



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS

FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**APRENDIZAGEM VIRTUAL DE GEOMETRIA EUCLIDIANA ESPACIAL:
INTERAÇÕES ENTRE ALUNOS DO ENSINO SUPERIOR E MÍDIAS
DIGITAIS**

DÉBORA PELLI

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO – SP

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

DÉBORA PELLI

**APRENDIZAGEM VIRTUAL DE GEOMETRIA
EUCLIDIANA ESPACIAL: interações entre alunos do Ensino
Superior e mídias digitais**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática. (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática).

Orientadora: Rúbia Barcelos Amaral Schio

Rio Claro – SP
2024

P391a	Pelli, Débora Aprendizagem virtual de geometria euclidiana espacial : interações entre alunos do ensino superior e mídias digitais / Débora Pelli. -- Rio Claro, 2024 213 p. : il., tabs., fotos Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientadora: Rúbia Barcelos Amaral Schio 1. Geometria Euclidiana Espacial. 2. Tecnologias Digitais. 3. Aprendizagem Virtual. 4. Princípio Baseado em Design. 5. Visualização. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

DÉBORA PELLI

**APRENDIZAGEM VIRTUAL DE GEOMETRIA EUCLIDIANA ESPACIAL:
interações entre alunos do Ensino Superior e mídias digitais**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática. (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática).

Comissão Examinadora

Prof(a). Dr(a). Rúbia Barcelos Amaral Schio – Orientador(a) – IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof(a). Dr(a). Aparecida Santana de Souza Chiari – INMA/UFMS/Campo Grande (MS)

Prof. Dr. George William Bravo de Oliveira – FAETEC/Rio de Janeiro (RJ)

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba – IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof(a). Dr(a). Silvana Claudia dos Santos – UFV/Viçosa (MG)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro/SP, 19 de junho de 2024.

Dedico ao meu pai Luciano Pelli (em memória),
ao meu filho Rafael e ao meu neto Davi.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por estar presente em minha vida em todo o processo de doutoramento na Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – UNESP/Rio Claro, dando-me força e possibilidade de concluir mais uma etapa.

Agradeço ao meu filho Rafael Pelli, por ser, sem nenhuma dúvida, a pessoa mais importante da minha vida, e muito especial, quem sempre me inspira e me anima a correr atrás dos meus sonhos. Agradeço a minha nora Bela e ao meu netinho Davi por entenderem a minha ausência nesse período de estudos e pesquisa.

Agradeço aos meus pais Luciano (em memória) e minha mãe Livia pela vida, pelos ensinamentos e pela paciência durante o Doutorado. Agradeço aos meus irmãos Eduardo e Luciana, por sempre trazerem palavras boas; aos meus cunhados Andreza e Ricardo, pela caminhada em família e carinho para com os meus.

Agradeço a todos da UNESP, coordenadores, professores e funcionários, por me receberem como aluna do programa de Pós-Graduação, em especial à minha orientadora, Rúbia Barcelos Amaral Schio, por todos os ensinamentos, questionamentos, leituras dos meus textos e pela amizade que criamos ao longo desses anos. Agradeço também a Inajara, com quem sempre pude contar para resolver as minhas dúvidas da pós.

Agradeço ao Prof. Marcelo Borba, por me ajudar sempre que procurei por ele, incentivando-me a participar de grupos de estudos que foram de extrema importância nessa caminhada, além da amizade criada e das leituras feitas em meu texto e por aceitar participar da banca desta pesquisa. Agradeço também aos professores George, Cida e Silvana, pelas contribuições valiosas para esta formação e o desenvolvimento de minha tese.

Agradeço enormemente à Professora Mônica Villarreal, pelo carinho com o qual me recebeu em um estágio na Universidade Nacional de Córdoba, na Argentina, e a todo o grupo de pesquisadores de lá. Todos eles foram muito importantes em minha trajetória, contribuindo sobremaneira na leitura do meu texto e me recebendo em suas aulas e reuniões. Esse período de internacionalização foi engrandecedor para mim.

Agradeço aos colegas do teorEMa, grupo de pesquisa do qual participei, pelas leituras e observações em meus textos, pelas discussões calorosas dos textos lidos, pela sinceridade ao apontar os erros e sugerir melhorias, pelo colóquio que desenvolvemos juntos e por todo o carinho. Em especial, agradeço à Ana Paula e à Lu, pela recepção, sugestão de moradia e escrita conjunta.

Agradeço à Dona Maria que abriu as portas de sua casa para mim e os seus braços nos momentos de incerteza e nos de alegria. Agradeço também aos amigos, colegas que conheci por ali, o Fernandes, a Carol, o Zami, o Ezequias, a Joseane e, em especial o André, irmão de grupo de pesquisa e agora, irmão que o doutorado me deu para a vida.

Agradeço aos amigos que fiz durante o doutorado, o Fernando, o Hércules, a Rosicácia, a Renata, a Geciara, a Eliane, a Luciana Leal, o Tiago, o Rodrigo, a Samanta, a Pâmela, a Tiele e a Sandra. Vocês são corajosos, guerreiros e incríveis.

Agradeço ao Prof. Flávio César Freitas Vieira pelo incentivo para que eu fosse fazer o doutorado, na contribuição com escritas de artigos e pela leitura dos meus projetos. Agradeço ainda à Professora Raquel Anna Sapunarú, que sempre me acolheu em seus grupos de estudo e me incentivou a fazer o doutorado.

Agradeço também à Universidade Federal dos vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM/Diamantina, por ter me liberado no período de doutorado para que pudesse melhorar profissionalmente.

Agradeço ao Henrique pelas correções realizadas em meu texto, no intuito de deixá-lo mais bem escrito, fluido e com estrutura apresentável.

*“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades
para a sua própria produção ou a sua construção”*
(Freire, 1996, p. 21).

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é investigar como as interações entre alunos e mídias promovem a reorganização do pensamento para a produção de conhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina da Graduação em Matemática, em tempos de pandemia. A pesquisa qualitativa foi realizada no ambiente natural do Ensino Remoto Emergencial em que a sala de aula virtual foi o Google Meet; o ambiente virtual de aprendizagem para compartilhamento de informações, o Google Classroom; além do grupo de Whatsapp para diálogos entre a professora e os alunos. Os participantes da pesquisa foram 24 alunos do terceiro período da disciplina Geometria Euclidiana Espacial do curso de Graduação em Matemática da Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – UNESP/Rio Claro. Os designs e redesigns da investigação estiveram amparados nos princípios da pesquisa baseada em design – DBR. Os dados foram produzidos por meio de notas de campo, questionários, entrevista, Whatsapp, gravação das aulas, chats e arquivos enviados via Google Classroom. Conforme as medidas de isolamento social adotadas devido à pandemia da COVID-19, todos esses procedimentos foram realizados de maneira totalmente online. As ideias de Lévy sobre virtual, virtualização, ciberespaço, cibercultura e inteligência coletiva, assim como o construto seres-humanos-com-mídias encampados por Borba e Vilarreal, além de alguns autores que versam sobre visualização e Educação Matemática constituíram os referenciais teóricos que alicerçaram a análise dos dados desta pesquisa. A análise dos dados apontou que a realização de diferentes atividades por um coletivo de estudantes-com-mídias reorganiza o pensamento desses indivíduos, levando à produção de conhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana Espacial, em que a visualização faz parte do processo de pensar e fazer matemática pelo coletivo. Os refinamentos realizados no ciclo iterativo da DBR possibilitaram a análise e redesigns com a proposição de novas atividades em cada fase da pesquisa. Além disso, as interações entre estudantes e professora pelo WhatsApp, a afetividade mais aflorada, o diálogo durante e após as aulas em ambiente virtual, as discussões realizadas em grupos e uma avaliação elaborada pelo próprio coletivo estudantes-com-mídias, com essa mudança do ensino presencial para medida emergencial de ensino remoto devido ao vírus da COVID-19 aliados à experimentação com tecnologias e a visualização como processo inerente da produção de conhecimentos da GEE, trouxe-nos um contexto novo, o da aprendizagem virtual – AV.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana Espacial. Tecnologias Digitais. Aprendizagem Virtual. Princípio Baseado em Design. Visualização.

ABSTRACT

The aim of this research is to investigate how interactions between students and media promote the reorganization of thinking for the production of knowledge of concepts in Spatial Euclidean Geometry in a Mathematics undergraduate course, in times of pandemic. The qualitative research was conducted in the natural environment of Emergency Remote Teaching, where the virtual classroom was Google Meet; the virtual learning environment for information sharing was Google Classroom; in addition to the WhatsApp group for dialogues between the teacher and the students. The research participants were 24 third-semester students of the Spatial Euclidean Geometry course in the Mathematics undergraduate program at State University Júlio de Mesquita Filho – UNESP/Rio Claro. The designs and redesigns of the investigation were supported by the principles of Design-Based Research – DBR. Data were produced through field notes, questionnaires, interviews, WhatsApp, recordings of classes, chats, and files sent via Google Classroom. Due to the social isolation measures adopted due to the COVID-19 pandemic, all these procedures were carried out entirely online. The ideas of Lévy about the virtual, virtualization, cyberspace, cyberculture, and collective intelligence, as well as the construction of human-beings-with-media adopted by Borba and Vilarreal, in addition to some authors who deal with visualizations and Mathematics Education, constituted the theoretical references that underpinned the analysis of data from this research. The data analysis pointed out that the use of different activities by a collective of students-with-media reorganizes the thinking of these individuals, leading to the production of knowledge of concepts in Spatial Euclidean Geometry, in which visualization is part of the process of thinking and doing mathematics by the collective. The refinements made in the iterative cycle of DBR enabled analysis and redesigns with the proposition of new activities at each phase of the research. Furthermore, interactions between students and the teacher on WhatsApp, the more pronounced affectivity, dialogue during and after class in the virtual environment, discussions held in groups, and an assessment elaborated by the collective of students-with-media, with this change from face-to-face teaching to emergency remote teaching due to the COVID-19 virus, combined with experimentation with technologies and visualization as an inherent process of knowledge production in Spatial Euclidean Geometry, brought us a new context, that of virtual learning – VL.

Keywords: Spatial Euclidean Geometry. Digital Technologies. Virtual Learning. Design-Based Principle. Visualization.

RESÚMEN

El objetivo de esta investigación es averiguar cómo las interacciones entre los estudiantes y los medios de comunicación promueven la reorganización del pensamiento para la producción de conocimientos de conceptos de Geometría Euclidiana Espacial en una asignatura del Grado en Matemáticas, en tiempos de pandemia. La investigación cualitativa se llevó a cabo en el entorno natural de la Enseñanza Remota de Emergencia, donde el aula virtual fue Google Meet; el entorno virtual de aprendizaje para compartir información fue Google Classroom; además del grupo de WhatsApp para el diálogo entre la profesora y los alumnos. Los participantes de la investigación fueron 24 estudiantes del tercer período de la asignatura de Geometría Euclidiana Espacial del curso de Grado en Matemáticas de la Universidad Estatal Júlio de Mesquita Filho – UNESP/Rio Claro. Los diseños y rediseños de la investigación se basaron en los principios de la investigación basada en el diseño – DBR. Los datos se produjeron mediante notas de campo, cuestionarios, entrevistas, WhatsApp, grabaciones de clases, chats y archivos enviados a través de Google Classroom. Debido a las medidas de aislamiento social adoptadas debido a la pandemia de COVID-19, todos estos procedimientos se realizaron completamente en línea. Las ideas de Lévy sobre lo virtual, la virtualización, el ciberespacio, la cibercultura y la inteligencia colectiva, así como la construcción del ser-humano-con-medios adoptadas por Borba y Vilarreal y algunos autores que tratan sobre la visualización y la Educación Matemática constituyeron los marcos teóricos que fundamentaron el análisis de los datos de esta investigación. El análisis de los datos señaló que el uso de diferentes actividades por parte de un colectivo de estudiantes-con-medios reorganiza el pensamiento de estos individuos, lo que lleva a la producción de conocimientos de conceptos de Geometría Euclidiana Espacial, en los que la visualización es parte del proceso de pensar y hacer matemáticas por parte del colectivo. Los refinamientos realizados en el ciclo iterativo de DBR posibilitaron el análisis y rediseños con la proposición de nuevas actividades en cada fase de la investigación. Además, las interacciones entre estudiantes y profesores en WhatsApp, la afectividad más marcada, el diálogo durante y después de la clase en el entorno virtual, las discusiones realizadas en grupos y una evaluación elaborada por el propio colectivo de estudiantes-con-medios, con este cambio de la enseñanza presencial a la enseñanza remota de emergencia debido al virus de la COVID-19, junto con la experimentación con tecnologías y la visualización como proceso inherente a la producción de conocimientos de Geometría Euclidiana Espacial, nos ha traído un nuevo contexto, el del aprendizaje virtual – AV.

Palabras clave: Geometría Euclidiana Espacial. Tecnologías Digitales. Aprendizaje Virtual. Principio Basado en el Diseño. Visualización.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Apresentação dos termos: real/possível; virtual/atual	50
Figura 2 - Visão Iterativa da DBR.....	82
Figura 3 - Recorte de uma aula sobre a Relação de Euler	94
Figura 4 - QR Code 1: Recorte de uma aula sobre Relação de Euler.....	95
Figura 5 - Cone gerado	96
Figura 6 - QR Code 2: Formação de um cone através da rotação de um triângulo em 360 graus por um eixo	96
Figura 7 – Ilustração do pensamento matemático da estudante A_2	105
Figura 8 - Continuação da demonstração realizada pela estudante A_2	106
Figura 9 - QR Code 3: Vídeo de demonstração na íntegra.....	106
Figura 10 - Demonstração realizada pelo estudante A_{13}	107
Figura 11 - QR Code 4: Vídeo da apresentação na íntegra	108
Figura 12 - Representação realizada pelo estudante A_{18}	111
Figura 13 - Questão elaborada pelos estudantes A_9 e A_{10}	114
Figura 14 - Questão da avaliação dos alunos A_{17} e A_{13}	116
Figura 15 - Figura construída no Geogebra pelos estudantes A_{17} e A_{13}	117
Figura 16 - Demonstração realizada pelo estudante A_{13}	122
Figura 17 - Apresentação do problema sobre cubo pela estudante A_7	124
Figura 18 - QR Code 5: Apresentação da aluna A_7	125
Figura 19 - Exibição da segunda questão [Exercício 2] discutida pelo grupo 3	125
Figura 20 - Primeira etapa de construção de paralelepípedo retângulo a partir da malha do <i>Geogebra</i> pela estudante A_1	126
Figura 21 - Continuação da construção de paralelepípedo retângulo no Geogebra pela estudante A_1	126
Figura 22 – QR Code 6: Apresentação do segundo exercício	127
Figura 23 - Imagem do GG apresentada pelos estudantes A_1 e A_{22}	129
Figura 24 - Variação do raio da base do cone com o controle deslizante b_1	130
Figura 25 - Variação do plano paralelo ao plano da base do cone.....	130
Figura 26 - Representação de uma reta que passa por B e uma circunferência de centro A, em que E é um dos seus pontos.	131
Figura 27 - Variação do volume e da área do cilindro inscrito	131
Figura 28 - Representação de uma seção meridional do sólido construído pelos estudantes	132
Figura 29 - QR Code 7: Vídeo da atividade realizada pelos estudantes.....	132
Figura 30 - Prisma triangular regular animado.....	136
Figura 31 - QR Code 8: Vídeo animado de prisma triangular regular	136

Figura 32 - Construções realizadas pelos estudantes A_{12} e A_8 e postadas na plataforma Google Classroom	138
Figura 33 - Representação apresentada sobre tetraedro	141
Figura 34 - Altura de pirâmides de base hexagonal e quadrada.....	141
Figura 35 - QR Code 9: Vídeo da apresentação do estudante A_{18}	142
Figura 36 - Representação do Princípio de Cavalieri pela estudante A_1	143
Figura 37 - Representação das alturas das secções planas nos sólidos.	144
Figura 38 - Transferências de paralelepípedos de uma caixa para outra.....	145
Figura 39 - Construção de dois aquários realizada pela aluna A_1	145
Figura 40 - Variação de volumes em relação à altura, com a base de mesma área.....	146
Figura 41 - QR Code 10: Apresentação do Princípio de Cavalieri e construção no GG.....	146
Figura 42 - Apresentação da imagem pelo estudante A_{11}	152
Figura 43 - QR Code 11: Apresentação do estudante A_{11}	152
Figura 44 - Atividade proposta retirada do livro do Moise <i>et al.</i> (1966)	155
Figura 45 - Prisma construído pelo estudante A_{18}	156
Figura 46 - Imagem da planificação do sólido realizada pelo estudante A_{18}	156
Figura 47 - Cálculo de áreas e calculador	157
Figura 48 - QR Code 12: Resolução do exercício proposto pelo estudante A_{18}	158
Figura 49 - Decomposição de um prisma triangular em três tetraedros de mesma aresta realizada no <i>Geogebra</i> pela Estudante A_{12}	159
Figura 50 - Imagem retirada da lista de atividades resolvida pela estudante A_1	159
Figura 51 - QR Code 13: Vídeo gravado pela estudante A_1 e postado no Google Classroom	160
Figura 52 - Imagem apresentada pelo estudante A_{13}	161
Figura 53 - Retas perpendiculares que passam pelo ponto médio de dois lados consecutivos do polígono e centro do polígono	162
Figura 54 - Reta perpendicular (esquerda) e pirâmide (direita)	163
Figura 55 - Pirâmide inscrita em um cone.....	164
Figura 56 - Pirâmides inscritas em um cone, com bases diferentes do hexágono.....	164
Figura 57 - QR Code 14: Apresentação das relações de uma pirâmide inscrita em um cone pelo estudante A_{13}	165
Figura 58 - Apresentação da construção de uma esfera	167
Figura 59 - Representação da seção esférica	168
Figura 60 - Representação realizada pelo estudante A_{16}	169
Figura 61 - QR Code 15 - Recorte da apresentação do grupo 4 sobre o tema esfera.....	169
Figura 62 - Imagem apresentada pelo estudante A_{15}	170
Figura 63 - QR Code 16: Apresentação do estudante A_{15}	171
Figura 64 - Parte do ciclo iterativo da DBR desenvolvido na pesquisa	174

LISTA DE DIAGRAMAS

Diagrama 1 - Representação das interseções de conjuntos entre estudantes e mídias digitais em um contexto de aprendizagem virtual – AV	134
--	-----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Teses e dissertações que estão relacionadas com a temática desenvolvida nesta pesquisa.....	32
Quadro 2 - Artigos em periódicos nacionais que estão relacionadas com a temática desenvolvida nesta pesquisa	37
Quadro 3 - Artigos em periódicos e trabalhos em anais de eventos internacionais que estão relacionadas com a temática desenvolvida nesta pesquisa	41
Quadro 4 - Definições para o termo “visualização” por pesquisadores	75
Quadro 5 - Fases da DBR.....	81
Quadro 6 - Apresentação do curso de GEE.....	97
Quadro 7 - Avaliação – Geometria Euclidiana Espacial	114

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CIEB - Centro de Inovação para a Educação Brasileira

CTPMMG - Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais

DALEST - Desenvolvimento de um Ambiente Ativo de Aprendizagem para a aprendizagem da Estereometria

EAD - Educação a Distância

EAR - Estratégias de Aprendizagem Remota

EV - Ensino Virtual

GEE - Geometria Euclidiana Espacial

GPIMEM - Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática

IBD - Investigação Baseada em *Design*

MD - Mídias Digitais

PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático

PUC - Pontifícia Universidade Católica - SP

SEEMG - Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais

TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TD - Tecnologias Digitais

TDIC - Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação

TIC - Tecnologia da Informação e da Comunicação

UAB - Universidade Aberta do Brasil

UFOP - Universidade Federal de Ouro Preto

UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

SUMÁRIO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	1
1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Trajetória da Pesquisadora	19
1.2 Apresentação	20
1.3 Questão Diretriz e Objetivos	28
1.4 Visão Geral das Seções.....	29
2 REVISÃO DE LITERATURA: BUSCANDO CONHECER O QUE FOI EVIDENCIADO PELA LITERATURA SOBRE A TEMÁTICA PESQUISADA.....	30
2.1 Dissertações e Teses	31
2.2 Artigos Nacionais	36
2.3 Artigos Internacionais	41
2.4 Meu olhar sobre as pesquisas encontradas	45
3 REFERENCIAL TEÓRICO – REORGANIZANDO O PENSAMENTO A PARTIR DE UM OLHAR JÁ EXISTENTE NA PESQUISA ACADÊMICA	48
3.1 Do Virtual à Inteligência Coletiva.....	48
3.2 Construto teórico seres-humanos-com-mídias e a reorganização do pensamento matemático 63	
3.2.1 <i>Abordagem experimental com tecnologias</i>	66
3.3 Visualização e Educação Matemática	72
4 METODOLOGIA: CAMINHOS PERCORRIDOS PARA A PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	78
4.1 A Pesquisa Qualitativa.....	78
4.2 Pesquisa Baseada em <i>Design</i>	79
4.3 Contexto para a Produção dos Dados	82
4.4 Descrição dos Participantes	84
4.5 Instrumentos Para a Produção dos Dados.....	85
4.5.1 <i>Notas de campo</i>	86
4.5.2 <i>Questionários Semiestruturados</i>	86
4.5.3 <i>Chats produzidos nas aulas</i>	87
4.5.4 <i>Gravação das Aulas</i>	88
4.5.5 <i>Entrevistas</i>	89
4.5.6 <i>Registros do WhatsApp</i>	89
4.6 Triangulação dos Dados	91
4.7 Análise dos dados produzidos	92
5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	94
5.1 Do Ensino Remoto para a Aprendizagem Virtual	98
5.2. Experimentação com Tecnologias.....	120
5.2.1. <i>Demonstração realizada com estudantes-mídias</i>	121
5.2.2. <i>Questão resolvida pelo coletivo estudante-mídia</i>	123
5.2.3. <i>Interação entre estudantes e mídias digitais – uma tarefa sobre inscrição e circunscrição de sólidos</i>	128
5.2.4. <i>Tarefas realizadas e enviadas pela plataforma Google Classroom</i>	136

5.2.5. <i>Interação entre grupo de alunos e mídias – elaboração de uma aula para a Educação Básica</i>	140
5.2.6. <i>A voz dos estudantes em relação à experimentação com as tecnologias</i>	148
5.3 Visualização e Educação Matemática	151
5.4 Análise Prescritiva dos Dados	173
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	182
REFERÊNCIAS	185
APÊNDICES	203
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	203
APÊNDICE B – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO – FORMULÁRIOS GOOGLE	205
APÊNDICE C – SEGUNDO QUESTIONÁRIO – FORMULÁRIOS GOOGLE	208
APÊNDICE D – ROTEIRO PARA ENTREVISTA (31/08/2021)	212

1 INTRODUÇÃO

Sou a Débora Pelli, mãe do Rafael e avó do Davi. Nasci no interior de Minas Gerais, em uma linda cidade histórica chamada Diamantina e tive a grande sorte de ter um pai que provocou e colaborou com a minha leitura desde criança, começando pelo incentivo à leitura da coleção do Monteiro Lobato, sempre seguida de discussões.

Ao longo da minha vida e nesta pesquisa, durante a produção dos dados, assumo dois papéis: um de professora e o outro, de pesquisadora. O fato de ser professora significa estudar constantemente, planejar aulas, sofrer carências em relação às políticas públicas direcionadas para a educação, mas também, pode-se considerar as possibilidades e benefícios que as especializações e pós-graduações trazem para a nossa carreira, permitindo que possamos representar atores importantes no cenário educacional.

Ser professora em tempos de pandemia, ocasionada pelo coronavírus, significou tomar atitudes solitárias e desafiadoras, já que as políticas educacionais do Brasil não possuem o hábito de discutir acerca da implementação das tecnologias digitais no contexto escolar. Em relação à formação inicial de professores no Ensino Superior, o desafio de encontrar modos de ensinar com tecnologia nos faz refletir em relação aos limites e possibilidades dessas tecnologias chegarem até a Educação Básica. Pensando dessa forma, a pesquisadora entra em ação!

Gosto de Matemática desde que me entendo por gente, em especial das Geometrias, e me interesse pela forma como os conteúdos são ensinados. Acredito que as tecnologias digitais (TD) fazem parte do nosso cotidiano e acho importante a sua inclusão nas práticas docentes sob a perspectiva da Educação Matemática.

Nos dias atuais, as TD se encontram presentes nas vidas dos seres humanos em grande parte do tempo. O número de pesquisas com a temática que incluem as TD nas aulas de matemática vem crescendo (Borba; Chiari, 2013; Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2014; Torres; Brocado, 2015; Almeida, 2016; Oliveira; Amancio, 2022). Fico instigada com a ideia de como as TD, apesar de aparecerem fortemente nas investigações, não fazem parte do cotidiano das salas de aula (Barbosa, 2014; Kenski; Medeiros; Ordéas, 2019; Bottentuit Junior, 2019; Cruzeiro; Andrade; Machado, 2020). Neste intuito, procurei realizar uma experiência em sala de aula com uma turma da graduação em Matemática com as TD, para observar as interações entre estudantes e mídias digitais.

Em seguida, conto, resumidamente, a minha trajetória e a forma como ela me levou até o questionamento e, como consequência, o desenvolvimento desta investigação, fazendo com

que investisse o meu tempo de, pelo menos quatro anos, em prol da Educação Matemática e em minha formação na Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro, onde orientadora, professores e colegas tiveram papéis importantes em meu desenvolvimento profissional.

1.1 Trajetória da Pesquisadora

Em meados de 1999, ano no qual concluí a graduação em licenciatura plena em Matemática, fui convidada a lecionar no Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais - CTPMMG, período em que iniciei a minha carreira profissional, trabalhando com o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Em 2001, fui aprovada em dois concursos da Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais (SEEMG) para professora de Matemática, um para o Ensino Fundamental e outro, para o Ensino Médio, onde permaneci até o início de 2006, devido a propostas de trabalho de outras instituições e pelo meu interesse em trabalhar no Ensino Superior.

Segui lecionando na Educação Básica, em cursos pré-vestibulares, em colégios particulares e públicos, além de ministrar aulas em faculdade particular e universidade pública, sempre na área da Matemática. Na ocasião, também fui aprovada em um concurso como professora substituta, para lecionar aulas de Cálculo e Álgebra Linear na Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), onde fiquei por um ano. Neste período, também fui convidada para dirigir o Colégio JK, que era particular e que tinha Ensino Médio e pré-vestibular. Decidi aceitar viver essa experiência e lá permaneci durante um ano. Após mais essa etapa, resolvi montar o Pré-Vestibular Cooceno em sociedade, onde permaneci como diretora e professora de Matemática por três anos, no município de Diamantina/MG.

Em janeiro de 2010, fui aprovada em concurso público para o cargo de Matemático¹ na UFVJM, onde logo a princípio escrevi um livro com o título “Matemática – uma preparação para o Cálculo” com o Prof. Dr. Paulo César Resende Andrade e participei de cursos de nivelamento em Matemática, por observar, ao longo de minha trajetória, a dificuldade que os alunos apresentavam ao ingressarem nas aulas de Cálculo I, Pré-cálculo e Álgebra, em seus

¹ O Matemático é um cargo cuja função está relacionada com a realização de pesquisas no campo das ciências matemáticas fundamentais e/ou das aplicações práticas dos princípios e técnicas matemáticas. Dessa maneira, o matemático estuda e testa as hipóteses e teorias básicas, aplicando-as ao tratamento de problemas de diversos campos para desenvolver e melhorar os conhecimentos e as técnicas matemáticas. Em seu trabalho, o profissional também emprega os seus conhecimentos em outras esferas de atividades, como por exemplo, a pesquisa científica, a engenharia, o processamento de dados e a organização industrial.

curso superiores. Ainda hoje, participo de projetos que buscam diminuir a retenção com os elevados números de reprovação e evasão dos alunos que fazem cursos na área de Ciências Exatas, principalmente na disciplina de Cálculo de uma Variável, com um olhar especial para as Geometrias plana e espacial.

Nos anos de 2012 a 2014, fui admitida para ser tutora a distância de diversas disciplinas da Educação a Distância (EaD) no programa Universidade Aberta do Brasil (UAB). Em 2013, fui aprovada em uma pós-graduação, na modalidade de mestrado profissional, com duração de dois anos, no período de março de 2013 a dezembro de 2014, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), no qual fui orientada pelo Prof. Dr. Milton Rosa. O título da minha dissertação foi “As contribuições do *software Geogebra* como mediador do processo de aprendizagem da Geometria plana na educação a distância (EaD) em um curso de licenciatura em pedagogia”. Neste período, fui liberada de minhas atividades na universidade para me dedicar ao mestrado e, diante disso, apenas continuei como tutora da EaD.

Em 2015, fui aprovada para lecionar, como professora bolsista, em disciplinas de Geometria, Matemática Financeira e Matemática Básica para os cursos de Licenciatura em Matemática, Química e Física no programa UAB da UFVJM, onde fiquei até final de 2019. Neste mesmo ano fui aprovada para a pós-graduação, em nível de doutorado acadêmico na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Iniciei as minhas atividades no ano de 2020, período de isolamento social devido à pandemia do coronavírus. Fiz todas as nove disciplinas do doutorado em formato de ensino remoto emergencial nos anos de 2020 e 2021.

Durante esta experiência profissional em diversos níveis de ensino e instituições diferentes (públicas e privadas), sempre me chamaram a atenção dois fatores: o primeiro é sobre o ensino das Geometrias que, em todos os lugares por que passei, pude observar a dificuldade dos alunos no entendimento dos seus conteúdos e resolução de problemas; e o segundo é sobre a pouca utilização das TD por onde lecionei, e também por não ter nenhuma disciplina na minha formação sobre as TD, fazendo com que eu procurasse cursos de curta duração em outras instituições de ensino, a maioria na modalidade EaD, para conhecer um pouco das TD para a Educação Matemática. Após contar resumidamente a minha experiência com a Educação, apresento a minha investigação.

1.2 Apresentação

A presente pesquisa tem como principal temática a interação entre as TD e os estudantes nas aulas de Geometria Euclidiana Espacial (GEE) em uma turma do curso de graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP/Rio Claro, que ocorreu de forma remota, por ser realizada em tempos de pandemia ocasionada pela COVID-19, cuja principal medida de prevenção foi o isolamento social.

O ensino remoto surgiu de maneira emergencial, buscando não permitir que a Educação, em seus diversos níveis, ficasse paralisada; e os alunos, sem aulas. Segundo Arruda (2020), com o novo coronavírus, a escola se tornou o lugar mais temido por todos, pelo risco da transmissão e contágio, onde professores e estudantes foram considerados os principais vetores dela.

Nesse sentido, países europeus “adotaram estratégias de vínculo escolar por meio da mediação de tecnologias digitais de informação e comunicação” (Arruda, 2020, p. 260). Os governos desses países criaram políticas públicas para obter o maior acesso técnico e de equipamentos, buscando facilitar os processos de ensino e de aprendizagem. Os Estados Unidos também adotaram a Educação mediada por tecnologias digitais, em sua grande maioria. Além disso, México, Chile e Uruguai apresentaram iniciativas de uso de TD na Educação em todos os níveis de ensino.

De acordo com Arruda (2020), no Brasil, a tomada de decisões na Educação Básica ficou sob o cuidado dos estados que substituíram a educação presencial pelas aulas remotas ou adoção da modalidade à distância. Nas universidades, dada a sua autonomia, foi implementada a educação remota, buscando se diferenciar da modalidade EaD, com aulas em formato de webconferência e lives. O autor também esclarece que em diversos níveis de ensino, no Brasil, as aulas demoraram para ter início, em 2020, com reflexo à falta de liderança do Ministério da Educação, naquele momento.

Tal medida de ensino emergente adotada no ano 2020 foi marcada pelas dificuldades advindas da imposição de uma forma de ensino, abruptamente. O ensino remoto emergencial não foi chamado de EaD, embora inicialmente ter sido ventilada a possibilidade. Por que isso aconteceu? Há diferenças entre eles?

A definição de EaD, pela legislação mais atual, no parágrafo 1º do Decreto nº 9057/2017 (Brasil, 2017, p. 1), é:

[...] modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorra com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com pessoal qualificado, com políticas de acesso, com acompanhamento e avaliação compatíveis, entre

outros, e desenvolva atividades educativas por estudantes e profissionais da educação que estejam em lugares e tempos diversos.

Nesse contexto, podemos observar que o conceito para a EaD é bem amplo. A internet é essencial para que ela aconteça, independentemente do espaço geográfico e tempo que o estudante vai usar para desenvolver as suas atividades. Na maior parte dos casos, os alunos da EaD escolhem tempo e lugar para assistir as aulas gravadas e/ou sugeridas pelos professores e disponibilizadas em plataforma virtual de aprendizagem (AVA), realizar leituras, resolver exercícios e desenvolver as atividades propostas, em geral.

Arruda (2020, p. 265, grifo do autor) considera que “a expressão ‘com pessoal qualificado’ é um reflexo da ideia de que EaD possui menos qualidade que educação presencial”, enquanto Hodges *et al.* (2020) certificam que essa ideia de antagonismos de qualidade ocorre em nível mundial e afirmam que a EaD traz um estigma de qualidade inferior ao aprendizado presencial.

Em relação às principais características da EaD, Aretio (2001) pontua-as como: a separação entre aluno e professor, ambos estão separados no espaço e, na maior parte dos casos, no tempo; a organização de apoio-tutoria, na qual o tutor apoia o desenvolvimento do curso e procura sanar as dificuldades dos alunos; a aprendizagem independente e flexível, na qual o trabalho independente do aluno e a individualização da aprendizagem são propiciados pelas tecnologias; a comunicação bidirecional, com feedbacks entre estudantes e educadores; enfoque tecnológico, no qual a educação é intensificada com o uso da tecnologia e de um planejamento sistematizado; e a comunicação massiva, na qual a comunicação por mensagens é oportunizada pelas tecnologias, em que diversas pessoas separadas espacialmente aproveitem-se de tais mensagens.

Segundo Santos (2009), na EaD tem-se a autoaprendizagem como característica. Sendo assim, o estudante recebe o material do curso, com instruções (conteúdos e atividades), elabora sua produção de forma individual e a retorna ao professor/tutor. Nesse caso, a instrução unidirecional é o centro do processo. Para essa autora, nas práticas de EAD “não há interatividade, mas sim emissão separada da recepção, uma vez que esses polos da comunicação não se encontram conectados em interfaces, mas separados em emissores e receptores” (Santos, 2009, p. 5666).

Por um outro lado, Moore e Kearsley (2007) propõem a teoria da distância transacional, a qual possui três elementos que se interrelacionam: a estrutura do curso, a autonomia do estudante e o diálogo educacional. Neste sentido, quanto maior for o diálogo, mais flexível for

a estrutura de um curso, mais autonomia tiver o aluno, menor será a distância transacional. A teoria transacional “descreve a relação e a interação que deve existir entre os professores, alunos e tutores, que é estabelecida quando esses indivíduos estão separados pelo tempo e pelo espaço” (Pelli, 2014, p. 61).

É necessário ainda esclarecer o papel do tutor, que surge como parte da equipe de instrução na EaD. Alonso (2010, p. 1330) considera que, na EaD, o tutor “é quem acompanha o aluno, trabalha cotidianamente com ele, participa dos processos de avaliação da aprendizagem, do curso, etc”. Para Nunes (2013), no caso da Universidade Aberta do Brasil (UAB) e diversas outras instituições brasileiras que oferecem EaD, o professor produz o material instrucional e as atividades a serem realizadas pelos estudantes, gerenciando sua execução, porém “o tutor atua diretamente com os alunos, ainda que a distância, sanando as suas dúvidas, avaliando-os, tentando identificar as suas dificuldades e mediando o processo de aprendizagem” (Nunes, 2013, p. 2).

O ensino remoto emergencial (ER), por sua vez, tem similaridades com a EaD, mas também, suas diferenças. Nele, não existe o papel do tutor, por exemplo. Moreira e Schlemmer (2020, p. 9) consideram que o ER possui caráter conteudista voltado para a transmissão e a comunicação unidirecional, e comentam que “o processo é centrado no conteúdo, que é ministrado pelo mesmo professor da aula presencial física”. Além disso, para Saviani (2020, p. 5), o ER é considerado “substituto do ensino presencial excepcionalmente nesse período de pandemia em que a educação presencial se encontra interdita”.

Considero que, dada à velocidade de ocorrência do ER para todos os níveis de ensino, o que ocorreu foi uma transposição do ensino presencial para o ER, com mudanças nas aulas, como o fato de os estudantes poderem abrir a sua câmera e mostrar o seu rosto, ou simplesmente deixar a câmera fechada, fazendo com que o professor não pudesse saber se ele estava participando efetivamente da aula. Outro aspecto que deve ser considerado é que, na maioria dos casos, não houve tempo para planejamento, preparação e organização para ambos os envolvidos no processo de mudança (Moreira; Schelmer, 2020; Hodges *et al.*, 2020; Saldanha, 2020). Segundo Hodges *et al.* (2020, *online*, tradução minha),

Em contraste com as experiências que são planejadas desde o início e projetadas para serem online, o ensino remoto emergencial (ER) é uma mudança temporária de ensino para um modo de ensino alternativo devido a circunstâncias de crise. Envolve o uso de soluções de ensino totalmente remotas para instrução ou educação que, de outra forma, seriam ministradas presencialmente ou como cursos mistos ou híbridos e que retornarão a esse formato assim que a crise ou emergência diminuir. O objetivo principal nessas circunstâncias não é recriar um ecossistema educacional robusto, mas sim

fornecer acesso temporário à instrução e suportes instrucionais de uma maneira que seja rápida de configurar e esteja disponível de forma confiável durante uma emergência ou crise. Quando entendemos o ER dessa maneira, podemos começar a separá-lo do "aprendizado online".

Neste caso, os autores denominam aprendizado online, a educação a distância. Concluo que o ER se diferencia da EaD pelas suas particularidades, como turmas de alunos que normalmente se encontram em lugares geográficos diferentes; aulas gravadas pelos professores e disponibilizadas em plataformas virtuais de ensino, o que faz com que na EaD o aluno possa participar de uma disciplina ou curso no tempo que mais for conveniente para ele; tutores presenciais e a distância que têm o papel de acompanhar os alunos, corrigir avaliações, além de auxiliar o professor, dentre as descritas anteriormente. Além disso, a Nota Técnica 17 do Centro de Inovação para a Educação Brasileira (CIEB), diferenciou as estratégias de aprendizagem remota (EAR) e EaD,

Estratégias de Aprendizagem Remota (EAR): Visam dar subsídios ao gestor público para mobilizar e planejar ações pedagógicas frente ao contexto de isolamento social. Educação a Distância (EaD): É apoiada em trabalho sistematizado baseado em metodologias e processos de desenvolvimento de soluções para a aprendizagem (CIEB, 2020, p. 9).

Após partir das concepções sobre EaD encontradas na literatura, por considerá-la mais familiar para ações educacionais que acontecem com a distância física entre as pessoas, e assim explicar o que foi o ER, vou comentar sobre a Geometria, que é outra vertente dessa pesquisa.

