

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**DINÂMICA NÃO LINEAR DE SISTEMAS DE
LEVITAÇÃO MAGNÉTICA**

Autor: Hassan Costa Arbex

Orientador: Prof. Titular. José Manoel Balthazar

Bauru, 2012

SP, Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DINÂMICA NÃO LINEAR DE SISTEMAS DE LEVITAÇÃO MAGNÉTICA

Autor: Hassan Costa Arbex

Orientador: Prof. Titular José Manoel Balthazar

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Projeto Mecânico

Arbex, Hassan Costa.

Dinâmica não linear de sistemas de levitação
magnética / Hassan Costa Arbex, 2012
138 f.

Orientador: José Manoel Balthazar

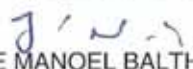
Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2012

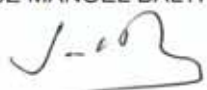
1. Efeito Sommerfeld. 2. Oscilador não ideal. 3.
Maglev. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade
de Engenharia. II. Título.



ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE HASSAN COSTA ARBEX, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 05 dias do mês de julho do ano de 2012, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR do(a) Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação / Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro - UNESP, Prof. Dr. JÚLIO CESAR RUIZ CLAEYSSEN do(a) Departamento de Matemática Pura e Aplicada / Instituto de Matemática do Rio Grande do Sul - UFRGS, Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de HASSAN COSTA ARBEX, intitulado "DINÂMICA NÃO LINEAR DE SISTEMAS DE LEVITAÇÃO MAGNÉTICA". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR


Prof. Dr. JÚLIO CESAR RUIZ CLAEYSSEN


Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Bauru, 2012

SP - Brasil

DEDICATÓRIA

A meu pai Márcio e minha mãe Maria Elena pelo apoio, incentivo, dedicação, sempre serão os melhores exemplos de amor e superação.

À minha noiva Ana Paula pelo carinho e compreensão durante a realização deste projeto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Professor Titular. José Manoel Balthazar por conduzir - me neste trabalho com muita sabedoria e dedicação e principalmente por sempre me incentivar a adquirir novos conhecimentos.

Ao Professor Dr. Bento Pontes Junior por sempre auxiliar a condução dos trabalhos melhorando a compreensão do problema.

Aos meus grandes velhos amigos irmãos Carlos e Kleber e aos novos e não menores, Itamar, Willians, Ricardo e Fernando, que compartilharam todos os momentos desse trabalho e sempre me ajudaram a evoluir e realizar esse projeto.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de mestrado. Ao Departamento de Engenharia Mecânica e a Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru por propiciarem as melhores condições para que esse trabalho fosse realizado.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”

-Isaac Newton -

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	16
1.1	MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA.....	17
1.2	SISTEMAS DINÂMICOS IDEAIS E NÃO IDEAIS	17
1.2.1	Sistema dinâmico do tipo ideal.....	18
1.2.2	Sistema dinâmico do tipo não ideal.	18
1.3	LEVITAÇÃO MAGNÉTICA.....	22
1.4	OBJETIVOS	23
1.5	MATERIAIS.....	24
1.6	ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO.....	24
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	25
2.1	LEVITAÇÃO MAGNÉTICA.....	28
2.2	ABSORVEDORES DE VIBRAÇÃO	29
2.2.1	Nonlinear Energy Sink (NES)	30
2.3	MODELOS MOTIVADORES	32
3	MODELAGEM MATEMÁTICA DE BLOCOS EM MOVIMENTO	39
3.1	MODELO MATEMÁTICO 1	41
3.2	MODELO MATEMÁTICO 2	44
3.3	MODELO MATEMÁTICO 3	49
3.4	MODELO MATEMÁTICO 4	54
3.5	MODELO MATEMÁTICO 5	60
3.6	MODELO MATEMÁTICO 6	63
3.7	MODELO MATEMÁTICO 7	68
3.8	MODELO MATEMÁTICO 8	72
3.9	MODELO MATEMÁTICO 9	79
3.10	MODELO MATEMÁTICO 10	81
3.11	MODELO MATEMÁTICO 11	85
3.12	MODELO MATEMÁTICO 12	89
4	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DE UM SISTEMA VIBRATÓRIO ACOPLADO A UM ABSORVEDOR DE ENERGIA NÃO LINEAR (NES).....	95
4.1	SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS	97
4.1.1	Excitação por um impulso	97
4.1.2	Excitação por uma força harmônica.....	99

5	COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM BLOCO EM MOVIMENTO TIPO MAGLEV NÃO IDEAL	107
5.1	MODELO MATEMÁTICO	108
5.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS	111
5.2.1	Efeito Sommerfeld	111
5.2.2	Controle	112
5.2.3	Comparação dos sistemas	117
5.2.4	Aparecimento do Fenômeno de Outros Saltos	118
6	CONCLUSÕES	125
	REFERÊNCIAS	127
	SUMULA CURRICULAR	138

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1.1. EXEMPLO DE UM SISTEMA IDEAL.	18
FIGURA 1.1. EXEMPLO DE UM SISTEMA NÃO IDEAL.	21
FIGURA 1.3. CURVAS CARACTERÍSTICAS DO MOTOR CC.	22
FIGURA 2.1. TVA ACOPLADO A UM OSCILADOR IDEAL (VIGUIÉ, R., 2010).	30
FIGURA 2.2. NES ACOPLADO A UM OSCILADOR LINEAR (VIGUIÉ, R., 2010).	31
FIGURA 2.3. MODELO NÃO IDEAL DE UM SISTEMA AUTOPARAMÉTRICO (SADO E KOT, 2007).	32
FIGURA 2.4. DIAGRAMA DO SISTEMA CONSIDERADO (SADO E GAJOS, 2008).	33
FIGURA 2.5. PÊNDULO ELETROMECHANICO (DIAS, 2006 E SANTOS, 2009).	34
FIGURA 2.6. SISTEMA MECÂNICO DE PÊNDULO ELETROMECHANICO VERTICAL (ELIAS, 2009).	35
FIGURA 2.7. MODELO UTILIZADO POR YABUNO 2010.	36
FIGURA 2.8. EXPERIMENTO REALIZADO POR YABUNO 2010	36
FIGURA 2.9. MODELO UTILIZADO POR GENDELMAN 2011.	37
FIGURA 3.1. SISTEMA EXCITADO HORIZONTALMENTE POR UMA FORÇA HARMÔNICA.	41
FIGURA 3.2. SISTEMA EXCITADO HORIZONTALMENTE POR UMA FORÇA HARMÔNICA, ACOPLADO A UMA MASSA DESBALANCEADA.	44
FIGURA 3.3. SISTEMA EXCITADO POR UM MOTOR DE POTÊNCIA LIMITADA COM UMA MASSA DESBALANCEADA.	49
FIGURA 3.4. SISTEMA EXCITADO POR UM MOTOR DE POTÊNCIA LIMITADA COM UMA MASSA DESBALANCEADA, ACOPLADO A UM PÊNDULO.	54
FIGURA 3.5. SISTEMA EXCITADO VERTICALMENTE POR UMA FORÇA HARMÔNICA.	60
FIGURA 3.6. SISTEMA EXCITADO VERTICALMENTE POR UMA FORÇA HARMÔNICA, ACOPLADO A UMA MASSA DESBALANCEADA.	63
FIGURA 3.7. SISTEMA EXCITADO POR UM MOTOR DE POTÊNCIA LIMITADA COM UMA MASSA DESBALANCEADA.	68
FIGURA 3.8. SISTEMA EXCITADO POR UM MOTOR DE POTÊNCIA LIMITADA COM UMA MASSA DESBALANCEADA, ACOPLADO A UM PÊNDULO	72
FIGURA 3.9. MAGLEV SIMPLIFICADO	79
FIGURA 3.10. MAGLEV ACOPLADO A UMA MASSA DESBALANCEADA ATUANDO COMO ABSORVEDOR DE ENERGIA	81
FIGURA 3.11. MAGLEV NÃO IDEAL.	85
FIGURA 3.12. MAGLEV NÃO IDEAL, IDEAL ACOPLADO A UM PÊNDULO.	89
FIGURA 4.1. MODELO PROPOSTO POR GENDELMAN (2011).	96
FIGURA 4.2. DESLOCAMENTO COMPARATIVO DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (CINZA) E SEM NES (PRETO).	98
FIGURA 4.3. VELOCIDADE COMPARATIVA DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (CINZA) E SEM NES (PRETO).	98
FIGURA 4.4. RETRATO DE FASE DO SISTEMA COM NES (PRETO) E SEM NES (VERMELHO).	99
FIGURA 4.5. DESLOCAMENTO COMPARATIVO DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (CINZA) E SEM NES (PRETO).	100

FIGURA 4.6. VELOCIDADE COMPARATIVA DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (CINZA) E SEM NES (PRETO).	100
FIGURA 4.7. RETRATO DE FASE DO SISTEMA COM NES (PRETO) E SEM NES (VERMELHO).	101
FIGURA 4.8. ANÁLISE DO PARÂMETRO ε_1 .	102
FIGURA 4.9. DESLOCAMENTO COMPARATIVO DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (VERMELHO) E SEM NES (PRETO).	102
FIGURA 4.10. VELOCIDADE COMPARATIVA DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (VERMELHO) E SEM NES (PRETO).	103
FIGURA 4.11. RETRATO DE FASE DO SISTEMA COM NES (VERMELHO) E SEM NES (PRETO).	103
FIGURA 4.12. RETRATO DE FASE DO ABSORVEDOR.	104
FIGURA 4.13. DESLOCAMENTO COMPARATIVO DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (CINZA) E SEM NES (PRETO) (EXCITAÇÃO HARMÔNICA).	104
FIGURA 4.14. VELOCIDADE COMPARATIVA DO SISTEMA PRINCIPAL COM NES (VERMELHO) E SEM NES (PRETO) (EXCITAÇÃO HARMÔNICA).	105
FIGURA 4.15. RETRATO DE FASE DO SISTEMA COM NES (VERMELHO) E SEM NES (PRETO) (EXCITAÇÃO HARMÔNICA).	105
FIGURA 4.16. RETRATO DE FASE DO ABSORVEDOR (EXCITAÇÃO HARMÔNICA).	106
FIGURA 5.1. MODELO SIMPLIFICADO DE UM MAGLEV NÃO IDEAL.	108
FIGURA 5.2. MAGLEV NÃO IDEAL, IDEAL ACOPLADO A UM PÊNDULO.	109
FIGURA 5.3. ANÁLISE DAS FUNÇÕES F E F_1 .	110
FIGURA 5.4. EFEITO SOMMERFELD – A) AMPLITUDE POR FREQUÊNCIAS MÉDIAS; B) – AMPLITUDE POR TENSÃO DO MOTOR.	112
FIGURA 5.5. EFEITO SOMMERFELD – A) AMPLITUDE POR FREQUÊNCIAS MÉDIAS; B) – AMPLITUDE POR TENSÃO DO MOTOR.	113
FIGURA 5.6. COMPARAÇÃO DOS SISTEMAS: SEM PÊNDULO (CINZA) E COM PÊNDULO (PRETO).	113
FIGURA 5.7. MECANISMO UTILIZADO PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÕES.	114
FIGURA 5.8. Função de controle a) $G(y_2)$ (5.8) b) $G(y_2) = \tanh(\beta y_2)$.	115
FIGURA 5.9. A) VARIAÇÃO DA AMPLITUDE MÁXIMA($\mu_1=12.5$) POR β B) ZOOM DA FIGURA 4A.	116
FIGURA 5.10. VARIAÇÃO DA AMPLITUDE MÁXIMA($\mu_1=12.5$) POR α .	116
FIGURA 5.11. ZOOM DA FIG. (5.8).	117
FIGURA 5.12. EFEITO SOMMERFELD – COMPARAÇÃO – A) AMPLITUDE POR FREQUÊNCIAS MÉDIAS; B) AMPLITUDE POR TENSÃO DO MOTOR.	117
FIGURA 5.13. COMPARAÇÃO DO DESLOCAMENTO ENTRE O SISTEMA COM CONTROLE (CINZA) E SEM CONTROLE (PRETO).	118
FIGURA 5.14. EFEITO SOMMERFELD – AMPLITUDE VS FREQUENCIA DO MOTOR.	119
FIGURA 5.15. EFEITO SOMMERFELD - AMPLITUDE VS TENSÃO DO MOTOR.	120
FIGURA 5.16. EFEITO SOMMERFELD – AMPLITUDE VS FREQUENCIA DO MOTOR (COM PÊNDULO).	120
FIGURA 5.17. EFEITO SOMMERFELD - AMPLITUDE VS TENSÃO DO MOTOR (COM PÊNDULO).	121

FIGURA 5.18. SISTEMA ACOPLADO AO PENDULO (PRETO) E SEM PENDULO (CINZA).	121
FIGURA 5.19. EFEITO SOMMERFELD - COMPARAÇÃO– AMPLITUDE VS FREQUÊNCIA DO MOTOR.	122
FIGURA 5.20. EFEITO SOMMERFELD - COMPARAÇÃO– AMPLITUDE VS TENSÃO DO MOTOR.	122
FIGURA 5.21. COMPARAÇÃO DO DESLOCAMENTO ENTRE O SISTEMA COM CONTROLE (CINZA) E SEM CONTROLE (PRETO).	123
FIGURA 5.22. EFEITO SOMMERFELD - SISTEMA PENDULAR – COMPARAÇÃO - AMPLITUDE VS FREQUÊNCIAS MÉDIAS.	124
FIGURA 5.23. EFEITO SOMMERFELD - SISTEMA PENDULAR – COMPARAÇÃO - AMPLITUDE VS TENSÃO DO MOTOR.	124

NOMENCLATURA

d	Distância inicial entre o bloco e a base magnética.
h	Distância entre o eixo de rotação do motor e a base magnética.
m_1	Massa do bloco.
m_2	Massa desbalanceada.
m_3	Massa do pêndulo.
q_1	Deslocamento do bloco (horizontal ou vertical).
q_2	Deslocamento angular da massa desbalanceada.
q_3	Deslocamento angular do pêndulo.
r	Excentricidade.
l	Tamanho do pêndulo
J_2	Momento de inércia do motor.
$M(\dot{q}_2)$	Função de torque da fonte de energia (motor).
N_i	Forças não conservativas.
g	Gravidade.
c_1	Amortecimento do bloco.
c_2	Amortecimento da massa desbalanceada.
c_3	Amortecimento do pêndulo.
μ_1	Tensão do motor.
μ_2	Característica do motor.

RESUMO

Arbex, Hassan Costa, dinâmica não linear de sistemas de levitação magnética. Bauru: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2012, 138 pp., Dissertação (Mestrado).

O propósito deste trabalho foi estudar as não linearidades na dinâmica de sistemas mecânicos e eletromecânicos. Entre eles inclui-se um corpo em levitação. As não linearidades levam o movimento da estrutura para o Efeito Sommerfeld. Por este fato, o trabalho do motor fica próximo ou na frequência de ressonância. Quando a estrutura atinge a condição de ressonância, a melhor parte da energia é consumida para gerar vibrações de grande amplitude sem nenhuma mudança sensível na frequência do motor. Neste trabalho, foi verificado o fenômeno para alguns sistemas não ideais inclusive o sistema com levitação magnética, discutindo uma forma de conduzir o sistema à condição de ressonância e evitar o "absorvedor de energia" que ocorre com o efeito Sommerfeld.

Palavras chave: Efeito Sommerfeld, Oscilador não ideal, Maglev.

ABSTRACT

Arbex, Hassan Costa, on a nonlinear dynamics of magnetic levitation systems, Bauru: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2012, 138 pp., Dissertação (Mestrado).

This paper studies the nonlinearities in dynamics of mechanics and electro mechanics non ideal systems. One of them is a magnetically levitated body. These nonlinearities lead the motion of the structure to the Sommerfeld Effect. For this reason the motor's near or in resonance frequency. When the structure achieves the resonance condition, the best part of the energy is consumed to generate large amplitude vibration, with no sensitive change in the motor frequency. In this paper, is checked whether the phenomenon in some non ideal systems and also, if occurs with magnetic levitation. Will be discussed how to drive the system to resonance condition and to avoid the “energy sink” that occurs with the Sommerfeld effect

Key words: Sommerfeld effect, Non-ideal oscillator, Maglev.

1 INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Problemas de controle de sistemas complexos oscilatórios têm atraído grande interesse no domínio da dinâmica não linear. Na maior parte desses estudos, há uma maior atenção às soluções que possuem características caóticas, uma vez que o sistema perde estabilidade perto de um ponto de bifurcação. Entre esses sistemas, não linearidades podem ocorrer gerando situações em que o funcionamento desses sistemas é prejudicado. Para que seja possível a análise, primeiramente é necessário uma modelagem matemática do sistema a ser estudado. Depois após efetuar uma modelagem matemática, realizar simulações numéricas para estudar o comportamento desses modelos, o estudo é orientado para a descoberta de meios ou mecanismos que controlam o comportamento não linear próximo à região de ressonância, com o objetivo de obter um comportamento desejado dentro de um domínio de instabilidade dos parâmetros escolhidos.

Um corpo excitado por uma fonte de energia de potência limitada, um bloco com excitação paramétrica e um sistema de levitação magnética são alguns exemplos de sistemas não lineares. A seguir há uma breve explanação sobre sistemas ideais e não ideais.

1.2 SISTEMAS DINÂMICOS IDEAIS E NÃO IDEAIS

Uma das classificações das fontes de energia é aquela que divide as fontes de energia em ideais e não ideais. Essa classificação leva em conta os efeitos experimentados por um acoplamento ou não do sistema vibrante e do motor atuante no

sistema. Por isso, as fontes de energia ideais são aquelas nas quais esse acoplamento não é considerado e, portanto a análise do sistema é simplificada significativamente.

1.2.1 Sistema dinâmico do tipo ideal.

Quando a excitação da fonte de energia não é influenciada pela resposta do sistema, é dita uma excitação ideal.

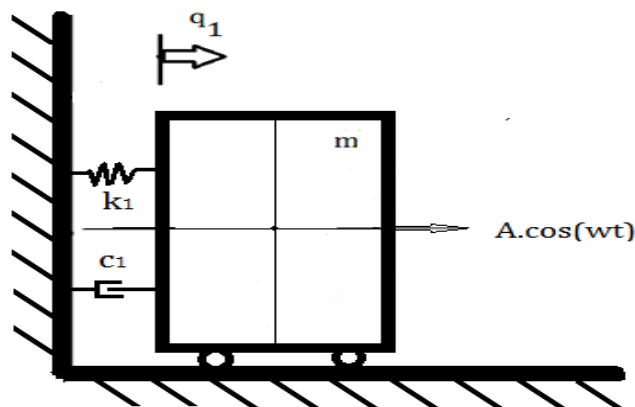


Figura 1.1. Exemplo de um sistema ideal

1.2.2 Sistema dinâmico do tipo não ideal.

Por outro lado, quando uma excitação é influenciada pela resposta do sistema, é dita não ideal. Assim, dependendo da excitação, refere-se a um sistema dinâmico como ideal ou não ideal. O comportamento ideal de sistemas é bem conhecido na atual literatura, mas há poucos resultados sobre os não ideais.

O comportamento do sistema dinâmico se afasta do caso ideal à medida que a potência da fonte excitadora torna-se limitada. Para sistemas dinâmicos não ideais, deve-se adicionar uma equação que descreve como a fonte de energia passa essa energia às equações que governam o correspondente sistema dinâmico ideal

É usual desconsiderar, no modelo matemático, a influência do movimento do próprio sistema em sua excitação. Entretanto esta simplificação, no modelo matemático

pode não ser satisfatória, devendo-se levar em conta que a sua fonte, é influenciada pela própria resposta do sistema. Quando, em um sistema, é considerada a influência da resposta na fonte de energia tem-se um sistema vibratório não ideal, ou um sistema com fonte de excitação, não ideal. Nota-se características importantes deste tipo de modelo matemático de sistema dinâmico, provenientes da interação da estrutura com a fonte de excitação, tais como: Variações bruscas (saltos ou “jumps”) da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação; Descontinuidade da curva amplitude versus frequência; Influência do perfil da curva “amplitude versus frequência” quando o operador altera a velocidade do motor elétrico, em acréscimos e/ou decréscimos.

Portanto os sistemas dinâmicos, modelados matematicamente, como sendo não ideais, possuem um grau de liberdade superior ao sistema ideal correspondente.

Essa relação do sistema vibratório com a sua fonte de energia torna a dinâmica desse sistema bastante complexa com a ocorrência de alguns fenômenos, principalmente perto da região da ressonância, como, por exemplo, o aumento da potência exigida pela fonte, o fenômeno do salto e caos.

Em 1969, Kononenko, em seu livro elabora um rico estudo sobre sistemas dinâmicos com fonte de potência limitada, no qual faz referência a vários trabalhos e experimentos na área.

Os fenômenos do aumento da potência exigida pela fonte e o fenômeno do salto são efeitos descobertos por Sommerfeld e, portanto denominado de Efeito Sommerfeld (Sommerfeld, 1904, Nayfeh e Mook, 1979). Já a ocorrência do caos nos sistemas não ideais está associada, tanto a presença de termos não lineares quanto à presença de pontos de bifurcação e surgimento de regiões de instabilidade e regimes não

estacionários na região da ressonância. Por isso, a importância de se estudar o sistema nessa região.

O efeito Sommerfeld surge ao se elevar continuamente a tensão de alimentação do motor, estando esse com frequência de rotação próxima a região de ressonância do sistema, provocando o aumento da sua rotação, até o momento que essa se estabiliza em torno de um determinado valor (igual a da frequência natural do sistema). A partir deste instante, sucessivos acréscimos da tensão somente elevam a potência elétrica absorvida pelo motor, que não é mais canalizada para alterar a sua rotação, mas sim para aumentar as amplitudes de vibração da estrutura, Palácios (2002). O processo possui um limite: quando a estrutura não é mais capaz de absorver a energia cedida pelo motor, a rotação dispara, atingindo, após certo período, valores estáveis e proporcionais a tensão de alimentação.

As equações de movimento, representativa do sistema dinâmico não ideal de vibrações, podem se esquematizadas, modelados matematicamente, da seguinte forma, Balthazar e Brasil (2001):

Sendo x é o movimento descrito pela estrutura e θ é o ângulo de rotação do motor, segue que:

Primeiro conjunto de equações:

Equações dinâmicas da estrutura em x + termos de interação (em x e em θ) =
equações da excitação externa, atrito ou amortecimento.

Segundo conjunto de equações:

Equações de rotação do eixo do motor (relativas ao torque e com termos em $\frac{d^2\theta}{dt^2}$)
 + outros termos de interação (em x e em θ) = equações características do motor (
 relativas ao torque e com termos em $L\frac{d\theta}{dt}$),

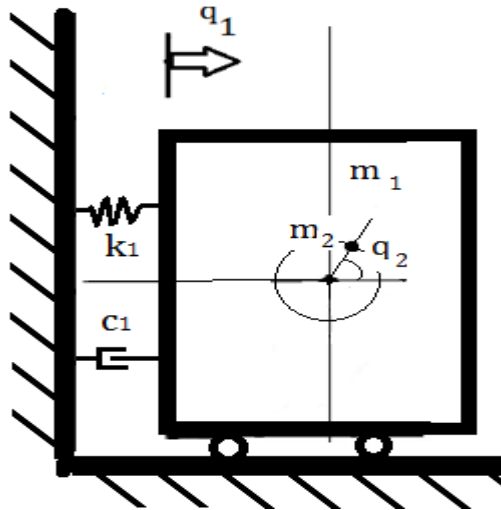


Figura 1.2. Exemplo de um sistema não ideal.

Um fato importante é que as não linearidades vêm da modelagem matemática da estrutura, no caso do problema não ideal a presença de uma única fonte de energia, em geral contribui com a ação de não linearidades do tipo quadráticas, presente no termo de energia cinética devido ao desbalanceamento do motor de corrente contínua, Nayfeh e Mook (1979).

Nota-se que as vibrações provenientes de aceleração e desaceleração do motor elétrico são representadas pela função L , ou seja, ela representa o torque desenvolvido pelo motor elétrico e a curva característica relaciona o torque com a velocidade angular.

A cada ponto toma-se a velocidade angular do motor quando em rotação constante, formando uma curva, chamada curva característica estática, determinando o funcionamento do motor em estado estacionário. Todos os motores possuem esta

família de curvas e todas elas representam a mesma relação de grandeza, mas cada uma corresponde a um valor de tensão aplicada ao motor.

Cada valor da tensão aplicada nos terminais do motor produz uma correspondente curva característica, cada uma delas relacionadas a um valor de potência constante, mas diferentes entre si.

A Figura 1 ilustra o plano torque versus frequência de rotação.

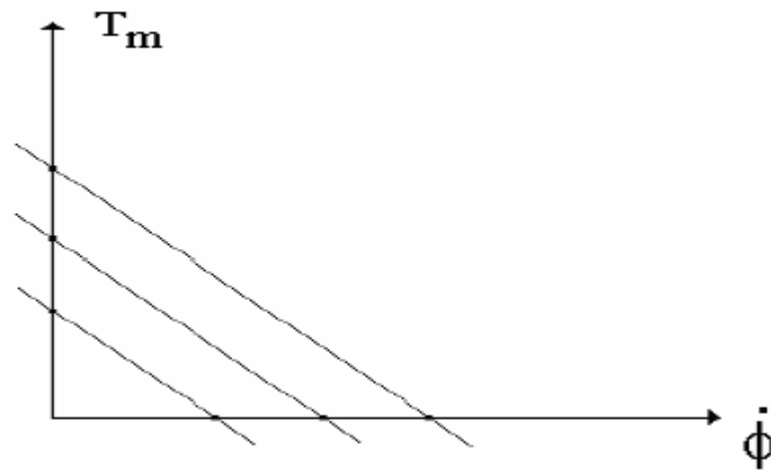


FIGURA 1.3. CURVAS CARACTERÍSTICAS DO MOTOR CC.

Onde $\dot{\Phi}$ representa a rotação e Tm o torque desenvolvido pelo motor.

1.3 LEVITAÇÃO MAGNÉTICA

A levitação magnética através de eletroímã, vem sendo realizada desde 1930 (Carmichael, 1986), com o propósito de estudar o comportamento não linear deste tipo de dispositivo. Durante este período, os métodos utilizados para levitação magnética foram sendo aperfeiçoados, principalmente no que diz respeito aos sistemas de controle (Wong, 1986).

O método mais comum de levitação magnética é baseado na utilização de um eletroímã (Moon, 2004), (Carmichael, 1986), (Wong1986) e (Oguchi e Tomigashi 1990).

O eletroímã é um ímã controlado por corrente elétrica, capaz de suspender um determinado objeto metálico a uma determinada altura (distância de operação) no eixo vertical, apenas com o campo magnético gerado pela corrente elétrica que circula no solenoide.

Um sistema de levitação magnética simples, é conhecido pelo acrônimo *MagLev* (*Magnetic Levitator*). Em um *MagLev* o sistema de controle é a parte fundamental do dispositivo, pois a levitação depende do equilíbrio entre as forças magnética e gravitacional.

1.4 OBJETIVOS

Os principais objetivos desta dissertação podem ser resumidos entre os seguintes tópicos:

- ✓ Entender e elaborar modelos matemáticos para os vários tipos de sistemas dinâmicos pesquisados, empregando um oscilador ideal e não ideal.
- ✓ Estudar um sistema dinâmico constituído de um bloco levantado magneticamente excitado por uma força externa do tipo não ideal, onde um motor elétrico de corrente contínua com potência limitada é acoplado ao bloco com a intenção de perturbar o sistema e promover oscilações.
- ✓ Realização de um estudo numérico de vibrações não lineares que podem ocorrer na interação entre o bloco e um motor de corrente contínua com desbalanceamento.
- ✓ Avaliar dois métodos de controle sendo um controle passivo e outro ativo.

1.5 MATERIAIS

Nas simulações numéricas realizadas utilizou-se um computador de uso pessoal. Para as simulações numéricas foi utilizado programa matemático MATLAB® sendo utilizadas rotinas de programação como:

- Integrador Runge Kutta, ODE 45 do MATLAB® para a integração direta das equações de movimento do sistema;
- Rotinas computacionais desenvolvidas para o MATLAB®.

1.6 ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO

O presente trabalho está dividido em seis capítulos. O primeiro capítulo trata de uma introdução posicionando o leitor sobre sistemas ideais e não ideais. No capítulo 2 é feita uma breve revisão histórica e bibliográfica sobre problemas ideais e não-ideais.

No capítulo 3 foram feitas as deduções das equações de movimento dos modelos matemáticos a serem estudados e no capítulo 4 os resultados das simulações numéricas de um sistema vibratório acoplado a um absorvedor de energia não linear (NES).

O capítulo 5 trata do estudo da dinâmica de um sistema do tipo MagLev não ideal. As conclusões deste trabalho serão apresentadas no capítulo 6.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na Grécia antiga já se vislumbrava entender o movimento dos corpos no espaço, com o especial interesse de descrever o funcionamento do Universo. Os avanços nos estudos de corpos celestes permitiram o desenvolvimento de ferramentas de observação, predição e contagem de tempo. Acreditava-se que modelando matematicamente este problema seria possível fazer previsões a respeito do futuro. Apesar de todo sistema determinista permitir fazer previsões sobre seu comportamento futuro a partir do conhecimento exato das condições iniciais e das leis matemáticas que regem seu comportamento, essa perfeição matemática, no entanto, esbarra na possibilidade real de se definir exatamente as condições iniciais (Monteiro, 2002).

Muitos estudos foram realizados em Mecânica Celeste até formalizar uma Teoria de Sistemas Dinâmicos. Foi Galileu quem introduziu conceitos de Dinâmica, a teoria que trata das causas dos movimentos.

Isaac Newton sintetizou os seus estudos em Leis de Gravitação Universal além de elaborar, paralelamente a Gottfried Leibnitz, o método do *cálculo diferencial e integral*. Jean Lê Rond d'Álembert, por sua vez, desenvolveu o estudo de cordas em vibração dando início ao estudo sistemático das equações diferenciais *parciais*.

