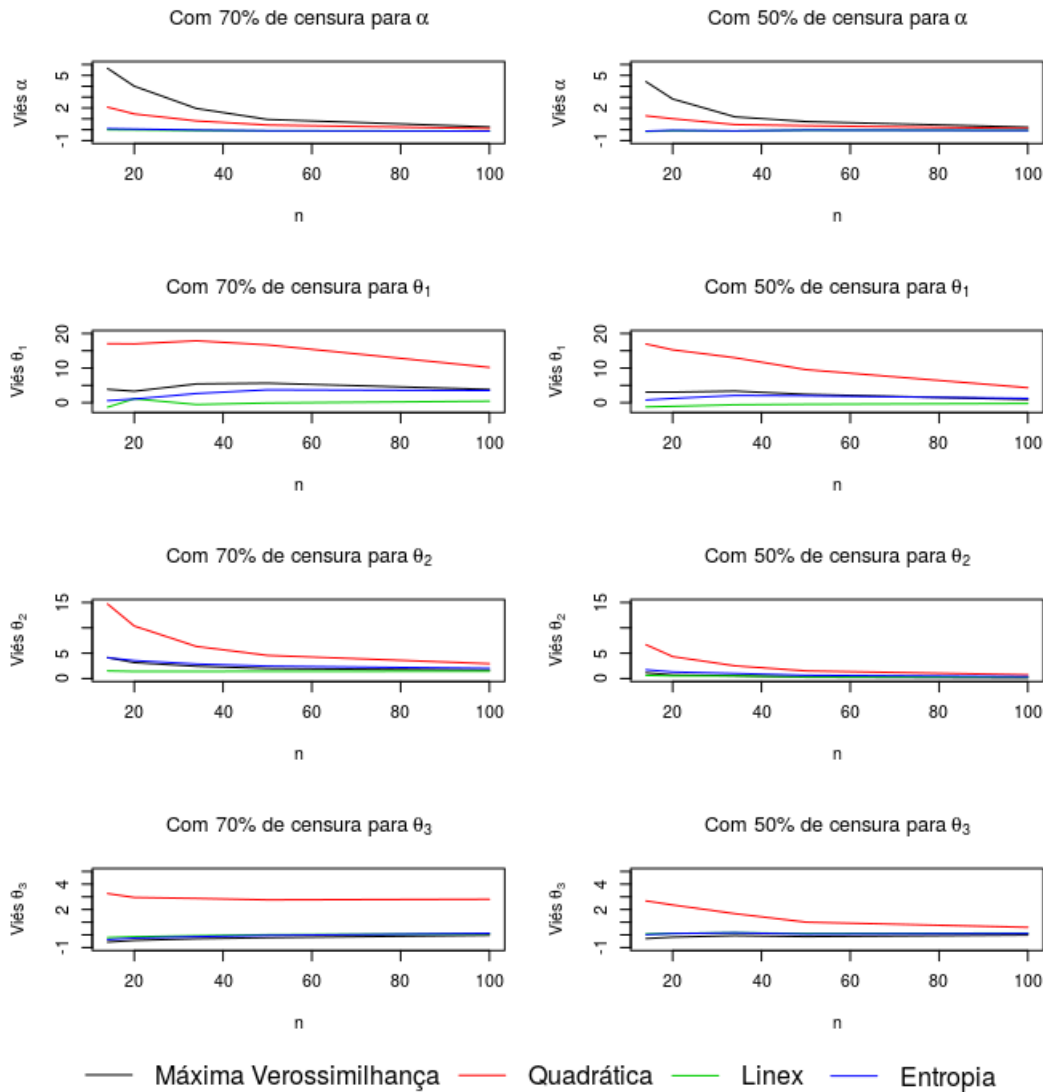
Antes de iniciarmos a explicação dos resultados apresentados nas tabelas, será apresentado duas figuras. A primeira figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de visualizarmos como está se comportando o risco a posteriori a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura. Já a segunda figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de observarmos agora como está se comportando o viés a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.

Figura 4.1: Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Figura 4.2: Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte: Elaborada pela autora.

Comparando os resultados que foram apresentados nas tabelas 4.1 a 4.5, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais considerados, tanto para 70% quanto para 50% de censura o método bayesiano com as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia apresentaram as melhores probabilidades de cobertura, isto é, com probabilidades de cobertura próximas de 95%.

Ao observarmos os valores do risco a posteriori referente as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia, sendo estes valores apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 4.1, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, a função de perda de Entropia apresentou os melhores resultados, isto é, com um risco a posteriori próximo de zero. Portanto, a perda que se espera comentar estimando os parâmetros do modelo proposto considerando a função de perda Entropia, é bem menor quando comparado com as outras funções de perda.

Observando ainda a Figura 4.1 é interessante notarmos que quando consideramos 50% de censura, obtemos valores menores do risco a posteriori do que quando consideramos 70% de censura. Além disso para amostras de tamanho pequeno a função de perda Quadrática,

usualmente utilizada em estudos de inferência Bayesiana, apresentou valores altos do risco a posteriori quando comparado com a função de perda de Entropia, ressaltando mais uma vez a importância de se trabalhar com essa função assimétrica.

Quando olhamos para os valores do viés apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 4.2, podemos perceber que para o parâmetro α as funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados bons e similares, isto é, com um viés próximo de zero. Já para os parâmetros (θ_1, θ_2) , embora o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia tenham tido um desempenho levemente parecido, ainda sim a função de perda Linex apresentou um menor viés para grande parte dos tamanhos amostrais. Por fim, para o parâmetro θ_3 , podemos notar que o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores desempenhos. Podemos perceber também, que a medida que o tamanho amostral aumenta, tanto o método clássico quanto o método bayesiano com diferentes funções de perda, tende a se aproximar de zero. Outra ponto importante de ressaltarmos é que quando consideramos 50% de censura, obtemos um viés menor do que quando consideramos 70% de censura.

Ao compararmos as estimativas realizadas por cada método, podemos perceber que tanto o método clássico quanto o método bayesiano (com funções de perda Linex e Entropia), para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura, se aproximaram razoavelmente do verdadeiro valor dos parâmetros que são $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$ e $\theta_3 = 1.648721$. Podemos perceber, que a medida que o tamanho amostral aumenta essas estimativas pontuais tendem a se aproximar cada vez mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Por meio das tabelas apresentadas, é possível observar que para quase todos os tamanhos amostrais com 70% e com 50% de censura, o limite inferior do intervalo de confiança de 95% obtido para os parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança é um valor negativo, embora esses parâmetros assumam apenas valores positivos.

Sendo assim, de um modo geral podemos concluir que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados, isto é, ambos os métodos se aproximaram do verdadeiro valor dos parâmetros, com os menores riscos a posteriori, com os menores viés e as melhores probabilidades de cobertura.

4.5 Modelo de parâmetro reduzido

Até o presente momento apresentamos neste capítulo o modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II. É fácil ver que se considerarmos vários níveis de estresse, a complexidade analítica do modelo tende a ser cada vez maior. Deste modo como visto em Alkhalafan (2012), podemos considerar a seguinte reparametrização para o modelo step-stress múltiplo:

$$\ln(\theta_i) = \beta_0 - \beta_1 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.33)$$

Em que β_0 e β_1 são parâmetros desconhecidos que precisam ser estimados e além disso pertencem ao espaço paramétrico $\Theta = \{\beta_0, \beta_1 : -\infty < \beta_0 < \infty, \beta_1 > 0\}$. E por fim, temos que x_i representa os níveis de estresse.

Quando olhamos para o modelo apresentado em (4.33), é interessante observar que como estamos lidando com uma situação de step-stress, esperamos que a medida que aumentamos o nível de estresse, estejamos ao mesmo tempo diminuindo o tempo médio de vida do produto. Portanto, podemos pensar em uma relação negativa entre θ_i e x_i .

Podemos perceber que ao optarmos em utilizar o modelo de parâmetro reduzido, só iremos precisar estimar dois parâmetros (β_0 e β_1), ao contrário do modelo proposto até então (ver seção 4.1), na qual precisaríamos estimar m parâmetros, isto é, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

Veja que com base nisso, um questionamento natural que pode surgir é sobre quais são as vantagens e desvantagens que podemos ter ao utilizar o modelo de parâmetro reduzido em relação ao modelo completo apresentado nas seções anteriores. Sendo assim, podemos apontar duas razões pelas quais é vantajoso utilizar o modelo de parâmetro reduzido. Em primeiro lugar seria a facilidade computacional que teríamos, uma vez que há menos parâmetros a serem estimados. Em segundo lugar seria o ganho em termos de previsibilidade. Isto é, quando utilizamos o modelo completo, podemos ver que sempre temos um parâmetro θ_i associado ao i -ésimo nível de estresse permitindo deste modo realizar estimativas, contudo se estivermos interessados em prever tempos de vida sob um nível de estresse diferente, já não poderíamos fazer, uma vez que há um parâmetro para esse nível de estresse que não temos conhecimento. Neste caso o correto seria trabalhar com o modelo de parâmetro reduzido, que embora haja perda informações em relação ao modelo completo, este permitirá realizar previsões em outros níveis de estresse que não foram observados.

4.5.1 Análise Clássica do Modelo de parâmetro reduzido sob censura tipo II

Utilizando a mesma motivação apresentada na seção 4.1 e além disso as expressões (4.2), (4.3) e (4.4), faz-se possível construir a função de verossimilhança para α , β_0 e β_1 , isto é:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)! [\Gamma(\alpha)]^r} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m N_k (\beta_0 - \beta_1 x_k) \right\} \\ &\times \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (\zeta_{i_k}^*)^{\alpha-1} \right\} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \zeta_{i_k}^* \right] \right\} \\ &\times \{1 - F_m(\zeta_{r_m}^*)\}^{n-r}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

em que $\zeta_{i_k}^* = (t_{i_k} - \tau_{k-1})e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \Delta_j e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_j)}$, para $k = 1, 2, \dots, m$. E com

$\Delta_l = \tau_l - \tau_{l-1}$, sendo $\tau_0 = 0$ e $t > 0$.

Vale ressaltar que r é o número total de unidades que falharam, N_k é o número de unidades que falharam no k -ésimo nível de estresse e t_{i_k} são os tempos de falha das unidades no k -ésimo nível de estresse.

A função log-verossimilhança pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t}) &= \ln [L(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})] \\
&= \ln \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) - r \ln [\Gamma(\alpha)] - \sum_{k=1}^m N_k (\beta_0 - \beta_1 x_k) \\
&\quad + (\alpha - 1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \ln(\zeta_{i_k}^*) \right\} \\
&\quad - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \zeta_{i_k}^* \right] + (n-r) \ln \{1 - F_m(\zeta_{r_m}^*)\},
\end{aligned} \tag{4.35}$$

em que $t_1 < \dots < t_{N_1} < \tau_1 \leq t_{N_1+1} < \dots < t_{N_1+N_2} < \tau_2 \leq \dots < \tau_{m-1} \leq t_{N_1+\dots+N_{m-1}+1} < \dots < t_r$.

Derivando a equação (4.35) em relação aos parâmetros de interesse α , β_0 e β_1 e igualando a zero, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= -r\psi(\alpha) + \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \ln(\zeta_{i_k}^*) \right\} \\
&\quad + \frac{(n-r)}{[1 - F_m(\zeta_{r_m}^*)]} [\psi(\alpha)F_m(\zeta_{r_m}^*) - B_1(\zeta_{r_m}^*)] = 0.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_0} &= -\sum_{k=1}^m N_k + (\alpha - 1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (-1) \right\} \\
&\quad - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (-\zeta_{i_k}^*) \right] + \frac{(n-r)}{[1 - F_m(\zeta_{r_m}^*)]} \left[\frac{(\zeta_{r_m}^*)^\alpha e^{-\zeta_{r_m}^*}}{\Gamma(\alpha)} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_1} &= \sum_{k=1}^m N_k x_k + (\alpha - 1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{C_1(t_{i_k})}{\zeta_{i_k}^*} \right\} \\
&\quad - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} C_1(t_{i_k}) \right] - \frac{(n-r)}{[1 - F_m(\zeta_{r_m}^*)]} \\
&\quad \times \left[\frac{C_1(t_{r_m})(\zeta_{r_m}^*)^{\alpha-1} e^{-\zeta_{r_m}^*}}{\Gamma(\alpha)} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Em que:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}, \\
B_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx, \\
C_1(t_{i_k}) &= (t_{i_k} - \tau_{k-1}) x_k e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \Delta_j x_j e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_j)}.
\end{aligned}$$

Por fim, as equações apresentadas em (4.36), (4.37) e (4.38) são chamadas de equações de verossimilhança. De modo que os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , β_0 e β_1 podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações utilizando métodos iterativos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

4.5.2 Intervalos de Confiança Aproximados

Com a mesma motivação apresentada na seção 4.2.1, dado o vetor de parâmetros $\Theta = (\alpha, \beta_0, \beta_1)$ temos que a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (EMV) de Θ é:

$$(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_3(0, I^{-1}(\Theta)), \quad (4.39)$$

de modo que estes estimadores são não viciados. A matriz de variância e covariância desses estimadores é dado por $I^{-1}(\Theta)$, que é inversa da matriz de informação de Fisher observada, na qual podemos representar essa matriz da seguinte forma:

$$I^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \beta_0} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \beta_1} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_0 \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_0^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_1 \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_1^2} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (4.40)$$

Os elementos da matriz de informação de Fisher observada são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \alpha^2} &= -r(\psi(\alpha))' + \frac{(n-r)}{[1 - F_m(\zeta_r^*)]^2} \{[(\psi'(\alpha) - \psi^2(\alpha)) F_m(\zeta_r^*) \\
&+ 2\psi(\alpha) B_1(\zeta_r^*) - B_2(\zeta_r^*)] (1 - F_m(\zeta_r^*)) \\
&- [\psi(\alpha) F_m(\zeta_r^*) - B_1(\zeta_r^*)]^2\}.
\end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \beta_0} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_0 \partial \alpha} \\
&= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (-1) \right\} + \frac{(n-r)(\zeta_{r_m}^*)^\alpha e^{-\zeta_{r_m}^*}}{[1 - F_m(\zeta_{r_m}^*)]^2 \Gamma(\alpha)} \\
&\times [B_1(\zeta_{r_m}^*) - \psi(\alpha) + \ln(\zeta_{r_m}^*) (1 - F_m(\zeta_{r_m}^*))] = 0.
\end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \alpha \partial \beta_1} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_1 \partial \alpha} \\
&= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{C_1(t_{i_k})}{\zeta_{i_k}^*} \right\} - \frac{(n-r)C_1(t_{r_m})(\zeta_{r_m}^*)^{\alpha-1}e^{-\zeta_{r_m}^*}}{[1-F_m(\zeta_{r_m}^*)]^2 \Gamma(\alpha)} \quad (4.43) \\
&\times \left\{ -\ln(\zeta_{r_m}^*) [1-F_m(\zeta_{r_m}^*)] + \psi(\alpha) - B_1(\zeta_r^*) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_0^2} &= -\sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (\zeta_{i_k}^*) \right] + \frac{(n-r)(\zeta_{r_m}^*)^\alpha e^{-\zeta_{r_m}^*}}{[1-F_m(\zeta_{r_m}^*)]^2 \Gamma(\alpha)} \quad (4.44) \\
&\times \left\{ (\zeta_{r_m}^* - \alpha) [1-F_m(\zeta_{r_m}^*)] - (\zeta_{r_m}^*)^\alpha e^{-\zeta_{r_m}^*} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} \\
&= -\sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} -C_1(t_{i_k}) \right] + \frac{(n-r)C_1(t_{r_m})(\zeta_{r_m}^*)^\alpha e^{-\zeta_{r_m}^*}}{[1-F_m(\zeta_{r_m}^*)]^2 \Gamma(\alpha)} \quad (4.45) \\
&\times \left[(\alpha \zeta_{r_m}^{*-1} - 1) [1-F_m(\zeta_{r_m}^*)] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{r_m}^*)^{\alpha-1} e^{-\zeta_{r_m}^*} \right] = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t})}{\partial \beta_1^2} &= (\alpha-1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{C_2(t_{i_k})\zeta_{i_k}^* - (C_1(t_{i_k}))^2}{(\zeta_{i_k}^*)^2} \right\} \\
&- \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} C_2(t_{i_k}) \right] - \frac{(n-r)(\zeta_{r_m}^*)^{\alpha-1}e^{-\zeta_{r_m}^*}}{[1-F_m(\zeta_{r_m}^*)]^2 \Gamma(\alpha)} \quad (4.46) \\
&\times \left\{ \left[(\alpha-1)(\zeta_{r_m}^*)^{-1} - 1 \right] (C_1(t_{r_m}))^2 + C_2(t_{r_m}) \right\} [1-F_m(\zeta_{r_m}^*)] \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{r_m}^*)^{\alpha-1} e^{-\zeta_{r_m}^*} (C_1(t_{r_m}))^2 \Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Em que:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}, \\
B_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx, \\
B_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx, \\
C_1(t_{i_k}) &= (t_{i_k} - \tau_{k-1}) x_k e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \Delta_j x_j e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_j)}, \\
C_2(t_{i_k}) &= (t_{i_k} - \tau_{k-1}) x_k^2 e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \Delta_j x_j^2 e^{-(\beta_0 - \beta_1 x_j)}.
\end{aligned}$$

Com base nisso, podemos construir agora intervalos de confiança assintóticos aproximados para os parâmetros α , β_0 e β_1 . Sendo assim, os intervalos de confiança assintóticos com nível $100(1 - \gamma)\%$ podem ser construídos do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha}_{EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{EMV})} \\
&\hat{\beta}_{0EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\beta}_{0EMV})}, \\
&\hat{\beta}_{1EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\beta}_{1EMV})}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

4.5.3 Análise Bayesiana do Modelo de parâmetro reduzido

Apresentaremos a seguir, toda análise bayesiana realizada para o modelo de parâmetro reduzido sob censura tipo II considerando a distribuição Gama, na qual temos por objetivo mostrar as distribuições a priori que foram utilizadas, como também a distribuição a posteriori obtida.

Ao olharmos para os parâmetros do modelo construído, sabemos que os mesmos são desconhecidos e pertencem ao espaço paramétrico de $\alpha > 0$, $-\infty < \beta_0 < \infty$ e $\beta_1 > 0$, tornando-se então razoável assumir uma distribuição a priori Gama para o parâmetro α , uma distribuição a priori Normal para o parâmetro β_0 e uma distribuição a priori Uniforme para o parâmetro β_1 .

Deste modo, vamos considerar que $\alpha \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_0 \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, $\beta_1 \sim Uniforme(a_2, b_2)$. Veja a seguir:

$$\begin{aligned}
p(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(a_1) b_1^{a_1}} \alpha^{a_1-1} e^{-\alpha/b_1}, \\
p(\beta_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0 - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \\
p(\beta_1) &= \frac{1}{b_2 - a_2},
\end{aligned} \tag{4.48}$$

em que a_1, b_1, a_2, b_2, μ e σ^2 são conhecidos.

Como não temos nenhuma informação, nem de estudos anteriores e nem de especialistas, vamos assumir um caráter não-informativo para os parâmetros, ou seja, consideraremos $a_1 = b_1 = 0.01$, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 100^2$, $a_2 = 0$ e $b_2 = 1000$.

Assumindo independência a priori para os parâmetros, iremos obter a distribuição a priori conjunta, em que neste caso é o produto das prioris. Deste modo, a priori conjunta para os parâmetros é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta_0, \beta_1) &= \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1}} \alpha^{a_1-1} e^{-\alpha/b_1} \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0 - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \right\} \\ &\times \frac{1}{b_2 - a_2} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\pi(\alpha, \beta_0, \beta_1) = \frac{\alpha^{a_1-1}}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1}\sqrt{2\pi\sigma^2}(b_2 - a_2)} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{b_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0 - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}.$$

O nosso objetivo agora é obter a distribuição a posteriori para os parâmetros α, β_0 e β_1 . Na qual podemos representar essa distribuição de forma mais simples, que é a forma proporcional ao produto da função de verossimilhança (4.34) e da distribuição a priori conjunta (4.49), resultado em:

$$\begin{aligned} p(\alpha, \beta_0, \beta_1 | \mathbf{t}) &\propto \frac{(\alpha^{a_1-1})}{[\Gamma(\alpha)]^r \sqrt{2\pi\sigma^2}} \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (\zeta_{i_k}^*)^{\alpha-1} \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\sum_{k=1}^m N_k(\beta_0 - \beta_1 x_k) - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \zeta_{i_k}^* \right] \right. \\ &\left. - \frac{\alpha}{b_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0 - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \{1 - F_m(\zeta_{r_m}^*)\}^{n-r}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

É possível ver que a densidade a posteriori apresentada em (4.50) é analiticamente complexa de ser tratada, fazendo-se necessário a utilização de métodos numéricos.

4.5.4 Estudo de simulação

Com o intuito de exemplificar toda a teoria que foi abordada até o momento, vamos considerar o caso em que temos 3 níveis de estresse, isto é, $m = 3$. Com base nisso, o nosso próximo objetivo é comparar o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, na qual será realizado simulações considerando diferentes tamanhos amostrais, isto é $n = (14, 20, 34, 50, 100)$, com 50% e 70% de censura.

A ideia desta simulação é a mesma que foi apresentada em outras seções, ou seja, gerar várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente realizar a aplicação das duas metodologias, com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros. Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), viés e risco a posteriori. Vale ressaltar que a descrição da simulação que será realizada é a mesma apresentada na seção 4.4.2.

4.5.4.1 Resultados Numéricos

Os resultados obtidos das simulações que foram realizadas considerando diferentes tamanhos amostrais, isto é $n = (14, 20, 34, 50, 100)$, com 50% e 70% de censura, estão resumidos nas tabelas a seguir. .

As estatísticas apresentadas nas tabelas são a Média (Estimativa), Risco a posteriori, Viés, Probabilidade de Cobertura (PC) e o Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 4.6: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4, \beta_1 = 2, \tau_1 = 5, \tau_2 = 7, x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2.5$ e $n = 14$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
14	4	α	Máxima Verossimilhança	1.7134	0.8470	-	-0.2865	-1.5201	4.9470
			Quadrática	1.6329	0.9300	1.0170	-0.3670	0.2293	5.8649
			Linex	1.1285	0.9300	1.1321	-0.8714	0.2293	5.8649
			Entropia	0.8886	0.9300	0.1697	-1.1113	0.2293	5.8649
		β_0	Máxima Verossimilhança	6.6622	0.9620	-	2.6622	0.1097	13.2147
			Quadrática	8.3037	0.8800	29.8607	4.3037	2.1742	18.7676
			Linex	4.9384	0.8800	7.5046	0.9384	2.1742	18.7676
			Entropia	5.1359	0.8800	0.0542	2.3159	2.1742	18.7676
		β_1	Máxima Verossimilhança	3.0998	0.9110	-	1.0998	0.5238	5.6758
			Quadrática	3.1677	0.9430	2.7541	1.1677	0.7387	6.3078
			Linex	2.5265	0.9430	2.9496	0.5265	0.7387	6.3078
			Entropia	2.2382	0.9430	0.1954	0.2382	0.7387	6.3078
	7	α	Máxima Verossimilhança	2.7317	0.9220	-	0.7317	-1.8675	7.3310
			Quadrática	2.3499	0.9560	2.4416	0.3499	0.4092	7.1601
			Linex	1.6004	0.9560	1.9699	-0.3995	0.4092	7.1601
			Entropia	1.4727	0.9560	0.1311	-0.5272	0.4092	7.1601
		β_0	Máxima Verossimilhança	4.5365	0.9730	-	0.5365	0.1037	8.9692
			Quadrática	5.4799	0.9470	7.6432	1.4799	1.5642	11.8174
			Linex	3.8822	0.9470	5.0999	-0.1177	1.5642	11.8174
			Entropia	3.4024	0.9470	0.0369	0.9104	1.5642	11.8174
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.3011	0.9480	-	0.3011	0.4267	4.1756
			Quadrática	2.4423	0.9500	1.0770	0.4423	0.7536	4.6391
			Linex	2.1195	0.9500	2.1745	0.1195	0.7536	4.6391
			Entropia	1.8956	0.9500	0.1530	-0.1043	0.7536	4.6391

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 4.7: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4, \beta_1 = 2, \tau_1 = 5, \tau_2 = 7, x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2.5$ e $n = 20$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
20	6	α	Máxima Verossimilhança	2.0638	0.8460	-	0.0638	-1.3669	5.4946
			Quadrática	1.8820	0.9320	1.3446	-0.1179	0.3380	5.8174
			Linex	1.3504	0.9320	1.4349	-0.6495	0.3380	5.8174
			Entropia	1.1807	0.9320	0.1301	-0.8192	0.3380	5.8174
		β_0	Máxima Verossimilhança	5.9562	0.9630	-	1.9562	0.5587	11.3537
			Quadrática	6.9532	0.9050	15.1802	2.9532	2.1007	14.9591
			Linex	4.6712	0.9050	6.3856	0.6712	2.1007	14.9591
			Entropia	4.8607	0.9050	0.0493	1.7847	2.1007	14.9591
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.8283	0.9240	-	0.8283	0.5477	5.1089
			Quadrática	2.8567	0.9450	1.7754	0.8567	0.7696	5.4193
			Linex	2.3885	0.9450	2.6312	0.3885	0.7696	5.4193
			Entropia	2.1241	0.9450	0.1724	0.1241	0.7696	5.4193
	10	α	Máxima Verossimilhança	2.6786	0.9220	-	0.6786	-1.0186	6.3758
			Quadrática	2.4053	0.9520	2.4348	0.4053	0.5640	6.3363
			Linex	1.7729	0.9520	2.0500	-0.2270	0.5640	6.3363
			Entropia	1.7204	0.9520	0.0930	-0.2795	0.5640	6.3363
		β_0	Máxima Verossimilhança	4.3439	0.9730	-	0.3439	0.6947	7.9931
			Quadrática	4.9089	0.9520	3.8843	0.9089	1.7152	9.6197
			Linex	3.8308	0.9520	4.6044	-0.1691	1.7152	9.6197
			Entropia	3.5544	0.9520	0.0352	0.6024	1.7152	9.6197
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.2095	0.9610	-	0.2095	0.6340	3.7850
			Quadrática	2.2770	0.9600	0.6559	0.2770	0.8375	4.0053
			Linex	2.0558	0.9600	2.0035	0.0558	0.8375	4.0053
			Entropia	1.8827	0.9600	0.1137	-0.1172	0.8375	4.0053

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 4.8: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4, \beta_1 = 2, \tau_1 = 5, \tau_2 = 7, x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2.5$ e $n = 34$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 34$	$r = 10$	α	Máxima Verossimilhança	2.0386	0.8490	-	0.0386	-0.5755	4.6528
			Quadrática	1.9854	0.9280	1.2909	-0.0145	0.5438	5.0015
			Linex	1.5799	0.9280	1.5920	-0.4200	0.5438	5.0015
			Entropia	1.5014	0.9280	0.0767	-0.4985	0.5438	5.0015
		β_0	Máxima Verossimilhança	5.5715	0.9250	-	1.5715	1.2352	9.9077
			Quadrática	5.8521	0.8830	7.3049	1.8521	2.2345	11.0369
			Linex	4.5201	0.8830	5.4503	0.5201	2.2345	11.0369
			Entropia	4.7334	0.8830	0.0413	1.2214	2.2345	11.0369
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.6367	0.9010	-	0.6367	0.6514	4.6220
			Quadrática	2.5306	0.9300	1.0847	0.5306	0.8211	4.4677
			Linex	2.2216	0.9300	2.2810	0.2216	0.8211	4.4677
			Entropia	1.9878	0.9300	0.1504	-0.0121	0.8211	4.4677
	$r = 17$	α	Máxima Verossimilhança	2.3689	0.9270	-	0.3689	0.0881	4.6498
			Quadrática	2.2779	0.9490	1.3786	0.2779	0.8102	4.9236
			Linex	1.9095	0.9490	1.9615	-0.0904	0.8102	4.9236
			Entropia	1.8911	0.9490	0.0515	-0.1088	0.8102	4.9236
		β_0	Máxima Verossimilhança	4.2028	0.9700	-	0.2028	1.4713	6.9344
			Quadrática	4.4734	0.9470	1.9553	0.4734	2.0325	7.5785
			Linex	3.8535	0.9470	4.2261	-0.1464	2.0325	7.5785
			Entropia	3.8171	0.9470	0.0290	0.2491	2.0325	7.5785
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.1291	0.9530	-	0.1291	0.8897	3.3684
			Quadrática	2.1406	0.9470	0.3909	0.1406	0.9772	3.3976
			Linex	2.0038	0.9470	1.8593	0.0038	0.9772	3.3976
			Entropia	1.8908	0.9470	0.0721	-0.1091	0.9772	3.3976

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 4.9: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4, \beta_1 = 2, \tau_1 = 5, \tau_2 = 7, x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2.5$ e $n = 50$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 50$	$r = 15$	α	Máxima Verossimilhança	1.9942	0.8660	-	-0.0057	-0.0087	3.9972
			Quadrática	1.9728	0.9330	0.8634	-0.0271	0.7106	4.2682
			Linex	1.6923	0.9330	1.6165	-0.3076	0.7106	4.2682
			Entropia	1.6438	0.9330	0.0503	-0.3561	0.7106	4.2682
		β_0	Máxima Verossimilhança	5.1844	0.9290	-	1.1844	1.6321	8.7366
			Quadrática	5.3191	0.9030	4.2278	1.3191	2.3348	9.0904
			Linex	4.4122	0.9030	4.9930	0.4122	2.3348	9.0904
			Entropia	4.6229	0.9030	0.0346	0.8749	2.3348	9.0904
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.4672	0.9160	-	0.4672	0.7432	4.1911
			Quadrática	2.3850	0.9340	0.7843	0.3850	0.8794	3.9867
			Linex	2.1537	0.9340	2.1251	0.1537	0.8794	3.9867
			Entropia	1.9662	0.9340	0.1201	-0.0337	0.8794	3.9867
	$r = 25$	α	Máxima Verossimilhança	2.2629	0.9450	-	0.2629	0.5360	3.9899
			Quadrática	2.2206	0.9520	0.9355	0.2206	0.9794	4.1879
			Linex	1.9822	0.9520	1.9250	-0.0177	0.9794	4.1879
			Entropia	1.9712	0.9520	0.0334	-0.0287	0.9794	4.1879
		β_0	Máxima Verossimilhança	4.0952	0.9620	-	0.0952	1.9254	6.2651
			Quadrática	4.2503	0.9470	1.1969	0.2503	2.2832	6.5903
			Linex	3.8558	0.9470	4.0293	-0.1441	2.2832	6.5903
			Entropia	3.8760	0.9470	0.0207	0.0880	2.2832	6.5903
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.0761	0.9520	-	0.0761	1.0780	3.0743
			Quadrática	2.0758	0.9480	0.2595	0.0758	1.1225	3.0607
			Linex	1.9875	0.9480	1.7944	-0.0124	1.1225	3.0607
			Entropia	1.9236	0.9480	0.0409	-0.0763	1.1225	3.0607

Fonte:Elaborada pela autora.