Durante toda a minha experiência como educadora, sempre me deparei com situações nas quais os alunos apresentavam defasagens em relação ao aprendizado de Geometria, principalmente na Geometria Euclidiana Plana, que traz conceitos básicos para o entendimento de conteúdos da Geometria Euclidiana Espacial.

Pensando no ensino e na aprendizagem da Geometria na Educação Básica, Mota e Laudares (2013) consideram que os estudantes apresentam dificuldades em seus conteúdos desde a Educação Básica até o Ensino Superior. Além disso, Fainguelernt (2011) afirma que a Geometria tem sido relegada a um segundo plano por vários fatores, como o mau uso ou a não utilização de recursos didáticos, o mau planejamento das aulas causado pelas dificuldades encontradas pela falta de preparo dos professores e a disposição dos conteúdos nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, os quais, muitas vezes, se encontravam em suas páginas finais.

Buscando na história um entendimento do porquê de o ensino de Geometria ainda não ocorrer de forma desejada, ou seja, com o entendimento de todos os envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem, até os dias atuais, Gouvêa (1998, p.43) argumenta que, no período pós Matemática Moderna:

O ensino da Geometria passou a ser abandonado pelos professores, os quais a planejavam para o último ano [...]. Ensinar e aprender Geometria por meio de espaços vetoriais ou por meio de transformações, como pregava a Matemática Moderna, era difícil tanto para professores, como para alunos, por se tratar de nova abordagem. E a Geometria, cada dia mais, foi sendo relegada ao último plano do currículo escolar de 1º. grau.

Nesse sentido, o professor enquanto aluno, tinha uma formação deficiente nas disciplinas de Geometria no Ensino Superior, constituindo um “ciclo vicioso” ao levar os seus conhecimentos desse assunto para as suas salas de aula. Como as disciplinas não foram suficientes para dar base ao professor enquanto aluno, ele não ensina Geometria e forma alunos que não aprendem Geometria (Amaral-Schio, 2018). Tais fatores fazem com que os alunos se distanciem cada vez mais desses conteúdos.

Olhando para a Educação Básica, apesar de a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) trazer cinco competências específicas para a Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, na qual em três delas, aparecem o tema Geometria Espacial, ainda nos deparamos com problemas em relação ao aprendizado de seus conteúdos em qualquer modalidade de ensino.

Não obstante, diversos *softwares*, como o *Geogebra*, o *Wolfram Alpha*, o Dr. Geo, o Régua e Compasso, dentre outros, vêm sendo construídos com o propósito de serem utilizados nas aulas de matemática, alguns voltados para a visualização, com possibilidades de especulação do espaço, como é o caso do *Geogebra 3D*, que propicia a exploração, a visualização e a construção de objetos que permitem trabalhar os conceitos da Geometria Euclidiana Espacial.

No livro “A Máquina Universo”, Lévy (1998) indica o computador como uma ferramenta emergente de experiência e pensamento, mudando atividades cognitivas como a linguagem, a sensibilidade, o conhecimento e a imaginação inventiva. “A escrita, a leitura, a escuta, o jogo e a composição musical, a visão e a elaboração das imagens, a concepção, a perícia, o ensino e o aprendizado, reestruturados por dispositivos técnicos inéditos, estão ingressando em novas configurações sociais” (Lévy, 1998, p.17).

Como acredito nas potencialidades do uso de TD nas aulas de matemática, preocupo-me em refletir e buscar compreender como estudantes e mídias digitais podem produzir conhecimentos. Em relação às questões epistemológicas, podemos observar que, com o uso crescente da internet, diversas possibilidades de comunicação surgem para a Educação Matemática, além das “sutilezas que a linguagem matemática apresenta” (Santos, 2006, p. 15); neste caso, quando combinadas com um coletivo de estudantes e mídias digitais.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) tratam das fases das tecnologias digitais em Educação Matemática e associam a quarta fase ao advento da internet rápida, na qual é comum o uso do termo tecnologias digitais (TD). Borba, Souto e Canedo Jr. (2022) consideram a quinta fase das TD com as modificações ocorridas pelo vírus SARS-CoV-2 em relação ao aumento de utilização das TD nas aulas de matemática, que ocorreram online. Neste cenário de desigualdade social, as TD passaram a ser mais utilizadas de diversas formas.

Em relação às mídias digitais – MD, segundo Borba (2009, p. 461, tradução minha) “internet, *software*, papel-e-lápis e oralidade são mídias que não apenas expressam ideias, mas também moldam ideias e linguagem”. Seguindo esse pensamento, Oechsler (2018, p. 93) considera mídia como os “meios e recursos semióticos (de acordo com outros autores) que, utilizados em conjunto com atores humanos, contribuem para a produção do significado”. Além disso, para Santos (2009, p. 5664),

mídia é todo o suporte que veicula a mensagem expressada por uma multiplicidade de linguagens (sons, imagens, gráficos, textos em geral)... é a união das tecnologias informáticas e suas aplicações com as telecomunicações e com as diversas formas de expressão e linguagem.

Entendo que mídias digitais são quaisquer forma de comunicação que são realizadas de forma digital, por uma multiplicidade de linguagens (sons, imagens, gráficos, textos em geral), em lugares do ciberespaço (*softwares*, aplicativos, salas de aula virtual, AVAs), para a produção de significado.

Segundo Lévy (1993), diferentes mídias são distintas formas da extensão da memória. Para Borba e Villarreal (2005), a unidade seres-humanos-com-mídias estabelece o papel central do contexto no qual estão inseridos, em que diferentes mídias como oralidade, escrita e computadores reorganizam o pensamento. Porém, segundo Borba e Penteado (2016, p. 46, grifo dos autores), a informática se diferencia das outras mídias quando

permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, experimentação e em uma ‘nova linguagem’ que

envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea (Borba e Penteado, 2016, p.46).

Para Borba e Penteado (2016), a nova mídia, a informática, podem modificar o próprio conhecimento, sendo possível existir uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento.

Corroboro o pensamento de Borba e Penteado (2016, p. 14-15, grifo dos autores) no que tange à aprendizagem com o computador nas salas de aula de Matemática. Segundo os autores “o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma ‘alfabetização tecnológica’”.

Segundo Ataíde e Pinho (2013), para existir letramento digital é preciso que o indivíduo seja alfabetizado tecnologicamente. Vou recorrer a alguns autores para diferenciar os dois termos. Silva (2004) define alfabetização tecnológica como a capacidade de utilizar as tecnologias, sabendo como, quando e por que usá-las, enquanto Sampaio e Leite (2004) caracterizam-na pelas habilidades em lidar com as tecnologias existentes na escola e no nível de envolvimento que se estabelece com elas. Em relação ao letramento digital, Souza (2007) compreende que ele se constitui de uma profunda sequência de valores, habilidades e práticas em concordância com o contexto social e cultural implicados em operar linguisticamente dentro de ambientes eletrônicos que incluem leitura, escrita e comunicação.

Como esta pesquisa ocorreu em tempos de pandemia e, por isso, aconteceu na modalidade de ensino remoto emergencial, o computador esteve presente durante todas as 60 horas destinadas à disciplina Geometria Euclidiana Espacial e, sendo assim, procurei trazer diferentes mídias para interação dos alunos.

Em relação à visualização que o uso das TD traz para a aprendizagem matemática, principalmente para a Geometria, há pontos que podem ser considerados positivos para a Educação, como o pensamento que é produzido ao girar uma figura espacial podendo olhar para todos os seus lados, tornando possível estender a memória (Borba; Villarreal, 2005). Sendo assim, ela “envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente”. (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2018, p. 57).

Após uma breve discussão das principais ideias referentes às temáticas envolvidas nesta investigação, apresento a questão diretriz, o objetivo geral e objetivos específicos da pesquisa.

1.3 Questão Diretriz e Objetivos

Após as minhas experiências em diversos níveis de ensino da Matemática, surge a questão diretriz desta pesquisa: Como um coletivo de alunos-com-mídias compreende conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina do Ensino Superior do curso de Matemática em tempos de ensino remoto?

Para esta investigação, sempre que me referir ao coletivo de alunos-com-mídias ou estudantes-com-mídias, estou entendendo como um conjunto no qual fazem parte, pelo menos um aluno e pelo menos uma mídia.

O objetivo geral da pesquisa é investigar como as interações entre alunos e mídias promovem a reorganização do pensamento para a produção de conhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina da Graduação em Matemática, em tempos de pandemia.

Os objetivos específicos são:

1. Identificar as potencialidades e limitações observadas no coletivo dos estudantes e as mídias, em relação aos conceitos de Geometria Euclidiana Espacial em tempos de ensino remoto;
2. Estabelecer relações entre as diferentes interações constituídas por um coletivo pensante de estudantes e mídias, em relação à cognição dos conceitos de Geometria Euclidiana Espacial;
3. Compreender como a visualização pode fazer parte da cognição de conteúdos da Geometria Euclidiana Espacial quando interagem estudantes e mídias digitais.

Na próxima subseção, apresento a estrutura da tese.

1.4 Visão Geral das Seções

A presente tese possui seis seções: Introdução, Revisão de Literatura, Referencial Teórico, Metodologia, Apresentação e Análise dos Dados, além de Referências e Anexos.

A introdução apresenta a trajetória da pesquisadora, a motivação, e os elementos que justificam a pesquisa, bem como a problematização, o objetivo geral e os específicos, buscando situar o leitor nos caminhos que culminaram nesta tese, além de trazer uma visão geral e sintetizar as seções posteriores.

A seção 2 traz uma apresentação dos trabalhos que versam sobre a temática desta pesquisa, formando como conjunto a revisão de literatura composta por dissertações, artigos e trabalhos apresentados em congressos, que envolvem a Geometria Espacial, as mídias digitais e a visualização.

A seção 3 apresenta o referencial teórico, organizado pelas ideias de Lévy (1993, 1996, 1999, 2000, 2015) acerca do que é virtual, ciberespaço, cibercultura e inteligência coletiva, as considerações de Borba e Villarreal (2005) nos seres-humanos-com-mídias, além dos pensamentos de alguns autores sobre a visualização. A harmonização dessas ideias serviu de fundamentação para a análise dos dados.

A seção 4 discorre sobre metodologia qualitativa e pesquisa baseada em *design* assumidas nesta tese, especificando as principais características deste tipo de pesquisa conforme a literatura da área. Além disso, apresenta o cenário da pesquisa, os instrumentos utilizados para produção, organização e análise dos dados.

A seção 5 destina-se à apresentação, descrição e análise de alguns dados produzidos a partir dos instrumentos de pesquisa, de acordo com as três categorias emergentes: experimentação com tecnologias, ensino remoto e visualização.

Já a seção 6 consiste nas considerações finais, sendo explicitadas as principais discussões e reflexões realizadas ao longo da investigação.

Em seguida, estão incluídos alguns anexos e apêndices que foram relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa.

2 REVISÃO DE LITERATURA: BUSCANDO CONHECER O QUE FOI EVIDENCIADO PELA LITERATURA SOBRE A TEMÁTICA PESQUISADA

Optei por realizar uma revisão sistemática da literatura buscando mostrar como o tema da minha pesquisa é abordado em outras, focando no problema do presente trabalho, que é *Como um coletivo de alunos-com-mídias compreende conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina do Ensino Superior do curso de Matemática em tempos de ensino remoto?* Para tanto, procurei identificar, selecionar, avaliar e sintetizar as evidências que considero relevantes nos outros trabalhos.

Nesse sentido, para abarcar o tema pesquisado, inseri no campo de busca os seguintes termos “geometria espacial” AND “mídias digitais”, “geometria espacial” AND “tecnologias digitais” e “geometria espacial” AND “visualização” e, em seguida por “geometria espacial” AND “mídias digitais” OR “tecnologias digitais” OR “visualização”.

Utilizei as seguintes plataformas: catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior (CAPES), repositório da UNESP/Rio Claro e repositório da PUC-SP, além de usar esses mesmos termos nas buscas em revistas tais como ZDM, Quadrante, Springer, Pitágoras, ZETETIKÉ, BOLEMA, Educação Matemática em Revista, Revista Educação Matemática Pesquisa, RENOTE, REMATEC, como principais, que abrangem artigos nacionais e internacionais e em anais de eventos científicos, como o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) e o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), além da plataforma SciELO. A escolha pelas plataformas e pelas revistas se deu pelo Qualis e por sugestão da professora que avaliou o meu projeto de pesquisa no início do processo de doutoramento.

A busca no Banco de Dissertações e Teses da CAPES se deu pelo fato de as instituições de ensino indicarem aos seus alunos a depositarem ali os seus trabalhos. Em relação à temporalidade, usei de alguns filtros para delimitar o período (de 1999 a 2021), em cujo último foi realizada esta revisão de literatura.

Após uma pré-seleção através dos títulos, procedi a uma minuciosa leitura de todos os resumos, buscando investigações nas quais a interação entre alunos e mídias digitais aparecessem de alguma forma, implicadas em conteúdos da disciplina de Geometria Euclidiana Espacial (GEE) ou pesquisas que trouxessem um mapeamento sobre as tendências voltadas para o campo da Educação Matemática, debruçando-me nos trabalhos com focos nos conceitos da GEE, em relação ao ensino e à aprendizagem.

Vale ressaltar que tive a pretensão de abarcar todos os trabalhos desenvolvidos sobre a temática no período citado anteriormente, até o ano de 2021, quando foi realizada essa revisão de literatura, levando em consideração que, já na quinta fase das tecnologias digitais (relacionada às aulas no modo remoto devido à situação pandêmica vivenciada pelo COVID-19), diversos trabalhos surgiram.

Na próxima subseção, seguem as plataformas e as pesquisas escolhidas para composição desta revisão de literatura, bem como os critérios utilizados para a realização da busca.

2.1 Dissertações e Teses

Um primeiro levantamento bibliográfico se deu no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, no repositório da UNESP/Rio Claro e no repositório da Pontifícia Universidade Católica - SP (PUC).

Após realizada a busca com os descritores anteriormente mencionados, ocorreu que no catálogo de teses e dissertações da CAPES, encontrei 49 pesquisas, no repositório da UNESP/Rio Claro, 175 resultados e, por fim, no repositório da PUC-SP, 194 resultados. Três trabalhos apareceram em mais de uma das pesquisas realizadas, seja em um mesmo repositório ou em repositórios diferentes. Além disso, as pesquisas que não atenderam à temática pesquisada foram desconsideradas.

Posteriormente, realizei a leitura de 207 resumos e, a partir dela, foram escolhidas seis pesquisas, por relacionarem a GEE com as tecnologias digitais, todas elas dissertações, que foram mapeadas e serão comentadas aqui nesta seção. A escolha se deu pelos trabalhos selecionados apresentarem, de fato, alguma temática relacionada à minha investigação.

Em relação aos trabalhos escolhidos, realizei a leitura do texto completo, buscando trazer objetivo e/ou pergunta, referencial teórico, metodologia e resultados, além de pontuar aspectos relevantes para a investigação que estou desenvolvendo. O Quadro 1 traz a plataforma, o título, autor(es) e ano de defesa.

Quadro 1- Teses e dissertações que estão relacionadas com a temática desenvolvida nesta pesquisa

Banco de Dados	Título	Autores (ano)
Repositório Institucional UNESP	A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial	Santos (2006)
Banco de Teses e Dissertações da CAPES	A visualização no Ensino de Geometria Espacial: Possibilidades com o <i>Software</i> Calques 3D	Ritter (2011)
Repositório PUCSP	O uso de tecnologias digitais para a compreensão da construção de sólidos a partir de suas propriedades	Marquetti (2015)
Banco de Teses e Dissertações da CAPES	<i>Geogebra</i> 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial	Borsoi (2016)
Repositório PUCSP	Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre Geometria Espacial: período 2007 a 2017	Sanchez (2018)
Banco de Teses e Dissertações da Capes	Visualização espacial no Ensino Fundamental: rotações no <i>Geogebra</i>	Oliveira (2021)

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Observo aqui que, embora a minha busca fosse por teses e dissertações, só encontrei dissertações referentes à temática da minha investigação. Percebo que havia falta de interesse em pesquisas de doutorado nessa área até aquele momento.

Em sua dissertação de mestrado, Santos (2006) investigou como se dá a produção matemática entre alunos-professores e mídias digitais, no curso de extensão universitária “Tendências em Educação Matemática” na modalidade à distância, em sua sexta edição, no ano de 2005. A autora participou do curso, liderando as discussões em três encontros, destinados à Geometria Espacial (GE), propondo o uso de diversas mídias e o *software Wingeom*. A análise dos dados foi realizada à luz do construto teórico Seres-Humanos-Com-Mídias, de Borba e Villareal (2005), e pelas ideias sobre o pensamento coletivo e a inteligência coletiva apresentadas por Lévy (1993; 1999; 2003). A autora apresenta as ideias de Ciberespaço, por considerar que ele aproxima pessoas que estão geograficamente distantes, com grandes potencialidades para ser um “espaço do saber”.

Antes de iniciar o curso, Santos (2006) enviou atividades sobre o *software Wingeom* para os alunos que estavam matriculados. A finalidade era proporcionar uma familiarização com o *software*. O curso teve 17 professores matriculados, sendo que 12 deles o concluíram, e ocorreu no ambiente virtual *TelEduc*. Foram utilizadas as ferramentas do ambiente 3D do *Wingeom*. As atividades foram propostas por esta pesquisadora, que teve o cuidado de encaminhar o passo-a-passo para as construções desejadas. Para a produção de dados, foram

utilizados uma observação seletiva e os seguintes instrumentos: portfólios, fóruns de discussão, questionários e *chats*.

Como resultados, observei que a visualização de figuras geométricas espaciais em um *software* com recursos 3D pode auxiliar tanto na elaboração de conjecturas como na refutação das mesmas, e que as possibilidades de movimentar objetos durante as suas construções potencializam a aprendizagem. Inferi que o desconhecimento do *software* utilizado pode prejudicar o andamento das atividades. Além disso, as mídias condicionaram a forma como os participantes formulavam conjecturas ao realizarem as construções geométricas que foram discutidas por eles, transformando a produção matemática.

Ritter (2011) apresentou, em sua dissertação, uma proposta com objetivo no desenvolvimento de habilidades para visualizar objetos 3D a partir de suas representações no plano, utilizando o *software* Calques 3D. Foi desenvolvida uma proposta didática para uma turma do terceiro ano do Ensino Médio em uma escola privada de Novo Hamburgo, RS. Para embasar teoricamente a sua pesquisa, a autora traz pesquisadores que tratam das dificuldades dos estudantes em aprender Geometria, como Pavanello (1989; 1993), Pirola e Moraco (2005), Viana (2000) e Viana e Brito (2005); outros que falam sobre o abandono da Geometria nas escolas inspirado em Duval (1995; 1999), Gutiérrez (1992; 2004) e Van Hiele (1986), para discutir os processos cognitivos que ocorrem durante a aprendizagem. A autora também traz uma seção sobre o potencial da tecnologia no ensino de GE, motivada pelos autores Kaput (1992; 2007), Shaffer e Kaput (1999) Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008), Gravina e Santarosa (1998); Gravina (2001), Borba e Villarreal (2005) e Shaffer e Clinton (2006).

A metodologia adotada por Ritter (2011) é uma Engenharia Didática que se constitui na formulação, realização, observação e análise de uma sequência de ensino que foi realizada com uma turma de 32 alunos com idades variando entre 16 e 18 anos. Eles utilizaram o Calques 3D em atividades que exigiam a visualização onde construíram sólidos geométricos por meio de perspectivas; em seguida, por meio de planificações; e, por último, fizeram a descrição dos sólidos. Como resultado, a pesquisadora constatou que os alunos progrediram em relação ao desenvolvimento de habilidades para a visualização espacial.

Em sua pesquisa, Marquetti (2015) investigou o uso de tecnologias digitais por um grupo de estudantes do Ensino Médio, tendo como principal objeto as relações entre volumes de cubos e pirâmides. Seu objetivo foi proporcionar condições para analisar a eficiência de tecnologias digitais como ferramentas para auxiliar os alunos na compreensão/ampliação de conceitos de Geometria Espacial Métrica, a partir de generalizações de suas propriedades, apresentando como recursos principais a visualização, a experimentação e o dinamismo.

Como referencial teórico para a sua investigação, Marquetti (2015) trouxe reflexões referentes à teoria do ciclo de Oliveira (2013) e ao constructo seres-humanos-com-mídias de Borba e Villarreal (2005). Adotou uma metodologia qualitativa denominada estudo de caso. A pesquisa foi realizada com cinco estudantes do segundo ano do Ensino Médio, em uma escola particular de São Paulo, onde propôs a realização de quatro atividades com o uso do *software Geogebra 5*, que possui ferramentas 3D e 2D, em duas sessões, com duração de três horas e meia no total. O pesquisador em questão era também o professor da turma e usou trinta minutos da primeira sessão para explicar algumas ferramentas do *software*.

Os resultados encontrados em sua pesquisa apontam que a tríade visualização – experimentação – dinamismo, voltada para uma lógica de pessoas que usam a tecnologia, contribuiu para a compreensão de propriedades apresentadas por sólidos geométricos no âmbito da Geometria Espacial Métrica. A possibilidade de rotacioná-los também foi mencionada e sugerida pelos estudantes no desenvolvimento das atividades. Segundo o autor, houve um processo de reorganização do pensamento pela reestruturação na forma de visualizar e interagir com as representações dos objetos matemáticos.

Em sua dissertação, Borsoi (2016) se pauta na seguinte indagação “de que forma o *software* de geometria dinâmica *Geogebra* pode contribuir no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial e na melhor compreensão de conceitos relativos à Geometria Espacial?” (Borsoi, 2016, p. 13-14). Como aporte teórico, inspirou-se nas teorias de Van Hiele (*apud* Crowley, 1994), Gutiérrez (1992; 1998) e Duval (2003; 2012).

Como metodologia, com desenho qualitativo, a autora adotou uma sequência didática, por meio da Engenharia Didática, com a proposição de dez atividades para alunos do Ensino Médio, em que os níveis de dificuldade iam aumentando e que tratavam de conteúdos diferentes da GE. A pesquisa foi estruturada em cinco encontros, com dez horas-aula, e as atividades, previamente elaboradas. Como resultados, observou-se, a partir das análises realizadas antes e depois do desenvolvimento das atividades, o progresso dos alunos em relação às habilidades de visualização espacial, além de melhor entendimento dos conceitos abordados da GE. O *Geogebra* foi visto como um potencializador do diálogo entre representações e imagens mentais e favoreceu o avanço da aprendizagem de conteúdos.

Sanchez (2018) pesquisou sobre as investigações no campo da GE desenvolvidas no período de 2007 a 2017, em programas de Pós-Graduação no Brasil, em nível de mestrado e doutorado em Educação Matemática. Teve como objetivo mapear, descrever, analisar, discutir tendências temáticas e teórico-metodológicas sobre as pesquisas em GE.

A autora apresenta um capítulo sobre o ensino e a aprendizagem de GE, no qual enfoca um breve estudo histórico da temática, mostrando a sua importância no currículo desde a Educação Básica até o Ensino Superior. Em seguida, tece discussões sobre a importância do ensino de Geometria, ao trazer autores que falam das dificuldades em aprender a Geometria, enquanto outros autores falam da sua importância. Fala sobre a Geometria e a GE nos documentos oficiais brasileiros, nos níveis fundamental e médio. Depois disso, discorre sobre a GE nos livros didáticos com um olhar para o Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD (2015/2017), bem como para a BNCC, comentando sobre as três coleções mais distribuídas, sendo duas do Ensino Fundamental (Praticando Matemática e Vontade de Saber) e uma do Ensino Médio (Matemática – Contexto & Aplicações). O capítulo é finalizado com uma descrição acerca do uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) relacionadas à GE, em que faz associação entre as tecnologias, a partir de computadores, *softwares*, internet e ensino a distância ao ensino de Geometria.

Como metodologia, Sanches (2018) optou por um mapeamento o qual traz uma revisão em uma análise bibliográfica de trabalhos concluídos sobre a GE, em pesquisa exploratória. A busca foi realizada por meio digital nas seguintes plataformas: GeoCapes; Repositório de algumas universidades; Banco de Teses e Dissertações da CAPES; Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações com o termo “Geometria Espacial”. A princípio, encontrou 165 trabalhos e, após filtrar e ler os resumos, selecionou 14 deles.

Observou que a metodologia utilizada na maioria das pesquisas era a documental, seguida pelo estudo de caso. Em relação ao referencial teórico, as pesquisas adotaram, em maior parte, os Registros de Representação Semiótica de Duval, Transposição Didática, Nível de Desenvolvimento Geométrico, nesta ordem. A autora trabalhou com três eixos de análise: os trabalhos que utilizaram jogos, materiais manipulativos e recursos não digitais; trabalhos que utilizaram recursos de tecnologia da informação e da comunicação (TIC), em que situavam o maior número das pesquisas, indicando tendências para mudanças nas estratégias de ensino com a utilização das tecnologias digitais; e estratégias para o ensino de GE.

Em sua dissertação, Oliveira (2021) buscou analisar as contribuições do *software Geogebra* no processo de visualização espacial para alunos do oitavo e nono anos do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada de Porto Alegre, com seis encontros remotos, de duas horas, ocorridos no *Google Meet*. Para isso, usou uma sequência didática, em seis atividades sobre rotação e superfícies de revolução. A pergunta diretriz da pesquisa foi: “Quais as contribuições do *Geogebra* no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, quando se faz uso de atividades envolvendo rotação?” (Oliveira, 2021, p. 15). Esse estudo trazia

como objetivo procedimental planejar, justificar, construir e aplicar uma sequência didática e materiais de ensino, utilizando-se o *Geogebra online*.

Os instrumentos para produção de dados foram: diário de campo, atividades e construções realizadas pelos estudantes usando o *software* e postadas no *Google Classroom*. A metodologia adotada em sua pesquisa teve caráter qualitativo e foi fundamentada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2010; 2012), além das ideias de visualização de Gutiérrez (1996a). Como resultados da pesquisa, a autora percebeu que os alunos apresentaram avanços em relação à visualização espacial e no entendimento dos conceitos geométricos abordados, além de conseguirem dinamicamente repensar as suas estratégias nos trabalhos em duplas. A professora pesquisadora observou a importância de constante aperfeiçoamento profissional, principalmente em relação às TD, que avançam rapidamente.

Após a apresentação dessas seis dissertações, observo que em nenhuma delas a pesquisa foi realizada em um período de um semestre com proposição de diversas atividades alunos-com-mídias. As pesquisas também não ocorreram em turma do Ensino Superior de Matemática, acontecendo em grande maioria na Educação Básica. O *software* utilizado em algumas delas foi o *Geogebra*, porém com um número pequeno de encontros e com tarefas previamente elaboradas. As metodologias utilizadas são diferentes desta pesquisa, que foi realizada no ensino remoto. A utilização da teoria de visualização espacial de Gutiérrez (1992) foi comum na maioria delas e os resultados levam a crer que a visualização e a movimentação potencializam a aprendizagem, no caso de GEE.

Na próxima subseção, apresento os artigos publicados em periódicos nacionais qualificados.

2.2 Artigos Nacionais

A busca da temática “Geometria Espacial” em periódicos nacionais foi realizada em um primeiro momento, em revistas classificadas *qualis* CAPES (2013 – 2016) em A1, A2, B1 e B2 e após estas, como não encontrei muitos artigos, realizei uma procura exaustiva na plataforma Google Acadêmico. Pude observar que não existem muitas pesquisas em artigos nacionais sobre a temática antes do ano de 2010. Foram usados os mesmos termos já mencionados no início da seção. Finalmente, após selecionar 76 artigos pelos títulos, fiz a leitura dos resumos, e escolhi seis artigos, por relacionarem GEE com tecnologias digitais e/ou visualização.

O Quadro 2 traz os artigos concernentes ao tema dessa pesquisa que estão compondo a revisão de literatura em artigos nacionais.

Quadro 2 - Artigos em periódicos nacionais que estão relacionadas com a temática desenvolvida nesta pesquisa

Periódico	Título	Autores (ano)
RENTE	Geometria dinâmica 3D: novas perspectivas para o pensamento espacial	Notare; Basso (2016)
RENTE	Poly e <i>Geogebra</i> 3D: um experimento de ensino na Educação Básica	Trainotti; Silva (2018)
EDUCITEC	Produto educacional: Geometria espacial com o <i>software Geogebra</i> 3D	Scalabrin; Mussato (2019)
Vidya	Dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial	Settimy; Bairral (2020)
Revista Pesquisa, Sociedade e Desenvolvimento	O uso de tecnologias digitais no ensino de Geometria espacial: uma revisão de literatura	Oliveira; Silva; Bissaco (2021)
REMATEC	Ver e visualizar em Geometria: uma experiência com o <i>software Geogebra</i>	Batista; Paulo (2021)

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Notare e Basso (2016), apresentaram uma discussão sobre as possibilidades de contribuição da utilização de ferramentas de Geometria Dinâmica 3D para a aprendizagem de conceitos e na resolução de problemas de GE. Nesse intuito, trouxeram alguns autores que tratam da importância da Geometria para a formação matemática, a importância da Geometria Dinâmica para a Geometria Plana e a Espacial, a Geometria Dinâmica e o pensamento espacial.

Os autores utilizaram como metodologia a apresentação e resolução de dois problemas, em que os alunos poderiam usar ou não o *software Geogebra* 3D, para uma turma de mestrado profissional, cujos alunos eram professores de Matemática da Educação Básica. Um dos problemas envolvia cubo e pirâmide, enquanto o outro tratava de cilindro, uma seção circular e planificação. Os resultados apontaram que o uso de recursos de Geometria Dinâmica 3D pode gerar elevados níveis de pensamento geométrico, auxiliando o raciocínio espacial dos estudantes.

Trainotti e Silva (2018) tiveram como objetivo apresentar e refletir sobre um experimento de ensino envolvendo GE para uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Santa Catarina. Os pesquisadores utilizaram os *softwares Poly* e *Geogebra* 3D. O referencial teórico pauta-se nas ideias do uso de tecnologias, especialmente os *softwares* nas aulas de tópicos da GE, tais como Gravina *et al.* (2012), Aguiar (2008), Notare

e Basso (2016), Tenório; Aguiar e Tenório (2017), Saraiva (2015), Souza (2014), Zotto *et al.* (2013) e Sampaio (2015).

A metodologia adotada na pesquisa foi de cunho qualitativo, em particular envolvendo experimento de ensino, com 24 alunos, em que apenas um deles não possuía celular. Realizaram-se oito encontros de 45 minutos cada um. Utilizaram projetor multimídia e *smartphones* para o desenvolvimento, uma vez que o laboratório de informática da escola tinha dez computadores e todos apresentavam problemas em seu funcionamento. A pesquisa se desenvolveu em duas etapas, a primeira usando o *software Poly* para realização de atividades com poliedros e, a segunda, empregando o *software Geogebra* na investigação de problemas de GE.

Como resultados, os autores puderam observar que os *softwares* utilizados contribuíram para a aprendizagem de conteúdos da GE. As atividades contribuíram para o desenvolvimento da curiosidade e a motivação dos estudantes, além de perceberem a sala de aula como lugar de exploração, criação de conjecturas e validação de hipóteses pelos estudantes, promovendo a aprendizagem.

Scalabrin e Mussato (2019), apoiados na questão diretriz “De que forma o uso do *software Geogebra* 3D pode contribuir nos processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos de Geometria Espacial no Ensino Médio?” (Scalabrin; Mussato, 2019, p. 1), mostram parte de um produto educacional de uma pesquisa de mestrado em desenvolvimento, que teve como objetivo apresentar um material de apoio didático pedagógico em que foram exploradas construções para que os alunos pudessem desenvolver habilidades de visualização espacial, visando contribuir com a representação mental de objetos tridimensionais e entendimento dos conceitos de prismas e pirâmides. Nesse sentido, propuseram tarefas exploratórias e investigativas buscando integrar as tecnologias digitais ao ambiente de ensino de GE.

Os autores trazem reflexões sobre o *Geogebra* e sua contribuição para o ensino da Matemática; o referencial teórico adotado foi o modelo de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A pesquisa é de natureza qualitativa e foi baseada em uma sequência didática para uma turma da segunda série do Ensino Médio, localizada em uma escola da cidade de Boa Vista/RR, na qual duas horas/aula foram utilizadas para apresentação de ferramentas do *software* e 14 horas/aula para o desenvolvimento das atividades, em que os alunos trabalharam em duplas no laboratório de informática. Os pesquisadores consideraram que essa proposta ofereceu oportunidade aos participantes de experimentarem novas possibilidades, descobrir, argumentar, deduzir, conjecturar e refletir sobre o conhecimento construído.

Em seu artigo, Settimy e Bairral (2020) trazem um recorte da pesquisa de mestrado da primeira autora. O foco foi a análise do aprendizado de estudantes em atividades de GE que se preocuparam em utilizar recursos variados, como papel e lápis, planificações articuladas, sólidos em acrílico e um vídeo gerado com captura da tela do *software Geogebra*. Foi realizada uma intervenção pedagógica com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental em uma escola pública municipal de Angra dos Reis (RJ) e teve como procedimentos metodológicos a elaboração, a seleção e a organização de tarefas, a implementação e a análise dos dados.

Como aporte teórico, utilizaram as ideias propostas por Arcavi (2003), referentes a dificuldades e habilidades relacionadas à visualização, nas quais apresenta um olhar para três categorias de dificuldades a respeito da visualização: cultural, socio-lógica e cognitiva. Como resultados, perceberam que existe a necessidade da implementação de mais atividades com foco na visualização e na representação dos objetos trabalhados na pesquisa e não um olhar simples para aqueles poliedros mais comuns. Consideram que a variedade de recursos trabalhados foi um elemento relevante para o aprendizado geométrico dos estudantes.

Oliveira, Silva e Bissaco (2021) tiveram como objetivo buscar na literatura evidências sobre o uso das novas tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de GE. Para justificar o trabalho, na introdução, os autores trazem diversos autores que tratam da dificuldade dos alunos em Matemática, a falta de motivação dos alunos com a Geometria, a habilidade espacial para identificar, mentalizar e visualizar imagens e objetos, a conversão de imagens bidimensionais em tridimensionais, dentre outros. Em seguida, os autores definiram os termos de busca, as bases de dados e os critérios de inclusão e exclusão.

Fizeram uma busca em artigos nacionais e internacionais, entre os anos de 1988 e 2021, usando os descritores “geometria”, “espacial” e “tecnologias”. Em seguida, os autores uniram os termos “geometria” e “espacial”, para encontrar pesquisas que não dividiam as duas temáticas. Foram selecionados assim dez artigos e, após realização das leituras, perceberam que dois deles atendiam parcialmente aos seus objetivos: um deles utilizava tecnologias mais antigas; o outro, estudava a aprendizagem de professores e não de estudantes. Então realizaram uma nova busca, onde adicionaram o termo “realidade aumentada” e encontraram cinco trabalhos. Os resultados encontrados apontam que a maioria dos trabalhos está voltada para o uso de tecnologias e dos sólidos geométricos, não aparecendo outras temáticas importantes nessa área de ensino, como posições relativas entre pontos, linhas e planos no espaço.

Batista e Paulo (2021) apresentam o relato de uma experiência que foi vivenciada por quatro professores de matemática de uma escola pública municipal do estado de São Paulo. Como principal referencial teórico, apresentam as ideias de Duval (1999; 2011) sobre ver e

visualizar em Geometria, argumentando que existe uma análise do significado de ver e destaca os aspectos implicados na visualização, relacionando esses entendimentos com a Geometria Plana e a Tridimensional. As autoras comentam em relação ao visualizar uma imagem tridimensional em um livro didático, o que ocorre apenas no plano, considerando que o ver matematicamente requer a mudança de olhar e habilidade de visualização. Esse ver matematicamente é fundamental para o levantamento de hipóteses, para a argumentação e para a investigação, ações que refletem o fazer matemático.

A metodologia teve uma abordagem qualitativa de postura fenomenológica em que os professores propuseram a elaboração de tarefas utilizando o *software Geogebra* nas dimensões 2D (professores do Ensino Fundamental) e 3 D (professores do Ensino Médio), na qual planejaram e movimentaram os sólidos, no caso, cubo e pirâmide. O desenvolvimento das atividades realizadas pelos alunos foi acompanhado e filmado para serem analisadas pelos professores. Os alunos foram questionados sobre a exploração realizada e os conteúdos matemáticos mobilizados.

Como resultados, as autoras puderam observar indícios de uma potencialidade para ver matematicamente e, a partir das ferramentas que permitem a movimentação das Figuras no *software Geogebra*, a possibilidade de conduzir procedimentos que levam ao desenvolvimento da habilidade visual e o fazer com o *Geogebra* oportuniza o avanço com a exploração matemática para além do “Cantinho do *Geogebra*”.

Em relação aos artigos apresentados, o público com o qual a pesquisa foi desenvolvida foi bem diverso, ocorrendo com estudantes Ensino Fundamental, alunos do Ensino Médio, professores da Educação Básica de uma escola pública e alunos do mestrado profissional, que já eram professores da Educação Básica. Os participantes da minha pesquisa, alunos da graduação em Matemática, estão em nível diferente dos que aparecem nas outras. O *Geogebra* foi o *software* mais utilizado, aparecendo em cinco das investigações e é a principal mídia dessa investigação em todos os casos envolvendo a GE.

Na maioria delas, foram sugeridas algumas atividades para que os estudantes usassem o *software* como uma ferramenta. Nesse sentido, as propostas metodológicas são diferentes do meu trabalho pelo fato de querer compreender atividades desenvolvidas por um coletivo de estudantes-com-mídias. Os resultados mostram que o uso da Geometria Dinâmica auxilia o raciocínio espacial e a experimentação de novas possibilidades. Além disso, os *softwares* contribuem para a aprendizagem de GE, as habilidades de visualização espacial e que o uso de diversos recursos é elemento relevante para o aprendizado geométrico.

Após apresentar os artigos publicados em periódicos nacionais, seguirei enunciando na próxima subseção a seleção dos artigos publicados em periódicos e em anais de eventos internacionais, os quais possuem aproximação com a temática da minha pesquisa.

2.3 Artigos Internacionais

A busca da temática “Geometria espacial” em periódicos internacionais foi realizada em um primeiro momento, em revistas classificadas *qualis* CAPES (2013 – 2016) em A1, A2, A3, B1 e B2, em cujos extratos só encontrei um artigo da ZDM. Em seguida, realizei uma busca exaustiva na plataforma *Researchgates*, onde encontrei artigos internacionais e trabalhos apresentados em eventos e congressos. Os descritores utilizados foram os mesmos mencionados no início dessa seção, mudando apenas a linguagem, de acordo com a plataforma ou ambiente da revista pesquisada.

No total de 54 trabalhos visitados, após a leitura dos resumos, escolhi cinco, por serem coerentes com a temática da minha pesquisa, ou seja, estabelecer relações entre a GEE e as tecnologias digitais. O Quadro 3 traz os trabalhos concernentes ao tema dessa pesquisa que compõe a revisão de literatura em relação ao cenário internacional.