Lagrange reformulou a dinâmica introduzindo o princípio da conservação de energia, que afirmava que todo o movimento de um corpo poderia ser descrito através das equações da sua energia em função da energia cinética e energia potencial. Além disso, introduziu um sistema de coordenadas para representação algébrica da geometria do movimento.

Para estudar a dinâmica do problema dos três corpos, Henri Poincaré criou um novo ramo da Matemática, a Topologia (Monteiro 2002). Ele notou que alguns sistemas possuíam grande variabilidade no comportamento das soluções devido às pequenas

alterações nas condições iniciais. A previsão nestes sistemas tornava-se impossível e eliminava-se a possibilidade de determinismo. Num extremo tem-se o movimento caótico, sensível às condições iniciais, e no outro a dinâmica regular dos sistemas integráveis, sendo que tipicamente esses movimentos surgem entrelaçados num mesmo sistema.

Até o final do século XIX modelos matemáticos de sistemas dinâmicos de vibração não levavam em conta a influência do comportamento do sistema sobre as fontes de vibração. Os modelos matemáticos que consideram a influência do comportamento do sistema sobre as fontes de vibração são chamados sistemas dinâmicos não ideais; uma equação que descreve a interação do fornecimento de energia com o sistema motor deve ser adicionada. Assim, como primeira característica, os sistemas não ideais de vibração tem um grau de liberdade a mais do que o correspondente sistema ideal.

Foi Sommerfeld quem deu início a uma nova classe de sistemas dinâmicos, os chamados: sistemas dinâmicos não ideais. Esses sistemas possuem uma fonte de excitação operando com potência limitada. Sommerfeld notou que na região de ressonância, a rotação do motor variava de maneiras distintas, dependendo não só do tempo mas também da oscilação do sistema. Ele observou a dependência da curva de ressonância com relação à variação da frequência da força de excitação, o fenômeno do salto ("jump") durante a passagem pela região de ressonância (Monteiro, 2002).

O fenômeno de salto na amplitude de vibração e do aumento da potência exigida pela fonte para operar próximo da região de ressonância do sistema são manifestações de um problema não ideal, geralmente são conhecidos na literatura como Efeito Sommerfeld. Este fenômeno sugere que a resposta vibratória do sistema não ideal emula um "absorvedor de energia" nas regiões próximas à ressonância do sistema, transferindo

a potência da fonte de vibrações da estrutura de apoio, ao invés da aceleração da máquina. Em outras palavras, um dos problemas enfrentados pelo engenheiro mecânico é fazer um sistema passar pela região de ressonância. Uma revisão de problemas não ideais foi publicado em Balthazar e Mook, (2003).

2.1 LEVITAÇÃO MAGNÉTICA

Desde o início das civilizações, há uma necessidade de viajar pequenas e grandes distâncias entre diferentes locais, nessa busca novas formas modernas e avançadas de locomoção surgem a cada dia. O primeiro problema de transporte terrestre foi como mover um grande número de pessoas. Somente em 1829 ocorreu a criação do primeiro serviço de transporte público em Londres, esta criação foi tradicionalmente atribuída a Georges Shilibeer.

De acordo com Moon, 2004, a suspensão de objetos e pessoas sem meios visíveis de sustentação é fascinante para a maioria das pessoas, mesmo em tempos de altas tecnologias. Sistemas Dinâmicos sem os efeitos da gravidade são um sonho comum para gerações de pensadores desde Benjamin Franklin a Robert Goddard. Um método encontrado para resolver esta questão foi a levitação magnética (maglev). A levitação magnética, maglev, ou suspensão magnética é um método pelo qual um objeto é suspenso, apoiado apenas pelos campos magnéticos. A pressão magnética é usada para neutralizar os efeitos da gravidade e todas as outras acelerações (Braunbeck, 1939).

O desenvolvimento moderno de sistemas de transporte de levitação magnética, conhecidos como maglev, começou no final dos anos 60, como uma consequência natural do desenvolvimento da baixa temperatura do fio supercondutor, um transistor e tecnologia de controle baseados em chips eletrônicos. Na década de 80, MagLev amadureceu a ponto de tecnólogos japoneses e alemães começarem a comercializar

essa nova tecnologia de alta velocidade (Moon, 2004). Desde a descoberta dos supercondutores, de acordo com Moon (1982), a levitação magnética tornou-se um símbolo das novas tecnologias. Além disso, um sistema de transporte de levitação magnética é capaz de instigar a imaginação do movimento dos corpos levitados. No entanto, há uma grande falta de entendimento sobre a levitação magnética.

2.2 ABSORVEDORES DE VIBRAÇÃO

Nesta seção será apresentada uma revisão sobre absorvedores passivos de energia em especial o NES (Nonlinear Energy Sink), pois será utilizado em trabalhos posteriores.

Vários trabalhos são desenvolvidos sobre absorvedores de vibrações, uma vez que, há um grande interesse em absorver e dissipar a parcela da energia de vibração que não é desejada para o sistema.

O absorvedor de vibração sintonizado (TVA), também conhecido como TMD – Tuning Mass Damper - é o dispositivo mais utilizado para redução de vibrações, isso se deve principalmente a sua característica linear que possibilita uma fácil aplicação em modelos simples, porém, em estruturas mais complexas não tem uma eficácia tão grande, pois como é um absorvedor sintonizado, ele funciona bem para uma única frequência e um modo de vibrar do sistema.

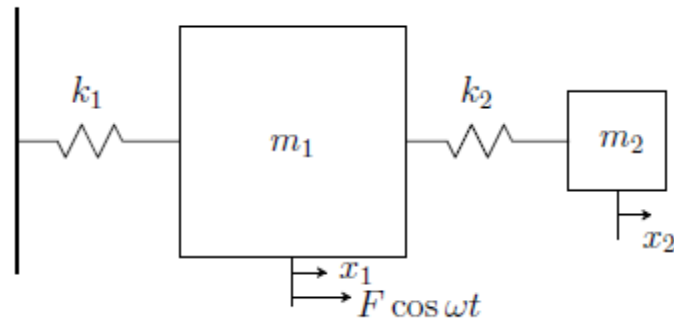


FIGURA 2.1. TVA ACOPLADO A UM OSCILADOR IDEAL (VIGUIÉ, R., 2010).

Frahm em 1911 foi pioneiro nos primeiros estudos sobre o TVA. Ele considerou uma massa m_2 acoplada a um oscilador linear harmônico por uma mola k_2 (figura 2.1).

Com a eficiência limitada do TVA, surgem sistemas de controle ativo com a vantagem de ter uma maior eficiência na absorção de vibrações, porém o gasto energético e o alto custo desses dispositivos são questões que os tornam menos atrativos. Nesse contexto, um diferente absorvedor de vibração se faz necessário para trabalhar com estruturas mais complexas, como é o absorvedor de vibração não linear.

Os primeiros estudos sobre absorvedores não lineares são de Roberson (1952), Pipes (1953) e Arnold (1955) que estudaram a influência da não linearidade sobre a “banda” de frequência dos movimentos. Hunt e Nissen (1982) foram os primeiros a estudar um absorvedor não linear de forma prática. Entre os absorvedores não lineares podemos citar: o pêndulo; uma massa desbalanceada; o absorvedor por impacto; e o absorvedor de energia não linear (NES).

2.2.1 Nonlinear Energy Sink (NES)

Vários tipos de estrutura podem ser considerados como um NES, entretanto, será adotado como NES um bloco oscilante, acoplado ao sistema principal, cuja principal

diferença em relação o TVA é uma não linearidade característica, representada em geral, por uma mola cúbica ligada a esse bloco.

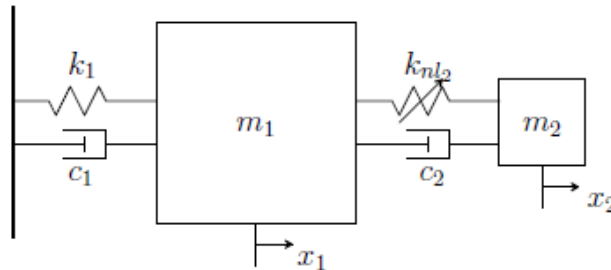


FIGURA 2.2. NES ACOPLADO A UM OSCILADOR LINEAR (VIGUIÉ, R., 2010).

O termo “energy pumping”, muitas vezes utilizado quando se trata de absorvedores não lineares, se refere a uma irreversível transferência de energia do sistema principal para o absorvedor (NES), ou seja, o NES permite que a energia vibracional do oscilador seja transferida em um único sentido.

A partir de 2001 importantes trabalhos foram publicados sobre esse assunto na literatura.

- Malatkar e Nayfeh (2007) investigaram a eficácia do NES na atenuação de vibração de uma estrutura linear sob excitação harmônica;
- Jiang et al.(2003) estudaram a dinâmica do estado forçado de um sistema de osciladores acoplados composto por um subsistema linear com um NES ligado. Eles mostraram que o NES é capaz de absorver a energia do subsistema linear ao longo de uma faixa de frequência ampla.
- Vakakis (2001) estudou a energia de bombeamento em um sistema de dois graus de liberdade, bem como, em uma cadeia MDOF com um dispositivo não linear fracamente acoplado..

Em outros trabalhos recentes (Vakakis, 2008), (Dantas e Balthazar 2007), (Dantas e Balthazar 2008), tem sido demonstrado que os dispositivos essencialmente não lineares podem absorver, de forma passiva, a energia de um subsistema linear, atuando em essência como NES.

2.3 MODELOS MOTIVADORES

Há vários trabalhos com esse mesmo tema na literatura, alguns que serviram de motivação para o presente estudo foram:

“CHAOTIC VIBRATION OF AN AUTOPARAMETRICAL SYSTEM WITH A NON IDEAL SOURCE OF POWER”, desenvolvido por Danuta Sado e Maciej Kot, em 2007, observaram a influência do amortecimento linear e não linear na transferência de energia.

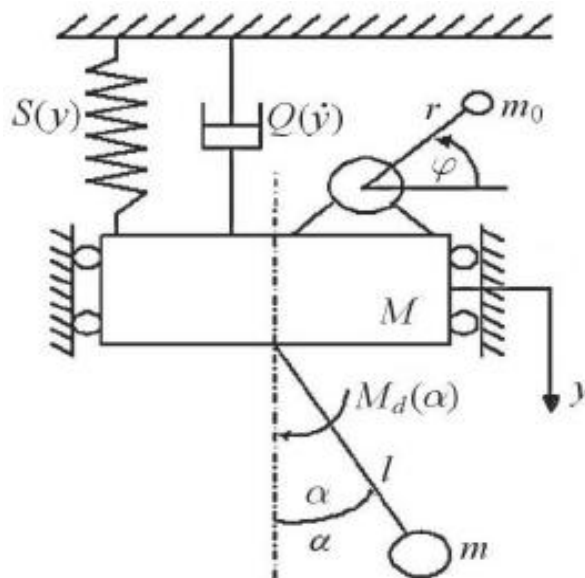


Figura 2.3. MODELO NÃO IDEAL DE UM SISTEMA AUTOPARAMÉTRICO (SADO E KOT, 2007).

As equações que governam o movimento são:

$$\begin{aligned}
& (M + m + m_0)\ddot{y} - ml\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - ml\ddot{\alpha} \sin \varphi + m_0 r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \\
& - m_0 r \ddot{\varphi} \cos \varphi + ky + C_1 \dot{y} + C_3 \dot{y}^3 = 0 \\
& ml^2 \ddot{\alpha} + C_2 \dot{\alpha} + C_4 \dot{\alpha}^3 - m\ddot{y}l \sin \alpha + mgl \sin \alpha = 0 \\
& (I + m_0 r^2) \ddot{\varphi} - m_0 \ddot{y}r \cos \varphi + m_0 gr \cos \varphi = L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Outro trabalho realizado por Sado, ilustrado na figura 2.4 foi, “ANALYSIS OF VIBRATION OF THREE-DEGREE-OF-FREEDOM DYNAMICAL SYSTEM WITH DOUBLE PENDULUM” (Sado e Gajos, 2008), onde utilizaram o método de múltiplas escalas para determinar uma solução aproximada em condições de ressonância.

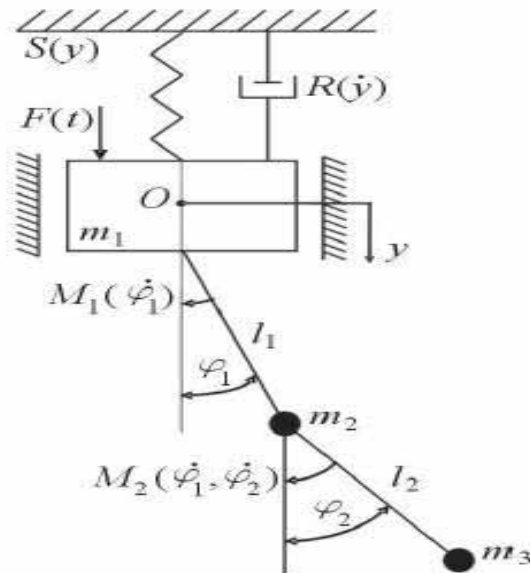


Figura 2.4. DIAGRAMA DO SISTEMA CONSIDERADO (SADO E GAJOS, 2008).

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y} - l_1(m_2 + m_3)\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - m_3 l_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \\
& -(m_2 + m_3)l_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 - m_3 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 + ky + c_1 \dot{y} = P_0 \cos vt \\
& -(m_2 + m_3)\ddot{y} \sin \varphi_1 + (m_2 + m_3)l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_3 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \\
& - m_3 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + (m_2 + m_3)g \sin \varphi_1 + c_2 \dot{\varphi}_1 - c_3(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = 0 \\
& -\ddot{y} \sin \varphi_2 + l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\
& + g \sin \varphi_2 + c_3(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Pêndulo eletro mecânico mostrado na figura 2.3, que foi estudado por Dias, 2006 e Santos, 2009, têm uma oscilação horizontal e uma fonte não ideal de alimentação do sistema.

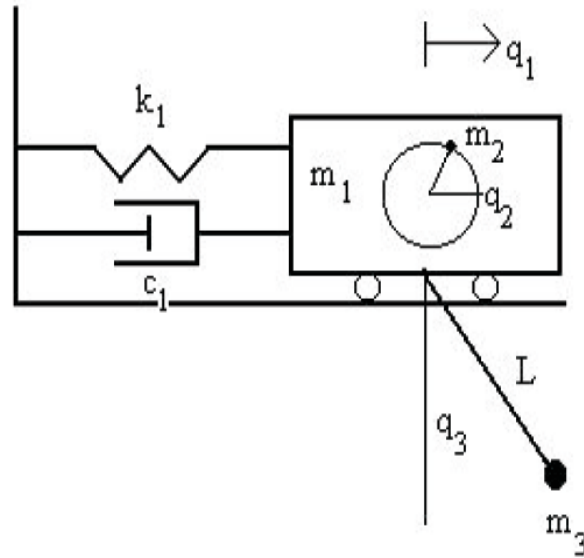


FIGURA 2.5. PÊNDULO ELETROMECHANICO (DIAS, 2006 E SANTOS, 2009).

Abaixo segue as equações do modelo :

$$\begin{aligned}
 m q_1'' - m_2 R (q_2'' \sin q_2 + q_2'^2 \cos q_2) + m_3 l (q_3'' \cos q_3 - q_3'^2 \sin q_3) + k_1 q_1 &= -c_1 q_1' \\
 I q_2'' - m_2 R (q_1' \sin q_2 + q_1' q_2' \cos q_2) + m_2 R q_1' q_2' \cos q_2 + g m_2 R \cos q_2 &= M(q_2') \quad (2.3) \\
 m_3 l^2 q_3'' + m_3 l q_1'' \cos q_3 + g m_3 l \sin q_3 &= -c_3 q_3'
 \end{aligned}$$

Observaram que, quando próximo à região de ressonância (1:1 e 2:1), a amplitude de oscilação do bloco e do pêndulo aumenta durante a passagem pela ressonância. Além disso, verificou-se a existência de um autovalor nulo, o que implica a existência de uma variedade central associada ao sistema.

Um trabalho no mesmo contexto, mas com oscilação vertical, como mostra a figura 2.4, foi desenvolvido por Elias, (2009).

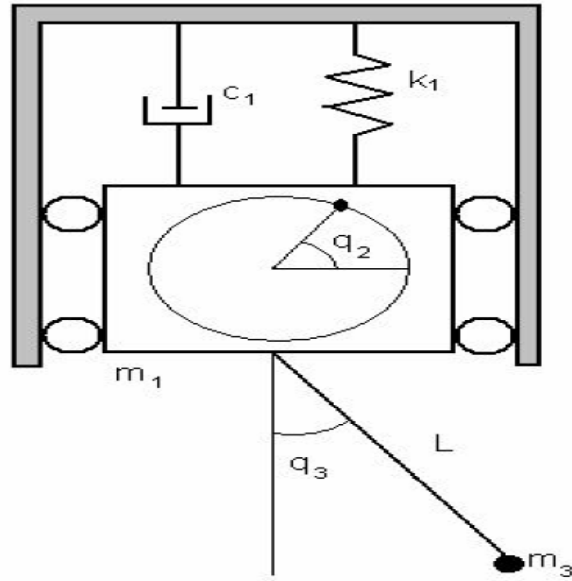


FIGURA 2.6. SISTEMA MECÂNICO DE PÊNDULO ELETROMECHANICO VERTICAL (ELIAS, 2009).

As equações de movimento são dadas por:

$$m\ddot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = -mg - m_2R(\ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \sin q_2) - m_3L(\ddot{q}_3 \sin q_3 + \dot{q}_3^2 \cos q_3)$$

$$(m_2R^2 + J_2)\ddot{q}_2 = M(\dot{q}_2) - m_2R\ddot{q}_1 \cos q_2 - m_2gR \cos q_2, \quad (2.4)$$

$$m_3L^2\ddot{q}_3 + c_3\dot{q}_3 = -m_3L\ddot{q}_1 \sin q_3 - m_3gL \sin q_3.$$

Onde verificou, por meio de expansão direta, que o sistema tinha várias ressonâncias entre bloco, motor e pêndulo, apresentando um comportamento instável para valores de frequência do motor próximos de 1.

Yabuno (2010) desenvolveu um trabalho sobre levitação magnética no qual modela um bloco magneticamente levitado com a base excitada por um shaker onde usa um pêndulo como absorvedor de vibrações, como mostram as Figuras 2.5 e 2.6.

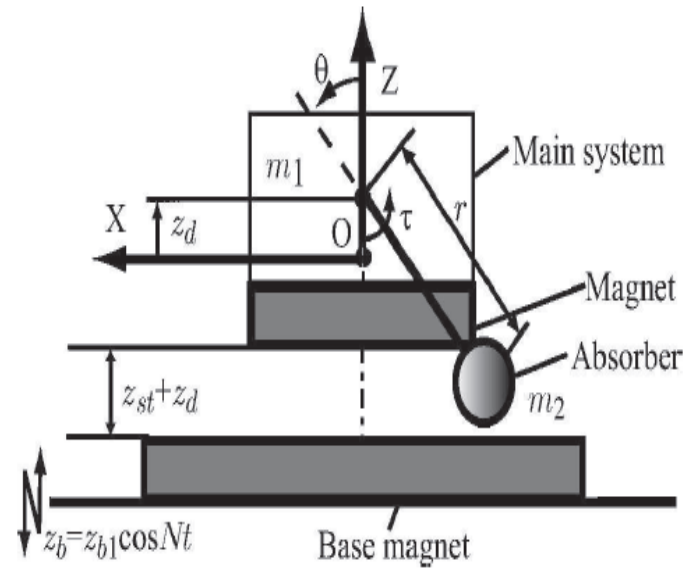


FIGURA 2.7. MODELO UTILIZADO POR YABUNO 2010.

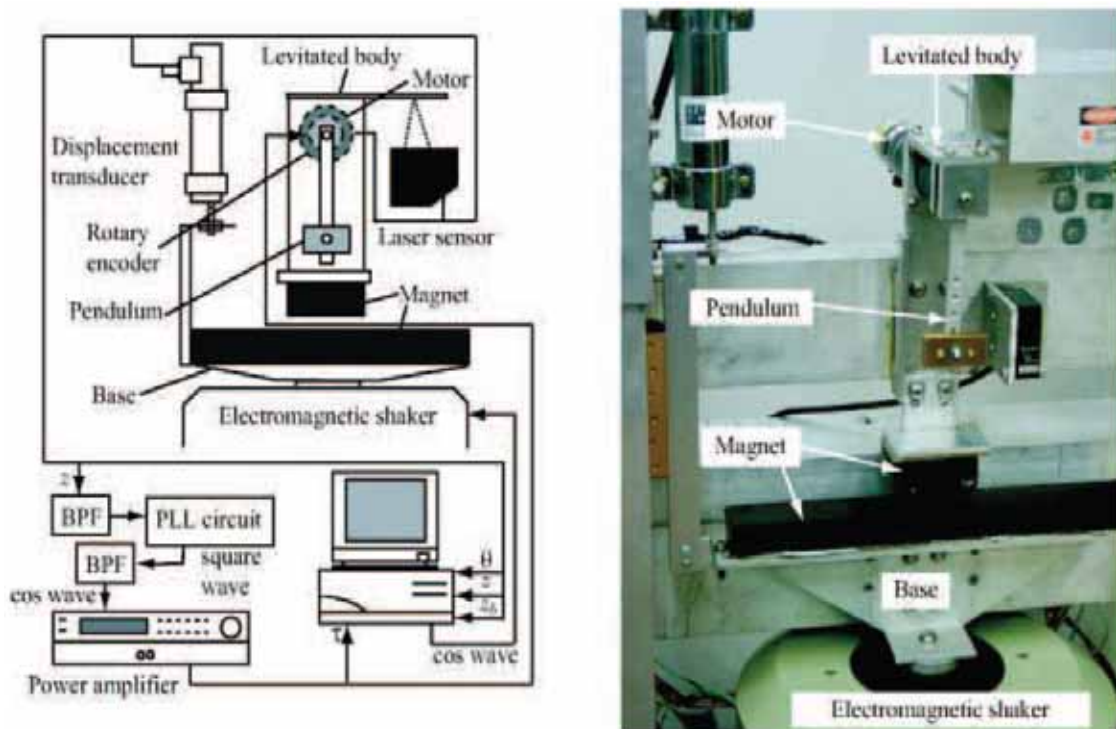


Figura 2.8. EXPERIMENTO REALIZADO POR YABUNO 2010

Cujas equações adimensionais do movimento são:

$$\begin{aligned}
\ddot{z}^* + z^* = & -\mu_z \dot{z}^* + \epsilon \cos \nu t^* + 2\alpha_{zz} \epsilon z^* \cos \nu t^* - \alpha_{zz} z^{*2} \\
& - \alpha_{zzz} z^{*3} + m^* \ddot{z}^* \theta^2 + m^* r^* \omega_\theta^2 \theta^2 - m^* r^* \dot{\theta}^2 \\
& - m^* r^* \omega_\theta^2 b^* \theta \cos(\nu_\theta t^* + \gamma) \\
& + \frac{1}{6} m^* r^* \omega_\theta^2 b^* \theta^3 \cos(\nu_\theta t^* + \gamma), \\
\ddot{\theta} + \left(\omega_\theta^2 + \frac{\ddot{z}^*}{r^*} \right) \theta = & -\mu_\theta \dot{\theta} + \omega_\theta^2 b^* \cos(\nu_\theta t^* + \gamma) + \frac{1}{6} \omega_\theta^2 \theta^3,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Yabuno explora a ação não linear do controlador para neutralizar o efeito da ressonância paramétrica externo no sistema.

Outro trabalho motivador foi feito por Gendelman O.V, et AL (2011), onde um bloco, com oscilação horizontal, tem uma massa desbalanceada como NES, como mostra a figura 2.6.

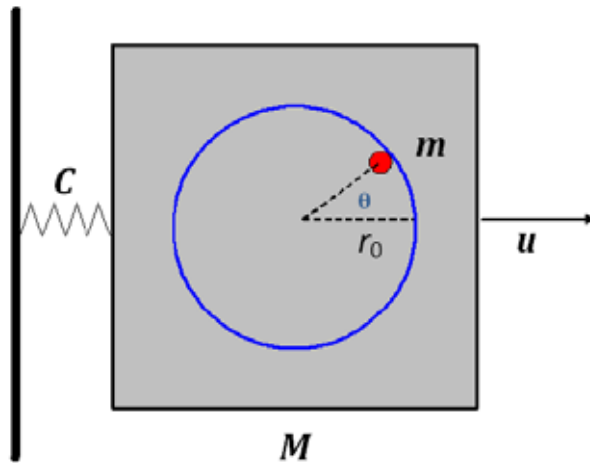


FIGURA 2.9. MODELO UTILIZADO POR GENDELMAN 2011.

As equações do modelo proposto por Gendelman et AL (2011) são dadas por:

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= \frac{-u + \varepsilon(\dot{\theta}^2 \cos \theta - \lambda \dot{\theta})}{1 - \varepsilon \sin^2 \theta} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-\lambda \dot{\theta} + \sin \theta(-u + \varepsilon \dot{\theta}^2 \cos \theta)}{1 - \varepsilon \sin^2 \theta}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Gendelman demonstrou, numérica e experimentalmente, que uma simples massa excêntrica em rotação pode funcionar com um NES.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE BLOCOS EM MOVIMENTO

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE BLOCOS EM MOVIMENTO

O objetivo principal deste capítulo é a abordagem de alguns modelos simplificados de blocos em movimento, analisando e desenvolvendo-os de forma gradual. Para tal análise serão deduzidas as equações de movimento de vários modelos matemáticos de sistemas dinâmicos ideais e não ideais separados de acordo com a tabela a seguir. Em negrito estão os modelos matemáticos que são foco de estudo desta dissertação.

Tabela 3.1. Lista dos modelos matemáticos estudados

MODELO MATEMÁTICO	ORIENTAÇÃO DO MOVIMENTO	TIPO
1	Horizontal	Ideal
2	Horizontal	Ideal
3	Horizontal	Não ideal
4	Horizontal	Não ideal
5	Vertical	Ideal
6	Vertical	Ideal
7	Vertical	Não ideal
8	Vertical	Não ideal
9	Vertical	Ideal
10	Vertical	Ideal
11	Vertical	Não ideal
12	Vertical	Não ideal

Para que se possa estudar a dinâmica envolvida no problema, através dos modelos citados anteriormente, tem-se a necessidade de obter as equações governantes do movimento. Para isso, determina-se a posição e a velocidade dos corpos envolvidos em cada caso, em seguida, obtêm-se as equações de energia para que possa utilizar o método desenvolvido por Lagrange.

3.1 MODELO MATEMÁTICO 1

Neste modelo, bastante simplificado, um bloco de massa m , excitado por uma força harmônica externa e conectado a uma coluna por meio de uma mola e um amortecedor, desliza sem atrito por uma plataforma, como pode ser observado na figura 3.1.

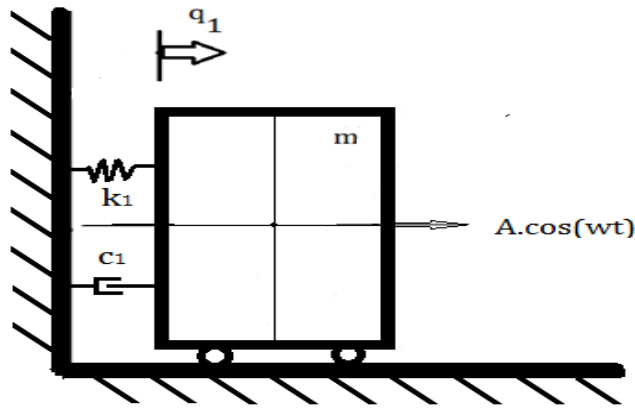


Figura 3.1. Sistema excitado horizontalmente por uma força harmônica.

Considerando apenas o deslocamento horizontal, tem-se:

$$\begin{cases} X_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{q}_1 & (3.1) \\ Y_1 = 0 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = 0 & (3.2) \end{cases}$$

A partir de (3.2) e (3.1) obtém-se, respectivamente, as energias cinética (T) e potencial (V). Logo, a energia cinética é obtida pela expressão:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{X}_1^2) \quad (3.3)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2) \quad (3.4)$$

Utilizando as equações (4.1) e (4.2) obtém-se a expressão para energia potencial

$$V = U - W \quad (3.5)$$

Onde U é a energia potencial da mola e W trabalho da força peso.

Assim

$$U = \frac{1}{2} k_1 q_1^2$$

e

$$W = 0$$

Logo

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 \quad (3.6)$$

A partir das equações (3.4) e (3.6) e utilizando a formulação de Lagrange, obtêm-se as equações de movimento.

Equação de Lagrange (Kibble, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1..n \quad (3.7)$$

Onde n é o número de graus de liberdade do sistema.

Substituindo T e V em (7), seque que:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = k_1 q_1$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + A \cos(\omega t)$$

Assim, a equação que governa o movimento é dada por:

$$\ddot{q}_1(m) + k_1 q_1 = -c_1 \dot{q}_1 + A \cos(\omega t) \quad (3.8)$$

$$\ddot{q}_1(m) + k_1 q_1 = -c_1 \dot{q}_1 + A \cos(\omega t)$$

$$\ddot{q}_1 = -\frac{k_1}{m} q_1 - \frac{c_1}{m} \dot{q}_1 + \frac{A \cos(\omega t)}{m}$$

$$\ddot{q}_1 = -\omega_1^2 q_1 - \alpha_1 \dot{q}_1 + \frac{A \cos(\omega t)}{m}$$

Reescrevendo a equação em espaços de estados temos :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \alpha_1 x_2 + A_0 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3.9)$$

3.2 MODELO MATEMÁTICO 2

No modelo a seguir (Gendelman) um bloco de massa m , excitado horizontalmente por uma força harmônica externa e conectado a uma coluna por meio de uma mola e um amortecedor, desliza sem atrito por uma plataforma, enquanto uma massa desbalanceada, utilizada como absorvedor de energia, desloca-se livremente em uma trajetória circular, como mostra a figura 3.2.