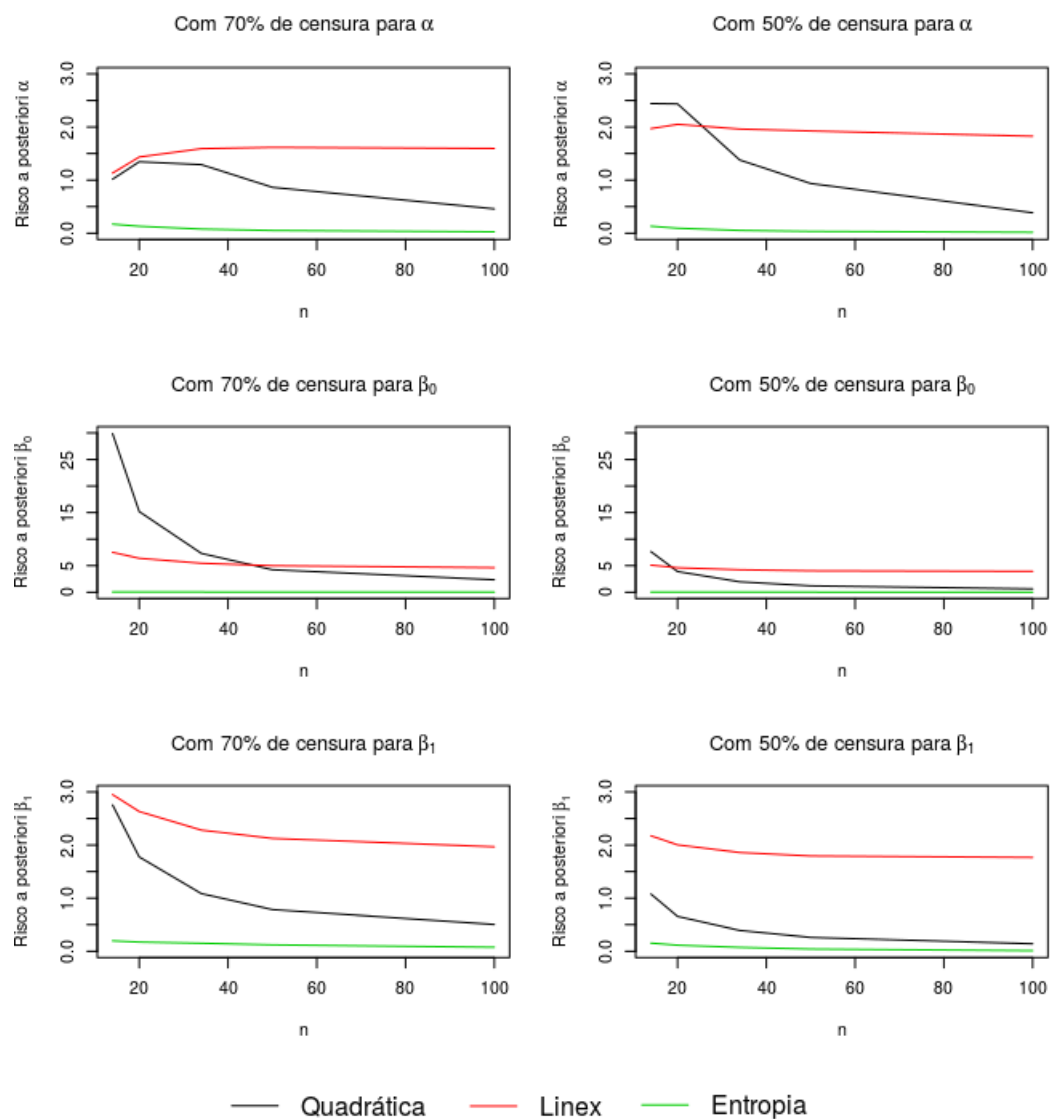
Tabela 4.10: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \beta_0 = 4, \beta_1 = 2, \tau_1 = 5, \tau_2 = 7, x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2.5$ e $n = 100$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
n = 100	r = 30	α	Máxima Verossimilhança	1.9183	0.8800	-	-0.0816	0.5973	3.2393
			Quadrática	1.9269	0.9140	0.4577	-0.0730	0.9698	3.4034
			Linex	1.7859	0.9140	1.5960	-0.2140	0.9698	3.4034
			Entropia	1.7611	0.9140	0.0249	-0.2388	0.9698	3.4034
		β_0	Máxima Verossimilhança	4.8421	0.9270	-	0.8421	2.1568	7.5274
			Quadrática	4.8935	0.8940	2.3346	0.8935	2.6148	7.4881
			Linex	4.3683	0.8940	4.6227	0.3683	2.6148	7.4881
			Entropia	4.5582	0.8940	0.0234	0.5942	2.6148	7.4881
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.2809	0.9370	-	0.2809	0.8736	3.6883
			Quadrática	2.2372	0.9370	0.5035	0.2372	0.9971	3.5063
			Linex	2.0848	0.9370	1.9672	0.0848	0.9971	3.5063
			Entropia	1.9714	0.9370	0.0745	-0.0285	0.9971	3.5063
	r = 50	α	Máxima Verossimilhança	2.1325	0.9600	-	0.1325	1.0375	3.2275
			Quadrática	2.1068	0.9360	0.3839	0.1068	1.2280	3.3145
			Linex	2.0033	0.9360	1.8263	0.0033	1.2280	3.3145
			Entropia	1.9928	0.9360	0.0157	-0.0071	1.2280	3.3145
		β_0	Máxima Verossimilhança	4.0304	0.9490	-	0.0304	2.5442	5.5165
			Quadrática	4.1239	0.9190	0.6268	0.1239	2.7473	5.6517
			Linex	3.9347	0.9190	3.9280	-0.0652	2.7473	5.6517
			Entropia	3.9984	0.9190	0.0098	0.0024	2.7473	5.6517
		β_1	Máxima Verossimilhança	2.0327	0.9390	-	0.0327	1.3406	2.7249
			Quadrática	2.0400	0.9200	0.1398	0.0400	1.3704	2.7114
			Linex	1.9974	0.9200	1.7671	-0.0025	1.3704	2.7114
			Entropia	1.9811	0.9200	0.0103	-0.0188	1.3704	2.7114

Fonte:Elaborada pela autora.

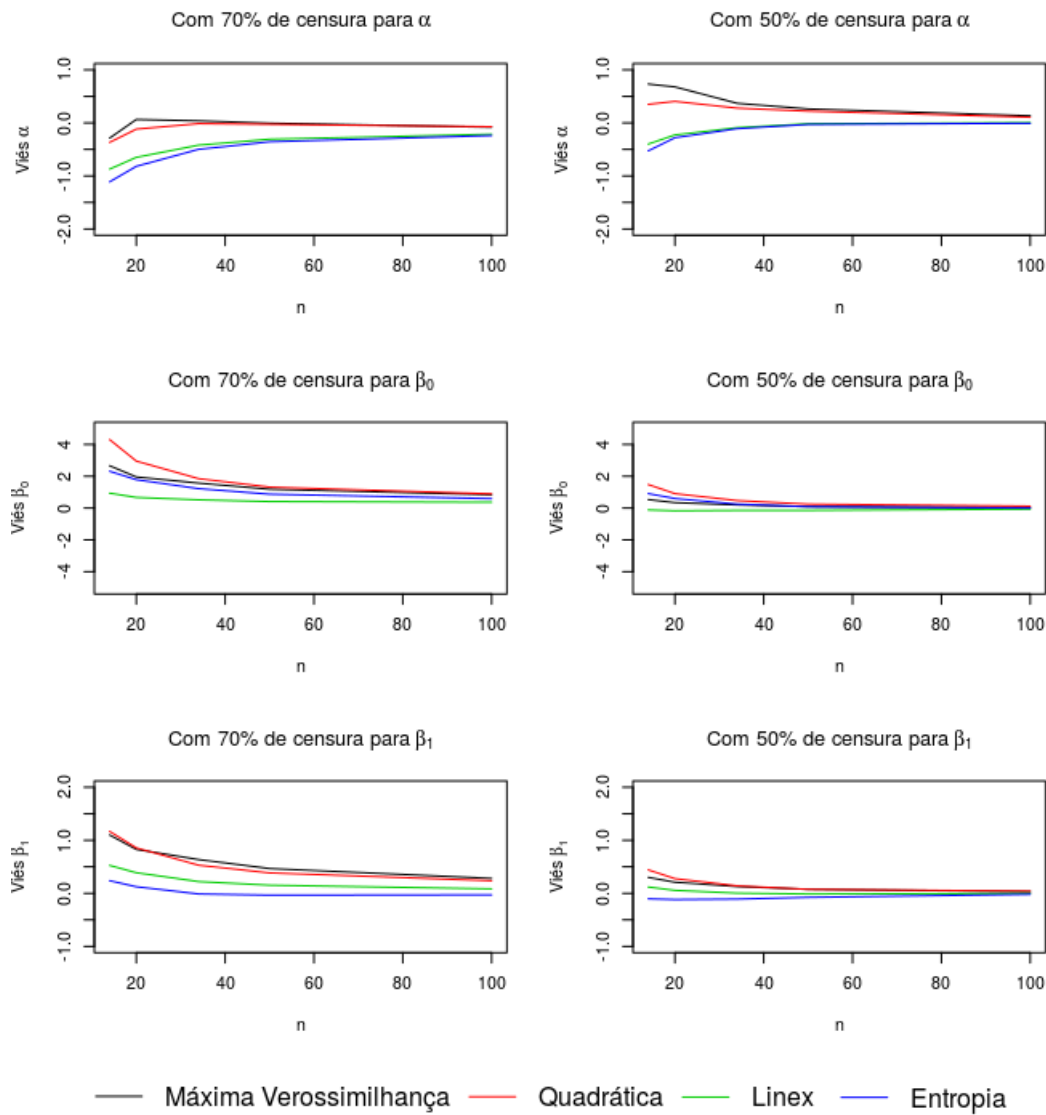
Antes de iniciarmos a explicação dos resultados apresentados nas tabelas, será apresentado duas figuras. A primeira figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de visualizarmos como está se comportando o risco a posteriori a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura. Já a segunda figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de observarmos agora como está se comportando o viés a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.

Figura 4.3: Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo de parâmetro reduzido sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Figura 4.4: Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo de parâmetro reduzido sob censura tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Comparando os resultados que foram apresentados nas tabelas 4.6 a 4.10, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano com as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia apresentaram as boas probabilidades de cobertura, isto é, probabilidades de cobertura próximas de 95%.

Ao observarmos os valores do risco a posteriori referente as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia, sendo estes valores apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 4.3, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, a função de perda de Entropia apresentou os melhores resultados, isto é, com um risco a posteriori próximo de zero. Portanto, a perda que se espera comentar estimando os parâmetros do modelo proposto considerando a função de perda Entropia, é bem menor quando comparado com as outras funções de perda.

Observando ainda a Figura 3.1 é interessante notarmos que quando consideramos 50% de censura, obtemos valores menores do risco a posteriori do que quando consideramos 70%

de censura. Além disso para amostras de tamanho pequeno a função de perda Quadrática, usualmente utilizada em estudos de inferência Bayesiana, apresentou valores altos do risco a posteriori quando comparado com a função de perda de Entropia, ressaltando mais uma vez a importância de se trabalhar com essa função assimétrica.

Quando olhamos para os valores do viés apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 4.4, podemos perceber para amostras pequenas e considerando 70% de censura, o método de máxima verossimilhança e o método Bayesiano com função de perda Quadrática apresentaram resultados satisfatórios, isto é, com um viés próximo de zero para o parâmetro α . Contudo quando consideramos 50% censura, o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados. Já para o parâmetro β_0 , tanto o método clássico quanto o método bayesiano apresentaram resultados bons e próximos, todavia o método bayesiano com função de Linex ainda apresentou um menor viés. Por fim, embora o método clássico e o método bayesiano tenham apresentado um desempenho similar para o parâmetro β_1 , a função de perda de Entropia ainda apresentou um viés mais próximo de zero. Podemos perceber também, que a medida que o tamanho amostral aumenta, tanto o método clássico quanto o método bayesiano com diferentes funções de perda, tende a se aproximar de zero. Outra ponto importante de ressaltarmos é que quando consideramos 50% de censura, obtemos um viés menor do que quando consideramos 70% de censura.

Ao compararmos as estimativas realizadas por cada método, podemos perceber que tanto o método clássico quanto o método bayesiano (com funções de perda Linex e Entropia), para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura, se aproximaram bem do verdadeiro valor dos parâmetros que são $\alpha = 2$, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 2$. Podemos perceber, que a medida que o tamanho amostral aumenta essas estimativas pontuais tendem a se aproximar cada vez mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Sendo assim, de um modo geral podemos concluir que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados, isto é, ambos os métodos se aproximaram do verdadeiro valor dos parâmetros, com os menores riscos a posteriori, com os menores viés e as melhores probabilidades de cobertura.

4.5.5 Exemplo Ilustrativo

Vamos considerar como exemplo ilustrativo uma amostra gerada com 50 observações ($n = 50$), em que desejamos observar os tempos de falha de 25 itens ($r = 25$). Para gerar essa amostra consideramos os seguintes parâmetros: $\alpha = 3$, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 0.3$, $\tau_1 = 15$, $\tau_2 = 25$, $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ e $x_3 = 10$. Os tempos de falhas obtidos são:

Tabela 4.11: Tempos de falha no primeiro, segundo e terceiro nível de estresse.

Primeiro nível	8.91740 11.23328
Segundo nível	15.40947 16.56300 17.13398 20.12343 22.28048 22.55280 22.70177 23.05564 23.77644 24.11637
Terceiro nível	25.05116 25.37580 25.38861 25.48826 25.67055 25.69582 25.73876 26.41070 26.73224 26.95137 26.97734 27.00711 27.65023

Obtidos os tempos de falha, iremos aplicar o método clássico e o método bayesiano, já discutidos nesse capítulo. Sendo assim, os resultados que serão apresentados na tabela a seguir são: a Média (Estimativa), Desvio Padrão (DP) e Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 4.12: Tabela de resultados obtidos a partir da amostra ilustrativa.

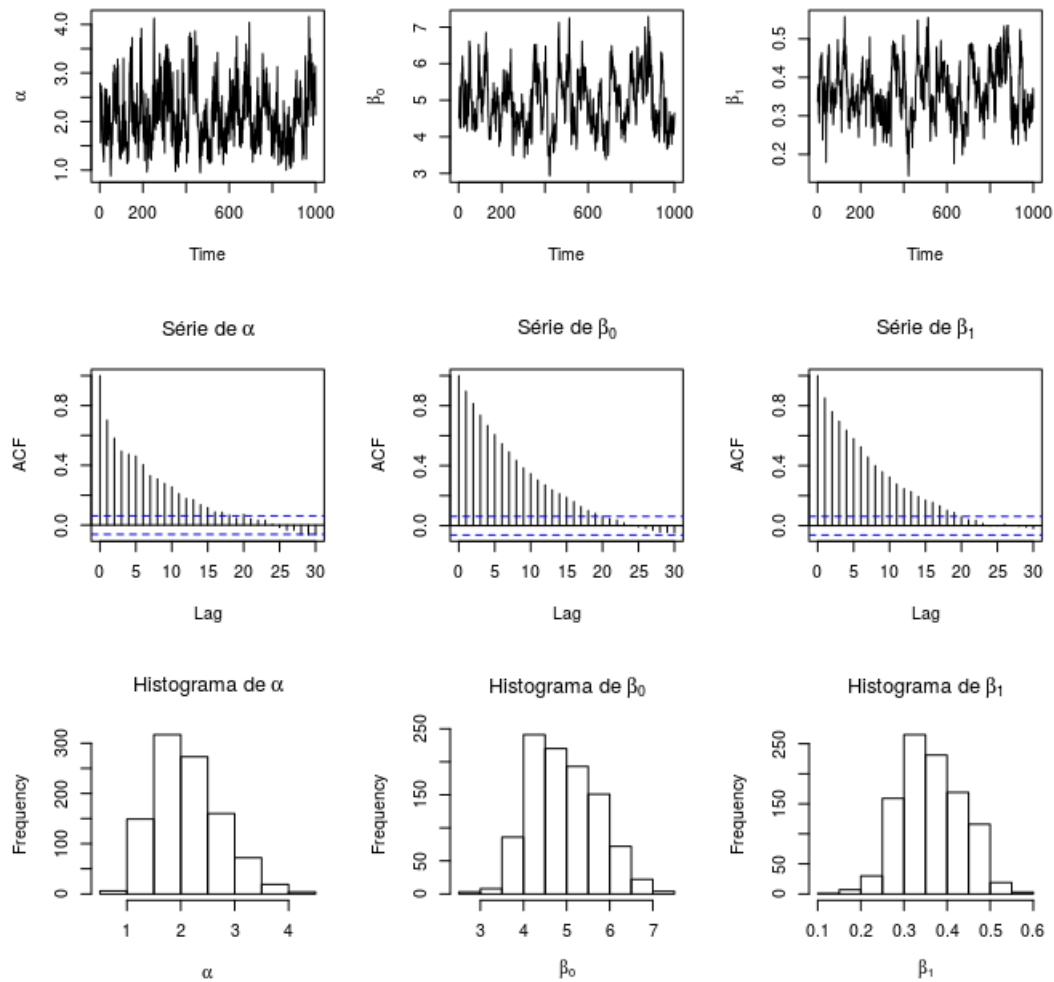
n	r	θ_i	Métodos/Funções de perda	Estimativa	DP	$IC(95\%)$	
						Inferior	Superior
$n = 50$	$r = 25$	α	Máxima Verossimilhança	2.2935	1.2738	-0.2032	4.7902
			Quadrática	1.6712	0.7646	0.6558	3.5569
			Linex	1.5043	0.7646	0.6558	3.5569
			Entropia	1.4185	0.7646	0.6558	3.5569
		β_0	Máxima Verossimilhança	4.6569	1.4713	1.7730	7.5409
			Quadrática	5.9844	1.3754	3.6845	9.2375
			Linex	5.4338	1.3754	3.6845	9.2375
			Entropia	5.7267	1.3754	3.6845	9.2375
		β_1	Máxima Verossimilhança	0.3472	0.1250	0.1022	0.5922
			Quadrática	0.4492	0.1107	0.2598	0.7086
			Linex	0.4449	0.1107	0.2598	0.7086
			Entropia	0.4262	0.1107	0.2598	0.7086

Fonte: Elaborada pela autora.

Quando observamos os resultados apresentados na tabela 4.12 podemos ver que há diferença entre os estimadores clássico e bayesiano. Além disso, podemos ver que o método bayesiano apresentou o menor desvio padrão e um intervalo de credibilidade de 95% mais estreito para os parâmetros.

Olhando esta mesma tabela podemos ressaltar que, o limite inferior do intervalo de confiança de 95% obtido para α pelo método de máxima verossimilhança é um valor negativo, embora esse parâmetro assuma apenas valores positivos.

Sendo assim, apresentaremos a seguir os gráficos temporal, de autocorrelação e histograma da cadeia gerada para os parâmetros α , β_0 e β_1 .

Figura 4.5: Gráfico temporal, de autocorrelação e histograma para α , β_0 e β_1 .

Fonte:Elaborada pela autora.

Por meio da Figura 4.5 é possível perceber que houve a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio, e além disso podemos observar que os valores gerados apresentam um comportamento um pouco mais simétrico, podendo ser utilizado neste caso tanto a média, mediana ou da moda para representar o conjunto de valores da distribuição a posteriori.

Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II

Neste capítulo iremos mostrar todo desenvolvimento teórico e matemático que foi utilizada para formular o modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II considerando a distribuição Gama.

Iremos apresentar a análise clássica realizada, na qual mostraremos os estimadores de Máxima Verossimilhança obtidos para o modelo proposto e também a distribuição assintótica desses estimadores.

Vamos exibir também toda análise bayesiana desenvolvida para realizar a estimação dos parâmetros do modelo, na qual adotamos a distribuição Gama como distribuição a priori para os parâmetros do modelo.

5.1 Descrição do modelo

A construção do modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II, tem como base o modelo de exposição cumulativa. Vamos assumir que os tempos de falha observados tanto no nível de estresse x_1 quanto no nível de estresse x_2 , seguem uma distribuição Gama com parâmetro de forma comum α e parâmetros de escala θ_1 e θ_2 .

Denotando por F_1 e F_2 , as funções de distribuição dos tempos de falha nos níveis de estresse x_1 e x_2 , vamos considerar que θ_1 e θ_2 são os parâmetros de escala associados a essas funções, respectivamente.

Portanto, a função de distribuição cumulativa do modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II considerando a distribuição Gama, para os níveis de estresse x_1 e x_2 , é dado por:

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = F_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ G_2(t) = F_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (5.1)$$

em que:

$$F_1(t) = \int_0^{\frac{t}{\theta_1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad F_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) = \int_0^{\frac{t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1}{\theta_2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

na qual $t > 0$ e $\alpha > 0$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ são parâmetros desconhecidos. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = f_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ g_2(t) = f_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (5.2)$$

em que:

$$f_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_1^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{t}{\theta_1}\right\}.$$

$$f_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_2^\alpha} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)\right\}.$$

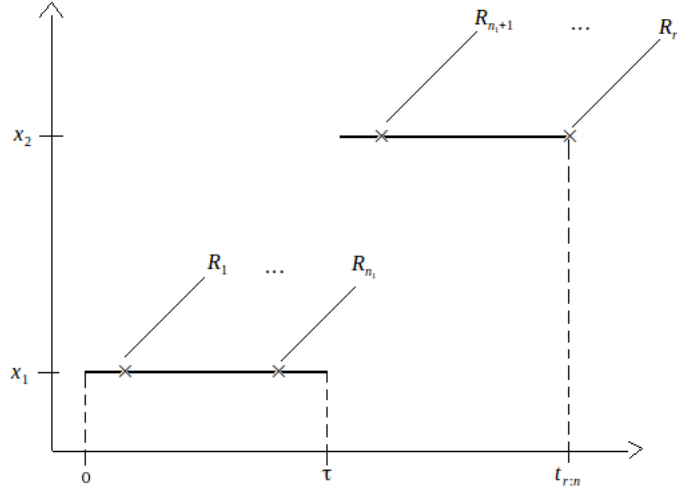
A fim de obter um melhor entendimento sobre o modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II adotado neste trabalho, vamos imaginar o caso em que começamos com n unidades em teste, na qual as mesmas são submetidas a um nível de estresse inicial x_1 . Feito isso, essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1 . Após esse tempo, as unidades que não falharam serão submetidas a um nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_2 .

Como estamos considerando um caso de censura progressiva tipo II, após ocorrer a primeira falha, serão retirados r_1 itens dos $(n - 1)$ restantes que ainda não falharam, permanecendo no estudo um total de $n - r_1 - 1$ elementos. Pensando agora no caso em que ocorra a segunda falha, de modo que iremos retirar r_2 itens dos $n - r_1 - 2$ que ainda restam, permanecendo no estudo um total de $n - r_1 - r_2 - 2$ elementos. Seguindo esse mesmo processo até que ocorra a m -ésima falha, é fácil ver que no momento que ocorrer a r -ésima falha, todos os $r_r = n - r_1 - r_2 - \dots - r_{r-1} - r$ itens restantes que estão em funcionamento serão censurados, uma vez que já observamos as r falhas de interesse.

Sendo assim, vamos denotar por n_1 e n_2 , o número de unidades que falharam no primeiro e no segundo nível de estresse, respectivamente. Vamos indicar por r ($r < n$) o número de falhas que desejamos obter e r_i , de $i = 1, \dots, r$, o número de unidades que iremos retirar após a i -ésima falha.

A figura a seguir apresenta de maneira resumida o que foi expresso anteriormente.

Figura 5.1: Figura ilustrativa de um esquema de censura progressiva tipo II utilizando um estresse do tipo step-stress simples.



Fonte:Elaborada pela autora.

Agora iremos abordar os dois principais métodos de estimação, que é o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano, para o modelo descrito neste capítulo.

5.2 Análise Clássica do Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II

Utilizando o método de Máxima Verossimilhança para realizar a análise clássica deste modelo, vamos considerar uma amostra aleatória como apresentado em (3.3). Como visto na subseção 1.4.2, a função de verossimilhança de α , θ_1 e θ_2 baseado em uma amostra com censura progressiva tipo II, pode ser escrita do seguinte modo:

$$L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = C \left[\prod_{i=1}^r g(t_{i:n}) \{1 - G(t_{i:n})\}^{r_i} \right], \quad (5.3)$$

em que $r = n_1 + n_2$, $C = n(n - r_1 - 1) \dots (n - r_1 - \dots - r_{r-1} - r + 1)$ e r_i de $i = 1, \dots, r - 1$ são valores pré-determinados.

Como visto em Yuen e Tse (1996), o número de unidades a serem retiradas após cada falha pode ser pré-determinado ou pode ser aleatório. Sendo assim, vamos supor que qualquer unidade retirada do experimento é independente das outras e vamos considerar que o número de unidades removidas em cada tempo de falha tem uma distribuição Binomial com probabilidade de remoção p . Isto é:

$$P(R_1 = r_1) = \binom{n-r}{r_1} p^{r_1} (1-p)^{n-r-r_1}, \quad (5.4)$$

e para $i = 2, \dots, m - 1$, temos:

$$P(R_i = r_i | R_{i-1} = r_{i-1}, \dots, R_1 = r_1) = \binom{n-r-\sum_{l=1}^{i-1} r_l}{r_i} p^{r_i} (1-p)^{n-r-\sum_{l=1}^i r_l}. \quad (5.5)$$

Sendo assim, supondo independência entre R_i e T_i para todo i , temos que a função de verossimilhança apresentada em (5.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) = C \left[\prod_{i=1}^r g(t_{i:n}) \{1 - G(t_{i:n})\}^{r_i} \right] P(\mathbf{R} = \mathbf{r}), \quad (5.6)$$

em que:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) &= P(R_1 = r_1) P(R_2 = r_2 | R_1 = r_1) P(R_3 = r_3 | R_2 = r_2, R_1 = r_1) \dots \\ &\dots P(R_{r-1} = r_{r-1} | R_{r-2} = r_{r-2}, \dots, R_1 = r_1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Utilizando as expressões (5.4) e (5.5), podemos reescrever (5.7) do seguinte modo:

$$P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) = \frac{(n-r)!}{\left(n-r-\sum_{i=1}^{r-1} r_i \right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} p^{\sum_{i=1}^{r-1} r_i} (1-p)^{(r-1)(n-r)-\sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i}. \quad (5.8)$$

Motivada por Alkhalfan (2012) e utilizando as expressões apresentadas em (5.1) e (5.2), faz-se possível construir a função de verossimilhança para α , θ_1 e θ_2 , considerando três possíveis casos:

1. Para o caso de $n_1 = r$ e $n_2 = 0$, a função de verossimilhança em (5.6) é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= C \left[\prod_{i=1}^r f_1(t_{i:n}) \{1 - F_1(t_{i:n})\}^{r_i} \right] P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) \\ &= \frac{C(n-r)!}{\left(n-r-\sum_{i=1}^{r-1} r_i \right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \frac{\left(\prod_{i=1}^r t_i \right)^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{r-1} r_i}{\theta_1^{\alpha r} (\Gamma(\alpha))^r} p^{\sum_{i=1}^{r-1} r_i} \\ &\quad \times (1-p)^{(r-1)(n-r)-\sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^r t_i \right\} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^r \{1 - F_1(t_i)\}^{r_i}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

em que $0 < t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \tau_1$.

2. Para o caso de $n_1 = 0$ e $n_2 = r$, a função de verossimilhança em (5.6) é dada por:

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= C \left[\prod_{i=1}^r f_2(t_{i:n}) \{1 - F_2(t_{i:n})\}^{r_i} \right] P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) \\
 &= \frac{C(n-r)!}{\left(n-r - \sum_{i=1}^{r-1} r_i\right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \frac{\left(\prod_{i=1}^r y_i\right)^{\alpha-1}}{\theta_2^{\alpha r} (\Gamma(\alpha))^r} \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^{r-1} r_i \quad (r-1)(n-r) - \sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i \\
 &\quad \times p^{i=1} (1-p) \\
 &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^r y_i \right\} \prod_{i=1}^r \{1 - F_2(y_i)\}^{r_i},
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

em que $\tau_1 \leq t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty$ e $y_i = t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1$.

3. Para o caso de $1 \leq n_1 \leq r-1$, a função de verossimilhança em (5.6) é dada por:

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= C \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} f_1(t_{i:n}) [1 - F_1(t_{i:n})]^{r_i} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r f_2(t_{i:n}) [1 - F_2(t_{i:n})]^{r_i} \right\} P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) \\
 &= \frac{C(n-r)!}{\left(n-r - \sum_{i=1}^{r-1} r_i\right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \frac{\left(\prod_{i=1}^{n_1} t_i\right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=n_1+1}^r y_i\right)^{\alpha-1}}{\theta_1^{\alpha n_1} \theta_2^{\alpha n_2} (\Gamma(\alpha))^r} \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^{r-1} r_i \quad (r-1)(n-r) - \sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i \\
 &\quad \times p^{i=1} (1-p) \\
 &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n_1} t_i - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=n_1+1}^r y_i \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} [1 - F_1(t_i)]^{r_i} \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r [1 - F_2(y_i)]^{r_i} \right\},
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

em que $0 < t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} < \tau_1 \leq t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty$ e $y_i = t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1$.