Quadro 3 - Artigos em periódicos e trabalhos em anais de eventos internacionais que estão relacionadas com a temática desenvolvida nesta pesquisa

Periódico	Título	Autores (ano)
New directions in geometry education	The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them	Gutiérrez (1996b)
ZDM	A cognitive analysis of dragging practices in cabri environments	Arzarello <i>et al.</i> (2002)
Trabalho apresentado no 5º Congresso da Sociedade Europeia de Investigação em Educação Matemática (CERME)	Developing student spatial ability with 3D <i>software</i> applications	Christou <i>et al.</i> (2007)
World Journal on Educational Technology	Research trends in dynamic geometry <i>software</i> : A content analysis from 2005 to 2021.	Öndes (2021)
Revista Tecnologia Educativa	El <i>software Geogebra</i> como recursos para sólidos de revolución in spatial geometry	Sousa <i>et al.</i> (2021)

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A representatividade desse quadro frente ao tema do cenário mundial é muito pequena e é capaz de ter sido influenciada pela dificuldade e desconhecimento de outras línguas, o que pode inspirar outros pesquisadores a realizarem novas buscas.

Gutiérrez (1996b) relata sobre os resultados de um projeto de pesquisa, no qual foi feita uma análise da interação de estudantes com três *softwares*, que permitiam que eles movessem, de formas diferentes, sólidos geométricos na tela de um computador. O objetivo foi proporcionar aos alunos a interação entre o computador e a sua forma usual de aprender Geometria. Nessa investigação, realizada na Universidade de Valência, foi explorada a hipótese de que os diversos aspectos dos sólidos oferecidos pelos computadores são apropriados para diferentes níveis de habilidades de visualização espacial dos estudantes.

Na introdução, o autor comenta sobre a importância de as crianças adquirirem e desenvolverem habilidades de visualização que lhes permitam criar, transformar e analisar imagens mentais 3D. Além disso, realça que as imagens dos sólidos geométricos nos livros didáticos são planas e estáticas, sem movimento. Sendo assim, considera que os computadores estão dando novas possibilidades aos professores de criação de maneiras de ensinar Geometria, e aos alunos, ferramentas que os auxiliam a conhecer os sólidos e desenvolver sua imaginação espacial.

A organização da pesquisa iniciou-se pelo estudo do conceito de visualização espacial, que é composta por um conjunto de elementos que podem ser divididos em três partes principais: as imagens mentais (imagens concretas, imagens dinâmicas e imagens sinestésicas), os processos de visualização (processamento visual de informação e interpretação de informações figurativas) e as habilidades de visualização (percepção figura-fundo, constância perceptiva e discriminação visual).

Os alunos usaram os *softwares* para movimentar os sólidos. Como resultados, o autor concluiu que há diferenças no comportamento dos alunos ao movimentarem os poliedros em função do tipo de sólido, bem como existem dificuldades em girar sólidos em diversos níveis de ensino devido à necessidade de identificar os vértices, as arestas e as faces, além de distinguirem as partes frontal e a parte de trás do sólido.

Arzarello *et al.* (2002) apresentaram, em seu artigo, que práticas como arrastar partes de Figuras geométricas em um *software* de Geometria Dinâmica, no caso, o Cabri, durante o desenvolvimento de uma atividade, passando por algumas etapas, podem mediar a relação teórico-perceptiva de forma específica, criando uma outra condição, ou seja, arrastar figuras, auxilia os estudantes a explorar Figuras ao movimentá-las, a observar como as suas formas mudam e a descobrir as propriedades que não variam.

Os autores trazem um exemplo retirado de Olivero (1999) para ilustrar a situação de arrastar, na qual foi proposta a resolução de um problema para uma turma de 27 alunos, com idade de 15 anos, trabalhando em pares, no computador. A atividade envolvia arrastar um quadrilátero ABCD e observar o que ocorria com a interseção entre as bissetrizes de seus ângulos internos e seus pontos de interseção H, K, L, M de bissetrizes consecutivas, observados os quatro episódios vivenciados pelos alunos. A partir das observações, os pesquisadores concluíram que a tecnologia, por si só, não pode trazer uma mudança educacional e que a utilização das tecnologias em sala de aula implica a redefinição de conteúdos, métodos, bem como o papel do professor.

Em trabalho apresentado no CERME², Christou *et al.* (2007) relataram o projeto de uma biblioteca de aplicativos de *software* para o ensino e aprendizagem de GE e pensamento visual. O objetivo foi o desenvolvimento de um conjunto de micromundos dinâmicos que permitia aos alunos construir, observar e manipular conFigurações nos espaços; estudar diferentes sólidos e relacioná-los com suas redes correspondentes; promover nos alunos as suas capacidades de visualização através do processo de construção de imagens visuais dinâmicas. Os aplicativos foram desenvolvidos no projeto Desenvolvimento de um Ambiente Ativo de Aprendizagem para a aprendizagem da Estereometria (DALEST) buscando melhorar as habilidades de visualização espacial dos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Os autores embasaram teoricamente o seu trabalho com as ideias de Linn e Petersen (1985) e Lohman (1998) sobre habilidade espacial, em que o segundo artigo propõe um modelo de três fatores para a habilidade espacial: “visualização espacial”, “orientação espacial” e “relações espaciais”. Além disso, inspiram-se em Gutiérrez (1996a) para falar de visualização e habilidades visuais; Harel e Sowder (1998), Presmeg (1986) e Hegarty e Woller (2005), no que diz respeito à visualização dinâmica.

Foram elaborados os seguintes *softwares*: *Cubix Editor*, *Cubix Shadow*, *Potter's Well* e *Origami Nets*. Discutiram-se possíveis situações didáticas tentando aprimorar a compreensão de Geometria 3D dos alunos do Ensino Médio. Ao desenvolver os *softwares*, os elementos centrais de habilidade visual e visualização (imagens mentais, representações externas, processos e habilidades de visualização) foram, cuidadosamente, levados em consideração. Os autores esperavam, naquele momento, que a biblioteca final de aplicativos DALEST constituísse uma ferramenta poderosa no ensino de GE.

² Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), 5, 2007, **Anais...** Larnaca, Cyprus, 2007.

Öndes (2021) traz uma pesquisa apresentando que os *softwares* de Geometria dinâmica (SGD), principalmente o *Geogebra*, têm sido utilizados nas aulas de matemática do mundo inteiro, por terem como característica um ambiente dinâmico de aprendizagem. O objetivo de seu trabalho foi trazer um panorama sobre as pesquisas relacionadas com os SGD. Para tanto, acessou 210 artigos na base de dados *Web of Science*. Realizou uma análise de conteúdos, com atenção aos seguintes tópicos de cada texto: objetivo, *design* da pesquisa, nível amostral, tamanho da amostra, ferramentas de coletas de dados e métodos de análise dos dados.

Os resultados apontaram para os termos mais abordados em cada uma das seções, sendo eles: como objetivo, o efeito dos SGD em alguma atividade ou aula de matemática; para metodologia, foi mais adotada a pesquisa qualitativa; como amostragem das pesquisas, o maior público foram os estudantes do Ensino Médio; como amostra, intervalos que variam de 101 a 300; como instrumentos, foram mais utilizados documentos e testes de desempenho e análise descritiva para estudos qualitativos e quantitativos.

Sousa, Azevedo e Alves (2021) apresentam uma recomendação metodológica para facilitar a transposição didática do tema “sólidos de revolução” para alunos de 15 a 17 anos. O objetivo foi apresentar uma proposta didática que envolvesse o ensino de áreas e volumes de sólidos de revolução, utilizando o *software Geogebra*. Para fundamentar a pesquisa, os autores se inspiram nas pesquisas de Nobre (1996), que argumenta que os professores nem sempre têm conhecimento do objeto a ser ensinado; Oliveira e Leivas (2017), que dizem que a Geometria, através de sua natureza visual, tem o potencial de desenvolver nos alunos a percepção e autonomia de pensamento e raciocínio; e Abar (2020), que aborda os recursos do *Geogebra*, considerando que podem subsidiar as estratégias metodológicas do professor, com potencial de modernizar o conhecimento escolar.

Como metodologia, os autores fizeram um levantamento bibliográfico acerca das características dos sólidos de revolução e propuseram um caminho metodológico, a partir da construção e resolução de duas questões, para que os professores pudessem trabalhar com os seus alunos em sala de aula, utilizando o *software Geogebra*. Como resultados, puderam observar que a utilização do *Geogebra*, aliada à proposta didática por eles elaborada, representa grande potencial para auxiliar a percepção geométrica do aluno. Além disso, o *software* permite visualizações e construções tridimensionais, oportunizando a construção de objetos para experimentação e exploração de conceitos da Geometria Plana e Geometria Espacial, sendo considerado um recurso dinâmico e interativo.

No que diz respeito aos artigos internacionais que compõem essa revisão de literatura, posso observar que o público com o qual as pesquisas foram realizadas está no Ensino Médio.

Três das pesquisas investigam a temática da visualização espacial, que é uma das dimensões da minha investigação. Além disso, as pesquisas utilizam diversos *softwares*, usados como recurso educacional para compreensão de conteúdos de GE. Concluem que a movimentação de sólidos e a visualização espacial ganham potencial com o uso de Softwares de Geometria Dinâmica (SGD). Uma das investigações diz que as TD nas salas de aula implicam redefinir conteúdos, métodos e papel do professor e a outra mostra uma criação de biblioteca com *softwares* variados.

Após a apresentação dos artigos internacionais, elaborei uma subseção sobre a relação de todos os trabalhos comentados nesta seção, com a minha pesquisa, buscando observar as semelhanças e diferenças entre eles, fazer um levantamento da produção científica disponível, conhecer os autores que estudam a temática desta pesquisa e desenvolver a construção de uma rede de pensamentos que articulam os saberes de fontes variadas.

2.4 Meu olhar sobre as pesquisas encontradas

Nesta revisão de literatura, tive o propósito de apresentar investigações que versassem sobre a utilização das tecnologias digitais (ou mídias digitais), relacionadas ao ensino e à aprendizagem de conteúdos da GEE, além da relação desses temas com a visualização de Figuras tridimensionais. Diante de todos os 17 trabalhos descritos nesta seção, tenho como motivação tecer algumas considerações sobre eles, elencando os principais aspectos destas pesquisas de uma forma geral e, dessa maneira, situando minha pesquisa nesse bojo.

Observo, em primeiro lugar, que a maioria das pesquisas aqui descritas usa um ou mais *softwares* para abordar conceitos da GE. Como a tecnologia avança abruptamente, surgem novos *softwares*, aplicativos e ambientes de aprendizagem a todo momento, a variedade de *softwares* pode ser explicada pelo momento em que a pesquisa foi desenvolvida ou, simplesmente, pela habilidade do pesquisador com o *software* escolhido. Posso elencar os *softwares* que foram utilizados nas investigações: *Geogebra*, *Wingon*, *Calques 3D*, *Poly*, *Cabri*, *Cubix Editor*, *Potter's Well* e *Origami nets*. Posso dizer que os computadores, *smartphones* e projetores multimídias, permitiram utilizar os *softwares*. Dos *softwares* aqui citados, o único utilizado na presente pesquisa foi o *Geogebra*, além de outras mídias não citadas pelos demais autores nesta seção.

Em relação ao referencial teórico ou constructo teórico adotado em cada uma das pesquisas dessa revisão de literatura, observo que existe a repetição de alguns, mas os que se

destacam são: construto seres-humanos-com-mídias, visualização espacial, registros de representação semiótica e sequência didática. Além dessas referências teóricas, também encontramos teoria do ciclo, nível de desenvolvimento geométrico e visualização, segundo os pressupostos de Arcadi. Observo que o construto seres-humanos-com-mídias e a visualização espacial também serão referenciais teóricos da minha pesquisa, que apresenta ainda as ideias de Lévy.

Todas as pesquisas são de cunho qualitativo, porém com abordagens diferentes, nas quais aparecem estudo de caso, levantamento bibliográfico, experimento de ensino, fenomenologia e análise documental. Tem-se, ainda, pesquisas realizadas com turmas do Ensino Médio; outras, com alunos do Ensino Fundamental; e ainda aquelas em curso de extensão para professores. A grande maioria mostra o desenvolvimento de algumas atividades com uma turma de instituição pública ou privada, previamente elaboradas e em um período curto de tempo (em média 12 horas/aula). Minha pesquisa se diferencia das demais, apesar de ser qualitativa. Foi desenvolvida com alunos do Ensino Superior, com 60 horas/aula, na qual propus o desenvolvimento de diversas atividades a partir da utilização de mídias digitais, inclusive, algumas elaboradas e solucionadas pelos próprios estudantes.

Em relação aos resultados das pesquisas aqui retratadas, posso descrever aqueles que me chamaram mais a atenção: o desconhecimento dos *softwares* utilizados pelos estudantes pode dificultar o desenvolvimento das atividades; é necessária formação continuada de professores em relação às TD para a educação; as investigações apontam para avanços em relação à visualização espacial e entendimento de conteúdos da GE; os *softwares* podem motivar a prática docente nas salas de aula, trazendo incentivo aos estudantes, atividades de exploração, criação de conjecturas, validação de hipóteses, construção, visualização, planificação, movimentação, observância de diversas representações, experimentação, dinamismo; podem ainda contribuir para a resolução de problemas e entendimento de conceitos da GEE e o uso de tecnologias. Por um outro lado o uso das TD, de forma isolada, não traz mudanças para a educação, sendo necessária a redefinição de conteúdos, métodos e papel do professor.

Nenhum dos trabalhos aqui encontrados utilizava a Pesquisa Baseada em Design (DBR) para o desenvolvimento metodológico. Eu tive os primeiros contatos com essa teoria nas aulas de metodologia cursadas em minha pós-graduação em nível de doutorado e percebi que as ideias embutidas nela poderiam dar suporte à minha investigação.

Conforme o objetivo geral, *investigar como as interações entre alunos e mídias promovem a reorganização do pensamento para a produção de conhecimento de conceitos da*

Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina da Graduação em Matemática, em tempos de pandemia e os objetivos específicos dessa investigação, não encontrei nenhuma investigação que tivesse alinhada com eles, principalmente pelo fato de a presente pesquisa acontecer em um período atípico, de isolamento social. Dessa maneira, esta pesquisa fica aqui situada perante as outras apresentadas nesta revisão.

3 REFERENCIAL TEÓRICO – REORGANIZANDO O PENSAMENTO A PARTIR DE UM OLHAR JÁ EXISTENTE NA PESQUISA ACADÊMICA

Para embasar as análises que serão desenvolvidas nesta pesquisa, procurei aprofundar os meus conhecimentos sobre as ideias de Lévy (1993; 1996; 1999; 2000; 2015), filósofo e sociólogo francês, no que tange ao entendimento do que é o virtual, das noções de ciberespaço, cibercultura e inteligência coletiva. Além disso, o construto seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2005) traz concepções para fundamentar esta tese, principalmente, em relação às noções de abordagem experimental com tecnologias. Por fim, realço a visão de alguns autores em relação à visualização e à Educação Matemática. A seguir, apresento um pouco dessas discussões.

3.1 Do Virtual à Inteligência Coletiva

Atualmente, usamos diversas vezes a seguinte indagação: vamos marcar uma reunião virtual? Devido a esse fato cotidiano, torna-se importante entender o que é virtualidade em um sentido mais amplo. Podemos dizer que virtual é aquilo que ocorre em um campo abstrato e que a ideia de ‘virtual’ se complexificou com a expansão da internet. Podemos considerar ainda que ela pode ser um prosseguimento da realidade, pois, logo após o acontecimento de um fato, e caso seja do interesse de um ser humano, ele pode continuar suas pesquisas relacionadas ao que ocorreu, utilizando um equipamento que a transmita (Lévy, 1996). Nesse sentido, a realidade e a virtualidade não são opostas, podendo ser uma a continuação da outra. Além disso, Schlemmer e Backes (2008, p. 523) apresentam a noção do metaverso, que consiste em

[...] uma tecnologia que se constitui no ciberespaço e se “materializa” por meio da criação de Mundos Digitais Virtuais em 3D (MDV3D), no qual diferentes espaços para o viver e conviver são representados em 3D, propiciando o surgimento dos “mundos paralelos” contemporâneos.

Em relação à invenção de um ambiente virtual, o metaverso parece estar relacionado com as ideias de Lévy (1996), quando diz que o mundo virtual não se opõe ao mundo real e sim, trata-se de uma extensão desse mundo real. Nesse sentido, o metaverso surge para proporcionar uma forma de dar continuidade às interações sociais, sem substituir o mundo real.

Como trouxe um exemplo dos mundos digitais virtuais, esclareço que o *Role Playing Game* (RPG) pode ser um exemplo de mundo virtual não digital, pois é um jogo de “representação de papéis, onde a cooperação e a criatividade são seus principais elementos”

(Grando; Tarouco, 2008, p. 3). Neste caso, os jogadores assumem papéis em um mundo fictício, representando um personagem, um espaço imaginário e simbólico que só existe no contexto do jogo. Essa experiência oferece uma forma de mundo digital analógico, no qual a imaginação e a interação social moldam a experiência coletiva, mesmo que não haja componentes digitais envolvidos.

De acordo com Lévy (1996), a palavra ‘virtual’ vem do latim, *virtuales*, de *virtus* e significa potência ou, surgimento de uma potencialidade do ser. Sendo assim, o sentido de virtual, desde a sua origem, ocorre em um campo mais abstrato do que concreto. Podemos entender por significação virtual as nossas concepções sobre coisas reais ou materiais. Quando estamos dizendo sobre os nossos pensamentos (concepções), podemos considerar esse campo abstrato.

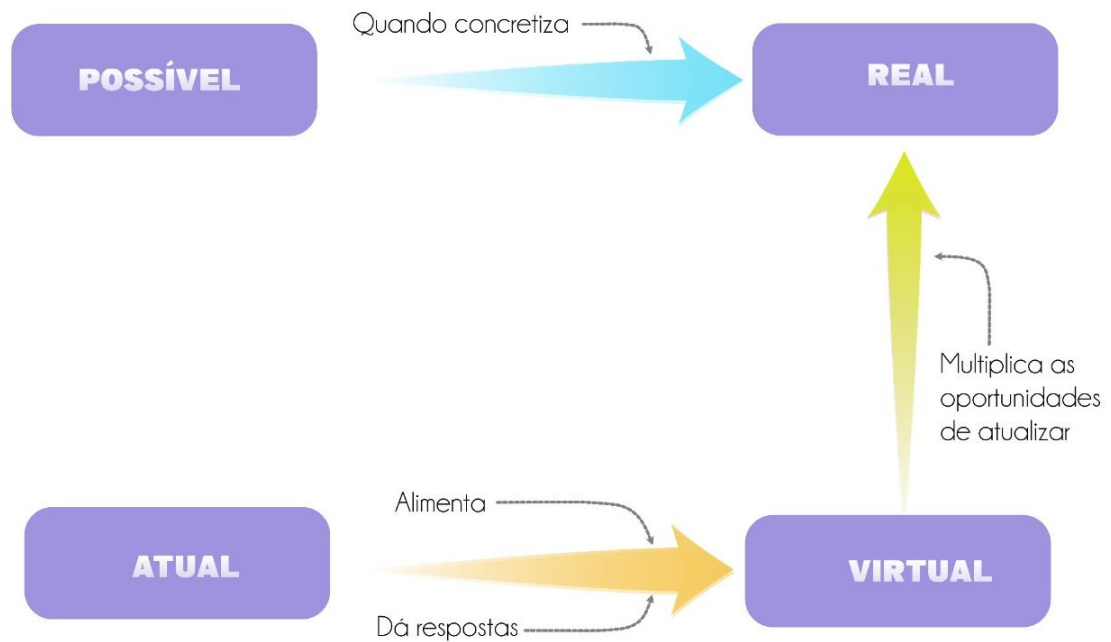
O virtual não é o oposto do real, como pode ser enganosamente pensado e, então, Lévy (1996) considera que o virtual se contrapõe ao atual, pois, tende a atualizar-se a todo momento, sem obter uma concretização definitiva. Essa atualização do virtual está relacionada à quantidade de informações que vai alimentar o mundo virtual instantaneamente. Além disso, para esse autor, o virtual se diferencia do possível. O possível é passível de se transformar em real a qualquer instante, conforme novas ações aconteçam, enquanto o virtual sofre atualizações a partir da criatividade, constantemente. Nesse sentido,

Contrariamente ao possível, estático e já constituído, o virtual é como o complexo problemático, o nó de tendências ou de forças que acompanha uma situação, um acontecimento, um objeto ou uma entidade qualquer, e que chama um processo de resolução: a atualização (Lévy, 1996, p.16).

Sendo assim, o virtual pode ser entendido como uma potência que se atualiza através do tempo. Ademais, de acordo com Lévy (1996), os pares que se opõem são real-possível e virtual-atual. A atualização alimenta o virtual e, portanto, o atual dá respostas ao virtual. Além disso, a virtualização está relacionada com o desprendimento do aqui e agora, pois o virtual normalmente “não está presente”. (Lévy, 1996, p. 19).

Para Lévy (1996) o virtual pode ser considerado a realidade das interpretações da mente de um ser humano e as relações que estas interpretações podem vir a estabelecer. O atual pode concretizar o virtual, enquanto o real tende a concretizar aquilo que é possível. Logo, o virtual parte da subjetividade, como algo que pode vir a se realizar, apesar de já existir, mesmo antes de se concretizar. A Figura 1 apresenta uma visão geral destes termos.

Figura 1 - Apresentação dos termos: real/possível; virtual/atual



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Para exemplificar, podemos supor um estudante que acabou de aprender um conteúdo de Geometria Euclidiana Espacial (GEE) em uma sala de aula de ensino na modalidade remota, com o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica. Ao pensar virtualmente naquilo que acabou de estudar ou, por outro lado, ao estar em um ambiente virtual, ele quer tornar atual aquilo que já faz parte da sua realidade na subjetividade da sua mente.

Nesse sentido, a tecnologia se entrelaça com os assuntos estudados relacionados à Educação Matemática (EM), devido às interações realizadas entre estudantes e os *softwares*, fazendo com que o estudante pense de uma nova maneira, diferente das aulas tradicionais³, ou seja, reorganize o seu pensamento em relação aos conteúdos vistos.

Entretanto, segundo Deleuze (1968), aquilo que é atual, é cercado por nuvens de virtualidades, sendo essas capazes de criar virtualidades. Para esse autor, a virtualidade é o campo tanto das incertezas quanto da criação. O virtual escapa ao entendimento e à conceituação e tem a potência como a sua principal característica. A virtualidade é imprevisível e, por isso, está relacionada à criatividade.

³ Nesta pesquisa, considero aulas tradicionais aquelas nas quais o professor é o centro. Ele utiliza o quadro negro para transmitir o conhecimento para os estudantes. Em seguida pede para que seja feita uma lista de exercícios.

O virtual tem ligação com o sentido de “estar junto”, endereçando à humanização, ao saber coletivo, a quem ouve e a quem recebe a mensagem. Isso tudo provoca uma preocupação com a forma de entender uma determinada informação e organizá-la para que o(s) outro(s) possa(m) compreendê-la também.

Nesse sentido, o computador, a internet, os *softwares*, têm modificado as formas de comunicação para além da oralidade e da escrita, ou seja, a informática passa a ser vista como uma nova tecnologia da inteligência (Lévy, 1993) e as formas de comunicação e expressão tornam-se inovadoras nesse contexto.

Ainda, de acordo com Lévy (1996), a virtualização é uma mutação em curso que se expande e que pode ser caracterizada como a busca pelo âmagô da hominização⁴. Dessa forma, a virtualização está relacionada ao conceito antropológico de evolução do ser humano, levando-se em conta os seus conhecimentos e a sua maneira de agir no mundo.

Segundo Baldanza (2006), o mundo virtual permite diversas possibilidades de criação e várias maneiras de experimentação, assim como no mundo real, que inclui as três condições que o caracterizam enquanto virtual, de acordo com tudo aquilo que é irreal: o falso, o ilusório e o imaginário. Além disso, é importante dizer que a distância física pode dificultar o contato no mundo real, enquanto no mundo virtual essas longitudes passam a não existir, favorecendo os diálogos em tempos reais nos espaços interconectados possibilitados pelo mundo informatizado. Este mundo virtual, apresentado por Baldanza (2006), foge à ideia pura do que é o virtual e aborda os espaços onde ele ocorre.

Para Lévy (1996, p. 17), “o real assemelha-se ao possível: em troca, o atual em nada se assemelha ao virtual: responde-lhe”. Como estamos sempre mudando, no sentido de nos atualizarmos, o virtual responde ao atual quando problematiza, gera conflitos e implementa empregos ao criar programas, como aplicativos utilizados nos celulares, que atendem às necessidades e demandas que vão surgindo a todo momento e tornam-se complexas a cada dia. Sob outra perspectiva, as TD prejudicam a sociedade quando eliminam empregos em bancos, escolas, restaurantes, comércios, indústrias e ao trocarem cargos que antes eram exercidos por homens, por máquinas.

Por outro lado, o virtual e as TD têm se destacado com o advento da tecnologia, pois ajudam com as pesquisas para entendimento de assuntos pertinentes ao trabalho, entretenimento, participam de diversas formas para a educação das pessoas, oferecendo

⁴ Segundo o dicionário Aurélio, a hominização é o processo evolutivo de criação, evolução biológica, fisiológica, psíquica, que nos distingue de outros animais.

informações, dentre outras possibilidades de visualização de objetos, a partir da utilização de *softwares* ou aplicativos, contribuindo para a evolução da humanidade. Nesse sentido:

A virtualização passa de uma solução dada a um (outro) problema. Ela transforma a atualidade inicial em caso particular de uma problemática mais geral, sobre a qual passa a ser colocada a ênfase ontológica. Com isso, a virtualização fluidifica as distinções instituídas, aumenta os graus de liberdade, cria um vazio motor. Se a virtualização fosse apenas a passagem de uma realidade a um conjunto de possíveis, seria desrealizante. Mas ela implica a mesma quantidade de irreversibilidade em seus efeitos, de indeterminação em seu processo e de invenção em seu esforço quanto a atualização. A virtualização é um dos principais vetores da criação da realidade. (Lévy, 1996, p. 18).

A atualização busca problematizar o que ocorre no real e no atual e, por isso, é vetor da virtualização. No entanto, considerando que a internet, estando inserida no mundo virtual, é liberada para o uso de grande parte da população mundial, torna-se necessário complexificar tal acessibilidade para criar filtros que indisponibilizem aquilo que não pode e/ou não deve ser usado por um determinado grupo de pessoas, tais como sites de conteúdos impróprios para crianças, por exemplo.

Na virtualização, “a sincronização substitui a unidade de lugar, e a interconexão, a unidade de tempo” e, além disso, “quando uma pessoa, uma coletividade, um ato, uma informação se virtualizam, eles se tornam ‘não-presentes’, se desterritorializam” (Lévy, 1996, p. 21). A experiência da virtualização nos permite ser várias coisas simultaneamente, exatamente por estarmos atrás de uma máquina, seja ela um computador, um *laptop*, um celular, dentre outros. Podemos dizer também que o lugar geográfico no qual nos encontramos nada influencia nos aspectos da virtualização.

Ainda em relação ao virtual, Lévy (1999, p. 47) afirma que “é virtual toda entidade ‘desterritorializada’, capaz de gerar diversas manifestações concretas entre diferentes momentos e locais determinados sem, contudo, estar ela mesma presa em um lugar ou tempo em particular”, quando transpassa o seu entendimento de filosófico para contemporâneo, ou seja, Lévy (1999) apresenta as ideias de virtual em um outro momento; nesse caso, em um livro mais moderno.

Sendo assim, passamos por um processo de mutação do espaço-tempo e, em relação ao tempo, “a invenção de novas velocidades é o primeiro grau da virtualização” (Lévy, 1996, p.23). Essa velocidade pode ser percebida pela aceleração da comunicação. Como exemplo, podemos citar o aplicativo *Whatsapp*, que traz a possibilidade de acelerar as mensagens de texto, de voz e de vídeo, ocorrendo em tempo real, ou seja, de forma síncrona. Além disso, no

seu entendimento contemporâneo, Lévy (1999, p. 81) considera que “o virtual não ‘substitui’ o ‘real’, ele multiplica as oportunidades para atualizá-lo”.

Bauman (2004, p. 13) afirma que “as relações virtuais... estabelecem o padrão que orienta todos os outros relacionamentos”. Para esse autor, as relações virtuais passam a servir de modelo para os relacionamentos reais da era pós-moderna. Segundo Nicolaci-da-Costa (2005), diferentes tecnologias digitais interativas permitem diversos tipos de contatos interpessoais à distância em tempo real. Dimantas (2003) considera que, através da internet, as pessoas descobrem e inventam novas formas de compartilhar rapidamente o conhecimento. Em obra posterior, Dimantas (2017, p. 18) considera que “participar da rede não é um ato efêmero. A forma de participação é real como a vida, pois o virtual envolve o cotidiano. A internet é mais lugar que ferramenta, que um ambiente”.

Na prática, na contemporaneidade, esse virtual ocorre em um outro espaço, podendo ser em nossas memórias ou em outro local. Lévy (1999) define “o ciberespaço como o espaço de comunicação aberto pela interconexão mundial dos computadores e das memórias dos computadores” (Lévy, 1999, p. 85). Percebo que o autor considera o ciberespaço como o espaço onde a comunicação se dá de forma virtual e que tem como infraestrutura a internet.

Com o advento da internet, os seres humanos mudaram as suas práticas. Portanto, Lévy (1999) considera que a cibercultura envolve as modificações ocorridas nos atos das pessoas quando se encontram no ciberespaço. A internet nos proporciona uma infinidade de práticas que possibilita a troca de informações e, com isso, propicia o aumento do conhecimento de cada ser. Nesse sentido, cada pessoa pode contribuir para o alargamento da cognição, o que, para Lévy (2015), é denominado inteligência coletiva, o qual será discutido mais detalhadamente nesta seção.

Ainda em relação à internet, Lévy (1999, p. 91) comenta sobre “a facilidade de acesso, do tempo real, do caráter interativo, participativo, impertinente e lúdico”. Essas qualidades fazem com que os indivíduos a utilizem cada vez mais. E complementa:

Essa midiateca é povoada, mundial e aumenta constantemente. Ela contém o equivalente a livros, discos, programas de rádios, revistas, jornais, folhetos, curriculum vitae, videogames, espaços de discussão e de encontros, mercados, tudo isso interligado, vivo, fluido (Lévy, 1999, p. 91-92).

Posso citar como exemplos de espaços de discussão e de encontros os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA). O *Google Meet* foi amplamente utilizado para encontros e discussões durante o período de pandemia da COVID-19, assim como o *Google Classroom*,

além de outros ambientes, para momentos orais ou de textos escritos, com potencial para envio de arquivos e apresentação de vídeos.

As redes de computadores são consideradas o mais eficiente dos recursos disponíveis no mundo contemporâneo por gerir o desenvolvimento do conhecimento e resguardar a memória coletiva, sempre que possibilita as interações sociais no ciberespaço.

O termo “ciberespaço”⁵ foi criado por Willian Gibson, em 1984, em seu romance “Neuromante”, e tinha como significado o universo das redes digitais. O vocábulo passou a ser rapidamente “retomado pelos usuários e criadores das redes digitais” (Lévy, 1999, p. 92). Para Lévy (1999), o ciberespaço se “tornará o principal canal de comunicação e suporte de memória da humanidade a partir do início do próximo século” (Lévy, 1999, p. 93). Apesar de estar falando da comunicação nas redes digitais no século XX, o autor, em parte, já vivia e, previa o que ocorre hoje, no século XXI, ou seja, um grande avanço em relação às comunicações no ciberespaço.

De acordo com Lévy (1999, p. 93) “uma das principais funções do ciberespaço é o acesso à distância aos diversos recursos de um computador”, ou seja, podemos usar um computador pessoal e nos conectar a um computador mais potente em outro lugar do mundo para desenvolver cálculos específicos, acessar diversos bancos de dados ou a memória desse computador, desde que esses conteúdos estejam disponíveis em algum lugar do ciberespaço. Além disso, qualquer informação pública que estiver no ciberespaço, encontrar-se-á disponível para aquelas pessoas que tenham interesse em buscá-la. Sendo assim,

torna-se possível, então, que comunidades dispersas possam comunicar-se por meio de compartilhamento de uma telememória na qual cada membro lê e escreve, qualquer que seja sua posição geográfica (Lévy, 1999, p. 94).

O ciberespaço descrito por Lévy (1999) existe até os dias atuais, porém com uma abrangência maior, ou seja, “o mundo está mais conectado e a vida virtual já é uma grande realidade presente na vida da maioria das pessoas” (Silva; Fernandes, 2022, p. 221). Segundo Silva e Fernandes (2022, p. 214) o ciberespaço é o território cibernético, ou seja,

a internet é um território abstrato sustentável denominado ciberespaço composto por redes que são sustentadas por atores e conexões que consistem na dinâmica de troca de informações, caracterizando um espaço democrático de relações e manifestações de expressão particulares e coletivas. Portanto o território cibernético propriamente dito.

⁵ Original da Língua Inglesa, “cyberspace”.

Além de podermos copiar diversos arquivos que se encontram a distância, também conseguimos instalar programas que podem ser envolventes para o desenvolvimento de conhecimentos do nosso interesse em nossos computadores. No ciberespaço, a transferência de arquivos permite uma distribuição acelerada de programas que podem aperfeiçoar o seu funcionamento. Segundo Lévy (1999, p. 94), “foi assim que grande parte dos programas que otimizam a comunicação entre computadores e a pesquisa de informações no ciberespaço disseminaram-se”.

Em relação aos correios eletrônicos, denominados *e-mails*, Lévy (1999, p. 95) adverte que, naquele momento, as mensagens eram textos, mas fala em serem “cada vez mais multimodais⁶ no futuro”. Ele comenta, ainda, que as pessoas precisavam “enfrentar aquilo que os cibernautas⁷ chamam de *flame*, ou seja, um bombardeio de mensagens que chegam de todas as partes do mundo” (Lévy, 1999, p. 98).

Acredito que, por estar em um país de primeiro mundo⁸, há duas décadas, Lévy já apontava para os meios de comunicação com várias representações diferentes, além do recebimento de diversas mensagens que, naquele tempo, ocorriam por *e-mails* e que hoje, aumentaram com as novas representações por ele citadas e que chegam, além dos *e-mails*, através do *Whatsapp*. Esse aplicativo, que foi lançado em janeiro de 2009 pelo americano Brian Acton e o ucraniano Jan Koum (Lopes; Vas, 2016), faz parte da comunicação da maioria da população brasileira atualmente, considerando que as mensagens são trocadas instantaneamente, podendo conter textos, fotos, imagens sonoras e vídeos.

Lévy (1999, p. 101) define *groupware* como “os programas e sistemas a serviço do trabalho cooperativo”. Estes grupos permitem que o trabalho seja organizado de formas diferentes, além de tornar possível a exploração de diversos recursos, do acesso ocorrer à distância e dos *downloads* (transferências) de arquivos. Considerando o hipertexto como exemplo de um *groupware*, Lévy (1999, p. 100-101) diz que

⁶ Segundo o Dicionário Aurélio de Português, multimodal é aquilo que se realiza ou contém muitos modos; de várias formas, feitos; multimodo; que contém simultaneamente vários meios de comunicação.

⁷ Segundo o Glossário da Sociedade da Informação – APDSI, o cibernauta é a pessoa que “navega” pelo ciberespaço, mais especificamente pela internet.

⁸ Em <https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/primeiro-segundo-terceiro-mundo.htm>, “são considerados desse grupo os países que possuem características comuns, como economias fortalecidas, altos índices de industrialização, elevado nível tecnológico, além de suas populações apresentarem indicadores sociais elevados, tais como boa qualidade de vida, bons rendimentos, baixos níveis de analfabetismo, boa expectativa de vida, entre outros. Os países que compõem esse grupo são: Canadá, Estados Unidos, Europa Ocidental, Japão e Austrália. Atualmente, esse grupo é conhecido como ‘desenvolvido’”.

Germinante, ramificante, bifurcante, rizoma dinâmico que exprime um saber plural em construção, acolhendo a memória múltipla e multiplamente interpretada de um coletivo, permitindo navegações em sentidos transversais, o hipertexto só desdobra todas suas qualidades quando imersos no ciberespaço.

Para Lévy (1996) o hipertexto consiste em um texto não linear, estruturado em rede e que pode ser composto, em partes, por palavras, mas também por imagens e links que transportam o leitor para outro lugar, contendo mais informações sobre o texto. Possui como características a imutabilidade, a flexibilidade, a precisão, a interatividade e a inteligibilidade. Nesse sentido, porém, atualmente, posso considerar que alguns trabalhos enviados via plataforma *Google Classroom* podem ser hipertextos, ou seja, os hipertextos continuam existindo e sendo utilizados na educação.

Voltando às ideias de ciberespaço e comunicação, Lévy (1999, p. 104) considera que “o ciberespaço permite a combinação de vários modos de comunicação” e ainda complementa:

Podemos estender a noção de comunicação através de mundo virtual compartilhado a outros sistemas além daqueles que simulam uma interação no centro de um universo físico tridimensional “realista” cujo aspecto visual é calculado de acordo com as leis da perspectiva (Lévy, 1999, p. 105).

Nesse sentido, as realidades virtuais tornam-se, a todo momento, mídias de comunicação que permitem que as pessoas, independentemente de onde estejam, possam alimentar uma base de dados por gestos e ter, como retorno, informações sensoriais. Cada mudança realizada em uma base de dados pode ser sentida pela comunidade que tenha interesse àquela base. Para grupos de estudantes que fazem parte de uma comunidade, denominada classe de ensino remoto, os membros podem trocar informações por meio de plataformas de ensino, ambientes virtuais de aprendizagem, sala de aula virtual, além de fazer pesquisas no ciberespaço em grupos ou individualmente, e conseguem comunicar com outros colegas pensamentos das suas pesquisas e o desenvolvimento de seus estudos, com diversas representações diferentes.

Voltando à pergunta inicial desse texto, “vamos marcar uma reunião virtual?” e, diante de tudo que foi dito anteriormente, entendo que o virtual não é algo que não existe; na verdade, existe e está presente no ciberespaço. Além disso, as reuniões virtuais são reuniões reais compostas por duas ou mais pessoas sendo necessária para tanto, apenas a internet e algum aparelho ou dispositivo que a suporte. Sabemos que a internet modificou grandiosamente as nossas vidas, ou seja, as vidas dos sujeitos que não nasceram juntos com ela, mas daqueles que

participaram da mudança advinda das novas condições surgidas com a sua criação e disseminação.

A utilização da internet propicia maior acesso à comunicação e condiciona a cognição, pois cada um em sua casa, em seu país, pode contribuir com a produção de conhecimento, trazendo suas ideias, informações e propiciando que trocas sejam realizadas, formando, então, a inteligência coletiva, que é assim definida por Lévy (2015, p. 26):

É uma inteligência distribuída por toda parte, incessantemente valorizada, coordenada em tempo real, que resulta em uma mobilização efetiva das competências. [...] a base e o objetivo da inteligência coletiva são o reconhecimento e o enriquecimento mútuos das pessoas, e não o culto de comunidades fetichizadas ou hipostasiadas.