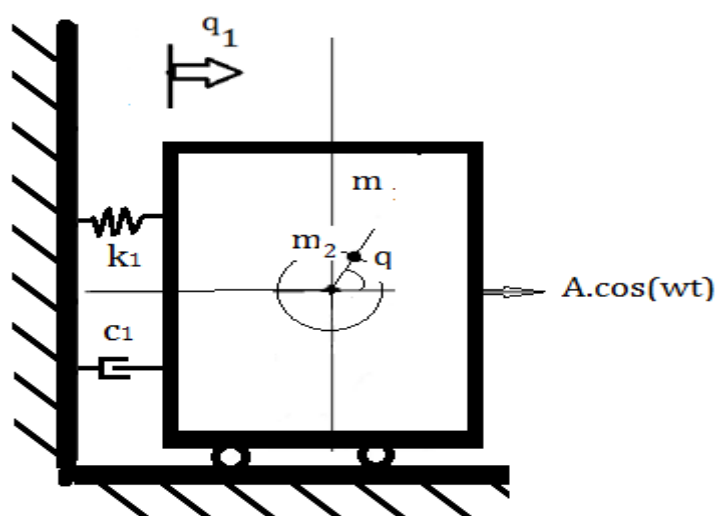


Figura 3.2. Sistema excitado horizontalmente por uma força harmônica, acoplado a uma massa desbalanceada.

Onde m_1 é a massa do bloco, m_2 a massa desbalanceada, q_1 deslocamento vertical do bloco, q_2 deslocamento angular da massa desbalanceada.

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{q}_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} Y_1 = 0 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

e para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = q_1 + r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 r \sin(q_2) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} Y_2 = r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.13)$$

Obtendo as energias cinética (T) e potencial (V)

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{X}_1^2) + m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 ((\dot{q}_1 - \dot{q}_2 r \sin(q_2))^2 + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 (\sin^2(q_2) + \cos^2(q_2))) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2) - m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.14)$$

Energia potencial :

Utilizando a equação (3.5) , segue que:

$$U = \frac{1}{2} k_1 q_1^2$$

$$W = -g[m_2 r \sin(q_2)]$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + g m_2 r \sin(q_2) \quad (3.15)$$

Equação de Lagrange , (Kibble, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1, 2 \quad (3.16)$$

Substituindo T e V em (15), seque que:

i = 1 Equação do bloco

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 \dot{q}_2 r \sin(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 r (\ddot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 \cos(q_2))$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = k_1 q_1$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + A \cos(\omega t)$$

i = 2 - Equação da massa desbalanceada

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -g m_2 r \cos(q_2) - m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2)$$

$$N_2 = -c_2 \dot{q}_2$$

Assim, as equações que governam o movimento são:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 r (\ddot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 \cos(q_2)) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 + A \cos(\omega t) \\ -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = -c_2 \dot{q}_2 - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 r \ddot{q}_2 \sin(q_2) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 + m_2 r \dot{q}_2^2 \cos(q_2) + A \cos(\omega t) \\ -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2(m_2 r^2 + J_2) = -c_2 \dot{q}_2 - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r \ddot{q}_2 \sin(q_2) = -\frac{c_1}{(m_1 + m_2)} \dot{q}_1 - \frac{k_1}{(m_1 + m_2)} q_1 + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r \dot{q}_2^2 \cos(q_2) + \frac{A \cos(\omega t)}{(m_1 + m_2)} \\ -\ddot{q}_1 \sin(q_2) + \ddot{q}_2 \frac{I}{m_2 r} = -\frac{c_2}{m_2 r} \dot{q}_2 - g \cos(q_2) \end{cases}$$

É possível tornar o sistema adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\tau = \omega_y t, \quad M = m_1 + m_2, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \varepsilon = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$q_1 = r x_1, \quad \dot{q}_1 = \omega_1 r x_1', \quad \ddot{q}_1 = \omega_1^2 r x_1''$$

$$q_2 = x_2, \quad \dot{q}_2 = \omega_1 x_2', \quad \ddot{q}_2 = \omega_1^2 x_2''$$

Onde:

(.) denota a derivada em t e (') denota a derivada em τ ;

τ , é o tempo adimensional;

x_1 , é o deslocamento adimensional do bloco na direção x ;

x_2 , é o deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada;

$$\begin{cases} x_1'' - \varepsilon x_2'' \sin(x_2) = -\frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1} x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \cos(x_2) + \frac{A \cos(\omega t)}{m} \\ -x_1'' \sin(x_2) + x_2'' \frac{I}{m_2 r} = -\frac{c_2}{m_2 r^2 \omega_1} x_2' - \frac{g}{\omega_1^2 r} \cos(x_2) \end{cases}$$

Definindo as seguintes constantes

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1}, \quad \alpha_2 = \frac{c_2}{m_2 r^2 \omega_1}, \quad \omega^2 = \frac{g}{\omega_1^2 r}, \quad \delta = \frac{I}{m_2 r^2}, \quad \text{segue que}$$

$$\begin{cases} x_1'' - \varepsilon x_2'' \operatorname{sen}(x_2) = -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \cos(x_2) + A_0 \cos(\omega t) \\ -x_1'' \operatorname{sen}(x_2) + x_2'' \delta = -\alpha_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{cases} \quad (3.18)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \operatorname{sen}(x_2) \\ -\operatorname{sen}(x_2) & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \cos(x_2) + A_0 \cos(\omega t) \\ -\alpha_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \operatorname{sen}(x_2) \\ -\operatorname{sen}(x_2) & \delta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} G_1 & -\varepsilon \operatorname{sen}(x_2) \\ G_2 & \delta \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ -\operatorname{sen}(x_2) & G_2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Det}(A) = \delta - \varepsilon \operatorname{sen}^2(x_2)$$

$$\operatorname{Det}(B) = G_1 \delta + \varepsilon G_2 \operatorname{sen}(x_2)$$

$$\operatorname{Det}(C) = G_2 + G_1 \operatorname{sen}(x_2)$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{\operatorname{Det}(B)}{\operatorname{Det}(A)} = \frac{G_1 \delta + \varepsilon G_2 \operatorname{sen}(x_2)}{\delta - \varepsilon \operatorname{sen}^2(x_2)} \\ x_2'' = \frac{\operatorname{Det}(C)}{\operatorname{Det}(A)} = \frac{G_2 + G_1 \operatorname{sen}(x_2)}{\delta - \varepsilon \operatorname{sen}^2(x_2)} \end{cases} \quad (3.19)$$

3.3 MODELO MATEMÁTICO 3

Esse modelo é similar ao modelo 2, porém a massa desbalanceada é proveniente de um motor de potencial limitada que é a fonte de vibração do sistema. Devido ao limite de potência da fonte de energia esse sistema caracteriza um modelo não ideal.

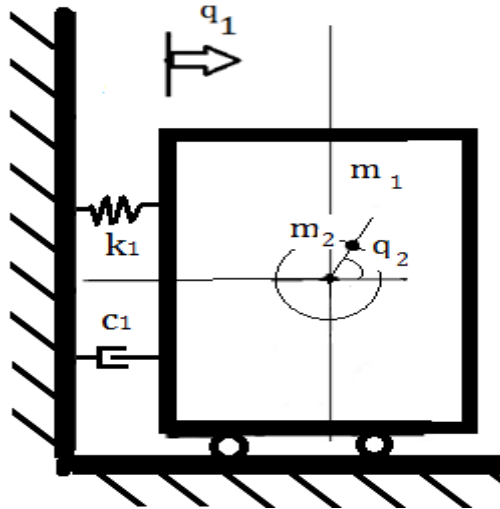


Figura 3.3. Sistema excitado por um motor de potência limitada com uma massa desbalanceada.

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{q}_1 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} Y_1 = 0 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

e para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = q_1 + r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 r \sin(q_2) \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} Y_2 = r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.23)$$

Obtendo as energias cinética (T) e potencial (V)

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{X}_1^2) + m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \left[m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 \left((\dot{q}_1 - \dot{q}_2 r \sin(q_2))^2 + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2) \right) + J_2 \dot{q}_2^2 \right] \\
 T &= \frac{1}{2} \left[m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)) \right. \\
 &\quad \left. + J_2 \dot{q}_2^2 \right] \\
 T &= \frac{1}{2} \left[m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 (\sin^2(q_2) + \cos^2(q_2))) + J_2 \dot{q}_2^2 \right] \\
 T &= \frac{1}{2} \left[m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2) + J_2 \dot{q}_2^2 \right] \\
 T &= \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2) - m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Onde J_2 representa o momento de inércia do motor.

Energia potencial :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} k_1 q_1^2 \\
 W &= -g[m_2 r \sin(q_2)] \\
 V &= \frac{1}{2} k_1 q_1^2 \\
 V &= \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + g m_2 r \sin(q_2) \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Equação de Lagrange, (Kiblle, 1970)

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= N_i \quad i = 1, 2 \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Substituindo T e V em (3.26), seque que:

$i = 1$ – Equação do bloco

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 \dot{q}_2 r \sin(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 r (\ddot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 \cos(q_2))$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = k_1 q_1$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1$$

$i = 2$ - Equação do motor

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -g m_2 r \cos(q_2) - m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2)$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) \quad (M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2)$$

Assim, as equações que governam o movimento são:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 r (\ddot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 \cos(q_2)) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 \\ -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = M(\dot{q}_2) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) - g m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2 r \ddot{q}_2 \sin(q_2) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 + m_2 r \dot{q}_2^2 \cos(q_2) + A \cos(\omega t) \\ -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r \ddot{q}_2 \sin(q_2) = -\frac{c_1}{(m_1 + m_2)} \dot{q}_1 - \frac{k_1}{(m_1 + m_2)} q_1 + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r \dot{q}_2^2 \cos(q_2) \\ -\ddot{q}_1 \sin(q_2) + \ddot{q}_2 \frac{I}{m_2 r} = \frac{M(\dot{q}_2)}{m_2 r} - g \cos(q_2) \end{cases}$$

É possível tornar o sistema adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\tau = \omega_1 t, \quad M = m_1 + m_2, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \varepsilon = \frac{m_2}{M}$$

$$q_1 = r x_1, \quad \dot{q}_1 = \omega_1 r x_1', \quad \ddot{q}_1 = \omega_1^2 r x_1''$$

$$q_2 = x_2, \quad \dot{q}_2 = \omega_1 x_2', \quad \ddot{q}_2 = \omega_1^2 x_2''$$

Onde:

(.) denota a derivada em t e (') denota a derivada em τ ;

τ , é o tempo adimensional;

x_1 , é o deslocamento adimensional do bloco na direção x ;

x_2 , é o deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada;

$$\begin{cases} x_1'' - \varepsilon x_2'' \sin(x_2) = -\frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1} x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \cos(x_2) \\ -x_1'' \sin(x_2) + x_2'' \frac{I}{m_2 r^2} = \frac{M(\dot{q}_2)}{m_2 r^2 \omega_1^2} - \frac{g}{\omega_1^2 r} \cos(x_2) \end{cases}$$

Definindo as seguintes constantes

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1}, \quad \alpha_2 = \frac{c_2}{m_2 r^2 \omega_1}, \quad \omega^2 = \frac{g}{\omega_1^2 r}, \quad \delta = \frac{I}{m_2 r^2}, \quad \mu_1 = \frac{u_1}{m_2 r^2 \omega_1^2}, \quad \mu_2 =$$

$$\frac{u_2}{m_2 r^2 \omega_1} \quad \text{segue que}$$

$$\begin{cases} x_1'' - \varepsilon x_2'' \sin(x_2) = -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \cos(x_2) \\ -x_1'' \sin(x_2) + x_2'' \delta = \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{cases} \quad (4.28)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \operatorname{sen}(x_2) \\ -\operatorname{sen}(x_2) & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \cos(x_2) \\ \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \operatorname{sen}(x_2) \\ -\operatorname{sen}(x_2) & \delta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} G_1 & -\varepsilon \operatorname{sen}(x_2) \\ G_2 & \delta \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ -\operatorname{sen}(x_2) & G_2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Det}(A) = \delta - \varepsilon \operatorname{sen}^2(x_2)$$

$$\operatorname{Det}(B) = G_1 \delta + \varepsilon G_2 \operatorname{sen}(x_2)$$

$$\operatorname{Det}(C) = G_2 + G_1 \operatorname{sen}(x_2)$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{\operatorname{Det}(B)}{\operatorname{Det}(A)} = \frac{G_1 \delta + \varepsilon G_2 \operatorname{sen}(x_2)}{\delta - \varepsilon \operatorname{sen}^2(x_2)} \\ x_2'' = \frac{\operatorname{Det}(C)}{\operatorname{Det}(A)} = \frac{G_2 + G_1 \operatorname{sen}(x_2)}{\delta - \varepsilon \operatorname{sen}^2(x_2)} \end{cases} \quad (3.29)$$

3.4 MODELO MATEMÁTICO 4

Incluindo um pêndulo no modelo 3, obtém-se o modelo 4 a seguir.

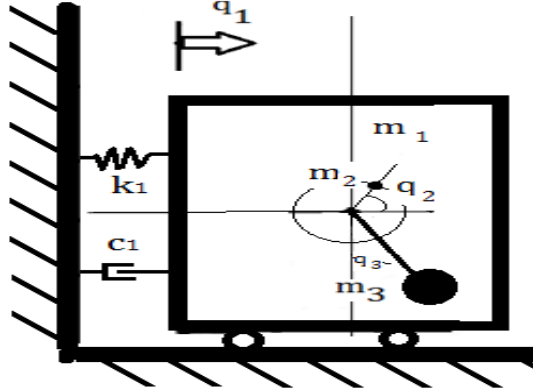


Figura 3.4. Sistema excitado por um motor de potência limitada com uma massa desbalanceada, acoplado a um pêndulo.

Nesse caso considera-se o movimento vertical do bloco q_1 , o deslocamento angular do motor q_2 e o deslocamento angular do pêndulo q_3 .

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{q}_1 & (3.30) \\ Y_1 = 0 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = 0 & (3.31) \end{cases}$$

para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = q_1 + r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 r \sin(q_2) & (3.32) \\ Y_2 = r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_2 r \cos(q_2) & (3.33) \end{cases}$$

e, para o pêndulo

$$\begin{cases} X_3 = q_1 + l \sin(q_3) & \Rightarrow \dot{X}_3 = \dot{q}_1 + \dot{q}_3 l \cos(q_3) & (3.34) \\ Y_3 = l(1 - \cos(q_3)) & \Rightarrow \dot{Y}_3 = \dot{q}_3 l \sin(q_3) & (3.35) \end{cases}$$

Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{X}_1^2) + m_2(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + m_3(\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2) + J_2\dot{q}_2^2]$$

Substituindo as velocidades temos:

$$T = \frac{1}{2} \{m_1\dot{q}_1^2 + m_2[(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 r \sin(q_2))^2 + (\dot{q}_2 r \cos(q_2))^2] \\ + m_3[(\dot{q}_1 + \dot{q}_3 l \cos(q_3))^2 + (\dot{q}_3 l \sin(q_3))^2] + J_2\dot{q}_2^2\}$$

$$T = \frac{1}{2} \{m_1\dot{q}_1^2 + m_2[\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)] \\ + m_3[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 l \cos(q_3) + \dot{q}_3^2 l^2 \cos^2(q_3) + \dot{q}_3^2 l^2 \sin^2(q_3)] + J_2\dot{q}_2^2\}$$

$$T = \frac{1}{2} \{m_1\dot{q}_1^2 + m_2[\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2] + m_3[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 l \cos(q_3) + \dot{q}_3^2 l^2] + \\ J_2\dot{q}_2^2\} \quad (4.36)$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2 + m_3) - \dot{q}_1\dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_1\dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3) + \frac{m_2\dot{q}_2^2 r^2}{2} \\ + \frac{\dot{q}_3^2 m_3 l^2}{2} + \frac{J_2\dot{q}_2^2}{2}$$

Energia Potencial

$$V = U - W$$

$$U = \frac{1}{2} [k_1 q_1^2]$$

$$W = -g[m_2(r \sin(q_2)) + m_3(-l(1 - \cos(q_3)))]$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + g[m_2(r \sin(q_2)) + m_3 l(1 - \cos(q_3))] \quad (4.37)$$

Equação de Lagrange , (Kiblle, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1,2,3 \quad (3.38)$$

***i* = 1** - Equação do bloco

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) - \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) - m_2 r (\ddot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 \cos(q_2)) \\ &+ m_3 l (\ddot{q}_3 \cos(q_3) - \dot{q}_3^2 \sin(q_3)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = k_1 q_1$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1$$

***i* = 2** - Equação do motor

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \dot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -g m_2 r \cos(q_2) - m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2)$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) \quad (M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2)$$

***i* = 3** - Equação do pêndulo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_1 m_3 l \cos(q_3) + \dot{q}_3 m_3 l^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) = \ddot{q}_1 m_3 l \cos(q_3) - \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} = -g m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3)$$

$$N_3 = -c_3 \dot{q}_3$$

Equações de Movimento

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) - m_2 r (\ddot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 \cos(q_2)) + m_3 l (\ddot{q}_3 \cos(q_3) - \dot{q}_3^2 \sin(q_3)) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 \\ -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = M(\dot{q}_2) - g m_2 \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 m_3 l \cos(q_3) - \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) - m_2 r \ddot{q}_2 \sin(q_2) - m_2 r \dot{q}_2^2 \cos(q_2) + m_3 l \ddot{q}_3 \cos(q_3) - m_3 l \dot{q}_3^2 \sin(q_3) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 \\ -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = M(\dot{q}_2) - g m_2 \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 m_3 l \cos(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - \frac{m_2 r}{M} \ddot{q}_2 \sin(q_2) + \frac{m_3 l}{M} \ddot{q}_3 \cos(q_3) = -\frac{c_1}{M} \dot{q}_1 - \frac{k_1}{M} q_1 + \frac{m_2 r}{M} \dot{q}_2^2 \cos(q_2) + \frac{m_3 l}{M} \dot{q}_3^2 \sin(q_3) \\ -\ddot{q}_1 \sin(q_2) + \ddot{q}_2 \frac{I}{m_2 r} = \frac{M(\dot{q}_2)}{m_2 r} - g \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 \cos(q_3) + \ddot{q}_3 l = -\frac{c_3}{m_3 l} \dot{q}_3 - g \sin(q_3) \end{cases}$$

É possível tornar o sistema adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\tau = \omega_y t, \quad M = m_1 + m_2 + m_3, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \varepsilon_1 = \frac{m_2}{M}, \quad \varepsilon_2 = \frac{m_3}{M}$$

$$q_1 = l x_1, \quad \dot{q}_1 = \omega_1 l x_1', \quad \ddot{q}_1 = \omega_1^2 l x_1''$$

$$q_2 = x_2, \quad \dot{q}_2 = \omega_1 x_2', \quad \ddot{q}_2 = \omega_1^2 x_2''$$

$$q_3 = x_3, \quad \dot{q}_3 = \omega_1 x_3', \quad \ddot{q}_3 = \omega_1^2 x_3''$$

Onde:

(.) denota a derivada em t e (') denota a derivada em τ ;

τ , é o tempo adimensional;

x_1 , é o deslocamento adimensional do bloco na direção x ;

x_2 , é o deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada;

x_3 , é o deslocamento angular adimensional do pêndulo;

$$\begin{cases} \omega_1^2 l x_1'' - \frac{m_2 r}{M} \omega_1^2 x_2'' \sin(x_2) + \frac{m_3 l}{M} \omega_1^2 x_3'' \cos(x_3) = -\frac{c_1}{M} \omega_1 l x_1' - \frac{k_1}{M} l x_1 + \frac{m_2 r}{M} \omega_1^2 x_2'^2 \cos(x_2) + \frac{m_3 l}{M} \omega_1^2 x_3'^2 \sin(x_3) \\ -\omega_1^2 l x_1'' \sin(x_2) + \omega_1^2 x_2'' \frac{I}{m_2 r} = \frac{u_1}{m_2 r} - \frac{u_2}{m_2 r} \omega_1 x_2' + -g \cos(x_2) \\ \omega_1^2 l x_1'' \cos(x_3) + \omega_1^2 x_3'' l = -\frac{c_3}{m_3 l} \omega_1 x_3' + -g \sin(x_3) \end{cases}$$

Definindo as seguintes constantes

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{M \omega_1}, \quad \alpha_3 = \frac{c_3}{m_3 l \omega_1}, \quad \beta = \frac{g}{\omega_1^2 l}, \quad \delta = \frac{I}{m_2 l r}, \quad \mu_1 = \frac{u_1}{m_2 r l \omega_1^2}, \quad \mu_2 = \frac{u_2}{m_2 r l \omega_1},$$

$$\rho = \frac{r}{l} \omega_p^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} \quad \text{segue que}$$

$$\begin{cases} x_1'' - \varepsilon_1 \rho x_2'' \sin(x_2) + \varepsilon_2 x_3'' \cos(x_3) = -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon_1 \rho x_2'^2 \cos(x_2) + \varepsilon_2 x_3'^2 \sin(x_3) \\ -x_1'' \sin(x_2) + x_2'' \delta = \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \\ x_1'' \cos(x_3) + x_3'' = -\alpha_3 x_3' - \omega^2 \sin(x_3) \end{cases} \quad (3.40)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_1 \rho \sin(x_2) & \varepsilon_2 \cos(x_3) \\ -\sin(x_2) & \delta & 0 \\ \cos(x_3) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon_1 \rho x_2'^2 \cos(x_2) + \varepsilon_2 x_3'^2 \sin(x_3) \\ \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \\ -\alpha_3 x_3' - \omega^2 \sin(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_1 \rho \sin(x_2) & \varepsilon_2 \cos(x_3) \\ -\sin(x_2) & \delta & 0 \\ \cos(x_3) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} G_1 & -\varepsilon_1 \rho \sin(x_2) & \varepsilon_2 \cos(x_3) \\ G_2 & \delta & 0 \\ G_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & G_1 & \varepsilon_2 \cos(x_3) \\ -\sin(x_2) & G_2 & 0 \\ \cos(x_3) & G_3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_1 \rho \sin(x_2) & G_1 \\ -\sin(x_2) & \delta & G_2 \\ \cos(x_3) & 0 & G_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \delta + 0 + 0 - \varepsilon_2 \delta \cos^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \sin^2(x_2) - 0$$

$$\text{Det}(B) = G_1 \delta + 0 + 0 - \varepsilon_2 \delta G_3 \cos(x_3) + \varepsilon_1 \rho G_2 \sin(x_2) - 0$$

$$\text{Det}(C) = G_2 + 0 - \varepsilon_2 G_3 \cos(x_3) \sin(x_2) - \varepsilon_2 G_2 \cos^2(x_3) + G_1 \sin(x_2) - 0$$

$$\text{Det}(D) = \delta G_3 - \varepsilon_1 \rho G_2 \sin(x_2) \cos(x_3) + 0 - \delta G_1 \cos(x_3) - G_3 \varepsilon_1 \rho \sin^2(x_2) - 0$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{\text{Det}(B)}{\text{Det}(A)} = \frac{G_1 \delta - \varepsilon_2 \delta G_3 \cos(x_3) + \varepsilon_1 \rho G_2 \sin(x_2)}{\delta - \varepsilon_2 \delta \cos^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \sin^2(x_2)} \\ x_2'' = \frac{\text{Det}(C)}{\text{Det}(A)} = \frac{G_2 - \varepsilon_2 G_3 \cos(x_3) \sin(x_2) - \varepsilon_2 G_2 \cos^2(x_3) + G_1 \sin(x_2)}{\delta - \varepsilon_2 \delta \cos^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \sin^2(x_2)} \\ x_3'' = \frac{\text{Det}(D)}{\text{Det}(A)} = \frac{\delta G_3 - \varepsilon_1 \rho G_2 \sin(x_2) \cos(x_3) - \delta G_1 \cos(x_3) - G_3 \varepsilon_1 \rho \sin^2(x_2)}{\delta - \varepsilon_2 \delta \cos^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \sin^2(x_2)} \end{cases} \quad (3.41)$$

3.5 MODELO MATEMÁTICO 5

Esse modelo considera apenas o movimento vertical q_1 do bloco de massa m excitado por uma força harmônica, portanto:

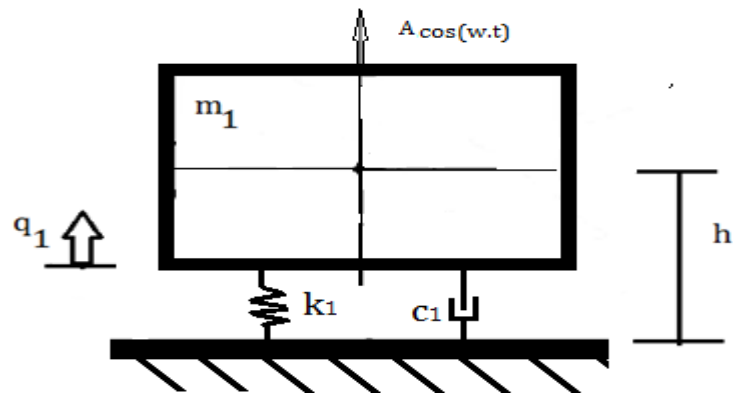


Figura 3.5. Sistema excitado verticalmente por uma força harmônica.

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 \end{cases} \quad (3.43)$$

A partir de (3.43) e (3.42) obtém-se as energias cinética (T) e potencial (V). Logo a energia cinética é obtida pela expressão:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{Y}_1^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2) \quad (3.44)$$

E a energia potencial

$$V = U - W$$

Onde U é a energia potencial da mola e W trabalho da força peso.

Assim

$$U = \frac{1}{2} k_1 q_1^2$$

e

$$W = -gmq_1$$

Logo

$$V = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + gmq_1 \quad (3.45)$$

A partir das equações (3.45) e (3.44) e utilizando a formulação de Lagrange, obtêm-se as equações de movimento.

Equação de Lagrange, (Kibble, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1 \quad (3.46)$$

Substituindo T e V em (3.45), segue que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = k_1q_1 + g(m)$$

$$N_1 = -c_1\dot{q}_1 + A\cos(wt)$$

Assim, a equação que governa o movimento é dada por

$$\ddot{q}_1m + k_1q_1 + gm = -c_1\dot{q}_1 + A\cos(wt) \quad (3.47)$$

Escrevendo o sistema adimensional e inserindo as seguintes constantes, segue que:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{k_1}{m}q_1 - g - \frac{c_1}{m}\dot{q}_1 + \frac{A}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_1 = -x_1 - \frac{g}{l\omega_1^2} - \frac{c_1}{m\omega_1}\dot{x}_1 + \frac{A}{ml\omega_1^2}\cos(\omega t)$$

$$\tau = \omega_y t, \quad , \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \alpha_1 = \frac{c_1}{m\omega_1}, \quad , \quad \omega^2 = \frac{g}{\omega_1^2 l}, \quad A_0 = \frac{A}{ml\omega_1^2}$$

$$q_1 = rx_1, \quad \dot{q}_1 = \omega_1 rx_1', \quad \ddot{q}_1 = \omega_1^2 rx_1''$$

$$\ddot{x}_1 = -x_1 - \omega^2 - \alpha_1 \dot{x}_1 + A_0 \cos(\omega t) \quad (3.48)$$

3.6 MODELO MATEMÁTICO 6

No modelo a seguir (Gendelman et al, 2011), um bloco de massa m_1 , excitado por uma força harmônica externa e conectado a uma base por meio de uma mola e um amortecedor, desliza verticalmente sem atrito, enquanto uma massa desbalanceada m_2 ,

utilizada como absorvedor de energia, desloca-se livremente em uma trajetória circular, como mostra a figura 3.6.

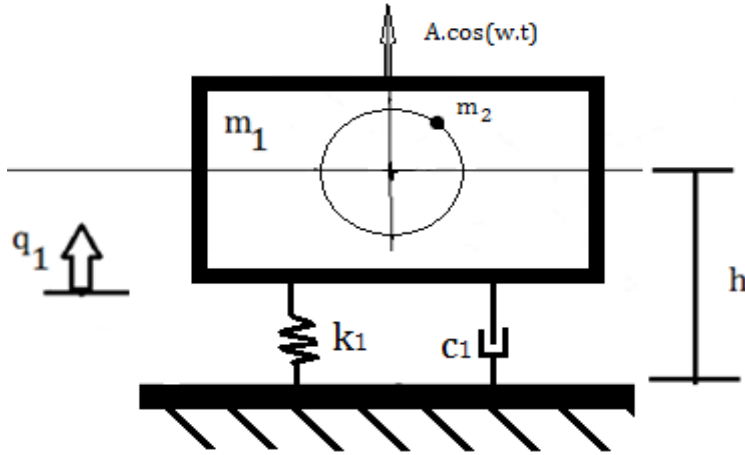


Figura 3.6. Sistema excitado verticalmente por uma força harmônica, acoplado a uma massa desbalanceada.

Onde m_1 é a massa do bloco, m_2 a massa desbalanceada, q_1 deslocamento vertical do bloco, q_2 deslocamento angular da massa desbalanceada.