Dos três possíveis casos apresentados, trabalharemos com a função de verossimilhança descrita em (5.11). Com base nisso, sabemos que maximizar essa função é o mesmo que maximizar o seu logaritmo. Sendo assim, a função log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\beta, \alpha_1, \alpha_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= \ln[L(\beta, \alpha_1, \alpha_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})] \\
&= \ln \left[\frac{C(n-r)!}{\left(n-r - \sum_{i=1}^{r-1} r_i \right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \right] - r \ln(\Gamma(\alpha)) - \alpha n_1 \ln(\theta_1) - \alpha n_2 \ln(\theta_2) \\
&+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n_1} \ln(t_i) + (\alpha - 1) \sum_{i=n_1+1}^r \ln(y_i) + \sum_{i=1}^{r-1} r_i \ln(p) \\
&+ \left[(r-1)(n-r) - \sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i \right] \ln(1-p) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n_1} t_i - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=n_1+1}^r y_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n_1} r_i \ln[1 - F_1(t_i)] + \sum_{i=n_1+1}^r r_i \ln[1 - F_2(y_i)].
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Derivando a equação (5.12) em relação aos parâmetros de interesse α , θ_1 e θ_2 e igualando a zero, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha} &= -r\psi(\alpha) - n_1 \ln(\theta_1) - n_2 \ln(\theta_2) + \sum_{i=1}^{n_1} \ln(t_i) + \sum_{i=n_1+1}^r \ln(y_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{r_i}{(1 - F_1(t_i))} [\psi(\alpha)F_1(t_i) - D_1(t_i)] \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i}{(1 - F_2(y_i))} [\psi(\alpha)F_2(y_i) - D_2(y_i)] = 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1} &= -\frac{\alpha n_1}{\theta_1} - \frac{(\alpha - 1)\theta_2 \tau_1}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i} + \frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} t_i \\
&+ \frac{n_2 \tau_1}{\theta_1^2} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{r_i t_i \left(\frac{t_i}{\theta_1} \right)^{\alpha-1} \exp \left\{ -\frac{t_i}{\theta_1} \right\}}{(1 - F_1(t_i))\Gamma(\alpha)\theta_1^2} \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i \tau_1 \left(\frac{y_i}{\theta_2} \right)^{\alpha-1} \exp \left\{ -\frac{y_i}{\theta_2} \right\}}{(1 - F_2(y_i))\theta_1^2 \Gamma(\alpha)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2} &= -\frac{\alpha n_2}{\theta_2} + \frac{(\alpha - 1)\tau_1}{\theta_1} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i} + \frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r (t_i - \tau_1) \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i(t_i - \tau_1)\left(\frac{y_i}{\theta_2}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{y_i}{\theta_2}\right\}}{(1 - F_2(y_i))\Gamma(\alpha)\theta_2^2} = 0.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Em que:

$$\psi(\alpha) = \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$y_i = t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1.$$

$$D_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{t}{\theta_1}} x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx.$$

$$D_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{t}{\theta_2}} x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx.$$

Portanto, temos que as expressões apresentadas em (5.13), (5.14) e (5.15) são chamadas de equações de verossimilhança. Sendo assim, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , θ_1 e θ_2 , podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações, na qual faz-se necessário a utilização de métodos iterativos, como por exemplo, o Método de Newton-Raphson.

5.2.1 Intervalos de Confiança Aproximados

Como descrito Bolfarine e Sandoval (2001), se temos um vetor de parâmetros $\Theta = (\alpha, \theta_1, \theta_2)$, um tamanho amostral grande e algumas condições de regularidade sendo satisfeitas, temos que a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (EMV) de Θ é:

$$(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_3(0, I^{-1}(\Theta)), \tag{5.16}$$

de modo que estes estimadores são assintoticamente não viciados. A matriz de variância e covariância desses estimadores é dado por $I^{-1}(\Theta)$, que é inversa da matriz de informação de Fisher observada, na qual podemos representar essa matriz da seguinte forma:

$$I^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \theta_2} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1 \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2 \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{5.17}$$

Os elementos da matriz de informação de Fisher observada são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha^2} &= -r\psi'(\alpha) + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{r_i}{(1 - F_1(t_i))^2} \left\{ [(\psi'(\alpha) - (\psi(\alpha))^2) F_1(t_i) \right. \\
&+ 2\psi(\alpha)A_1\left(\frac{t_i}{\theta_1}\right) - A_2\left(\frac{t_i}{\theta_1}\right)] (1 - F_1(t_i)) \\
&- \left. \left[\psi(\alpha)F_1(t_i) - A_1\left(\frac{t_i}{\theta_1}\right) \right]^2 \right\} + \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i}{(1 - F_2(y_i))^2} \\
&\times \left\{ \left[(\psi'(\alpha) - (\psi(\alpha))^2) F_2(y_i) + 2\psi(\alpha)A_1\left(\frac{y_i}{\theta_2}\right) - A_2\left(\frac{y_i}{\theta_2}\right) \right] \right. \\
&\times \left. (1 - F_2(y_i)) - \left[\psi(\alpha)F_2(y_i) - A_1\left(\frac{y_i}{\theta_2}\right) \right]^2 \right\}. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \theta_1} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1 \partial \alpha} \\
&= -\frac{n_1}{\theta_1} - \frac{\theta_2 \tau_1}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{r_i t_i \left(\frac{t_i}{\theta_1}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{t_i}{\theta_1}\right\}}{(1 - F_1(t_i))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^2} \\
&\times \{[\ln(t_i/\theta_1)(1 - F_1(t_i))] - \psi(\alpha) + A_1(t_i/\theta_1)\} \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i \tau_1 \left(\frac{y_i}{\theta_2}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{y_i}{\theta_2}\right\}}{(1 - F_2(y_i))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^2} \\
&\times \{[\ln(y_i/\theta_2)(1 - F_2(y_i))] - \psi(\alpha) + A_1(y_i/\theta_2)\}. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \theta_2} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2 \partial \alpha} \\
&= -\frac{n_2}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i} + \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i (t_i - \tau_1) \left(\frac{y_i}{\theta_2}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{y_i}{\theta_2}\right\}}{(1 - F_2(y_i))^2 \Gamma(\alpha) \theta_2^2} \\
&\times \{[\ln(y_i/\theta_2)(1 - F_2(y_i)) + A_1(y_i/\theta_2) - \psi(\alpha)]\}. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1^2} &= \frac{\alpha n_1}{\theta_1^2} + \frac{2(\alpha - 1)\theta_2 \tau_1}{\theta_1^3} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i} - \frac{(\alpha - 1)\theta_2^2 \tau_1^2}{\theta_1^4} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i^2} \\
&- \frac{2}{\theta_1^3} \sum_{i=1}^{n_1} t_i - \frac{2n_2 \tau_1}{\theta_1^3} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{r_i t_i \left(\frac{t_i}{\theta_1}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{t_i}{\theta_1}\right\}}{(1 - F_1(t_i))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^4} \\
&\times \{(1 - F_1(t_i)) [t_i(1 - (\alpha - 1)(t_i/\theta_1)^{-1}) - 2\theta_1] \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t_i/\theta_1)^{\alpha-1} \exp\{-t_i/\theta_1\} t_i\} + \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i \tau_1 \left(\frac{y_i}{\theta_2}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{y_i}{\theta_2}\right\}}{(1 - F_2(y_i))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^4} \\
&\times \{(1 - F_2(y_i)) [\tau_1(1 - (\alpha - 1)(y_i/\theta_2)^{-1}) - 2\theta_1] \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (y_i/\theta_2)^{\alpha-1} \exp\{-y_i/\theta_2\} \tau_1\}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \\
&= -\frac{(\alpha - 1)\tau_1}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i} + \frac{\theta_2(\alpha - 1)\tau_1^2}{\theta_1^3} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i^2} \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i \tau_1 (t_i - \tau_1) \left(\frac{y_i}{\theta_2}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{y_i}{\theta_2}\right\}}{(1 - F_2(y_i))^2 \Gamma(\alpha) \theta_1^2 \theta_2^2} \\
&\times \{(1 - F_2(y_i)) [1 - (\alpha - 1)(y_i/\theta_2)^{-1}] \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (y_i/\theta_2)^{\alpha-1} \exp\{-y_i/\theta_2\}\}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2^2} &= \frac{\alpha n_2}{\theta_2^2} - \frac{(\alpha - 1)\tau_1^2}{\theta_1^2} \sum_{i=n_1+1}^r \frac{1}{y_i^2} - \frac{2}{\theta_2^3} \sum_{i=n_1+1}^r (t_i - \tau_1) \\
&+ \sum_{i=n_1+1}^r \frac{r_i (t_i - \tau_1) \left(\frac{y_i}{\theta_2}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{y_i}{\theta_2}\right\}}{(1 - F_2(y_i))^2 \Gamma(\alpha) \theta_2^4} \\
&\times \{(1 - F_2(t_i)) [(1 - (\alpha - 1)(y_i/\theta_2)^{-1})(t_i - \tau_1) - 2\theta_2] \\
&- \frac{(t_i - \tau_1)}{\Gamma(\alpha)} (y_i/\theta_2)^{\alpha-1} \exp\{-y_i/\theta_2\}\}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Em que:

$$A_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx \quad e \quad A_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx .$$

Após a obtenção da matriz de informação de Fisher, faz-se possível construir intervalos de confiança assintóticos aproximados para os parâmetros α , θ_1 e θ_2 . Sendo assim, os intervalos de confiança assintóticos com nível $100(1 - \gamma)\%$ podem ser construídos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{EMV})} \\ \hat{\theta}_{1EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{1EMV})} , \\ \hat{\theta}_{2EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{2EMV})} \end{aligned} \quad (5.24)$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

5.3 Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II

Apresentaremos nessa seção toda análise bayesiana realizada utilizando o modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II e considerando a distribuição Gama, na qual mostraremos as distribuições a priori que foram utilizadas e também a distribuição a posteriori obtida.

Quando olhamos para as expressões (5.2) do modelo construído, e sabendo que os parâmetros desconhecidos α , θ_1 e θ_2 , pertencem ao espaço paramétrico de $\alpha, \theta_1, \theta_2 > 0$, torna-se razoável assumir uma distribuição a priori Gama para cada um dos três parâmetros.

A expressão da distribuição a priori para cada parâmetro desse modelo, como também a construção da distribuição a priori conjunta é a mesma apresentada na seção 3.3.

Deste modo, seguindo a mesma ideia apresentada na seção 3.3, temos que a distribuição a posteriori para os parâmetros α, θ_1 e θ_2 pode ser representado de forma proporcional ao produto da função de verossimilhança (5.11) e da distribuição a priori conjunta (3.22), resultado em:

$$\begin{aligned} p(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &\propto \frac{\left(\prod_{i=1}^{n_1} t_i \right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=n_1+1}^r y_i \right)^{\alpha-1} \alpha^{a_1-1} \theta_1^{a_2-1} \theta_2^{a_3-1}}{(\Gamma(\alpha))^r \theta_1^{\alpha n_1} \theta_2^{\alpha n_2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\alpha}{b_1} - \frac{\theta_1}{b_2} - \frac{\theta_2}{b_3} - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n_1} t_i - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=n_1+1}^r y_i \right\} \\ &\times \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} [1 - F_1(t_i)]^{r_i} \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r [1 - F_2(y_i)]^{r_i} \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Veja que a densidade a posteriori apresentada em (5.25) é analiticamente complexa de ser tratada, fazendo-se necessário a utilização de métodos numéricos.

5.4 Estudo de simulação

Com o mesmo objetivo apresentado nos capítulos anteriores, isto é, de comparar o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, será realizado simulações considerando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura.

Isto é, serão geradas várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente será realizado a aplicação das duas metodologias, com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori e viés.

5.4.1 Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Simples sob censura progressiva tipo II

Baseado em Balakrishnan e Sandhu (1995) e também em Ismail e Sarhan (2009) , o algoritmo utilizado para gerar valores aleatórios do modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II considerando a distribuição Gama, é dado do seguinte modo:

1. Simular r valores a partir da distribuição Uniforme(0,1), $U_1, \dots, U_r$.
2. Gerar um número aleatório, R_1 , de uma $Binomial(n - r, p)$.
3. Para $i = 2, 3, \dots, r-1$, gere números aleatórios R_i de uma $Binomial\left(n - r - \sum_{l=1}^{i-1} R_l, p\right)$.
4. Defina R_r de acordo coma seguinte condição:

$$R_r = \begin{cases} n - r - \sum_{l=1}^{r-1} R_l, & n - r > \sum_{l=1}^{r-1} R_l \\ 0, & c.c \end{cases}$$

5. Defina $E_i = U_i^{1/(i + \sum_{d=r-i+1}^r R_d)}$, para $i = 1, \dots, r$.
6. Obtenha amostras de censura progressiva tipo II, na qual podemos denotar por $(U_1^*, \dots, U_m^*)$, em que $U_i^* = 1 - \prod_{d=r-i+1}^r E_d$, para $i = 1, \dots, r$.
7. Encontrar n_1 tal que $U_{n_1}^* \leq F_1(\tau) \leq U_{n_1+1}^*$.
8. Para $i \leq n_1$, faça $T_i = \theta_1 G^{-1}(U_i^*)$, onde $G(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.
9. Para $n_1 + 1 \leq i \leq r$, faça $T_i = \theta_2 G^{-1}(U_i^*) + \tau - \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau$.

5.4.2 Descrição da Simulação

Para a realização da comparação entre o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano, foram realizadas simulações utilizando a linguagem de programação R.

Sendo assim, foram geradas amostras de diferentes tamanhos, isto é $n = (14, 20, 34, 50, 100)$, com 50% e 70% de censura, na qual para cada tamanho amostral diferente houveram 1000 amostras. Os valores dos parâmetros foram fixados anteriormente, e foi aplicado os dois métodos inferenciais em cada amostra, para assim obter estimativas para os parâmetros.

Utilizando os algoritmos elaborados em linguagem R, foi realizado:

- Para o método Clássico, foram geradas 1000 amostras (para cada tamanho amostral diferente), na qual foi realizado a estimação de máxima verossimilhança para cada uma delas, e posteriormente calculado os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), viés e a média das estimativas. Vale ressaltar que as R_i , de $i = 1, \dots, r$, unidades que iremos retirar após a i -ésima falha, foram obtidas a partir de uma distribuição Binomial com $p = 0.5$.
- Para o método Bayesiano, foram usadas as mesmas 1000 amostras geradas (para cada tamanho amostral diferente). Considerando a priori Gama foi utilizado o algoritmo de Metropolis-Hastings, em que para cada amostra foram gerados 60000 valores da distribuição a posteriori, descartado os 20000 primeiros valores e aplicado lags de tamanho 30, a fim de diminuir a correlação entre os valores gerados. Posteriormente foi aplicado os estimadores de Bayes referente as funções de perda: Quadrática, LINEX (consideramos $c = 0.7$) e Entropia (consideramos $q = 0.7$) e calculado os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori, viés e a média das estimativas.

5.4.3 Resultados Numéricos

Os resultados obtidos utilizando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura estão resumidos nas tabelas a seguir. Por meio dos índices calculados, julgaremos qual método obteve os melhores resultados.

As estatísticas apresentadas nas tabelas são a Média (Estimativa), Risco a posteriori, Viés, Probabilidade de Cobertura (PC) e o Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 5.1: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 14$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 14$	$r = 4$	α	Máxima Verossimilhança	3.4839	0.9520	-	1.4839	-1.3856	8.3536
			Quadrática	3.0732	0.9760	8.3933	1.0732	0.6237	8.3618
			Linex	1.9916	0.9760	2.7001	-0.0083	0.6237	8.3618
			Entropia	2.0642	0.9760	0.1002	0.0642	0.6237	8.3618
		θ_1	Máxima Verossimilhança	4.1274	0.8030	-	1.4091	-7.2803	15.5352
			Quadrática	9.0459	0.9900	72.1313	6.3276	0.7365	53.6661
			Linex	2.5136	0.9900	7.9771	-0.2046	0.7365	53.6661
			Entropia	3.0054	0.9900	0.2587	0.2871	0.7365	53.6661
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.5220	0.6930	-	-0.1266	-1.1978	4.2419
			Quadrática	6.6811	0.9560	47.0495	5.0324	0.5023	40.3908
			Linex	1.9480	0.9560	5.8906	0.2993	0.5023	40.3908
			Entropia	2.0934	0.9560	0.2881	0.4447	0.5023	40.3908
	$r = 7$	α	Máxima Verossimilhança	3.5148	0.9580	-	1.5148	-0.8088	7.8386
			Quadrática	2.4146	0.9510	6.6249	0.4146	0.5331	6.5135
			Linex	1.6550	0.9510	1.9907	-0.3449	0.5331	6.5135
			Entropia	1.6435	0.9510	0.0921	-0.3564	0.5331	6.5135
		θ_1	Máxima Verossimilhança	3.7139	0.7420	-	0.9956	-5.3319	12.7597
			Quadrática	10.3286	0.9820	118.7366	7.6103	0.9920	54.1698
			Linex	3.0041	0.9820	8.9354	0.2858	0.9920	54.1698
			Entropia	3.9753	0.9820	0.2280	1.2571	0.9920	54.1698
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.4948	0.7620	-	-0.1539	-0.3440	3.3336
			Quadrática	2.8288	0.9570	4.3901	1.1801	0.6729	10.7628
			Linex	1.8151	0.9570	2.4812	0.1663	0.6729	10.7628
			Entropia	1.8039	0.9570	0.1069	0.1552	0.6729	10.7628

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 5.2: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 20$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 20$	$r = 6$	α	Máxima Verossimilhança	3.1185	0.9620	-	1.1185	-0.3253	6.5624
			Quadrática	2.2474	0.9520	2.6542	0.2474	0.6086	5.5905
			Linex	1.7182	0.9520	1.8811	-0.2817	0.6086	5.5905
			Entropia	1.6855	0.9520	0.0748	-0.3144	0.6086	5.5905
		θ_1	Máxima Verossimilhança	3.3474	0.7900	-	0.6291	-4.3079	11.0029
			Quadrática	10.2364	0.9670	119.3896	7.5181	1.0004	54.1875
			Linex	2.9749	0.9670	8.8464	0.2566	1.0004	54.1875
			Entropia	3.9424	0.9670	0.2177	1.2241	1.0004	54.1875
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.4898	0.7440	-	-0.1588	-0.6388	3.6185
			Quadrática	3.1260	0.9730	6.2591	1.4773	0.6173	13.0559
			Linex	1.8021	0.9730	2.7640	0.1534	0.6173	13.0559
			Entropia	1.7946	0.9730	0.1300	0.1459	0.6173	13.0559
	$r = 10$	α	Máxima Verossimilhança	2.8640	0.9560	-	0.8640	-0.0424	5.7706
			Quadrática	2.0592	0.9380	1.9140	0.0592	0.6219	4.8926
			Linex	1.6444	0.9380	1.6774	-0.3555	0.6219	4.8926
			Entropia	1.6019	0.9380	0.0649	-0.3980	0.6219	4.8926
		θ_1	Máxima Verossimilhança	3.1463	0.7810	-	0.4280	-3.2474	9.5401
			Quadrática	8.7242	0.9720	88.6798	6.0059	1.1618	39.5189
			Linex	3.1550	0.9720	7.6452	0.4367	1.1618	39.5189
			Entropia	4.1170	0.9720	0.1717	1.3987	1.1618	39.5189
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.5121	0.8180	-	-0.1366	0.0341	2.9900
			Quadrática	2.3394	0.9660	1.8377	0.6907	0.7741	6.9102
			Linex	1.7954	0.9660	2.0147	0.1467	0.7741	6.9102
			Entropia	1.7692	0.9660	0.0696	0.1204	0.7741	6.9102

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 5.3: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 34$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 34$	$r = 10$	α	Máxima Verossimilhança	2.5097	0.9630	-	0.5097	0.4148	4.6046
			Quadrática	2.3804	0.9680	1.2764	0.3804	0.9007	4.7990
			Linex	2.0421	0.9680	2.0954	0.0421	0.9007	4.7990
			Entropia	2.0345	0.9680	0.0442	0.0345	0.9007	4.7990
		θ_1	Máxima Verossimilhança	3.0548	0.8160	-	0.3365	-2.1102	8.2200
			Quadrática	4.6927	0.9900	12.5731	1.9744	0.9445	19.3902
			Linex	2.4677	0.9900	4.3094	-0.2505	0.9445	19.3902
			Entropia	2.6963	0.9900	0.1208	-0.0219	0.9445	19.3902
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.5679	0.8360	-	-0.0807	0.0034	3.1325
			Quadrática	2.2908	0.9560	1.7774	0.6420	0.7431	6.6861
			Linex	1.7560	0.9560	1.9374	0.1073	0.7431	6.6861
			Entropia	1.7255	0.9560	0.0716	0.0768	0.7431	6.6861
	$r = 17$	α	Máxima Verossimilhança	2.4202	0.9540	-	0.4202	0.5541	4.2862
			Quadrática	2.8537	0.9250	2.6143	0.8537	1.2593	5.2380
			Linex	2.4904	0.9250	2.6025	0.4904	1.2593	5.2380
			Entropia	2.5492	0.9250	0.0324	0.5492	1.2593	5.2380
		θ_1	Máxima Verossimilhança	3.1956	0.8320	-	0.4773	-1.4413	7.8326
			Quadrática	2.5755	0.9530	1.3733	-0.1426	0.8659	7.3662
			Linex	1.9713	0.9530	2.2902	-0.7468	0.8659	7.3662
			Entropia	1.9706	0.9530	0.0654	-0.7476	0.8659	7.3662
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.5928	0.8590	-	-0.0558	0.4631	2.7224
			Quadrática	2.0975	0.9490	0.8665	0.4488	0.9380	4.6424
			Linex	1.8361	0.9490	1.7750	0.1873	0.9380	4.6424
			Entropia	1.8120	0.9490	0.0391	0.1633	0.9380	4.6424

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 5.4: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 50$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 50$	$r = 15$	α	Máxima Verossimilhança	2.3347	0.9590	-	0.3347	0.7040	3.9655
			Quadrática	1.8231	0.9180	0.3800	-0.1768	0.8480	3.4069
			Linex	1.6726	0.9180	1.4720	-0.3273	0.8480	3.4069
			Entropia	1.6316	0.9180	0.0310	-0.3683	0.8480	3.4069
		θ_1	Máxima Verossimilhança	3.0536	0.8510	-	0.3354	-1.1428	7.2501
			Quadrática	6.4558	0.9530	34.4954	3.7375	1.4776	22.9692
			Linex	3.3806	0.9530	5.8331	0.6624	1.4776	22.9692
			Entropia	4.1108	0.9530	0.0998	1.3925	1.4776	22.9692
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.5803	0.8540	-	-0.0684	0.3868	2.7737
			Quadrática	1.9773	0.9560	0.7001	0.3286	0.8801	4.4926
			Linex	1.7311	0.9560	1.6346	0.0824	0.8801	4.4926
			Entropia	1.6987	0.9560	0.0397	0.0499	0.8801	4.4926
	$r = 25$	α	Máxima Verossimilhança	2.2718	0.9610	-	0.2718	0.8290	3.7147
			Quadrática	2.8656	0.8530	1.8915	0.8656	1.5115	4.7480
			Linex	2.6238	0.8530	2.6448	0.6238	1.5115	4.7480
			Entropia	2.6644	0.8530	0.0209	0.6644	1.5115	4.7480
		θ_1	Máxima Verossimilhança	2.9735	0.8650	-	0.2552	-0.3525	6.2996
			Quadrática	2.0618	0.8710	0.9628	-0.6564	0.9104	4.6132
			Linex	1.8033	0.8710	1.7474	-0.9149	0.9104	4.6132
			Entropia	1.7736	0.8710	0.0395	-0.9446	0.9104	4.6132
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.6126	0.9100	-	-0.0360	0.6898	2.5354
			Quadrática	2.0500	0.9470	0.5666	0.4012	1.0692	3.9239
			Linex	1.8832	0.9470	1.7501	0.2344	1.0692	3.9239
			Entropia	1.8629	0.9470	0.0262	0.2141	1.0692	3.9239

Fonte:Elaborada pela autora.

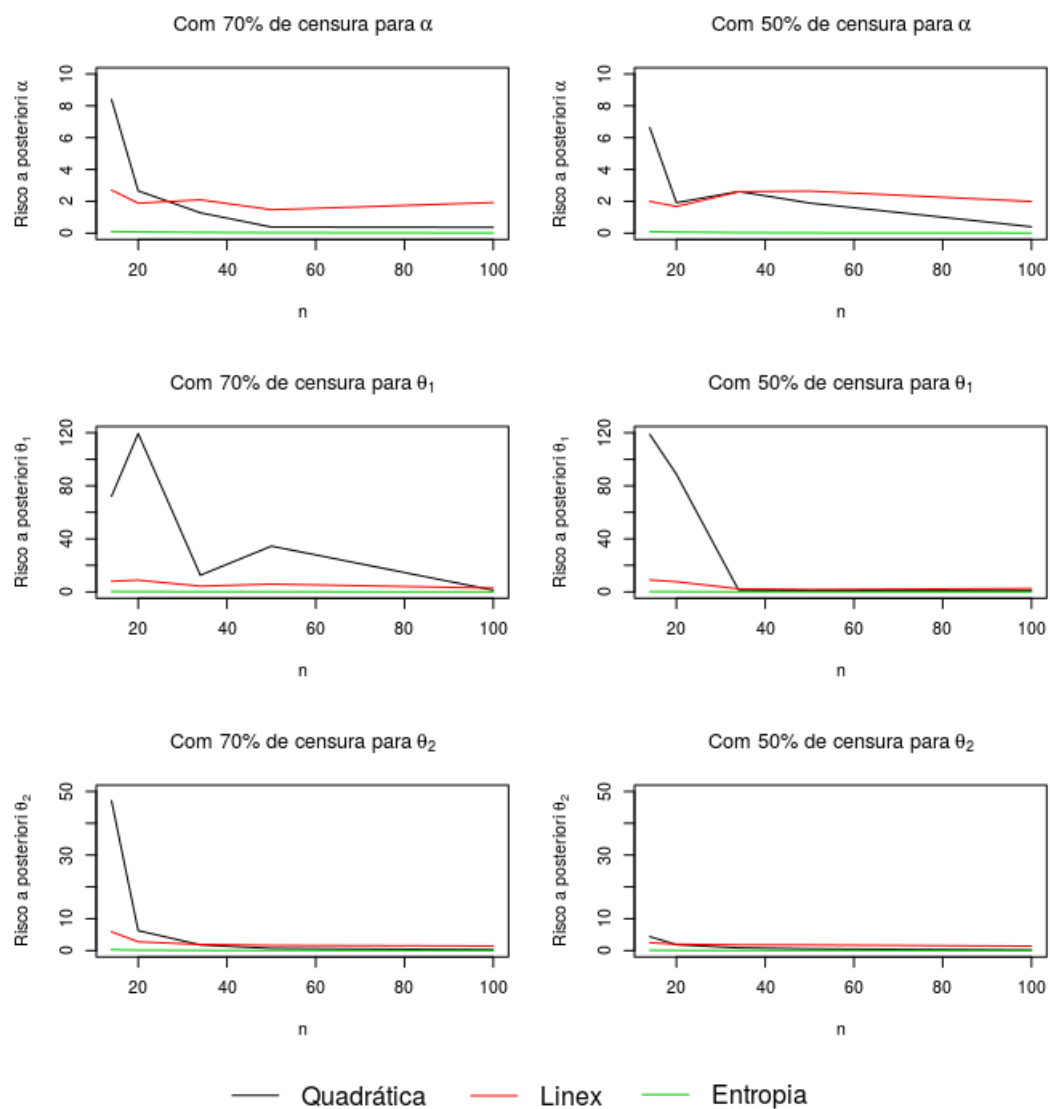
Tabela 5.5: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2, \theta_1 = 2.718282$, $\theta_2 = 1.648721$, $\tau_1 = 4$, $p = 0.5$ e $n = 100$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
100	30	α	Máxima Verossimilhança	2.1338	0.9460	-	0.1338	1.0556	3.2120
			Quadrática	2.1862	0.9500	0.3657	0.1862	1.2666	3.4402
			Linex	2.0776	0.9500	1.9237	0.0776	1.2666	3.4402
			Entropia	2.0679	0.9500	0.0159	0.0679	1.2666	3.4402
		θ_1	Máxima Verossimilhança	2.9187	0.8890	-	0.2004	0.2696	5.5677
			Quadrática	3.0783	0.9920	1.2364	0.3600	1.3104	7.1504
			Linex	2.5389	0.9920	2.8709	-0.1792	1.3104	7.1504
			Entropia	2.6080	0.9920	0.0427	-0.1102	1.3104	7.1504
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.6310	0.9140	-	-0.0176	0.8002	2.4617
			Quadrática	1.8010	0.9470	0.2616	0.1523	1.0523	3.0814
			Linex	1.7109	0.9470	1.4557	0.0622	1.0523	3.0814
			Entropia	1.6877	0.9470	0.0181	0.0390	1.0523	3.0814
	50	α	Máxima Verossimilhança	2.1160	0.9620	-	0.1160	1.1546	3.0775
			Quadrática	2.2420	0.9250	0.3988	0.2420	1.3861	3.3690
			Linex	2.1506	0.9250	1.9886	0.1506	1.3861	3.3690
			Entropia	2.1455	0.9250	0.0126	0.1455	1.3861	3.3690
		θ_1	Máxima Verossimilhança	2.8138	0.8990	-	0.0955	0.7495	4.8781
			Quadrática	2.7688	0.9720	0.7330	0.0505	1.3858	5.4876
			Linex	2.4529	0.9720	2.5546	-0.2653	1.3858	5.4876
			Entropia	2.4866	0.9720	0.0286	-0.2316	1.3858	5.4876
		θ_2	Máxima Verossimilhança	1.6433	0.9180	-	-0.0053	0.9864	2.3002
			Quadrática	1.7582	0.9480	0.1515	0.1095	1.1598	2.6688
			Linex	1.7071	0.9480	1.4158	0.0584	1.1598	2.6688
			Entropia	1.6911	0.9480	0.0109	0.0424	1.1598	2.6688

Fonte:Elaborada pela autora.