É distribuída por toda parte porque cada um, onde esteja em um dado momento, sabe alguma coisa e pode contribuir com a produção de conhecimento no ciberespaço e, assim, torna-se incessantemente valorizada. Todos aqueles que tiverem acesso e disposição podem participar da produção e troca de informações em tempo real ou assíncrono. Assim, a internet busca o reconhecimento das habilidades de cada ser humano, os quais serão organizados em inteligentes coletivos que utilizam as TD em favor da coletividade. Ela averigua valorizar os diversos saberes de um grupo, de acordo com o que cada indivíduo mais compreende.

Para Martino (2014), a inteligência coletiva é a possibilidade aberta através das tecnologias de rede para aumentar o conhecimento produzido de maneira social e coletiva. Segundo Lévy (2015), a inteligência coletiva é, sucintamente, o compartilhamento de funções cognitivas como a memória, a percepção e o aprendizado. Dessa maneira, Lévy (1999, p. 207) argumenta que:

É preciso compreender aqui a inteligência da educação, das faculdades de aprendizagem (aprender em conjunto e uns com os outros!), das competências adquiridas e colocadas em sinergia [...], das capacidades de inovar e de acolher a inovação. Mas é preciso também entender a inteligência no sentido de união e conformidade de sentimentos. A inteligência coletiva também pressupõe, portanto, capacidade de criar e de desenvolver a confiança, a aptidão para tecer laços. Ora, o ciberespaço oferece um poderoso suporte de inteligência coletiva, tanto em sua faceta cognitiva como em seu aspecto social.

Neste sentido, o ciberespaço pode ser considerado um novo espaço para que a Educação, em qualquer um dos seus níveis, aconteça de forma que as pessoas se encontrem em locais diferentes, podendo ocorrer uma discussão entre um grupo de alunos para responder uma questão, uma pesquisa em grupo ou individual, o encontro de uma turma de estudantes e seu

professor em ambiente virtual de aprendizagem, seja ela de estudantes e mídias formando um coletivo que pensam juntos, dentre outras várias possibilidades.

Para Martino (2014), o ciberespaço é considerado um espaço de interação elaborado no fluxo de dados digitais que são encontrados nas redes de computadores. Além disso, o autor considera que ele é virtual por não estar localizado no espaço, porém é real em suas ações e efeitos. Neste contexto, podemos considerar o ciberespaço um lugar virtual apropriado para interações reais, como um espaço para a aprendizagem acontecer.

Santos (2009, p. 5658) apresenta a educação *online*, em sintonia com a dinâmica do ciberespaço, como um fenômeno da cibercultura, que não é uma evolução das gerações da EaD, considerando “o potencial das mídias online como estruturantes de novas formas de pensamento, ou seja, como instrumentos culturais de aprendizagem, na mediação de novos processos tecnológicos, comunicacionais e pedagógicos, próprios da cibercultura”.

Corroboro Santos (2009), quando explica a cibercultura como o presente, sendo uma cultura que se estrutura pelas TD. Vivemos em um contexto em que a cibercultura está presente nas redes sociais, nas casas das pessoas, nas ruas, transformando a forma como vivia-se no último século.

Um bom exemplo para isso é em relação às compras realizadas dentro de casa, no computador, com a possibilidade de ver comentários de outras pessoas que realizaram aquela mesma compra e ter credibilidade ou não sobre o produto comprado, que pode ser uma passagem aérea, uma estadia em um hotel, itens de supermercado, eletrodomésticos, roupas, sapatos, entradas em eventos, dentre outros.

Segundo Santos (2009), essa mudança no ciberespaço tem como uma de suas características o movimento do faça-você-mesmo e considera que “a rede é a palavra de ordem no ciberespaço” (Santos, 2009, p. 5661). Para essa autora, cibercultura “diz respeito à simbiose homem e tecnologia digital em rede enquanto processo de interprodução ou de co-produção cultural” (Santos, 2009, p. 5663).

A cibercultura e o ciberespaço estão intimamente conectados, pois é no ciberespaço que essa nova cultura é vivenciada. E nesse sentido, a educação *online* ocorre no ciberespaço e é entendida por Santos (2009, p. 5663) como um fenômeno da cibercultura. Segundo ela, “a educação online é o conjunto de ações de ensino-aprendizagem ou atos de currículo mediados por interfaces digitais que potencializam práticas comunicacionais interativas e hipertextuais”.

Santos (2009) considerava que as TD mais comuns nas práticas de educação *online* eram os AVAs, as teleconferências e as videoconferências. Nos dias atuais, as videoconferências

podem acontecer em um número maior de lugares virtuais, como o *Google Meet*, o *Zoom*, o *Skype*, o *Microsoft Team*, dentre vários outros.

Os anos de 2020 e de 2021 foram momentos em que o ciberespaço se constituiu como o maior palco para a Educação, devido ao isolamento social causado pela pandemia COVID-19. Embora a informática, até aquele momento (final de 2019), aparecesse de forma muito tímida na Educação (Scheffer; Finn; Zeiser, 2021; Martins; Santos, 2021), durante esses dois anos, vivenciamos essa terceira forma das tecnologias da inteligência, bem próxima das salas de aula, já que o ensino ocorreu de forma remota. Vale ressaltar que as duas primeiras tecnologias da inteligência, a oralidade e a escrita, continuam presentes em nossas vidas.

Nesse sentido, uma extensão da memória modificou a linearidade do raciocínio, a partir de simulações, experimentações, além de uma nova linguagem que abrange a escrita, a oralidade, as imagens e a comunicação imediata, sendo ela, a informática (Borba; Villarreal, 2005; Lévy, 1993).

Voltando à inteligência coletiva e às formas de comunicação, segundo Lévy (2000), o tipo de interação a que ele chama “Todos e Todos”, é aquele que faz emergir a inteligência coletiva, pois os outros tipos, como o “Um e Um” não faz emergir um coletivo da comunicação, e a interação do tipo “Um e Todo” tem um centro transmissor e vários receptores.

Nesse caso, podemos trazer como exemplos para Todos e Todos, a internet; para Um e Um, o telefone; e, para Um e Todo, a televisão. E então, “do interior do espaço cibernético, encontramos uma variedade de ferramentas, de dispositivos, de tecnologias intelectuais” (Lévy, 2000, p. 14). O autor complementa que “há ainda os hipertextos, os multimídias interativos, simulações, mundos virtuais, dispositivos de telepresença” (Lévy, 2000, p.14). Tudo isso está direcionado para as interações do tipo Todos e Todos, porém, é essencial a dedicação de cada indivíduo que participa do coletivo, pois:

[...] *toda inteligência coletiva no mundo jamais irá prescindir da inteligência pessoal*, do esforço individual e do tempo necessário para aprender, pesquisar, avaliar, integrar-se às diversas comunidades, mesmo que virtuais. A rede jamais pensará em seu lugar e é melhor assim. (Lévy, 1999, p. 245, grifo do autor).

Nesse sentido, torna-se importante que cada indivíduo tenha o seu comprometimento com aquilo que busca estudar e compreender, pois não basta sentar-se em frente a um computador ou a uma tecnologia portátil (como *tablet*, celular, dentre outros), já que nada acontece sem um comprometimento individual.

Em relação aos meios de comunicação e a internet, essa partilha ocorre melhor quando aumentadas e transformadas por sistemas técnicos e externos ao organismo humano. Além disso, a inteligência coletiva só avança quando existe cooperação e competição ao mesmo tempo. Como exemplo, cita a comunidade científica que, ao trocar ideias, estão cooperando, já que podem contrastar pensamentos diferentes, o que considera competir, para produzir conhecimento. Do equilíbrio entre a cooperação e a competição, a inteligência coletiva torna-se cada vez mais presente em diversas ramificações dos afazeres da população do mundo. As tecnologias permitem que as pessoas lancem ideias e resolvam questões coletivamente.

No ambiente do ensino remoto, a ideia de coletivo pressupõe a cooperação de cada um dos seres humanos ali envolvidos, o uso de cada criatividade e a cognição individual, que são expostas quando existe a intenção na busca do saber e ainda, a possibilidade de cada um estar disposto a receber e se envolver com o diferente. Nesse contexto, a construção da inteligência coletiva no ciberespaço pode ser bem concebida.

No contexto desta investigação, os encontros síncronos realizados na plataforma virtual *Google Meet*, onde os estudantes podiam abrir as suas câmeras e microfones a qualquer momento, além de manifestarem os seus pensamentos e indagações no *chat* disponível na própria plataforma, o uso de mídias digitais, como o *Geogebra 3D*, os grupos de discussão para resolução de problemas ou elaboração de conteúdos em grupos ou, ainda, de produção de material para análise como parte da avaliação, por exemplo, foram momentos em que as discussões sobre Geometria Euclidiana Espacial ocorreram no ciberespaço. Seres humanos com cognições diferentes podem partilhar informações em um processo de aprendizagem colaborativa *online* (Borba; Malheiros; Amaral, 2011), em que todas essas interações originam uma ‘inteligência coletiva’.

A inteligência coletiva não surge com a internet, ela se desenvolve com a evolução da linguagem. Para Lévy (2015), a difusão do conhecimento encaminhou a disseminação das ideias mediante os discursos, a escrita e a imprensa. Em seguida, com o avanço das TD, vivemos em uma era inédita, onde o ciberespaço, com todo o seu potencial de acúmulo de informações, torna-se o mundo das ideias, permitindo a interconexão e, consequentemente, a onipresença⁹.

A estrutura de uma inteligência coletiva possibilita a criação do “Espaço do Saber” que, de acordo com Lévy (2015), inicia-se com as relações humanas, tendo como base alguns princípios éticos que buscam valorizar as competências e as modificações das diversas riquezas

⁹ Segundo o Dicionário Aurélio, a onipresença é a característica ou particularidade daquilo que é onipresente; que se encontra em muitos lugares.

de cada indivíduo em um meio coletivo, onde “cada um é reconhecido como uma pessoa inteira, não se vendo bloqueada em seus percursos de aprendizado por programas, pré-requisitos, classificações *a priori* ou preconceitos em relação aos saberes nóbéis ou ignóbeis”. (Lévy, 2015, p. 26). E ainda, complementa que o Espaço do Saber:

[...] é justamente essa realidade virtual, essa utopia já presente em manchas, em pontilhado, em potência em todo lugar onde os seres humanos sonham, pensam, agem juntos. [...] acolhe metamorfoses topológicas: cada intelectual ou imaginante coletivo nele abre planícies, poços, minas, novos céus. E em cada área se desenvolve uma qualidade de significações, uma maneira de significar. (Lévy, 2015, p. 141).

O Espaço do Saber valoriza aquilo que cada indivíduo traz em sua bagagem de cognição, considerando que cada ser tem alguma coisa para compartilhar com um coletivo. E, de acordo com a sua área de interesse, diversas possibilidades se abrem com a inteligência coletiva nesse espaço de trocas e aprendizagens, independente da área de atuação de cada ser no mundo. E, sendo assim, os cursos que ocorrem remotamente, tendo diversos momentos síncronos, tornam possível a criação de um Espaço do Saber, desde que exista “a valorização da construção de conhecimento pelo coletivo sem a diluição do individual [...] e que demanda que cada um assuma atitudes de colaboração” (Baier; Bicudo, 2013, p. 230-231).

A inteligência coletiva pode ser dividida em três tipos, de acordo com Lévy (2015): a técnica, a que lida com o mundo concreto e os objetos; a conceitual, que está relacionada ao conhecimento abstrato, como a Arte e a Matemática; e a emocional, que simboliza as relações entre os seres humanos e os seus sentimentos, voltada para o Direito, a Ética e a Moral.

Conforme essas inteligências disseminam-se no espaço cibernético, “o desenvolvimento de comunidades e redes sociais *on-line* é provavelmente um dos maiores acontecimentos dos últimos anos” (Lemos; Lévy, 2010, p. 101), ou seja, há cerca de quatorze anos, já estavam sendo observadas as várias possibilidades que as inteligências coletivas estavam alcançando. Nesse sentido, a forma como a sociedade se portava diante do mundo foi altamente modificada, principalmente pelos mais jovens. De acordo com Lemos e Lévy (2010, p. 101),

Os grupos de discussão, listas de difusão, *new groups*, *chat rooms*, mundos virtuais multiparticipantes (*Second Life*), *softwares* sociais (*Orkut*, *Facebook*), *blogs* e *microblogs*, jogos eletrônicos coletivos, redes sociais móveis (*mobile social networking*) têm um desenvolvimento espetacular, particularmente entre jovens gerações.

Qualquer grupo de pessoas que se relaciona dentro do ciberespaço passa a ser conhecido como uma comunidade virtual. Segundo Lemos e Lévy (2010, p. 103),

[...] uma comunidade virtual é definida pelos benefícios que provêm das relações entre seus usuários, sendo dois fatores fundamentais para o seu desenvolvimento e manutenção: a estrutura técnica da rede de computadores e a intenção de seus membros no tempo.

Nesse sentido, observamos que não adianta dispor de diversas ferramentas e recursos para um grupo de pessoas se não houver uma intencionalidade, isso diferencia uma comunidade mediada por computadores, que normalmente tem motivação para a sua caminhada, de uma agregação eletrônica. Conforme Lemos e Lévy (2010), existem as agregações eletrônicas comunitárias, nas quais existe divisão de emoções e compartilhamento de experiências pessoais; e, as agregações eletrônicas não-comunitárias, onde ocorrem trocas de informações e experiências, de maneira passageira e desterritorializada.

Diante disso, Lemos e Lévy (2010, p. 105) afirmam que “a tendência atual é que as organizações clássicas se tornem comunidades e redes sociais *on-line*”. Consequente a esse fato, esclarecem que boa parte dessas comunidades são “desterritorializadas e reúnem pessoas que se interessam pelos mesmos temas, paixões, projetos, objetos, posturas, ideias, etc., independentemente das fronteiras geográficas e institucionais”. Entendo, então, que as formas de proximidade no ciberespaço ocorrem de maneiras diferentes e as comunidades vão surgindo de acordo com os interesses dos membros que vão se reunindo para a sua formação.

Além disso, as ferramentas do ciberespaço são acessíveis, gratuitas e fáceis de utilizar para aqueles que possuem computador ou celular e acesso à internet, o que garante a migração de várias pessoas para esse espaço. E ainda “temos, pela primeira vez, a potência da mobilidade física acoplada à mobilidade informacional, isto é, a possibilidade de consumir, produzir e distribuir informação em deslocamento pelo espaço urbano” (Lemos; Lévy, 2010, p. 108).

Uma comunidade virtual, quando está organizada, torna-se referência pela sua riqueza em relação aos conhecimentos distribuídos, apresenta poder de ação e colaboração, tendo grande condição de se tornar “uma inteligência coletiva, isto é, uma fonte de conhecimento e de criatividade”. (Lemos; Lévy, 2010, p. 112).

Todas estas discussões de Lévy, em épocas diferentes, estão coerentes com a pesquisa aqui desenvolvida, já que abordam temas relacionados ao ensino remoto, das quais fazem parte

as aulas virtuais, as interações e a comunicação virtual no ciberespaço, além da inteligência coletiva vivenciada pelos membros da pesquisa.

Ao discorrer sobre as noções de virtual, ciberespaço, comunidades virtuais e inteligência coletiva, seguimos com a apresentação do construto teórico seres-humanos-com-mídias, sistematizado em 2005 por Borba e Villarreal, utilizando noções da inteligência coletiva de Lévy (2015), que também servirá de aporte teórico para essa pesquisa.

3.2 Construto teórico seres-humanos-com-mídias e a reorganização do pensamento matemático

As primeiras ideias do construto seres-humanos-com-mídias surgiram, a princípio, nos trabalhos desenvolvidos por Borba (1993; 1999) e, em seguida, substanciadas em Borba e Villarreal (2005). As bases teóricas do construto seres-humanos-com-mídias foram organizadas a partir dos estudos de Tikhomirov (1981) e de Lévy (1993).

O trabalho de Tikhomirov (1981) é influenciado pela teoria Vygotskyana da mediação e tem como base a teoria da atividade, abordando os computadores e a cognição. Já Lévy (1993), versa sobre as “tecnologias da inteligência”: oralidade, escrita e informática, que condicionam as ecologias cognitivas, as quais define como “o estudo das dimensões técnicas e coletivas da cognição”, além de abordar as ideias de virtual, ciberespaço, cibercultura e inteligência coletivas, comentadas na seção anterior.

Inspirado nesses estudos, Borba (1999) analisa as ideias dos autores e, por meio de discussões, novas organizações, aproximações e ampliações, associando-as à Educação Matemática, destaca o papel das mídias digitais no processo relacionado à compreensão de como ocorre a produção de conhecimento a partir da organização do pensamento de um coletivo entre humanos e não-humanos.

Tikhomirov (1981) defende a maneira de como os computadores afetam a cognição humana e como podem mudar a educação, sem ver os mesmos como substitutos dos seres humanos. Nesse sentido, o autor apresenta três teorias: a da substituição, na qual os computadores substituem os seres humanos; a da suplementação, na qual o computador complementa o ser humano; e a da reorganização, que sustenta que o computador regula a atividade humana, além de apresentar diferenças em relação à linguagem.

De acordo com essas teorias, Tikhomirov (1981) não considera que os computadores sejam apenas um suplemento para os seres humanos, visto que, se assim fosse, estaria

considerando apenas uma visão de apoio quantitativa aos humanos, e não levando em conta o aparato qualitativo de como os computadores podem influenciar a atividade humana (Borba; Villarreal, 2005).

Na verdade, Tikhomirov (1981) entende que o foco é ver o computador como uma tecnologia que pode mediar a atividade humana, fazendo surgir um novo estágio de pensamento. Trata-se da reorganização do pensamento, a terceira teoria.

Em relação à esta última teoria, Tikhomirov (1981) acredita que ela se dá em função das possibilidades oferecidas por determinados aspectos das tecnologias, que promove mudanças nas normas do saber. Essa reorganização irá acontecer nos processos de criação, busca e armazenamento de informação, além de ocorrer também nas relações humanas.

Segundo Gracias (2003, p. 57), “a reorganização do pensamento está associada a um estágio de pensamento qualitativamente diferente em função das novas possibilidades oferecidas pelo computador. Neste sentido, o pensamento é exercido por sistemas ser-humano-computador”. Sendo assim, quando utilizamos mídias diferentes e diversificadas em nossas aulas de Matemática, podemos promover uma reorganização do pensamento para a construção de conhecimentos.

Nesse viés, a informática torna-se uma nova extensão da memória, que possui diferenças qualitativas quando comparadas a outras tecnologias da inteligência e “permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma ‘nova linguagem’ que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea” (Borba; Penteado, 2001, p. 48).

Uma das ideias, presente na concepção de seres-humanos-com-mídias, que vai reforçar o desenvolvimento e o olhar dessa pesquisa, é a noção da moldagem recíproca (Borba, 1993; 1999). Essa noção elucida que a mídia molda o ser humano e o ser humano molda a mídia. Como exemplo, podemos dizer que a moldagem recíproca se refere a um processo circular em que o homem aprimora as mídias enquanto elas trazem mudanças para o ensino e a aprendizagem de Matemática, a partir dos *feedbacks* que são dados aos humanos.

Outro exemplo que podemos levar em consideração é que passamos a criar um grupo de *Whatsapp* no qual só existia um ser humano, nós mesmos, para enviarmos arquivos importantes que precisávamos ter guardados, por serem apenas de nosso interesse. Hoje, o *Whatsapp* passou a disponibilizar a possibilidade de enviarmos mensagens para nós mesmos. Nesse caso, estamos usando uma mídia para uma finalidade diferente daquela para a qual foi desenvolvida e criada, que é para a comunicação com outras pessoas e nesse sentido, moldamos uma mídia, ao mesmo tempo em que ela nos moldou, quando permitiu o envio de arquivos,

áudios, vídeos e fotografias para nós mesmos, de forma ágil e que, anteriormente à aparição desse recurso, ocorria mediante uso de e-mail. Neste caso, estamos utilizando o *Whatsapp* como arquivo próprio, ou seja, o *Whatsapp* passou por uma moldagem recíproca.

Além disso, o *Geogebra* também pode ser considerado um aplicativo que passou por moldagem recíproca quando os usuários sentiram a necessidade da expansão do aplicativo com a janela 3D em que só existia a possibilidade de visualizar sólidos geométricos de forma estática na janela 2D, na qual eram realizadas as construções, com algumas dificuldades.

Outra ideia em consonância com o desenvolvimento desta pesquisa, trata-se do fato de que a utilização de diversas mídias pode levar a matemáticas diferentes (Borba; Villarreal, 2005). As mídias, junto aos professores e alunos formam um coletivo pensante. Sendo assim, as mídias participam do processo de produção de conhecimento, de forma que a maneira com que o humano irá pensar dependerá da tecnologia que irá usar. Quando várias mídias são utilizadas, existem possibilidades de explorar, conjecturar, visualizar e pensar matematicamente de modos diferentes, especialmente, quando trata de figuras tridimensionais.

Borba e Villarreal (2005) propõem também a abordagem pedagógica experimental-com-tecnologias, a partir da qual entende-se que os computadores permitem fazer experimentações e formular conjecturas. Dessa forma, os estudantes podem testar hipóteses inicialmente elaboradas, no sentido de verificar se serão aceitas ou refutadas. Assim, permitem aos estudantes descobrirem resultados de natureza matemática que antes não eram possíveis sem a experimentação (ou demoraria muito tempo para isso); testar novas experimentações e repeti-las o quanto for necessário; e, além disso, conceber formas diferentes de aprender Matemática.

A experimentação com TD em Educação Matemática tem sido vista com bons olhos por alguns educadores matemáticos (Borba; Penteado, 2001; Moran, 2014; Santos; Santos; Javaroni, 2023). Nesse contexto, as TD ganham um papel fundamental quando são utilizadas nas experimentações matemáticas, com o uso de mídias digitais em aulas de Matemática em qualquer nível de ensino, percebidos como uma nova tendência que ocorre através das interações de humanos com computadores, celulares, *laptops*, tendo como principal ator as tecnologias relacionadas, em particular, a internet (Borba; Villarreal, 2005). Entretanto, segundo esses autores, um obstáculo em relação à experimentação com TD consiste no receio de que ela possa mudar uma metodologia que já parece estar bem estabelecida nas salas de aula de Matemática.

O construto seres-humanos-com-mídias também incorpora as ideias de visualização em Educação Matemática e dos ambientes computacionais. Nesse sentido, Borba e Villarreal

(2005) discutem como a visualização advinda das TD possibilitou transformações para a Educação Matemática, trazendo um estado da arte sobre o assunto, que contribui para o estudo realizado pelo fato de a pesquisa ter o olhar para um coletivo de alunos-com-mídias e professor pesquisador em relação à compreensão dos conteúdos de Geometria Euclidiana Espacial. Esse assunto será mais bem explorado na próxima subseção.

Por essa investigação estar pautada nas interações entre alunos do Ensino Superior e mídias digitais em relação à aprendizagem de conteúdos da Geometria Euclidiana Espacial, a seguir, discorrerei sobre a abordagem experimental com tecnologias, conforme apresentada por Borba e Villarreal (2005).

3.2.1 Abordagem experimental com tecnologias

Borba e Villarreal (2005, p. 78, tradução minha) acreditam que “o ensino tradicional tem o seu lugar e às vezes é a melhor maneira de inspirar o aprendizado”, mas consideram que existem outras formas de desenvolver essa tarefa. Uma maneira seria o aluno ler um livro didático e aprender após a discussão do texto lido com professores e colegas; outro meio é formar grupos entre os colegas para discussão, “principalmente com as oportunidades que a internet oferece para discussões virtuais coletivas” (Borba; Villarreal, 2005, p. 78, tradução minha). Também poderia ser uma abordagem experimental com tecnologia, como tem sido investigado nas pesquisas do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), na UNESP/Rio Claro.

Um exemplo de como ocorrem essas pesquisas pode ser descrito através do estudo de uma função com coeficientes desconhecidos em uma calculadora gráfica. Nesse contexto, os alunos podem “adivinhar, explorar, fazer adivinhações mais fundamentadas, construir conjecturas e discutir suas descobertas com colegas e o professor” (Borba; Villarreal, 2005, p. 78, tradução minha).

Além desse exemplo, com a utilização de *softwares* variados, cada um direcionado para algum conteúdo de matemática, os estudantes, em qualquer nível de ensino e em qualquer modalidade, seja presencial, híbrido, remoto ou EaD, podem explorar conhecimentos prévios, conjecturar sobre os propósitos da sua aprendizagem, formar coletivos pensantes com grupos

de colegas, receber *feedbacks* rápidos e trazer para a Educação Matemática a internet, já tão presente no dia a dia dos seres humanos, principalmente, dos nativos digitais¹⁰.

Dessa forma, Borba e Villarreal (2005) discutem como a experimentação pode ser vista na Matemática e no campo da Educação Matemática, expondo a maneira como ela pode variar a natureza do conhecimento produzido nas salas de aula de matemática. “A coordenação dos experimentos feitos com tabelas, gráficos e representações algébricas se tornou uma questão relevante na literatura que considera a expressão ‘representações múltiplas¹¹’ um ícone” (Borba; Villarreal, 2005, p. 79, tradução minha).

No contexto da Geometria em geral e, mais especificamente, da Geometria Euclidiana Espacial, as diversas representações fazem com que os estudantes possam olhar e refletir de várias formas diferentes para o seu objeto de estudo, como quando deseja-se planificar um sólido geométrico ou rotacionar uma figura plana em torno de um dos seus eixos, por exemplo. Além disso, Borba e Villarreal (2005, p. 81, tradução minha) acreditam que,

[...] a tecnologia tem um papel primordial em relação ao uso de experimentos em matemática, bem como em educação matemática. A matemática experimental, e o próprio rótulo, estão associados a uma tendência na matemática que está ganhando força devido aos computadores.

Porém, o receio de que a experimentação em Matemática possa desarticular uma metodologia já definida, referente àquela adotada nas aulas de Matemática, pode ser considerado o principal obstáculo para aqueles que relutam em utilizá-la em sala de aula. Fatores como a falta de formação continuada de professores também fazem com que a experimentação ainda apareça de forma tímida nas escolas e universidades (Pinto; Silva, 2016), em relação a conteúdos da Matemática.

No âmbito da Educação Matemática, Borba e Villarreal (2005) observam que, quando se associa a experimentação com os computadores, cria-se uma combinação que só vem expandindo com o passar do tempo e que isso não significa que as provas matemáticas realizadas nas salas de aula devam ser, de forma alguma, excluídas dos processos de ensino e de aprendizagem. Para eles, o que ocorre é afirmar que mais possibilidades surgem e podem se aliar ao que já tem sido feito. Além disso, “a experimentação deveria estar mais presente nas escolas porque lá os computadores estão mais disponíveis e a experimentação está em

¹⁰ Segundo o Dicionário Aurélio de Português, um nativo digital é aquele que nasceu e cresceu com as tecnologias digitais presentes em sua vivência.

¹¹ Entendo que representações múltiplas, em Matemática, são as diversas formas de apresentar um mesmo assunto, como figuras, tabelas, linguagem, *softwares*, livros didáticos, dentre outras.

ressonância com coletivos que envolvem a matemática” (Borba; Villarreal, 2005, p. 86, tradução minha).

Em relação aos sólidos geométricos, existem alguns *softwares* que tornam possível a formação de coletivos que envolvem os estudantes, onde o ciberespaço torna-se um laboratório para que o estudo com a utilização de alguma mídia promova a reorganização do pensamento e tome direção rumo à produção de conhecimento. Borba e Villarreal (2005, p. 86, tradução minha) afirmam que,

O uso de dispositivos como os projetados por Nemirovsky (Nemirovsky e Noble, 1997), o uso de softwares geométricos como LOGO, Cabri, Sketchpad ou Geometricks, os sistemas algébricos de computador como Maple, Derive, Mathematica, a calculadora gráfica ou o os chamados micromundos (Noss e Hoyles, 1996; Noss, Healy e Hoyles, 1997) geram ambientes que podem ser considerados laboratórios onde são realizados experimentos matemáticos, considerando a experimentação no sentido amplo que falamos.

Porém, experimentar com tecnologias não significa usar de forma mecânica uma ferramenta como uma calculadora ou um computador, pode ir além disso. Segundo Borba e Villarreal (2005, p. 86, tradução minha) “apenas apertar as teclas pode não ser uma atividade de aprendizado muito nobre, assim como copiar no meio papel e lápis e apenas memorizar no meio oral podem não ser atividades muito educacionais”.

Lévy (1993) defende que diferentes mídias são diferentes formas de extensão da memória, apesar de uma mídia não substituir a outra. Enfim, pressionar teclas ou copiar algo em um papel com lápis pode ser mecânico ou uma forma de direcionar o pensamento para a elaboração de uma demonstração, ou interferir na forma como o indivíduo dará uma solução para uma determinada questão relacionada com aquilo que está estudando. De acordo com Borba e Villarreal (2005, p. 87, tradução minha),

O pressionamento de teclas em um ambiente de experimentação pode estar associado à geração de conjecturas, à coordenação de múltiplas representações, a ‘provas’ e a um novo tipo de características experimentais e errôneas do que decidimos chamar de abordagem experimental com tecnologia.

Para Borba e Villarreal (2005), as pesquisas que foram realizadas pelo GPIMEM indicam que a tecnologia tem grande importância para a Educação Matemática quando está aliada com uma abordagem experimental. E, para esses autores, uma abordagem experimental em Educação Matemática envolve:

[...] o uso de procedimentos experimentais e tentativas educadas que apoiam a geração de conjecturas matemáticas; a descoberta de resultados matemáticos até então desconhecidos do experimentador; a possibilidade de testar formas alternativas de obter um resultado; a chance de propor novos experimentos; uma maneira diferente de aprender matemática”. (Borba; Villarreal, 2005, p. 89, tradução minha).

Quando a tecnologia passa a fazer parte dessa abordagem ela fica mais forte e pode oferecer:

[...] a possibilidade de testar uma conjectura usando um grande número de exemplos e a chance de repetição dos experimentos, devido ao *feedback* rápido dado por computadores; a chance de obter diferentes tipos de representações de uma dada situação com mais facilidade; forma de aprender matemática que está de acordo com a modelagem como abordagem pedagógica. (Borba; Villarreal, 2005, p. 89-90, tradução minha).

Os *feedbacks* são rápidos quando se utiliza um *software* ou a internet, principalmente aqueles relacionados à oralidade e a aspectos visuais. “Os diferentes tipos de *feedback* estão intimamente ligados às diferentes *interfaces* que a tecnologia de computador oferece” (Borba; Villarreal, 2005, p. 90, tradução minha). Esse é um aspecto importante em relação à utilização de computadores nas salas de aula de Matemática e, dessa forma, escolher programas nos computadores em que a *interface* propicia uma familiaridade com os coletivos ali envolvidos torna a experimentação com tecnologias em Educação Matemática algo prazeroso e motivador.

Em relação às diferentes *interfaces*, Borba e Villarreal (2005) acreditam que elas poderiam reavivar os debates sobre representações múltiplas, que podem ser pensadas como experimentos com tabelas, gráficos e representações algébricas. Por um outro lado, os monitores dos computadores ampliaram o *feedback* visual. Nesse sentido, tanto as várias representações, assim como os *feedbacks* rápidos podem contribuir para o ensino de Geometria. Os autores evidenciam:

Acreditamos que a tecnologia da computação e suas diferentes interfaces estão mudando a natureza dos sentidos que usamos para nos comunicarmos em uma unidade de humanos com mídias. Se vemos nosso próprio corpo-mente como interfaces, podemos propor que parte da reorganização do pensamento tem a ver com diferentes combinações de interfaces humanas e de computador, e que cada uma dessas ‘atrizes’ se constitui” (Borba; Villarreal, 2005, p. 92, tradução minha).

Diante do exposto, posso considerar que as oportunidades proporcionadas por diversas *interfaces* aumentaram as possibilidades de experimentação.

Além disso, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) apontam os meios que devem ser oferecidos naquelas atividades matemáticas que têm como princípio a noção de tecnologias, conforme o construto seres-humanos-com-mídias:

- criação e simulação de modelos matemáticos;
- geração de conjecturas matemáticas;
- exploração de diversificadas formas de resoluções;
- manipulação dinâmica de objetos construídos;
- realização de testes de conjecturas usando um grande número de exemplos, modificando representações de objetos, simulando componentes de construções, etc.;
- convencimento sobre a veracidade de conjecturas;
- elaboração de novos tipos de problemas e construções matemáticas;
- criação e conexão entre diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos;
- exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos;
- incentivo à combinação de raciocínios intuitivo, indutivo ou abdutivo, que podem contribuir ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo;
- criação de atividades matemáticas ‘abertas controladas’, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo;
- ensinar e aprender matemática de forma alternativa;
- compreensão de conceitos;
- conhecimento de novas dinâmicas, formas de conectividade e relação de poder em sala de aula;
- envolvimento com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita;
- criação de diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas;
- aprofundamento em variados níveis de rigor matemático;
- identificação de coerências conceituais e/ou aprimoramento do enunciado (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2018, p. 55-56).

Nesta pesquisa, busquei contemplar atividades que possuem características da experimentação com tecnologias, buscando sentido matemático para a produção de conhecimento, quando propicie a interação entre alunos e mídias em uma disciplina de Ensino Superior na modalidade remota.

É importante ressaltar aqui que, para a Educação Matemática e a Educação, em geral, o uso das TD em salas de aula estão relacionadas a aspectos pedagógicos e às políticas públicas, além da visão epistemológica que enfatiza que a produção do conhecimento se dá através da interação de atores humanos e não humanos (Borba; Villarreal, 2005).

Em relação às políticas públicas, “em junho de 2006, o projeto Um Computador por Aluno (UCA) foi lançado oficialmente” (Pontes; Castro Filho, 2013, p. 14). O projeto tinha como objetivo o acesso a estudantes das escolas públicas buscando intensificar o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), termo que continua sendo utilizado por alguns autores ainda hoje, dando um *laptop* para cada estudante. Neste contexto, em 2007,

foi realizado um projeto pré-piloto em cinco escolas públicas de estados diferentes e em 2010 foram selecionadas trezentas escolas públicas para fazerem parte do projeto piloto.

O projeto não funcionou devido à infraestrutura das escolas, ao despreparo dos docentes para o planejamento das atividades, assim como problemas nas configurações de computadores e acesso à internet. Borba e Lacerda (2015) propõem o projeto “Um Celular por Aluno”, buscando adicionar os celulares inteligentes com internet nas salas de aula da educação pública brasileira.

No entanto, apesar de o projeto ser proposto ao Ministério da Educação – MEC, em ação efetiva, não entrou em prática naquele período e nem posteriormente. Em 2020, devido à pandemia do COVID-19, a Educação Matemática aconteceu *online*, com os estudantes em seus domicílios e o acesso às tecnologias digitais se mostraram intimamente relacionadas com as desigualdades sociais nos lares das famílias brasileiras (Borba, 2021).

Apesar das TD se intensificarem nos anos 2020-2021, os aspetos pedagógicos não caminharam juntos com as demandas em ascensão. Segundo Borba (2021, p. 4), “o COVID-19 tem impulsionado a agenda da tendência da tecnologia digital na Educação Matemática”. Para este autor, os baixos salários dos professores contribuem para que eles não tenham os melhores celulares, laptops ou planos de internet. Ainda, observa-se a falta de tempo para planejamento de atividades remotas, além de que os professores que lecionam 50 aulas de 50 minutos por semana não têm tempo de aprender a utilizar as tecnologias digitais.

Todos esses problemas, que já ocorriam antes dos anos 2020-2021, intensificaram-se no período de pandemia, em que o ensino presencial foi transposto para o ensino remoto emergencial, medida adotada pelo governo em tempos de isolamento social, etapa em que esta investigação aconteceu.

Na fase pós-pandemia, ainda não existem propostas governamentais de formação continuada para professores de Matemática em relação às tecnologias digitais. Como conclui Vieira (2023), novos formatos e ferramentas para o Ensino surgem a todo instante e a preparação dos professores, além de sua formação continuada, tem ganhado evidência como aspecto essencial para a qualidade tanto do ensino, quanto do aprendizado.

Considera que a formação continuada de professores e o Ensino devem estar atrelados à prática, à teoria e à realidade, e aponta a importância do desenvolvimento de estudos que enfoquem a formação continuada dos professores, o uso de tecnologias e o ensino de matemática, buscando compreender como tem se desenvolvido essa dinâmica, principalmente em sala de aula. Pondero que os professores precisam aprender a utilizar as TD para ensinar os seus alunos; caso contrário, as TD não chegarão às aulas de matemática, em particular, às de GEE.

Friso aqui que experimentar tecnologias observando as interfaces visuais foi um importante aspecto para esta investigação e, sendo assim, na próxima subseção, discuto sobre a visualização e Educação Matemática.

3.3 Visualização e Educação Matemática

Em se tratando de conteúdos da Geometria Euclidiana Espacial, durante vários anos atrás, não era possível visualizar seus objetos por inteiro, sendo necessária a imaginação do estudante e/ou do professor para ajudar na sua compreensão. A princípio, com os materiais manipulativos e, em seguida, com o surgimento dos computadores, celulares, internet, *youtube* e diversos *softwares* e aplicativos, a visualização começou a aparecer nas pesquisas da Educação Matemática com maior ênfase.

Gutiérrez; Jaime e Fortuny (1991) ponderam que os termos visualização ou visualização espacial estavam sendo utilizados para investigações que tratavam da Geometria Tridimensional, tendo como elemento central as representações mentais dos objetos físicos feitas pelos humanos. Ainda, de acordo com Gutiérrez (1992, p. 20, tradução minha),

[...] o termo “visualização espacial” no contexto da Matemática se refere, portanto, a certas habilidades mentais que tem a ver com a aprendizagem da Matemática e que controlam a criação, transformação, transmissão e utilização das diferentes formas de representação dos conceitos matemáticos nas aulas (naturalmente, dentro desse conjunto de conceitos têm um papel de destaque os relativos à Geometria e, sobretudo, à Geometria Espacial).

Além disso, Gutiérrez (1996) considera que a visualização é composta de quatro elementos principais: as imagens mentais, as quais considera como qualquer tipo de representação de uma definição ou de uma propriedade matemática que inclui elementos visuais ou espaciais; as representações externas, que referem aos tipos de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, podendo ser figuras, desenhos, diagramas, dentre outros que facilitam a criação ou transformação de imagens mentais para a construção do raciocínio visual; o processo de visualização, que “é uma ação mental ou física onde as imagens mentais estão envolvidas” (Gutiérrez, 1996, p. 10, tradução minha) e podem ser classificados em interpretação visual de informações (onde são criadas as imagens mentais) e a interpretação de imagens mentais (onde são geradas as informações); e as habilidades visuais, onde considera que as principais são:

- “Percepção de figura base”: habilidade de identificar uma determinada figura isolando-a de um fundo complexo.
- “Constância perceptual”: habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes do tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer não confuso quando um objeto ou figura é percebida em diferentes orientações.
- “Rotação mental”: habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas para visualizar uma configuração em movimento.
- “Percepção de posições no espaço”: habilidade de relacionar um objeto, figura ou imagem mental consigo mesmo.
- “Percepção de relações espaciais”: habilidade de relacionar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros ou simultaneamente consigo mesmo.
- “Discriminação visual”: habilidade de comparar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles. (Gutiérrez, 1996a, p. 10, tradução minha).