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 \end{cases} \quad (3.50)$$

e para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = -\dot{q}_2 r \sin(q_2) \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\begin{cases} Y_2 = q_1 + r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.52)$$

Analogamente aos modelos anteriores, obtém-se as energias cinética (T) e potencial (V)

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{Y}_1^2) + m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2))^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 (\sin^2(q_2) + \cos^2(q_2))) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.53)$$

Energia potencial :

$$W = -g[m_1 q_1 + m_2(q_1 + r \sin(q_2))]$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + g[m_1 q_1 + m_2(q_1 + r \sin(q_2))]$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + g m_1 q_1 + g m_2 q_1 + g m_2 r \sin(q_2) \quad (3.54)$$

Equação de Lagrange (Kiblle, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1, 2 \quad (3.55)$$

Substituindo T e V em (3.55), seque que:

i = 1- Equação do bloco

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 (m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2))$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -k_1 q_1 - g(m_1 + m_2)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + A \cos(\omega t)$$

i = 2 - Equação da massa desbalanceada

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -g m_2 r \cos(q_2) - m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \sin(q_2)$$

$$N_2 = -c_2 \dot{q}_2$$

Assim, as equações que governam o movimento são:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 + A \cos(\omega t) - g(m_1 + m_2) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = -c_2 \dot{q}_2 - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.56)$$

É possível tornar o sistema adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\tau = \omega_y t, \quad M = m_1 + m_2, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \varepsilon = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$q_1 = r x_1, \quad \dot{q}_1 = \omega_1 r x_1', \quad \ddot{q}_1 = \omega_1^2 r x_1''$$

$$q_2 = x_2, \quad \dot{q}_2 = \omega_1 x_2', \quad \ddot{q}_2 = \omega_1^2 x_2''$$

Onde:

$(\cdot)$ denota a derivada em t e $(\cdot)$ denota a derivada em τ ;

τ , é o tempo adimensional;

x_1 , é o deslocamento adimensional do bloco na direção x ;

x_2 , é o deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada;

$$\begin{cases} x_1'' + \varepsilon x_2'' \cos(x_2) = -\frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1} x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \sin(x_2) + \frac{A \cos(wt)}{m} - \frac{g}{\omega_1^2 r} \\ x_1'' \cos(x_2) + x_2'' \frac{I}{m_2 r} = -\frac{c_2}{m_2 r^2 \omega_1} x_2' - \frac{g}{\omega_1^2 r} \cos(x_2) \end{cases}$$

Definindo as seguintes constantes

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1}, \quad \alpha_2 = \frac{c_2}{m_2 r^2 \omega_1}, \quad \omega^2 = \frac{g}{\omega_1^2 r}, \quad \delta = \frac{I}{m_2 r^2}, \quad \text{segue que}$$

$$\begin{cases} x_1'' + \varepsilon x_2'' \cos(x_2) = -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \sin(x_2) + A_0 \cos(wt) - \omega^2 \\ x_1'' \cos(x_2) + x_2'' \delta = -\alpha_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{cases} \quad (4.57)$$

Matricialmente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cos(x_2) \\ \cos(x_2) & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \sin(x_2) + \frac{A \cos(wt)}{m} - \omega^2 \\ -\alpha_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cos(x_2) \\ \cos(x_2) & \delta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} G_1 & \varepsilon \cos(x_2) \\ G_2 & \delta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ \cos(x_2) & G_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \delta - \varepsilon \cos^2(x_2)$$

$$Det(B) = G_1\delta + \varepsilon G_2 \cos(x_2)$$

$$Det(C) = G_2 + G_1 \cos(x_2)$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{Det(B)}{Det(A)} = \frac{G_1\delta + \varepsilon G_2 \cos(x_2)}{\delta - \varepsilon \cos^2(x_2)} \\ x_2'' = \frac{Det(C)}{Det(A)} = \frac{G_2 + G_1 \cos(x_2)}{\delta - \varepsilon \cos^2(x_2)} \end{cases} \quad (3.58)$$

3.7 MODELO MATEMÁTICO 7

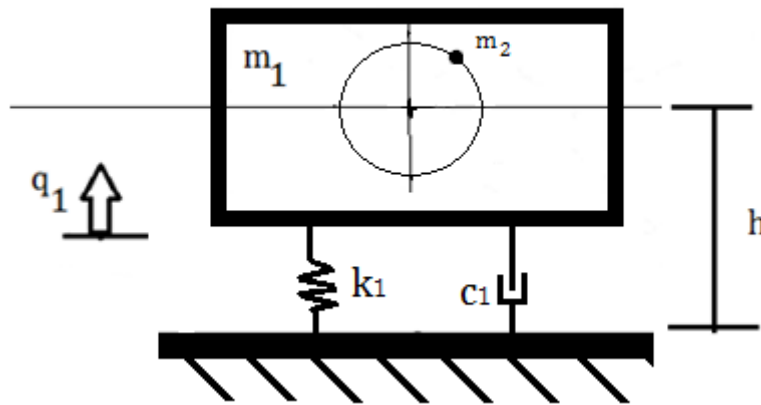


Figura 3.7. Sistema excitado por um motor de potência limitada com uma massa desbalanceada.

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\begin{cases} Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 \end{cases} \quad (3.60)$$

e para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = -\dot{q}_2 r \sin(q_2) \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\begin{cases} Y_2 = q_1 + r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.62)$$

A partir das equações (3.59), (3.60), (3.61) e (3.62) obtém-se as energias cinética (T) e potencial (V).

Energia cinética

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{Y}_1^2) + m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2))^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 (\sin^2(q_2) + \cos^2(q_2))) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{q}_1^2) + m_2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.63)$$

Energia potencial

$$W = -g [m_1 q_1 + m_2 (q_1 + r \sin(q_2))]$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + g m_1 q_1 + m_2 q_1 + g m_2 r \sin(q_2)$$

Equação de Lagrange, (Kibble, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1, 2 \quad (3.64)$$

Substituindo T e V em (3.63), seque que:

i = 1- Equação do bloco

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2))$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = k_1 q_1 + g(m_1 + m_2)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1$$

i = 2 - Equação do motor

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = g m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2)$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) \quad (M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2)$$

Assim, as equações que governam o movimento são:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 - g(m_1 + m_2) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.65)$$

É possível tornar o sistema adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\tau = \omega_y t, \quad M = m_1 + m_2, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \varepsilon = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}, \quad \mu_1 = \frac{u_1}{m_2 r^2 \omega_1^2},$$

$$\mu_2 = \frac{u_2}{m_2 r^2 \omega_1}$$

$$q_1 = r x_1, \quad \dot{q}_1 = \omega_1 r x_1', \quad \ddot{q}_1 = \omega_1^2 r x_1''$$

$$q_2 = x_2, \quad \dot{q}_2 = \omega_1 x_2', \quad \ddot{q}_2 = \omega_1^2 x_2''$$

Onde:

(.) denota a derivada em t e () denota a derivada em τ ;

τ , é o tempo adimensional;

x_1 , é o deslocamento adimensional do bloco na direção x ;

x_2 , é o deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada;

$$\begin{cases} x_1'' + \varepsilon x_2'' \cos(x_2) = -\frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1} x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \sin(x_2) - \frac{g}{\omega_1^2 r} \\ x_1'' \cos(x_2) + x_2'' \frac{I}{m_2 r} = \frac{u_1}{m_2 r \omega_1^2} - \frac{u_2}{m_2 r \omega_1} x_2' - \frac{g}{\omega_1^2 r} \cos(x_2) \end{cases}$$

Definindo as seguintes constantes

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{(m_1 + m_2)\omega_1}, \quad \alpha_2 = \frac{c_2}{m_2 r^2 \omega_1}, \quad \omega^2 = \frac{g}{\omega_1^2 r}, \quad \delta = \frac{I}{m_2 r^2}, \quad \text{segue que}$$

$$\begin{cases} x_1'' + \varepsilon x_2'' \cos(x_2) = -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \sin(x_2) - \omega^2 \\ x_1'' \cos(x_2) + x_2'' \delta = \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{cases} \quad (3.66)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cos(x_2) \\ \cos(x_2) & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon x_2'^2 \sin(x_2) - \omega^2 \\ \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cos(x_2) \\ \cos(x_2) & \delta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} G_1 & \varepsilon \cos(x_2) \\ G_2 & \delta \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ \cos(x_2) & G_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \delta - \varepsilon \cos^2(x_2)$$

$$\text{Det}(B) = G_1 \delta + \varepsilon G_2 \cos(x_2)$$

$$\text{Det}(C) = G_2 + G_1 \cos(x_2)$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{\text{Det}(B)}{\text{Det}(A)} = \frac{G_1 \delta + \varepsilon G_2 \cos(x_2)}{\delta - \varepsilon \cos^2(x_2)} \\ x_2'' = \frac{\text{Det}(C)}{\text{Det}(A)} = \frac{G_1 \delta + \varepsilon G_2 \cos(x_2)}{\delta - \varepsilon \cos^2(x_2)} \end{cases} \quad (3.67)$$

3.8 MODELO MATEMÁTICO 8

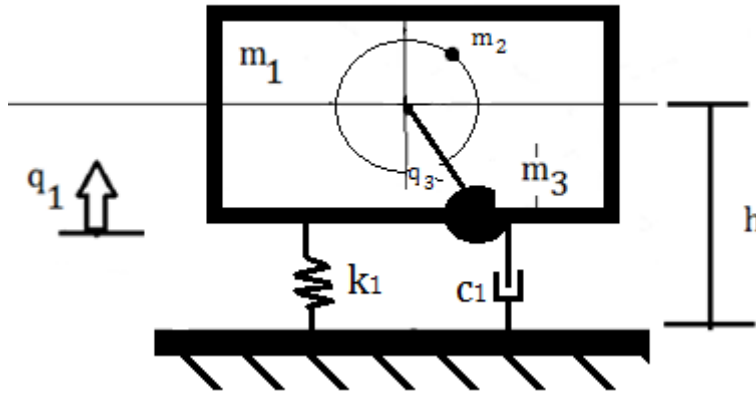


Figura 3.8. Sistema excitado por um motor de potência limitada com uma massa desbalanceada, acoplado a um pêndulo

Nesse caso considera-se o movimento vertical do bloco q_1 , o deslocamento angular do motor q_2 e o deslocamento angular do pêndulo q_3 .

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 & (3.68) \\ Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 & (3.69) \end{cases}$$

para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = -\dot{q}_2 r \sin(q_2) & (3.70) \\ Y_2 = q_1 + r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2) & (3.71) \end{cases}$$

e, para o pêndulo

$$\begin{cases} X_3 = l \sin(q_3) & \Rightarrow \dot{X}_3 = \dot{q}_3 l \cos(q_3) & (3.72) \\ Y_3 = q_1 + l(1 - \cos(q_3)) & \Rightarrow \dot{Y}_3 = \dot{q}_1 + \dot{q}_3 l \sin(q_3) & (3.73) \end{cases}$$

Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{Y}_1^2) + m_2(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + m_3(\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

Substituindo as velocidades temos:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \{ & m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 [(-\dot{q}_2 r \sin(q_2))^2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2))^2] \\ & + m_3 [(\dot{q}_3 l \cos(q_3))^2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_3 l \sin(q_3))^2] + J_2 \dot{q}_2^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \{ & m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 [\dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)] \\ & + m_3 [\dot{q}_3^2 l^2 \cos^2(q_3) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 l^2 \sin^2(q_3)] + J_2 \dot{q}_2^2 \} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \{ m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2] + m_3 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 l^2] + J_2 \dot{q}_2^2 \}$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2}(m_1 + m_2 + m_3) + \dot{q}_1 m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_1 m_3 \dot{q}_3 l \sin(q_3) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} + \frac{\dot{q}_3^2 m_3 l^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.74)$$

Energia Potencial

$$V = U - W$$

$$U = \frac{1}{2}[k_1 q_1^2]$$

$$W = -g[m_1 q_1 + m_2(q_1 + r \sin(q_2)) + m_3(q_1 + l - l \cos(q_3))]$$

$$V = \frac{1}{2}k_1 q_1^2 + g[m_1 q_1 + m_2(q_1 + r \sin(q_2)) + m_3(q_1 + l(1 - \cos(q_3)))]$$

$$V = \frac{1}{2}k_1 q_1^2 + g m_1 q_1 + g m_2 q_1 + g m_2 r \sin(q_2) + g m_3 q_1 + g m_3 l - g m_3 l \cos(q_3) \quad (3.75)$$

Equação de Lagrange, (Kibble, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1, 2, 3$$

$i = 1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + m_3 \dot{q}_3 l \sin(q_3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) \\ &\quad + m_3 l (\ddot{q}_3 \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 \cos(q_3)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = k_1 q_1 + g(m_1 + m_2 + m_3)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1$$

***i* = 2**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -g m_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_1 m_2 \dot{q}_2 r \sin(q_2)$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) \quad (M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2)$$

***i* = 3**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_3 m_3 l^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) = \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} = -g m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3)$$

$$N_3 = -c_3 \dot{q}_3$$

Equações de Movimento

1ª Equação

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) \\
 & + m_3 l (\ddot{q}_3 \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 \cos(q_3)) \\
 & = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 - g(m_1 + m_2 + m_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r \ddot{q}_2 \cos(q_2) - m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) + m_3 l \ddot{q}_3 \sin(q_3) \\
 & + m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 - g(m_1 + m_2 + m_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) \\
 & = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 - g(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) \\
 & - m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3)
 \end{aligned}$$

2ª Equação

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2 = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) + \\
 & \dot{q}_1 m_2 \dot{q}_2 r \sin(q_2)
 \end{aligned}$$

$$\ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + (J_2 + m_2 r^2) \ddot{q}_2 = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2)$$

3ª Equação

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 \\
 & = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3)
 \end{aligned}$$

$$\ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3)$$

$$\therefore \begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) = \\ -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 - g(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) - m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + (J_2 + m_2 r^2) \ddot{q}_2 = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 M + m_2 r \ddot{q}_2 \cos(q_2) + m_3 l \ddot{q}_3 \sin(q_3) = -c_1 \dot{q}_1 - k_1 q_1 + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) + m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) - gM \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 I = M(\ddot{}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{m_2 r}{M} \ddot{q}_2 \cos(q_2) + \frac{m_3 l}{M} \ddot{q}_3 \sin(q_3) = -\frac{c_1}{M} \dot{q}_1 - \frac{k_1}{M} q_1 + \frac{m_2 r}{M} \dot{q}_2^2 \sin(q_2) + \frac{m_3 l}{M} \dot{q}_3^2 \cos(q_3) - g \\ \ddot{q}_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_2 \frac{I}{m_2 r} = \frac{M(\ddot{}_2)}{m_2 r} - g \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 \sin(q_3) + \ddot{q}_3 l = -\frac{c_3}{m_3 l} \dot{q}_3 - g \sin(q_3) \end{cases}$$

É possível tornar o sistema adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\tau = \omega_y t, \quad M = m_1 + m_2 + m_3, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \varepsilon_1 = \frac{m_2}{M}, \quad \varepsilon_2 = \frac{m_3}{M}$$

$$q_1 = l x_1, \quad \dot{q}_1 = \omega_1 l x_1', \quad \ddot{q}_1 = \omega_1^2 l x_1''$$

$$q_2 = x_2, \quad \dot{q}_2 = \omega_1 x_2', \quad \ddot{q}_2 = \omega_1^2 x_2''$$

$$q_3 = x_3, \quad \dot{q}_3 = \omega_1 x_3', \quad \ddot{q}_3 = \omega_1^2 x_3''$$

Onde:

(.) denota a derivada em t e (') denota a derivada em τ ;

τ , é o tempo adimensional;

x_1 , é o deslocamento adimensional do bloco na direção x ;

x_2 , é o deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada;

x_3 , é o deslocamento angular adimensional do pêndulo;

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 l x_1'' + \frac{m_2 r}{M} \omega_1^2 x_2'' \cos(x_2) + \frac{m_3 l}{M} \omega_1^2 x_3'' \sin(x_3) = -\frac{c_1}{M} \omega_1 l x_1' - \frac{k_1}{M} l x_1 + \frac{m_2 r}{M} \omega_1^2 x_2'^2 \sin(x_2) + \frac{m_3 l}{M} \omega_1^2 x_3'^2 \cos(x_3) - g \\ \omega_1^2 l x_1'' \cos(x_2) + \omega_1^2 x_2'' \frac{l}{m_2 r} = \frac{u_1}{m_2 r} - \frac{u_2}{m_2 r} \omega_1 x_2' - g \cos(x_2) \\ \omega_1^2 l x_1'' \sin(x_3) + \omega_1^2 x_3'' l = -\frac{c_3}{m_3 l} \omega_1 x_3' - g \sin(x_3) \end{array} \right.$$

Definindo as seguintes constantes

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{M \omega_1}, \quad \alpha_3 = \frac{c_3}{m_3 l \omega_1}, \quad \beta = \frac{g}{\omega_1^2 l}, \quad \delta = \frac{l}{m_2 l r}, \quad \mu_1 = \frac{u_1}{m_2 r l \omega_1^2}, \quad \mu_2 = \frac{u_2}{m_2 r l \omega_1},$$

$$\rho = \frac{r}{l} \omega_p^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} \quad \text{segue que}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'' + \varepsilon_1 \rho x_2'' \cos(x_2) + \varepsilon_2 x_3'' \sin(x_3) = -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon_1 \rho x_2'^2 \sin(x_2) + \varepsilon_2 x_3'^2 \cos(x_3) - \omega^2 \\ x_1'' \cos(x_2) + x_2'' \delta = \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \\ x_1'' \sin(x_3) + x_3'' = -\alpha_3 x_3' - \omega^2 \sin(x_3) \end{array} \right. \quad (3.77)$$

Matricialmente

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 \rho \cos(x_2) & \varepsilon_2 \sin(x_3) \\ \cos(x_2) & \delta & 0 \\ \sin(x_3) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 x_1' - x_1 + \varepsilon_1 \rho x_2'^2 \sin(x_2) + \varepsilon_2 x_3'^2 \cos(x_3) - \omega^2 \\ \mu_1 - \mu_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \\ -\alpha_3 x_3' - \omega^2 \sin(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 \rho \cos(x_2) & \varepsilon_2 \sin(x_3) \\ \cos(x_2) & \delta & 0 \\ \sin(x_3) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} G_1 & \varepsilon_1 \rho \cos(x_2) & \varepsilon_2 \sin(x_3) \\ G_2 & \delta & 0 \\ G_3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & G_1 & \varepsilon_2 \sin(x_3) \\ \cos(x_2) & G_2 & 0 \\ \sin(x_3) & G_3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 \rho \cos(x_2) & G_1 \\ \cos(x_2) & \delta & G_2 \\ \sin(x_3) & 0 & G_3 \end{bmatrix}$$

$$Det(A) = \delta + 0 + 0 - \varepsilon_2 \delta \sin^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \cos^2(x_2) - 0$$

$$Det(B) = G_1 \delta + 0 + 0 - \varepsilon_2 \delta G_3 \sin(x_3) - \varepsilon_1 \rho G_2 \cos(x_2) - 0$$

$$Det(C) = G_2 + 0 + \varepsilon_2 G_3 \sin(x_3) \cos(x_2) - \varepsilon_2 G_2 \sin^2(x_3) - G_1 \cos(x_2) - 0$$

$$Det(D) = \delta G_3 + \varepsilon_1 \rho G_2 \cos(x_2) \sin(x_3) + 0 - \delta G_1 \sin(x_3) - G_3 \varepsilon_1 \rho \cos^2(x_2) - 0$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{Det(B)}{Det(A)} = \frac{G_1 \delta - \varepsilon_2 \delta G_3 \sin(x_3) - \varepsilon_1 \rho G_2 \cos(x_2)}{\delta - \varepsilon_2 \delta \sin^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \cos^2(x_2)} \\ x_2'' = \frac{Det(C)}{Det(A)} = \frac{G_2 + \varepsilon_2 G_3 \sin(x_3) \cos(x_2) - \varepsilon_2 G_2 \sin^2(x_3) - G_1 \cos(x_2)}{\delta - \varepsilon_2 \delta \sin^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \cos^2(x_2)} \\ x_3'' = \frac{Det(D)}{Det(A)} = \frac{\delta G_3 + \varepsilon_1 \rho G_2 \cos(x_2) \sin(x_3) - \delta G_1 \sin(x_3) - G_3 \varepsilon_1 \rho \cos^2(x_2)}{\delta - \varepsilon_2 \delta \sin^2(x_3) - \varepsilon_1 \rho \cos^2(x_2)} \end{cases} \quad (3.78)$$

Os modelos 9, 10, 11 e 12 apresentados a seguir são modelos tipo MagLev.

3.9 MODELO MATEMÁTICO 9

Neste modelo, bastante simplificado, é considerado o movimento vertical de um bloco de massa m levantado magneticamente a uma distância d da base, excitado por uma força harmônica externa, como pode ser observado na figura 3.9.

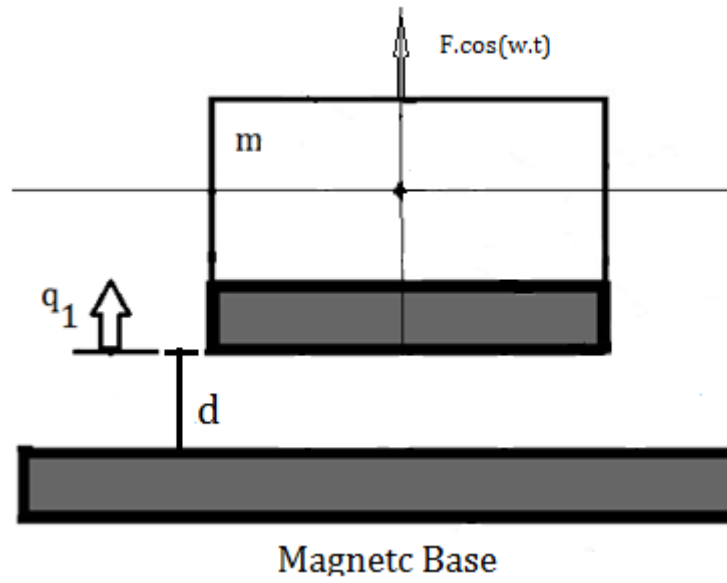


Figura 3.9. mAGLEV SIMPLIFICADO

Observando a figura 3.9 obtém-se

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 & (3.79) \\ Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 & (3.80) \end{cases}$$

A partir de (3.79) e (3.80) obtém-se, respectivamente, as energias cinética (T) e potencial (V). Logo a energia cinética é obtida pela expressão

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2) \quad (3.81)$$

Utilizando as equações da posição do bloco obtém-se a expressão para energia potencial

Assim,

$$U = 0$$

e

$$W = -gmq_1$$

Logo

$$V = gm q_1 \quad (3.82)$$

A partir das equações (3.81) e (3.82) e utilizando a formulação de Lagrange, obtêm-se as equações de movimento.

Equação de Lagrange, (Kiblle, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1 \quad (3.83)$$

Substituindo T e V em (3.5), seque que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = g(m)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 + F \cos(wt) \quad K_{\text{mag}} = \frac{[mg]}{d^2}$$

Assim, a equação que governa o movimento é dada por

$$\ddot{q}_1(m) = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 + F \cos(wt) - g(m) \quad (3.84)$$

$$\ddot{q}_1 = -\frac{K_{\text{mag}}}{m}(d - q_1)^2 - \frac{c_1}{m} \dot{q}_1 + \frac{F}{m} \cos(wt) - g \quad (3.85)$$

3.10 MODELO MATEMÁTICO 10

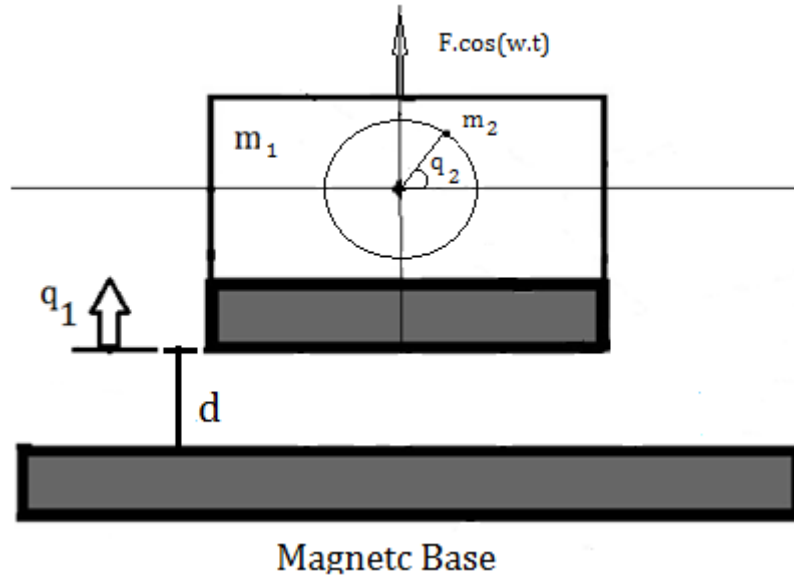


Figura 3.10. Maglev acoplado a uma massa desbalanceada atuando como absorvedor de energia

Onde m_1 é a massa do bloco, m_2 a massa desbalanceada, q_1 deslocamento vertical do bloco, q_2 deslocamento angular da massa desbalanceada.

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 \\ Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 \end{cases} \quad (3.86)$$

$$(3.87)$$

e para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = -\dot{q}_2 r \sin(q_2) \\ Y_2 = q_1 + r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.88)$$

$$(3.89)$$

A partir das equações (3.86), (3.87), (3.88) e (3.89) obtém-se as energias cinética (T) e potencial (V).

Energia cinética

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{Y}_1^2) + m_2(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_2^2 r^2 \text{sen}^2(q_2) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2))^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_2^2 r^2 \text{sen}^2(q_2) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 (\text{sen}^2(q_2) + \cos^2(q_2))) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.90)$$

Energia potencial

$$W = -g[m_1 q_1 + m_2(q_1 + r \text{sen}(q_2))]$$

$$V = gm_1 q_1 + gm_2 q_1 + gm_2 r \text{sen}(q_2) \quad (3.91)$$

Equação de Lagrange, (Kiblle, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1, 2 \quad (3.92)$$

Substituindo T e V, seque que:

$i = 1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 (m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r(\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2))$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = g(m_1 + m_2)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 + F \cos(wt) \quad K_{\text{mag}} = \frac{[(m_1 + m_2)g]}{d^2}$$

$i = 2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -g m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2)$$

$$N_2 = -c_2 \dot{q}_2$$

Assim, as equações que governam o movimento são:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r(\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) = \\ -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 - g(m_1 + m_2) + F \cos(wt) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = \\ -c_2 \dot{q}_2 - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.93)$$

Matricialmente

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 r \cos(q_2) \\ m_2 r \cos(q_2) & (m_2 r^2 + J_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) - g(m_1 + m_2) + F \cos(wt) \\ -c_2 \dot{q}_2 - g m_2 r \cos(q_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{G}_1 \\ \widehat{G}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 r \cos(q_2) \\ m_2 r \cos(q_2) & (m_2 r^2 + J_2) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} G_1 & m_2 r \cos(q_2) \\ G_2 & (m_2 r^2 + J_2) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & G_1 \\ m_2 r \cos(q_2) & G_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = (m_1 + m_2)(m_2 r^2 + J_2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)$$

$$\text{Det}(B) = G_1(m_2 r^2 + J_2) - G_2 m_2 r \cos(q_2)$$

$$\text{Det}(C) = (m_1 + m_2)G_2 - G_1 m_2 r \cos(q_2)$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{\text{Det}(B)}{\text{Det}(A)} = \frac{G_1(m_2 r^2 + J_2) - G_2 m_2 r \cos(q_2)}{(m_1 + m_2)(m_2 r^2 + J_2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)} \\ \ddot{q}_2 = \frac{\text{Det}(C)}{\text{Det}(A)} = \frac{(m_1 + m_2)G_2 - G_1 m_2 r \cos(q_2)}{(m_1 + m_2)(m_2 r^2 + J_2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)} \end{cases} \quad (3.94)$$

3.11 MODELO MATEMÁTICO 11

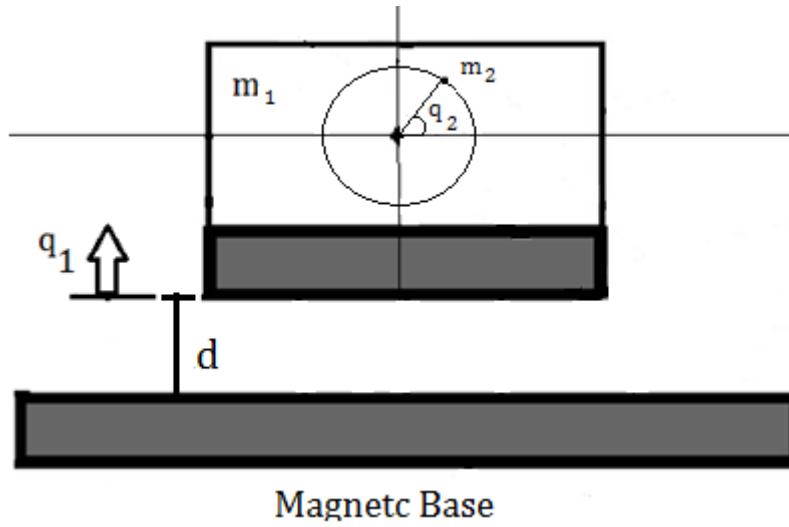


Figura 3.11. mAGLEV não ideal.

Onde m_1 é a massa do bloco, m_2 a massa desbalanceada, q_1 deslocamento vertical do bloco, q_2 deslocamento angular da massa desbalanceada.

Nesse caso a massa desbalanceada está acoplada a um motor de potência limitada.

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.95)$$

$$\begin{cases} Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 \end{cases} \quad (3.96)$$

e para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = -\dot{q}_2 r \sin(q_2) \end{cases} \quad (3.97)$$

$$\begin{cases} Y_2 = q_1 + r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (3.98)$$

A partir das equações acima obtém-se as energias cinética (T) e potencial (V).