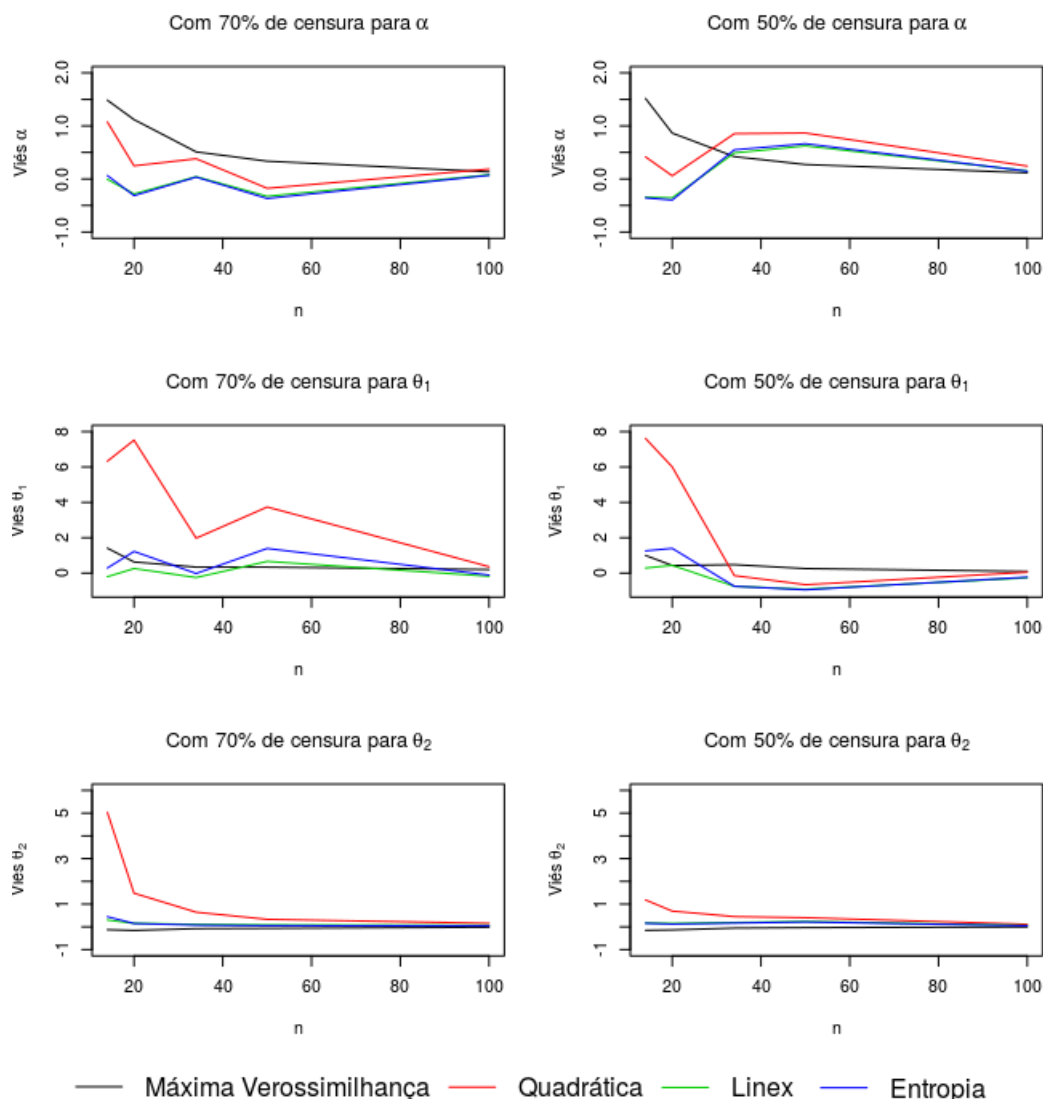
Antes de iniciarmos a explicação dos resultados apresentados nas tabelas, será apresentado duas figuras. A primeira figura trás os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de visualizarmos como está se comportando o risco a posteriori a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura. Já a segunda figura trás os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de observarmos agora como está se comportando o viés a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.

Figura 5.2: Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Figura 5.3: Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Comparando os resultados que foram apresentados nas tabelas 5.1 a 5.5, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia apresentaram boas probabilidades de cobertura, isto é, probabilidades de cobertura próximas de 95%.

Quando olhamos para os valores do risco a posteriori referente as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia, sendo estes valores apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 5.2, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, a função de perda de Entropia apresentou os melhores resultados, isto é, com um risco a posteriori próximo de zero. Portanto, a perda que se espera comentar estimando os parâmetros do modelo proposto considerando a função de perda Entropia, é bem menor quando comparado com as outras funções de perda.

Observando ainda a Figura 5.2 é interessante notarmos que para amostras de tamanho pequeno a função de perda Quadrática, usualmente utilizada em estudos de inferência Bayesiana, apresentou valores altos do risco a posteriori quando comparado com a função

de perda de Entropia, ressaltando mais uma vez a importância de se trabalhar com essa função assimétrica.

Quando olhamos para os valores do viés apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 5.3, podemos perceber para amostras pequenas e considerando 50% de censura, o método bayesiano apresentou um bom resultado, isto é, com um viés próximo de zero para o parâmetro α . Contudo a medida que o tamanho amostral aumenta tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano apresentaram resultados satisfatórios. Agora considerando 70% de censura para o parâmetro α , podemos perceber que o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados.

Já para o parâmetro θ_1 e considerando 70% de censura, podemos perceber que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados bons e próximos de zero. Agora quando consideramos 50% de censura, podemos perceber que o método de máxima verossimilhança apresentou um melhor desempenho. Por fim, para o parâmetro θ_2 tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram um desempenho similar e um viés mais próximo de zero. Podemos perceber também que quando consideramos 50% de censura, obtemos um viés menor do que quando consideramos 70% de censura.

Ao compararmos as estimativas realizadas por cada método, podemos perceber que tanto o método clássico quanto o método bayesiano (com funções de perda Linex e Entropia), para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura, se aproximaram razoavelmente do verdadeiro valor dos parâmetros que são $\alpha = 2$, $\theta_1 = 2.718282$ e $\theta_2 = 1.648721$. Podemos perceber, que a medida que o tamanho amostral aumenta essas estimativas pontuais tendem a se aproximar cada vez mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Por meio das tabelas apresentadas, é possível observar que para alguns tamanhos amostrais, o limite inferior do intervalo de confiança de 95% obtido para os parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança é um valor negativo, embora esses parâmetros assumam apenas valores positivos.

Sendo assim, de um modo geral podemos concluir que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados, isto é, ambos os métodos se aproximaram do verdadeiro valor dos parâmetros, com os menores riscos a posteriori, com os menores viés e as melhores probabilidades de cobertura.

Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II

Neste capítulo apresentaremos toda formulação teórica e matemática que foi necessária para realizar a construção do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II considerando uma distribuição Gama.

Seguindo a mesma motivação do capítulo 5, vamos apresentar toda análise clássica desenvolvida, desde os estimadores de Máxima Verossimilhança para o modelo proposto, até a distribuição assintótica dos mesmos.

Mostraremos também toda análise clássica e bayesiana desenvolvida para realizar a estimação dos parâmetros do modelo considerando uma situação que há 3 níveis de estresse.

6.1 Descrição do modelo

O modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, nada mais é do que uma generalização do modelo step-stress simples apresentado no capítulo 5, em outras palavras, este modelo é utilizado quando estamos em uma situação com m níveis de estresse.

Para construir o modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, vamos utilizar novamente o modelo de exposição cumulativa. Ademais, vamos assumir que os tempos de falha observados em cada nível de estresse x_k , para $k = 1, \dots, m$, seguem uma distribuição Gama com parâmetro de forma comum α e parâmetro de escala θ_k . Veja que m representa o número de níveis de estresse utilizados.

Para entendermos melhor a ideia do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, vamos imaginar a situação em que começamos com n unidades em teste, na qual essas unidades são submetidas a um nível de estresse inicial x_1 . Feito isso, essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1 . Após esse tempo, as unidades que não falharam serão submetidas a um nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_2 , e estas permaneceram nesse nível até um tempo pré-determinado τ_2 . Novamente, após esse tempo as unidades que não falharam serão submetidas a um novo nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_3 , e este processo continua seguindo essa ideia até observarmos um número fixo de r falhas.

Como estamos considerando um caso de censura progressiva tipo II, após ocorrer a primeira falha, serão retirados r_1 itens dos $(n - 1)$ restantes que ainda não falharam, permanecendo no estudo um total de $n - r_1 - 1$ elementos. Pensando agora no caso em que ocorra a segunda falha, de modo que iremos retirar r_2 itens dos $n - r_1 - 2$ que ainda

restam, permanecendo no estudo um total de $n - r_1 - r_2 - 2$ elementos. Seguindo esse mesmo processo até que ocorra a r -ésima falha, é fácil ver que no momento que ocorrer a r -ésima falha, todos os $r_r = n - r_1 - r_2 - \dots - r_{r-1} - r$ itens restantes que estão em funcionamento serão censurados, uma vez que já observamos as r falhas de interesse.

Em suma, o experimento que pode ser modelado por este modelo inicia-se em um nível de estresse x_1 , e vai sendo alterado para um nível de estresse $x_2, x_3, \dots, x_m$, em tempos pré-determinados na qual podemos denotar por $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$. O experimento só acabará quando r unidades falharem, de modo que após ocorrer cada falha, r_i unidades são retiradas do experimento, em que $i = 1, \dots, r - 1$.

Vamos denotar por N_1 o número de unidades que falharam no primeiro nível de estresse, por N_2 o número de unidades que falharam no segundo nível de estresse e por N_k , o número de unidades que falharam no k -ésimo nível de estresse, em que $k = 1, 2, \dots, m$. Vamos indicar por r ($r < n$) o número de falhas que desejamos obter e r_i , de $i = 1, \dots, r - 1$, o número de unidades que iremos retirar após a i -ésima falha.

Para construir o modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, vamos indicar por F_k a função de distribuição dos tempos de falha no nível de estresse x_k , em que $k = 1, 2, \dots, m$. Além do mais, vamos considerar que θ_k é o parâmetro de escala associado a F_k .

Sendo assim, a função de distribuição acumulada do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II considerando a distribuição Gama, para os níveis de estresse $x_1, x_2, \dots, x_m$, é dado por:

$$F_k(\zeta_k) = \int_0^{\zeta_k} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad (6.1)$$

em que $\zeta_k = \frac{t - \tau_{k-1}}{\theta_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\Delta_j}{\theta_j}$, para $k = 1, 2, \dots, m$ e $\tau_{k-1} \leq t < \tau_k$. E com $\Delta_l = \tau_l - \tau_{l-1}$, sendo $\tau_0 = 0$, $t > 0$, $\alpha > 0$ e $\theta_k > 0$. A função densidade de probabilidade deste modelo pode ser obtida derivando a equação (6.1) em relação a t , isto é:

$$f_k(\zeta_k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_k} \zeta_k^{\alpha-1} e^{-\zeta_k}, \quad (6.2)$$

em que $\tau_{k-1} \leq t < \tau_k$.

6.2 Análise Clássica do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II

Para realizar a análise clássica considerando este modelo, iremos utilizar o método de Máxima Verossimilhança.

Vamos considerar uma amostra aleatória como apresentado em (4.1). Como visto na subseção 1.4.2, a função de verossimilhança para α e θ_k , de $k = 1, 2, \dots, m$, baseado em uma amostra com censura progressiva tipo II, pode ser escrita do seguinte modo:

$$L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}) = C \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} f_k(t_{i_k}) \{1 - F_k(t_{i_k})\}^{r_{i_k}} \right\}, \quad (6.3)$$

em que $C = n(n - r_1 - 1) \dots (n - r_1 - \dots - r_{r-1} - r + 1)$, $n_0 = 0$, $n_k = \sum_{i=1}^k N_i$, para $k = 1, 2, \dots, m - 1$ e $n_m = r$.

Como discutido na seção 5.2, vamos considerar que as r_i unidades retiradas do experimento são aleatórias e independentes uma das outras. Vamos considerar também que o número de unidades removidas em cada tempo de falha tem uma distribuição Binomial com probabilidade de remoção p .

Sendo assim, a função de verossimilhança apresentada em (6.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}, \mathbf{r}) = C \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} f_k(t_{i_k}) \{1 - F_k(t_{i_k})\}^{r_{i_k}} \right\} P(\mathbf{R} = \mathbf{r}), \quad (6.4)$$

em que:

$$P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) = \frac{(n-r)!}{\left(n-r-\sum_{i=1}^{r-1} r_i\right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} p^{\sum_{i=1}^{r-1} r_i} (1-p)^{(r-1)(n-r)-\sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i}. \quad (6.5)$$

Como dito anteriormente, para construção deste modelo estamos considerando que os tempos de falha em todos os m níveis de estresse seguem uma distribuição Gama. Sendo assim, utilizando as expressões apresentadas em (6.1) e (6.2), faz-se possível construir a função de verossimilhança para $\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, isto é:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= \frac{C(n-r)!}{\left(n-r-\sum_{i=1}^{r-1} r_i\right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^r} \\ &\times \left(\prod_{k=1}^m \frac{1}{\theta_k^{N_k}} \right) \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} (\zeta_{i_k})^{\alpha-1} \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} \zeta_{i_k} \right] \right\} \\ &\times \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} [1 - F_k(\zeta_{i_k})]^{r_{i_k}} \right\} p^{\sum_{i=1}^{r-1} r_i} \\ &\times (1-p)^{(r-1)(n-r)-\sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

em que $\zeta_{i_k} = \frac{t_{i_k} - \tau_{k-1}}{\theta_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\Delta_j}{\theta_j}$, para $k = 1, 2, \dots, m$. E com $\Delta_l = \tau_l - \tau_{l-1}$, sendo $\tau_0 = 0$, $t > 0$, $\alpha > 0$ e $\theta_k > 0$.

Vale ressaltar que r é o número total de unidades que falharam, N_k é o número de unidades que falharam no k -ésimo nível de estresse, t_{i_k} são os tempos de falha das unidades no k -ésimo nível de estresse e r_i é o número de unidades removidas após cada falha.

A função log-verossimilhança pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= \ln [L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}, \mathbf{r})] \\
 &= \ln \left[\frac{C(n-r)!}{\left(n-r-\sum_{i=1}^{r-1} r_i \right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \right] - r \ln [\Gamma(\alpha)] - \sum_{k=1}^m N_k \ln(\theta_k) \\
 &+ (\alpha-1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} \ln(\zeta_{i_k}) \right\} - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} \zeta_{i_k} \right] \\
 &+ \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} r_{i_k} \ln [1 - F_k(\zeta_{i_k})] \right] + \sum_{i=1}^{r-1} r_i \ln(p) \\
 &+ \left[(r-1)(n-r) - \sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i \right] \ln(1-p).
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Derivando a equação (6.7) em relação aos parâmetros de interesse α e θ_k e igualando a zero, teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha} &= -r\psi(\alpha) + \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} \ln(\zeta_{i_k}) \right\} \\
 &+ \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{r_{i_k}}{[1 - F_k(\zeta_{i_k})]} [\psi(\alpha)F_k(\zeta_{i_k}) - D_1(\zeta_{i_k})] \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_j} &= -\frac{N_j}{\theta_j} + (\alpha-1) \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{1}{\zeta_{i_k}} \frac{\partial}{\partial \theta_j}(\zeta_{i_k}) \right\} \\
 &- \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} \frac{\partial}{\partial \theta_j}(\zeta_{i_k}) \right] \\
 &+ \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{r_{i_k}}{[1 - F_k(\zeta_{i_k})]} \frac{\partial}{\partial \theta_j} [1 - F_k(\zeta_{i_k})] \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Em que $j = 1, \dots, m$, $\psi(\alpha) = \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}$ e $D_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx$.

Assim as equações apresentadas em (6.8) e (6.9) são chamadas de equações de verossimilhança. Logo, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , e θ_j , podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações. Como este sistema não pode ser resolvendo analiticamente, faz-se necessário a utilização de métodos iterativos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

Como discutido na seção 1.4.1, faz-se possível obter a distribuição assintótica desses estimadores, de modo que os elementos da matriz de informação de Fisher apresentado em (1.12) podem ser expressos da seguinte forma:

$$I_{ij}(\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = -\frac{\partial^2}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} l(\Theta | \mathbf{t}), \quad (6.10)$$

em que $i, j = 1, 2, \dots, p$, $\Theta = (\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ e $p = m + 1$ o número de parâmetros a serem estimados.

Para um melhor entendimento vamos considerar um caso em que temos 3 níveis de estresse ($m = 3$). Isto é, vamos imaginar a situação em que começamos com n unidades em teste, na qual essas unidades são submetidas a um nível de estresse inicial x_1 . Feito isso, essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1 . Após esse tempo, as unidades que não falharam serão submetidas a um nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_2 , e estas permaneceram nesse nível até um tempo pré-determinado τ_2 . Feito isso, novamente após esse tempo as unidades que não falharam serão submetidas a um novo nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_3 .

Como estamos em um caso de censura progressiva tipo II, o experimento só acabará quando r unidades falharem, de modo que após cada falha será retirado r_i unidades do experimento, em que $i = 1, \dots, r - 1$. Neste caso, vamos denotar por N_1 o número de unidades que falharam no primeiro nível de estresse, N_2 o número de unidades que falharam no segundo nível de estresse e por N_3 o número de unidades que falharam no terceiro nível de estresse.

Podemos simplificar a equação apresentada em (6.6) para o caso em que temos 3 níveis de estresse. Deste modo a função de verossimilhança para α , θ_1 , θ_2 e θ_3 é dada por:

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= \frac{C(n-r)!}{\left(n-r-\sum_{i=1}^{r-1} r_i\right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^r} \left(\frac{1}{\theta_1^{N_1}}\right) \left(\frac{1}{\theta_2^{N_2}}\right) \left(\frac{1}{\theta_3^{N_3}}\right) \\
&\times \left\{ \prod_{i_1=1}^{N_1} (\zeta_{i_1})^{\alpha-1} \right\} \left\{ \prod_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} (\zeta_{i_2})^{\alpha-1} \right\} \left\{ \prod_{i_3=N_1+N_2+1}^r (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} \right\} \\
&\times \exp \left\{ -\sum_{i_1=1}^{N_1} \zeta_{i_1} - \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \zeta_{i_2} - \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \zeta_{i_3} \right\} \\
&\times \left\{ \prod_{i_1=1}^{N_1} [1 - F_1(\zeta_{i_1})]^{r_{i_1}} \right\} \left\{ \prod_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} [1 - F_2(\zeta_{i_2})]^{r_{i_2}} \right\} \\
&\times \left\{ \prod_{i_3=N_1+N_2+1}^r [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^{r_{i_3}} \right\} p^{\sum_{i=1}^{r-1} r_i} (1-p)^{(r-1)(n-r) - \sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

A função log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r}) &= \ln [L(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})] \\
&= \ln \left[\frac{C(n-r)!}{\left(n-r-\sum_{i=1}^{r-1} r_i\right)! \prod_{i=1}^{r-1} r_i!} \right] - r \ln [\Gamma(\alpha)] - N_1 \ln(\theta_1) - N_2 \ln(\theta_2) \\
&- N_3 \ln(\theta_3) + (\alpha-1) \sum_{i_1=1}^{N_1} \ln(\zeta_{i_1}) + (\alpha-1) \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \ln(\zeta_{i_2}) \\
&+ (\alpha-1) \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \ln(\zeta_{i_3}) - \sum_{i_1=1}^{N_1} (\zeta_{i_1}) - \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} (\zeta_{i_2}) \\
&- \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r (\zeta_{i_3}) + \sum_{i_1=1}^{N_1} r_{i_1} \ln [1 - F_1(\zeta_{i_1})] + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} r_{i_2} \ln [1 - F_2(\zeta_{i_2})] \\
&+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r r_{i_3} \ln [1 - F_3(\zeta_{i_3})] + \sum_{i=1}^{r-1} r_i \ln(p) \\
&+ \left[(r-1)(n-r) - \sum_{i=1}^{r-1} (r-i)r_i \right] \ln(1-p),
\end{aligned} \tag{6.12}$$

em que $\zeta_{i_k} = \frac{t_{i_k} - \tau_{k-1}}{\theta_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\Delta_j}{\theta_j}$, para $k = 1, 2, 3$. E com $\Delta_l = \tau_l - \tau_{l-1}$ e $\tau_0 = 0$.

Derivando a equação (6.12) em relação aos parâmetros de interesse α , θ_1 , θ_2 e θ_3 e igualando a zero, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha} &= -r\psi(\alpha) + \sum_{i_1=1}^{N_1} \ln \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1} \right) + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \ln \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right) \\
&+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \ln \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{N_1} \frac{r_{i_1} [\psi(\alpha) F_1(\zeta_{i_1}) - D_1(\zeta_{i_1})]}{[1 - F_1(\zeta_{i_1})]} \\
&+ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2} [\psi(\alpha) F_2(\zeta_{i_2}) - D_1(\zeta_{i_2})]}{[1 - F_2(\zeta_{i_2})]} \\
&+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3} [\psi(\alpha) F_3(\zeta_{i_3}) - D_1(\zeta_{i_3})]}{[1 - F_3(\zeta_{i_3})]} = 0.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1} &= -\frac{(\alpha - 1)N_1}{\theta_1} - (\alpha - 1) \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2} + \frac{\tau_1}{\theta_1} \right)^{-1} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] \\
&- (\alpha - 1) \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] \\
&+ \sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\frac{t_{i_1}}{\theta_1^2} \right) + \frac{N_2 \tau_1}{\theta_1^2} + \frac{N_3 \tau_1}{\theta_1^2} - \frac{N_1}{\theta_1} \\
&+ \sum_{i_1=1}^{N_1} \frac{r_{i_1} t_{i_1} (\zeta_{i_1})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_1}}}{[1 - F_1(\zeta_{i_1})] \Gamma(\alpha) \theta_1^2} + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2} (\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2} \tau_1}}{[1 - F_2(\zeta_{i_2})] \Gamma(\alpha) \theta_1^2} \\
&+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3} (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3} \tau_1}}{[1 - F_3(\zeta_{i_3})] \Gamma(\alpha) \theta_1^2} = 0.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2} &= -\frac{N_2}{\theta_2} - (\alpha - 1) \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{1}{\zeta_{i_2}} \frac{(t_{i_2} - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] \\
&+ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \left(\frac{t_{i_2} - \tau_1}{\theta_2^2} \right) + \frac{N_3(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2} \\
&- (\alpha - 1) \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{1}{\zeta_{i_3}} \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] \\
&+ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2}(\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}}(t_{i_2} - \tau_1)}{[1 - F_2(\zeta_{i_2})]\Gamma(\alpha)\theta_2^2} \\
&+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}(\tau_2 - \tau_1)}{[1 - F_3(\zeta_{i_3})]\Gamma(\alpha)\theta_2^2} = 0.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_3} &= -(\alpha - 1) \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3} + \frac{\tau_1}{\theta_1} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2} \right)^{-1} \right. \\
&\times \left. \frac{(t_{i_3} - \tau_2)}{\theta_3^2} \right] - \frac{N_3}{\theta_3} + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \left(\frac{t_{i_3} - \tau_2}{\theta_3^2} \right) \\
&+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}(t_{i_3} - \tau_2)}{[1 - F_3(\zeta_{i_3})]\Gamma(\alpha)\theta_3^2} = 0.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Deste modo, as equações apresentadas em (6.13), (6.14), (6.15) e (6.16) são chamadas de equações de verossimilhança. Assim, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , θ_1 , θ_2 e θ_3 podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações utilizando métodos iterativos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

6.2.1 Intervalos de Confiança Aproximados

Pela teoria de inferência clássica e baseado em Bolfarine e Sandoval (2001), dado o vetor de parâmetros $\Theta = (\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, um tamanho amostral grande e com algumas condições de regularidade sendo satisfeitas, temos que a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (EMV) de Θ é:

$$(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_4(0, I^{-1}(\Theta)), \tag{6.17}$$

de modo que estes estimadores são assintoticamente não viciados. A matriz de variância e covariância desses estimadores é dado por $I^{-1}(\Theta)$, que é inversa da matriz de informação de Fisher observada, na qual podemos representar essa matriz da seguinte forma:

$$I^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} -I_{11} & -I_{12} & -I_{13} & -I_{14} \\ -I_{21} & -I_{22} & -I_{23} & -I_{24} \\ -I_{31} & -I_{32} & -I_{33} & -I_{34} \\ -I_{41} & -I_{42} & -I_{43} & -I_{44} \end{pmatrix}^{-1}, \tag{6.18}$$

em que $I_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} l(\Theta|\mathbf{t})$, para $i, j = 1, \dots, 4$. Os elementos da matriz de informação de Fisher observada são:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha^2} \\
 &= -r(\psi(\alpha))' + \sum_{i_1=1}^{N_1} \frac{r_{i_1}}{[1 - F_1(\zeta_{i_1})]^2} \{[(\psi'(\alpha) - (\psi(\alpha))^2) F_1(\zeta_{i_1}) \\
 &\quad + 2\psi(\alpha)D_1(\zeta_{i_1}) - D_2(\zeta_{i_1})](1 - F_1(\zeta_{i_1})) - [\psi(\alpha)F_1(\zeta_{i_1}) - D_1(\zeta_{i_1})]^2\} \\
 &\quad + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2}}{[1 - F_2(\zeta_{i_2})]^2} \{[(\psi'(\alpha) - (\psi(\alpha))^2) F_2(\zeta_{i_2}) \\
 &\quad + 2\psi(\alpha)D_1(\zeta_{i_2}) - D_2(\zeta_{i_2})](1 - F_2(\zeta_{i_2})) - [\psi(\alpha)F_2(\zeta_{i_2}) - D_1(\zeta_{i_2})]^2\} \\
 &\quad + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}}{[1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \{[(\psi'(\alpha) - (\psi(\alpha))^2) F_3(\zeta_{i_3}) \\
 &\quad + 2\psi(\alpha)D_1(\zeta_{i_3}) - D_2(\zeta_{i_3})](1 - F_3(\zeta_{i_3})) - [\psi(\alpha)F_3(\zeta_{i_3}) - D_1(\zeta_{i_3})]^2\}.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12} = I_{21} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \theta_1} \\
 &= -\frac{N_1}{\theta_1} - \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{1}{\zeta_{i_2}} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] - \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{1}{\zeta_{i_3}} \frac{\tau_1}{\theta_1^2} \right] \\
 &\quad + \sum_{i_1=1}^{N_1} \frac{r_{i_1}(t_{i_1})(\zeta_{i_1})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_1}}}{\Gamma(\alpha)\theta_1^2[1 - F_1(\zeta_{i_1})]^2} \{[1 - F_1(\zeta_{i_1})] \ln(\zeta_{i_1}) - \psi(\alpha) \\
 &\quad + D_1(\zeta_{i_1})\} + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2}(\tau_1)(\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}}}{\Gamma(\alpha)\theta_1^2[1 - F_2(\zeta_{i_2})]^2} \{[1 - F_2(\zeta_{i_2})] \ln(\zeta_{i_2}) \\
 &\quad - \psi(\alpha) + D_1(\zeta_{i_2})\} + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\tau_1)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha)\theta_1^2[1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \\
 &\quad \times \{[1 - F_3(\zeta_{i_3})] \ln(\zeta_{i_3}) - \psi(\alpha) + D_1(\zeta_{i_3})\}.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} = I_{31} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \theta_2} \\
&= - \left[\sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{1}{\zeta_{i_2}} \frac{(t_{i_2} - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] - \left[\sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{1}{\zeta_{i_3}} \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2} \right] \\
&+ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2}(t_{i_2} - \tau_1)(\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}}}{\Gamma(\alpha) \theta_2^2 [1 - F_2(\zeta_{i_2})]^2} \{ [1 - F_2(\zeta_{i_2})] \ln(\zeta_{i_2}) - \psi(\alpha) \\
&+ D_1(\zeta_{i_2}) \} + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\tau_2 - \tau_1)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha) \theta_2^2 [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \\
&\times \{ [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \ln(\zeta_{i_3}) - \psi(\alpha) + D_1(\zeta_{i_3}) \}. \tag{6.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{14} = I_{41} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \theta_3} \\
&= - \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{1}{\zeta_{i_3}} \frac{(t_{i_3} - \tau_2)}{\theta_3^2} + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(t_{i_3} - \tau_2)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha) \theta_3^2 [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \\
&\times \{ [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \ln(\zeta_{i_3}) - \psi(\alpha) + D_1(\zeta_{i_3}) \}. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1^2} \\
&= \frac{N_1}{\theta_1^2} + \frac{(\alpha - 1)N_1}{\theta_1^2} + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{2\tau_1}{\theta_1^3 \zeta_{i_2}} - \frac{\tau_1^2}{\theta_1^4 \zeta_{i_2}^2} \right\} \\
&+ (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{2\tau_1}{\theta_1^3 \zeta_{i_3}} - \frac{\tau_1^2}{\theta_1^4 \zeta_{i_3}^2} \right\} - 2 \sum_{i_1=1}^{N_1} \frac{t_{i_1}}{\theta_1^3} - \frac{2N_2\tau_1}{\theta_1^3} - \frac{2N_3\tau_1}{\theta_1^3} \\
&+ \sum_{i_1=1}^{N_1} \frac{r_{i_1}(t_{i_1})(\zeta_{i_1})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_1}}}{\Gamma(\alpha) \theta_1^4 [1 - F_1(\zeta_{i_1})]^2} \left\{ -\frac{t_{i_1}}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_1})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_1}} + [(1 - \zeta_{i_1}^{-1}(\alpha - 1))t_{i_1} \right. \\
&- 2\theta_1] [1 - F_1(\zeta_{i_1})] \} + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2}(\tau_1)(\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}}}{\Gamma(\alpha) \theta_1^4 [1 - F_2(\zeta_{i_2})]^2} \left\{ -\frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}} \right. \\
&+ [(1 - \zeta_{i_2}^{-1}(\alpha - 1))\tau_1 - 2\theta_1] [1 - F_2(\zeta_{i_2})] \} + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\tau_1)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha) \theta_1^4 [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \\
&\times \left\{ -\frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}} + [(1 - \zeta_{i_3}^{-1}(\alpha - 1))\tau_1 - 2\theta_1] [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \right\}. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{23} = I_{32} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\
&= -(\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_1=N_1+1}^{N_2} \frac{(t_{i_2} - \tau_1) \tau_1}{\theta_1^2 \theta_2^2 \zeta_{i_2}^2} \right\} \\
&\quad - (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{(\tau_2 - \tau_1) \tau_1}{\theta_1^2 \theta_2^2 \zeta_{i_3}^2} \right\} \\
&\quad + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2}(\tau_1)(t_{i_2} - \tau_1)(\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}}}{\Gamma(\alpha) \theta_1^2 \theta_2^2 [1 - F_2(\zeta_{i_2})]^2} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}} \right. \\
&\quad \left. + [1 - \zeta_{i_2}^{-1}(\alpha - 1)] [1 - F_2(\zeta_{i_2})] \right\} \\
&\quad + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha) \theta_1^2 \theta_2^2 [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}} \right. \\
&\quad \left. + [1 - \zeta_{i_3}^{-1}(\alpha - 1)] [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
I_{24} = I_{42} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} \\
&= -\frac{(\alpha - 1) \tau_1}{\theta_1^2 \theta_3^2} \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{t_{i_3} - \tau_2}{\zeta_{i_3}^2} \\
&\quad + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\tau_1)(t_{i_3} - \tau_2)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha) \theta_1^2 \theta_3^2 [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}} \right. \\
&\quad \left. + [1 - \zeta_{i_3}^{-1}(\alpha - 1)] [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
I_{34} = I_{43} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} \\
&= -(\alpha - 1) \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{(t_{i_3} - \tau_2)(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^2 \theta_3^2 \zeta_{i_3}^2} \\
&\quad + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\tau_2 - \tau_1)(t_{i_3} - \tau_2)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha) \theta_2^2 \theta_3^2 [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}} \right. \\
&\quad \left. + [1 - \zeta_{i_3}^{-1}(\alpha - 1)] [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_2^2} \\
&= \frac{N_2}{\theta_2^2} + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_2=N_1+1}^{N_2} \frac{2(t_{i_2} - \tau_1)}{\theta_2^3 \zeta_{i_2}} - \frac{(t_{i_2} - \tau_1)^2}{\theta_2^4 \zeta_{i_2}^2} \right\} \\
&+ (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^3 \zeta_{i_3}} - \frac{(\tau_2 - \tau_1)^2}{\theta_2^4 \zeta_{i_3}^2} \right\} + \frac{2N_2\tau_1}{\theta_2^3} - \frac{2}{\theta_2^3} \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} t_{i_2} \\
&- \frac{2N_3(\tau_2 - \tau_1)}{\theta_2^3} + \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{r_{i_2}(t_{i_2} - \tau_1)(\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}}}{\Gamma(\alpha)\theta_2^4[1 - F_2(\zeta_{i_2})]^2} \left\{ -\frac{(t_{i_2} - \tau_1)}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_2})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_2}} \right. \\
&+ \left. [(1 - \zeta_{i_2}^{-1}(\alpha - 1))(t_{i_2} - \tau_1) - 2\theta_2] [1 - F_2(\zeta_{i_2})] \right\} \\
&+ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(\tau_2 - \tau_1)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha)\theta_2^4[1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \left\{ -\frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}} \right. \\
&+ \left. [(1 - \zeta_{i_3}^{-1}(\alpha - 1))(\tau_2 - \tau_1) - 2\theta_2] [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}
I_{44} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}, \mathbf{r})}{\partial \theta_3^2} \\
&= \frac{N_3}{\theta_3^2} + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{2(t_{i_3} - \tau_2)}{\theta_3^3 \zeta_{i_3}} - \frac{(t_{i_3} - \tau_2)^2}{\theta_3^4 \zeta_{i_3}^2} \right\} + \frac{2N_3\tau_2}{\theta_3^3} \\
&- \frac{2}{\theta_3^3} \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r t_{i_3} + \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r \frac{r_{i_3}(t_{i_3} - \tau_2)(\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}}}{\Gamma(\alpha)\theta_3^4[1 - F_3(\zeta_{i_3})]^2} \\
&\times \left\{ -\frac{(t_{i_3} - \tau_2)}{\Gamma(\alpha)} (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} e^{-\zeta_{i_3}} + [(1 - \zeta_{i_3}^{-1}(\alpha - 1))(t_{i_3} - \tau_2) - 2\theta_3] \right. \\
&\times \left. [1 - F_3(\zeta_{i_3})] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Em que:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}, \\
D_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x} dx, \\
D_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx.
\end{aligned}$$

Assim após obter a matriz de informação de Fisher, faz-se possível construir intervalos de confiança assintóticos aproximados para os parâmetros α , θ_1 , θ_2 e θ_3 .