Todas essas habilidades de visualizar objetos propiciam um desenvolvimento de hábitos e práticas que possibilitam aos estudantes uma autonomia crítica, um conhecimento significativo e uma capacidade criadora.

Além disso, Borba e Villarreal (2005) apresentam um estado da arte sobre a visualização, trazendo discussões do grupo do Internacional Congress on Educacion Mathematics – ICME-8, dentre outros autores, quando observada no contexto do ensino e da aprendizagem da Matemática, e afirmam que essa visualização tem a sua importância como fator relevante. Por isso, para a Educação Matemática,

- A visualização constitui uma forma alternativa de acessar o conhecimento matemático.
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e a representação visual pode transformar a compreensão em si mesma.
- A visualização é parte da atividade matemática e uma forma de resolver problemas.
- A tecnologia com interfaces visuais poderosas está presente nas escolas, e seu uso para o ensino e aprendizagem da matemática requer a compreensão dos processos visuais.
- Se o próprio conteúdo da matemática pode mudar devido aos computadores, como proposto por alguns matemáticos, está claro neste ponto que a matemática nas escolas passará por pelo menos algum tipo de mudança.
- Embora a prova seja vista como o caminho oficial para a verdade na matemática acadêmica, ela não deve necessariamente ser transposta para a sala de aula de matemática em todos os níveis escolares. (Borba; Villarreal, 2005, p. 110, tradução minha).

Essas considerações foram feitas em relação à visualização como um todo na Educação Matemática. Entendo que o computador e os ambientes de Geometria Dinâmica propiciam

habilidades, descritas por Borba e Villarreal (2005) para a aprendizagem de conteúdos da Geometria Euclidiana Espacial.

Nesse sentido, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) consideram que os recursos tecnológicos foram ganhando destaque na Educação Matemática por apresentarem características experimental e visual, as quais acentuam a dimensão heurística que inclui a produção de sentidos e a cognição matemática, e citam exemplos com o uso de TD:

1. Objetos matemáticos começaram a ser representados de maneira inédita (digital);
1. modelos matemáticos e algoritmos foram aprimorados com novas variáveis;
2. simulações expandiram seus limites devido à virtualidade, ao caráter visual, à multiplicidade representativa e aos recursos de experimentação;
3. construções matemáticas ganharam dinamicidade e simultaneidade devido às formas de dependência entre representações;
4. conjecturas foram exploradas ao seu limite experimental de modo a oferecer convencimento sobre sua veracidade e tornarem-se teoremas;
5. novos tipos de problemas e estratégias de resolução entraram em cena, etc. (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2018, p. 57).

Ao longo dos tempos, a visualização, principalmente em conteúdos geométricos, passa a fazer parte de um processo importante para a forma de pensar matemática. Segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018, p. 57), “a visualização envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial”. Dessa maneira, a formação de imagens faz com que possamos pensar matematicamente quando podemos representar imagens de diversas formas, comparando esses tipos diferentes de representação.

Nesse sentido, de acordo com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018), quando elaboramos uma aula ou uma atividade matemática na qual iremos utilizar tecnologias, devemos pensar em algo que tenha um *design* experimental. Quando utilizamos o *software Geogebra*, em particular, essa aula ou atividade deve explorar características visuais.

Zulatto (2007, p. 77) considera que, para a Educação Matemática, “a visualização tem valor pedagógico e está relacionada à compreensão dos estudantes, que pode se traduzir em representações internas ou externas, com ou sem uso de mídias”. As representações internas estão relacionadas ao pensamento, enquanto as representações externas envolvem o papel, o lápis, o computador, dentre outras possibilidades.

Para Borba e Villarreal (2005), pensamos ao mesmo tempo com as representações mentais e as externas, não havendo dicotomia entre elas. Aliadas a esses pensamentos estão as mídias digitais, que interagem com os seres humanos, formando coletivos pensantes. De acordo com Zulatto (2007), podemos recorrer às nossas memórias matemáticas, quando nos faltam as representações externas.

Com o uso de mídias digitais de modo expressivo em nossa sociedade, podemos considerar que as TD passam a fazer parte do cooperar em favor da visualização, por permitir diferentes representações com a utilização de *softwares* variados, principalmente em relação à Geometria.

Em conformidade com esta pesquisa, o fato de poder arrastar objetos, girar em 360 graus visualizando as diversas faces, arestas, vértices, permite o ganho de dinamicidade e de descobertas matemáticas a partir das explorações realizadas em um pequeno intervalo de tempo. Segundo Zulatto (2007, p. 79), “a possibilidade de arrastar torna esse ambiente potencialmente diferente do tradicional uso do lápis-e-papel”.

A exploração de objetos tridimensionais realizada pelos estudantes no desenrolar desta pesquisa nos sugere que a forma de olhar e de pensar torna-se fator relevante quando propusemos diversas formas de experimentar e observar as figuras espaciais com a utilização de mídias digitais, em especial, o *Geogebra* 3D, que propicia o olhar e o pensar nos objetos que estavam sendo observados.

A visualização de figuras espaciais, com a utilização de *software* dinâmico, pode contribuir com o nosso olhar para as atividades desenvolvidas pelos estudantes nesta pesquisa, tanto na produção de aula para o Ensino Médio quanto na elaboração de uma avaliação, buscando a contextualização, a criatividade e a produção de aulas e atividades com a utilização das mídias digitais. Nesse sentido, Buratto (2012), apresenta e analisa diversos exemplos relacionados com a questão de visualização, sendo que, em um deles, traz a planificação de um cubo.

Além disso, Buratto (2012) apresenta o Quadro 4, trazendo diversas abordagens para o significado de visualização, no qual existe articulação entre a pesquisa científica e um dos itens: Matemática, Educação Matemática e Psicologia, e que leva em consideração aspectos nos quais aparecem juntos ou separadamente as seguintes temáticas: percepção, imagens visuais, imagens mentais e imaginação.

Quadro 4 - Definições para o termo “visualização” por pesquisadores

Autor/Ano/Página	Significado de visualização
Presmeg (1986, p. 297)	“Uma imagem visual é definida como um esquema mental representando informações reais ou espaciais”.
Bishop (1989, p. 8)	“Visualização aparece na literatura com as ideias de imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, com ideias úteis para a Educação Matemática e que, embora seja considerada um conceito complexo, é necessário ser compreendida” (tradução minha).
Cunningham (1991, p. 67)	“Visualização científica é comumente corrente para o uso da tecnologia gráfica do computador de apoio à investigação nas ciências”.

Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3)	“Visualização matemática é o processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) usando essas imagens de forma eficaz para a descoberta e compreensão da matemática”
Solano e Presmeg (1995, p. 67)	“É a relação entre imagens”.
Guzman (1996, p. 13)	“Visualização em matemática constitui um aspecto importante da atividade matemática onde se atua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático”.
Gutiérrez (1996a, p. 19)	“Um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizado para resolver problemas, ou provar propriedades”.
Nemirowsky e Noble (1997, p. 101)	“Visualização é um ato que não se restringe somente aos aspectos mentais ou aos aspectos externos, mas um meio de estabelecer conexões entre esses dois meios” (tradução minha).
Arcavi (1999, p. 26)	“Visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de descrever a comunicação de informações, de pensar e de desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e entendimentos avançados” (tradução minha).
Dreyfus apud Costa (2000, p. 169)	“Visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica”.
Senechal apud Costa (2000, p. 170)	“Visualização significa em linguagem usual, percepção espacial e assim é a reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões”.
Mariotti apud Costa (2000, p. 170)	“Visualização consiste em trazer à mente imagens de coisas visíveis”.
Passos (2000, p. 80)	“Visualização é a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto”.
Cifuentes (2005, p. 71)	“Visualizar é ser capaz de formular imagens e está no início de todo o processo de abstração”.
Van Garderen (2006, p. 496)	“Visualização é a capacidade de manipular mentalmente, girar ou torcer, ou inverter um objeto pictoricamente estímulo apresentado” (tradução minha).
Leivas (2009, p. 111)	“Visualização é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos”.
Flores (2010, p. 274)	“Visualização matemática é entendida como uma expressão do pensamento, uma forma de olhar e de pensar”.

Fonte: Adaptado de Buratto (2012, p. 58-60).

Com base no Quadro 4, observo formas diferentes de definir o termo visualização, e a principal conclusão é que o significado está principalmente relacionado à capacidade de produzir e transformar imagens mentais, seja com a utilização de lápis e papel, mentalmente, ou com a utilização das TD. Considero que a visualização é parte do processo de aprendizagem matemática em relação aos conteúdos de GEE.

Diante às concepções de diferentes autores e, em tempos diferentes, noto que visualizar figuras geométricas, especialmente quando pode-se arrastar seus lados e vértices, oportuniza

algo que está além dos olhos do observador, ou seja, a criação de imagens mentais. Além disso, a forma de olhar está relacionada com a forma de pensar. Quando visualizamos imagens geométricas, por todos os seus ângulos, na perspectiva de movimentação, mudamos a maneira de interpretar alguns conteúdos matemáticos.

A questão de um *software* contribuir, a partir de suas ferramentas, com a planificação de figuras tridimensionais, propicia a visualização de todos os elementos ali presentes, o que seria apenas uma suposição quando visto em uma folha de papel, seja ela de um livro didático, de um caderno, ou em um plano qualquer, como um quadro da sala de aula tradicional. Nesse sentido os *softwares* de Geometria Dinâmica permitem a visualização espacial, ainda que em uma tela bidimensional, como no papel.

De acordo com essa perspectiva, na disciplina Geometria Euclidiana Espacial ministrada no Ensino Superior, procurei propiciar a interação entre alunos e mídias digitais. Outros detalhes em relação a esse curso, assim como a metodologia que conduziu essa pesquisa são apresentados na seção seguinte.

4 METODOLOGIA: CAMINHOS PERCORRIDOS PARA A PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção, esclareço a metodologia que foi adotada no percurso da investigação realizada, visando responder à questão *Como um coletivo de alunos-com-mídias compreende conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina do Ensino Superior do curso de Matemática em tempos de ensino remoto?*

Exponho, em seguida, o porquê da escolha da perspectiva qualitativa, o contexto, a descrição dos participantes, os instrumentos elaborados e utilizados para a produção dos dados e a escolha por uma análise a partir de uma triangulação dos dados.

Concordo com Borba, Almeida e Gracias (2018) acerca de a metodologia de pesquisa estar voltada para um conjunto de métodos a ser percorrido no processo da investigação e em sua sistematização, e ainda, com a concepção de que a metodologia é uma interface entre epistemologia e conhecimentos, segundo Borba e Villarreal (2005).

Sendo assim, entendo que se torna necessário o envolvimento do pesquisador com a pesquisa, para que os caminhos percorridos e a sua sistematização estejam alinhados com a questão diretriz e os objetivos da investigação. A reflexão sobre os métodos é importante para que não se distancie o tema investigado do projeto inicial, não perdendo de vista os objetivos da pesquisa.

4.1 A Pesquisa Qualitativa

A preferência por uma pesquisa de abordagem qualitativa está coerente com seu objetivo, que consiste em *investigar como as interações entre alunos e mídias promovem a reorganização do pensamento para a produção de conhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina da Graduação em Matemática, em tempos de pandemia.*

Esta pesquisa foi desenvolvida a partir da grande área da Educação Matemática; optei pelo uso da abordagem qualitativa nessa área, pois “fornecem informações mais descritivas, que primam pelos significados dados às ações”. (Borba; Araújo, 2019, p. 25). A pesquisa qualitativa proporciona a observação mais detalhada de todo o processo no qual ela é realizada.

Nesse sentido, Bodgan e Biklen (1994) caracterizam essa abordagem de pesquisa pelos pesquisadores se interessarem mais pelo processo do que por apenas os resultados; pela fonte

direta de dados ser o ambiente natural; por ser descritiva; pela tendência de os pesquisadores analisarem os dados de forma indutiva; e pelo significado ter grande importância. Além disso, Goldenberg (2004, p. 49-50) descreve que “os métodos qualitativos enfatizam as particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado”.

Quando consideramos a compreensão de um coletivo de alunos-com-mídias em relação aos conceitos da GEE, temos um olhar voltado para um coletivo pensante onde os conhecimentos podem serem produzidos a partir de *feedbacks* constantes entre mídias e alunos, conforme a noção de moldagem recíproca (Borba; Villarreal, 2005).

O pesquisador tem o papel fundamental de mediar a investigação qualitativa, observando tudo o que ocorre à sua volta, no contexto da pesquisa em desenvolvimento. Nessa direção, Denzin e Lincoln (2011) assumem que a pesquisa qualitativa localiza o observador no mundo. Consiste em um conjunto de práticas que transforma o mundo em uma série de interpretações, as quais incluem notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, registros e lembretes para a pessoa. Creswell (2014, p. 50) considera que “o relatório final ou a apresentação incluem as vozes dos participantes, a reflexão do pesquisador, uma descrição complexa e interpretação do problema e a sua contribuição para a literatura ou um chamado à mudança”.

Todas essas ideias sobre a pesquisa qualitativa vão de encontro à pesquisa que foi desenvolvida e, em seguida, apresento as concepções de uma teoria metodológica de pesquisa qualitativa, a qual pretendo aliar a esta investigação.

4.2 Pesquisa Baseada em *Design*

A metodologia Investigação Baseada em *Design* (IBD)¹² pode ser descrita como aquela na qual são estudadas algumas intervenções educacionais, buscando a promoção de certas aprendizagens ou mudanças sistêmicas e a compreensão dos processos que estão relacionados (Cobb *et al.*, 2003; Gravemeiger; Cobb, 2013). No contexto desta pesquisa, a DBR esteve voltada para a aprendizagem dos alunos em conteúdos de Geometria Euclidiana Espacial, a partir de interações com mídias digitais, que é um dos principais focos dessa investigação.

¹² A IBD é uma sigla para Investigação Baseada em Design. Mais conhecida como DBR, que é a sigla para *design-based-research*, assumida nessa investigação para a pesquisa baseada em *design*.

A DBR surgiu na década de 1990, sendo introduzida na educação por Brown (1992) e Collins (1992), porém a terminologia *design-based-research* apareceu com um documento manifesto (DBR-Collective, 2003) e desenvolve uma metodologia intervencionista que procura reunir aspectos teóricos da pesquisa com a prática. A definição da DBR para a DBR-Collective é uma pesquisa que associa, de forma empírica, sua parte educacional teórica com ambientes de aprendizagem, tendo características importantes sobre o entendimento de como, quando e por que inovações educacionais funcionam, ou não, na prática. Segundo Kneubil e Pietiocola (2017, p. 2),

A metodologia DBR consiste numa espécie de gerenciamento de controle do processo de produção e implementação de uma inovação educacional em contextos escolares reais. Assim, a DBR pode ser considerada numa espécie de teoria sobre a metodologia e organiza de maneira coerente o processo de levar à sala de aula uma inovação curricular e/ou pedagógica.

Na DBR, é fundamental que seja realizada uma análise do processo como um todo, e não apenas do produto que se obtém no final. Sendo assim, “uma característica da DBR é o seu funcionamento em ciclos, onde o que se tem como resultado de um primeiro *design* deve ser usado nos próximos” (Kneubil, Pietiocola, 2017, p. 3).

De acordo Barab e Squire (2004), o objetivo da DBR consiste em abrir e problematizar o *design* concluído e a implementação resultante fornecendo uma visão geral sobre a dinâmica local, o que envolve providenciar descrições ricas de contexto, teoria orientadora e emergente, recursos de *design*, a intervenção e o impacto dessas características na participação e na aprendizagem. Na presente pesquisa, o uso das mídias e a aprendizagem de conceitos de GEE no Ensino Superior perpassaram por todos esses objetivos.

Segundo Cobb, Jackson e Dunlap (2016), a DBR possui cinco características importantes: reflete os problemas que os professores enfrentam ao ensinar, procurando promover a aprendizagem dos alunos ou a formação de professores; está baseada em intervenções coerentes com o mundo real; possui orientação teórica e pragmática; busca testar e, conforme necessário, rever ou rejeitar conjecturas sobre os processos de aprendizagem, promovendo a aprendizagem dos participantes; e, finalmente, visa à generalidade, de acordo com a preocupação teórica. Nesse sentido, a DBR, buscando soluções praticáveis para a educação, torna-se interessante para que os professores possam ultrapassar as barreiras de aprendizagens de seus alunos.

Em relação ao papel do pesquisador, Kneubil e Pietiocola (2017) consideram que ele participa ativamente do processo, estando na frente para moldar o seu objeto de dentro do

processo. O pesquisador “tem o papel de gerenciar o processo como um todo, desde a criação de uma ideia inovadora até a sua implementação efetiva no contexto real” (Kneubil; Pietiocola, 2017, p. 6).

Segundo Ponte e Branco (2013), um dos aspectos importantes a ser considerado é que a DBR envolve intervenções planejadas. O processo de planejar intervenções consiste em várias etapas, o que muitas vezes corresponde em dar dois passos à frente e um atrás, o que ajuda na compreensão dos alunos devido ao constante olhar sobre as atividades desenvolvidas.

Considera-se que a DBR pode ser elaborada em quatro fases, que compreendem os processos desenvolvidos na pesquisa, sistematizados no Quadro 5:

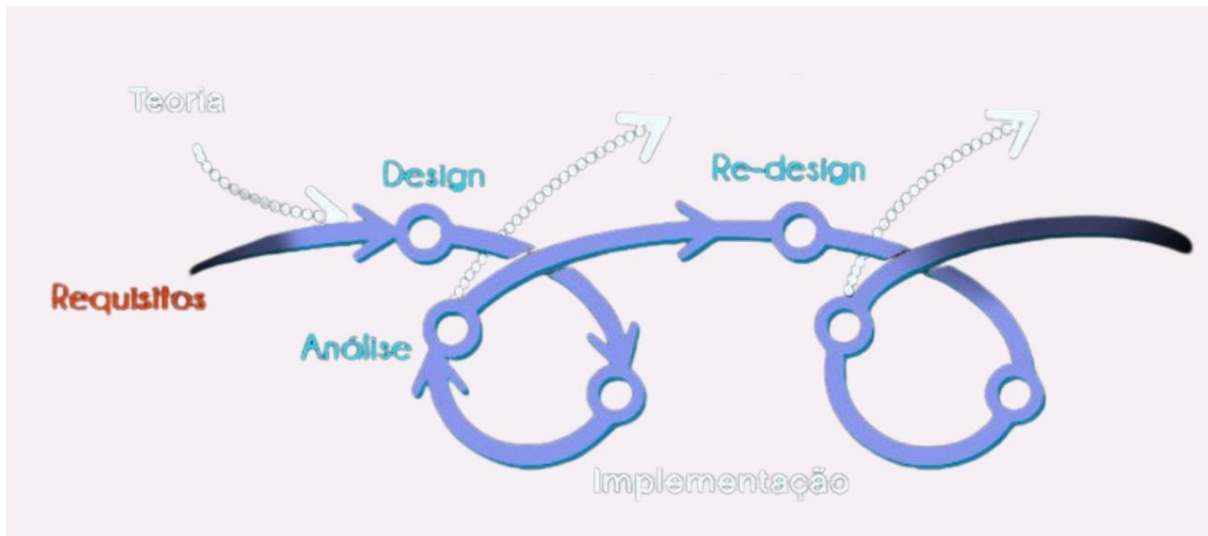
Quadro 5 - Fases da DBR

Fases	Descrição
1. Análise de um problema prático pelos pesquisadores e participantes em colaboração.	Levantar o problema junto aos participantes, revisão contínua da literatura para apoiar o rascunho da intervenção.
2. Desenvolvimento de soluções informadas pelos princípios de <i>design</i> existentes e inovações tecnológicas	Definição do rascunho e princípios da intervenção proposta, baseando-se no arcabouço teórico.
3. Ciclos iterativos de teste e refinamento das soluções na prática	Implementação da intervenção em iterações em dois ou mais ciclos, definição dos participantes, coleta e análise dos dados.
4. Reflexões para produzir “princípios de <i>design</i> ” e melhoria da solução implementada	Apresentar os conhecimentos e produtos, princípios e artefatos do <i>design</i> .

Fonte: Amiel e Reeves (2008, p. 34) e Herrington *et al.* (2007, p. 4091).

Na fase três (3), os ciclos iterativos possibilitam que ocorram sucessivas aplicações das intervenções, fazendo com que permanentes análises e revisões do *design* ocorram. De acordo com a Figura 2, o processo começa com uma teoria do conceito que é implementado em uma turma. Após produção e análise desses dados, teremos como resultados as implicações teóricas e o *redesign* do próximo ciclo (Fraefel, 2014).

Figura 2 - Visão Iterativa da DBR



Fonte: (Adaptado de Fraefel, 2014, p. 9).

Esta figura engloba as fases da DBR e mostra que uma pesquisa desse tipo não tem um fim único, ou seja, novos *designs* sempre poderão acontecer. Em seguida, apresento o contexto para a produção dos dados.

4.3 Contexto para a Produção dos Dados

O contexto para a produção de dados foi constituído por uma turma de alunos do terceiro semestre do curso de Graduação em Matemática (Bacharelado e/ou Licenciatura) da Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho - UNESP/Rio Claro, na disciplina Geometria Euclidiana Espacial. Essa turma de estudantes era composta inicialmente por 39 indivíduos.

As aulas do referido curso sempre ocorreram na modalidade presencial. Porém, devido ao momento de pandemia que foi vivenciado no período da investigação, ocasionado pela difusão da Covid-19, em que a principal forma de prevenção foi o isolamento social, as aulas ocorreram de forma remota e em um contexto que podemos descrever como novo para professores e alunos que participavam de outro modelo de ensino e foram obrigados a seguir o seu currículo escolar em casa, sem relacionamento presencial com os seus pares na participação das aulas, na realização de atividades, trabalhos e tarefas.

Sendo assim, as aulas ministradas por mim aconteceram no *Google Meet* (ferramenta que possibilita criar uma sala de webconferência, permitindo que a comunicação entre seus

participantes ocorra de forma síncrona). Havia ainda a comunicação pelo *Google Classroom* (que é uma ferramenta, ou um Ambiente Virtual de Aprendizagem), de maneira assíncrona.

Utilizei as duas ferramentas conjuntamente, integrando diversas tecnologias digitais que permitiram, a partir de sua interface, o ensino e aprendizagem de conteúdos da GEE. Todas as aulas ocorridas de forma síncrona no *Google Meet* eram gravadas e disponibilizadas em seguida para acesso dos alunos no *Google Classroom*, após sua liberação em meu *e-mail* institucional, o qual foi utilizado de forma sincronizada com as plataformas.

Para que eu pudesse usar essas plataformas, a UNESP/Rio Claro ofereceu aos docentes da graduação um curso sobre sua utilização, além de um curso do *Google Forms* (ferramenta que permite elaboração de formulários, questionários, atividades e avaliações). Um aprendizado muito importante desses cursos foi como dividir uma turma em grupos de forma aleatória e com o número de pessoas desejado pelo professor.

Uma outra ferramenta que, no decorrer da pesquisa, acabou sendo utilizada, foi o *WhatsApp*. A princípio, os estudantes da graduação pediram para criarmos um grupo usando esse aplicativo da turma com o intuito de facilitar a comunicação, o que aceitei e autorizei a criação. Porém, as conversas foram além do propósito do grupo, de forma pessoal, inclusive aos finais de semana. Vale observar que a plataforma *Google Classroom* não oferecia ferramentas como fóruns e *chats*, o que poderia ampliar a comunicação e interação entre aluno-aluno e aluno-professor ao invés do uso do *WhatsApp*.

A principal mídia escolhida para essa pesquisa foi o *software* livre *Geogebra*, desenvolvido por Makus Hohenwarter em 2001 e continua sendo atualizada até os dias atuais, sendo que nas novas versões, a partir do *Geogebra 5.0*, apresentam, tanto em sua versão para computadores, quanto para celulares, a Janela de Visualização 3D (na versão para celulares, apresenta também recursos que proporcionam uma realidade aumentada).

Nesse contexto, o *software Geogebra* pode propiciar interações com os alunos em uma perspectiva de colaborar com os entendimentos dos conceitos de GEE. Outros *softwares*, aplicativos e ambientes digitais também foram utilizados, como o *Paint*, o *Jamboard*, o *Power Point*, o *Youtube*, o *Whatsapp*, *Microsoft Whiteboard*, *Google Meet*, *Google Classroom*, *Google Forms* e *Internet*.

No próximo tópico, trarei a descrição dos participantes da pesquisa.

4.4 Descrição dos Participantes

Os participantes dessa pesquisa foram os alunos que assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE – ver apêndice A, ao final desta tese), ou seja, 25 alunos. A turma de GEE da UNESP/Rio Claro, que possuía 39 alunos, teve as aulas ministradas por esta professora-pesquisadora. Posso considerar como sujeitos da pesquisa cerca de 63% dos alunos da turma. Desses 25 estudantes, um deles desistiu do curso, tornando-se 24 o número de participantes. Eles formaram um coletivo pensante com as mídias utilizadas no decorrer do curso. A escolha dos sujeitos da pesquisa se deu por aqueles que assinaram o TCLE. Os demais alunos participaram das aulas normalmente.

O anonimato dos nomes dos sujeitos da pesquisa será garantido, já que eles assinaram o termo de participação na investigação, evitando assim qualquer possível situação constrangedora. Denominarei esses participantes de A₁, A₂, A₃, ..., A₂₄. As idades dos alunos variavam entre 18 e 25 anos. Em relação ao conhecimento de *softwares* de Geometria dinâmica, a maioria conhecia ou já tinha algum contato com o *Geogebra* e apenas um deles já havia experienciado usar o *Wolfram Alfa*.

O *software Geogebra* foi a principal mídia utilizada na pesquisa, tanto nos computadores, quanto nos celulares, para que os alunos pudessem ter experiências com a janela de visualização 3D e com a realidade aumentada. Ocorre que, durante a pesquisa, verifiquei que a maioria dos celulares dos alunos não oferecia possibilidades de trabalhar com a realidade aumentada e, então, o *Geogebra Classic 5* foi mais utilizado.

Como esse *software* está sempre passando por atualizações, a professora-pesquisadora resolveu fazer um curso denominado “O *Geogebra* – Décima oitava edição”, como cursista, que teve início em fevereiro de 2021 e finalização em meados de abril mesmo ano¹³. Um dos módulos do curso apresentou como tema a GE e sua dinâmica possibilitou farta aprendizagem, por se tratar de um curso realizado na plataforma Moodle em que os participantes faziam tarefas e era necessário comentar as tarefas desenvolvidas por, pelo menos, três outros participantes.

Além do exposto, estou ciente de que, como a professora e a pesquisadora foram a mesma pessoa, pode haver nuances despercebidas no papel de ambas. A professora ministrou as aulas síncronas, elaborou e disponibilizou o AVA no Google Classroom, criou grupo no Whatsapp, conforme solicitado pelos estudantes, enquanto a pesquisadora observou tudo o que

¹³ O curso foi oferecido de forma gratuita para 500 participantes, como projeto de extensão da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, câmpus de Apucarana, sob a coordenação do Professor Sérgio Dantas.

acontecia nestes três ambientes, apoiou-se na teoria para criar os *designs* e *redesigns* da pesquisa e se empenhou em complementar o olhar da professora, principalmente em relação às atividades propostas.

Ser professora e pesquisadora simultaneamente, em um período de pandemia, foi sem dúvida, muito desafiador. Após o primeiro *redesign* ocorrido, as aulas passaram a ser pensadas e elaboradas com o uso de mídias digitais, principalmente o *Geogebra*. Além disso, a preocupação em fazer com que os estudantes participassem efetivamente da disciplina para que as interações entre eles e as mídias ocorressem demandou um grande esforço no sentido de trabalhar com uma metodologia de aulas em que os alunos deveriam estar presentes ativamente, realizando tarefas individualmente, em duplas ou em grupos e apresentando para a turma durante todo o curso.

Estas percepções da pesquisadora em relação à importância da proposição de atividades nas quais os alunos interagiam com as mídias foi um ponto positivo em relação ao fato de a professora e pesquisadora serem uma única pessoa; metaforicamente, diria que “facilitou o diálogo”. Porém, diferenciar o olhar da pesquisadora do olhar da professora nem sempre é uma tarefa fácil, principalmente pelos dados terem sido produzidos durante uma disciplina completa, em tempos de isolamento social e com uma produção muito grande de dados. Para mim, ficou muito claro, como já dizia Lévy (1996), que o virtual não se opõe ao real, nesta investigação.

Na próxima subseção, apresento os instrumentos que foram utilizados para a produção dos dados desta pesquisa.

4.5 Instrumentos Para a Produção dos Dados

No desenvolvimento desta pesquisa, utilizei os seguintes instrumentos para a produção dos dados: as notas de campo, dois questionários (sendo um no início da pesquisa e outro no final), *chats* produzidos em Ambiente Virtual de Aprendizagem (*Google Sala de Aula*), registro audiovisual, entrevista e registros das comunicações via *Whatsapp*.

A observação ocorreu durante cada aula ministrada e, a partir dela, foram anotadas, em um caderno de campo, registros dos acontecimentos e reações dos estudantes em relação aos objetivos da pesquisa. Foram aplicados dois questionários, um no início e outro no final da prática em campo, para a produção de dados referentes ao uso das mídias e às estratégias de aprendizagem da GEE, com um olhar dos estudantes. Os *chats* e registros das aulas gravadas

eram recebidos via e-mail, ao final dos encontros síncronos e disponibilizados para toda a turma por meio do *Google Classroom*.

Esses dados me permitiram obter informações referentes aos diálogos realizados durante toda a investigação, as interações decorrentes no processo e detalhes de como o trabalho foi realizado. Tais instrumentos foram essenciais para a produção e análise de dados. A seguir, apresento cada um dos seis instrumentos para a produção de dados.

4.5.1 Notas de campo

As notas de campo que advêm do diário de campo, ou diário de bordo, trazem as informações que o pesquisador registra de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos (Fiorentini, Lorenzato, 2012).

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), quando o professor pretende investigar a sua própria prática, recomendam que façam as suas anotações logo que terminem as suas aulas, inclusive pode utilizar outros instrumentos para obter essas informações. Nesse sentido, como as aulas aconteceram de forma remota e foram gravadas, os próprios registros de vídeos puderam auxiliar, logo que as aulas terminassem, o resgate dos fatos ocorridos durante as aulas, anotados no diário de campo.

Ludke e André (1986) falam sobre a organização do diário de campo e deixam como sugestão que, em cada registro, seja indicado o dia, a hora, o local da observação e o período de duração e que, além disso, haja um espaço para posterior codificação ou comentários. Essa sugestão está de acordo com os pensamentos que foram seguidos no desenrolar desta pesquisa. Todas as observações foram anotadas, com reflexões acerca das ações desenvolvidas.

4.5.2 Questionários Semiestruturados

Os questionários semiestruturados são aqueles que podem apresentar questões abertas e fechadas. Segundo Gil (1991), um questionário, ao ser elaborado, deve ter o pensamento voltado para que as respostas proporcionem ao pesquisador uma descrição do grupo pesquisado. As questões abertas apresentam respostas com maior profundidade, dando maior liberdade para os participantes responderem de acordo com seus conhecimentos e suas crenças. Em relação às questões fechadas, elas proporcionam respostas que contextualizam o grupo que está sendo

investigado, em relação aos aspectos gerais, podendo estar relacionados com outros instrumentos de dados como, por exemplo, as entrevistas e as observações.

Corroborando esse pensamento, Minayo (2004) considera que o questionário é uma mistura de questões abertas ou fechadas, no qual a pessoa questionada pode discutir sobre o tema em questão sem interferência do pesquisador, e Severino (2007) afirma que os questionários são conjuntos de questões que visam conhecer a opinião dos sujeitos pesquisados sobre os assuntos em estudo.

Foram aplicados dois questionários, sendo um no início do trabalho em campo, composto por 12 questões e um outro ao final, contendo 11 questões, com o objetivo de produzir dados sobre elementos que descrevessem os sujeitos da pesquisa e para um entendimento da professora-pesquisadora sobre o olhar dos participantes em relação às interações entre eles e às mídias digitais, com o objetivo da produção de dados. Algumas questões foram repetidas em ambos os questionários para podermos verificar se houve ou não mudanças de pensamento em relação às interações realizadas sobre o tema GEE.

Os questionários foram elaborados no *Google Forms* e disponibilizados no *chat* durante a aula, além de serem inseridos na plataforma *Google Classroom*. Foi dado um prazo para a resposta e devolução deles.

4.5.3 Chats produzidos nas aulas

No ensino remoto os *chats*, que são “bate-papo” virtual entre todos os participantes que estão no *Google Meet*, ocorreram simultaneamente à realização das aulas. O mesmo passou-se em eventos, palestras, qualificações, seminários, congressos, cursos virtuais, dentre outros.

Nessa pesquisa, os *chats* constituíram fonte rica para a produção dos dados, pois apresentaram os comentários e as dúvidas dos alunos, além de serem enriquecidos por diálogos constantes. Esses *chats* foram gravados a cada aula e encaminhados para o meu e-mail institucional.

Segundo Santos (2002), nos *chats*, os participantes podem socializar sem a necessidade de contato físico. Seguindo a mesma linha de raciocínio, Leite (2011, p. 142) considera que

[...] o chat pode ser uma ferramenta útil no processo de ensino/aprendizagem, uma vez que as informações e opiniões podem ser facilmente trocadas e todos os estudantes, mesmo os mais inibidos em discussões convencionais, podem se comunicar sem maiores dificuldades.

Um recurso que foi utilizado em uma das aulas com os alunos, em relação ao *chat*, foi uma ideia advinda de uma aula de Metodologia, ministrada pelo Professor Marcelo Borba em janeiro de 2021, da qual participei como aluna, na disciplina “Metodologia de Pesquisa Qualitativa”, que consistiu em pedir a todos os alunos que pensassem e escrevessem um texto no chat da sala de aula virtual, de no máximo dez linhas, sobre um tema da disciplina e aguardassem, para que, na hora em que fosse dado um aviso oficial pelo professor para a largada, ou seja, cada um, desse *enter* no texto que foi escrito, simultaneamente acionariam o comando.

Nesse momento, então, cada um dos participantes podia ler o texto dos colegas. O professor propôs assim, uma discussão para a turma acerca dos textos escritos por cada participante. Nesta pesquisa, a ideia foi replicada, porém o questionamento era sobre a interação entre os alunos e as mídias digitais.

4.5.4 Gravação das Aulas

Nesse *design* de pesquisa, é comum a busca através da compreensão do fenômeno a partir do olhar dos sujeitos envolvidos, como a gravação das situações ocorridas para análise posterior, além de outros métodos (Goldenberg, 2004). Corroboramos com essa ideia quando foram gravadas as aulas para futura transcrição dos dados, visando à realização da análise e busca pelos resultados consonantes com a pergunta da investigação.

Além disso, Sadalla e Larocca (2004) argumentam que a videogravação é apropriada para a prática pedagógica por ser cheia de vivacidade e dinamismo e, por isso mesmo, sofre diversas interferências em suas variáveis. De acordo com essas autoras, “a videogravação permite registrar, até mesmo, acontecimentos fugazes e não-repetíveis que muito provavelmente escapariam a uma observação direta” (Sadalla; Larocca, 2004, p. 423).

Um outro fator que pode ser descrito em relação à videogravação são as diferentes possibilidades de se visualizar o material gravado, acelerando, retrocedendo, pausando, avançando, congelando a imagem, assistindo o número de vezes que for necessário para um bom entendimento e interpretação do material (Sadalla; Larocca, 2004). Em relação à observação realizada para um pesquisador em ensino presencial, uma vantagem que existe quando se trata do ensino remoto é que o material gravado fica em posse do pesquisador para

que visualize quantas vezes precisar, utilizando-se dos diferentes recursos citados pelas autoras Sadalla e Larocca (2004).

4.5.5 Entrevistas

De acordo com Creswell (2014), uma entrevista pode ser considerada como uma série de passos em um procedimento, tais como: a decisão sobre as perguntas de pesquisa que serão respondidas (abertas, gerais e com foco no fenômeno central do estudo); a identificação dos entrevistados que podem melhor responder às perguntas; a determinação do tipo de entrevista que irá abranger as informações mais úteis, levando-se em consideração a forma de realização; o uso de procedimentos adequados para a condução de entrevistas individuais ou em grupo; a utilização de um guia de entrevista; o refinamento das perguntas e dos procedimentos através de um teste piloto; o local da sua realização; o consentimento do entrevistado para a sua participação; e o uso de bons procedimentos de entrevista.

Nesta pesquisa, o último recurso utilizado foi a entrevista, realizada com três alunos, contendo seis questões previamente elaboradas, de forma individual, ou seja, com a presença de um aluno por vez, com a duração de aproximadamente quarenta minutos cada uma. Foi elaborado um roteiro antecipadamente, e que foi gravada e realizada por meio da plataforma virtual *Google Meet*.

4.5.6 Registros do WhatsApp

O *WhatsApp* tem sido o maior meio de comunicação utilizado nos tempos atuais e, portanto, vem se tornando um aplicativo em destaque na preferência e no uso. Segundo Etcheverry (2019, p. 18),

Com um aparelho smartphone conectado à internet, o WhatsApp permite enviar, receber, produzir e compartilhar mensagens, fotos, imagens, contatos, localização, vídeos e até planilhas e documentos diversos com rapidez e agilidade. Permite também fazer chamadas de voz e de vídeo. Tudo isso aliado à facilidade de manuseio por pessoas de todas as idades (por sua interface amigável e intuitiva) e à vantagem da gratuidade, são fatores que aumentam as opções de expressão, interação e comunicação, independentemente do lugar em que as pessoas estejam.

Com todas essas características, podemos considerar que a aceitação e uso da população são coerentes com as facilidades oferecidas pelo aplicativo que, várias vezes, passa do uso informal para uma forma institucionalizada. Nesse sentido, pela forma interacional, o *WhatsApp* promove a comunicação e modifica a cultura organizacional, pois “é possível supor que o *WhatsApp* modifica e promove as interações, que reconfigura o processo comunicacional de pessoas e organizações e interfere na cultura, reconfigurando também, as formas de se comunicar, de trabalhar, de agir e de fazer” (Etcheverry, 2019, p. 19).

No início da realização desta pesquisa, não pensava em utilizar o *WhatsApp* para a produção de dados, pela escolha de outros instrumentos. No entanto, por ser tratar de ensino remoto, um dos primeiros pedidos da turma foi a criação de um grupo da disciplina GEE no aplicativo. Ao decorrer da investigação, surgiram dados importantes no grupo de *WhatsApp* e na comunicação entre aluno-professora, já que todos os alunos passaram a ter o contato pessoal da professora-pesquisadora, a partir da criação do grupo.

Com as mudanças na forma de ensino e contexto tecnológico, os instrumentos para produção de dados em uma pesquisa acadêmica podem ser modificados. De acordo com Behar (2009, p. 148), “com o uso de ambientes virtuais na educação nos defrontamos com a exigência de propostas de pesquisas científicas que ultrapassem a adaptação dos procedimentos instituídos”.