Energia cinética

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{Y}_1^2) + m_2(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + J_2\dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_2^2 r^2 \text{sen}^2(q_2) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2))^2) + J_2\dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_2^2 r^2 \text{sen}^2(q_2) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)) + J_2\dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 (\text{sen}^2(q_2) + \cos^2(q_2))) + J_2\dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{q}_1^2) + m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2) + J_2\dot{q}_2^2]$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.99)$$

Energia potencial

$$W = -g[m_1 q_1 + m_2(q_1 + r \text{sen}(q_2))]$$

$$V = gm_1 q_1 + gm_2 q_1 + gm_2 r \text{sen}(q_2) \quad (3.100)$$

Equação de Lagrange, (Kiblle, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1, 2 \quad (3.101)$$

Substituindo T e V em (3.101), seque que:

$$i = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2))$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = g(m_1 + m_2)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 \quad K_{\text{mag}} = \frac{[(m_1 + m_2)g]}{d^2}$$

***i* = 2**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -g m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2)$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) \quad (M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2)$$

Assim, as equações que governam o movimento são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) = \\ \quad -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 - g(m_1 + m_2) \\ \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = \\ \quad M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \end{array} \right. \quad (3.102)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 r \cos(q_2) \\ m_2 r \cos(q_2) & (m_2 r^2 + J_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) - g(m_1 + m_2) + F \cos(\omega t) \\ M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{G}_1 \\ \widehat{G}_2 \end{Bmatrix}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 r \cos(q_2) \\ m_2 r \cos(q_2) & (m_2 r^2 + J_2) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} G_1 & m_2 r \cos(q_2) \\ G_2 & (m_2 r^2 + J_2) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & G_1 \\ m_2 r \cos(q_2) & G_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = (m_1 + m_2)(m_2 r^2 + J_2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)$$

$$\text{Det}(B) = G_1(m_2 r^2 + J_2) - G_2 m_2 r \cos(q_2)$$

$$\text{Det}(C) = (m_1 + m_2)G_2 - G_1 m_2 r \cos(q_2)$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{\text{Det}(B)}{\text{Det}(A)} = \frac{G_1(m_2 r^2 + J_2) - G_2 m_2 r \cos(q_2)}{(m_1 + m_2)(m_2 r^2 + J_2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)} \\ \ddot{q}_2 = \frac{\text{Det}(C)}{\text{Det}(A)} = \frac{(m_1 + m_2)G_2 - G_1 m_2 r \cos(q_2)}{(m_1 + m_2)(m_2 r^2 + J_2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)} \end{cases} \quad (3.103)$$

3.12 MODELO MATEMÁTICO 12

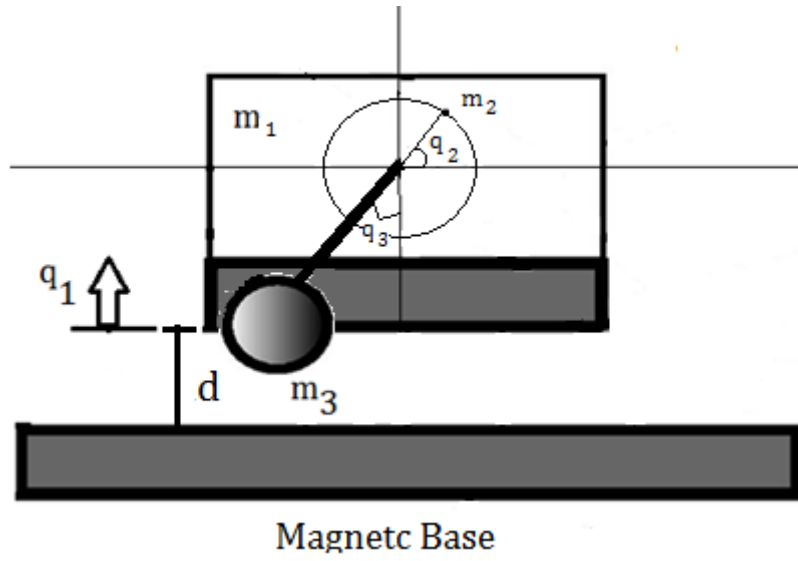


Figura 3.12. Maglev não ideal, ideal acoplado a um pêndulo.

Nesse caso considera-se o movimento vertical do bloco (q_1), o deslocamento angular do motor (q_2) e o deslocamento angular do pêndulo (q_3).

Para o bloco, segue que

$$\begin{cases} X_1 = 0 & \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 & (3.104) \\ Y_1 = q_1 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_1 & (3.105) \end{cases}$$

para a massa desbalanceada

$$\begin{cases} X_2 = r \cos(q_2) & \Rightarrow \dot{X}_2 = -\dot{q}_2 r \sin(q_2) & (3.106) \\ Y_2 = q_1 + r \sin(q_2) & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2) & (3.107) \end{cases}$$

e, para o pêndulo

$$\begin{cases} X_3 = l \sin(q_3) & \Rightarrow \dot{X}_3 = \dot{q}_3 l \cos(q_3) \\ Y_3 = q_1 + l(1 - \cos(q_3)) & \Rightarrow \dot{Y}_3 = \dot{q}_1 + \dot{q}_3 l \sin(q_3) \end{cases} \quad (3.108)$$

$$(3.109)$$

Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{Y}_1^2) + m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + m_3 (\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2) + J_2 \dot{q}_2^2]$$

Substituindo as velocidades temos:

$$T = \frac{1}{2} \{m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 [(-\dot{q}_2 r \sin(q_2))^2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 r \cos(q_2))^2] \\ + m_3 [(\dot{q}_3 l \cos(q_3))^2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_3 l \sin(q_3))^2] + J_2 \dot{q}_2^2\}$$

$$T = \frac{1}{2} \{m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 [\dot{q}_2^2 r^2 \sin^2(q_2) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2 \cos^2(q_2)] \\ + m_3 [\dot{q}_3^2 l^2 \cos^2(q_3) + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 l^2 \sin^2(q_3)] + J_2 \dot{q}_2^2\}$$

$$T = \frac{1}{2} \{m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 r^2] + m_3 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 l^2] + J_2 \dot{q}_2^2\}$$

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} (m_1 + m_2 + m_3) + \dot{q}_1 m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_1 m_3 \dot{q}_3 l \sin(q_3) + \frac{m_2 \dot{q}_2^2 r^2}{2} \\ + \frac{\dot{q}_3^2 m_3 l^2}{2} + \frac{J_2 \dot{q}_2^2}{2} \quad (3.110)$$

Energia Potencial

$$V = U - W$$

$$U = 0$$

$$W = -g[m_1 q_1 + m_2 (q_1 + r \sin(q_2)) + m_3 (q_1 + l - l \cos(q_3))]$$

$$V = g[m_1 q_1 + m_2 (q_1 + r \sin(q_2)) + m_3 (q_1 + l(1 - \cos(q_3)))] \quad (3.111)$$

Equação de Lagrange, (Kiblle, 1970)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i \quad i = 1, 2, 3$$

$i = 1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 \dot{q}_2 r \cos(q_2) + m_3 \dot{q}_3 l \sin(q_3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) \\ &\quad + m_3 l (\ddot{q}_3 \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 \cos(q_3)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = g(m_1 + m_2 + m_3)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 \quad K_{\text{mag}} = \frac{[(m_1 + m_2 + m_3)g]}{d^2}$$

$i = 2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \dot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = g m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2)$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) \quad (M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2)$$

$i = 3$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_3 m_3 l^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) = \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} = g m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3)$$

$$N_3 = -c_3 \dot{q}_3$$

Equações de Movimento

1ª Equação

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 (m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) \\ + m_3 l (\ddot{q}_3 \sin(q_3) + \dot{q}_3^2 \cos(q_3)) \\ = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}} (d - q_1)^2 - g(m_1 + m_2 + m_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 (m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r \ddot{q}_2 \cos(q_2) - m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) + m_3 l \ddot{q}_3 \sin(q_3) \\ + m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}} (d - q_1)^2 - g(m_1 + m_2 + m_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 (m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) \\ = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}} (d - q_1)^2 - g(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) \\ - m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) \end{aligned}$$

2ª Equação

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 r^2 + J_2 \ddot{q}_2 = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) - \\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 r \sin(q_2) \end{aligned}$$

$$\ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + (J_2 + m_2 r^2) \ddot{q}_2 = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2)$$

3ª Equação

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 \\ = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 m_3 l \cos(q_3) \end{aligned}$$

$$\ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3)$$

∴

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{q}_1 (m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) &= \\ -c_1 \dot{q}_1 + K_{mag} (d - q_1)^2 - g (m_1 + m_2 + m_3) & \\ + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) - m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) & \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + (J_2 + m_2 r^2) \ddot{q}_2 &= \\ M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) & \\ \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 &= \\ -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) & \end{aligned} \right. \quad (3.112)$$

Matricialmente

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & m_2 r \cos(q_2) & m_3 l \sin(q_3) \\ m_2 r \cos(q_2) & (J_2 + m_2 r^2) & 0 \\ m_3 l \sin(q_3) & 0 & m_3 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -c_1 \dot{q}_1 + K_{mag} (d - q_1)^2 + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) - m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) - g (m_1 + m_2 + m_3) \\ M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \\ -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & m_2 r \cos(q_2) & m_3 l \sin(q_3) \\ m_2 r \cos(q_2) & (J_2 + m_2 r^2) & 0 \\ m_3 l \sin(q_3) & 0 & m_3 l^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} G_1 & m_2 r \cos(q_2) & m_3 l \sin(q_3) \\ G_2 & (J_2 + m_2 r^2) & 0 \\ G_3 & 0 & m_3 l^2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & G_1 & m_3 l \sin(q_3) \\ m_2 r \cos(q_2) & G_2 & 0 \\ m_3 l \sin(q_3) & G_3 & m_3 l^2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & m_2 r \cos(q_2) & G_1 \\ m_2 r \cos(q_2) & (J_2 + m_2 r^2) & G_2 \\ m_3 l \sin(q_3) & 0 & G_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= (m_1 + m_2 + m_3)(J_2 + m_2 r^2)m_3 l^2 + 0 + 0 - m_3^2 l^2 \sin^2(q_3)(J_2 + m_2 r^2) \\ &\quad - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)m_3 l^2 - 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(B) &= G_1(J_2 + m_2 r^2)m_3 l^2 + 0 + 0 - G_3 m_3 l \sin(q_3)(J_2 + m_2 r^2) \\ &\quad - G_2 m_2 r \cos(q_2)m_3 l^2 - 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(C) &= (m_1 + m_2 + m_3)G_2 m_3 l^2 + 0 + G_3 m_3 l \sin(q_3)m_2 r \cos(q_2) \\ &\quad - G_2 m_3^2 l^2 \sin^2(q_3) - G_1 m_2 r \cos(q_2)m_3 l^2 - 0 \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & m_2 r \cos(q_2) & G_1 \\ m_2 r \cos(q_2) & (J_2 + m_2 r^2) & G_2 \\ m_3 l \sin(q_3) & 0 & G_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(D) &= (m_1 + m_2 + m_3)(J_2 + m_2 r^2)G_3 + m_2 r \cos(q_2)G_2 m_3 l \sin(q_3) + 0 \\ &\quad - G_1 m_3 l \sin(q_3)(J_2 + m_2 r^2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)G_3 - 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema matricial acima

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{\text{Det}(B)}{\text{Det}(A)} = \frac{G_1(J_2 + m_2 r^2)m_3 l^2 - G_3 m_3 l \sin(q_3)(J_2 + m_2 r^2) - G_2 m_2 r \cos(q_2)m_3 l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)(J_2 + m_2 r^2)m_3 l^2 - m_3^2 l^2 \sin^2(q_3)(J_2 + m_2 r^2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)m_3 l^2} \\ x_2'' = \frac{\text{Det}(C)}{\text{Det}(A)} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)G_2 m_3 l^2 + G_3 m_3 l \sin(q_3)m_2 r \cos(q_2) - G_2 m_3^2 l^2 \sin^2(q_3) - G_1 m_2 r \cos(q_2)m_3 l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)(J_2 + m_2 r^2)m_3 l^2 - m_3^2 l^2 \sin^2(q_3)(J_2 + m_2 r^2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)m_3 l^2} \\ x_3'' = \frac{\text{Det}(D)}{\text{Det}(A)} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)(J_2 + m_2 r^2)G_3 + m_2 r \cos(q_2)G_2 m_3 l \sin(q_3) - G_1 m_3 l \sin(q_3)(J_2 + m_2 r^2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)G_3}{(m_1 + m_2 + m_3)(J_2 + m_2 r^2)m_3 l^2 - m_3^2 l^2 \sin^2(q_3)(J_2 + m_2 r^2) - m_2^2 r^2 \cos^2(q_2)m_3 l^2} \end{cases} \quad (3.113)$$

**4 RESULTADO DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE UM
SISTEMA VIBRATÓRIO ACOPLADO A UM ABSORVEDOR DE
ENERGIA NÃO LINEAR (NES)**

4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE UM SISTEMA VIBRATÓRIO ACOPLADO A UM ABSORVEDOR DE ENERGIA NÃO LINEAR (NES)

O absorvedor de energia não linear (NES), acoplado ao sistema principal, foi projetado como um elemento estrutural de um grau de liberdade com uma massa relativamente pequena e um amortecimento fraco. Quando a estrutura principal é excitada, seja por um impluso ou uma força harmônica, espera-se que o NES reduza a amplitude de vibração da estrutura principal do sistema. O estudo deste sistema é importante para uma futura aplicação do absorvedor de energia em modelos de levitação magnética.

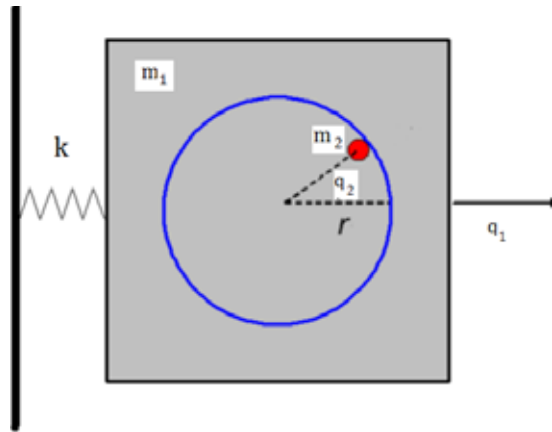


Figura 4.1. Modelo proposto por gendelman (2011).

O modelo matemático é análogo ao modelo 2, portanto as equações de movimento são

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) - m_2r(\ddot{q}_2 \sin(q_2) + \dot{q}_2^2 \cos(q_2)) = -c_1\dot{q}_1 - k_1q_1 + A\cos(\omega_h t) \\ -\ddot{q}_1 m_2 r \sin(q_2) + \ddot{q}_2(m_2 r^2 + J_2) = -c_2\dot{q}_2 - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (4.1)$$

Logo, o sistema adimensional será:

$$\begin{cases} x_1'' - \epsilon x_2'' \sin(x_2) = -\alpha_1 x_1' - x_1 + \epsilon x_2'^2 \cos(x_2) + A_0 \cos(\omega_h t) \\ -x_1'' \sin(x_2) + x_2'' \delta = -\alpha_2 x_2' - \omega^2 \cos(x_2) \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

Nesta seção, os resultados de simulações numéricas são obtidas utilizando o software Matlab®.

A Tabela 1 mostra os valores numéricos dos parâmetros usados nas simulações.

Tabela 4.1. Parâmetros	
<i>símbolo</i>	<i>Valor</i>
α_1	0
α_2	0.01
ε_1	0.05
ω_1	1
ω_h	1.1
A_0	0 ou 0.01
σ	0.37
ω	0.5

4.1.1 Excitação por um impulso

Para simular um impulso sobre o sistema, adotou-se o vetor $[0 \ 0.3 \ 0.1 \ 0]$ como condição inicial.

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 a seguir, mostram a atenuação da amplitude de movimento, quando a estrutura principal é excitada por um impulso ($A_0 = 0$).

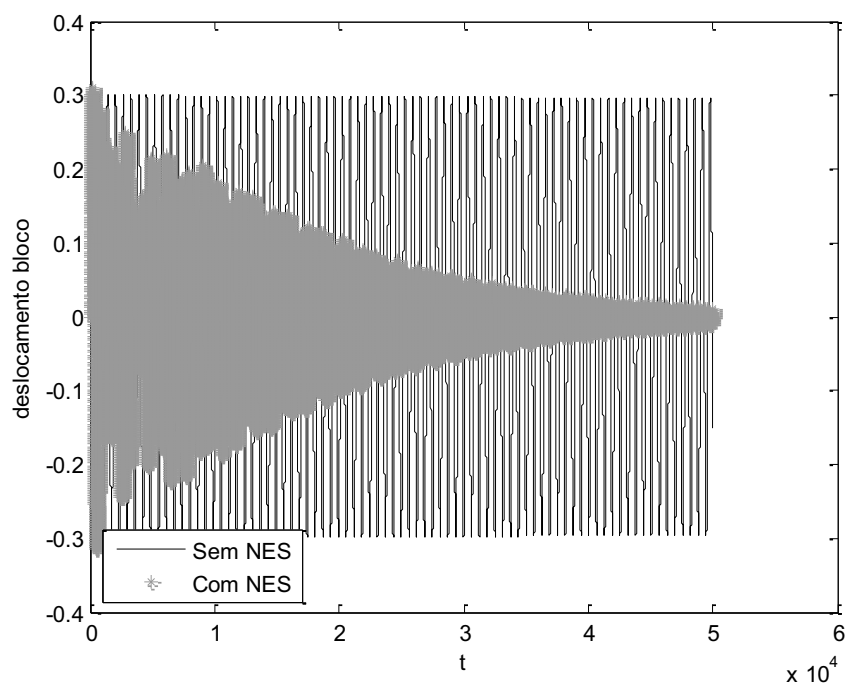


Figura 4.2. Deslocamento comparativo do sistema principal com NES (cinza) e sem NES (preto).

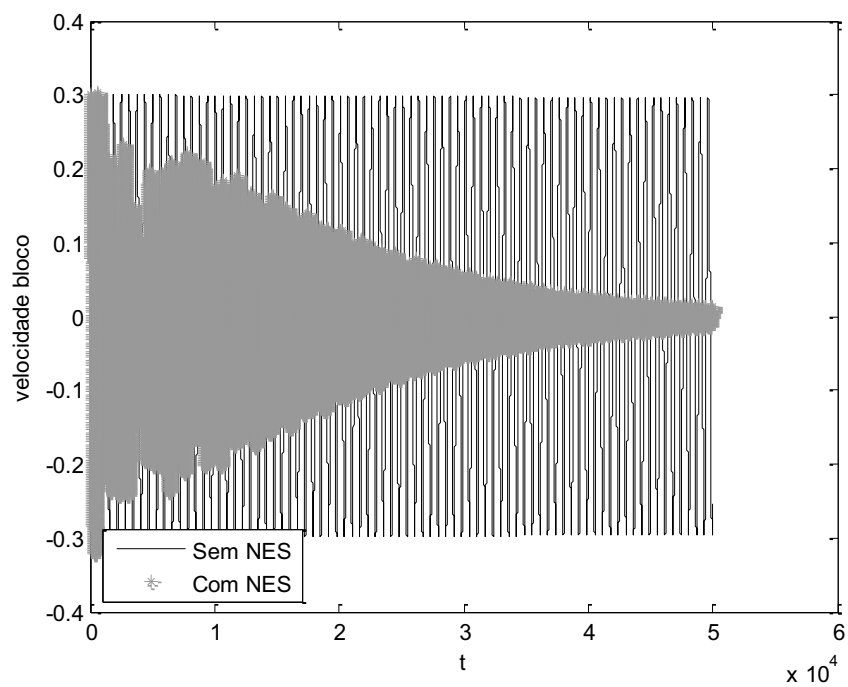


Figura 4.3. Velocidade comparativa do sistema principal com NES (cinza) e sem NES (preto).

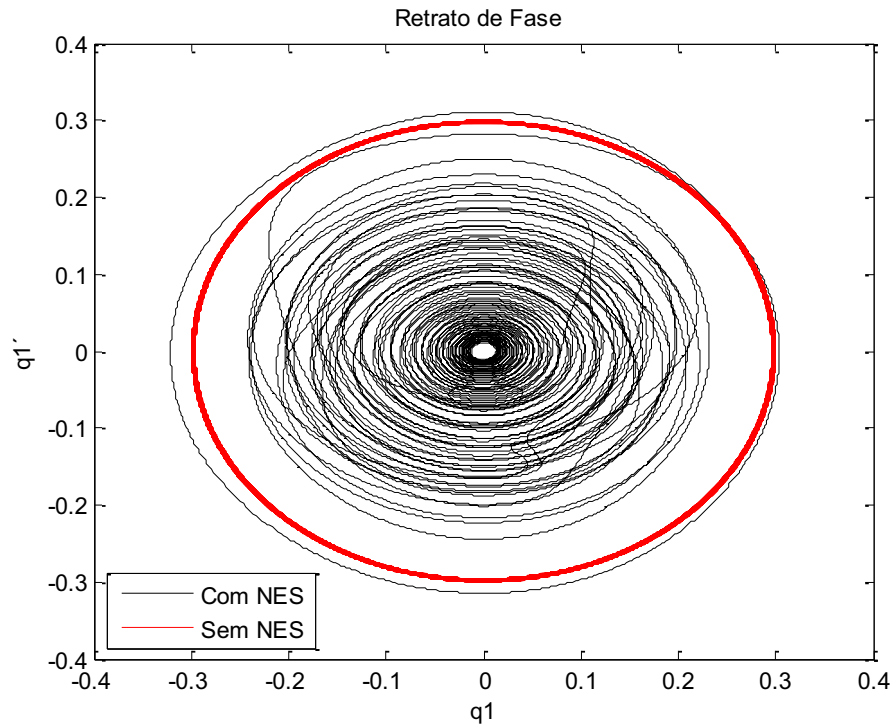


Figura 4.4. Retrato de fase do sistema com NES (preto) e sem NES (vermelho).

4.1.2 Excitação por uma força harmônica

Considerando uma força excitadora harmônica sobre o sistema dinâmico definido pela equação 4.2, é possível observar que o NES passa a aumentar a amplitude de vibração, perdendo assim sua eficiência como absorvedor de vibração.

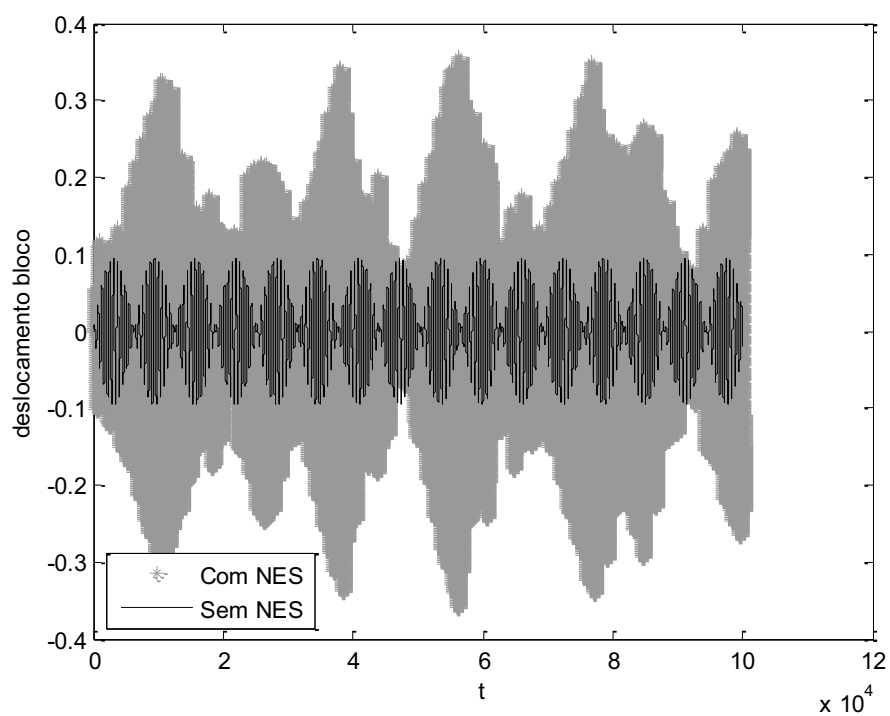


Figura 4.5. Deslocamento comparativo do sistema principal com NES (cinza) e sem NES (preto).

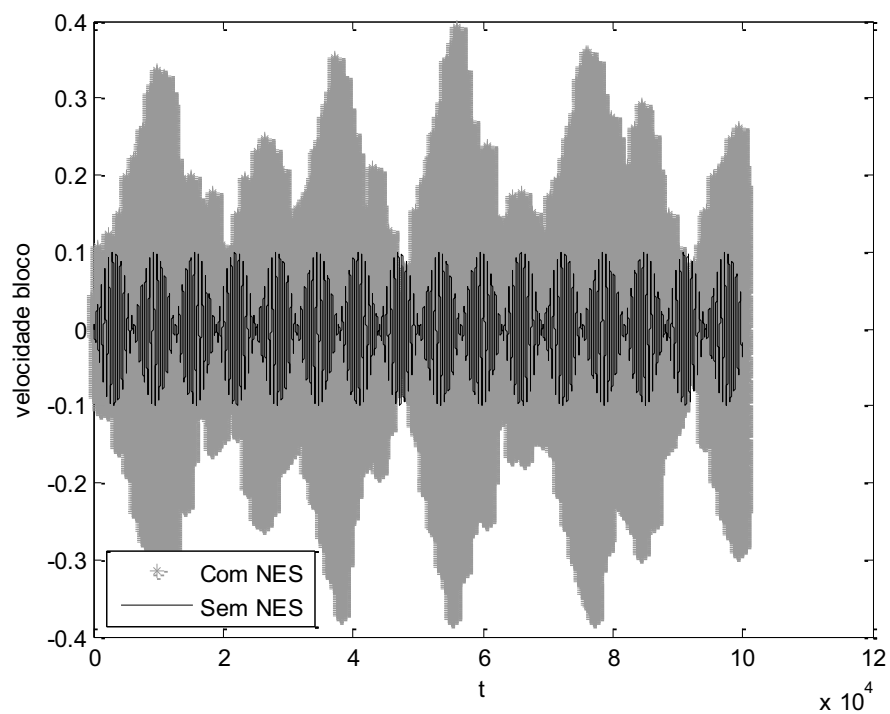


Figura 4.6. Velocidade comparativa do sistema principal com NES (cinza) e sem NES (preto).

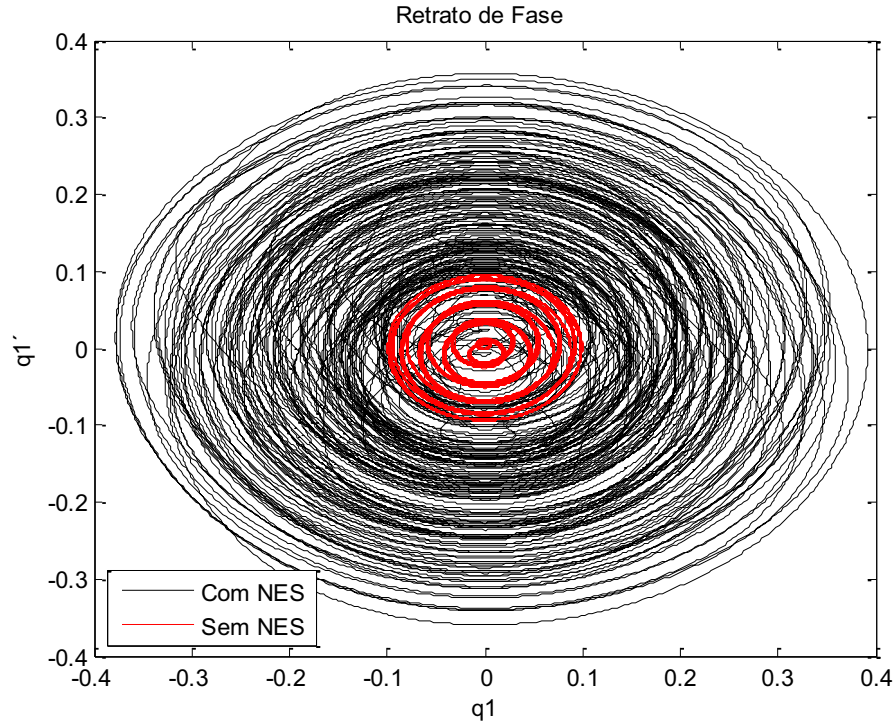


Figura 4.7. Retrato de fase do sistema com NES (preto) e sem NES (vermelho).

Para um melhor desempenho do absorvedor foi feita uma análise do melhor valor para o parâmetro $\varepsilon_1 = \frac{m_1}{m_1}$, obtendo assim o valor $\varepsilon_1 = 3.6$ como mostra a figura 4.8.

Alterando o valor do parâmetro de amortecimento de $\alpha_1 = 0$ para $\alpha_1 = 0.001$ e, realizando as mesmas simulações para uma excitação por impulso, obtém-se os resultados apresentados nas figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.

Para uma excitação harmônica os resultados são apresentados nas figuras 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16.

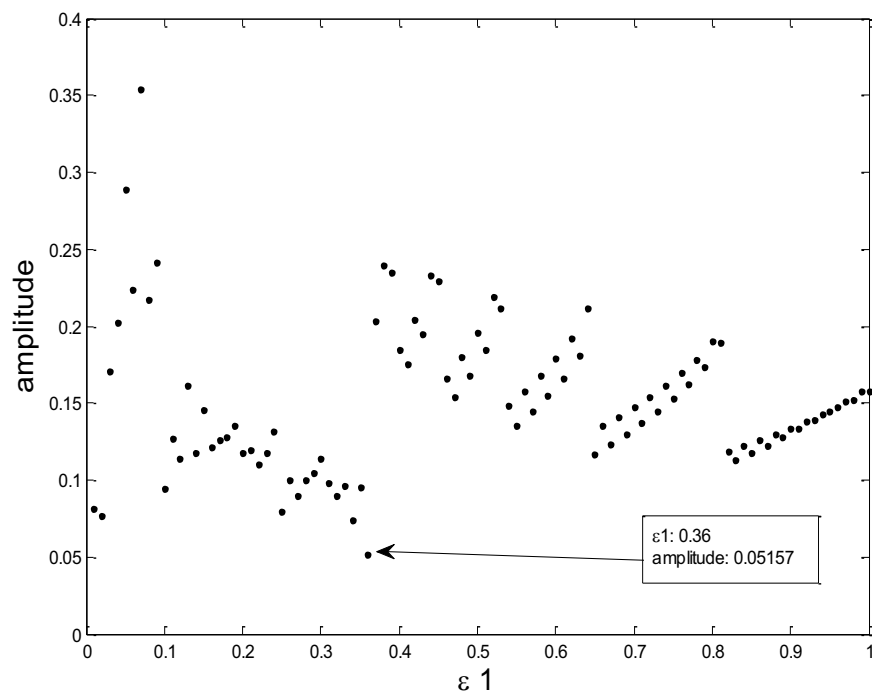


Figura 4.8. ANÁLISE DO PARÂMETRO ε_1 .