Sendo assim, os intervalos de confiança assintóticos com nível $100(1 - \gamma)\%$ podem ser construídos do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
& \hat{\alpha}_{EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{EMV})} \\
& \hat{\theta}_{1EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{1EMV})} \\
& \hat{\theta}_{2EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{2EMV})} , \\
& \hat{\theta}_{3EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{3EMV})}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

6.3 Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II

Apresentaremos nessa seção toda análise bayesiana realizada utilizando o modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II e considerando a distribuição Gama, na qual mostraremos as distribuições a priori que foram utilizadas e também a distribuição a posteriori obtida.

Ao olharmos para os parâmetros do modelo construído quando consideramos o caso particular de $m = 3$, temos que estes parâmetros são desconhecidos e pertencem ao espaço paramétrico de $\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$, tornando-se razoável assumir uma distribuição a priori Gama para os quatro parâmetros.

A expressão da distribuição a priori para cada parâmetro desse modelo, como também a construção da distribuição a priori conjunta é a mesma apresentada na seção 4.

Deste modo, seguindo a mesma ideia apresentada na seção 4, temos que a distribuição a posteriori para os parâmetros $\alpha, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 pode ser representado de forma proporcional ao produto da função de verossimilhança (6.11) e da distribuição a priori conjunta (4.31), resultado em:

$$\begin{aligned}
p(\alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3 | \mathbf{t}) & \propto \frac{\alpha^{a_1-1} \theta_1^{a_2-1} \theta_2^{a_3-1} \theta_3^{a_4-1}}{[\Gamma(\alpha)]^r \theta_1^{N_1} \theta_2^{N_2} \theta_3^{N_3}} \left\{ \prod_{i_1=1}^{N_1} (\zeta_{i_1})^{\alpha-1} \right\} \left\{ \prod_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} (\zeta_{i_2})^{\alpha-1} \right\} \\
& \times \left\{ \prod_{i_3=N_1+N_2+1}^r (\zeta_{i_3})^{\alpha-1} \right\} \exp \left\{ - \sum_{i_1=1}^{N_1} (\zeta_{i_1}) - \sum_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} (\zeta_{i_2}) \right. \\
& \left. - \sum_{i_3=N_1+N_2+1}^r (\zeta_{i_3}) - \left(\frac{\alpha}{b_1} + \frac{\theta_1}{b_2} + \frac{\theta_2}{b_3} + \frac{\theta_3}{b_4} \right) \right\} \\
& \times \left\{ \prod_{i_1=1}^{N_1} [1 - F_1(\zeta_{i_1})]^{r_{i_1}} \right\} \left\{ \prod_{i_2=N_1+1}^{N_1+N_2} [1 - F_2(\zeta_{i_2})]^{r_{i_2}} \right\} \\
& \times \left\{ \prod_{i_3=N_1+N_2+1}^r [1 - F_3(\zeta_{i_3})]^{r_{i_3}} \right\}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Veja que a densidade a posteriori apresentada em (6.30) é analiticamente complexa de ser tratada, fazendo-se necessário a utilização de métodos numéricos.

6.4 Estudo de simulação

Para a realização da comparação entre o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, será realizado simulações considerando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura.

A ideia desta simulação, é gerar várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente realizar a aplicação das duas metodologias, com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori e viés.

6.4.1 Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Múltiplo sob censura progressiva tipo II

Baseado em Balakrishnan e Sandhu (1995) e também em Ismail e Sarhan (2009), o algoritmo utilizado para gerar valores aleatórios do modelo step-stress múltiplo ($m = 3$) sob censura progressiva tipo II e considerando a distribuição Gama, é dado do seguinte modo:

1. Simular r valores a partir da distribuição Uniforme(0,1), $U_1, \dots, U_r$.
2. Gerar um número aleatório, R_1 , de uma $Binomial(n - r, p)$.
3. Para $i = 2, 3, \dots, r-1$, gere números aleatórios R_i de uma $Binomial\left(n - r - \sum_{l=1}^{i-1} R_l, p\right)$.
4. Defina R_r de acordo com a seguinte condição:

$$R_r = \begin{cases} n - r - \sum_{l=1}^{r-1} R_l, & n - r > \sum_{l=1}^{r-1} R_l \\ 0, & c.c \end{cases}$$

5. Defina $E_i = U_i^{1/(i + \sum_{d=r-i+1}^r R_d)}$, para $i = 1, \dots, r$.
6. Obtenha amostras de censura progressiva tipo II, na qual podemos denotar por $(U_1^*, \dots, U_m^*)$, em que $U_i^* = 1 - \prod_{d=r-i+1}^r E_d$, para $i = 1, \dots, r$.
7. Encontrar n_1 tal que $U_{n_1}^* \leq F_1(\tau) \leq U_{n_1+1}^*$.
8. Para $i \leq n_1$, faça $T_i = \theta_1 G^{-1}(U_i^*)$, onde $G(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.
9. Encontrar n_2 tal que $U_{n_1+n_2}^* \leq F_2(\tau_2) \leq U_{n_1+n_2+1}^*$.
10. Para $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$, faça $T_i = \theta_2 G^{-1}(U_i^*) + \tau_1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1$.
11. Para $n_1 + n_2 + 1 \leq i \leq r$, faça $T_i = \theta_3 G^{-1}(U_i^*) + \tau_2 - \frac{\theta_3}{\theta_2} \left(\tau_2 - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right)$.

Com o intuito de exemplificar toda a teoria que foi abordada até o momento, o nosso próximo objetivo é comparar o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, na qual será realizado simulações considerando diferentes tamanhos amostrais, isto é $n = (14, 20, 34, 50, 100)$, com 50% e 70% de censura.

A ideia desta simulação é a mesma que foi apresentada em outras seções, ou seja, gerar várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente realizar a aplicação das duas metodologias, com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros. Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), viés e risco a posteriori. Vale ressaltar que a descrição da simulação que foi realizada é a mesma apresentada na seção 5.4.2.

6.4.2 Resultados Numéricos

Os resultados obtidos utilizando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura, estão resumidos nas tabelas a seguir.

As estatísticas apresentadas nas tabelas são a Média (Estimativa), Risco a posteriori, Viés, Probabilidade de Cobertura (PC) e o Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 6.1: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 14$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
n = 14	r = 4	α	Máxima Verossimilhança	3.9588	0.9120	-	1.9588	-3.0284	10.9461
			Quadrática	3.2019	0.9530	32.2861	1.2019	0.3681	4.9718
			Linex	1.7934	0.9530	2.7532	-0.2065	0.3681	4.9718
			Entropia	1.9013	0.9530	0.1112	-0.0987	0.3681	4.9718
		θ_1	Máxima Verossimilhança	77.5612	0.8320	-	73.0796	-389.7090	544.8316
			Quadrática	24.5918	0.9990	579.4898	20.1101	0.4491	89.0798
			Linex	3.9437	0.9990	19.8997	-0.5379	0.4491	89.0798
			Entropia	7.0894	0.9990	0.3772	2.6077	0.4491	89.0798
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.8415	0.9270	-	1.1232	-6.6105	14.2936
			Quadrática	10.3958	1.0000	82.3799	7.6775	0.3656	36.8085
			Linex	2.9311	1.0000	9.1427	0.2128	0.3656	36.8085
			Entropia	3.6435	1.0000	0.2610	0.9252	0.3656	36.8085
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5801	0.6760	-	-0.0686	-1.7649	4.9252
			Quadrática	5.5213	0.9640	32.6304	3.8726	0.1449	17.1571
			Linex	1.7242	0.9640	4.864	0.0755	0.1449	17.1571
			Entropia	1.7455	0.9640	0.2836	0.0968	0.1449	17.1571
	r = 7	α	Máxima Verossimilhança	4.0260	0.9360	-	2.0260	-1.9802	10.0323
			Quadrática	3.1905	0.9490	13.8327	1.1905	0.3778	5.1486
			Linex	1.9199	0.9490	2.7750	-0.0800	0.3778	5.1486
			Entropia	1.9985	0.9490	0.1041	-0.0014	0.3778	5.1486
		θ_1	Máxima Verossimilhança	42.0060	0.7330	-	37.5243	-192.0621	276.0742
			Quadrática	17.9824	0.9830	363.8515	13.5007	0.4479	56.9736
			Linex	3.5354	0.9830	14.8036	-0.9462	0.4479	56.9736
			Entropia	5.8347	0.9830	0.3004	1.3530	0.4479	56.9736
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.3802	0.8140	-	0.6619	-5.2179	11.9783
			Quadrática	8.1733	0.9920	64.4546	5.4551	0.3960	21.5615
			Linex	2.6980	0.9920	7.1883	-0.0202	0.3960	21.5615
			Entropia	3.2959	0.9920	0.2030	0.5776	0.3960	21.5615
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5411	0.7700	-	-0.1075	-0.7194	3.8017
			Quadrática	3.6673	0.9640	12.3601	2.0185	0.2964	8.3914
			Linex	1.7893	0.9640	3.2337	0.1405	0.2964	8.3914
			Entropia	1.7817	0.9640	0.1628	0.1330	0.2964	8.3914

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 6.2: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 20$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
n = 20	r = 6	α	Máxima Verossimilhança	3.2386	0.9520	-	1.2386	-1.0457	7.5231
			Quadrática	2.7879	0.9690	8.1693	0.7879	0.4372	4.5516
			Linex	1.8835	0.9690	2.4173	-0.1164	0.4372	4.5516
			Entropia	1.9366	0.9690	0.0846	-0.0633	0.4372	4.5516
		θ_1	Máxima Verossimilhança	12.3770	0.7950	-	7.8953	-45.8893	70.6434
			Quadrática	17.5874	0.9910	310.1875	13.1057	0.5294	59.6581
			Linex	3.7067	0.9910	14.5674	-0.7749	0.5294	59.6581
			Entropia	5.9946	0.9910	0.2797	1.5129	0.5294	59.6581
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.0052	0.8830	-	0.2869	-3.0695	9.0800
			Quadrática	8.6869	0.9980	65.3407	5.9686	0.4053	26.0607
			Linex	2.7694	0.9980	7.6774	0.0511	0.4053	26.0607
			Entropia	3.3831	0.9980	0.2176	0.6648	0.4053	26.0607
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.4580	0.7270	-	-0.1906	-1.0040	3.9202
			Quadrática	4.4555	0.9660	20.0613	2.8067	0.2236	11.2218
			Linex	1.7150	0.9660	3.9195	0.0662	0.2236	11.2218
			Entropia	1.7032	0.9660	0.2207	0.0545	0.2236	11.2218
	r = 10	α	Máxima Verossimilhança	3.4194	0.9430	-	1.4194	-1.0241	7.8630
			Quadrática	2.8973	0.9460	10.2724	0.8973	0.4609	4.3801
			Linex	2.0144	0.9460	2.5095	0.0144	0.4609	4.3801
			Entropia	2.1072	0.9460	0.0773	0.1072	0.4609	4.3801
		θ_1	Máxima Verossimilhança	13.6106	0.7480	-	9.1289	-57.9015	85.1228
			Quadrática	14.9981	0.9730	263.8441	10.5165	0.5928	42.0890
			Linex	3.6501	0.9730	12.4958	-0.8315	0.5928	42.0890
			Entropia	5.7697	0.9730	0.2326	1.2881	0.5928	42.0890
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.2355	0.8360	-	0.5173	-2.6126	9.0838
			Quadrática	7.5907	0.9870	60.0658	4.8724	0.5362	15.8523
			Linex	2.8712	0.9870	6.6804	0.1530	0.5362	15.8523
			Entropia	3.5750	0.9870	0.1602	0.8567	0.5362	15.8523
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5056	0.7940	-	-0.1430	-0.2341	3.2454
			Quadrática	2.6645	0.9670	4.7852	1.0158	0.3976	5.4408
			Linex	1.7359	0.9670	2.2866	0.0872	0.3976	5.4408
			Entropia	1.7035	0.9670	0.1029	0.0548	0.3976	5.4408

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 6.3: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 34$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
n = 34	r = 10	α	Máxima Verossimilhança	2.6664	0.9660	-	0.6664	0.0483	5.2846
			Quadrática	2.4213	0.9590	2.8667	0.4213	0.5752	3.9269
			Linex	1.9577	0.9590	2.1013	-0.0422	0.5752	3.9269
			Entropia	1.9732	0.9590	0.0541	-0.0267	0.5752	3.9269
		θ_1	Máxima Verossimilhança	7.4108	0.8040	-	2.9291	-17.7372	32.5589
			Quadrática	13.5231	0.9710	199.1373	9.0414	0.7253	35.2902
			Linex	3.8014	0.9710	11.3880	-0.6802	0.7253	35.2902
			Entropia	5.8236	0.9710	0.1917	1.3419	0.7253	35.2902
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.1845	0.8830	-	0.4662	-2.2402	8.6092
			Quadrática	7.5203	0.9860	57.4812	4.8020	0.5516	16.0104
			Linex	2.8787	0.9860	6.6377	0.1604	0.5516	16.0104
			Entropia	3.5550	0.9860	0.1567	0.8367	0.5516	16.0104
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5749	0.8040	-	-0.0737	-0.2898	3.4397
			Quadrática	2.8931	0.9600	6.5076	1.2443	0.4055	6.0218
			Linex	1.7752	0.9600	2.5109	0.1265	0.4055	6.0218
			Entropia	1.7608	0.9600	0.1126	0.1120	0.4055	6.0218
	r = 17	α	Máxima Verossimilhança	2.5448	0.9440	-	0.5448	0.2329	4.8567
			Quadrática	2.3245	0.9260	1.6507	0.3245	0.6062	3.7066
			Linex	1.9443	0.9260	2.0072	-0.0556	0.6062	3.7066
			Entropia	1.9405	0.9260	0.0481	-0.0594	0.6062	3.7066
		θ_1	Máxima Verossimilhança	9.6512	0.8100	-	5.1696	-25.6306	44.9332
			Quadrática	12.0831	0.9710	166.1886	7.6014	0.8713	26.9393
			Linex	3.9697	0.9710	10.2591	-0.5119	0.8713	26.9393
			Entropia	5.9478	0.9710	0.1567	1.4661	0.8713	26.9393
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.5696	0.8840	-	0.8513	-1.6723	8.8115
			Quadrática	6.3714	0.9780	45.3175	3.6531	0.7955	11.3828
			Linex	3.1325	0.9780	5.6792	0.4143	0.7955	11.3828
			Entropia	3.8490	0.9780	0.1026	1.1307	0.7955	11.3828
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5914	0.8500	-	-0.0573	0.2876	2.8951
			Quadrática	2.0889	0.9700	0.9873	0.4402	0.6257	3.9141
			Linex	1.7595	0.9700	1.7536	0.1108	0.6257	3.9141
			Entropia	1.7236	0.9700	0.0505	0.0748	0.6257	3.9141

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 6.4: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 50$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
n = 50	r = 15	α	Máxima Verossimilhança	2.4001	0.9560	-	0.4001	0.4789	4.3212
			Quadrática	2.2242	0.9440	1.0305	0.2242	0.6810	3.5828
			Linex	1.9484	0.9440	1.9193	-0.0515	0.6810	3.5828
			Entropia	1.9331	0.9440	0.0391	-0.0668	0.6810	3.5828
		θ_1	Máxima Verossimilhança	5.6755	0.8300	-	1.1938	-5.0098	16.3608
			Quadrática	11.4220	0.9590	141.3741	6.9403	0.9197	25.1638
			Linex	3.9908	0.9590	9.7628	-0.4908	0.9197	25.1638
			Entropia	5.8465	0.9590	0.1443	1.3648	0.9197	25.1638
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.4535	0.8940	-	0.7353	-1.4864	8.3936
			Quadrática	6.7097	0.9840	47.2529	3.9914	0.7589	12.2082
			Linex	3.0992	0.9840	5.9630	0.3810	0.7589	12.2082
			Entropia	3.8221	0.9840	0.1130	1.1038	0.7589	12.2082
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5816	0.8600	-	-0.0670	0.1914	2.9717
			Quadrática	2.1850	0.9590	1.5534	0.5363	0.5726	4.0741
			Linex	1.7502	0.9590	1.8405	0.1015	0.5726	4.0741
			Entropia	1.7157	0.9590	0.0602	0.0669	0.5726	4.0741
	r = 25	α	Máxima Verossimilhança	2.4401	0.9540	-	0.4401	0.6111	4.2690
			Quadrática	2.2797	0.9300	1.4795	0.2797	0.7721	3.5657
			Linex	2.0180	0.9390	1.9814	0.0180	0.7721	3.5657
			Entropia	2.0161	0.9300	0.0345	0.0161	0.7721	3.5657
		θ_1	Máxima Verossimilhança	5.9489	0.8250	-	1.4672	-5.7081	17.6060
			Quadrática	9.4886	0.9590	100.2116	5.0069	1.0798	17.3031
			Linex	4.0171	0.9590	8.2334	-0.4645	1.0798	17.3031
			Entropia	5.5970	0.9590	0.1114	1.1153	1.0798	17.3031
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.1735	0.9080	-	0.4552	-0.2295	6.5766
			Quadrática	4.7439	0.9770	17.4772	2.0256	0.9631	7.9211
			Linex	3.0373	0.9770	4.3349	0.3191	0.9631	7.9211
			Entropia	3.4618	0.9770	0.0668	0.7435	0.9631	7.9211
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.5912	0.8710	-	-0.0574	0.5472	2.6352
			Quadrática	1.9009	0.9540	0.4563	0.2522	0.7616	3.2628
			Linex	1.7244	0.9540	1.5603	0.0757	0.7616	3.2628
			Entropia	1.6907	0.9540	0.0319	0.0419	0.7616	3.2628

Fonte:Elaborada pela autora.

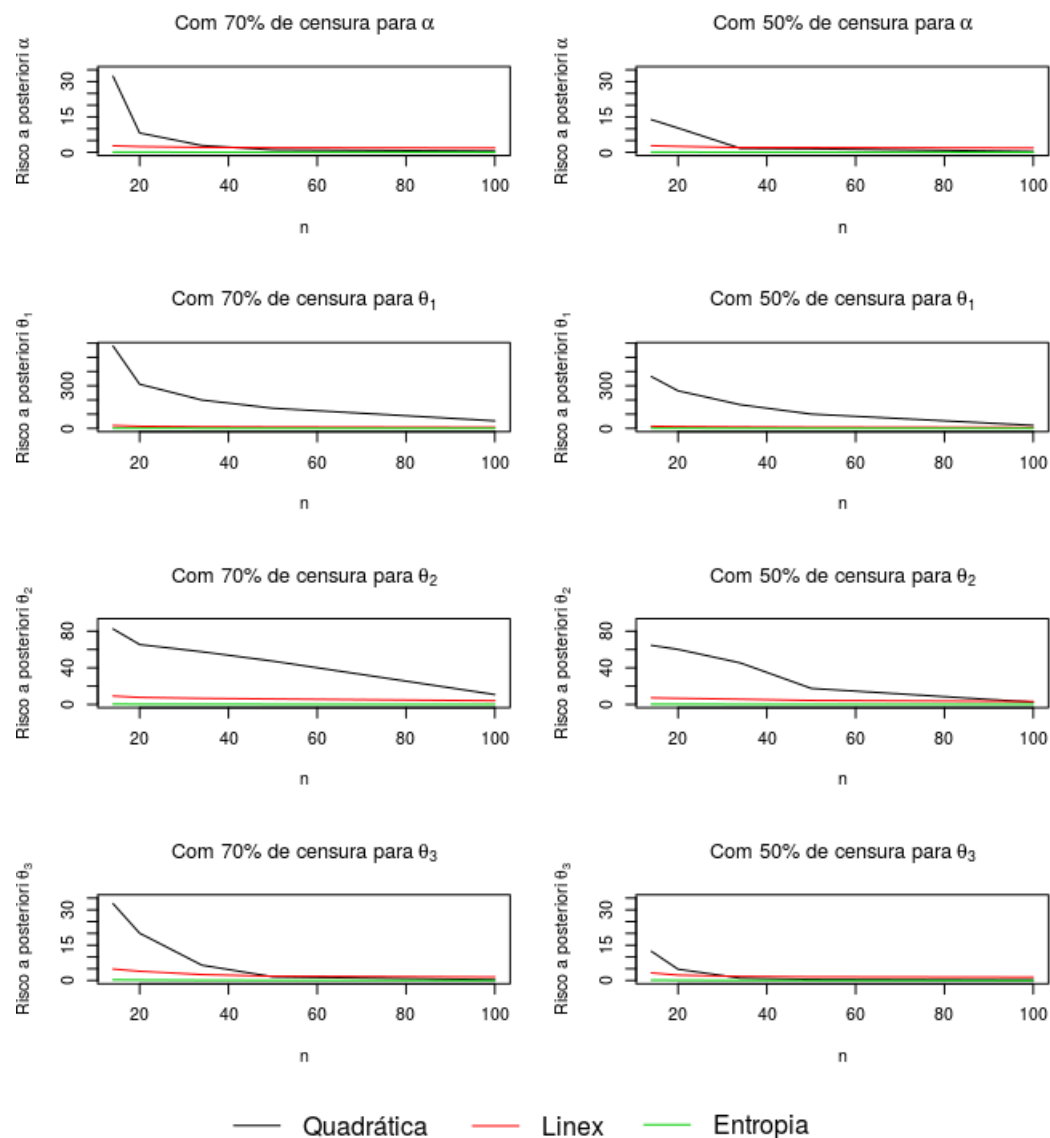
Tabela 6.5: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$, $\theta_3 = 1.648721$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 7$, $p = 0.5$ e $n = 100$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	Viés	IC(95%)	
								Inferior	Superior
$n = 100$	$r = 30$	α	Máxima Verossimilhança	2.1794	0.9480	-	0.1794	0.9145	3.4443
			Quadrática	2.0941	0.9260	0.4726	0.0941	0.9453	3.1554
			Linex	1.9588	0.9260	1.8031	-0.0411	0.9453	3.1554
			Entropia	1.9420	0.9260	0.0216	-0.0579	0.9453	3.1554
		θ_1	Máxima Verossimilhança	5.1890	0.8760	-	0.7073	-1.1410	11.5190
			Quadrática	8.0989	0.9620	52.7471	3.6172	1.3907	14.5031
			Linex	4.2568	0.9620	7.1841	-0.2247	1.3907	14.5031
			Entropia	5.5437	0.9620	0.0803	1.0620	1.3907	14.5031
		θ_2	Máxima Verossimilhança	3.1844	0.9210	-	0.4661	0.2891	6.0796
			Quadrática	4.3367	0.9730	10.7385	1.6185	1.1417	7.1101
			Linex	3.0859	0.9730	4.0027	0.3676	1.1417	7.1101
			Entropia	3.4257	0.9730	0.0518	0.7074	1.1417	7.1101
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.6155	0.9020	-	-0.0331	0.6789	2.5522
			Quadrática	1.8456	0.9640	0.3348	0.1969	0.8396	3.0211
			Linex	1.7149	0.9640	1.5030	0.0662	0.8396	3.0211
			Entropia	1.6852	0.9640	0.0251	0.0365	0.8396	3.0211
	$r = 50$	α	Máxima Verossimilhança	2.1572	0.9640	-	0.1572	1.0211	3.2932
			Quadrática	2.0855	0.9500	0.3173	0.0855	1.0368	3.0624
			Linex	1.9754	0.9500	1.8048	-0.0245	1.0368	3.0624
			Entropia	1.9596	0.9500	0.0179	-0.0403	1.0368	3.0624
		θ_1	Máxima Verossimilhança	4.7988	0.8890	-	0.3171	0.1991	9.3985
			Quadrática	6.5769	0.9600	20.8260	2.0952	1.6554	11.4671
			Linex	4.2771	0.9600	5.9925	-0.2045	1.6554	11.4671
			Entropia	5.1365	0.9600	0.0561	0.6548	1.6554	11.4671
		θ_2	Máxima Verossimilhança	2.9054	0.9250	-	0.1872	0.9700	4.8409
			Quadrática	3.4603	0.9770	2.3633	0.7420	1.3764	5.4764
			Linex	2.9464	0.9770	3.2424	0.2281	1.3764	5.4764
			Entropia	3.0766	0.9770	0.0297	0.3583	1.3764	5.4764
		θ_3	Máxima Verossimilhança	1.6189	0.9230	-	-0.0297	0.8874	2.3504
			Quadrática	1.7631	0.9580	0.1673	0.1143	0.9816	2.6062
			Linex	1.6934	0.9580	1.4196	0.0447	0.9816	2.6062
			Entropia	1.6721	0.9580	0.0148	0.0234	0.9816	2.6062

Fonte:Elaborada pela autora.

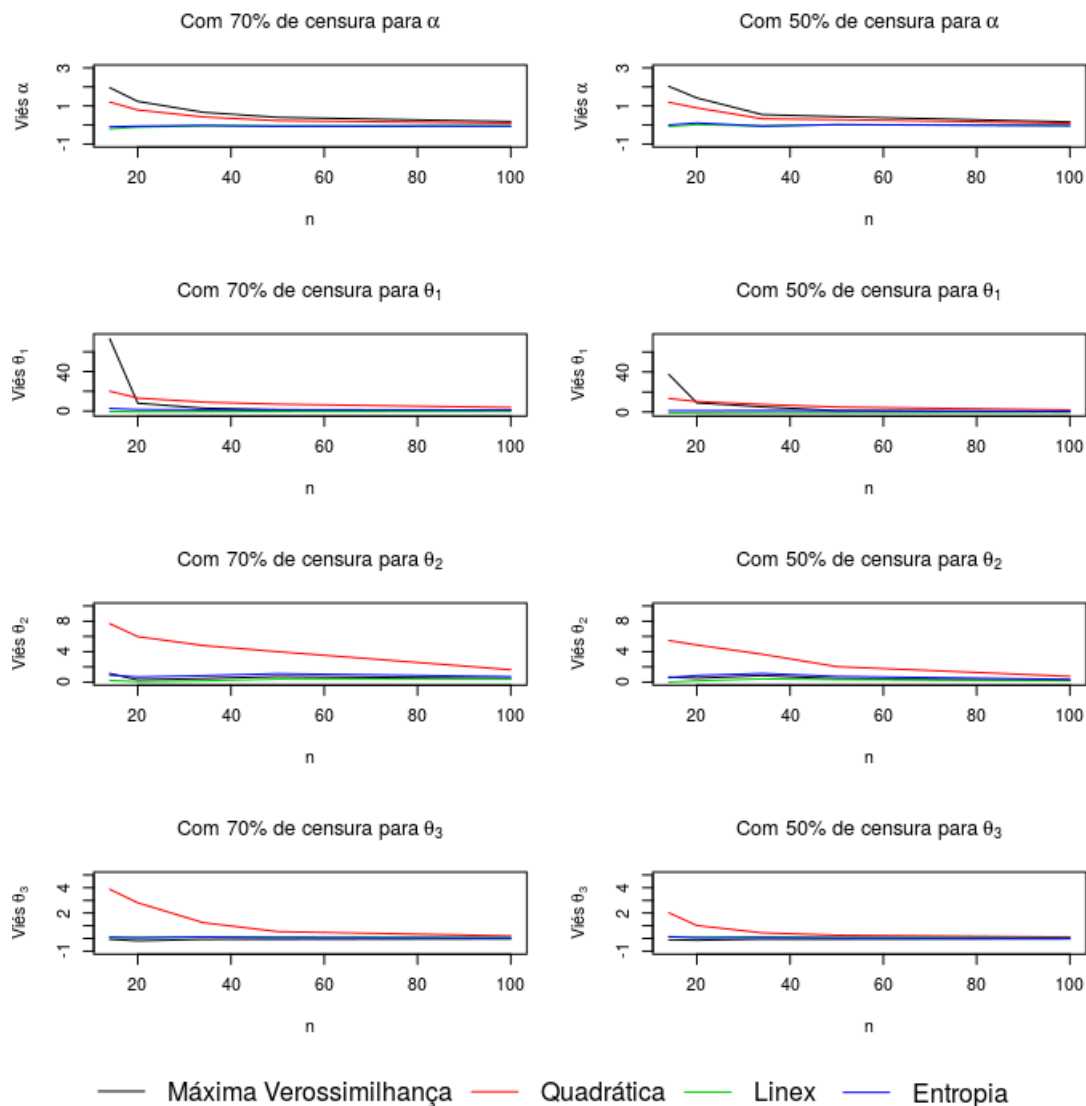
Antes de iniciarmos a explicação dos resultados apresentados nas tabelas, será apresentado duas figuras. A primeira figura trás os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de visualizarmos como está se comportando o risco a posteriori a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura. Já a segunda figura trás os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de observarmos agora como está se comportando o viés a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.