Nesse sentido, Barbosa e Carvalho (2018), que pretendiam analisar o banco de dados AVA/IFRO, ao observarem o baixo índice de acesso dos alunos (professores) em EaD, optaram pelo aplicativo *WhatsApp*, buscando “promover maior contato, aproximação, agilidade, interatividade durante a discussão” (Barbosa; Carvalho, 2018, p. 5). Perceberam que o fato de estarem *online* a maior parte do tempo propiciou melhor discussão e aumento do número de participantes no desenrolar da investigação. Além disso, consideraram que é plausível induzir o *WhatsApp* nas pesquisas em educação, pois

[...] permite acesso a informações no/pelo processo educativo e possibilita a reflexão sobre o ensinar e o aprender e, por conseguinte, a produção de conhecimento. Isto conduz a percepção crítica da prática educativa em reflexões contínuas e interativas, porque o aplicativo registra todas as interações, o processo de discussão não se esvai e o registro é capaz de revelar o fenômeno em estudo no seu processo, possibilitando a cíclica de resgate reflexivo e o próprio registro documental da investigação, dos resultados e do conhecimento (Barbosa; Carvalho, 2018, p. 8).

Ademais, podemos salvar as comunicações realizadas por meio do *WhatsApp* como salvamos os demais dados de uma pesquisa e transcrever aqueles que serão utilizados em um

documento acadêmico. Sendo assim, iremos considerar o *WhatsApp* como um instrumento de produção de dados nesta pesquisa, pois “chama-se de instrumento de pesquisa o que é utilizado para a coleta¹⁴ de dados” (Rubio, 1986, p. 114), ou seja, aquilo que será utilizado no desenrolar da pesquisa para a obtenção das informações pertinentes ao trabalho.

Além disso, Bodgan e Biklen (1994) consideram que dados são aqueles elementos que dão base para a análise, incluindo materiais que os investigadores registram ativamente. Os dados “também incluem aquilo que outros criaram e que o investigador encontra, tal como diários, fotografias, documentos oficiais e artigos de jornais” (Bodgan; Biklen, 1994, p. 149). Para esses autores, nos dados estão os elementos imprescindíveis para pensar de forma apropriada e profunda sobre os aspectos da vida que tencionamos explorar. Todos esses aspetos nos levam a pensar que podemos considerar as comunicações via *WhatsApp* ocorridas nesta investigação como dados da pesquisa.

Em seguida, apresento a perspectiva de triangulação dos dados que adotei na pesquisa, bem como a forma como se fez presente nesta pesquisa.

4.6 Triangulação dos Dados

Utilizei a triangulação de dados em minha pesquisa por concordar que “a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para a obtenção dos dados” (Borba, Araújo, 2013, p. 41). Além disso, esses autores consideram que a triangulação permite que a pesquisa tenha maior confiabilidade e credibilidade.

De acordo com Goldenberg (2004, p. 63), “a combinação de metodologias diversas no estudo do mesmo fenômeno, conhecida como triangulação, tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo”. Outrossim, Goldenberg (2014), Alves-Mazzotti (2001) e Lincoln e Guba (1985) afirmam que a triangulação dos dados aumenta a confiabilidade da pesquisa quando se busca a convergência entre os resultados.

Segundo Creswell (2014, p. 198), “os pesquisadores qualitativos localizam evidências para documentar um código ou um tema em diferentes fontes de dados, eles estão triangulando as informações e fornecendo validades aos seus achados”.

¹⁴ Nessa pesquisa a coleta de dados é entendida como produção de dados.

Denzin e Lincoln (2006) afirmam que a triangulação pode ser vista como uma forma de entender de maneira profunda um fenômeno estudado e que a combinação de várias práticas metodológicas, materiais empíricos e as perspectivas de observações em um único estudo é melhor entendida como uma estratégia que traz rigor, abrangência, complexidade, riqueza e profundidade a qualquer pesquisa.

Concordamos também com a ideia de que “buscar ao menos três modos de verificar ou corroborar um determinado evento, descrição ou fato que está sendo relatado por um estudo” (Yin, 2016, p. 72) ajuda na interpretação dos dados e na busca das categorias que deles possam emergir.

Em conformidade com as ideias desses autores, utilizei a triangulação dos dados para encontrar as dimensões de análise dessa pesquisa.

4.7 Análise dos dados produzidos

Após a produção dos dados, procedi à análise dos mesmos, buscando respostas para a pergunta da investigação. Para Bogdan e Biklen (1994, p. 205),

A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrição de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou.

Para analisar os dados desta pesquisa, utilizamos a proposta apresentada por Bogdan e Biklen (1994), acolhendo as sugestões desses autores desde a análise no campo até o desenvolvimento das categorias de codificação. Essas categorias podem surgir *a priori* ou emergir dos dados transcritos e agrupados. Nesta pesquisa, as categorias emergiram dos dados produzidos e organizados.

Segundo Bodgan e Biklen (1994), para que seja desenvolvido um sistema de codificação, é necessário perpassar várias etapas do processo: “percorre os seus dados na procura de regularidades e padrões, bem como de tópicos presentes nos dados e, em seguida, escreve palavras e frases que representam estes mesmos tópicos e padrões” (Bodgan; Biklen, 1994, p. 221). Sendo assim, essas categorias, encontradas nas palavras e nas frases, serão um meio de classificar os dados descritivos que foram produzidos e analisá-los posteriormente.

Após dar esses primeiros passos, torna-se necessário desenvolver uma lista de categorias de codificação. As perspectivas e posições teóricas do investigador irão moldar a forma de analisar os dados (Bodgan; Biklen, 1994).

Para encontrar as dimensões que emergiram dos dados, iniciei fazendo a transcrição dos dados das aulas, por mim escolhidas, a partir da gravação delas, simultaneamente às conversas realizadas no chat. Os arquivos gravados foram enviados separadamente para o e-mail da professora-pesquisadora e a transcrição foi feita com a observação do registro do tempo em ambas as gravações. Também foi realizada a transcrição das entrevistas e das comunicações realizadas via *WhatsApp*.

Não houve a necessidade de transcrever os dados encontrados nos questionários, nas provas enviadas via e-mail para a professora-pesquisadora e nos trabalhos enviados via plataforma *Google Classroom*, devido ao fato de todos esses dados ficarem registrados automaticamente em uma pasta denominada Geometria Euclidiana Espacial no *Google Drive* do e-mail institucional da professora-pesquisadora.

Após transcrição e leitura dos dados, considerei as frases que mais se repetiram, separando em arquivos diferentes aquelas que mais se assemelhavam. Dessa forma, cheguei a três dimensões de análise. Nesse momento, fiz uma leitura de todos os dados que estavam postos em cada agrupamento que podia ser visto em subgrupos, buscando por singularidades e escolhendo aqueles que melhor representavam um determinado subconjunto de dados para apresentar e analisar.

Após apresentar os percursos metodológicos vivenciados nessa pesquisa, prosseguirei, na próxima seção, apresentando e analisando os dados.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

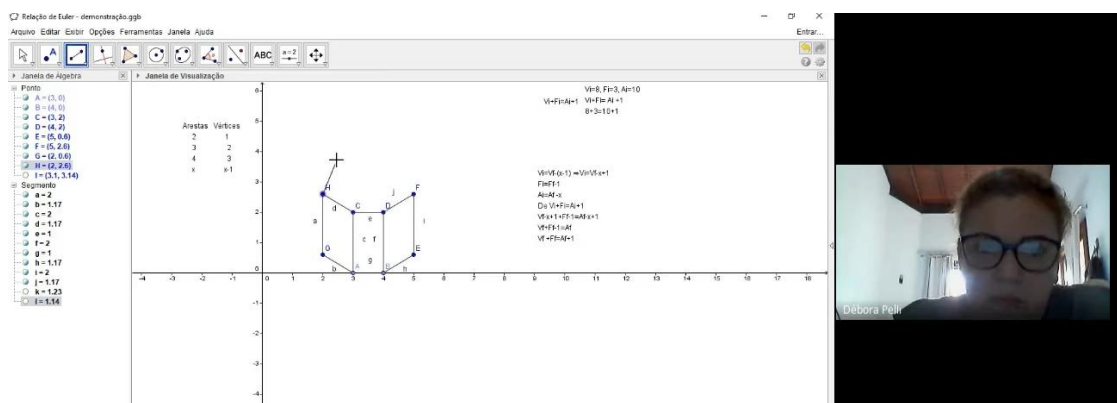
Discutirei os dados de acordo com as temáticas abordadas nesta pesquisa, a Geometria Euclidiana Espacial (GEE), as tecnologias digitais (TD) e a visualização, na busca de responder à questão *Como um coletivo de alunos-com-mídias compreende conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina do Ensino Superior do curso de Matemática em tempos de ensino remoto?*

Antes de proceder à apresentação e à análise dos dados, esclareço que a proposição de atividades para a produção dos dados só foi possível porque as aulas foram lecionadas no *software Geogebra*. Essa medida foi adotada depois da aplicação do primeiro questionário (Apêndice B), no qual havia uma pergunta sobre a utilização das mídias e a obtenção da resposta dos estudantes sobre o desconhecimento da maioria deles em relação ao *Geogebra*.

Dessa forma, menciono aqui, o recorte de duas das aulas lecionadas na disciplina, para que o leitor possa compreender o desenvolvimento das atividades pelos estudantes, nos dados que serão apresentados em cada uma das dimensões de pesquisa.

A primeira aula foi sobre as relações de Euler. A tela compartilhada com os alunos pode ser vista através da Figura 3.

Figura 3 - Recorte de uma aula sobre a Relação de Euler



Fonte: Dados da pesquisa.

Professora (07/06/2021): *Uma, duas e três. Se eu aumentei três arestas, quantos vértices vão aumentar em minha figura?*

A₁₈(07/06/2021): *Professora, mas e se, que nem no primeiro exemplo que você deu, com duas arestas, de H para J e C para J, por exemplo, a gente colocasse mais uma aresta de D para J?*

Professora (07/06/2021): *Sim. Mas aqui eu estou só mostrando, eu só quero chegar em um olhar, por enquanto, do que que acontece no caso de eu estar aumentando o número de arestas em relação à vértices, tá? Para provarmos o teorema [relação de Euler], vamos chegar no poliedro fechado. Está certo? E aí, como estou dizendo isso, para mim tanto faz escolher as arestas em qualquer parte aqui dessa superfície poliédrica. Eu só quero descobrir assim, sempre que eu aumentar um determinado número de arestas, qual vai ser a relação disso com o número de vértice que vai aumentar? Está claro?*

A18(07/06/2021): *Então, é que se fizer do jeito que eu falei, você ainda vai ter colocado três arestas a mais, só que só vai ter um vértice a mais.*

Professora (07/06/2021): *Ah, tá. Mas você está querendo juntar estas arestas com o polígono? Fala para mim de novo. Onde você quer colocar. Vamos lá.*

A18(07/06/2021): *Por exemplo, coloca uma de H para J, uma de C para J e outra de D para J.*

Professora (07/06/2021): *Então vou apagar as que eu fiz aqui, para a gente ver o que você está dizendo, vamos lá.*

A18(07/06/2021): *Pode por o m de novo [aresta HJ], aí faz uma de C até J.*

Professora (07/06/2021): *Aqui a gente já fez uma outra face, está vendo?*

A18(07/06/2021): *Sim.*

Professora (07/06/2021): *Isso que eu quero observar, faço uma face além.*

A18(07/06/2021): *Ah tá. Só uma face. Ok.*

Professora (07/06/2021): *Desculpa se não deixei claro. Agora ficou claro, né?*

A18(07/06/2021): *Sim.*

Professora (07/06/2021): *Cada face que eu faço nova na superfície poliédrica aberta, o que acontece? Quando eu aumento o número de arestas o número de vértices sempre aumenta uma unidade a menos que o número de arestas, como eu mostrei, quando eu tenho duas arestas, eu vou aumentar um vértice, quando aumento três arestas, [aumenta para] dois vértices. Se a gente pensar em [aumentar] x arestas, para generalizar, eu vou ter $x - 1$ vértices. Todo mundo concorda? Está claro isso, gente?*

Este recorte de uma aula da disciplina GEE pode ser visto pelo QR Code 1 (Figura 4).

Figura 4 - QR Code 1: Recorte de uma aula sobre Relação de Euler



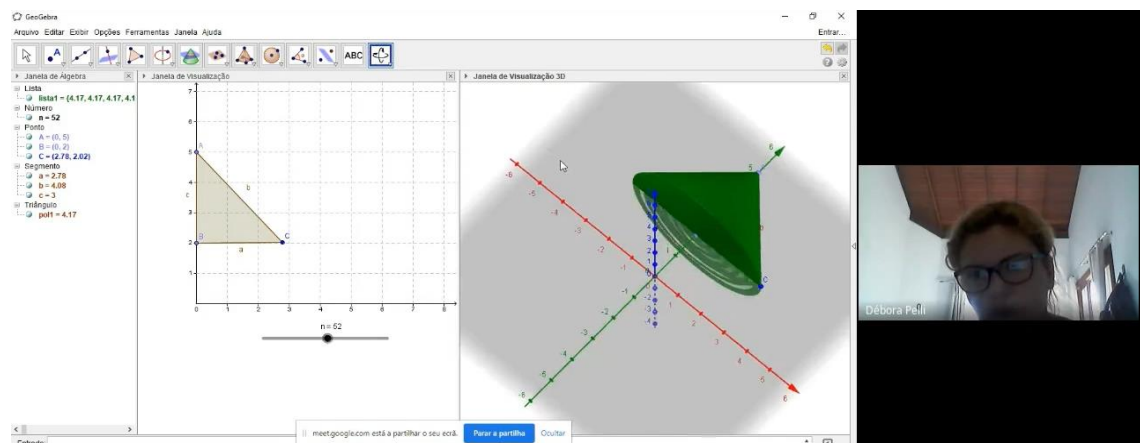
Fonte: Produzido pela autora (2023).

O segundo recorte é de uma aula sobre cones que foi realizada no dia 08/07/2021. Em uma parte da aula, aos vinte oito minutos decorridos, a professora falou sobre a rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

Professora (08/07/2021): Aí eu vou criar um controle deslizante para ele rodar fazendo a sequência de vários valores. Então eu vou chamar de n [o controle deslizante], vou falar que esse n vai variar de 0 a 100, com incremento 1. Vou criar um triângulo [...] em entrada, escolho o comando Sequência do comando Girar... Em entrada, digito: Sequência[Girar[pol1, $i \cdot 2\pi/n$, EixoY], i, 0, n, $2\pi/n$] e, então quando vou mexendo no controle deslizante o retângulo vai girando pelo eixo y, formando um cone.

A Figura 5 representa o cone gerado pela rotação do triângulo retângulo, em 360 graus, pelo eixo Y.

Figura 5 - Cone gerado



Fonte: dados da pesquisa.

A explicação da professora sobre a rotação de um triângulo em torno de um eixo pode ser vista pelo QR Code 2 (Figura 6).

Figura 6 - QR Code 2: Formação de um cone através da rotação de um triângulo em 360 graus por um eixo



Fonte: Produzido pela autora (2023).

A importância de se mostrar como as explicações foram sendo dadas pela professora nos faz perceber que os estudantes iniciaram as suas aprendizagens para se tornar um coletivo com o *software* porque tiveram uma mediação da professora, no sentido de se propor a ensinar o conteúdo utilizando o GG, e pedindo aos alunos que fizessem novamente o que ela estava fazendo, para ajudar no entendimento do conteúdo e na relação dos estudantes com o *software*.

Além disso, para facilitar a compreensão do leitor, apresento a programação do curso, com seus conteúdos, estilo de aula e localização das cenas que serão apresentadas, no Quadro 6.

Quadro 6 - Apresentação do curso de GEE

Data	h/a	Atividade	Conteúdo Programático	Pesquisa
19/04/2021	2 h/a	Síncrona	Apresentação da disciplina	
21/04/2021				Cena 1 (5.1)
22/04/2021	2 h/a	Síncrona	Introdução; Paralelismo; Noções iniciais do <i>Geogebra</i>	
29/04/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
03/05/2021	2 h/a	Síncrona	Paralelismo; Perpendicularidade	Envio TCLE e Primeiro Questionário
06/05/2021	2 h/a	Síncrona	Diedros; Triedros; Poliedros convexos; <i>Geogebra</i>	Cena 2 (5.1) Cena 3 (5.1)
10/05/2021	2 h/a	Assíncrona	Atividade – Realidade aumentada	
13/05/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
17/05/2021	2 h/a	Síncrona	Demonstrações – apresentação	Cena 3 (5.1)
20/05/2021	2 h/a	Síncrona	Atividade realizada em grupo	
24/05/2021	2 h/a	Síncrona	Demonstrações - apresentação	
27/05/2021	2 h/a	Síncrona	Demonstrações - apresentação	
31/05/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
03/06/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
07/06/2021	2 h/a	Síncrona	Poliedros; Relações de Euler	
10/06/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
14/06/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
17/06/2021	2 h/a	Síncrona	Cubo e paralelepípedo retângulo	
21/06/2021	2 h/a	Síncrona	Resolução de exercícios em grupo	Cena 2 (5.2.1)
24/06/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
28/06/2021	2 h/a	Síncrona	Prismas	Cena 3 (5.3)
01/07/2021	2 h/a	Síncrona	Princípio de Cavalieri. Atividade em salas temáticas. Pirâmides	Cena 4 (5.1) Cena 1 (5.2.2) Cena 4 (5.3)
05/07/2021	2 h/a	Síncrona	Cilindros.	
08/07/2021	2 h/a	Síncrona	Cones	
12/07/2021	2 h/a	Assíncrona	Lista de exercícios	
15/07/2021	2 h/a	Síncrona	Esfera	
19/07/2021	2 h/a	Síncrona	Apresentação de trabalhos – inscrição e circunscrição de sólidos	Cena 3 (5.2.3) Cena 5 (5.3)
29/07/2021	2h/a	Síncrona	Apresentação de trabalhos – inscrição e circunscrição de sólidos	Cena 2 (5.3)

02/08/2021	4h/a	Síncrona	Avaliação em duplas	
09/08/2021	2h/a	Síncrona	Apresentação de trabalho – aula para Educação Básica	Segundo Questionário
12/08/2021	2h/a	Síncrona	Apresentação de trabalho – aula para Educação Básica	Cena 5 (5.2.5) Cena 6 (5.3)
16/08/2021	1h/a	Síncrona	Apresentação de trabalho – aula para Educação Básica	Cena 6 (5.1) Cena 5 (5.2.5) Cena 1 (5.3)
19/08/2021	1h/a	Síncrona	Apresentação de trabalho – aula para Educação Básica	Cena 7 (5.3)
02/09/2021				Entrevista – Cena 6 (5.2.6)

Fonte: Dados da Pesquisa.

Dos dados produzidos, emergiram três dimensões de análise: do ensino remoto para a aprendizagem virtual, experimentação com tecnologias e visualização e Educação Matemática. Nesse sentido, seguirei abordando cada uma delas.

5.1 Do Ensino Remoto para a Aprendizagem Virtual

Esta pesquisa foi realizada com uma turma de estudantes do curso de Matemática de forma remota, na qual os dados foram produzidos em momentos síncronos e assíncronos. Vivenciamos diversas discussões ao longo da disciplina na plataforma *Google Meet*, onde ocorreram os encontros em tempo real. Outros aspectos da investigação, como os comentários das leituras efetuadas para futuras discussões, as atividades realizadas, a elaboração dos trabalhos individuais, em dupla ou em grupos, ocorreram em períodos assíncronos. Além disso, as aulas foram gravadas e postadas na plataforma *Google Classroom*, assim como textos e vídeos foram disponibilizados, o que propiciou a visualização e comentários do conteúdo pelos alunos.

Os encontros síncronos tiveram, em média, duração de 1h50min.. Os alunos podiam abrir a câmera quando achassem oportuno, o que aconteceu durante algumas discussões ou em suas apresentações. O chat foi bastante utilizado no decorrer das aulas síncronas.

Na primeira aula da disciplina, a pedido da turma, foi criado um grupo de *WhatsApp* para facilitar a comunicação, intitulado “Geo euclidiana espacial”. Porém, para além do grupo, 19 estudantes enviaram mensagens individuais via *WhatsApp* para o número de celular

particular da professora¹⁵, pois tinham acesso ao número individual por meio do grupo e, com isso, encaminhavam mensagens. Destaco que essas interações passaram a ocorrer dois dias após o primeiro encontro síncrono. A primeira delas pode ser observada a seguir:

A₆(21/04/2021): Oii professora, tudo bem? Aqui é a estudante A₆, faço Geometria Euclidiana Espacial com você! Eu vi um negócio no Instagram e achei muito interessante, não sei se pode ajudar nas aulas. Vou te mandar.



A₆(21/04/2021):

Pesquisadora(21/04/2021): *Oi participante A₆. Vou olhar sim. Toda ideia é bem-vinda.*



Pesquisadora(21/04/2021):



A₆(21/04/2021):

Esse vídeo, que estava no *Reels* do *Instagram*, mostrava como usar uma extensão do *Google*, a *Web Paint*, que tem a possibilidade fazer do *Google Chrome* a sua lousa digital, ensinando como instalar e auxiliando a desenhar, rabiscar, circular, dentre outros, em cima de qualquer arquivo que a pessoa estivesse usando dentro do *Google*. Sendo pertinente ao tema da aula, repassei para a turma no encontro síncrono seguinte, para que pudéssemos explorar mais uma mídia durante as aulas.

Lévy (2000) já dizia que a comunicação no ciberespaço pode ocorrer independentemente do local onde as pessoas se encontram. Neste caso, a informação de uma estudante, ocorrida em local desconhecido, pôde ser repassada para os outros e utilizada por vários deles durante o curso. Como no ensino remoto os trabalhos realizados e apresentados pela turma para os colegas e professora necessitavam das potencialidades da ferramenta, a iniciativa da aluna em trazer essa informação, logo que identificada por ela, via *WhatsApp*, fez

¹⁵ Nesta pesquisa a professora e a pesquisadora são a mesma pessoa, portanto, para clarificar a leitura usaremos apenas um dos termos.

com que a propagação do conhecimento e sua utilização ocorresse de forma positiva nas atividades desenvolvidas e explicadas nos encontros síncronos.

Ainda para Lévy (1996), o atual alimenta o virtual, o qual multiplica as possibilidades de atualizar o real e, além disso, aquilo que é possível, quando se concretiza, torna-se real. Neste sentido, a busca por uma mídia digital realizada pela estudante A₆ ocorreu em um momento atual da aluna. Esta informação, quando aceita pela professora, passou pelo estágio do “possível” (Lévy, 1996) no momento que ela repassou o *link* do vídeo para a turma e chegou ao status de “real” (Lévy, 1996) quando foi usada por diversos alunos. Devido a essa indicação realizada pela estudante A₆, outras ferramentas e aplicativos foram sugeridos por demais alunos dessa turma e utilizados por todos.

Podemos observar que a interação ao longo da disciplina proporcionou aceleração na troca de informações, independentemente do local e do tempo em que o indivíduo mobiliza conhecimentos. Além disso, as pessoas sentem-se mais à vontade de interagir sem serem observadas olho a olho, principalmente aquelas que são um pouco mais tímidas que as outras.

Lembro aqui que, para Lévy (1999), o ato de transferir arquivos favorece uma distribuição acelerada de programas no ciberespaço. Para a educação na modalidade remota, em uma turma de quase quarenta alunos, temos a possibilidade de compartilhamento de quarenta *softwares*, aplicativos ou ferramentas que podem ser empregados a uma determinada disciplina do Ensino Superior. Neste sentido, o ensino remoto apresentou como característica a condição de utilização de diferentes tecnologias digitais (TD).

Além disso, cada aluno que aprende a utilizar uma tecnologia que, para ele era desconhecida, abre as portas para a sua utilização com os seus futuros alunos, ou seja, esta é uma maneira de levar a tecnologia para as salas de aula de matemática. A busca por levar as TD para a educação ativa é convergente com o pensamento de D’Ambrósio (2002, p. 80), quando destaca que vivemos na era da sociedade do conhecimento e pondera que:

A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto, sobretudo, ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro.

Neste sentido, Rosa, Santos e Souza (2021, p. 290) consideram que “englobar as TD no ambiente escolar é um dos grandes desafios do século XXI, devido à resistência estabelecida

por professores que estão habituados a trabalhar no ensino tradicional”. Evidencio que a formação inicial e continuada em tecnologias para os professores de matemática é essencial para que a prática do uso de TD nas aulas de matemática sejam reais.

Conforme o pensamento de Lemos e Lévy (2010), boa parte das ferramentas no ciberespaço são acessíveis, gratuitas e fáceis de utilizar, com interfaces amigáveis, propiciando boa desenvoltura daqueles que passam a manuseá-las. Na perspectiva da Educação Matemática, este fato torna-se relevante, no sentido de trazer motivação para uma turma quando o emprego de novas tecnologias é proposto nas aulas de matemática, mais especificamente de GEE.

Outro ponto relevante consiste na interação a partir da troca de informações, favorecendo o que Lévy (2015) chama de inteligência coletiva, pois presenciamos uma interação do tipo Todos e Todos. Nela, uma estudante buscou noções na internet, no caso, utilizando o *Instagram*, e acabou partilhando com todos os colegas, contribuindo com a produção de conhecimento no ciberespaço e sendo incessantemente valorizada, na medida em que a ferramenta proposta podia ser útil para cada um dos alunos da pesquisa que optaram por aplicá-la.

As mídias digitais utilizadas no ensino remoto e divulgadas pela professora para os alunos ou entre os próprios estudantes trouxe motivação às aulas virtuais via plataforma *Google Meet*. Preciso ressaltar que, no período da pandemia causada pela COVID-19, a professora trabalhou apenas com uma turma, diferenciando-se daqueles professores que tinham que lidar com o ensino remoto para diversas classes, levando em consideração o tempo para preparo das aulas e a busca por recursos tecnológicos, além do próprio entendimento da logística de funcionamento das plataformas virtuais.

Sem dúvida, a mudança inesperada trouxe dificuldades para professores dos diversos níveis de ensino. Segundo Silva, Nery e Nogueira (2020, p. 113), a pandemia mostrou a necessidade de incluir as tecnologias na formação dos professores, pois:

O que se constatou com o atual contexto é que muitos professores, dentre eles, os de Matemática, foram surpreendidos por essa transição (im)posta pela pandemia de um ensino presencial para o remoto. Para muitos, essa transição se deu sem planejamento e sem considerar as diferentes realidades, inclusive materiais e de formação. A maior parte dos professores brasileiros, não foi preparada para integrar tecnologia nos processos de ensino aprendizagem e para ensinar de forma on-line.

Outro tema desta dimensão foi a afetividade observada a partir dos comentários dos participantes e, particularmente, durante uma aula que foi destinada à apresentação de algumas

demonstrações realizadas pelos alunos e expostas em sala, quando uma estudante enviou mensagem para o *WhatsApp* pessoal da professora:

A₂₃ (06/05/2021): *Oi professora. Eu sou a participante A₂₃, eu estou na lista para apresentar hoje. Teria problema se eu apresentasse semana que vem? Não foi por falta de fazer. Eu juro.*

Pesquisadora: *Qual é o seu?*

A₂₃ (06/05/2021): *Eu posso até mandar foto.*

Pesquisadora: *O que aconteceu?*

A₂₃ (06/05/2021): *Mas é que eu tô com ansiedade e não consigo parar de chorar. Eu tô muito nervosa.*

Pesquisadora: *Pode ficar tranquila.*

A₂₃ (06/05/2021): *O meu é o penúltimo.*

Pesquisadora: *Se não melhorar pode sim. Tenta acalmar.*

A₂₃ (06/05/2021): *É o “por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado”.*

Muito obrigada. *Eu juro que não foi por falta de fazer, estou com as coisas feitas aqui, eu só não estou bem e eu posso mandar foto para comprovar.*

Pesquisadora: *Tudo bem. Apresenta semana que vem e fica tranquila por favor.*

A₂₃ (06/05/2021): *Obrigada professora, obrigada de verdade.*

Pesquisadora (07/05/2023): *Participante A₂₃ você está bem? Bom dia.*

A₂₃ (07/05/2021): *Bom dia, professora. Estou melhor sim, obrigada por perguntar! E obrigada mais uma vez por ter deixado apresentar semana que vem. Ontem eu fiquei muito nervosa e ansiosa, eu passei a tarde chorando, eu nunca fiquei assim nas apresentações, eu sou tímida, sempre fico um pouco nervosa, mas não igual a ontem. Obrigada mais uma vez!*

Pesquisadora (07/05/2023): *Isso vai melhorar ao longo do tempo. Fica tranquila. Um excelente FDS.*

Pesquisadora: 

A₂₃ (07/05/2021): *Obrigada, professora!! Pra você também!*

A₂₃ (07/05/2021): 

Este diálogo nos leva a pensar que muitas foram as dificuldades que surgiram no ensino remoto, tanto para estudantes, quanto para professores. Uma aluna que já era tímida normalmente, sentiu-se acuada no momento de fazer uma apresentação *online*. Apesar de existirem seres humanos que se sentem mais à vontade por detrás de uma câmera do que pessoalmente, há aqueles que reagem de forma diferente, sentindo um certo mal-estar ao terem que se expor diante de uma câmera.

A forma com que a aluna encontrou para manifestar o seu desequilíbrio emocional naquele momento foi através do *WhatsApp*, ainda correndo o risco de a professora não olhar o

que estava acontecendo, exatamente por estar observando e prestando a atenção nos outros trabalhos que estavam sendo apresentados. Ocorreu que os estudantes usavam a câmera e o microfone quando queriam argumentar sobre o que estava sendo dito na aula, o *chat* para fazerem comentários nos quais a turma podia participar e o *WhatsApp* quando queriam falar apenas com a professora. Por esse lado, podemos questionar: o professor está apto a observar três ferramentas de diálogo ao mesmo tempo?

O uso do *WhatsApp* aconteceu bastante durante a pesquisa e entendemos que a falta de uma ferramenta que substituísse tal uso no *Google Classroom* ou, no próprio *Google Meet*, propiciaram os diálogos dessa forma. Consideramos que uma simples ferramenta de mensagem nesses aplicativos poderia contribuir para a comunicação, como ocorre com a ferramenta Fórum em plataformas de EAD, podendo ser exemplificada pela plataforma *Moodle*.

Outro aspecto a ser considerado nessa situação é que a aluna necessitava de um *feedback* para sentir-se tranquila e poder apresentar o seu trabalho com mais serenidade na próxima oportunidade. Porém, a modalidade de ensino remoto ocorreu repentinamente, trazendo dificuldades para aqueles professores que precisavam dar atenção a todos os alunos e suas necessidades, assumindo suas cargas horárias normais, lecionando em diversas turmas simultaneamente, como ocorreu no período da pandemia. O professor precisava ser criativo, trazer outras oportunidades de mídias para serem usadas em suas aulas, o que demanda tempo, além de manter a relação social e de confiança com seus alunos.

De acordo com Lévy (1993), as maneiras de se comunicar e se expressar são novas com o uso da informática, a terceira tecnologia da inteligência. Portanto, é natural que um estudante apresente dificuldades de comunicação e expressão em uma sala de aula virtual, pois, tudo aquilo que é novo, leva à insegurança. Vale ressaltar que após algumas apresentações de trabalhos em sala de aula virtual, o fato passa a ser comum para quem o desenvolve e a tendência é que se torne algo normal.

Podemos ver nesse diálogo entre a estudante e a professora o uso de *emojis*, no final da conversa, um representando um mimo com um beijo e o outro representando uma pessoa tímida. Em relação à comunicação com *emojis*, Chiari (2018, p. 48) argumenta:

O uso de *emojis* ajuda a exemplificar uma característica bastante comum que a comunicação passa a ter em tempos de internet e artefatos tecnológicos: a multiplicidade. A internet e as telas em geral permitem que diversas linguagens sejam utilizadas em conjunto, mesclando escrita, oralidade, imagens, sons, gestos, vídeos.

Neste caso, posso considerar que as imagens fizeram parte do diálogo no Whatsapp, trazendo mais que a linguagem escrita para esse momento. As imagens refletem o que estava acontecendo naquele momento com a estudante, o que foi respeitado pela professora.

Lévy (2015) já trazia reflexões sobre a criação do Espaço do Saber, que começa com as relações humanas, nas quais devem ser respeitados os princípios éticos das competências e mudanças de cada ser humano dentro de um coletivo. Nesta pesquisa, considerei a turma da disciplina de GEE como um subconjunto deste espaço e procurei respeitar as individualidades de cada um dos alunos. Sendo assim, concluí que, nas aulas de GEE, no ensino remoto, é possível ser flexível, no sentido de buscar não prejudicar o aluno e nem o entendimento do conteúdo pelo coletivo.

Ainda em direção à afetividade nesta dimensão da pesquisa, os participantes comentaram nas aulas ou através dos *chats* nos encontros síncronos ou, ainda, no *WhatsApp*, que gostariam muito de conhecer os seus colegas, pois ingressaram na universidade no ano de 2020, momento em que o isolamento social era obrigatório para toda a população brasileira. Os estudantes falavam também do sentimento de solidão em assistir as aulas de casa, da falta de computadores para todos os membros da família e do acesso à internet, nem sempre satisfatório.

Uma realidade das famílias brasileiras é que não existe um computador para cada membro da família, o *Wi-Fi* não está presente em todas as casas e, mesmo naquelas em que está, existem os problemas de conectividade (Borba, 2021; Cardoso; Ferreira; Barbosa, 2020). Considero que é possível o ensino remoto para alguns contextos educacionais, desde que haja planejamento, computador, acesso à internet, professor que saiba usar tecnologias e que tenha tempo para preparar as suas aulas.

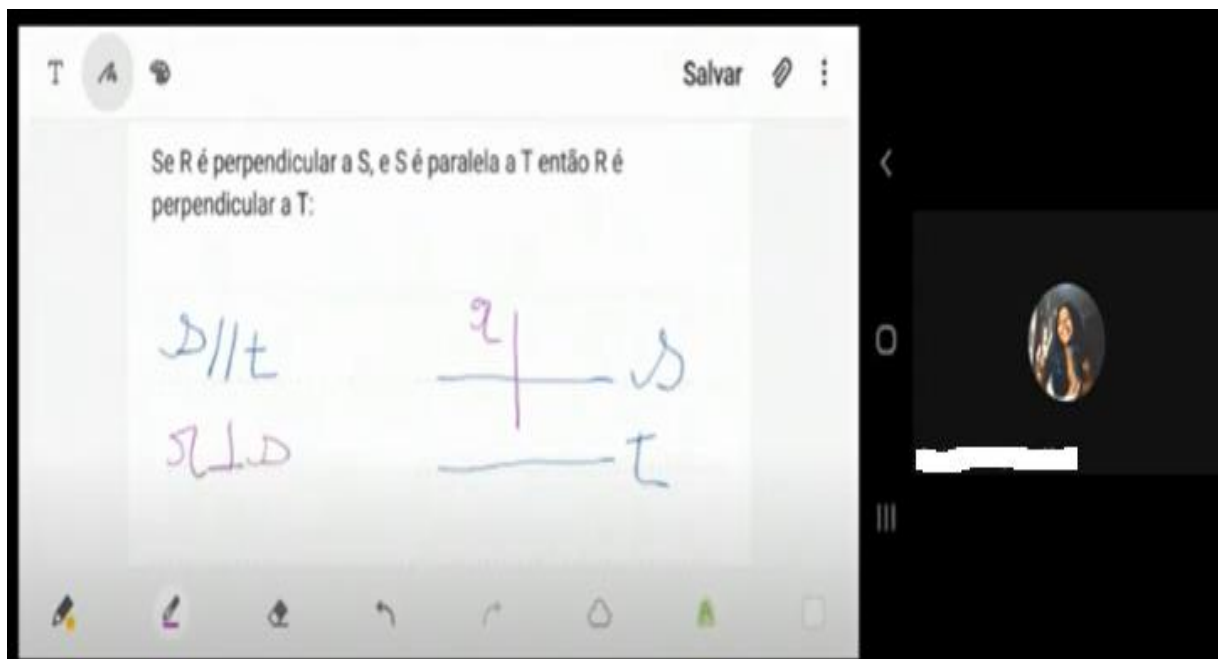
Outro aspecto que pode ser identificado nesta dimensão foi o diálogo durante e pós aula remota realizados entre aluno-aluno e professor-aluno, com discussões pertinentes aos conteúdos da disciplina GEE. Em uma das aulas realizadas, na qual os alunos apresentavam, em duplas, uma demonstração e um exercício escolhido por eles, condizente com a demonstração feita, referente aos conteúdos paralelismo, perpendicularismo e aplicações para a GEE, as estudantes A_2 e A_{21} demonstraram o teorema: *Se R é perpendicular a S , e S é paralela a T , então R é perpendicular a T .*

Antes mesmo de começarem a expor a demonstração para a turma, a estudante A_{21} disse que estava nervosa e a professora elucidou que não era necessário ficar preocupada, pois o objetivo era que todos aprendessem. As alunas A_2 e A_{21} gravaram um vídeo em que a demonstração não foi feita corretamente:

A₂ (06/05/2023): *Temos duas retas chamadas s e t . Sabemos que elas são paralelas, ou seja, elas não se encontram em nenhum ponto. Em s temos uma outra reta r que é perpendicular a s , ou seja, formam ângulo de 90 graus quando intercepta a reta s .*

O pensamento da estudante A₂ pode ser visualizado na imagem a seguir, na Figura 7:

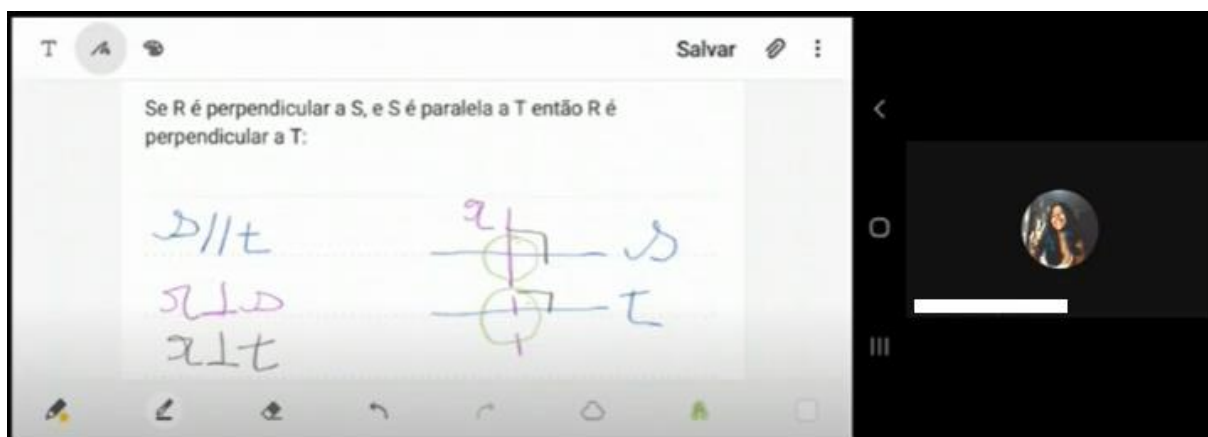
Figura 7 – Ilustração do pensamento matemático da estudante A₂.