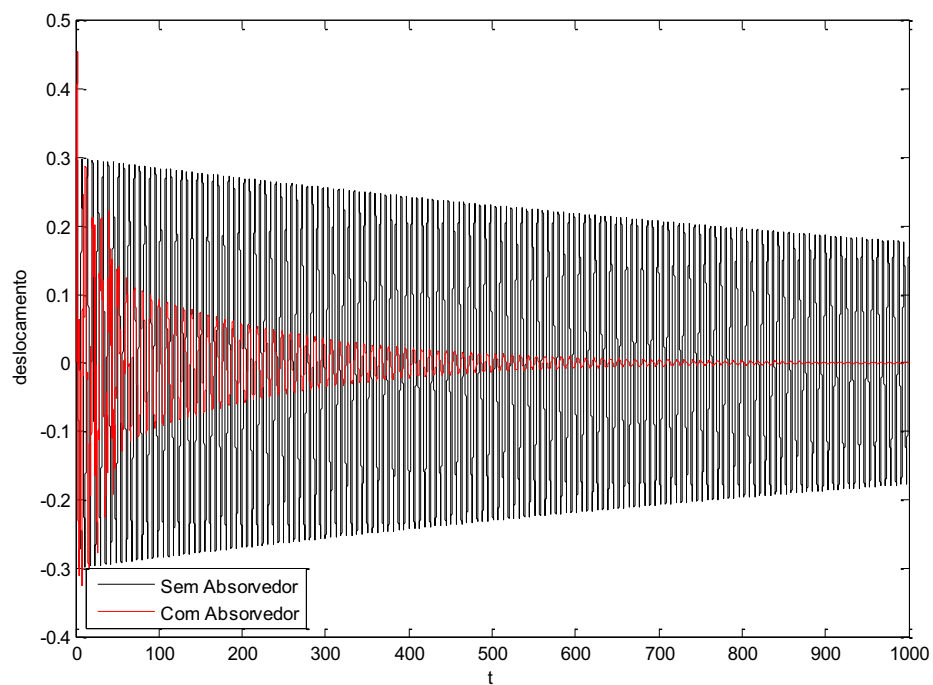


Figura 4.9. Deslocamento comparativo do sistema principal com NES (vermelho) e sem NES (preto).

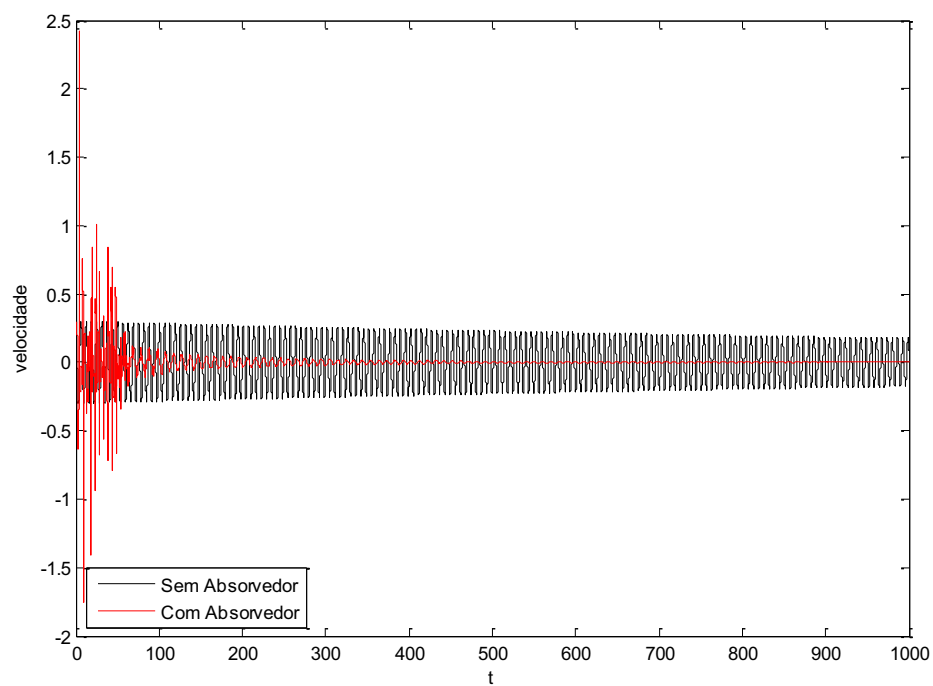


Figura 4.10. Velocidade comparativa do sistema principal com NES (vermelho) e sem NES (preto).

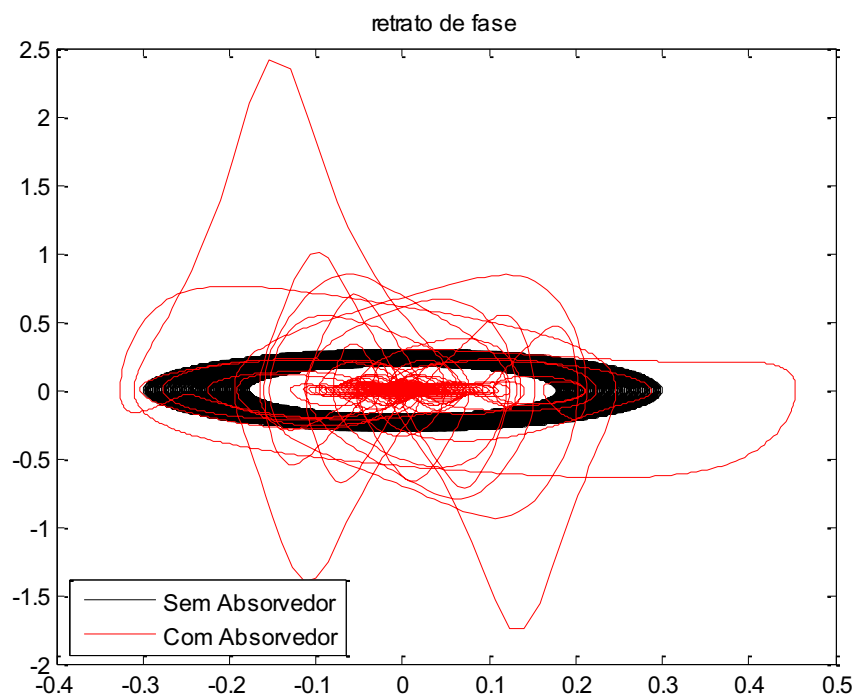


Figura 4.11. Retrato de fase do sistema com NES (vermelho) e sem NES (Preto).

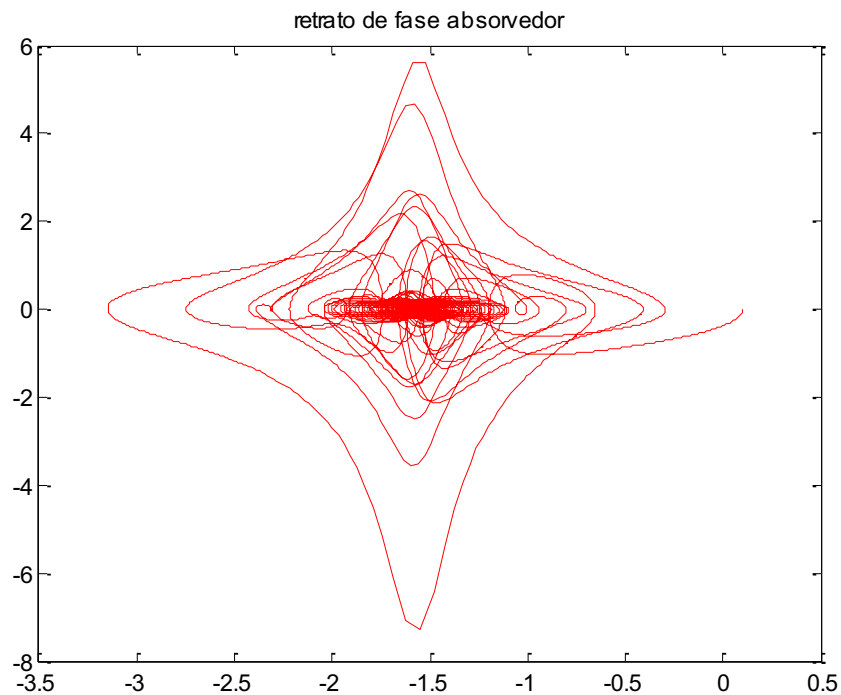


Figura 4.12. Retrato de fase do absorvedor.

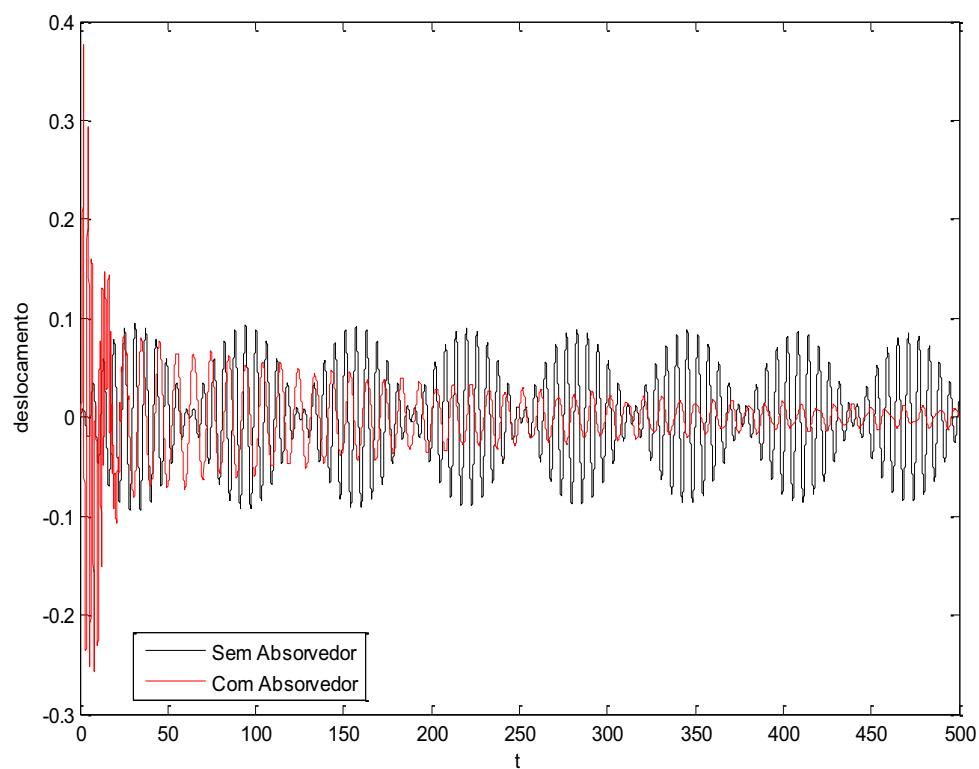


Figura 4.13. Deslocamento comparativo do sistema principal com NES (vermelho) e sem NES (preto) (excitação harmônica).

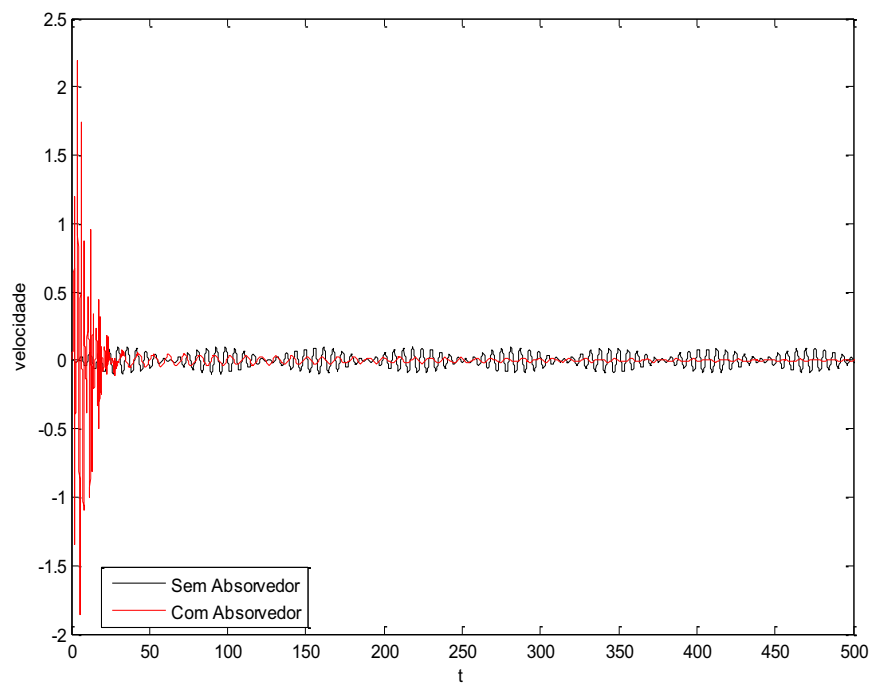


Figura 4.14. velocidade comparativa do sistema principal com NES (vermelho) e sem NES (preto) (excitação harmônica).

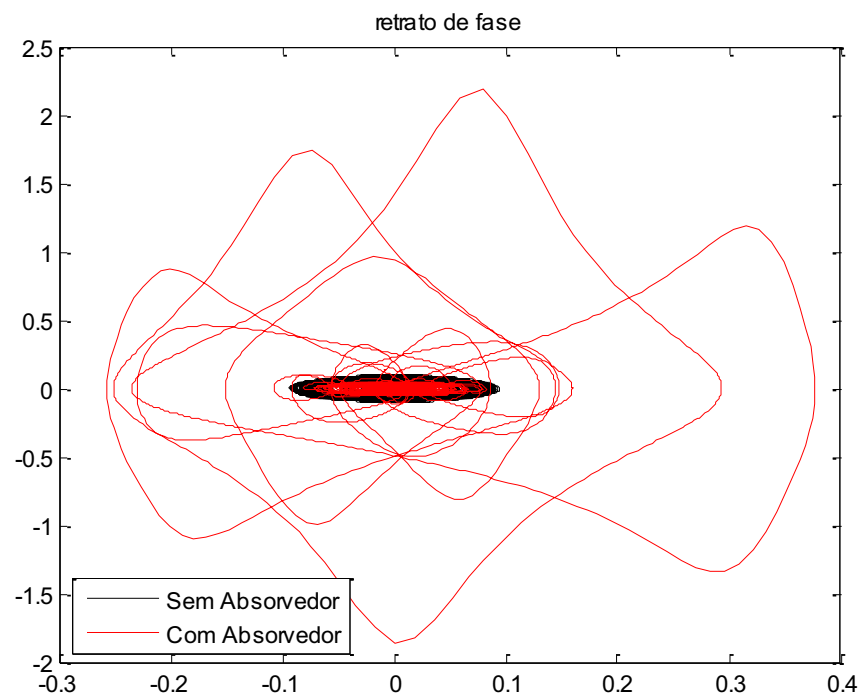


Figura 4.15. Retrato de fase do sistema com NES (vermelho) e sem NES (Preto) (excitação harmônica).

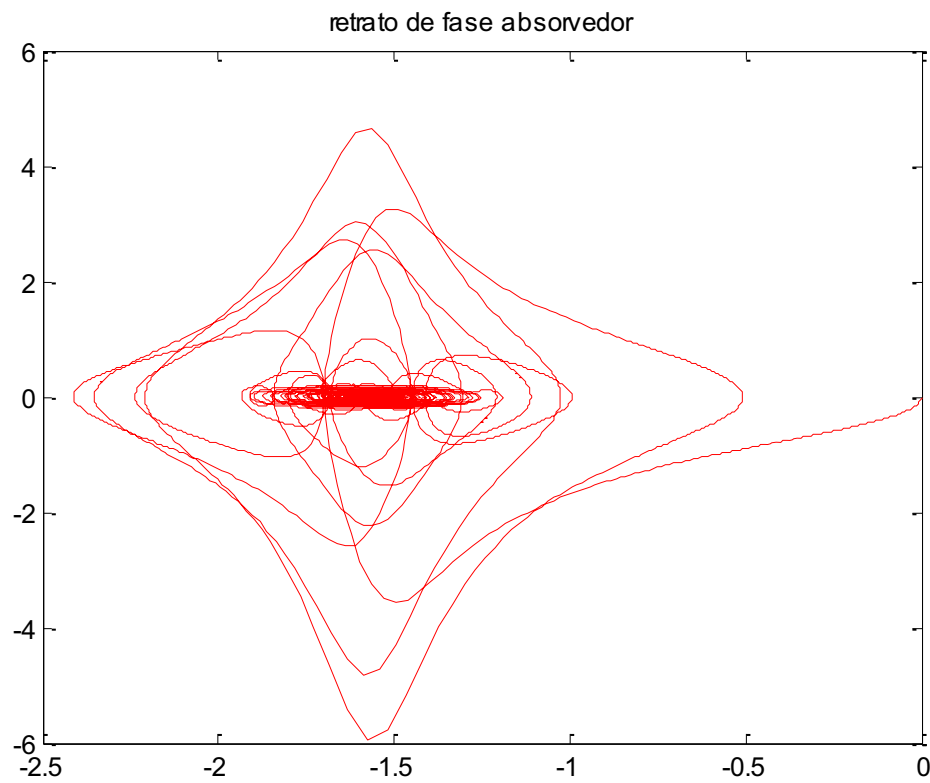


Figura 4.16. Retrato de fase do absorvedor (excitação harmônica).

5 COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM BLOCO EM MOVIMENTO TIPO MAGLEV NÃO IDEAL

5 COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM BLOCO EM MOVIMENTO TIPO MAGLEV NÃO IDEAL

Este capítulo trata da dinâmica não linear de um maglev como apresentado nos modelos 11 e 12 do capítulo 3.

5.1 MODELO MATEMÁTICO

Sabe-se que um modelo matemático é essencial para analisar a dinâmica do sistema e se necessário, para projetar um método de controle. Por meio do modelo simplificado da Figura 5.1 e 5.2, obtém-se as equações de movimento dos sistema pelo método de Lagrange (Capítulo 3).

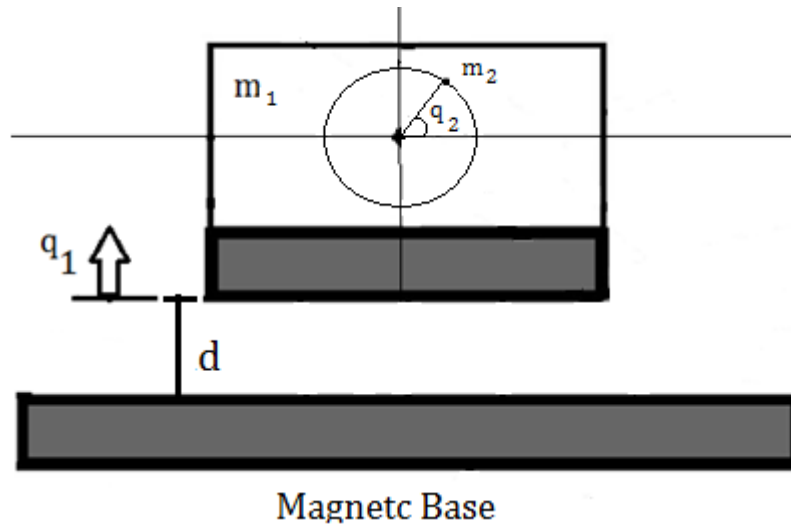


Figura 5.1. Modelo simplificado de um MagLev não ideal.

Para o corpo em levitação, apresentado na figura 5.1, segue que, as equações de movimento são:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) = -c_1 \dot{q}_1 + K_{\text{mag}}(d - q_1)^2 - g(m_1 + m_2) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2(m_2 r^2 + J_2) = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Onde

$$K_{\text{mag}} = \frac{[(m_1 + m_2)g]}{(q_1 + d)^2} \quad \text{e} \quad M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2$$

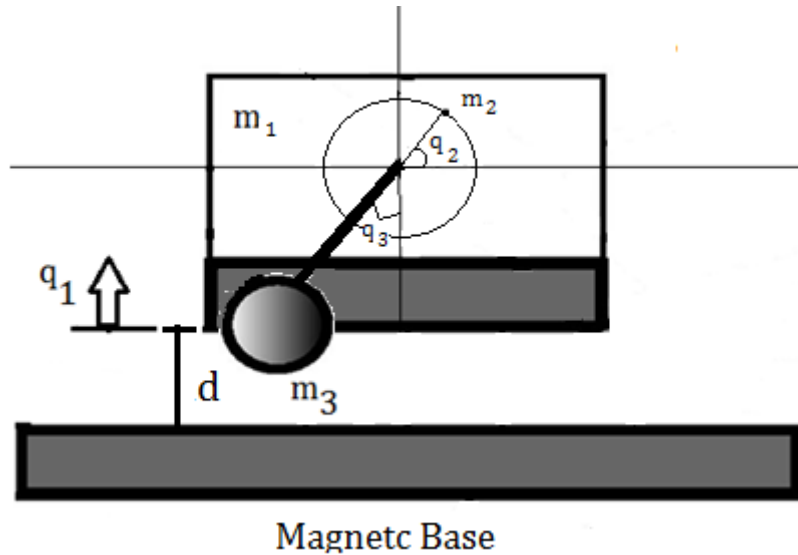


Figura 5.2. Maglev não ideal, ideal acoplado a um pêndulo.

Para o corpo em levitação, apresentado na figura 5.2, as equações de movimento são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) = \\ -c_1 \dot{q}_1 + K_{mag}(d - q_1)^2 - g(m_1 + m_2 + m_3) \\ + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) - m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + (J_2 + m_2 r^2) \ddot{q}_2 = \\ M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = \\ -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Com $K_{mag} = \frac{[(m_1 + m_2 + m_3)g]}{(q_1 + d)^2}$ e $M(\dot{q}_2) = u_1 - u_2 \dot{q}_2$.

Porém, ao analisar a expressão:

$$F = K_{mag}(d - q_1)^2 \quad (5.3)$$

Observa-se que mesmo quando $q_1 > d$ o valor da expressão continua aumentando, o que não faz sentido, pois a força magnética deve diminuir com o aumento da distância. Para corrigir esse problema deve-se multiplicar a função pelo sinal de $(d - q_1)$.

A figura 5.3 mostra o gráfico de comparação entre as funções $F = K_{mag}(d - q_1)^2$ e

$$F_1 = K_{mag}(d - q_1)^2 \text{signal}(d - q_1).$$

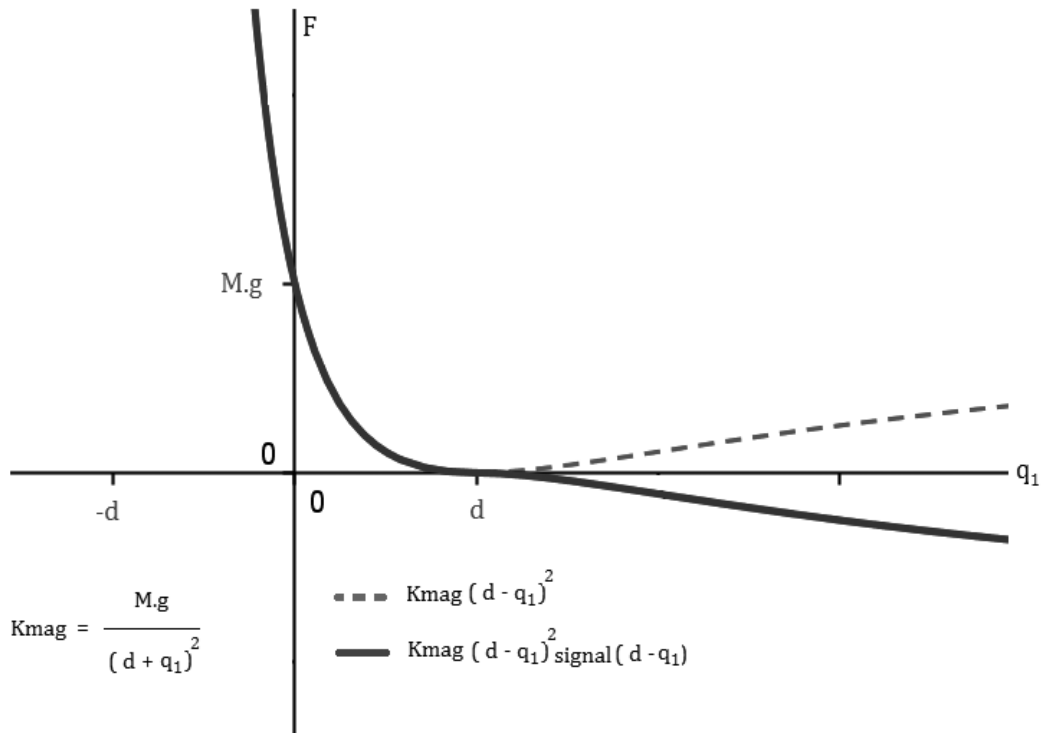


Figura 5.3. Análise das funções F e F_1 .

Logo, reescrevendo as equações 5.1 e 5.2 tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + m_2 r (\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) = -c_1 \dot{q}_1 + K_{mag} F_1 - g(m_1 + m_2) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_2 (m_2 r^2 + J_2) = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{q}_2 m_2 r \cos(q_2) + \ddot{q}_3 m_3 l \sin(q_3) = \\ -c_1 \dot{q}_1 + K_{mag} F_1 - g(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 r \dot{q}_2^2 \sin(q_2) - m_3 l \dot{q}_3^2 \cos(q_3) \\ \ddot{q}_1 m_2 r \cos(q_2) + (J_2 + m_2 r^2) \ddot{q}_2 = M(\dot{q}_2) - g m_2 r \cos(q_2) \\ \ddot{q}_1 m_3 l \sin(q_3) + \ddot{q}_3 m_3 l^2 = -c_3 \dot{q}_3 - g m_3 l \sin(q_3) \end{cases} \quad (5.5)$$

5.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

Nesta seção, os resultados de simulações numéricas são obtidas utilizando o software Matlab®.

A tabela 5.1 mostra os valores numéricos dos parâmetros usados nas simulações.

Tabela 5.1. Parâmetros (Arbex, Balthazar et AL(2011), Palacios(2009), Moon (2004)):

<i>Grandezas</i>	<i>símbolo</i>	<i>Valor</i>
Massa do bloco	m_1	10 kg
Excentricidade	$m_2 \cdot r$	0.1 Kg.m
Gap	d	0.2 m
Parâmetro do motor	μ_1	variável N.m
Parâmetro do motor	μ_2	1 N.m/Rad/s
Amortecimento	c_1	0.001 N.s/m
Gravidade	g	9.8 m/s ²
Momento de inércia	J_2	0.37 kg.m ²

5.2.1 Efeito Sommerfeld

O fenômeno de salto na amplitude de vibração e do aumento da potência exigida pela fonte para operar próximo da região de ressonância do sistema são manifestações de um problema não ideal, geralmente são conhecidos na literatura como Efeito Sommerfeld. Este fenômeno sugere que a resposta vibratória do sistema não ideal emula um "absorvedor de energia" nas regiões próximas à ressonância do sistema, transferindo a potência da fonte de vibrações da estrutura de apoio, ao invés da aceleração da máquina. O fenômeno do “salto” é obtido quando a tensão do motor (μ_1) passa pela região de ressonância como mostra a figura 5.4.

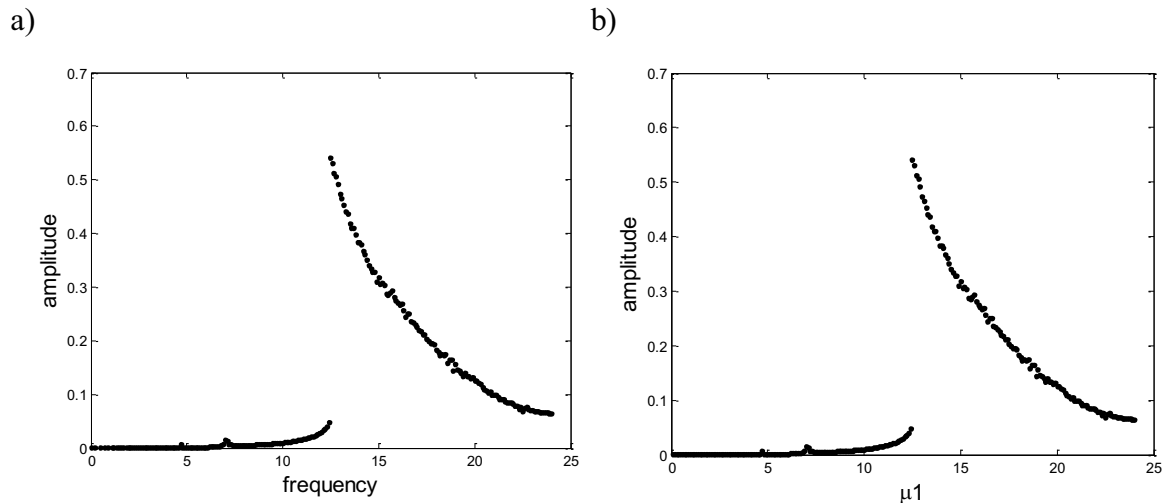


Figura 5.4. Efeito Sommerfeld – a) amplitude por frequências médias; b) – amplitude por tensão do motor.

Observa-se o aumento da amplitude de vibração do corpo em levitação quando a tensão do motor (μ_1) se aproxima da região de ressonância do sistema. Após a passagem pela região de ressonância, a amplitude de vibração do sistema tende a diminuir.

5.2.2 Controle

Esta seção trata de um método para controlar a amplitude de vibração do sistema MagLev proposto. Nesse trabalho utiliza-se dos métodos de controle, um passivo e outro ativo.