Figura 6.1: Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Figura 6.2: Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva tipo II, considerando tanto 70% quanto 50% de censura.



Fonte:Elaborada pela autora.

Comparando os resultados que foram apresentados nas tabelas 6.1 a 6.5, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais considerados, tanto para 70% quanto para 50% de censura o método bayesiano com as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia apresentaram as melhores probabilidades de cobertura, isto é, com probabilidades de cobertura próximas de 95%.

Quando olhamos para os valores do risco a posteriori referente as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia, sendo estes valores apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 6.1, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, a função de perda de Entropia apresentou os melhores resultados, isto é, com um risco a posteriori próximo de zero. Portanto, a perda que se espera comentar estimando os parâmetros do modelo proposto considerando a função de perda Entropia, é bem menor quando comparado com as outras funções de perda.

Observando ainda a Figura 6.1 é interessante notarmos que quando consideramos 50% de censura, obtemos valores menores do risco a posteriori do que quando consideramos 70% de censura. Além disso para amostras de tamanho pequeno a função de perda Quadrática,

usualmente utilizada em estudos de inferência Bayesiana, apresentou valores altos do risco a posteriori quando comparado com a função de perda de Entropia, ressaltando mais uma vez a importância de se trabalhar com essa função assimétrica.

Quando olhamos para os valores do viés apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 6.2, podemos perceber para amostras pequenas, o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados satisfatórios, isto é, com um viés próximo de zero para os parâmetros α e θ_1 . Além disso, a medida que o tamanho amostral aumenta, tanto o método clássico quanto o método bayesiano apresentaram bons resultados. Já para os parâmetros θ_2 e θ_3 tanto o método clássico quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados bons e similares. Um ponto importante de ressaltarmos é que quando consideramos 50% de censura, obtemos um viés menor do que quando consideramos 70% de censura.

Ao compararmos as estimativas realizadas por cada método, podemos perceber que o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia, para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura, se aproximaram do verdadeiro valor dos parâmetros que são $\alpha = 2$, $\theta_1 = 4.481689$, $\theta_2 = 2.718282$ e $\theta_3 = 1.648721$. Podemos perceber, que a medida que o tamanho amostral aumenta essas estimativas pontuais tendem a se aproximar cada vez mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Por meio das tabelas apresentadas, é possível observar que para quase todos os tamanhos amostrais com 70% e com 50% de censura, o limite inferior do intervalo de confiança de 95% obtido para os parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança é um valor negativo, embora esses parâmetros assumam apenas valores positivos.

Sendo assim, de um modo geral podemos concluir que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados, isto é, ambos os métodos se aproximaram do verdadeiro valor dos parâmetros, com os menores riscos a posteriori, com os menores viés e as melhores probabilidades de cobertura.

Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos

Neste capítulo apresentaremos toda formulação teórica e matemática que foi utilizada para a construir o modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, considerando a distribuição Gama.

Iremos apresentar a análise clássica realizada, ou seja, vamos mostrar os estimadores de Máxima Verossimilhança obtidos para o modelo proposto, como também a distribuição assintótica desses estimadores.

Mostraremos também a análise bayesiana desenvolvida para realizar a estimação dos parâmetros do modelo, na qual adotamos a distribuição Gama como distribuição a priori para os parâmetros do modelo.

7.1 Descrição do modelo

Motivada por Balakrishnan e Han (2008) e a fim de entendermos o modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, vamos imaginar o caso em que começamos com n unidades, na qual essas unidades são submetidas a um nível de estresse inicial x_1 . Feito isso, essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1 . Após esse tempo, as unidades que não falharam serão submetidas a um nível de estresse mais elevado, na qual denotaremos por x_2 .

Como estamos considerando um caso de censura tipo II, o experimento só acabará quando r unidades falharem, de modo que as $n - r$ unidades que não falharam serão censuradas.

Consideraremos que cada unidade poderá falhar apenas por uma de duas possíveis causas, e além disso vamos considerar que os tempos de falha por cada causa são independentes e seguem uma distribuição Gama. Sendo assim, vamos indicar por F_1 e F_2 as funções de distribuição dos tempos de falha nos níveis de estresse x_1 e x_2 , nesta ordem. Além do mais, vamos considerar que θ_{11} e θ_{12} são os parâmetros de escala associados a função F_1 , em relação a primeira e segunda causa de falha. E também vamos considerar que θ_{21} e θ_{22} são os parâmetros de escala associados a função F_2 , em relação a primeira e segunda causa de falha. Consideraremos também α_j como o parâmetro de forma associado a causa j de falha, para $j = 1, 2$.

Com base nisso, a função de distribuição acumulada do tempo de falha T_j devido a causa j é dado por:

$$G_j(t) = G_j(t, \alpha_j, \theta_{1j}, \theta_{2j}) = \begin{cases} \int_0^{\frac{t}{\theta_{1j}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-x} dx & , 0 < t < \tau_1 \\ \int_0^{\frac{t-\tau_1+\frac{\theta_{2j}}{\theta_{1j}}\tau_1}{\theta_{2j}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-x} dx & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (7.1)$$

em que $\alpha_j, \theta_{1j}, \theta_{2j} > 0$ para $j = 1, 2$. A função densidade de probabilidade correspondente ao tempo de falha T_j devido a causa j é dado por:

$$g_j(t) = g_j(t, \alpha_j, \theta_{1j}, \theta_{2j}) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\theta_{1j}^{\alpha_j}} t^{\alpha_j-1} \exp\left\{-\frac{t}{\theta_{1j}}\right\} & , 0 < t < \tau_1 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\theta_{2j}^{\alpha_j}} y_j^{\alpha_j-1} \exp\left\{-\frac{y_j}{\theta_{2j}}\right\} & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (7.2)$$

em que $y_j = t - \tau_1 + \frac{\theta_{2j}}{\theta_{1j}}\tau_1$ para $j = 1, 2$.

Como discutido na seção (1.6) apenas observamos o tempo mínimo entre T_1 e T_2 , isto é, $T = \min(T_1, T_2)$ em que T_1 é o tempo de falha devido a causa 1 e T_2 é o tempo de falha devido a causa 2.

Em função da independência entre as causas de falha, podemos obter a função de distribuição acumulada de T , que é dada por:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - [1 - G_1(t)][1 - G_2(t)] \\ &= \begin{cases} F(t; \boldsymbol{\theta}_1) & , 0 < t < \tau_1 \\ F(t; \boldsymbol{\theta}_2) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

em que $\boldsymbol{\theta}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12})$, $\boldsymbol{\theta}_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})$ e :

$$\begin{aligned} F(t; \boldsymbol{\theta}_1) &= 1 - \left[1 - \int_0^{\frac{t}{\theta_{11}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x} dx\right] \left[1 - \int_0^{\frac{t}{\theta_{12}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-x} dx\right]. \\ F(t; \boldsymbol{\theta}_2) &= 1 - \left[1 - \int_0^{\frac{t-\tau_1+\frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x} dx\right] \left[1 - \int_0^{\frac{t-\tau_1+\frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-x} dx\right]. \end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade de T pode ser obtida derivando a equação (7.3) em relação a t , isto é:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t; \boldsymbol{\theta}_1) & , 0 < t < \tau_1 \\ f(t; \boldsymbol{\theta}_2) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (7.4)$$

em que:

$$\begin{aligned}
 f(t; \boldsymbol{\theta}_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\theta_{11}^{\alpha_1}} t^{\alpha_1-1} \exp\left\{-\frac{t}{\theta_{11}}\right\} \left[1 - \int_0^{\frac{t}{\theta_{12}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-x} dx\right] \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\theta_{12}^{\alpha_2}} t^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\frac{t}{\theta_{12}}\right\} \left[1 - \int_0^{\frac{t}{\theta_{11}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x} dx\right]. \\
 \\
 f(t; \boldsymbol{\theta}_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\theta_{21}^{\alpha_1}} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1\right)^{\alpha_1-1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_{21}} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1\right)\right\} \\
 &\times \left[1 - \int_0^{\frac{t-\tau_1+\frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-x} dx\right] + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\theta_{22}^{\alpha_2}} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1\right)^{\alpha_2-1} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{1}{\theta_{22}} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1\right)\right\} \left[1 - \int_0^{\frac{t-\tau_1+\frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x} dx\right].
 \end{aligned}$$

Baseado no que foi discutido na seção (1.6) e como visto em Balakrishnan e Han (2008), a função densidade de probabilidade conjunta entre T e a causa da falha j é dada por:

$$\begin{aligned}
 f_{T,C}(t, j) &= g_j(t)[1 - G_{j'}(t)] \\
 &= \begin{cases} f_j(t; \boldsymbol{\theta}_1) & , 0 < t < \tau_1 \\ f_j(t; \boldsymbol{\theta}_2) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned}
 f_j(t; \boldsymbol{\theta}_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\theta_{1j}^{\alpha_j}} t^{\alpha_j-1} \exp\left\{-\frac{t}{\theta_{1j}}\right\} \left[1 - \int_0^{\frac{t}{\theta_{1j'}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{j'})} x^{\alpha_{j'}-1} e^{-x} dx\right], \\
 f(t; \boldsymbol{\theta}_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\theta_{2j}^{\alpha_j}} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_{2j}}{\theta_{1j}}\tau_1\right)^{\alpha_j-1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_{2j}} \left(t - \tau_1 + \frac{\theta_{2j}}{\theta_{1j}}\tau_1\right)\right\} \\
 &\times \left[1 - \int_0^{\frac{t-\tau_1+\frac{\theta_{2j'}}{\theta_{1j'}}\tau_1}{\theta_{2j'}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{j'})} x^{\alpha_{j'}-1} e^{-x} dx\right],
 \end{aligned}$$

para $j, j' = 1, 2$ e $j \neq j'$.

Agora iremos abordar os dois principais métodos de estimação, que é o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano, para o modelo descrito neste capítulo.

7.2 Análise Clássica do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos

A análise clássica deste modelo será realizada considerando o método de Máxima Verossimilhança. Contudo, antes de iniciarmos a análise, vamos primeiramente definir n_{1j} como o número de unidades que falharam no primeiro nível de estresse pela causa j . E vamos definir n_{2j} como o número de unidades que falharam no segundo nível de estresse pela causa j , para $j = 1, 2$.

De um modo geral podemos denotar $n_{1\bullet} = n_{11} + n_{12}$ como o número total de falhas no primeiro nível de estresse, e podemos denotar $n_{2\bullet} = n_{21} + n_{22}$ como o número total de falhas no segundo nível de estresse, em que $r = n_{1\bullet} + n_{2\bullet}$.

Feito isso, vamos considerar os seguintes tempos de falha observados:

$$t_{1:n} < \cdots < t_{n_{1\bullet}:n} < \tau_1 \leq t_{n_{1\bullet}+1:n} < \cdots < t_{r:n}. \quad (7.6)$$

Sabemos que cada tempo de falha possui sua respectiva causa de falha. Sendo assim, vamos considerar $c = (c_1, c_2, \dots, c_r)$, como o vetor que possui as causas da falha correspondente aos tempos de falha observados $t = (t_{1:n}, t_{2:n}, \dots, t_{r:n})$.

Deste modo, como visto em Balakrishnan e Han (2008) e baseado no que foi apresentado na seção 1.4.1, a função de verossimilhança para $\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}$ e θ_{22} considerando uma amostra com censura tipo II e na presença de riscos competitivos, pode ser escrita do seguinte modo:

$$L(\Theta|\mathbf{t}) = \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_{1\bullet}} f_{T,C}(t_{i:n}, c_i) \right\} \left\{ \prod_{i=n_{1\bullet}+1}^r f_{T,C}(t_{i:n}, c_i) \right\} [1 - F(t_{r:n}; \boldsymbol{\theta}_2)]^{n-r}. \quad (7.7)$$

Utilizando as expressões apresentadas em (7.3) e (7.5), temos que a função de verossimilhança para $\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}$ e θ_{22} , pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 L(\Theta|\mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{[\Gamma(\alpha_1)]^{n_{11}+n_{21}}} \frac{1}{[\Gamma(\alpha_2)]^{n_{12}+n_{22}}} \frac{1}{(\theta_{11}^{\alpha_1 n_{11}})(\theta_{12}^{\alpha_2 n_{12}})(\theta_{21}^{\alpha_1 n_{21}})(\theta_{22}^{\alpha_2 n_{22}})} \\
 &\times \left(\prod_{i=1}^{n_{11}} t_i \right)^{\alpha_1-1} \left(\prod_{i=1}^{n_{12}} t_i \right)^{\alpha_2-1} \left(\prod_{i=1}^{n_{21}} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{\alpha_1-1} \\
 &\times \left(\prod_{i=1}^{n_{22}} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{\alpha_2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_{11}} \sum_{i=1}^{n_{11}} t_i - \frac{1}{\theta_{12}} \sum_{i=1}^{n_{12}} t_i \right. \\
 &- \left. \frac{1}{\theta_{21}} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right) - \frac{1}{\theta_{22}} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right) \right\} \quad (7.8) \\
 &\times \prod_{i=1}^{n_{11}} \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i}{\theta_{12}} \right) \right] \prod_{i=1}^{n_{12}} \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i}{\theta_{11}} \right) \right] \\
 &\times \prod_{i=1}^{n_{21}} \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \prod_{i=1}^{n_{22}} \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \right\}^{n-r},
 \end{aligned}$$

em que $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})$ e $F_j(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-x} dx$, para $j = 1, 2$.

Sabemos que maximizar a função de verossimilhança é o mesmo que maximizar o seu logaritmo. Portanto, a função log-verossimilhança pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 l(\Theta|\mathbf{t}) &= \ln(L(\Theta|\mathbf{t})) \\
 &= \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) - (n_{11} + n_{21}) \ln[\Gamma(\alpha_1)] - (n_{12} + n_{22}) \ln[\Gamma(\alpha_2)] - \alpha_1 n_{11} \ln(\theta_{11}) \\
 &\quad - \alpha_2 n_{12} \ln(\theta_{12}) - \alpha_1 n_{21} \ln(\theta_{21}) - \alpha_2 n_{22} \ln(\theta_{22}) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^{n_{11}} \ln(t_i) \\
 &\quad + (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^{n_{12}} \ln(t_i) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^{n_{21}} \ln\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1\right) \\
 &\quad + (\alpha_2 - 1) \sum_{i=1}^{n_{22}} \ln\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1\right) - \frac{1}{\theta_{11}} \sum_{i=1}^{n_{11}} t_i - \frac{1}{\theta_{12}} \sum_{i=1}^{n_{12}} t_i \\
 &\quad - \frac{1}{\theta_{21}} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1\right) - \frac{1}{\theta_{22}} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1\right) + \sum_{i=1}^{n_{11}} \ln\left[1 - F_2\left(\frac{t_i}{\theta_{12}}\right)\right] \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_{12}} \ln\left[1 - F_1\left(\frac{t_i}{\theta_{11}}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n_{21}} \ln\left[1 - F_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right] \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_{22}} \ln\left[1 - F_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right] + (n-r) \ln\left[1 - F_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right] \\
 &\quad + (n-r) \ln\left[1 - F_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right],
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

em que $F_j(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-x} dx$, para $j = 1, 2$.

Derivando a equação (7.9) em relação aos parâmetros de interesse $\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}$ e igualando a zero, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_1} &= -(n_{11} + n_{21})\psi(\alpha_1) - n_{11} \ln(\theta_{11}) - n_{21} \ln(\theta_{21}) + \sum_{i=1}^{n_{11}} \ln(t_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \ln \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right) + \sum_{i=1}^{n_{12}} \frac{[\psi(\alpha_1)F_1(t_i/\theta_{11})] - E_1(t_i/\theta_{11})}{[1 - F_1(t_i/\theta_{11})]} \\
&+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{\psi(\alpha_1)F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) - E_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]} \\
&+ \frac{(n - r) \left[\psi(\alpha_1)F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) - E_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]} = 0.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_2} &= -(n_{12} + n_{22})\psi(\alpha_2) - n_{12} \ln(\theta_{12}) - n_{22} \ln(\theta_{22}) + \sum_{i=1}^{n_{12}} \ln(t_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \ln \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right) + \sum_{i=1}^{n_{11}} \frac{[\psi(\alpha_2)F_2(t_i/\theta_{12})] - E_2(t_i/\theta_{12})}{[1 - F_2(t_i/\theta_{12})]} \\
&+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{\psi(\alpha_2)F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) - E_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]} \\
&+ \frac{(n - r) \left[\psi(\alpha_2)F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) - E_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]} = 0.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{11}} &= -\frac{\alpha_1 n_{11}}{\theta_{11}} - \frac{\theta_{21} \tau_1 (\alpha_1 - 1)}{\theta_{11}^2} \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1\right)} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{11}} \frac{t_i}{\theta_{11}^2} + \frac{n_{21} \tau_1}{\theta_{11}^2} + \sum_{i=1}^{n_{12}} \frac{t_i (t_i / \theta_{11})^{\alpha_1 - 1} \exp(-t_i / \theta_{11})}{[1 - F_1(t_i / \theta_{11})] \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^2} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{\tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)^{\alpha_1 - 1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right\}}{\left[1 - F_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right] \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^2} \\
 &+ \frac{(n - r) \tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)^{\alpha_1 - 1} \exp\left\{-\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right\}}{\left[1 - F_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right] \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{12}} &= -\frac{\alpha_2 n_{12}}{\theta_{12}} - \frac{\theta_{22} \tau_1 (\alpha_2 - 1)}{\theta_{12}^2} \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1\right)} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{12}} \frac{t_i}{\theta_{12}^2} + \frac{n_{22} \tau_1}{\theta_{12}^2} + \sum_{i=1}^{n_{11}} \frac{t_i (t_i / \theta_{12})^{\alpha_2 - 1} \exp(-t_i / \theta_{12})}{[1 - F_2(t_i / \theta_{12})] \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^2} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{\tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)^{\alpha_2 - 1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right\}}{\left[1 - F_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right] \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^2} \\
 &+ \frac{(n - r) \tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)^{\alpha_2 - 1} \exp\left\{-\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right\}}{\left[1 - F_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right] \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{21}} &= -\frac{\alpha_1 n_{21}}{\theta_{21}} + \frac{\tau_1(\alpha_1 - 1)}{\theta_{11}} \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1\right)} + \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{t_i - \tau_1}{\theta_{21}^2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{(t_i - \tau_1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right] \Gamma(\alpha_1) \theta_{21}^2} \\
&+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}}\right)\right] \Gamma(\alpha_1) \theta_{21}^2} = 0.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{22}} &= -\frac{\alpha_2 n_{22}}{\theta_{22}} + \frac{\tau_1(\alpha_2 - 1)}{\theta_{12}} \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{1}{\left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1\right)} + \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{t_i - \tau_1}{\theta_{22}^2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{(t_i - \tau_1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right] \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^2} \\
&+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}}\right)\right] \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^2} = 0.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Em que:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)}, \\
E_j(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^t x^{\alpha_j - 1} \ln(x) e^{-x} dx, \quad \text{para } j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Deste modo, as equações apresentadas em (7.10), (7.11), (7.12), (7.13), (7.14) e (7.15) são chamadas de equações de verossimilhança. Assim, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α_1 , α_2 , θ_{11} , θ_{12} , θ_{21} e θ_{22} podem ser obtidos resolvendo esse sistema de equações utilizando métodos iterativos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

7.2.1 Intervalos de Confiança Aproximados

Como discutido em capítulos anteriores, dado o vetor de parâmetros Θ , um tamanho amostral grande e com algumas condições de regularidade sendo satisfeitas, temos que a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (EMV) de Θ é:

$$(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_6(0, I^{-1}(\Theta)), \quad (7.16)$$

de modo que estes estimadores são assintoticamente não viciados. A matriz de variância e covariância desses estimadores é dado por $I^{-1}(\Theta)$, que é inversa da matriz de informação de Fisher observada, na qual podemos representar essa matriz da seguinte forma:

$$I^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} -I_{11} & -I_{12} & -I_{13} & -I_{14} & -I_{15} & -I_{16} \\ -I_{21} & -I_{22} & -I_{23} & -I_{24} & -I_{25} & -I_{26} \\ -I_{31} & -I_{32} & -I_{33} & -I_{34} & -I_{35} & -I_{36} \\ -I_{41} & -I_{42} & -I_{43} & -I_{44} & -I_{45} & -I_{46} \\ -I_{51} & -I_{52} & -I_{53} & -I_{54} & -I_{55} & -I_{46} \\ -I_{61} & -I_{62} & -I_{63} & -I_{64} & -I_{65} & -I_{66} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (7.17)$$

em que $I_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} l(\Theta | \mathbf{t})$, para $i, j = 1, \dots, 6$ e $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})$. Os elementos da matriz de informação de Fisher observada são:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{\partial^2 l(\Theta | \mathbf{t})}{\partial \alpha_1^2} = -(n_{11} + n_{21})\psi'(\alpha_1) + \sum_{i=1}^{n_{12}} \frac{1}{[1 - F_1(t_i/\theta_{11})]^2} \\ &\times \{[(\psi'(\alpha_1) - \psi^2(\alpha_1))F_1(t_i/\theta_{11}) + 2\psi(\alpha_1)E_1(t_i/\theta_{11}) - A_1(t_i/\theta_{11})] \\ &\times [1 - F_1(t_i/\theta_{11})] - [\psi(\alpha_1)F_1(t_i/\theta_{11}) - E_1(t_i/\theta_{11})]^2\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{1}{\left[1 - F_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right)\right]^2} \left\{ \left[(\psi'(\alpha_1) - \psi^2(\alpha_1))F_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right. \right. \\ &+ 2\psi(\alpha_1)E_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) - A_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \left. \right] \left[1 - F_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right] \\ &- \left. \left[\psi(\alpha_1)F_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) - E_1\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right]^2 \right\} + \frac{(n - r)}{\left[1 - F_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right]^2} \\ &\times \left\{ \left[(\psi'(\alpha_1) - \psi^2(\alpha_1))F_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) + 2\psi(\alpha_1)E_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right. \right. \\ &- A_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \left. \right] \left[1 - F_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right] - \left[\psi(\alpha_1)F_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right. \\ &- \left. \left. E_1\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}}\tau_1}{\theta_{21}}\right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_2^2} = -(n_{12} + n_{22})\psi'(\alpha_2) + \sum_{i=1}^{n_{11}} \frac{1}{[1 - F_2(t_i/\theta_{12})]^2} \\
 &\times \{[(\psi'(\alpha_2) - \psi^2(\alpha_2))F_2(t_i/\theta_{12}) + 2\psi(\alpha_2)E_2(t_i/\theta_{12}) - A_2(t_i/\theta_{12})] \\
 &\times [1 - F_2(t_i/\theta_{12})] - [\psi(\alpha_2)F_2(t_i/\theta_{12}) - E_2(t_i/\theta_{12})]^2\} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{1}{\left[1 - F_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right)\right]^2} \left\{ \left[(\psi'(\alpha_2) - \psi^2(\alpha_2))F_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \right. \right. \\
 &+ 2\psi(\alpha_1)E_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) - A_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \left. \right] \left[1 - F_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \right] \\
 &- \left[\psi(\alpha_2)F_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) - E_2\left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \right]^2 \left. \right\} + \frac{(n - r)}{\left[1 - F_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \right]^2} \\
 &\times \left\{ \left[(\psi'(\alpha_2) - \psi^2(\alpha_2))F_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) + 2\psi(\alpha_2)E_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \right. \right. \\
 &- A_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \left. \right] \left[1 - F_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \right] - \left[\psi(\alpha_2)F_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \right. \\
 &- E_2\left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}}\tau_1}{\theta_{22}}\right) \left. \right]^2 \left. \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

$$I_{12} = I_{21} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_1 \alpha_2} = 0. \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}
 I_{13} &= I_{31} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_1 \theta_{11}} = -\frac{n_{11}}{\theta_{11}} - \frac{\tau_1}{\theta_{11}^2} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{-1} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{12}} \frac{t_i (t_i/\theta_{11})^{\alpha_1-1} \exp(-t_i/\theta_{11})}{[1 - F_1(t_i/\theta_{11})]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^2} \{ [\ln(t_i/\theta_{11})(1 - F_1(t_i/\theta_{11}))] \\
 &- \psi(\alpha_1) + E_1(t_i/\theta_{11}) \} + \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{\tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^2} \\
 &\times \left\{ \left[\ln \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \right] - \psi(\alpha_1) + E_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \\
 &+ \frac{(n-r) \tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^2} \left\{ \ln \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right. \\
 &\times \left. \left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] - \psi(\alpha_1) + E_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$I_{23} = I_{32} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_2 \theta_{11}} = 0. \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned}
 I_{33} &= \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{11}^2} = \frac{\alpha_1 n_{11}}{\theta_{11}^2} - \frac{(\alpha_1 - 1)\tau_1^2 \theta_{21}^2}{\theta_{11}^4} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{-2} \\
 &+ \frac{2(\alpha_1 - 1)\tau_1 \theta_{21}}{\theta_{11}^3} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{-1} - \sum_{i=1}^{n_{11}} \frac{2t_i}{\theta_{11}^3} - \frac{2\tau_1 n_{21}}{\theta_{11}^3} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{12}} \frac{t_i (t_i/\theta_{11})^{\alpha_1-1} \exp(-t_i/\theta_{11})}{[1 - F_1(t_i/\theta_{11})]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^4} \left\{ (1 - F_1(t_i/\theta_{11})) [t_i(1 - (\alpha_1 - 1)(t_i/\theta_{11})^{-1}) \right. \\
 &- 2\theta_{11}] - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} (t_i/\theta_{11})^{\alpha_1-1} \exp(-(t_i/\theta_{11})) t_i \Big\} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{\tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left[\tau_1 \left(1 - (\alpha_1 - 1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{11} \right] \right. \\
 &- \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1)} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \Big\} \\
 &+ \frac{(n - r)\tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left[\tau_1 \left(1 - (\alpha_1 - 1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{11} \right] \right. \\
 &- \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1)} \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \Big\}.
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$I_{14} = I_{41} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_1 \theta_{12}} = 0. \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned}
 I_{24} &= I_{42} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_2 \theta_{12}} = -\frac{n_{12}}{\theta_{12}} - \frac{\tau_1}{\theta_{12}^2} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{-1} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{11}} \frac{t_i (t_i / \theta_{12})^{\alpha_2 - 1} \exp(-t_i / \theta_{12})}{[1 - F_2(t_i / \theta_{12})]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^2} \{ [\ln(t_i / \theta_{12}) (1 - F_2(t_i / \theta_{12}))] \\
 &- \psi(\alpha_2) + E_2(t_i / \theta_{12}) \} + \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{\tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^2} \\
 &\times \left\{ \left[\ln \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \right] - \psi(\alpha_2) + E_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \\
 &+ \frac{(n - r) \tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^2} \left\{ \ln \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right. \\
 &\times \left. \left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] - \psi(\alpha_2) + E_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$I_{34} = I_{43} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{11} \theta_{12}} = 0. \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}
 I_{44} &= \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{12}^2} = \frac{\alpha_2 n_{12}}{\theta_{12}^2} - \frac{(\alpha_2 - 1) \tau_1^2 \theta_{22}^2}{\theta_{12}^4} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{-2} \\
 &+ \frac{2(\alpha_2 - 1) \tau_1 \theta_{22}}{\theta_{12}^3} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{-1} - \sum_{i=1}^{n_{12}} \frac{2t_i}{\theta_{12}^3} - \frac{2\tau_1 n_{22}}{\theta_{12}^3} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{11}} \frac{t_i (t_i / \theta_{12})^{\alpha_2 - 1} \exp(-t_i / \theta_{12})}{[1 - F_2(t_i / \theta_{12})]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^4} \left\{ (1 - F_2(t_i / \theta_{12})) [t_i (1 - (\alpha_2 - 1)(t_i / \theta_{12})^{-1}) \right. \\
 &- 2\theta_{12}] - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} (t_i / \theta_{12})^{\alpha_2 - 1} \exp(-(t_i / \theta_{12})) t_i \left. \right\} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{\tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \left[\tau_1 \left(1 - (\alpha_2 - 1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{12} \right] \right. \\
 &- \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \left. \right\} \\
 &+ \frac{(n - r) \tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{12}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \left[\tau_1 \left(1 - (\alpha_2 - 1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{12} \right] \right. \\
 &- \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \left. \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}
 I_{15} &= I_{51} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_1 \theta_{21}} = -\frac{n_{21}}{\theta_{21}} + \frac{\tau_1}{\theta_{11}} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{-1} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{(t_i - \tau_1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{21}^2} \\
 &\times \left\{ \left[\ln \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \right] - \psi(\alpha_1) + E_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \quad (7.28) \\
 &+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{11}^2} \left\{ \ln \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right. \\
 &\times \left. \left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] - \psi(\alpha_1) + E_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$I_{25} = I_{52} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{21} \alpha_2} = 0. \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
 I_{35} &= I_{53} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{11} \partial \theta_{21}} = \frac{(\alpha_1 - 1) \tau_1^2 \theta_{21}}{\theta_{11}^3} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{-2} \\
 &- \frac{(\alpha_1 - 1) \tau_1}{\theta_{11}^2} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{-1} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{(t_i - \tau_1) \tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{21}^2 \theta_{11}^2} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left[1 - (\alpha_1 - 1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{-1} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \right\} \\
 &+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{21}^2 \theta_{11}^2} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left[1 - (\alpha_1 - 1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{-1} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

$$I_{45} = I_{54} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{21} \theta_{12}} = 0. \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}
 I_{55} &= \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{21}^2} = \frac{\alpha_1 n_{21}}{\theta_{21}^2} - \frac{(\alpha_1 - 1)\tau_1^2}{\theta_{11}^2} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{-2} - \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{2(t_i - \tau_1)}{\theta_{21}^3} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{(t_i - \tau_1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{21}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left[(t_i - \tau_1) \left(1 - (\alpha_1 - 1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{21} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{(t_i - \tau_1)}{\Gamma(\alpha_1)} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \right\} \quad (7.32) \\
 &+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\}}{\left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_1) \theta_{21}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left[(t_r - \tau_1) \left(1 - (\alpha_1 - 1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{21} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{(t_r - \tau_1)}{\Gamma(\alpha_1)} \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$I_{16} = I_{61} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{22} \partial \alpha_1} = 0. \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned}
 I_{26} &= I_{62} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \alpha_2 \theta_{22}} = -\frac{n_{22}}{\theta_{22}} + \frac{\tau_1}{\theta_{12}} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{-1} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{(t_i - \tau_1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^2} \\
 &\times \left\{ \left[\ln \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \right] - \psi(\alpha_2) + E_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \quad (7.34) \\
 &+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^2} \left\{ \ln \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right. \\
 &\times \left. \left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] - \psi(\alpha_2) + E_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$I_{36} = I_{63} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{22} \theta_{11}} = 0. \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned}
 I_{46} &= I_{64} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{12} \partial \theta_{22}} = \frac{(\alpha_1 - 1) \tau_1^2 \theta_{22}}{\theta_{12}^3} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{-2} \\
 &- \frac{(\alpha_1 - 1) \tau_1}{\theta_{12}^2} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{-1} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{(t_i - \tau_1) \tau_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^2 \theta_{12}^2} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \left[1 - (\alpha_2 - 1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{-1} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \right\} \\
 &+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \tau_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^2 \theta_{12}^2} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \left[1 - (\alpha_2 - 1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{-1} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

$$I_{56} = I_{65} = \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{22} \partial \theta_{21}} = 0. \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned}
 I_{66} &= \frac{\partial^2 l(\Theta|\mathbf{t})}{\partial \theta_{22}^2} = \frac{\alpha_2 n_{22}}{\theta_{22}^2} - \frac{(\alpha_2 - 1)\tau_1^2}{\theta_{12}^2} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{-2} \\
 &- \sum_{i=1}^{n_{22}} \frac{2(t_i - \tau_1)}{\theta_{22}^3} + \sum_{i=1}^{n_{21}} \frac{(t_i - \tau_1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \left[(t_i - \tau_1) \left(1 - (\alpha_2 - 1) \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{22} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{(t_i - \tau_1)}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \right\} \\
 &+ \frac{(n - r)(t_r - \tau_1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\}}{\left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right]^2 \Gamma(\alpha_2) \theta_{22}^4} \\
 &\times \left\{ \left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \left[(t_r - \tau_1) \left(1 - (\alpha_2 - 1) \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{-1} \right) - 2\theta_{22} \right] \right. \\
 &- \left. \frac{(t_r - \tau_1)}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right\} \right\}. \tag{7.38}
 \end{aligned}$$

Em que:

$$\psi(\alpha) = \frac{(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)},$$

$$E_j(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^t x^{\alpha_j - 1} \ln(x) e^{-x} dx, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

$$A_j(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^t x^{\alpha_j - 1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

$$F_j(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j - 1} e^{-x} dx, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Assim após obter a matriz de informação de Fisher, faz-se possível construir intervalos de confiança assintóticos aproximados para os parâmetros α_1 , α_2 , θ_{11} , θ_{12} , θ_{21} e θ_{22} .