Fonte: Dados da pesquisa.

A₂(06/05/2023): *Prolongando essa reta r aqui, por s e t serem paralelas, os ângulos formados por uma reta que corte as duas serão iguais, tanto em cima quanto em baixo e como nós sabemos que r está formando um ângulo de 90 graus em s , logicamente nós temos que o r também está fazendo um ângulo de 90 graus em t . Então nós temos que através desses ângulos correspondentes nós provamos que r é perpendicular a também.*

Na situação apresentada pela estudante A₂ percebemos a disposição prototípica das retas paralelas. É muito comum encontrarmos as retas paralelas sempre feitas na horizontal, quando sabemos que a figura poderia ser desenhada de forma diferente. Por que não desenharam de outra forma? A estudante segue a sua demonstração (Figura 8), que pode ser visualizada em vídeo na Figura 9.

Figura 8 - Continuação da demonstração realizada pela estudante A₂

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 9 - QR Code 3: Vídeo de demonstração na íntegra



Fonte: produzido pela autora (2023).

Em seguida foi apresentado um exercício pela estudante A₂₁ e a professora argumentou:

Pesquisadora (06/05/2023): *Alguém gostaria de fazer algum comentário antes que eu fale?*

A₂(06/05/2023): *Ai, que medo.*

Pesquisadora (06/05/2023): *Não é para ter medo. Estamos aqui para aprender. Porém, o que foi feito não está demonstrando o teorema, já que não partiram das duas hipóteses. Gostaria que repensassem e trouxessem na próxima aula. Se precisarem de ajuda podem me falar.*

A₂(06/05/2023): *Professora, posso ficar depois da aula para discutirmos isso, porque não entendi direito.*

Pesquisadora (06/05/2023): *Podemos sim.*

A₉(06/05/2023): *Posso ficar também?*

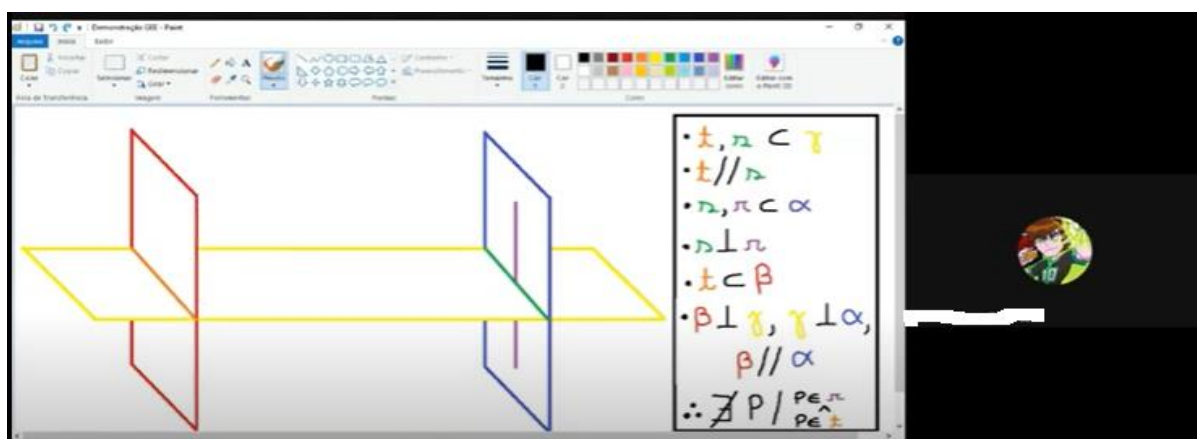
Pesquisadora (06/05/2023): *Pode.*

A₁₃(06/05/2023): *Eu também quero participar da discussão.*

Pesquisadora (06/05/2023): *Tudo bem.*

Ao finalizar a aula, os estudantes A_2 , A_{21} , A_9 e A_{13} continuaram na plataforma *Google Meet*, enquanto os demais se desconectaram. A partir das discussões realizadas, o estudante A_{13} abriu um arquivo no *Paint* e foi montando a demonstração, de acordo com a discussão que foi se desenrolando ao longo do encontro pós-aula, comprometendo-se a levar e apresentar para a turma no encontro síncrono seguinte. A demonstração pode ser vista através da Figura 10, e a explicação é apresentada em seguida.

Figura 10 - Demonstração realizada pelo estudante A_{13}



Fonte: Dados da pesquisa.

A_{13} (17/05/2021): As retas t (cor laranja) e s (cor verde) estão contidas em gama (cor amarelo). As retas s (cor verde) e r (cor roxa) estão contidas no plano alfa (cor azul) e são perpendiculares. A reta t está contida no plano beta (cor vermelha), o plano beta é perpendicular ao plano gama e o plano gama também é perpendicular ao plano alfa, nunca irá existir um ponto que vai pertencer a reta r e a reta t ao mesmo tempo. Então como elas não se cruzam em um ponto essas retas são reversas pois não tem pontos em comum mas estão em planos diferentes. Na realidade, o único caso em que vamos conseguir provar que elas são perpendiculares é quando elas forem coplanares, porque o plano alfa pode ser rotacionado, não precisa ser exatamente como coloquei ele, perpendicular a gama. Se ele estiver deitado e a reta s continuar contida em alfa, e passa por um plano inclinado formando um ângulo de 90 graus no ponto de interseção entre s e r , nunca terá um ponto que irá encontrar a reta t . Então, o único caso que irá acontecer é quando deitar a reta r para a esquerda no plano gama, aí elas serão perpendiculares. Nos outros casos elas são reversas, e era isso.

O vídeo da demonstração realizada pelo estudante A_{13} pode ser assistido por meio do QR Code a seguir (Figura 11):

Figura 11 - QR Code 4: Vídeo da apresentação na íntegra



Fonte: Produzido pela autora (2023).

As estudantes A_2 e A_{21} ficaram responsáveis por disponibilizarem a demonstração escrita na plataforma *Google Classroom* no espaço reservado a essa aula, para os demais colegas poderem apreciar e fazer comentários, caso julgassem necessário.

Uma observação importante foi que, no ensino remoto, assim como no ensino presencial, os alunos podem sentir a necessidade de ficar depois do horário da aula para alguma discussão referente ao conteúdo abordado ou até mesmo para interagirem um pouco mais, conforme aconteceu neste caso.

Além disso, no ensino remoto, nesta investigação, o uso de tecnologias trouxe motivação aos estudantes, que mostravam as suas habilidades ao utilizarem programas diferentes, de acordo com aqueles que tinham mais facilidade. As discussões foram ricas e os comentários dos colegas sempre eram expressos nos *chats*: na maioria das vezes, elogiavam uma demonstração inteira, parte dela, ou a forma da apresentação; outras vezes, questionavam algum ponto em que houvesse dúvida.

É importante ressaltar que os arquivos de gravação de aula e dos *chats* eram enviados separadamente para o e-mail da professora e, sempre que necessário, era preciso abrir os dois, simultaneamente, para ler o que estava sendo escrito no *chat* no momento da apresentação dos colegas. A professora precisava estar atenta às apresentações e ao *chat* ao mesmo tempo para não deixar nenhuma dúvida passar sem uma discussão.

O uso das tecnologias propiciou maior dinamicidade nos encontros síncronos do ensino remoto, no caso dessa turma. A diversidade das atividades propostas também foi fator relevante para a motivação dos alunos, no sentido de acompanharem e participarem da disciplina. Quando não podiam participar, diversas vezes enviavam mensagens via *WhatsApp* para a professora, justificando antecipadamente a falta. Vale ressaltar que o *WhatsApp* foi amplamente utilizado nesta disciplina, por se tratar de ensino remoto. De acordo com Leite, Lima e Carvalho (2020, p. 7),

As redes sociais podem ser usadas como recursos que estimulam o interesse dos alunos, promovendo o compartilhamento de informações e comunicações, desenvolvendo trabalhos colaborativos e permitindo ao aluno participar dos processos de ensino e aprendizagem.

Ao pensar no isolamento social inserido neste contexto de pandemia, o aluno, ao utilizar o seu celular para se comunicar com os colegas e professores de suas disciplinas, sentia-se participativo. Este fato também aconteceu comigo (professora) na situação de aluna da pós-graduação nos anos 2020 e 2021 enquanto cursava as disciplinas e no desenvolvimento desta pesquisa, como professora. O *WhatsApp* favoreceu o diálogo em ambas as direções neste período. No entanto, há o desafio de se utilizar esse recurso, pois o volume de mensagens pode se tornar uma sobrecarga ao trabalho docente.

Ainda cabe observar que, quando os alunos precisavam apresentar um trabalho individual ou em grupo, e não podiam participar da aula, uma nova oportunidade era dada. Nesse caso, tinham que gravar um vídeo, colocá-lo no *youtube* e enviar o *link* de acesso para a professora, desde que fosse comunicada, com antecedência, a falta e o motivo. Segundo Lévy, (1996) o virtual não se opõe ao real, o que aqui podemos constatar, já que as aulas e discussões ocorriam na realidade em um espaço virtual e diversas possibilidades de entrega emergiam para solucionar ou justificar ausências.

Já consideravam Baier e Bicudo (2013) que o Espaço do Saber é possível desde que seja valorizada a cognição de um grupo, sem deixar de lado a ideia de cada um dos seres humanos e a colaboração mútua. O diálogo estabelecido pós-aula mostrou-nos o envolvimento de colegas de duplas diferentes de estudo, em participação, buscando a construção de um entendimento coletivo. Neste sentido, além do combinado a ser discutido, surgiram novas ideias que foram repassadas para a turma.

Em outra aula realizada de forma síncrona na plataforma *Google Meet*, com a temática “cubo”, surgiu uma discussão em que se buscava compreender quais seriam as possíveis figuras planas formadas através das interseções entre os planos que passam por um cubo e o próprio cubo.

Havia 28 alunos presentes na sala do *Google Meet*, então a professora usou a ferramenta salas temáticas para dividi-los em cinco grupos com escolha aleatória, reservando, para tanto, doze minutos da aula, para discutirem com colegas e buscarem encontrar as figuras planas. Ao finalizar o tempo:

Pesquisadora (01/07/2021): *O que vocês encontraram?*

A₁₈ (01/07/2021): *Fiz uma construção no Geogebra com algumas seções e passei a imaginar que as seções planas seriam infinitas, só que pelo jeito não é bem assim e não deu tempo de pesquisar na internet.*

A₁₁ (01/07/2021): *Tentei passar um plano pelo cubo, pegando os dois vértices de cima e os dois de baixo. Mas aí fiquei com dificuldade de.... eu não queria fazer um monte de plano dentro de um mesmo cubo. Não sei se a senhora já explicou, mas eu queria pegar um mesmo plano e mover ele, sem ficar criando um monte de plano.*

Pesquisadora (01/07/2021): *Seria interessante pensar em planos diferentes passando pelo cubo em posições diferentes, ao invés de mover uma só seção de um lado para o outro. Seria interessante olhar para onde o(s) plano(s) intercepta(m) as arestas do cubo e, a partir dos pontos de interseção, unir eles para criar as figuras planas.*

A₁₀ (01/07/2021): *Estava no grupo do Participante A₁₈ e, no final, a Participante A₁ comentou que as seções paralelas deveriam ser contadas como uma só, e outra pessoa disse que poderia ser 360, pois são 360 graus. Só que, quando pensamos em 360, tem 180 que são repetidos por serem paralelos. Então eu pensei em 180. Só que quando eu penso em 180, é que eu faço de grau por grau. Só que também existem graus repartidos e daí eu pensei que são infinitos, mais por conta disso. Porque posso pegar 1,3 graus e fazer uma seção, mas 1,5 vai ser diferente.*

Pesquisadora (01/07/2021): *É interessante pensarmos nas seções planas que são polígonos¹⁶ e, por exemplo, teríamos várias seções que são triângulos, em que a soma dos seus ângulos internos é 180 graus, independente do triângulo. Que tal observar os pontos de interseção entre as arestas e os planos que as cortam? Alguém conseguiu fazer alguma seção no cubo?*

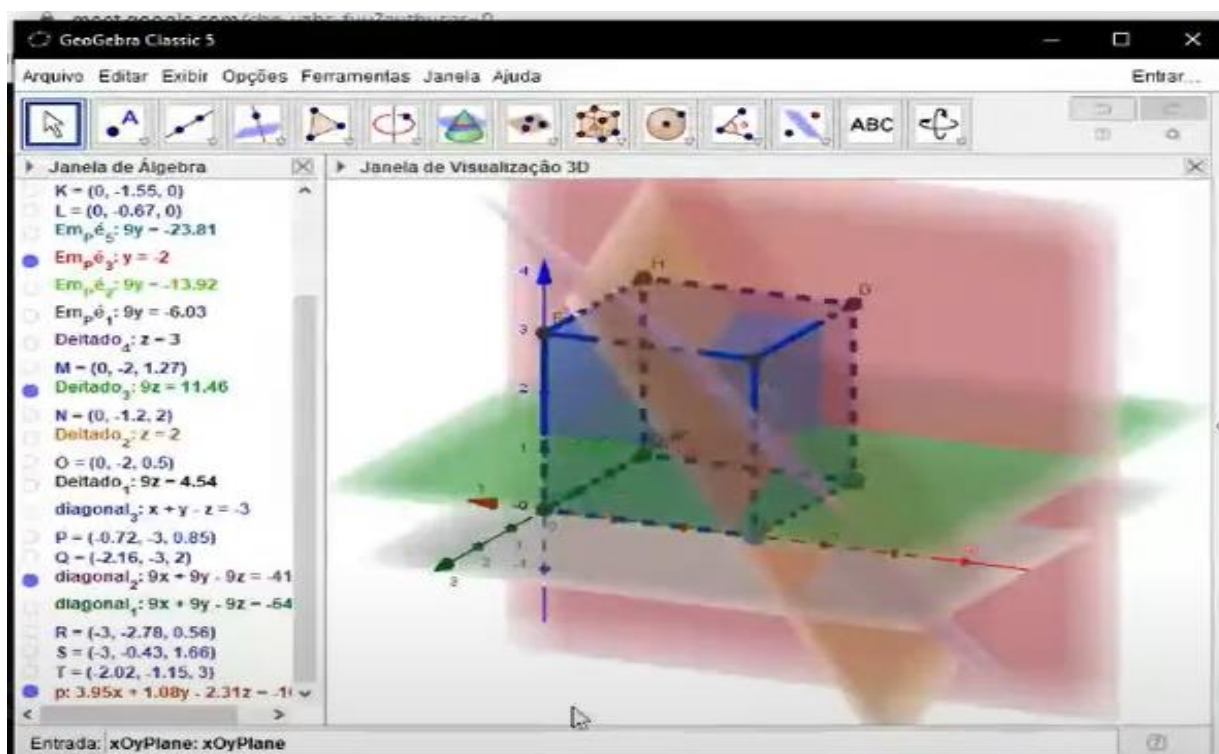
A₁₈ (01/07/2021): *Desenhei algumas. Nada de mais*

Pesquisadora (01/07/2021): *Mostre o que você fez.*

A₁₁ (01/07/2021): *Vi na internet que dava para fazer diversos quadriláteros no cubo, como losangos, paralelogramos, quadrados etc., enquanto o Participante A₁₈ apresentou a figura.*

A representação da atividade desenvolvida no *Geogebra* pela estudante A₁₈ está ilustrada na Figura 12, a seguir:

¹⁶ Vale ressaltar que, nesse recorte de uma discussão realizada em aula, quando se fala em polígonos, já foi esclarecido anteriormente para os estudantes que estamos procurando as interseções entre as seções planas que passam por um cubo e o próprio cubo.

Figura 12 - Representação realizada pelo estudante A₁₈

Fonte: Dados da pesquisa.

Pesquisadora (01/07/2021): *Você falou dos polígonos de 4 lados e eu gostaria de saber se tinham outras possibilidades, ou seja, outros polígonos.*

A₂₀ (01/07/2021): *Vi um plano que envolve todos os lados do cubo.*

Pesquisadora (01/07/2021): *Sim. Qual a seção plana que seria encontrada nessa situação?*

A₂₂ (01/07/2021): *O hexágono.*

Pesquisadora (01/07/2021): *Um hexágono é uma das seções planas de um cubo. Existe a possibilidade de encontrar, por exemplo, um octógono como seção plana de um cubo? Ou um heptágono?*

A₁ (01/07/2021): *Isso não seria possível, porque quando faço a interseção com o plano, só existe a possibilidade máxima de interseção com os seis lados que um cubo possui.*

Pesquisadora (01/07/2021): *Estamos construindo um bom pensamento.*

A₁₁ (01/07/2021): *Sendo assim, o pentágono também pode, só não pode passar de seis lados, o polígono.*

Pesquisadora (01/07/2021): *Estou gostando da discussão.*

A₁₃ (01/07/2021): *Quadriláteros, pentágonos e hexágonos.*

Pesquisadora (01/07/2021): *Não está faltando algum?*

A₁₃ e A₁₁ (01/07/2021) (simultaneamente): *Triângulos.*

A₁₃ (01/07/2021): *Se passar um plano bem na quinhina do cubo dá um triângulo, como fiz aqui agora no Geogebra.*

Pesquisadora: *Por que a ideia do ângulo de 360 graus não se encaixa, ou seja, por que não é possível partir da ideia de ângulo?*

A₂₀ (01/07/2021): *As possibilidades de polígonos são quatro, embora as seções possam girar os 360 graus, só serão formados esses 4 tipos de polígonos nas interseções.*

A discussão entre alunos e professora se deu após um momento de comunicação entre os grupos e foi rica em comentários. Podemos observar que mídias digitais foram utilizadas no processo de pensamento de todo o grupo para resolução da questão proposta, como o *Geogebra* 3D, com a utilização das ferramentas para cubo e para planos, apresentada pelo estudante A₁₉ e a busca por informações na internet, conforme comentado pelo aluno A₁₁ em sua fala com relação aos quadriláteros encontrados. Nesta ocasião, tanto a internet quanto o *software Geogebra* foram potenciais na colaboração para o processo de entendimento da atividade.

De acordo com Lévy (1996), o virtual é a potência. Para a Educação Matemática, podemos considerar potencial o uso de ferramentas digitais e da internet para favorecer a aprendizagem, como agente participativo de um coletivo, que busca aprender conteúdos matemáticos, como a GEE.

A participação de sete alunos na discussão trouxe pelo menos um aluno de cada um dos grupos que foram criados de forma aleatória, o que mostra envolvimento da turma em uma atividade síncrona no ensino remoto.

A possibilidade que a plataforma *Google Meet* ofereceu de criar grupos aleatórios pode ser considerada uma inovação para o Ensino, já que aqueles mesmos grupos formados normalmente em uma classe da graduação ficam com membros misturados, possibilitando que os estudantes participem de outros grupos, convivendo com outros colegas e, com isso, conhecendo ideias diferentes.

Sempre que queriam falar durante a aula, o estudante usava uma ferramenta da plataforma para “levantar a mão”, possibilitando que outros alunos e o professor visualizassem quem estava solicitando atenção. Além disso, ao professor era disponibilizada uma lista ordenada, possibilitando saber quem havia “levantado a mão” primeiro.

Além das ideias de ciberespaço, Lévy (1999) denominou de cibercultura as mudanças nas atitudes das pessoas no instante que estão no espaço virtual. A partir dessa mudança sugerida pelo autor, considero que a forma de se agruparem em uma disciplina do Ensino Superior, assim como a participação em discussões, trazem evidências do trabalho realizado em equipe e das ideias advindas dos diálogos.

Para essa atividade, os alunos comentaram que seria necessário mais tempo para encontrarem algo mais próximo da resposta que procuravam. Além disso, na plataforma *Google Meet*, a ferramenta de salas aleatórias permite que o professor visite as salas e possa participar das discussões, embora estando distante, e ainda existe a possibilidade de um grupo de alunos chamarem a professora para o esclarecimento de alguma dúvida ou fazerem algum comentário sobre o pensamento desenvolvido por eles.

Esse mecanismo corrobora as ideias de Lévy (1999), sendo que um ser humano, no ciberespaço, pode combinar várias formas de comunicação. Considero que uma aula de GEE de uma turma de estudantes do Ensino Superior pode ser realizada no ciberespaço com diálogos derivados de reflexões mobilizadas a partir das construções realizadas em um *software*, com um aluno sendo porta voz de um grupo e estudantes participando da aula e pesquisando na internet aquilo que está sendo comentado. Todas estas formas de comunicação no ensino remoto vão ao encontro da construção do conhecimento.

Além disso, Almouloud (2018) já comentava que o ensino com a utilização das tecnologias digitais condiciona mudanças tanto nos hábitos dos professores, quanto nos hábitos dos alunos quando eles deixam de ter o professor como único interlocutor e passam a se apropriar também de interações em sites, equipes de estudantes em um mesmo trabalho, o professor quando tem determinada dificuldade, entre outros. Portanto, conforme apontam os dados aqui descritos, alunos, professora e tecnologia participam conjuntamente de uma discussão e conseguinte elaboração de uma apresentação para toda a turma.

Como outra temática desta dimensão de pesquisa, trazemos a avaliação em tempos de ensino remoto, que foi um desafio ocorrido durante o período de pandemia, anos 2020, 2021 e início de 2022 para os professores, em relação à forma de avaliar os estudantes.

A preocupação em enviar uma prova escrita e pedir para os alunos fazerem com câmera aberta e eles “colarem” (pedirem ajuda via *WhatsApp* para os outros) era real, além de poderem utilizar os materiais de aula, o “ajudante” Google, dentre outros meios que permitissem que eles não compreendessem o conteúdo, foi motivo de discussão entre diversos docentes naquele período.

Nesta disciplina, a professora optou por realizar diversas atividades em que os estudantes deveriam apresentar trabalhos individualmente, em duplas ou em grupos maiores, postar as diversas listas de exercícios na plataforma *Google Classroom*, permitindo que os demais colegas pudessem visualizar e comentar sobre as atividades dos colegas, dentre outras.

No último mês do curso foi realizada uma avaliação em que foi permitido o uso de materiais da internet e de qualquer recurso que julgassem interessante para o trabalho. Esta

avaliação deveria ser realizada em dupla, com duração de três horas, e tinha como objetivo compreender o entendimento do conteúdo, a coerência na escrita matemática e a resolução de questões. O contexto da avaliação será representado no Quadro 7:

Quadro 7 - Avaliação – Geometria Euclidiana Espacial

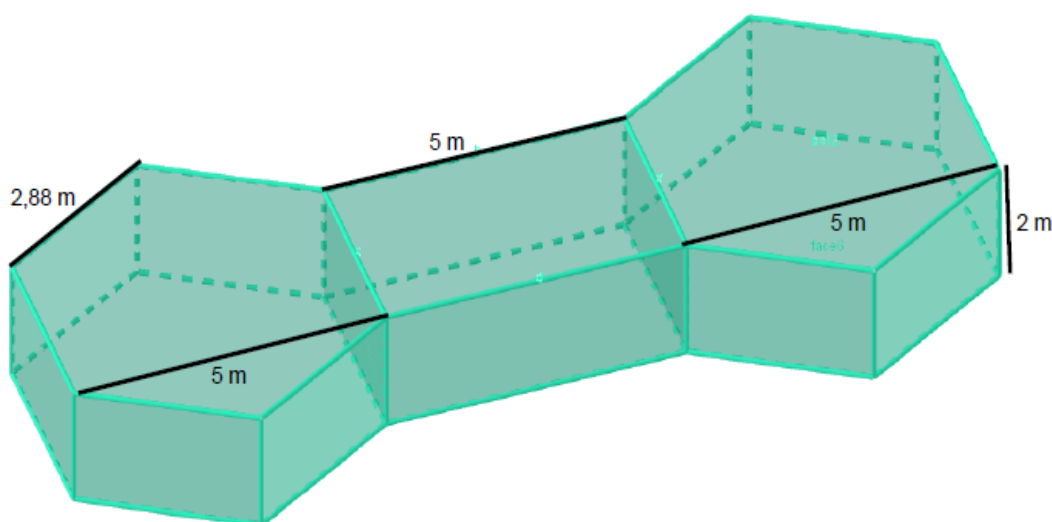
Avaliação – Geometria Euclidiana Espacial	
Alunos:	
<u>Orientações:</u>	
1.	Cada aluno deverá elaborar duas questões relacionadas aos conteúdos estudados contextualizadas.
1.	Os pares deverão revisar as questões elaboradas.
2.	Por fim, as duplas deverão propor uma solução para cada questão elaborada.
3.	Vocês poderão usar materiais e internet para pesquisa, porém a questão não pode ser copiada de lugar algum. As questões devem ser inéditas.
4.	Vocês poderão usar mídias, se acharem interessante, tanto na elaboração das questões, quanto na resolução.
5.	A avaliação poderá ser entregue até às 17:00 h, no e-mail d.pelli@unesp.br

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, apresento algumas das questões construídas pelas duplas (Figura 13).

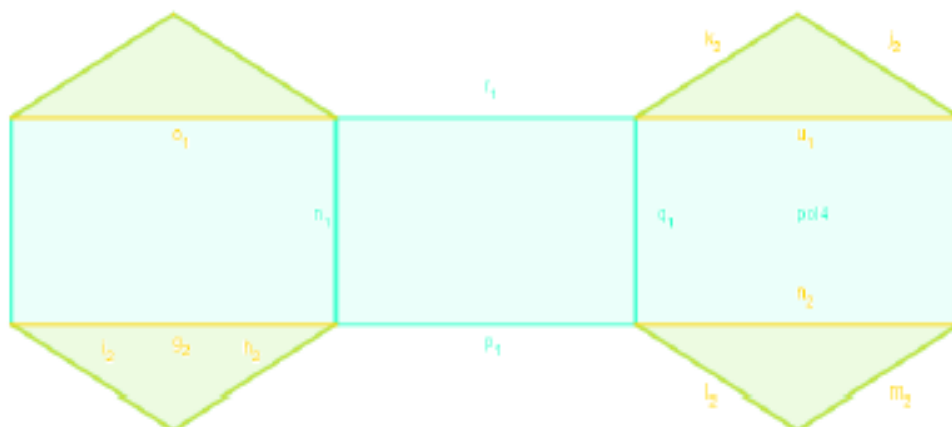
Figura 13 - Questão elaborada pelos estudantes A₉ e A₁₀

Questão 4) Alexandra quer construir uma piscina em sua casa de praia, mas gostaria de um formato diferente do padrão com dois formatos hexagonais regulares e um retangular, assim como mostrado na imagem abaixo.



De acordo com as medidas já dispostas na imagem, Alexandra gostaria de saber quantos metros de azulejo serão necessários para revestir a piscina.

Questão 4) Começando pelo fundo da piscina teremos 3 partes retangulares (em azul) e 4 partes triangulares (em amarelo), sendo suas contas, respectivamente, iguais à:



$$5 \cdot 2,88 = 14,4$$

$$3 \cdot 14,4 = 43,2$$

e, para achar a altura do triângulo fizemos Pitágoras, resultando em aproximadamente 2 metros, portanto:

$$5 \cdot 2 = 10$$

$$4 \cdot 10 = 40$$

Então a área do piso da piscina é igual a $83,2m^2$.

Para fazer as áreas das laterais observamos que existem 12 retângulos, sendo 2 deles feitos por 5 vezes 2 e ou outros 10, 2 vezes 2,88. Logo a área lateral será $2 \cdot 10 + 10 \cdot 5,76$ resultando em $77,6m^2$.

Tendo um total de $160,8m^2$ para serem azulejados.

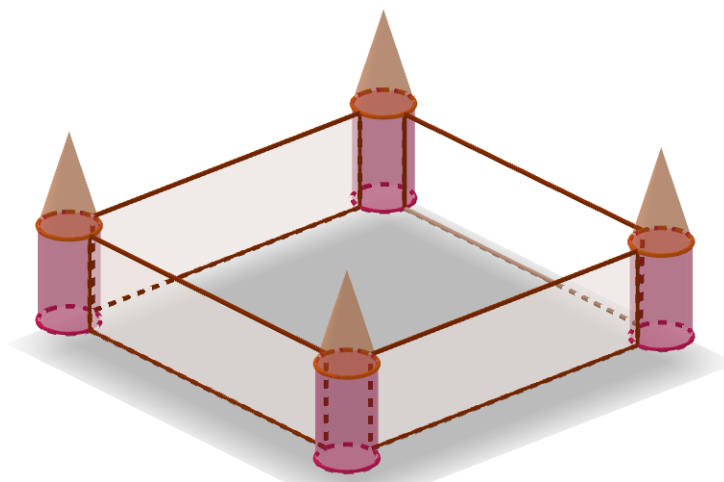
Fonte: Dados da pesquisa.

Embora não tenha a intenção de avaliar aqui os acertos e os erros, esclareço que os estudantes encontraram aproximadamente dois metros para a altura do triângulo representado na figura referente ao fundo da piscina (onde aparecem quatro triângulos), utilizando o teorema de Pitágoras, mas o resultado correto é aproximadamente 1,43 metros para a altura de cada triângulo. Logo, a área calculada está incorreta.

Apresento, ainda uma outra questão, desta vez elaborada e resolvida na avaliação dos estudantes A₁₇ e A₁₃:

⇒ Zezinho foi fazer um castelo de EVA para brincar com suas figuras de ação, como mostra o molde abaixo, na Figura 14:

Figura 14 - Questão da avaliação dos alunos A₁₇ e A₁₃



Fonte: Acervo da autora (2023).

Para que a brincadeira fique divertida, Zezinho decidiu fazer da seguinte maneira:

- As bases dos cilindros e dos cones terão 5cm de raio;
- Os retângulos e os cilindros terão 15cm de altura, já o cone terá 10cm de altura;
- A base dos retângulos medirá 45cm (distância entre as torres);

Ele pensou então em fazer o telhado das torres (cones) com EVA vermelho e as paredes (retângulos e cilindros) com EVA marrom. Quantos cm² ele irá usar em sua construção de cada cor de EVA?

OBS₁: Não deverá considerar as bases do cilindro e do cone, apenas a área lateral. Zezinho decidiu fazer sem elas para poupar esforço

OBS₂: Considere $\pi = 3$, e $\sqrt{5} = 2,2$

Área Total Marrom: $[4 \cdot (\text{Área Lateral do Cilindro}) + 4(\text{Área do Retângulo})]$

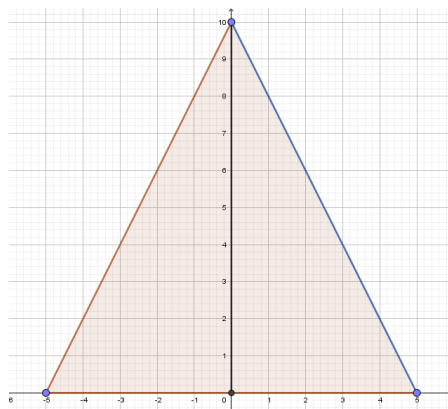
Área Total Vermelha: $4 \cdot (\text{Área do Setor Circular do Cone})$

$A_{t \text{ marrom}}: [4 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h) + 4(b \cdot h)] \Leftrightarrow A_{t \text{ marrom}}: [4 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10) + 4(45 \cdot 10)]$

$\Leftrightarrow A_{t \text{ marrom}}: (1200 + 1800) \Leftrightarrow A_{t \text{ marrom}}: 3000\text{cm}^2$

$A_{t \text{ vermelha}}: 4 \cdot (\pi \cdot r \cdot g)$, onde g é o segmento representado na cor azul na Figura 15, a seguir:

Figura 15 - Figura construída no Geogebra pelos estudantes A₁₇ e A₁₃



Fonte: Acervo da autora (2023).

$$g = \sqrt{5^2 + 10^2} \Leftrightarrow g = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow g = 11$$

$$\Rightarrow A_{t \text{ vermelha}}: 4.(3.5.11) \Leftrightarrow A_{t \text{ vermelha}}: 660\text{cm}^2$$

R.: Zezinho precisará de 3000cm² de EVA marrom e 660cm² de EVA vermelho.

Ao olhar para essas questões posso observar que uma estava relacionada a uma piscina e a outra, a um “joguinho”. Estas foram duas das 76 questões elaboradas pelos alunos, com temáticas diversas. É importante ressaltar que esta foi apenas uma das atividades avaliativas da disciplina, ocorrendo outras realizadas em grupos, em duplas e individualmente.

Em relação ao tempo destinado para esta avaliação, os alunos pediram para gastar mais tempo, o que foi aceito. Prolonguei o período de avaliação para quatro horas, ou seja, os estudantes puderam enviar a atividade realizada para o meu *email* até às 18 horas, o que ocorreu com a maioria deles.

Lévy (1999) já afirmava que a internet é de fácil acesso, além de ter natureza interativa, participativa e lúdica. No Brasil, nem sempre o acesso é fácil (Borba, 2021). Quanto à proposição de questões para os estudantes com possibilidade de acesso à internet, além de sua realização em duplas, está embutida nessa tarefa a liberdade de escolha do contexto, o uso da criatividade e a colaboração entre pares. Com esse intuito, a avaliação aqui considerada foge às regras da “prova” tradicional, oportunizando que o aluno seja ator participativo em cada parte do processo avaliativo, passando por diversas fases, desde a elaboração da questão até a sua resolução.

Outra afirmação de Lévy (1999) refere-se às possibilidades de que o virtual apresenta de multiplicar as oportunidades de atualizar o real. Olhando para a forma de duas duplas de

alunos elaborarem a sua avaliação de quatro questões utilizando a internet, eles puderam buscar ideias anteriores relacionadas com o tema em diversos *sites*, usar *softwares* para sua elaboração, com diversas contribuições do ciberespaço para a criação de cada uma. Este formato de avaliação implica em uma aprendizagem, já que o estudante precisa usar os conhecimentos do conteúdo, tanto para elaborar a questão, quanto para resolvê-la.

Observo também que alguns alunos tiveram dificuldade na elaboração de questões, deixando um enunciado pouco claro para aquele que fosse lê-lo, enquanto outros elaboraram questões coerentes com o que foi pedido pela professora. Esse fato foi levado para a turma, com o propósito de dar um retorno para que na elaboração de questões, quando os estudantes forem professores de matemática, possam prestar mais atenção e ter mais cuidado com a elaboração das questões a serem propostas.

Em relação às avaliações, podemos dizer também que algumas delas, como as trazidas nesta dimensão, foram pensadas com a utilização de algum *software* para criação dos sólidos, enquanto outras foram escritas manualmente, as quais também trouxeram figuras espaciais desenhadas com lápis e régua.

Menezes (2021) considerou que avaliar não é atividade fácil no ensino remoto e que não existe uma forma ideal e única para ser seguida. Ademais, torna-se necessário que os professores olhem para os conteúdos abordados, o perfil dos estudantes e o objetivo da aprendizagem para elaborar as suas avaliações. Sabemos que nem sempre isto acontece no ensino presencial e espera-se que uma avaliação seja pensada dessa maneira que foi descrita pelo autor em qualquer tipo de ensino.

Desta forma, muitas experiências ocorridas no ensino remoto também já aconteciam no ensino presencial, ou seja, muito do que se viu no ensino remoto se aproxima ao que Valente (2022) chamou de virtualização da sala de aula presencial ou uma simples e direta transposição do que se fazia antes da pandemia.

Considero que no ensino remoto, cada estudante seja visto como ator participativo do processo de aprendizagem e, sendo um aluno do Ensino Superior que irá se tornar docente em breve, possa ser capaz de elaborar questões para uma avaliação proposta pela professora, sendo esta uma forma de se ter mais um aprendizado em seu curso, já que a maioria dos professores se forma sem nunca ter criado uma questão anteriormente. Neste sentido, considero importante esta maneira de se avaliar em cursos de licenciatura em diversas áreas, particularmente na Matemática.

Após as temáticas discutidas nesta dimensão, observamos que o Ensino Remoto (ER) surgiu de maneira emergencial, diferenciando-se da educação a distância (EaD), conforme

esclarecimentos encontrados na apresentação desta pesquisa, que aparece na introdução da tese.

No entanto, o que vivenciamos nesta pesquisa, apesar de ocorrer em período de pandemia, e por isso mesmo, considerada como ER, diferenciou-se dessa medida emergencial de ensino. Após todas as reflexões apresentadas nesta seção, considero que a disciplina de GEE se distinguiu do ER e da EaD, podendo ser considerada um tipo específico de educação *online* (Santos, 2009). Apesar de possuir algumas características comuns com as demais, a disciplina de GEE compôs-se pelas seguintes propriedades:

1. ter as ideias de virtual e virtualização discutidas por Lévy;
2. ser uma modalidade de ensino que aconteceu em duas plataformas virtuais do ciberespaço, sendo uma para os encontros síncronos e outra para as atividades assíncronas e visão geral da disciplina ou curso;
3. possuir diferentes formas de avaliação, fazendo com que o aluno faça parte do processo;
4. ser a turma um Espaço do Saber;
5. haver tempo para planejamento de sua disciplina (por parte do professor), interagir com a turma via WhatsApp, conhecer tecnologias digitais educacionais para dar dinamicidade à disciplina ou curso;
6. ter as aulas gravadas e disponibilizadas via e-mail do aluno, para que o mesmo pudesse assistir quantas vezes considerasse necessário;
7. ser desenvolvida com a utilização de mídias digitais diferentes;
8. ter feedbacks realizados, pelo professor, no início de cada aula, sobre o que foi visto na aula que a antecedeu;
9. ter um número de alunos igual ou inferior a 40 (quarenta);
10. existir a possibilidade de apresentação de trabalhos na plataforma para aulas síncronas por qualquer um dos alunos, além da divisão em grupos (com escolha aleatória) para a realização de trabalhos, com a possibilidade de o professor ser chamado, no caso de dúvidas;
11. alunos possuírem um recurso pessoal (computador, tablet, celular) com acesso à internet em qualquer ocasião.

Dentro do contexto, a referida disciplina teve um avanço em relação ao ER e, sendo assim, denominarei Aprendizagem Virtual (AV) todos aqueles processos de ensino e de

aprendizagem que obedeçam às características especificadas, que tenham como base os pensamentos de Lévy e com possibilidades para a configuração de um ensino de qualidade.

Uma outra percepção é sobre o ER ter sido malvisto pela forma que foi instituído e realizado. Sua implementação causou preocupação em toda a comunidade, principalmente em professores, alunos e familiares.

Contrariamente a essa visão, consideramos que a AV pode ser utilizada em eventuais disciplinas, nas quais professores e alunos se encontrem em espaços geograficamente distintos, assim como em diversos cursos, como os de extensão, por exemplo. Esclareço a importância de cursos de tecnologias digitais (TD) para a educação, seja na formação inicial, seja na formação continuada dos professores de Matemática.

Observo ainda que para a AV acontecer da melhor forma possível, é necessário um planejamento pré-disciplina ou pré-curso para a organização do ensino, levando-se em conta cada uma das características descritas, já que em um futuro, sem pandemia, a proposição de uma disciplina ou um curso de AV poderá acontecer com tempo para a sua proposta e organização.

Dando continuidade a esse trabalho, considero que a experimentação com tecnologias foi um aspecto relevante nesta pesquisa e, por isso, abordaremos na próxima subseção a segunda dimensão.