5.2.2.1 Controle passivo

Uma estratégia de controle passivo para redução do efeito Sommerfeld pode ser implementada para manter o sistema em baixa vibração. Para esse fim é acoplado ao sistema principal um pêndulo, como mostra a figura 5.2, como realizado no trabalho de Yabuno (2004).

Observando as figuras 5.5 e 5.6, nota-se que o pêndulo aumentou a amplitude de vibração na região do “jump”.

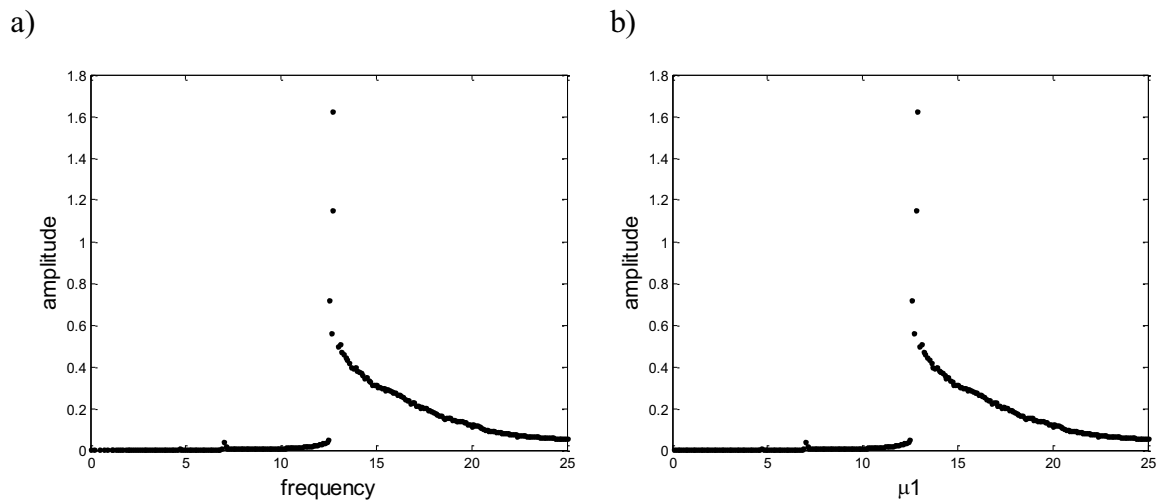


Figura 5.5. Efeito Sommerfeld – a) amplitude por frequências médias; b) – amplitude por tensão do motor.

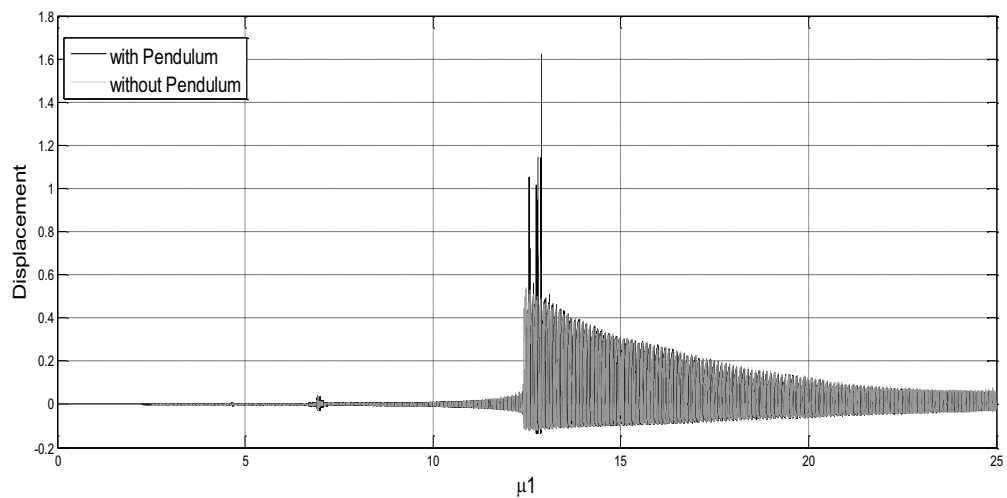


Figura 5.6. comparação dos sistemas: sem pêndulo (cinza) e com pêndulo (preto).

5.2.2.2 Controle ativo

Com o objetivo de reduzir a magnitude do efeito Sommerfeld será considerada a introdução de uma suspensão electromagnética controlável, semelhante à metodologia

proposta por (Watanabe et al., 2007). A estratégia de controle pode ser observado na Figura 5.7.

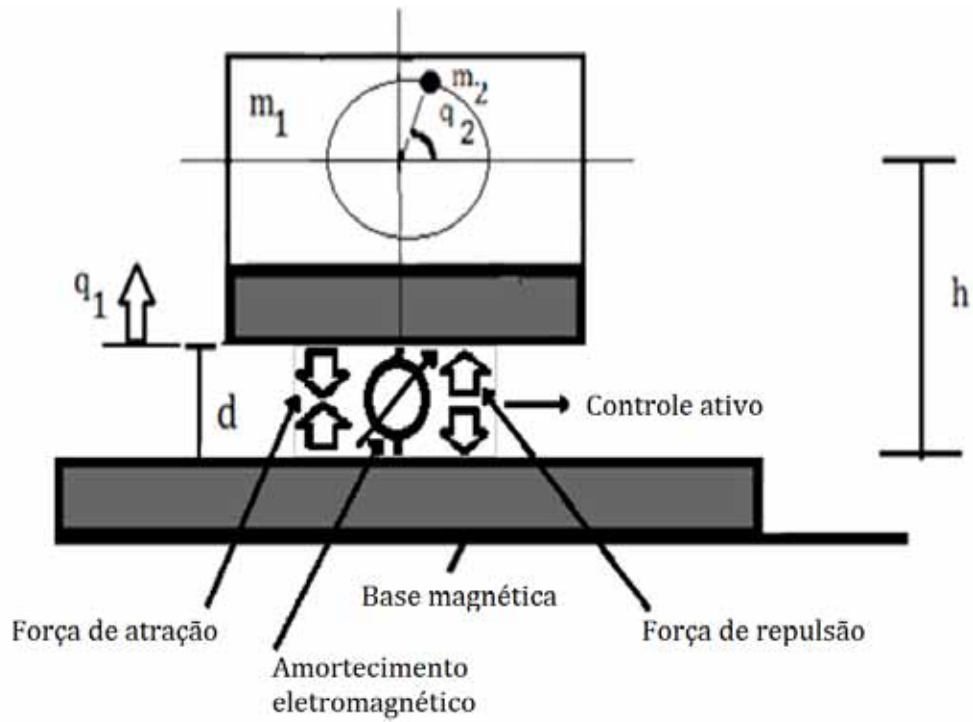


Figura 5.7. Mecanismo utilizado para o controle de vibrações.

Introduzindo o controle (U) no sistema segue que:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{\frac{J_2 + m_2 r^2}{m_2} G_1 - \frac{m_2 r \cos(y_3)}{m_1 + m_2} G_2}{\Delta} - U \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{G_2 - r \cos(y_3) G_1}{\Delta} \end{cases} \quad (5.6)$$

A dinâmica do controle pode ser descrita pela função

$$U = \alpha G(y_2) \quad (5.7)$$

Onde

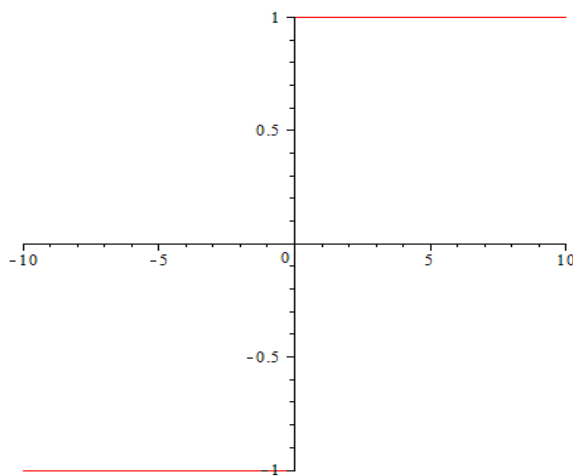
$$G(y_2) \begin{cases} > 0(\rightarrow a), & \text{if } y_2 > 0(\rightarrow \infty) \\ = 0 & \text{if } y_2 = 0 \\ < 0(\rightarrow -a) & \text{if } y_2 < 0(\rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (5.8)$$

Com $a > 0$ e finito.

De acordo com (Tereshko et al., 2011) o controle (5.7) é especialmente sintonizado para controlar a posição de equilíbrio

Portanto considerando $G(y_2) = \tanh(\beta y_2)$ proposto por (Tereshko et al., 2011), com $0 < \beta \leq \infty$ determinando a inclinação da função.

a)



b)

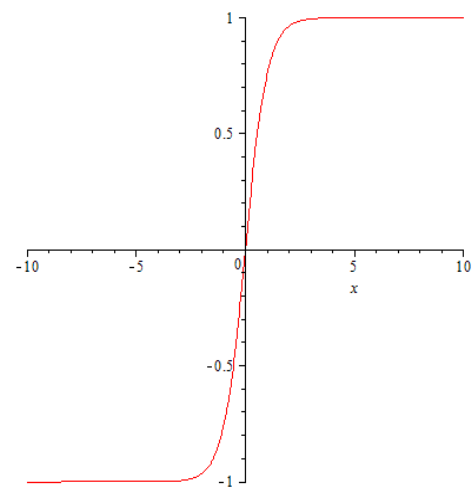


FIGURA 5.8. FUNÇÃO DE CONTROLE A) $G(y_2)$ (5.8) B) $G(y_2) = \tanh(\beta y_2)$

Deve-se escolher α e β de tal forma que diminuam a amplitude durante o “salto”.

Observando as figuras 5.9, 5.10 e 5.11 obtém-se os valores de α e β .

a)

b)

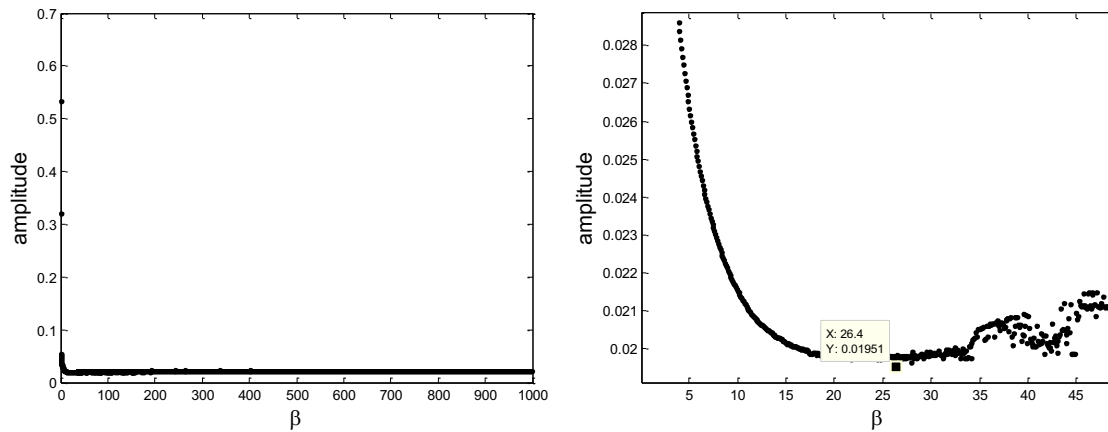


Figura 5.9. a) Variação da amplitude máxima($\mu_1=12.5$) por β b) Zoom da figura 4a.

A figura 5.9 mostra que para $\beta = 26.4$ ocorre a menor amplitude de movimento quando $\mu_1=12.5$, região do “salto”.

O mesmo será feito para se obter o valor de α , como mostra as Fig. (5.10) e (5.11)

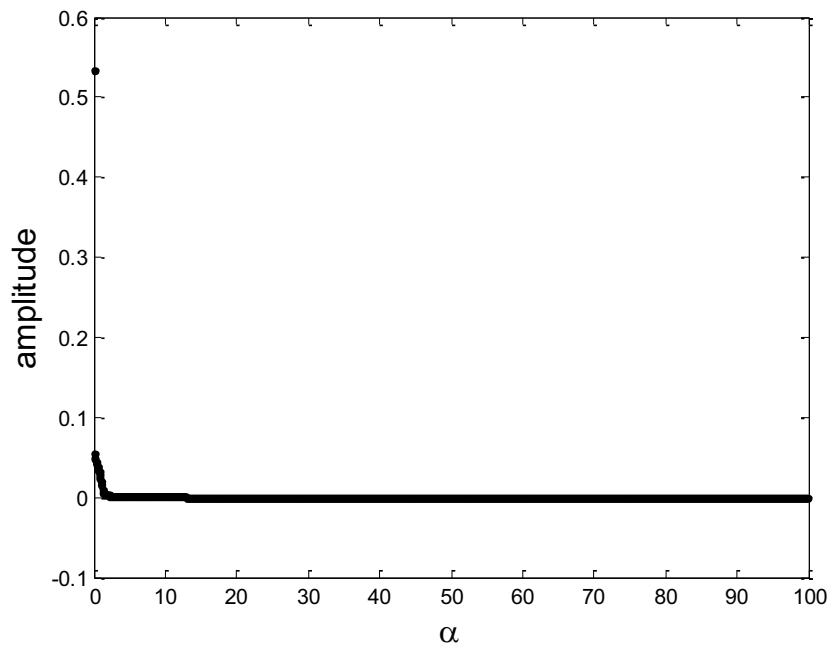


Figura 5.10. Variação da amplitude máxima($\mu_1=12.5$) por α .

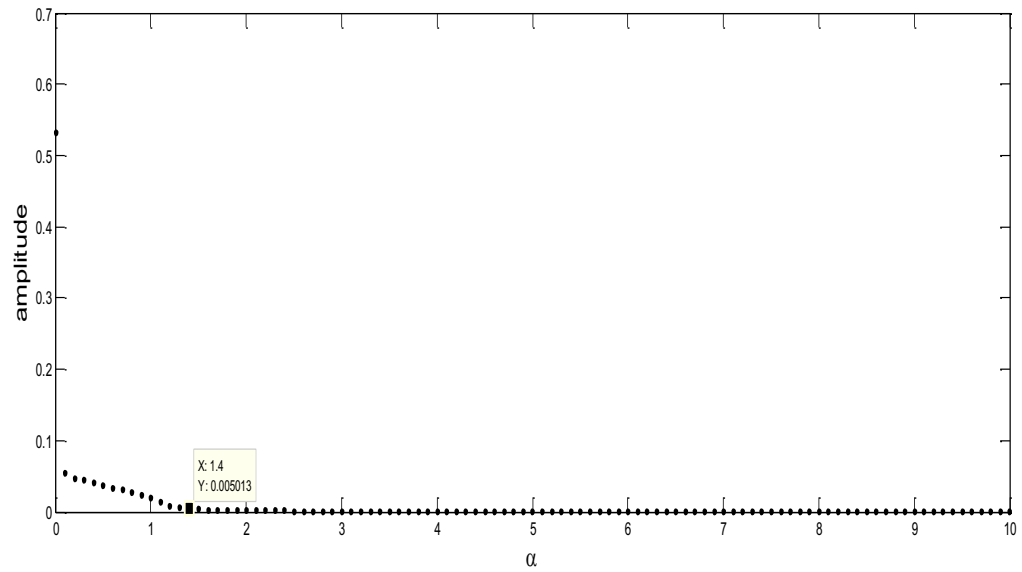


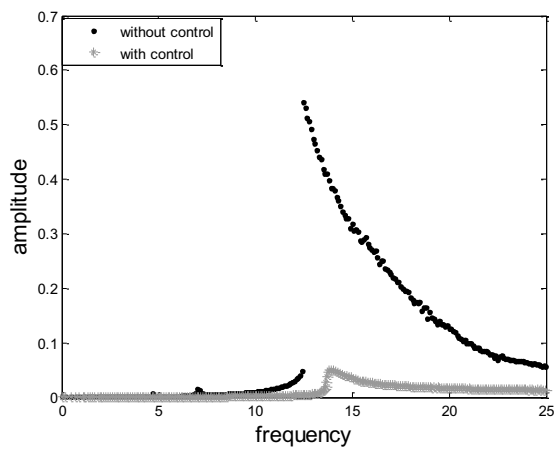
Figura 5.11. Zoom da Fig. (5.8).

A Fig. (5.11) mostra que qualquer valor de α maior que 1.4 não há uma diminuição considerável na amplitude do sistema, logo será considerado $\alpha=1.4$.

5.2.3 Comparação dos sistemas

A seguir será feita uma comparação entre o sistema sem controle e o sistema controlado para avaliar a eficiência do método de controle utilizado.

a)



b)

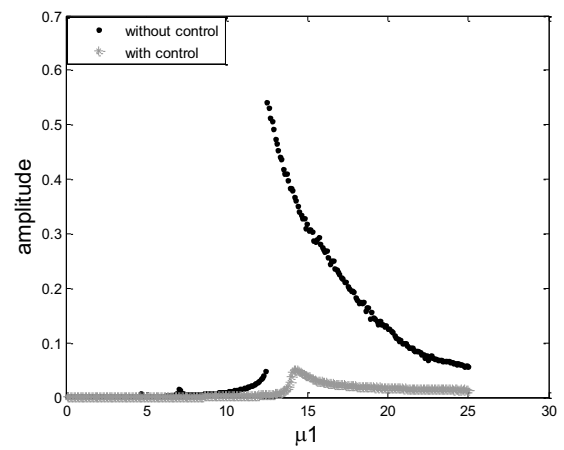


Figura 5.12. Efeito Sommerfeld – comparação – a) amplitude por frequências médias; b) amplitude por tensão do motor.

A Fig. (5.12) mostra que houve uma diminuição significativa na amplitude de vibração do sistema MagLev com a utilização do método de controle proposto por Tereshko (2004), fazendo com que o sistema passe pela região de ressonância sem um grande aumento na amplitude de movimentos.

Na Fig. (5.13) é possível observar o deslocamento do corpo em levitação magnética dos sistemas com controle e sem controle, conforme a variação da tensão (μ_1) do motor.

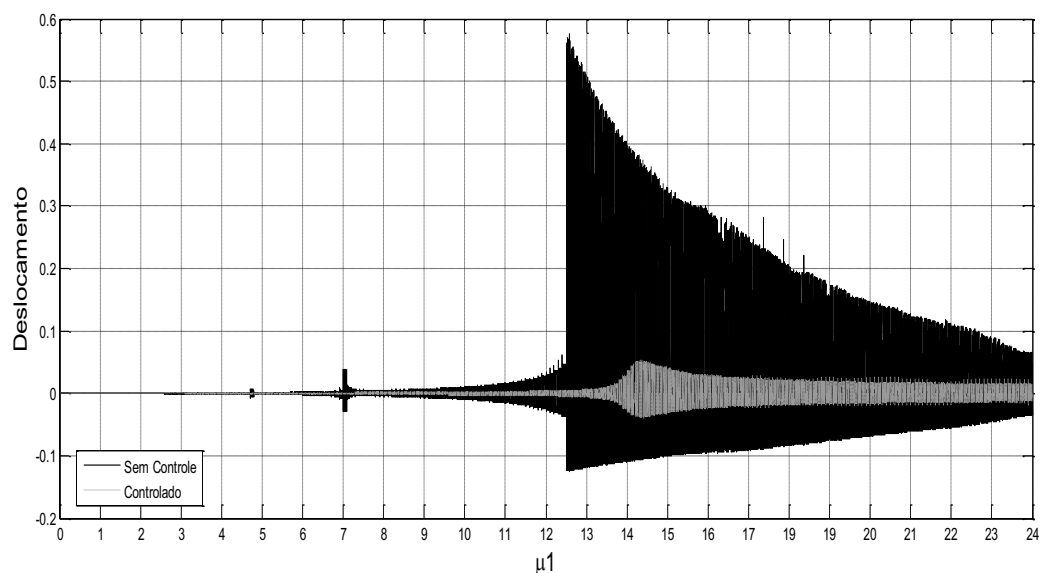


Figura 5.13. Comparação do deslocamento entre o sistema com controle (cinza) e sem controle (preto).

5.2.4 Aparecimento do Fenômeno de Outros Saltos

Aumentando o valor de μ_1 é possível observar a ocorrência de mais saltos. Esse fenômeno acontece devido ao valor da rigidez k_{mag} não ser constante.

As figuras (5.14) e (5.15) mostram um “salto triplo” de um sistema *maglev* não ideal. Nas figuras (5.16) e (5.17) é possível observar os múltiplos saltos no sistema *maglev* acoplado a um pêndulo.

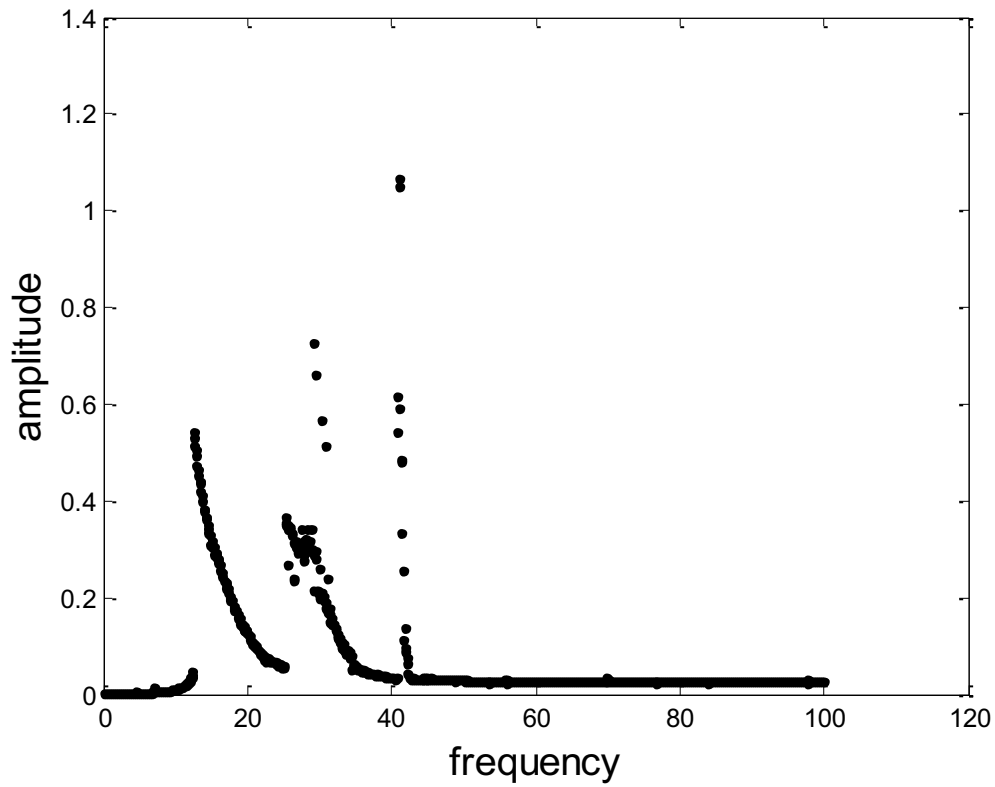


Figura 5.14. efeito Sommerfeld – amplitude VS frequência do motor.

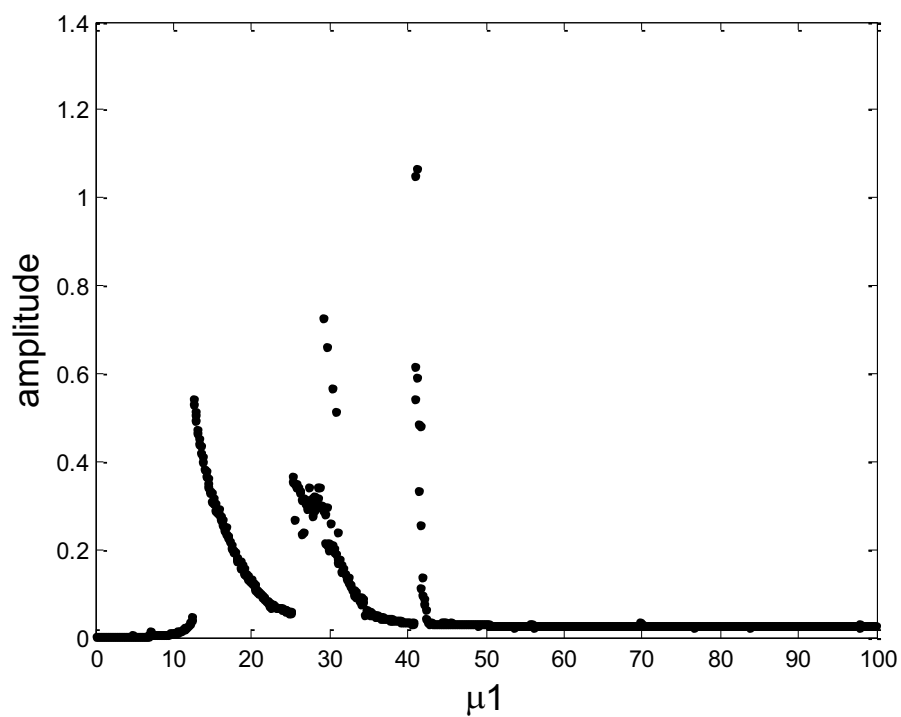


Figura 5.15. efeito Sommerfeld - amplitude VS tensão do motor.

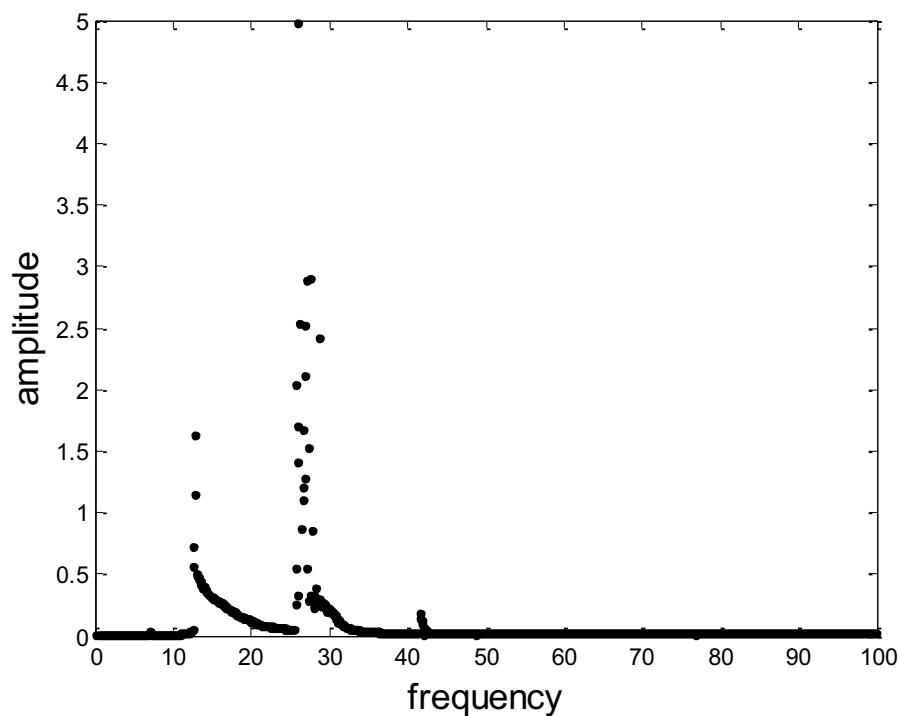


Figura 5.16. efeito Sommerfeld – amplitude VS frequência do motor (com pêndulo).

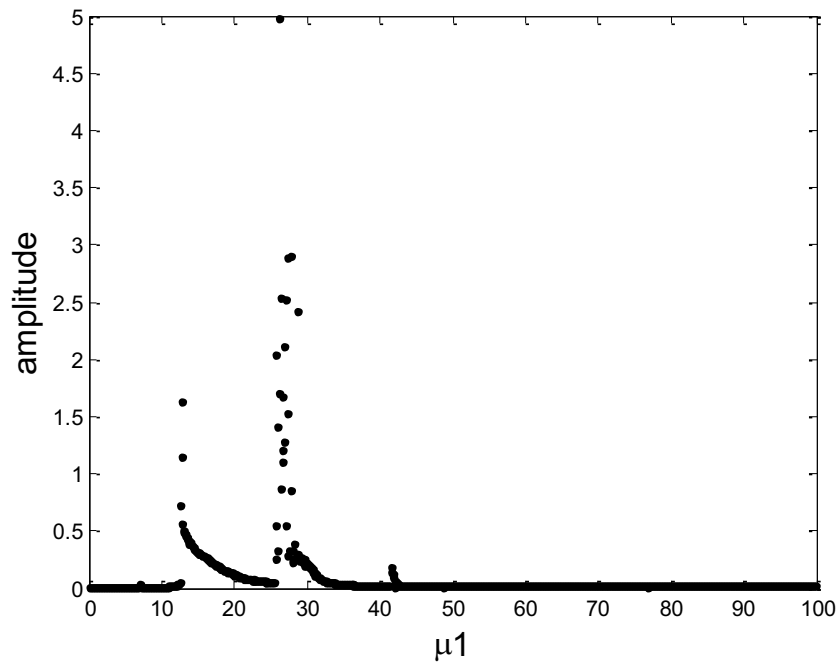


Figura 5.17. efeito Sommerfeld - amplitude VS tensão do motor (com pêndulo).

Com o pêndulo acoplado ao sistema ocorre um aumento na amplitude de vibração nos dois primeiros saltos, mas no terceiro salto ocorre uma diminuição na amplitude de vibração do sistema, como mostram as figuras (5.16), (5.17) e (5.18) .