Sendo assim, os intervalos de confiança assintóticos com nível $100(1 - \gamma)\%$ podem ser construídos do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
& \hat{\alpha}_{1EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{1EMV})} \\
& \hat{\alpha}_{2EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{2EMV})} \\
& \hat{\theta}_{11EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{11EMV})} \\
& \hat{\theta}_{12EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{12EMV})} , \\
& \hat{\theta}_{21EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{21EMV})} \\
& \hat{\theta}_{22EMV} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{Var(\hat{\theta}_{22EMV})}
\end{aligned} \tag{7.39}$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

7.3 Análise Bayesiana do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos

Apresentaremos nessa seção toda análise bayesiana realizada utilizando o modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos e utilizando a distribuição Gama, na qual mostraremos as distribuições a priori que foram utilizadas e também a distribuição a posteriori obtida.

Ao olharmos para os parâmetros do modelo construído, temos que estes parâmetros são desconhecidos e pertencem ao espaço paramétrico de $\alpha_1, \alpha_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22} > 0$, tornando-se razoável assumir uma distribuição a priori Gama para os seis parâmetros. Veja a seguir:

$$\begin{aligned}
p(\alpha_1) &= \frac{1}{\Gamma(a_1)b_1^{a_1}} \alpha_1^{a_1-1} e^{-\alpha_1/b_1} \\
p(\alpha_2) &= \frac{1}{\Gamma(a_2)b_2^{a_2}} \alpha_2^{a_2-1} e^{-\alpha_2/b_2} \\
p(\theta_{11}) &= \frac{1}{\Gamma(a_3)b_3^{a_3}} \theta_{11}^{a_3-1} e^{-\theta_{11}/b_3} \\
p(\theta_{12}) &= \frac{1}{\Gamma(a_4)b_4^{a_4}} \theta_{12}^{a_4-1} e^{-\theta_{12}/b_4} \\
p(\theta_{21}) &= \frac{1}{\Gamma(a_5)b_5^{a_5}} \theta_{21}^{a_5-1} e^{-\theta_{21}/b_5} \\
p(\theta_{22}) &= \frac{1}{\Gamma(a_6)b_6^{a_6}} \theta_{22}^{a_6-1} e^{-\theta_{22}/b_6}
\end{aligned} \tag{7.40}$$

em que $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, a_6$ e b_6 são conhecidos.

Como não temos nenhuma informação, nem de estudos anteriores e nem de especialistas, vamos assumir um caráter não-informativo para os parâmetros, ou seja, consideraremos $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = a_4 = b_4 = a_5 = b_5 = a_6 = b_6 = 0.01$.

Assumindo independência a priori para os parâmetros, faz-se necessário a construção da priori conjunta, em que neste caso é o produto das prioris. Deste modo, a priori conjunta para os parâmetros é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\Theta) &= \frac{\alpha_1^{a_1-1} \alpha_2^{a_2-1} \theta_{11}^{a_3-1} \theta_{12}^{a_4-1} \theta_{21}^{a_5-1} \theta_{22}^{a_6-1}}{\Gamma(a_1) b_1^{a_1} \Gamma(a_2) b_2^{a_2} \Gamma(a_3) b_3^{a_3} \Gamma(a_4) b_4^{a_4} \Gamma(a_5) b_5^{a_5} \Gamma(a_6) b_6^{a_6}} \\ &\times \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2}{b_2} + \frac{\theta_{11}}{b_3} + \frac{\theta_{12}}{b_4} + \frac{\theta_{21}}{b_5} + \frac{\theta_{22}}{b_6} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

O próximo passo é obter a distribuição a posteriori para o vetor de parâmetros Θ . Sendo assim, podemos representar a distribuição a posteriori de forma mais simples, que é a forma proporcional ao produto da função de verossimilhança (7.8) e da distribuição a priori conjunta (7.41), resultado em:

$$\begin{aligned} p(\Theta|\mathbf{t}) &\propto \frac{n!}{(n-r)!} \frac{(\alpha_1)^{a_1-1} (\alpha_2)^{a_2-1} (\theta_{11})^{a_3-1} (\theta_{12})^{a_4-1} (\theta_{21})^{a_5-1} (\theta_{22})^{a_6-1}}{[\Gamma(\alpha_1)]^{n_{11}+n_{21}} [\Gamma(\alpha_2)]^{n_{12}+n_{22}} \theta_{11}^{\alpha_1 n_{11}} \theta_{12}^{\alpha_2 n_{12}} \theta_{21}^{\alpha_1 n_{21}} \theta_{22}^{\alpha_2 n_{22}}} \\ &\times \left(\prod_{i=1}^{n_{11}} t_i \right)^{\alpha_1-1} \left(\prod_{i=1}^{n_{12}} t_i \right)^{\alpha_2-1} \left(\prod_{i=1}^{n_{21}} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right)^{\alpha_1-1} \\ &\times \left(\prod_{i=1}^{n_{22}} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right)^{\alpha_2-1} \exp \left\{ - \frac{1}{\theta_{11}} \sum_{i=1}^{n_{11}} t_i - \frac{1}{\theta_{12}} \sum_{i=1}^{n_{12}} t_i \right. \\ &- \frac{1}{\theta_{21}} \sum_{i=1}^{n_{21}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1 \right) - \frac{1}{\theta_{22}} \sum_{i=1}^{n_{22}} \left(t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1 \right) \\ &- \left. \frac{\alpha_1}{b_1} - \frac{\alpha_2}{b_2} - \frac{\theta_{11}}{b_3} - \frac{\theta_{12}}{b_4} - \frac{\theta_{21}}{b_5} - \frac{\theta_{22}}{b_6} \right\} \prod_{i=1}^{n_{11}} \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i}{\theta_{12}} \right) \right] \\ &\times \prod_{i=1}^{n_{12}} \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i}{\theta_{11}} \right) \right] \prod_{i=1}^{n_{21}} \left[1 - F_2 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \\ &\times \prod_{i=1}^{n_{22}} \left[1 - F_1 \left(\frac{t_i - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \left\{ \left[1 - F_1 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{21}}{\theta_{11}} \tau_1}{\theta_{21}} \right) \right] \right. \\ &\times \left. \left[1 - F_2 \left(\frac{t_r - \tau_1 + \frac{\theta_{22}}{\theta_{12}} \tau_1}{\theta_{22}} \right) \right] \right\}^{n-r}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Podemos ver a complexidade analítica da densidade a posteriori apresentada em (7.42), fazendo-se necessário a utilização de métodos numéricos.

7.4 Estudo de simulação

Para que seja possível realizar a comparação entre o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, será realizado algumas simulações considerando diferentes tamanhos amostrais com 20% e 40% de censura.

A ideia desta simulação, é gerar várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente realizar a aplicação das duas metodologias,

com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), risco a posteriori e viés.

7.4.1 Gerar valores aleatórios do Modelo Step-Stress Simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos

Baseado em Balakrishnan e Han (2008) e também em Han e Kundu (2015), o algoritmo utilizado para gerar valores aleatórios do modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos, é dado do seguinte modo:

1. Simular duas amostras de tamanho n a partir da distribuição Uniforme (0,1). Seja $U_1 = (U_1, \dots, U_n)$ a primeira amostra e seja $U_2 = (U_1, \dots, U_n)$ a segunda amostra.
2. Transformar cada amostra nos seguintes vetores:

$$T_{1j} = \theta_{1j} G_j^{-1}(U_j),$$

$$\text{em que } j = 1, 2 \text{ e } G_j(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-x} dx.$$

3. Para cada par (T_{11}, T_{12}) selecione o mínimo dos dois valores, bem como o índice correspondente do mínimo. Por exemplo, denote por 1 se T_{11} for menor que T_{12} , e denote por 2 caso contrário. Vamos considerar $\mathbf{T}_1$ o vetor dos mínimos e $\mathbf{C}_1$ o vetor dos índices.
4. Ordene os elementos de $\mathbf{T}_1$ e permute os elementos de $\mathbf{C}_1$ de maneira correspondente. Vamos denotar por $v_{1:n} < \dots < v_{n:n}$ os elementos ordenados de $\mathbf{T}_1$.
5. Encontrar $n_{1\bullet}$ tal que $v_{n_{1\bullet}:n} < \tau_1 \leq v_{n_{1\bullet}+1:n}$. Então, para $1 \leq k \leq n_{1\bullet}$, vamos denotar por $t_{k:n}$ os valores de $v_{k:n}$, isto é, os valores referentes ao primeiro nível de estresse. Seja n_{11} o número de elementos do vetor $t_{k:n}$ que possuem o índice 1. Comumente, seja n_{12} o número de elementos de vetor $t_{k:n}$ que possuem o índice 2. Veja que $n_{1\bullet} = n_{11} + n_{12}$.
6. Simular duas novas amostras de tamanho $\eta = n - n_{1\bullet}$ a partir da distribuição Uniforme (0,1). Seja $U_1 = (U_1, \dots, U_n)$ a primeira amostra e seja $U_2 = (U_1, \dots, U_n)$ a segunda amostra.
7. Transformar cada amostra nos seguintes vetores:

$$T_{2j} = \theta_{2j} G_j^{-1}(U_j) + \tau_1 - \frac{\theta_{2j}}{\theta_{1j}} \tau_1,$$

$$\text{em que } j = 1, 2 \text{ e } G_j(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-x} dx.$$

8. Novamente para cada par (T_{21}, T_{22}) selecione o mínimo dos dois valores, bem como o índice correspondente do mínimo. Vamos considerar $\mathbf{T}_2$ o vetor dos mínimos e $\mathbf{C}_2$ o vetor dos índices.

9. Ordene os elementos de $\mathbf{T}_2$ e permuta os elementos de $\mathbf{C}_2$ de maneira correspondente. Vamos denotar por $w_{1:\eta} < \dots < w_{\eta:\eta}$ os elementos ordenados de $\mathbf{T}_2$.
10. Seja $n_{2\bullet} = r - n_{1\bullet}$. Então, para $1 \leq k \leq n_{2\bullet}$, vamos definir $t_{n_{1\bullet}+k:n}$ os valores de $(w_{k:\eta} + \tau_1)$, isto é, os valores referentes ao segundo nível de estresse. Seja n_{21} o número de elementos do vetor $t_{n_{1\bullet}+k:n}$ que possuem o índice 1. Comumente, seja n_{22} o número de elementos de vetor $t_{n_{1\bullet}+k:n}$ que possuem o índice 2. Veja que $n_{2\bullet} = n_{21} + n_{22}$.

Com o nosso objetivo é exemplificar toda a teoria que foi abordada e discutida até o momento, o nosso próximo passo é comparar o método de máxima verossimilhança com o método bayesiano, na qual será realizado simulações considerando diferentes tamanhos amostrais, isto é $n = (20, 35, 50, 100)$, com 20% e 40% de censura.

A ideia desta simulação é a mesma que foi apresentada em outras seções, ou seja, gerar várias amostras que seguem o modelo proposto com parâmetros pré-definidos, e posteriormente realizar a aplicação das duas metodologias, com o intuito de verificar por meio de índices qual desses métodos se aproxima mais dos verdadeiros valores dos parâmetros. Os índices utilizados na análise serão: Estimativa, Probabilidade de Cobertura (PC), viés e risco a posteriori. Vale ressaltar que a descrição da simulação que foi realizada é a mesma apresentada na seção 3.4.2.

7.4.2 Resultados Numéricos

Temos que os resultados obtidos consideramos diferentes tamanhos amostrais com 20% e 40% de censura, estão resumidos nas tabelas a seguir.

As estatísticas que serão apresentadas nas tabelas são a Média (Estimativa), Risco a posteriori, Viés, Probabilidade de Cobertura (PC) e o Intervalo de Confiança (IC) para o método clássico ou Intervalo de Credibilidade (IC) para o método bayesiano.

Tabela 7.1: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 20$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	EQM	Viés	IC(95%)	
									Inferior	Superior
n = 20	r = 12	α_1	Máxima Verossimilhança	2.7907	0.9640	-	3.6799	1.2208	-0.8287	6.4101
			Quadrática	2.6006	0.9530	4.5521	4.5521	1.1217	0.4192	4.5072
			Linex	1.8433	0.9530	2.2469	0.6251	0.6152	0.4192	4.5072
			Entropia	1.8486	0.9530	0.0828	1.3231	0.7718	0.4192	4.5072
		α_2	Máxima Verossimilhança	4.5033	0.9640	-	11.0112	2.1845	-2.9912	11.9979
			Quadrática	4.3341	0.9620	24.4712	24.4712	2.1949	0.4456	7.7650
			Linex	2.3507	0.9620	3.9016	3.7367	1.0080	0.4456	7.7650
			Entropia	2.5984	0.9620	0.1248	10.5987	1.3262	0.4456	7.7650
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.9155	0.8370	-	24.3065	2.4702	-6.3365	14.1677
			Quadrática	12.5286	0.9870	198.5493	198.5493	9.7510	0.4227	34.9338
			Linex	3.0567	0.9870	10.6090	2.0421	1.1270	0.4227	34.9338
			Entropia	4.3173	0.9870	0.2586	15.8040	2.4600	0.4227	34.9338
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.7605	0.8140	-	30.4670	1.9356	-6.6357	12.1568
			Quadrática	12.3220	0.9920	200.1190	200.1190	10.4287	0.2420	39.9783
			Linex	2.4026	0.9920	10.4287	1.56166	0.9578	0.2420	39.9783
			Entropia	2.9847	0.9920	0.3586	7.8763	1.8376	0.2420	39.9783
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	5.3864	0.9060	-	20.6235	2.8506	-5.5018	16.2747
			Quadrática	12.8183	0.9900	142.7997	142.7997	8.9931	0.8532	32.8773
			Linex	4.2001	0.9900	10.96042	2.7022	1.3067	0.8532	32.8773
			Entropia	6.2317	0.9900	0.1811	19.5661	3.1352	0.8532	32.8773
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	3.9197	0.8870	-	14.3208	2.1389	-4.6547	12.4941
			Quadrática	12.1509	0.9960	138.3462	138.3462	9.2224	0.5555	35.3628
			Linex	3.5064	0.9960	10.4467	2.2228	1.1579	0.5555	35.3628
			Entropia	4.9196	0.9060	0.2312	13.6692	2.3784	0.5555	35.3628
	r = 16	α_1	Máxima Verossimilhança	2.8777	0.9620	-	4.3170	1.2671	-0.6553	6.4108
			Quadrática	2.6611	0.9500	5.4101	5.4101	1.1664	0.4372	4.3417
			Linex	1.8955	0.9500	2.3019	0.7137	0.6451	0.4372	4.3417
			Entropia	1.9275	0.9500	0.0798	1.8077	0.8269	0.4372	4.3417
		α_2	Máxima Verossimilhança	4.4480	0.9660	-	10.2127	2.0962	-2.6404	11.5366
			Quadrática	4.4110	0.9490	33.3940	33.3940	2.2659	0.4559	7.5085
			Linex	2.4618	0.9490	3.9482	7.0393	1.0860	0.4559	7.5085
			Entropia	2.7864	0.9490	0.1163	18.6388	1.4899	0.4559	7.5085
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.4731	0.7970	-	16.9314	2.2221	-5.5285	12.4748
			Quadrática	11.0752	0.9800	158.4514	158.4514	8.4362	0.4332	29.3013
			Linex	2.8949	0.9800	9.4318	1.9403	1.1206	0.4332	29.3013
			Entropia	3.9472	0.9800	0.2396	12.2081	2.2362	0.4332	29.3013
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.3479	0.8040	-	6.6299	1.5694	-4.5631	9.2590
			Quadrática	11.0267	0.9850	160.4399	160.4399	9.1769	0.2485	35.7078
			Linex	2.3352	0.9850	9.3810	1.4635	0.9346	0.2485	35.7078
			Entropia	2.8355	0.9850	0.3296	6.5651	1.7046	0.2485	35.7078
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	5.0300	0.9130	-	11.1532	2.2063	-1.9306	11.9908
			Quadrática	9.7406	0.9920	72.9743	72.9743	5.9719	1.2309	21.6327
			Linex	4.3981	0.9920	8.5545	2.6437	1.2800	1.2309	21.6327
			Entropia	5.9894	0.9920	0.1146	14.9703	2.6986	1.2309	21.6327
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	4.3856	0.9510	-	10.9064	2.0709	-3.0303	11.8016
			Quadrática	10.7661	0.9950	113.4847	113.4847	7.8448	0.8964	25.6441
			Linex	3.9776	0.9950	9.3489	3.0975	1.3442	0.8964	25.6441
			Entropia	5.5568	0.9950	0.1576	17.5835	2.4933	0.8964	25.6441

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 7.2: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 35$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	EQM	Viés	IC(95%)	
									Inferior	Superior
$n = 35$	$r = 21$	α_1	Máxima Verossimilhança	2.4643	0.9580	-	1.9836	0.8538	0.0976	4.8309
			Quadrática	2.2733	0.9350	1.6530	1.6530	0.7783	0.5873	3.6666
			Linex	1.8993	0.9350	1.9514	0.5710	0.5741	0.5873	3.6666
			Entropia	1.8893	0.9350	0.0496	0.8954	0.6661	0.5873	3.6666
		α_2	Máxima Verossimilhança	3.8894	0.9550	-	5.1398	1.5340	-0.5351	8.3141
			Quadrática	3.6331	0.9390	6.7004	6.7004	1.4672	0.6154	6.1930
			Linex	2.5157	0.9390	3.3304	1.1814	0.9038	0.6154	6.1930
			Entropia	2.7057	0.9390	0.0777	2.7152	1.1452	0.6154	6.1930
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.5973	0.8700	-	19.8622	1.8797	-2.5357	9.7305
			Quadrática	8.4079	0.9750	86.3000	86.3000	5.7576	0.6496	18.4233
			Linex	3.1401	0.9750	7.3391	2.0166	1.0984	0.6496	18.4233
			Entropia	4.0956	0.9750	0.1549	10.5452	2.0733	0.6496	18.4233
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.3772	0.8350	-	7.0441	1.3786	-2.6112	7.3657
			Quadrática	7.8050	0.9830	87.1329	87.1329	6.0075	0.3586	18.4784
			Linex	2.3633	0.9830	6.7757	1.5348	0.9252	0.3586	18.4784
			Entropia	2.8220	0.9830	0.2193	6.2448	1.5610	0.3586	18.4784
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	5.2815	0.9300	-	10.7584	2.2807	-1.6704	12.2335
			Quadrática	10.0235	0.9850	75.6782	75.6782	6.2628	1.3120	22.2483
			Linex	4.5274	0.9850	8.7815	2.9506	1.3487	1.3120	22.2483
			Entropia	6.1961	0.9850	0.1143	16.0845	2.8686	1.3120	22.2483
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	4.6148	0.9190	-	13.8878	2.3640	-2.8190	12.0487
			Quadrática	11.2037	0.9870	127.5283	127.5283	8.3529	0.8851	27.2034
			Linex	3.9985	0.9870	9.66634	3.6085	1.4815	0.8851	27.2034
			Entropia	5.6745	0.9870	0.1638	20.1326	2.7499	0.8851	27.2034
	$r = 28$	α_1	Máxima Verossimilhança	2.4669	0.9640	-	1.6392	0.8356	0.2511	4.6827
			Quadrática	2.3012	0.9400	2.1414	2.1414	0.7876	0.6138	3.7029
			Linex	1.9283	0.9400	1.9826	0.5653	0.5759	0.6138	3.7029
			Entropia	1.9253	0.9400	0.0478	1.0636	0.6691	0.6138	3.7029
		α_2	Máxima Verossimilhança	4.0638	0.9630	-	6.7163	1.6472	-0.4202	9.1973
			Quadrática	3.9271	0.9450	12.5265	12.5265	1.7391	0.6426	6.2804
			Linex	2.6022	0.9450	3.5717	1.3145	0.9422	0.6426	6.2804
			Entropia	2.8861	0.9450	0.0771	4.1218	1.2740	0.6426	6.2804
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.4475	0.8390	-	11.8520	1.8102	-2.3023	12.4748
			Quadrática	8.0573	0.9760	91.9115	91.9115	5.5002	0.6373	17.1625
			Linex	3.0644	0.9760	7.0238	1.9810	1.0984	0.6373	17.1625
			Entropia	4.0106	0.9760	0.1481	12.0410	2.0584	0.6373	17.1625
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.2653	0.8220	-	4.6170	1.3020	-2.0852	6.6159
			Quadrática	7.5546	0.9710	84.4730	84.4730	5.8148	0.3604	16.6563
			Linex	2.3232	0.9710	6.5297	1.5541	0.9388	0.3604	16.6563
			Entropia	2.7795	0.9710	0.2144	6.3522	1.5738	0.3604	16.6563
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	5.1613	0.9530	-	7.5145	1.8395	0.1860	10.1365
			Quadrática	7.7036	0.9770	32.2527	32.2527	3.9065	1.8216	14.4955
			Linex	4.7532	0.9770	6.9545	2.9160	1.2998	1.8216	14.4955
			Entropia	5.9159	0.9770	0.0635	11.6421	2.3534	1.8216	14.4955
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	4.3872	0.9660	-	6.9157	1.8344	-0.5127	9.2873
			Quadrática	7.8724	0.9870	45.7088	45.7088	4.9687	1.3057	16.6907
			Linex	4.1961	0.9870	7.0645	3.4824	1.4631	1.3057	16.6907
			Entropia	5.3343	0.9870	0.0921	12.6602	2.1147	1.3057	16.6907

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 7.3: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 50$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	EQM	Viés	IC(95%)	
									Inferior	Superior
$n = 50$	$r = 30$	α_1	Máxima Verossimilhança	2.2743	0.9610	-	0.8536	0.6326	0.6024	3.9461
			Quadrática	2.1280	0.9300	0.7241	0.7241	0.5942	0.7401	3.3095
			Linex	1.9078	0.9300	1.8231	0.4140	0.5069	0.7401	3.3095
			Entropia	1.8843	0.9300	0.0343	0.5187	0.5592	0.7401	3.3095
		α_2	Máxima Verossimilhança	3.6318	0.9470	-	3.3038	1.2856	0.1809	7.0828
			Quadrática	3.4195	0.9270	4.4547	4.4547	1.2655	0.7845	5.5759
			Linex	2.6222	0.9270	3.1469	1.2015	0.8818	0.7845	5.5759
			Entropia	2.7835	0.9270	0.0561	2.5302	1.0822	0.7845	5.5759
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.3473	0.8750	-	4.7688	1.4448	-1.4251	8.1198
			Quadrática	6.4564	0.9760	42.1154	42.1154	3.8658	0.8202	12.1126
			Linex	3.1537	0.9760	5.7693	1.6981	1.0099	0.8202	12.1126
			Entropia	3.8445	0.9760	0.1072	6.9130	1.7030	0.8202	12.1126
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.4070	0.8510	-	6.1094	1.2839	-1.8808	6.6948
			Quadrática	6.2360	0.9780	58.5475	58.5475	4.4919	0.4527	12.0426
			Linex	2.4053	0.9780	5.4527	1.6470	0.9506	0.4527	12.0426
			Entropia	2.8497	0.9780	0.1600	6.5495	1.5282	0.4527	12.0426
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	5.5871	0.9620	-	11.1832	2.2082	-0.6231	11.7974
			Quadrática	8.9165	0.9830	50.9109	50.9109	5.0951	1.7475	17.4465
			Linex	4.8933	0.9830	7.9314	3.3614	1.4144	1.7475	17.4465
			Entropia	6.3761	0.9830	0.0799	15.4338	2.7984	1.7475	17.4465
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	4.9599	0.9720	-	12.6126	2.3856	-1.7748	11.6947
			Quadrática	9.8032	0.9780	88.6945	88.6945	6.8826	1.2191	21.0973
			Linex	4.3529	0.9780	8.5909	4.2957	1.6270	1.2191	21.0973
			Entropia	5.9243	0.9780	0.1176	19.3315	2.6638	1.2191	21.0973
	$r = 40$	α_1	Máxima Verossimilhança	2.3739	0.9750	-	1.0291	0.6871	0.6354	4.1124
			Quadrática	2.2373	0.9550	1.0424	1.0424	0.6570	0.7840	3.4446
			Linex	1.9877	0.9550	1.9406	0.4806	0.5221	0.7840	3.4446
			Entropia	1.9793	0.9550	0.0338	0.6552	0.5800	0.7840	3.4446
		α_2	Máxima Verossimilhança	3.7287	0.9600	-	3.1099	1.2556	0.2535	7.2039
			Quadrática	3.4972	0.9410	3.9734	3.9734	1.2142	0.8336	5.8191
			Linex	2.7095	0.9410	3.2384	1.0262	0.8249	0.8336	5.8191
			Entropia	2.8722	0.9410	0.0539	1.9890	1.0138	0.8336	5.8191
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.1303	0.8520	-	3.8785	1.4028	-0.8964	7.1570
			Quadrática	5.9735	0.9630	38.1537	38.1537	3.4708	0.7976	10.6346
			Linex	3.0311	0.9630	5.3408	1.7903	1.0376	0.7976	10.6346
			Entropia	3.6719	0.9630	0.1019	7.4454	1.6869	0.7976	10.6346
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.1752	0.8420	-	2.9206	1.1070	-1.2735	5.6240
			Quadrática	5.3593	0.9700	36.5400	36.5400	3.6290	0.4342	10.5309
			Linex	2.2935	0.9700	4.7336	1.3806	0.8633	0.4342	10.5309
			Entropia	2.6084	0.9700	0.1491	4.4589	1.3159	0.4342	10.5309
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	4.9839	0.9740	-	4.4086	1.4596	1.2301	8.7377
			Quadrática	6.5498	0.9700	13.9785	13.9785	2.7204	2.1750	11.6459
			Linex	4.7943	0.9700	6.0327	2.4842	1.1905	2.1750	11.6459
			Entropia	5.5595	0.9700	0.0416	6.8887	1.8845	2.1750	11.6459
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	4.4275	0.9910	-	5.4654	1.6843	0.3305	8.5245
			Quadrática	6.6205	0.9670	23.0114	23.0114	3.6768	1.6675	12.7630
			Linex	4.3175	0.9670	6.0676	3.4713	1.4798	1.6675	12.7630
			Entropia	5.1467	0.9670	0.0615	9.2849	1.7497	1.6675	12.7630

Fonte:Elaborada pela autora.