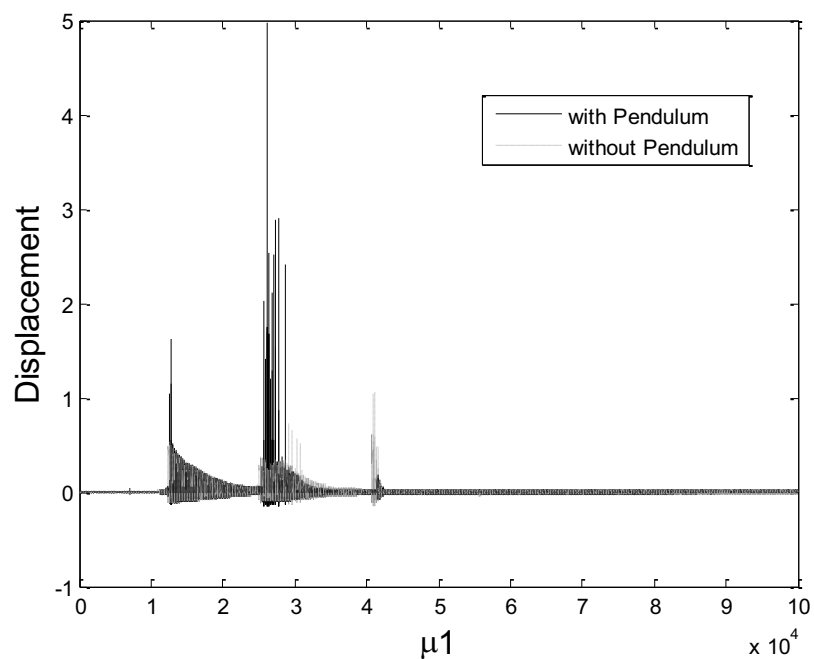


Figura 5.18. sistema acoplado ao pendulo (preto) e sem pendulo (cinza).

Aplicando o controle ativo proposto por Tereshko (2011), discutido no item 5.2.2.2, obtém as figuras (5.19), (5.20) e (5.21).

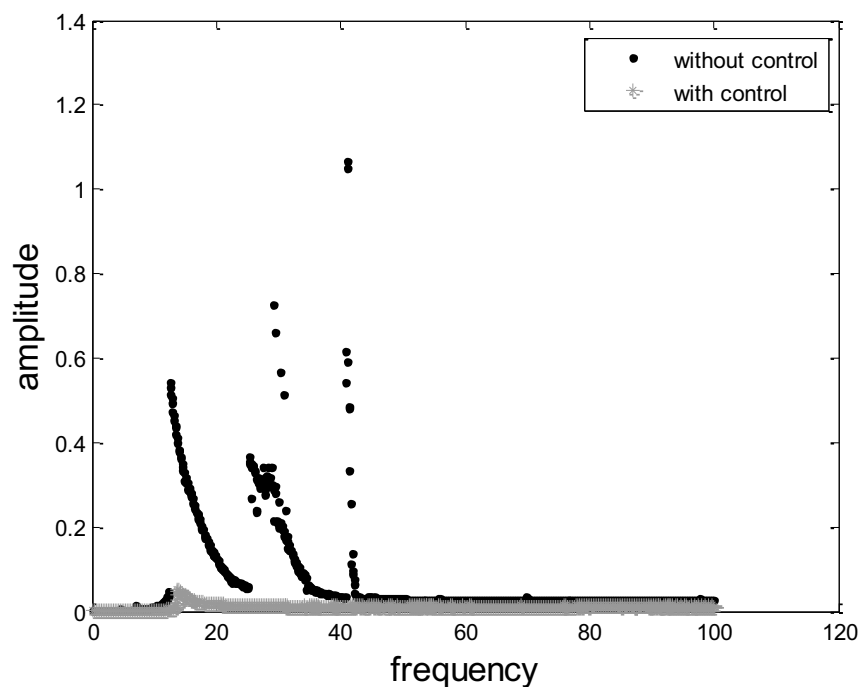


Figura 5.19. efeito Sommerfeld - comparação– amplitude VS frequência do motor.

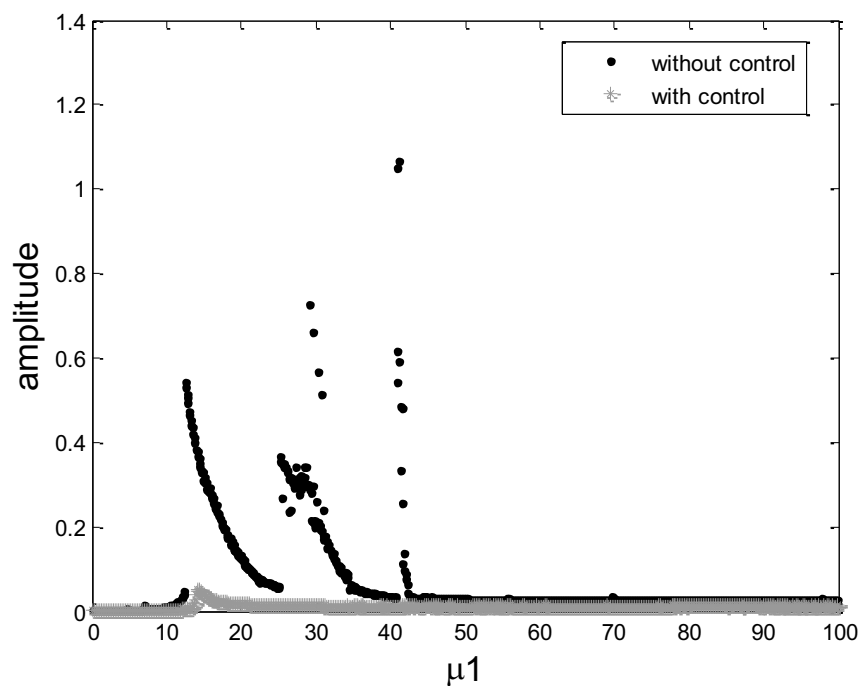


Figura 5.20. efeito Sommerfeld - comparação– amplitude VS tensão do motor.

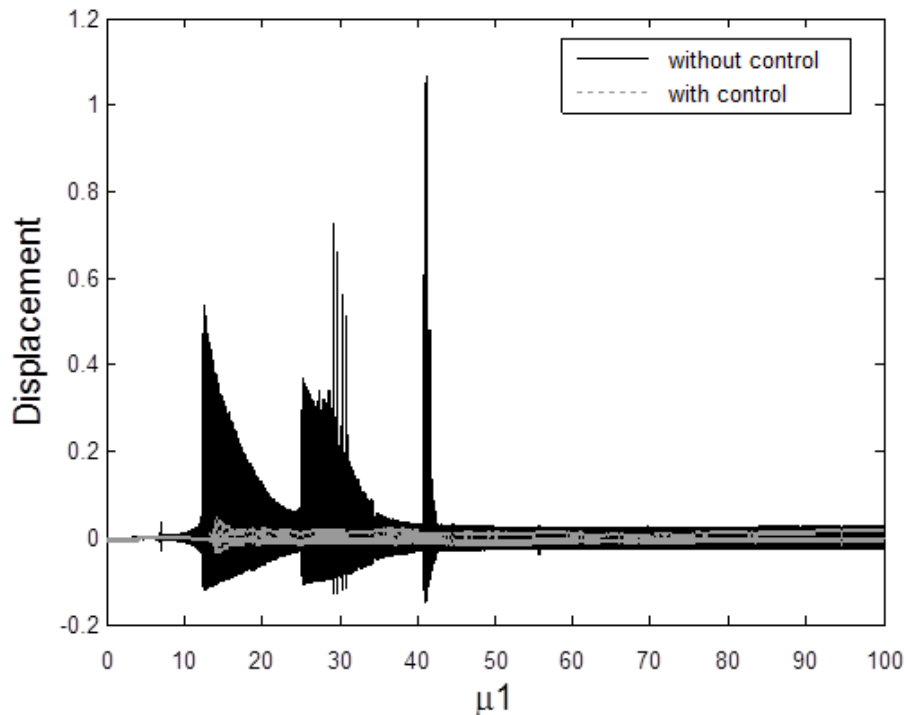


Figura 5.21. Comparação do deslocamento entre o sistema com controle (cinza) e sem controle (preto).

As figuras (5.19), (5.20) e (5.21) mostram que houve uma diminuição significativa na amplitude de vibração do sistema, ocorrendo apenas um pequeno “salto” na primeira região de ressonância.

Aplicando o controle ativo no sistema pendular e comparando os dois sistemas (um somente com controle ativo e outro com controle ativo e passivo) observa-se um melhor desempenho, para redução da amplitude de movimentos na região de ressonância conforme mostram as figuras (5.22) e (5.23), quando aplicado os dois métodos de controle.

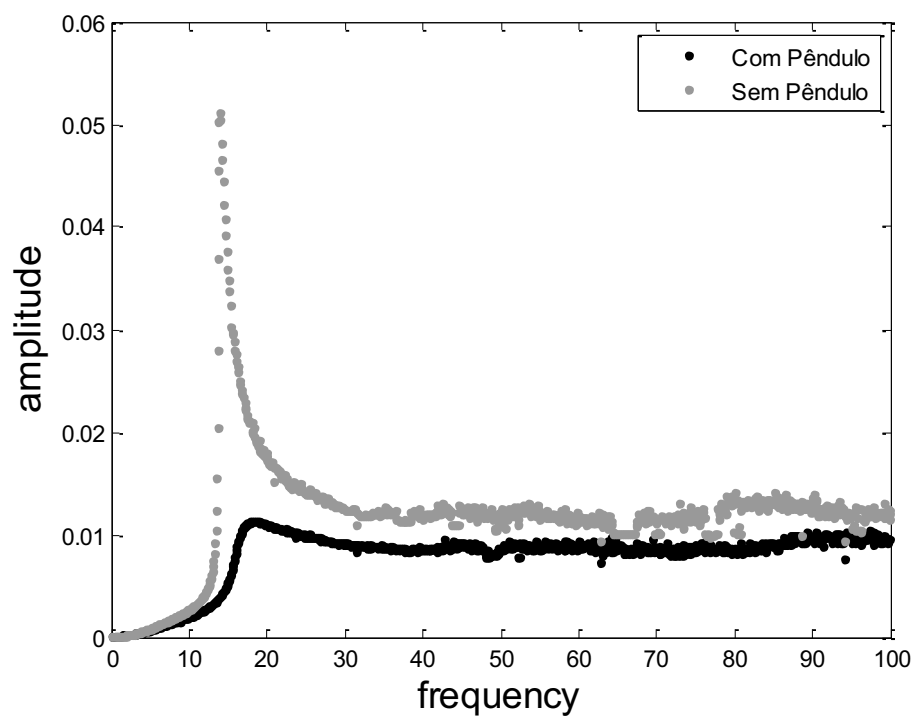


Figura 5.22. efeito Sommerfeld - comparação– amplitude VS frequência do motor.

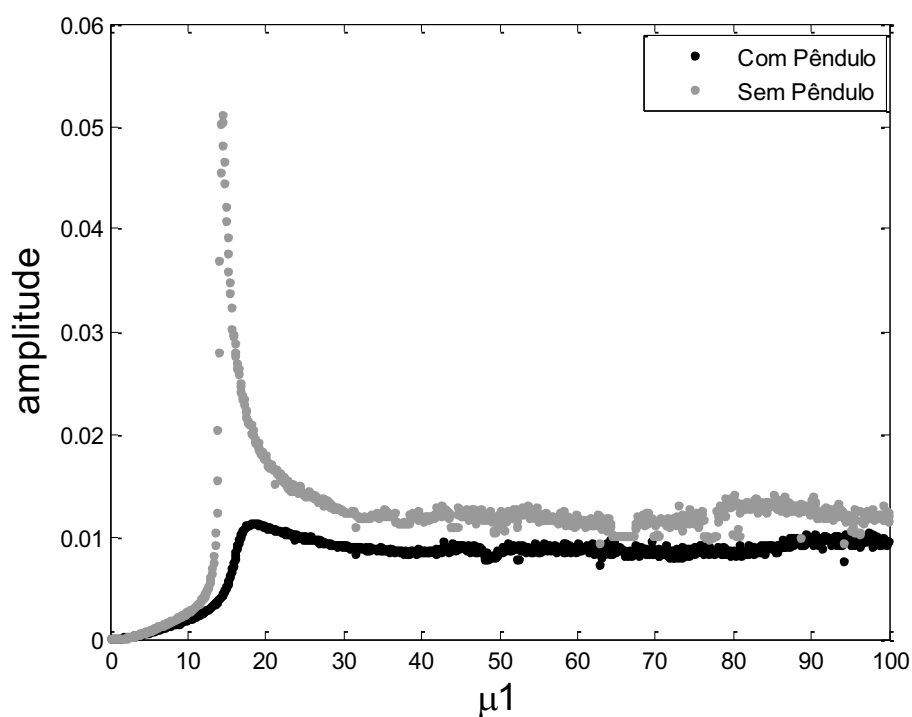


Figura 5.23. efeito Sommerfeld - comparação– amplitude VS tensão do motor.

6 CONCLUSÕES

6 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados no capítulo 4 mostram que absorvedor de energia (NES) proposto neste trabalho mostrou-se sensível à fonte de excitação do sistema quando não é considerado amortecimento.

Para uma excitação por impulso o NES demonstrou ser bastante eficiente na diminuição da amplitude de vibração do sistema. Por outro lado, quando a fonte de excitação passa a ser uma força harmônica próxima da frequência natural do sistema, o NES aumentou a amplitude de vibração do sistema principal porém quando é considerado o atrito, o absorvedor obteve melhor desempenho tanto para uma excitação por impulso como por uma força harmônica.

O sistema de vibração não ideal proposto no capítulo 5 mostrou que a fonte de energia tem influência sobre a estrutura, devido à existência do efeito Sommerfeld, a amplitude máxima ocorreu em regiões onde aconteceu o fenômeno de salto (Palacios, 2009).

Foram estudados, no capítulo 5, sistemas do tipo *MagLev* (um bloco incluindo um ímã em que na parte inferior está situado um polo magnético, de tal maneira a opor-se ao polo superior de uma base magnética) excitada por uma fonte de energia não ideal (um motor elétrico desbalanceado do fornecimento de energia limitada).

Duas estratégias de controle foram implementadas para os sistemas *MagLev*. O controle passivo não foi eficiente na tentativa de diminuir a amplitude de vibração do sistema. A estratégia de controle ativo foi eficiente para o propósito desse trabalho.

Conciliando os dois métodos de controle obtêm-se melhores resultados que quando aplicados separadamente, como mostram as figuras (5.22) e (5.23).

REFERÊNCIAS

Arbex, H.C., Balthazar, J.M., Pontes Junior, B.R., Palacios Felix, J.L., Brasil, R.M.L.R.F., On nonlinear dynamics and control of a block, magnetically levited, excited by a non-ideal engine. – COBEM 2011.

Arbex, H.C., Balthazar, J.M., Pontes Junior, B.R., Palacios Felix, J.L., Brasil, R.M.L.R.F., Dinâmica não linear de um bloco magneticamente levitado, excitado por um motor não ideal. – Dincon 2011.

Arnold, F. R., “Steady-state behavior of systems provided with nonlinear dynamic vibration absorbers,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, pp. 487–492, 1955.

Balthazar, J. M.; Belato, D.; DE Mattos, M. C., Wieczorec , S.; On vibrating systems with a Limited Power Supply and Their Applications to Engineering Sciences. In. Seminário Brasileiro de Análise, Campinas, SP, Brasil. Anais do Seminário Brasileiro de Análise, 1999, pp.137-227.

Balthazar, J. M., Brasil, R.M.L.R.F., Alguns comentários em dinâmica e controle não lineares. In. *Aplicon – Escola brasileira de aplicações em dinâmica e controle*, São Carlos, SP, Brasil, p. 35 – 64, 2001.

Balthazar, J. M.; Mook, D. T., Brasil, R. M. L. R. F., Weber, H. I., Felini, A., Belato, D., Felix, J. L. P.; Recents results on vibrating problems with limited power supply. In.

6th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Polonia. Proceedings
6th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, 2001, v. , pp. .

Balthazar, J. M.; Brasil, R. M. L. R. F.; Weber, H. I.; Fenili, A.; Belato, D.; Felix, J. L. P.; Garzelli, F. J. A review of new vibrating issues due to non-ideal energy sources. Dynamical Systems and Control, Taylor, Francis Group, edited by: F. Udwadia, H. I. Weber, G. Leimann. ISBN: 0415309972.

Balthazar, J. M.; Pontes, B. R.; On friction induced non-linear and non-ideal (regular and chaotic) vibrations: a source of fatigue. Dynamical 108 Systems and Control, Taylor, Francis Group, edited by: F. Udwadia, H. Weber, G. Leitmann. ISBN: 0415309972.

Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Brasil, R.M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D., Felix, J.L.P., —An overview on non-ideal vibrations, Meccanica, Vol. 38, No. 6, 613-621, 2003.

Balthazar, J. M.; Junior, E. B. R.; Mattos, M. C.; A Dinâmica do Acoplamento de um Motor de Corrente Contínua e sua Estrutura de Suporte, 4o Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, UNESP - Campus de Bauru, 6-10 de Junho de 2005.

Barbosa , L.F.W., “Estudo de um sistema inteligente para o controle do deslocamento do plasma no Tokamak” - ETE (Tese de Doutorado) – ITA, São José dos Campos, 2003.

Bolla, M., Balthazar, J.M., Felix, J.L.P., Mook, and D.T.: On an approximate analytical solution to a nonlinear vibrating problem, excited by a non-ideal motor. *Nonlinear Dynamics* 50, 841-847 (2007).

Boyce, W. E.; DiPrima R. C., *Elementary differential equations and boundary value problems*, Jhon Wiley & Son Canada, 2001.

Braunbeck, W. Free suspension of bodies in electric and magnetic fields, *Zeitschrift für Physik*, 112, 11, pp753-763 (1939).

Dantas, M.J. H.and Balthazar J.M.: On the existence and stability of periodic orbits in non-Idealproblems: general results, *Z.Angew.Mathematik and Physik ZAMP*, (58), pp. 40-958, (2007).

De Souza, S.L.T., Caldas, I.L., R.L. Viana, Balthazar, J.M.andBrasil, R.M.L.R.F.: Dynamics ofvibrating systems with tuned liquid column dampers and limited power supply. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, Issues 4-5, Pages 987-998, (2006).

Felix, JLP, Balthazar, J.M., Brasil, R.M.L.R.F.: On tuned liquid column dampers mounted on a structural frame under a non-ideal excitation. *Journal of Sound and Vibration* 282, 1285-1292 (2005).

Felix, J.L.P., Balthazar, J.M., Brasil, R.M.L.R.F.: On saturation control of a non-ideal vibrating portal frame foundation type shear-building. *Journal of Vibration and Control*, 11, 121-136 (2005).

Castão , K.A.L., Goes, L.C.S., and José M Balthazar A note on the attenuation of the sommerfeld effect of a non-ideal system taking into account a MR damper and the complete model of a DC motor ..Journal of Vibration and Control, June 2011; vol. 17, 7: pp. 1112-1118., first published on November 8, 2010

Carmichael ,A. T., et al.. Magneticsuspension systems with digital controllers, Rev. Sci. Instrum., v57(8): 1611- 1615, (1986).

Dias, A, O. Estudo de um sistema mecânico com pêndulo sob excitação não ideal. Dissertação de mestrato, Pós-graduação em matemática aplicada, 2006

Dantas, M.J.H., Balthazar, J.M.: On energy transfer between linear and non-linear oscillator. J. Sound Vib. (2008).

Dantas, M.J.H., Balthazar, J.M.: On theoretical results on energy transfer on linear and nonlinear mechanical oscillator. In: Proceedings of EUROMECH Colloquium 483. Geometrically Non-linear Vibrations of Structures, July 9–11, 2007, FEUP, Porto, Portugal, pp. 49–52 (2007).

Elias, L, J. Estudo Dinâmica não linear de um pêndulo eletromecânico com excitação vertical. Dissertação de mestrato, Pós-graduação em matemática aplicada, 2009

Felix, J.L.P.; Balthazar, J.M.; On a control strategy for a non-ideal vibrating system, by using electro-magneto and magneto-rheological dampers like device. *7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, FCT-UNESP at Presidente Prudente, SP, Brazil, May 07-09, 2008.

Felix, J.L.P.; Balthazar, J.M.; Brasil, R.M.L.R.F.; Abreu, C.L.; Silva, Sabrina.; Souza, Elemar.; Analytical approximations of a non-ideal beam modeled with nonlinear damping and stiffness, *60 Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, UNESP- Campus São José do Rio Preto, SP, Brazil, May 21-25, 2007.

Frahm, H., A Device for Damping Vibrations of Bodies. US Patent 989958, 1911.

GAMOW, George.; Biografia da Física. Rio de Janeiro. Zahar Editores. 1963.

Gendelman O.V.; Sigalov G.; Manevitch L.I.; Mane M.; Vakakis A.F.; Bergman L.A.; Dynamics of an eccentric rotational nonlinear energy sink. ENOC July 2011

Hunt, J. B. and Nissen, J.C., "The broadband dynamic vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 83, pp. 573–578, 1982.

Iossaqui, J.G.; Balthazar, J.M.; Junior, B.R.P.; Felix, J.L.P.; On a passive control in a nonlinear nonideal system. *7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, FCT-UNESP at Presidente Prudente, SP, Brazil May 07-09, 2008.

Jiang, X., McFarland, D.M., Bergman, L.A., Vakakis, A.F.: Steady state passive nonlinear energy pumping in coupled oscillators: theoretical and experimental results. *Nonlinear Dyn.* 33, 87–102 (2003).

Kibble, T.W.B., *Mecânica Clássica*, 1932, trad. Rocha Barros, A.L., Redondo, D.M., ed. Polígono, 1970.

Kleber A. L. C.; Felix, J. L. P.; Balthazar, J.M.; Pontes Jr., B.R.; On a dynamics responses of a nonlinear oscillator with dry friction and driven by a non-ideal source, 60 Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, UNESP- Campus São José do Rio Preto, SP, Brazil, May 21-25, 2007.

Kononenko, V.O., *Vibrating Systems with Limited Power Supply*. Illife Books, London (1969).

Malatkar, P., Nayfeh, A.H.: Steady-state dynamics of a linear structure weakly coupled o an essentially nonlinear oscillator. *Nonlinear Dyn.* 47, 167–179 (2007).

Meirovitch, L. *Principles and techniques of vibrations*. Prentice-Hall, 1997.

Moon, F. C., *Applied Dynamics*, Jhon Wiley & Son Canada 1987.

Moon C. F., *Chaotic and Fractal Dynamics, an introduction for applied scientists and engineers.*, Wiley VCH, New York, 1992.

Moon, F. C., Superconducting Levitation, Cap WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004.

Monteiro, L. H. A.; Sistemas Dinâmicos, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.

Nayfeh, A. H.; Introduction to Perturbation Techniques, New York: John Wiley & Sons Inc., 1981.

Nayfeh, A. H., Balachandran B. "APPLIED NONLINEAR DYNAMICS" WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1995

Nayfeh, A. H., Mook, D. T. Nonlinear Oscillations. Wiley, New York, 1979.

Oguchi ,K., Tomigashi, Y.,. "Digital control for a magnetic suspension system as an undergraduate project", Int. J. Elect. Eng. Educ. v27: 226-236, 1990.

Palacios Felix, J.L., Balthazar, J.M., Dantas, and M.J.H., —On energy pumping, synchronization and beat phenomenon in a non-ideal structure coupled to an essentially nonlinear oscillator, Nonlinear Dynamics. Volume 56, Numbers 1-2, 1-11, 2009.

Piccirilo, V.; Balthazar, J.M.; Pontes Jr, B. R.; On the dynamics of a shape memory oscillator, under superharmonic excitation, 6o Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, UNESP- Campus São José do Rio Preto, SP, Brazil, May 21-25, 2007.

Pipes, L. A., “Analysis of a nonlinear dynamic vibration absorber,” Journal of Applied Mechanics, vol. 20, pp. 515–518, 1953.

Roberson, R. E., “Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber,” Journal of the Franklin Institute, vol. 254, pp. 205–220, 1952.

Santos, J. P. M., Uma análise da dinâmica do pêndulo eletromecânico utilizando a teoria das perturbações. Dissertação de mestrado, Pós-graduação em matemática aplicada, 2009

Sommerfeld A., Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre. Physikal Zeitschrift 1904, 3:266-286.

Savi, M.A.; Caos em sistemas mecânicos, Anais do I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, Vol. 1, 1-27, (2002).

Tereshko, V. Control and Identification of Chaotic Systems by Altering the Oscillation Energy, Chaotic Systems, Esteban Tlelo-Cuautle (Ed.), ISBN: 978-953-307-564-8, InTech, 2011.

Tusset, A. M., Balthazar, J. M., and Felix. J.L.P.: On elimination of chaotic behavior in a non-ideal portal frame structural system, using both passive and active controls ..Journal of Vibration and Control, 1077546311435518, first published on February 29, 2012

Vakakis, A.F.: Inducing passive nonlinear energy sinks in linear vibrating systems. J. Vib. Acoustics 123(3), 324–332 (2001).

Vakakis, A. F., “Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems” Springer Science Business Media, B.V, 2008.

Vakakis, A.F., Gendelman, O.: Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators II: Resonance capture. J. Appl. Mech. 68(1), 42–48 (2001).

Viguié, R. Tuning Methodology of Nonlinear Vibration Absorbers Coupled to Nonlinear Mechanical Systems. PhD Thesis Dissertation (2010).

Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, “Determining Lyapunov exponents from a time-series”, *Physica D* 16 ,pp. 285–317, 1985.

Wong ,T.H.,. “Design of a magnetic levitation control systems – an undergraduate project”, IEEE Transactions of Education, vE-29(4), 196-200, November, 1986.

Yabuno, H., “Nonlinear Active Cancellation of the Parametric Resonance in a Magnetically Levitated Body” ASME, 2010.

Yabuno, H., Kanda, R., Lacarbonara, W., Aoshima, N., (2004). nonlinear Active Cancellation of the Parametric Resonance in a Magnetically Levitated Body, *Journal of Dynamics system, Measurement and Control*, 126, pp. 433-442.

Yabuno, H., Fujimoto, N., Yoshizawa, M., and Tsujioka, Y. (1991). Bouncing and Pitching Oscillations of Magnetically Levitated Body due to the Guideway Roughness, *JSME International Journal*, 34(2), pp. 192–199.

Yabuno, H., Murakami, T., Kawazoe, J., and Aoshima, N. (2003). Suppression of Parametric Resonance in Cantilever Beam with a Pendulum Effect of Static Friction at the Supporting Point of the Pendulum, *Trans. ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 126, pp. 149-162.

Yabuno, H., Seino, T., Yoshizawa, M., and Tsujioka, Y. (1989). Dynamical Behavior of a Levitated Body with Magnetic Guides (Parametric Excitation of the Subharmonic Type Due to the Vertical Motion of Levitated Body), *JSME International Journal*, 32(3), pp. 428–435.

Zukovic M. and Cveticanin L.,: Chaotic Responses in a Stable Duffing System of Non-ideal Type *Journal of Vibration and Control*, June 2007; vol. 13, 6: pp. 751-767.

SUMULA CURRICULAR

Disciplinas Cursadas no Mestrado

Disciplinas	Ano	Período Letivo	Créditos	Carga Horária	Freq	Concelto
Dinâmica Não-Linear e Caos	2010	1º Semestre	8	120	100	A
Método dos Elementos Finitos	2010	1º Semestre	8	120	94	A
Vibrações Mecânicas	2010	1º Semestre	8	120	93	A
Acústica Aplicada	2010	2º Semestre	8	120	100	A
Controle de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Caóticos	2010	2º Semestre	8	120	100	A
Modelagem de sistemas mecanicos - T	2010	2º Semestre	8	120	100	A
Pesquisa Científica	2011	1º Semestre	4	60	94	A
Total de créditos em disciplinas			52	780		
Total de créditos em atividades complementares (*)			4	60		
Total de créditos em dissertação			0	0		
TOTAL GERAL DE CRÉDITOS			56	840		

Trabalhos Aceitos Em Eventos Com Arbitragem

ARBEX, H. C., BALTHAZAR, J. M., PONTES JR, B. R., TUSSET, A. M., FÉLIX, J. L. P., BRASIL, R. M. L. R. F. On nonlinear dynamics and control of a block, magnetically levited, excited by a non-ideal engine, 21st International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, 2011, Natal- RN.

ARBEX, H. C., BALTHAZAR, J. M., PONTES JR, B. R., FÉLIX, J. L. P., BRASIL, R. M. L. R. F. DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM BLOCO MAGNÉTICAMENTE LEVITADO, EXCITADO POR UM MOTOR NÃO IDEAL , 10th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications, DINCON, 2011, Águas de Lindóia - SP.

ARBEX, H. C., BALTHAZAR, J. M., PONTES JR, B. R., FÉLIX, J. L. P., TUSSET, A. M., BRASIL, R. M. L. R. F. Modelagem Matemática de um Sistema Vibratório Acoplado a um Absorvedor de Energia não Linear (NES), Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional – ERMAC – 2012, Botucatu- SP.

ARBEX, H. C., BALTHAZAR, J. M., PONTES JR, B. R., FÉLIX, J. L. P., TUSSET, A. M., BRASIL, R. M. L. R. F. DINÂMICA NÃO LINEAR DE UM SISTEMA VIBRATÓRIO DO TIPO MAGLEV, EXCITADO POR UM MOTOR NÃO IDEAL, VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, CONEM, 2012, São Luis - MA.

ARBEX, H. C., BALTHAZAR, J. M., PONTES JR, B. R., FÉLIX, J. L. P., TUSSET, A. M., BRASIL, R. M. L. R. F. Comportamento Dinâmico Não linear de um Veículo MAGLEV, Excitado por um Motor Não Ideal, 34o Congresso Nacional de Matematica Aplicada e Computacional, CNMAC-2012, Águas de Lindóia - SP.

Trabalhos Submetidos Em Revista Com Arbitragem

ARBEX, H. C., BALTHAZAR, J. M., DE PONTES JR, B. R., FÉLIX, J. L. P., TUSSET, A. M., BRASIL, R. M. L. R. F. On the nonlinear behavior of a MagLev system under non-ideal excitation and application of control strategies, Journal of Vibration and Control, 2012