Tabela 7.4: Tabela de Resumo dos índices de interesse considerando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\theta_{11} = 3$, $\theta_{12} = 2$, $\theta_{21} = 4$, $\theta_{22} = 3$, $\tau_1 = 3$ e $n = 100$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco a posteriori	EQM	Viés	IC(95%)	
									Inferior	Superior
n = 100	r = 60	α_1	Máxima Verossimilhança	2.1851	0.9710	-	0.3580	0.4406	1.0804	3.2899
			Quadrática	2.1042	0.9580	0.3203	0.3203	0.4232	1.0961	3.0286
			Linex	1.9998	0.9580	1.8281	0.2430	0.3853	1.0961	3.0286
			Entropia	1.9858	0.9580	0.0167	0.2693	0.4034	1.0961	3.0286
		α_2	Máxima Verossimilhança	3.3640	0.9520	-	1.3876	0.8684	1.1855	5.5425
			Quadrática	3.2074	0.9280	1.3720	1.3720	0.8458	1.2935	4.8818
			Linex	2.8359	0.9280	2.9969	0.7844	0.7028	1.2935	4.8818
			Entropia	2.9133	0.9280	0.0277	1.0572	0.7886	1.2935	4.8818
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.0430	0.8740	-	1.7492	0.9994	0.3809	5.7052
			Quadrática	4.0908	0.9600	6.4473	6.4473	1.5908	1.1629	6.8828
			Linex	3.0365	0.9600	3.7953	1.1432	0.8422	1.1629	6.8828
			Entropia	3.3039	0.9600	0.0491	2.4171	1.1046	1.1629	6.8828
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.1576	0.8790	-	1.6116	0.8609	-0.2243	4.5396
			Quadrática	3.4733	0.9620	9.9974	9.9974	1.7937	0.6688	6.0535
			Linex	2.2711	0.9620	3.1087	1.0678	0.7635	0.6688	6.0535
			Entropia	2.4177	0.9620	0.0753	2.2401	0.9886	0.6688	6.0535
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	5.3545	0.9790	-	5.1656	1.6686	1.6676	9.0414
			Quadrática	6.5410	0.9460	12.3842	12.3842	2.6734	2.5137	10.9038
			Linex	5.0393	0.9460	6.0359	2.9347	1.3280	2.5137	10.9038
			Entropia	5.7428	0.9460	0.0338	6.9507	1.9762	2.5137	10.9038
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	5.2404	0.9930	-	10.3019	2.3514	0.6227	9.8581
			Quadrática	7.6285	0.8890	40.6776	40.6776	4.6586	1.9494	13.5762
			Linex	4.8352	0.8890	6.8960	5.5713	1.9129	1.9494	13.5762
			Entropia	5.9385	0.8890	0.0584	16.1180	2.2848	1.9494	13.5762
	r = 80	α_1	Máxima Verossimilhança	2.1749	0.9640	-	0.3861	0.4448	1.0902	3.2596
			Quadrática	2.1046	0.9460	0.3691	0.3691	0.4390	1.0956	2.9680
			Linex	2.0024	0.9460	1.8252	0.2811	0.4014	1.0956	2.9680
			Entropia	1.9900	0.9460	0.0161	0.3131	0.4204	1.0956	2.9680
		α_2	Máxima Verossimilhança	3.3872	0.9610	-	1.3435	0.8578	1.2680	5.5064
			Quadrática	3.2306	0.9490	1.3003	1.3003	0.8308	1.3611	4.8787
			Linex	2.8691	0.9490	3.0249	0.6978	0.6806	1.3611	4.8787
			Entropia	2.9483	0.9490	0.0259	0.9573	0.7640	1.3611	4.8787
		θ_{11}	Máxima Verossimilhança	3.1075	0.8900	-	1.9840	1.0099	0.3890	5.8260
			Quadrática	4.1011	0.9540	6.0575	6.0575	1.6011	1.2004	7.0600
			Linex	3.0775	0.9540	3.8064	1.2161	0.8528	1.2004	7.0600
			Entropia	3.3495	0.9540	0.0476	2.5210	1.1180	1.2004	7.0600
		θ_{12}	Máxima Verossimilhança	2.0826	0.8700	-	1.1625	0.7991	-0.0335	4.1989
			Quadrática	3.1543	0.9710	5.9416	5.9416	1.4884	0.6834	5.6641
			Linex	2.2225	0.9710	2.8319	0.9329	0.7337	0.6834	5.6641
			Entropia	2.3268	0.9710	0.0689	1.7998	0.9198	0.6834	5.6641
		θ_{21}	Máxima Verossimilhança	5.0691	0.9830	-	2.8293	1.2828	2.4594	7.6789
			Quadrática	5.7454	0.9120	5.5086	5.5086	1.8447	2.9272	8.7097
			Linex	4.9793	0.9120	5.3778	2.2301	1.1646	2.9272	8.7097
			Entropia	5.3581	0.9120	0.0188	3.8391	1.5117	2.9272	8.7097
		θ_{22}	Máxima Verossimilhança	4.4849	0.9880	-	4.0067	1.5726	1.7780	7.1919
			Quadrática	5.4263	0.8420	9.1073	9.1073	2.4499	2.3346	8.8977
			Linex	4.4732	0.8420	5.0821	3.5059	1.5297	2.3346	8.8977
			Entropia	4.8888	0.8420	0.0275	5.9075	1.2976	2.3346	8.8977

Fonte:Elaborada pela autora.

Antes de iniciarmos a explicação dos resultados apresentados nas tabelas, será apresentado três figuras. A primeira figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de visualizarmos como está se comportando o risco a posteriori a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 40% quanto 20% de censura. A segunda figura apresenta os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de observarmos agora como está se comportando o viés a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 40% quanto 20% de censura. E por último, apresentaremos os gráficos para cada um dos parâmetros do modelo, a fim de observarmos agora como está se comportando o Erro Quadrático Médio (EQM) a medida que o tamanho amostral aumenta, considerando tanto 40% quanto 20% de censura.

Figura 7.1: Gráficos do risco a posteriori versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, considerando tanto 40% quanto 20% de censura.

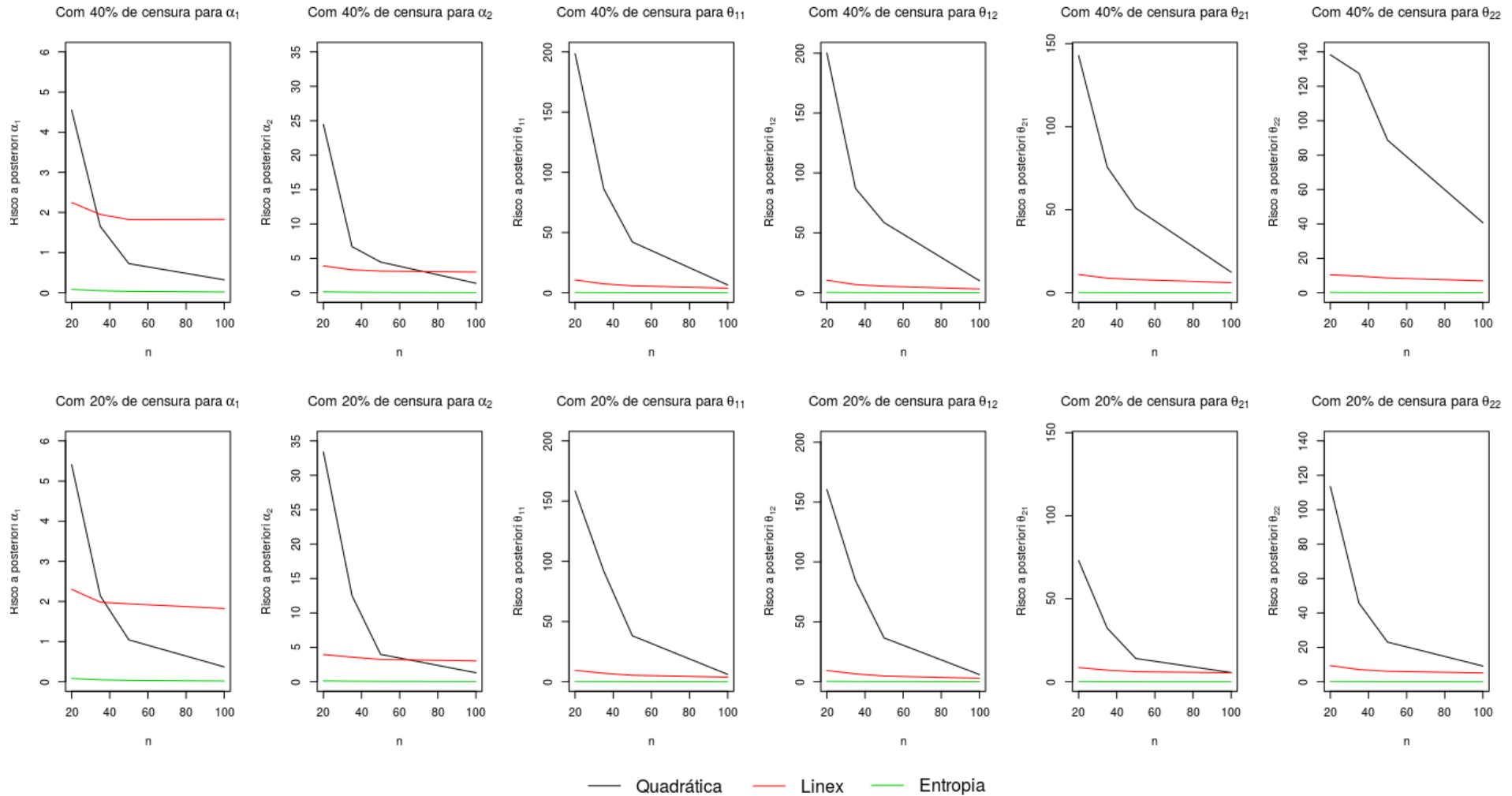


Figura 7.2: Gráficos do Viés versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, considerando tanto 40% quanto 20% de censura.

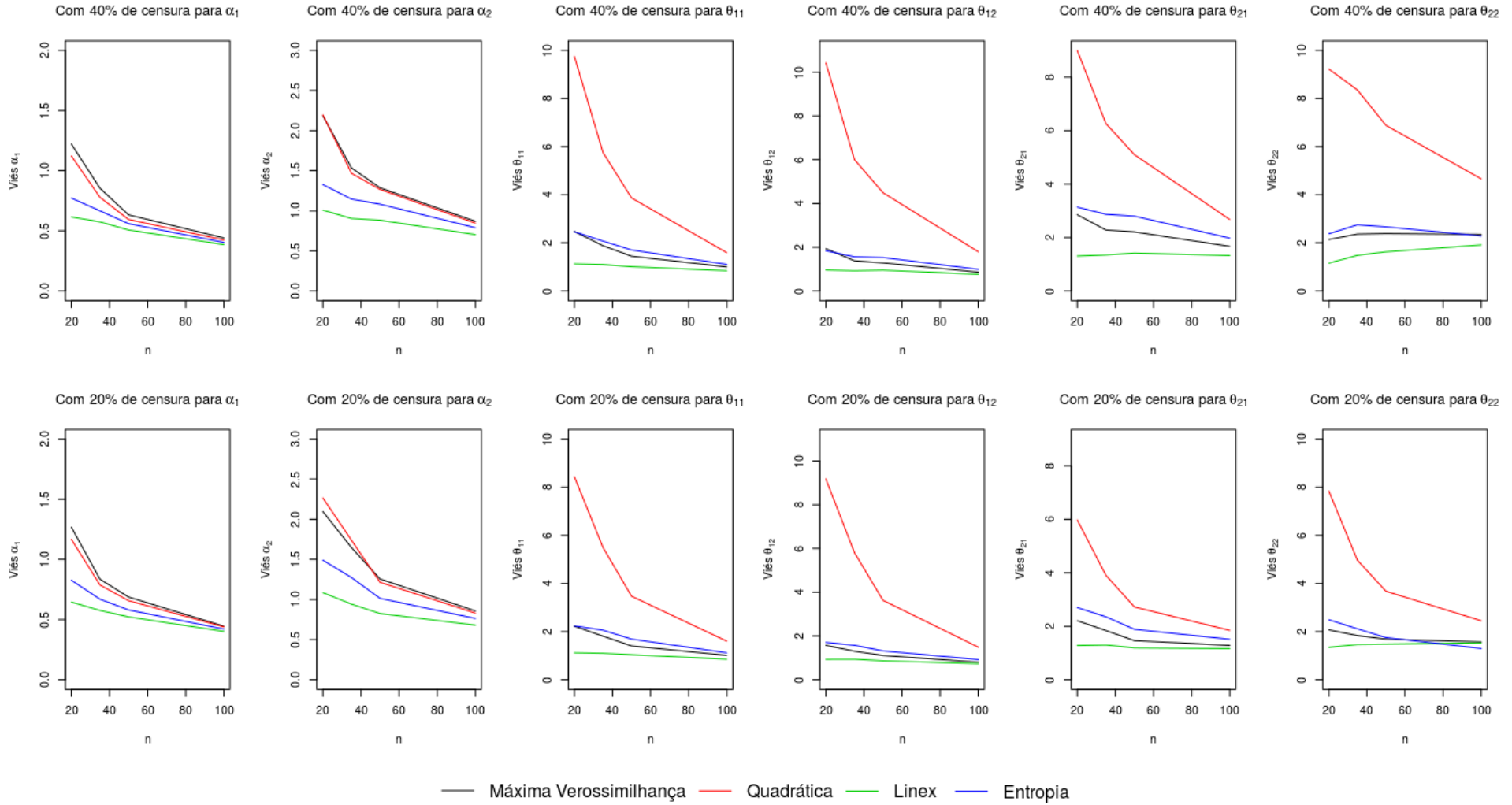
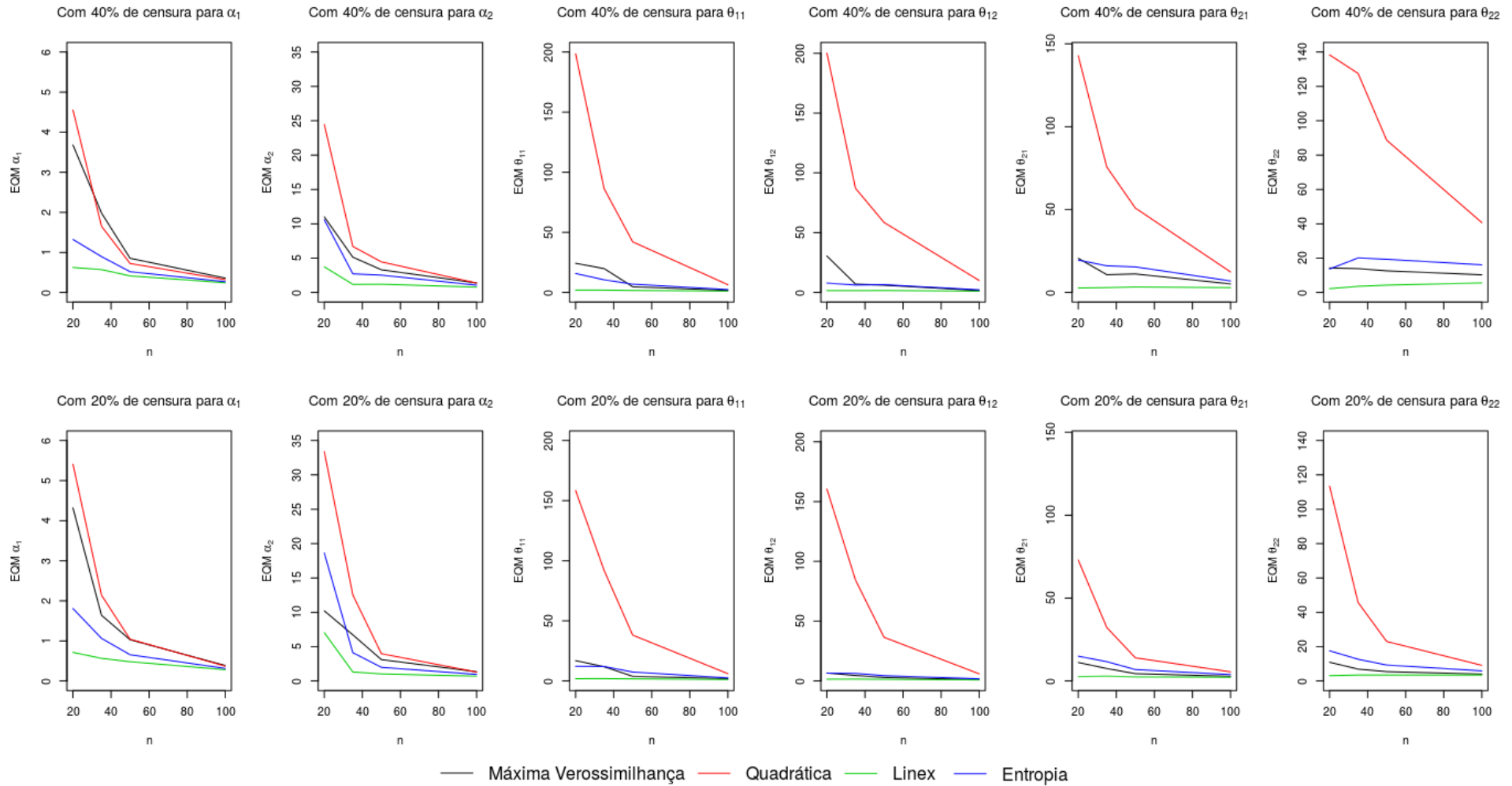


Figura 7.3: Gráficos do EQM versus tamanho amostral (n), para cada um dos parâmetros do modelo step-stress simples sob censura tipo II na presença de riscos competitivos, considerando tanto 40% quanto 20% de censura.



Comparando os resultados que foram apresentados nas tabelas 7.1 a 7.4, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais considerados e porcentagens de censura, o método bayesiano com as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia apresentaram as probabilidades de cobertura mais próximas de 95%.

Quando olhamos para os valores do risco a posteriori referente as funções de perda Quadrática, Linex e Entropia, sendo estes valores apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 7.1, podemos perceber que para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura considerados, a função de perda de Entropia apresentou os melhores resultados, isto é, com um risco a posteriori próximo de zero. Portanto, a perda que se espera comentar estimando os parâmetros do modelo proposto considerando a função de perda Entropia, é bem menor quando comparado com as outras funções de perda.

Observando ainda a Figura 7.1 é interessante notarmos que para amostras de tamanho pequeno a função de perda Quadrática, usualmente utilizada em estudos de inferência Bayesiana, apresentou valores altos do risco a posteriori quando comparado com a função de perda de Entropia, ressaltando mais uma vez a importância de se trabalhar com essa função assimétrica.

Quando olhamos para os valores do viés apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 7.2, podemos perceber que para a maioria dos parâmetros o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia, apresentaram resultados bons e similares, isto é, com um viés próximo de zero. Além disso, podemos perceber que a medida que o tamanho amostral aumenta, tanto o método clássico quanto o método bayesiano com diferentes funções de perda, tende a se aproximar de zero.

Ao observarmos os valores dos EQM's apresentados tanto nas tabelas quanto na Figura 7.3, podemos perceber novamente que para a maioria dos parâmetros o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados bons e similares, isto é, com um EQM próximo de zero. Vale ressaltar que o método bayesiano com função de perda Linex, foi o que apresentou o menor EQM. Além disso, podemos perceber que a medida que o tamanho amostral aumenta, tanto o método clássico quanto o método bayesiano com diferentes funções de perda, tende a se aproximar de zero.

Ao compararmos as estimativas realizadas por cada método, podemos perceber que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método Bayesiano com funções de perda Linex e Entropia se aproximaram razoavelmente dos verdadeiros valores dos parâmetros. Podemos perceber, que a medida que o tamanho amostral aumenta essas estimativas pontuais tendem a se aproximar cada vez mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.

Por meio das tabelas apresentadas, é possível observar que para quase todos os tamanhos amostrais com 40% e com 20% de censura, o limite inferior do intervalo de confiança de 95% obtido para os parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança é um valor negativo, embora esses parâmetros assumam apenas valores positivos.

Sendo assim, podemos concluir que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados, isto é, ambos os métodos se aproximaram do verdadeiro valor dos parâmetros, com os menores riscos a posteriori, com os menores viés, com os menores EQM's e as melhores probabilidades de cobertura.

Conclusão

Este trabalho buscou mostrar a importância de se trabalhar com a teoria de testes acelerados concomitante com os métodos de inferência estatística. Tendo como objetivo principal modelar dados que advêm de um teste acelerado do tipo step-stress assumindo alguns tipos de censura e além disso considerando que esses dados seguem uma distribuição Gama. Para que esse objetivo fosse atingindo, foi aplicado os métodos de inferência clássica e Bayesiana, a fim de comparar estes dois métodos por meio de simulações para diferentes tamanhos amostrais.

No Capítulo 1, foi realizada uma breve revisão dos principais conceitos que regem este trabalho, isto é, noções de análise de confiabilidade, tipos de censura e um pouco sobre a distribuição Gama. Foi discutido também os conceitos mais importantes que alicerçam a teoria de inferência clássica e a teoria de inferência Bayesiana.

No Capítulo 2, buscamos apresentar de maneira clara o que podemos considerar como o coração deste trabalho, isto é, foi apresentado os mais importantes pontos da teoria dos testes de vida acelerados.

No Capítulo 3, mostramos toda a formulação teórica e matemática que foi necessária para a construção do modelo step-stress simples sob censura tipo II e considerando a distribuição Gama. Durante esse capítulo, foi apresentado também alguns resultados numéricos obtidos utilizando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura, na qual aplicamos os dois métodos inferenciais abordadas, e tivemos como resultado final que o método bayesiano com função de perda de Entropia apresentou o melhor efeito.

No Capítulo 4, seguimos a mesma ideia apresentada no capítulo 3, contudo foi realizada a generalização do modelo. Em outras palavras, foi apresentado o modelo step-stress múltiplo sob censura tipo II, que é o caso em que consideramos m níveis de estresse. Inicialmente foi feita toda construção teórica e matemática do modelo, na qual foi apresentado alguns resultados numéricos para o caso que temos três ($m = 3$) níveis de estresse. Em um segundo momento neste capítulo, também apresentamos o modelo de parâmetro reduzido, que nada mais é do que uma reparametrização do modelo step-stress múltiplo. Neste caso também mostramos a formulação teórica deste modelo e apresentamos alguns resultados numéricos. De um modo geral, podemos concluir que os resultados numéricos obtidos tanto no modelo step-stress múltiplo quanto no modelo de parâmetro reduzido, apontaram que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia obtiveram os melhores resultados.

No Capítulo 5, utilizamos a mesma ideia apresentada no capítulo 3, contudo optamos em trabalhar com outro tipo de censura, isto é, foi construído o modelo step-stress simples sob censura progressiva tipo II e considerando a distribuição Gama. Como em todos os outros modelos apresentados, neste também foi realizada a construção matemática

do modelo e no final apresentado alguns resultados numéricos obtidos. Com base nisso foi possível concluir que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados.

No Capítulo 6, seguimos a mesma ideia apresentada no capítulo 4, em que agora foi realizado a construção do modelo step-stress múltiplo sob censura progressiva do tipo II. Neste capítulo foi feita toda construção teórica e matemática do modelo, na qual foi apresentado alguns resultados numéricos para o caso que temos três ($m = 3$) níveis de estresse. De um modo geral podemos concluir novamente que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram os melhores resultados.

Por fim, no capítulo 7 seguimos a mesma ideia apresentada no capítulo 3 deste trabalho, todavia consideramos que um item poderia falhar por duas possíveis causas. Sendo assim, neste capítulo apresentamos toda construção teórica e matemática do modelo step-stress simples sob censura tipo II considerando riscos competitivos. Durante esse capítulo, foi apresentado também alguns resultados numéricos obtidos utilizando diferentes tamanhos amostrais com 20% e 40% de censura, na qual aplicamos os dois métodos inferenciais abordadas, e tivemos como resultado final que tanto o método de máxima verossimilhança quanto o método bayesiano com funções de perda Linex e Entropia apresentaram resultados satisfatórios.

8.1 Perspectivas Futuras

O método de testes acelerados concomitante com riscos competitivos abre um novo horizonte de aplicações e estudos teóricos.

Dentro da teoria de riscos competitivos um dos problemas típicos, é a consideração ou não da independência dos tempos de falha. De modo que considerar independência em alguns casos pode não estar retratando a realidade.

Neste sentido, construir modelos de testes acelerados do tipo step-stress abordando diferentes tipos de censura e considerando riscos competitivos, sob a suposição de independência e dependência dos tempos de falha é algo extremamente atrativo.

Referências

- ABDELMONEM, G. H.; JAHEEN, Z. Bayesian estimation for a multi step-stress accelerated generalized exponential model with type-II censored data. *Journal of Mathematical and Computational Science*, Science & Knowledge Publishing Corporation Limited (SCI-K), v. 7, n. 2, p. 292, 2017.
- ALKHALFAN, L. *Inference for a gamma step-stress model under censoring*. 2012. 231 f. Tese (Doutorado) — McMaster University, 2012.
- ARNOLD, B. C.; BALAKRISHNAN, N.; NAGARAJA, H. N. *A first course in order statistics*. [S.l.]: SIAM, 2008.
- ASSANE, C. C. *Análise de dados de sobrevivência na presença de riscos competitivos*. 2013. 100 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.
- BALAKRISHNAN, N.; BEUTNER, E.; KATERI, M. Order restricted inference for exponential step-stress models. *IEEE Transactions on Reliability*, IEEE, v. 58, n. 1, p. 132–142, 2009.
- BALAKRISHNAN, N.; HAN, D. Exact inference for a simple step-stress model with competing risks for failure from exponential distribution under type-ii censoring. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, v. 138, n. 12, p. 4172–4186, 2008.
- BALAKRISHNAN, N.; SANDHU, R. A simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. *The American Statistician*, Taylor & Francis Group, v. 49, n. 2, p. 229–230, 1995.
- BALAKRISHNAN, N.; ZHANG, L.; XIE, Q. Inference for a simple step-stress model with Type-I censoring and lognormally distributed lifetimes. *Communications in Statistics Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 38, n. 10, p. 1690–1709, 2009.
- BHATTACHARYYA, G.; SOEJOETI, Z. A tampered failure rate model for step-stress accelerated life test. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 18, n. 5, p. 1627–1643, 1989.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. *Introdução à inferência estatística*. [S.l.]: SBM, 2001. v. 2.
- BRITO, É. S. d. *Modelos de censura tipo II progressiva e propriedades assintóticas do estimador de máxima verossimilhança*. 2014. 78 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2014.
- CALABRIA, R.; PULCINI, G. Point estimation under asymmetric loss functions for left-truncated exponential samples. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 25, n. 3, p. 585–600, 1996.

- CHANDRA, N.; KHAN, M. A.; PANDEY, M. Optimum test plan for 3-step, step-stress accelerated life tests. *International Journal of Performability Engineering*, v. 10, n. 1, 2014.
- DEGROOT, M. H.; GOEL, P. K. Bayesian estimation and optimal designs in partially accelerated life testing. *Naval Research Logistics (NRL)*, Wiley Online Library, v. 26, n. 2, p. 223–235, 1979.
- DEY, S.; ALI, S.; PARK, C. Weighted exponential distribution: properties and different methods of estimation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 85, n. 18, p. 3641–3661, 2015.
- DORP, J. R. V. et al. A bayes approach to step-stress accelerated life testing. *IEEE Transactions on Reliability*, IEEE, v. 45, n. 3, p. 491–498, 1996.
- EL-DIN, M. M. et al. Parametric inference on step-stress accelerated life testing for the extension of exponential distribution under progressive type-II censoring. *Communications for Statistical Applications and Methods*, Korean Statistical Society, v. 23, n. 4, p. 269–285, 2016.
- ELANDT-JOHNSON, R. C.; JOHNSON, N. L. *Survival models and data analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. v. 74.
- ELLAH, A. A. Parametric prediction limits for generalized exponential distribution using record observations. *Applied Mathematics & Information Sciences*, v. 3, n. 2, p. 135–149, 2009.
- FONSECA, D. d. R. *Um novo mecanismo para a transformação de resultados provenientes de testes de vida acelerado para resultados estimados em uma condição normal de uso através da utilização de lei de distribuição de Maxwell*. 2012. 146 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Fluminense, 2012.
- FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A. *Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados*. [S.l.]: Escola de Engenharia da UFMG/Fundação Christiano Ottoni, 1997.
- GAIL, M. A review and critique of some models used in competing risk analysis. *Biometrics*, JSTOR, p. 209–222, 1975.
- GAMERMAN, D. Mcmc - a revolução da estatística bayesiana. 2013. Disponível em: <<http://www.statpop.com.br/2013/05/mcmc-revolucao-da-estatistica-bayesiana.html>>.
- GARTHWAITE, P. H.; KADANE, J. B.; O'HAGAN, A. Statistical methods for eliciting probability distributions. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 100, n. 470, p. 680–701, 2005.
- GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, IEEE, n. 6, p. 721–741, 1984.
- GIOLO, S. R.; COLOSIMO, E. A. *Análise de sobrevivência aplicada*. [S.l.: s.n.], 2006.
- HAN, D.; KUNDU, D. Inference for a step-stress model with competing risks for failure from the generalized exponential distribution under type-i censoring. *IEEE Transactions on reliability*, IEEE, v. 64, n. 1, p. 31–43, 2015.

- HASTINGS, W. K. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 57, n. 1, p. 97–109, 1970.
- ISLAM, A. F. M. S. *Loss functions, utility functions and Bayesian sample size determination*. 2011. 222 f. Tese (Doutorado) — University of London, 2011.
- ISMAIL, A. A.; SARHAN, A. M. Optimal design of step-stress life test with progressively Type-II censored exponential data. In: *International Mathematical Forum*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 4, n. 40, p. 1963–1976.
- JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. [S.l.: s.n.], 1996.
- KALBFLEISCH, J. D.; PRENTICE, R. L. *The statistical analysis of failure time data*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1980. v. 360.
- KASS, R. E.; WASSERMAN, L. The selection of prior distributions by formal rules. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 91, n. 435, p. 1343–1370, 1996.
- KATERI, M.; BALAKRISHNAN, N. Inference for a simple step-stress model with Type-II censoring, and weibull distributed lifetimes. *IEEE Transactions on Reliability*, IEEE, v. 57, n. 4, p. 616–626, 2008.
- KHAMIS, I. H.; HIGGINS, J. J. A new model for step-stress testing. *IEEE Transactions on Reliability*, IEEE, v. 47, n. 2, p. 131–134, 1998.
- KLEIN, J. P.; BASU, A. P. Weibull accelerated life tests when there are competing causes of failure. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 10, n. 20, p. 2073–2100, 1981.
- LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 362.
- LEE, J.; PAN, R. Bayesian inference model for step-stress accelerated life testing with type-II censoring. In: IEEE. *Reliability and Maintainability Symposium, 2008. RAMS 2008. Annual*. [S.l.], 2008. p. 91–96.
- LEE, J.; PAN, R. Bayesian analysis of step-stress accelerated life test with exponential distribution. *Quality and Reliability Engineering International*, Wiley Online Library, v. 28, n. 3, p. 353–361, 2011.
- MADI, M. T. Multiple step-stress accelerated life test: the tampered failure rate model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 22, n. 9, p. 295–306, 1993.
- MANN, N. R.; SINGPURWALLA, N. D.; SCHAFER, R. E. *Methods for statistical analysis of reliability and life data*. Wiley, 1974.
- METROPOLIS, N.; ULAM, S. The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis Group, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949.
- NELSON, W. B. *Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 344.
- PINTILIE, M. *Competing risks: a practical perspective*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. v. 58.

- PINTO, J. M. A. *Métodos estatísticos para testes acelerados com esforço aplicado em escada em um estudo de fadiga mecânica*. 2000. 52f. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Estatística, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- PINTO, J. M. A. *Modelagem de testes acelerados com esforço aplicado em níveis em um estudo de fadiga mecânica*. 2004. 134 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2004.
- ROBERT, C. P. *Monte carlo methods*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2004.
- SINDHU, T. N.; FERROZE, N.; ASLAM, M. Bayesian analysis of the kumaraswamy distribution under failure censoring sampling scheme. *International Journal of Advanced Science and Technology*, v. 51, p. 39–58, 2013.
- TARUMOTO, M. H. *Um modelo Weibull bivariado para riscos competitivos*. 2001. 156 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2001.
- VIEIRA, D. d. S. *Uso de métodos bayesianos em testes de vida acelerados no controle da qualidade de produtos industriais*. 2006. 149 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2006.
- WANG, B. X.; YU, K. Optimum plan for step-stress model with progressive type-II censoring. *Test*, Springer, v. 18, n. 1, p. 115–135, 2007.
- WANG, R. et al. On parameter inference for step-stress accelerated life test with geometric distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 41, n. 10, p. 1796–1812, 2012.
- XIONG, C. Inferences on a simple step-stress model with type-II censored exponential data. *IEEE transactions on reliability*, IEEE, v. 47, n. 2, p. 142–146, 1998.
- YUEN, H.-K.; TSE, S.-K. Parameters estimation for weibull distributed lifetimes under progressive censoring with random removeals. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 55, n. 1-2, p. 57–71, 1996.