5.2. Experimentação com Tecnologias

Nesta dimensão da pesquisa, irei apresentar e analisar os dados a partir das atividades que foram desenvolvidas durante a disciplina de Geometria Euclidiana Espacial (GEE) no ensino remoto, quando realizadas com interação entre alunos-mídias e a professora, que era quem mediava o processo. Estas interações foram possíveis porque as aulas foram lecionadas com a utilização do *software Geogebra Classic 5* (GG), fazendo com que os estudantes pudessem conhecer as principais ferramentas e comandos do *software* para interagir com ele.

Em um primeiro instante, senti a necessidade de definir o *software* que mais utilizamos para as interações entre humanos e não-humanos. Conforme informações do site oficial do programa, “*Geogebra* é um *software* dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne Geometria, Álgebras, planilhas, gráficos, Estatísticas e Cálculo em

uma única plataforma”¹⁷. Para Dantas (2023, p. 135, grifo do autor), “o Geogebra é um recurso computacional que me permite pensar com ele sobre problemas e obter soluções, realizar projetos e ‘materializar’ ideias”.

Neste sentido, a escolha para que o GG fosse o principal protagonista não-humano nesta investigação se deu pela gama de recursos oferecidos pelo programa para a realização de construções e explorações de conteúdos de GEE. Apesar do GG ter sido a principal mídia, outras foram utilizadas, tais como o *Paint*, o *Google Witheboard*, o *Jamboard*, o *Google Meet*, o *Google Classroom*, a internet, entre tantas.

Em um *design* da pesquisa, propus atividades de realidade aumentada (RA) a serem realizadas no aplicativo do *Geogebra* denominado calculadora 3D. Porém após a observação das aulas iniciais e uma primeira tentativa de utilizar o aplicativo em uma delas, constatei que a maioria dos estudantes não tinha um aparelho smartphone com este recurso. A RA pode ser utilizada em qualquer *iphone* e em celulares mais potentes, ou seja, aqueles que possuem um sistema operacional *Android* (a partir da versão 5) ou *iOS* (versão 10.1 para 11, 12, 13 ou 14) (Lima, 2021), que são aparelhos mais caros. Neste sentido, tornou-se inviável a utilização dessa mídia.

Feitas estas considerações iniciais, procedo a apresentação e análise dos dados referentes à experimentação com tecnologia, além da opinião e do olhar dos estudantes sobre estas interações.

5.2.1. Demonstração realizada com estudantes-mídias

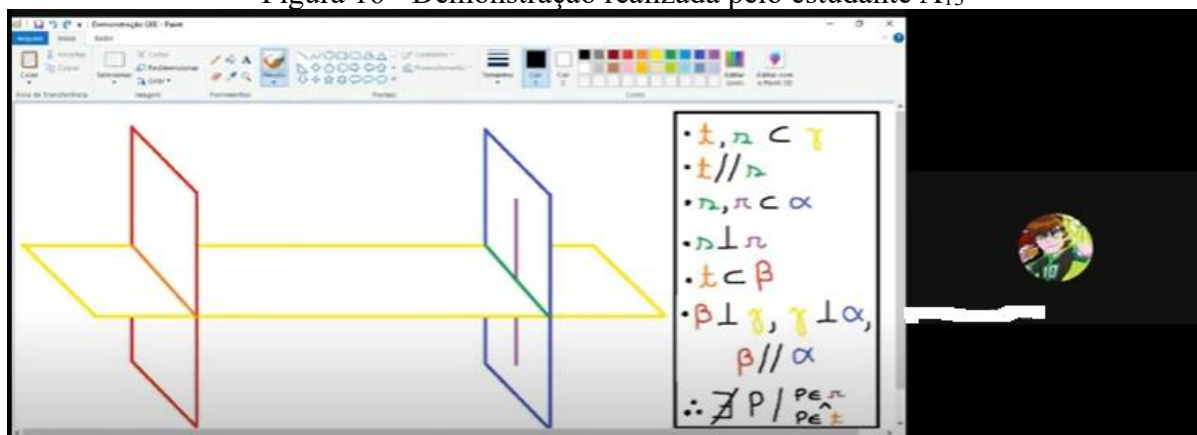
As demonstrações realizadas pelos estudantes, em duplas, no início do curso, e apresentadas nas aulas síncronas, dificilmente foram feitas com a aplicabilidade do GG. Ocorre que neste período do curso, os alunos estavam tendo os seus primeiros contatos com o programa em sua versão 3D, que era utilizado pela professora em suas aulas.

Neste sentido, vou voltar a um dado apresentado na subseção 5.1. quando era tratado o diálogo durante e pós-aula, no dia 05/06/2021, com relação à demonstração sobre a proposição: *Se R é perpendicular a S , e S é paralela a T , então R é perpendicular a T* , pela dupla de estudantes A_2 e A_{21} , e que acabou se tornando uma discussão entre os estudantes

¹⁷ O que é o *Geogebra*. *Geogebra*, 2023. Disponível em: <https://www.Geogebra.org/about>. <Acesso em: 22 de out. de 2023>.

A₂, A₂₁, A₉ e A₁₃, os quais resolveram ficar após o horário da aula e chegaram a algumas conclusões, conforme pode ser visto na Figura 16 e tem o seu desenvolvimento na página 107.

Figura 16 - Demonstração realizada pelo estudante A₁₃



Fonte: Dados da pesquisa.

Esta situação elaborada em aula, tendo como base o diálogo do grupo de estudantes A₂, A₂₁, A₉ e A₁₃, foi realizada no *Paint*, com o uso de cores diferentes para planos e retas, uma legenda para que pudessem ser visualizados os planos e as retas na construção e constitui-se como bom exemplo de uma experimentação com tecnologia realizada em um trabalho coletivo de um grupo de estudantes com mídias.

O *software Paint*¹⁸ foi estruturado para a construção de figuras simples, além de edição de imagens, sendo um acessório do sistema operacional *Windows*, da *Microsoft*. Contudo, nesta experimentação, os estudantes fizeram com que o *software* fosse utilizado com um objetivo diferente daquele para o qual foi pensado e conseguiram realizar sua demonstração, além de poderem perceber mais alguns detalhes relacionados aos planos e às retas já representados na ilustração anterior (Figura 16).

Posso dizer, então, que aqui houve um processo de moldagem recíproca, onde o ser humano moldou o *software* e o *software* foi moldado pelo ser humano (Borba; Villarreal, 2005). Com esse processo, houve reorganização do pensamento e produção de conhecimento, o qual foi apresentado, via plataforma *Google Meet*, aos demais colegas. Dando continuidade à

18

https://pt.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Paint#:~:text=Microsoft%20Paint%20%C3%A9%20um%20software,vers%C3%B5es%20era%20conhecido%20como%20Paintbrush.

apresentação e à análise dos dados, vou discutir sobre uma tarefa realizada por um grupo de estudantes e mídias.

5.2.2. *Questão resolvida pelo coletivo estudante-mídia*

Em uma aula realizada no dia 21/06/2021, foi proposta uma atividade para ser realizada em grupo, onde a divisão foi feita em salas do *Google Meet* com escolha aleatória dos participantes presentes, que neste dia eram em número de trinta estudantes, divididos em sete salas temáticas.

Solicitei que cada grupo escolhesse três exercícios sobre cubos e/ou paralelepípedos, contendo pelo menos um de cubo e um de paralelepípedo, acerca de assuntos que tinham sido discutidos na aula antecedente a esta. As questões escolhidas deveriam ser discutidas entre os membros do grupo e, em seguida, resolvidas com a utilização do GG.

A tarefa tinha a duração de quarenta minutos e os grupos poderiam me chamar nas salas, caso precisassem de auxílio. Após decorrido o tempo destinado para a atividade, os estudantes deveriam escolher três participantes do grupo para apresentarem as questões com resolução para a turma ao voltarem para a sala inicial, de onde saíram para a resolução da tarefa. Após transcorridos aproximadamente dois minutos da proposição da atividade, o estudante A₂ entrou em contato com a professora.

A₂(21/06/2021): Professora, não consegui entrar na sala. Não apareceu para mim o negócio [link com convite para a participação de uma nova sala].

Professora(21/06/2021): Aguarda só um minuto que vou pedir para você entrar em uma sala.

A₂(21/06/2021): Ok.

Professora(21/06/2021): A₂, vou te passar um link pelo chat. Daí você entra nessa sala, está bom?

A₂(21/06/2021): Está bom.

Professora(21/06/2021): Hum, parece que é o mesmo. Teria como você ver se consegue com a estudante A₈ para ela te passar o link da sala que ela está?

A₂(21/06/2021): Professora, parece que é o mesmo, acho que é você que tem que me mandar para a sala.

Professora(21/06/2021): Pois é. Deixa-me ver como faço isso. Já aconteceu outra vez?

A₂(21/06/2021): Então, eu estava com o meet [Google Meet] no meu tablet e acho que o meet dele está desatualizado.

Professora_(21/06/2021): Bem, vou aqui em salas temáticas... pronto, agora você vai entrar em outra sala.

A_{2(21/06/2021)}: Professora, não apareceu nada para mim.

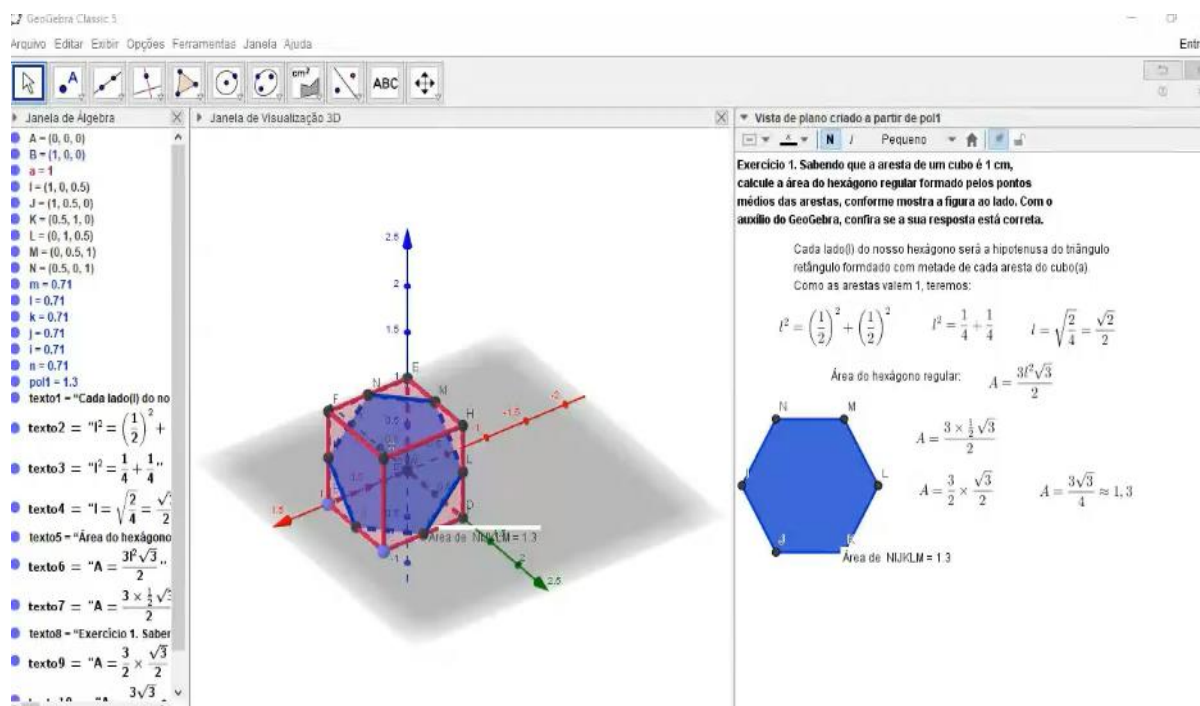
Professora_(21/06/2021): Engraçado, aqui já está aparecendo seu nome na sala... mas falta eu salvar. Agora sim.

Neste instante, a estudante recebeu o convite para participar de uma sala aleatória e aceitou compondo o grupo 3, que tinha os participantes A₄, A₇, A₁ e A₁₁. Duas das três questões discutidas pelo grupo foram apresentadas para a turma.

A_{7(21/06/2021)}: O primeiro exercício que a gente pegou fala assim: Sabendo que a aresta de um cubo é 1 cm, calcule a área do hexágono regular formado pelos pontos médios das arestas conforme mostra a figura ao lado. Com o auxílio do Geogebra, confira se a sua resposta está correta.

Ao dizer isto, a estudante estava apresentando a Figura 17.

Figura 17 - Apresentação do problema sobre cubo pela estudante A₇



Fonte: Dados da pesquisa.

A_{7(21/06/2021)}: A figura que tem ao lado é exatamente esta construção que fizemos no Geogebra. Para construir pegamos o cubo e o ponto médio de algumas das arestas. Ligamos estes pontos e temos o hexágono regular. O exercício pede a área desse hexágono. Aí, primeiro para calcular o lado desse hexágono a gente vai utilizar Pitágoras, com os catetos sendo metade da medida da aresta. Como a aresta mede

1, será $\frac{1}{2}$ cada um desses catetos e o lado do hexágono vamos chamar de l . Aplicando Pitágoras, a gente chega que o lado é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. A área do hexágono regular, que é o que queremos achar é dada por $A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$. Substituindo l , [...] A é aproximadamente 1,3. Usando a ferramenta do Geogebra de área aqui, e clicando no hexágono inscrito, confirmamos que a área é 1,3.

A apresentação da aluna pode ser vista através do *QR Code* abaixo (Figura 18).

Figura 18 - QR Code 5: Apresentação da aluna A₇



Fonte: Elaborado pela pesquisadora (2023).

Seguindo a apresentação do trabalho realizado pelo grupo 3, a próxima estudante a apresentar o exercício sobre paralelepípedo retângulo, abriu a Figura 19.

Figura 19 - Exibição da segunda questão [Exercício 2] discutida pelo grupo 3

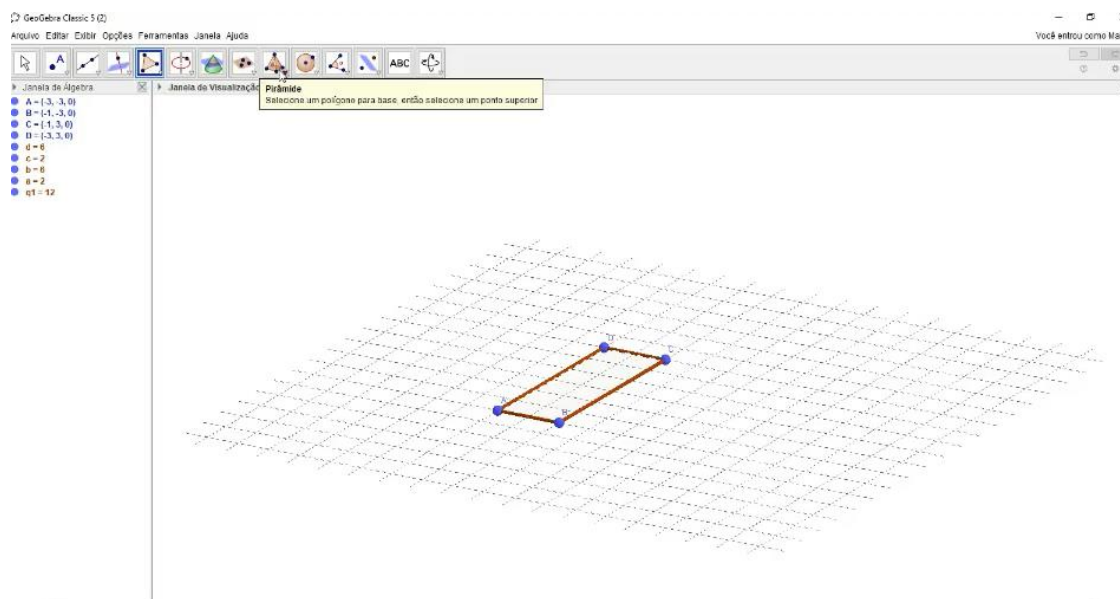
Exercício 2. Construa no GeoGebra um paralelepípedo retângulo de altura 5 e que tem como base um retângulo ABCD de lados 2 e 6. Considere os pontos médios M, N, P e Q de cada um dos lados do retângulo ABCD e construa um prisma reto cuja altura é 5 e que tem o polígono MNPQ como uma de suas bases. Utilizando ferramentas do GeoGebra, conclua que o volume do último prisma construído é metade do volume do prisma inicial. Justifique sua resposta.

Fonte: Dados da pesquisa.

A₁(21/06/2021): *Vou construir aqui então. Deixei a malha aqui para a gente trabalhar nela [malha do Geogebra]. Nessa malha os quadrados são 1 por 1, né? Então fica mais fácil de construir. Vou fazer um ponto e contar, dois quadrados de distância para construir outro ponto. Conto mais 6 pontos de distância em nossa malha e marcamos os pontos da nossa base. Então, a gente pode vir aqui em polígono né, selecionar os nossos vértices.*

A construção da aluna A₁ neste primeiro momento, a partir da malha, segue ilustrada a seguir (Figura 20):

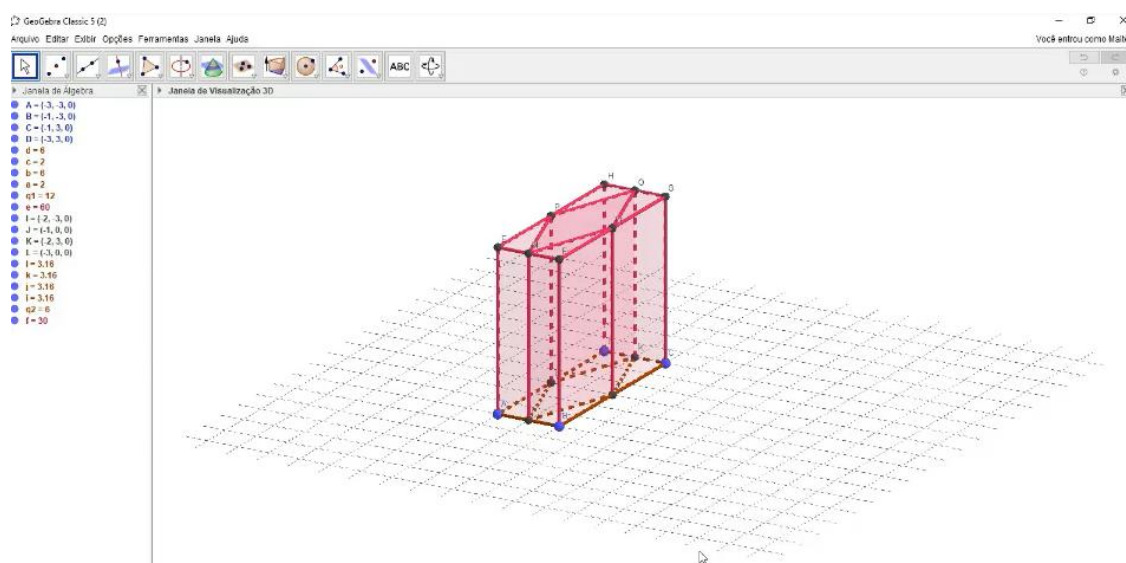
Figura 20 - Primeira etapa de construção de paralelepípedo retângulo a partir da malha do *Geogebra* pela estudante A₁



Fonte: Acervo da autora (2023).

A₁(21/06/2021): *Aí, agora, tem uma ferramenta que a gente pode selecionar, que é extrusão para prisma, escolhemos o polígono que a gente construiu e altura 5. O próximo passo é encontrar os pontos médios da nossa base ABCD, selecionando ponto médio de AB, depois de BC, e os outros. Aqui no Geogebra ele nomeia com outras letras, mas é o MNPQ que ele disse lá no exercício. Com estes pontos, a gente constrói um outro polígono em nossa base. E usa a ferramenta da extrusão.*

Figura 21 - Continuação da construção de paralelepípedo retângulo no Geogebra pela estudante A₁



Fonte: Acervo da autora (2023).

A₁(21/06/2021): Então queremos ver o volume do prisma inscrito e justificar porque o seu volume é metade do que está de fora. Pelo Geogebra, a gente pode vir aqui na ferramenta de volume, seleciona o menor que será 30 e, depois o maior, que será 60. Então, pelo Geogebra, vemos que um é a metade do outro.

A estudante segue apresentando os cálculos matemáticos e justificando que, como a altura de ambos os prismas é igual, o que faz com que o volume do inscrito seja a metade do maior é a área da base. A apresentação feita pela aluna pode ser vista através do *QR Code 6* (Figura 22).

Figura 22 – QR Code 6: Apresentação do segundo exercício



Fonte: Elaborado pela pesquisadora (2023).

Nessa aula, pude observar, a partir do diálogo com a estudante A₂, que os recursos de hardware e *software* deveriam estar sempre atualizados no contexto do ensino remoto, para que os alunos, em seus domicílios, pudessem participar das atividades propostas em suas aulas, de maneira efetiva.

No caso da estudante, houve atraso para a sua entrada em uma das salas temáticas e, com isso, ela não pôde participar das discussões realizadas pelo grupo desde o primeiro momento. Problemas como este aconteciam várias vezes, por desconhecimento dessas plataformas, que passaram a fazer parte da educação nos anos 2020-2021 (anos de pandemia). Felizmente, nessa situação, foi possível o envolvimento da aluna com o grupo e, conseqüentemente, com a tarefa proposta.

A escolha das questões, pelos participantes do grupo, foi coerente com a proposição da atividade e fez com que as estudantes pudessem discutir sobre elas e resolvê-las utilizando o GG. Na apresentação, a estudante A₇ já trouxe a construção realizada pelo grupo no GG, enquanto a estudante A₁, apesar de ter realizado a construção antes com seus colegas, refez a mesma para que a turma pudesse ver o seu desenvolvimento passo a passo.

As duas questões apresentadas foram resolvidas utilizando o GG, o que torna o trabalho realizado por um coletivo estudantes-mídias, no qual, além da construção, a movimentação para a visualização da resolução da questão propiciou que a experimentação com tecnologias

reorganizasse o pensamento do coletivo, fazendo com que a construção de conhecimento (Borba; Villarreal, 2005) se tornasse possível. A reorganização ocorrida aqui difere da apresentada na subseção 5.2.1. por ter sido realizada por grupos aleatórios em aula síncrona e pela mídia utilizada ser o GG, o que pode fazer com que as questões fossem desenvolvidas com movimentação.

Para a resolução da questão, os estudantes-com-mídias utilizaram raciocínio matemático e *feedback* do GG quando foram proceder à verificação da área do hexágono inscrito no cubo, conforme apresentado pela estudante A₇ e dos volumes dos prismas para comparação entre eles, percorridos pela estudante A₁. Neste sentido, os estudantes-com-mídias validaram seus conhecimentos (Borba; Villarreal, 2005).

A proposição da tarefa em grupo, em salas de aulas virtuais, com uso das TD, fez com que os estudantes tivessem autonomia para a escolha das questões sobre os conteúdos cubo e paralelepípedos retângulos, tendo um leque de opções, já que a internet era uma mídia que participava desse contexto de pesquisa. Além disso, os estudantes foram protagonistas da resolução de suas questões, desenvolvendo-as a partir da utilização do GG para a construção e validação de hipóteses, mostrando motivação para a realização e apresentação da tarefa.

Em seguida, apresento outra experimentação com tecnologias, desta vez, relacionada a inscrição e circunscrição de sólidos geométricos.

5.2.3. Interação entre estudantes e mídias digitais – uma tarefa sobre inscrição e circunscrição de sólidos

Em uma aula, ocorrida no dia 19/07/2021, foi solicitado aos alunos que apresentassem para a turma um trabalho, em duplas, que se referia à inscrição e circunscrição de sólidos geométricos. Para a realização desta tarefa era necessário que fosse feita uma construção no GG daqueles sólidos que foram sorteados para cada dupla.

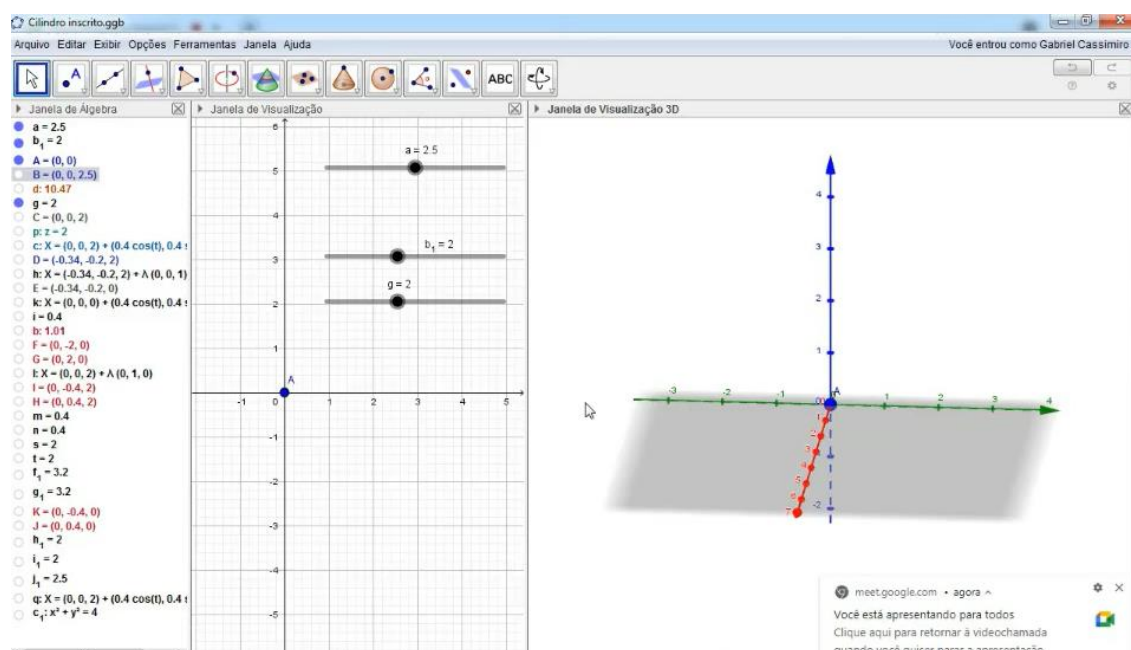
A atividade foi proposta com o objetivo da construção e exploração de figuras geométricas. Procuravam-se as relações que existiam entre sólidos inscritos e circunscritos, além da participação de toda a turma, fazendo perguntas e tecendo seus comentários sobre cada construção. Além disso, os alunos, ao elaborarem as suas atividades, usariam os seus conhecimentos geométricos para a realização da atividade, ao interagir com a mídia.

Para desenvolver a atividade, a dupla de alunos A_1 e A_{22} procedeu à construção de um cilindro reto inscrito em um cone reto e encontrou algumas relações, utilizando controles deslizantes¹⁹.

$A_{22}(19/07/21)$: *É... eu vou fazer a construção aqui no Geogebra. Eu já deixei meio pronto então, só vou explicando.*

Nesse momento, o aluno apresentava a tela que pode ser vista na Figura 23:

Figura 23 - Imagem do GG apresentada pelos estudantes A_1 e A_{22}



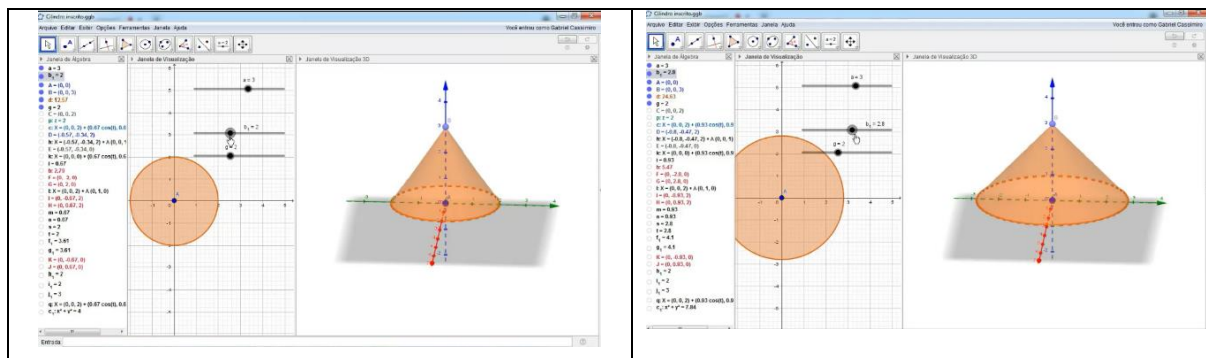
Fonte: Dados da pesquisa

$A_{22}(19/07/21)$: *Eu aproveitei aqui a origem do sistema cartesiano para pegar o ponto A. Em seguida, eu criei três controles deslizantes a, b1 e g. Usando a entrada eu criei o ponto B de coordenadas (0,0,a). Então esse ponto B, quando vario o controle deslizante, este B também varia ao longo do eixo z e esse ponto B vai ser o vértice do cone. Agora, como eu tenho esse ponto A e esse ponto B, eu posso criar aqui o nosso cone que tem o raio que é o b1. Então quando varia o b1, vario a base.*

A variação observada pelo estudante A_{22} pode ser visualizada na Figura 24:

¹⁹ Segundo a Wikipedia, “em computação, um controle deslizante é um elemento de interface gráfica que permite ajustar o parâmetro em um intervalo de valores pré-definidos quando o usuário move o marcador. Controles deslizantes podem ser usados em conjunto com rótulo para mostrar os valores ajustados”.

Figura 24 - Variação do raio da base do cone com o controle deslizante b_1

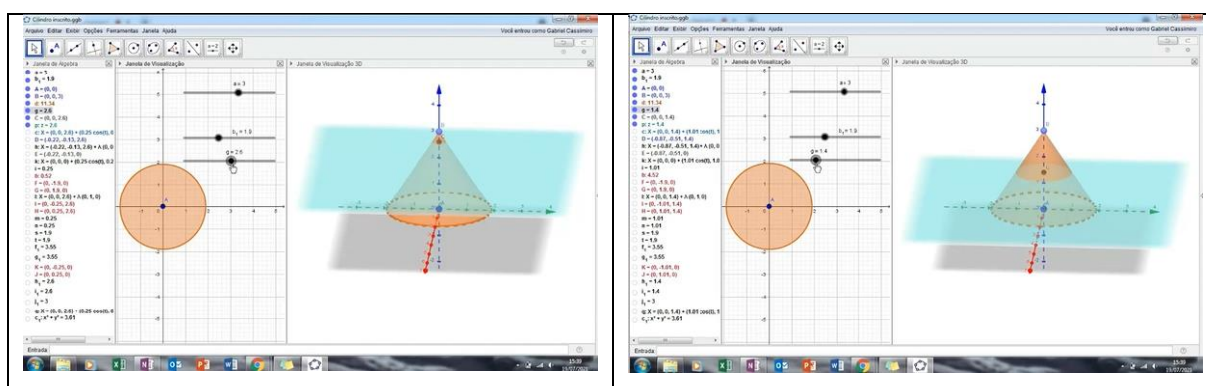


Fonte: Dados da pesquisa.

A₂₂(19/07/21): E em seguida eu criei o ponto C de coordenadas (a,a,g). Então, eu vario o g, esse ponto C varia ao longo do eixo z também e por esse ponto C eu coloquei um plano paralelo ao plano que temos, o plano $z=0$ e aí quando eu vario esse g, o plano vai variando.

Esta variação pode ser vista na Figura 25:

Figura 25 - Variação do plano paralelo ao plano da base do cone

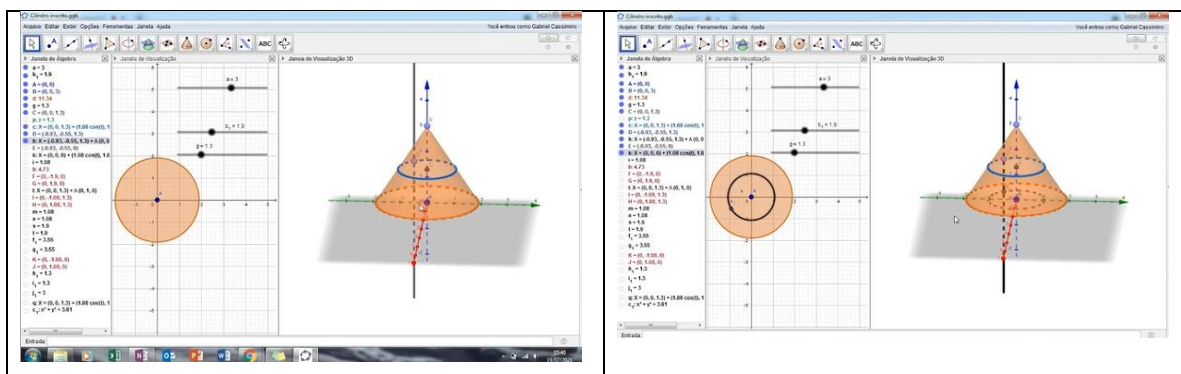


Fonte: Dados da pesquisa.

A₂₂(19/07/21): Aí, usando a ferramenta interseção de superfícies eu criei esta circunferência aqui que é a intersecção do plano com o cone. Agora vou tirar o plano e aí quando vario esse g, essa circunferência vai variando ao longo do cone. Em seguida eu peguei um ponto B qualquer dessa circunferência e por ele peguei uma reta paralela ao eixo z, então essa reta aqui e, com esta reta eu peguei a intersecção deste ponto com o plano $z=0$, o ponto E e, a partir dele eu criei a circunferência de centro A e que tem o ponto E.

A figura 26 representa, à esquerda, a reta que passa pelo ponto B e à direita, a circunferência de centro A, em que E é um dos seus pontos.

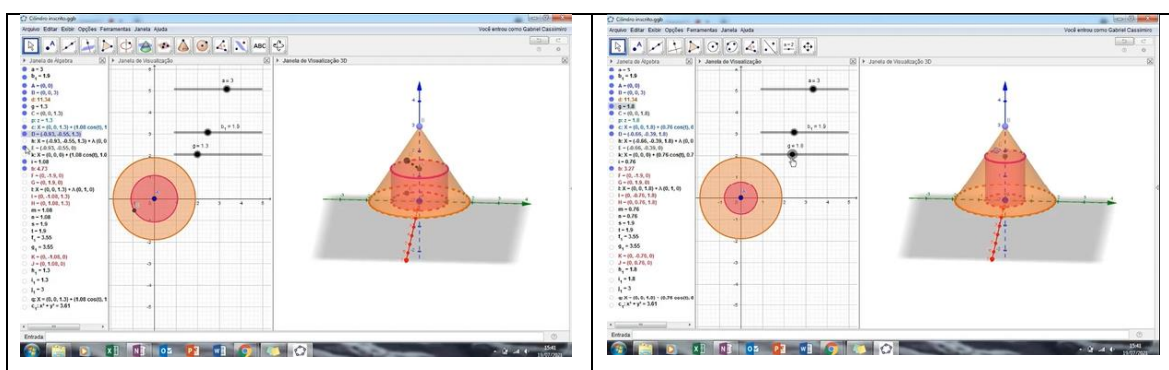
Figura 26 - Representação de uma reta que passa por B e uma circunferência de centro A, em que E é um dos seus pontos.



Fonte: Dados da pesquisa.

A₂₂(19/07/21): Esta circunferência acaba sendo congruente à circunferência azul que eu criei. Além disso, eu peguei também esse segmento DC [raio do setor circular construído, onde C é o centro da circunferência e D é o ponto da circunferência por onde passa reta de cor preta] aqui, porque com isso eu consigo determinar... com esse ponto C, esse ponto A e esse raio aqui eu consigo determinar o cilindro inscrito. Posso tirar algumas coisas. Então, quando eu vario o g, eu estou variando aí o volume e a área total do cilindro inscrito.

Figura 27 - Variação do volume e da área do cilindro inscrito

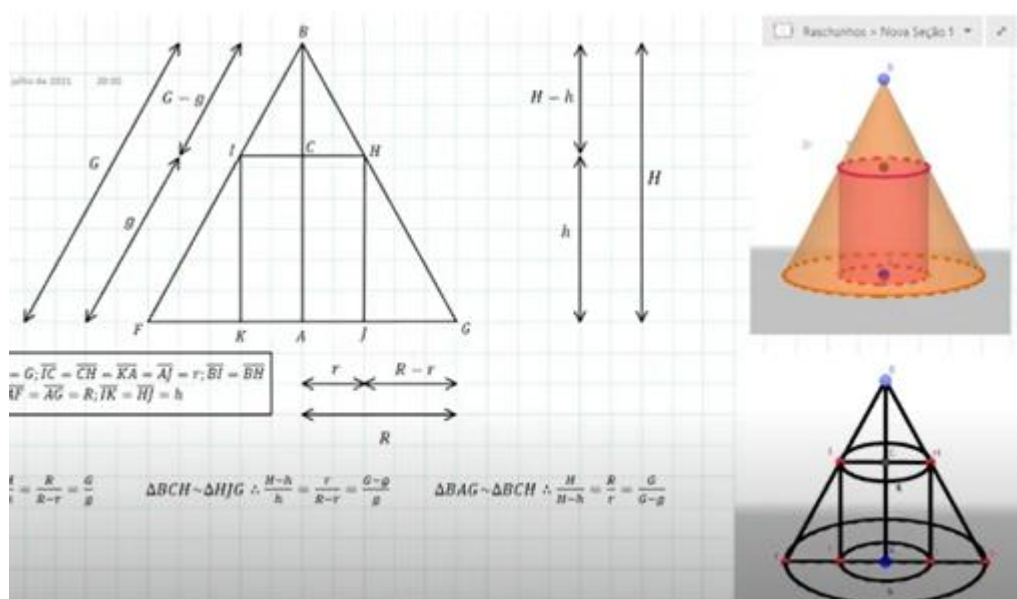


Fonte: Dados da pesquisa.

A₂₂(19/07/21): A partir de agora, pegando as intersecções da base do cilindro com o eixo y, eu peguei alguns pontos, depois eu peguei mais dois pontos, também peguei esta reta paralela ao eixo y, passando pelos pontos I e H. E aí depois eu fui determinando a altura do cilindro, a altura do cone, esse raio da circunferência da base do cone, também do cilindro, de modo a gerar essa figura aqui, que seria a espécie de uma casca.

A Figura 28 mostra a representação realizada pela dupla de estudantes.

Figura 28 - Representação de uma seção meridional do sólido construído pelos estudantes



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir deste momento, o estudante estabeleceu as relações entre as medidas do cilindro inscrito e do cone utilizando semelhança entre triângulos e concluiu:

A₂₂(19/07/21): É importante observar que, como essas relações são muito grandes, eu tenho aqui seis igualdades, não me parece ser muito memorizável estas relações. Então, eu acho que se pegasse um exercício desse tipo e ele te dar, por exemplo, as alturas e o raio é bem mais interessante sempre refazer esta análise, desenhar os triângulos.

O vídeo, que pode ser assistido a partir do QR Code (Figura 29) abaixo mostra, na íntegra, toda a construção realizada pelos estudantes, assim como o estabelecimento das relações entre os sólidos.

Figura 29 - QR Code 7: Vídeo da atividade realizada pelos estudantes



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Na realização dessa atividade, a dupla de estudantes A₁ e A₂₂ escolheu trabalhar com controles deslizantes ao invés de dar valores para os segmentos, buscando relações que seriam

válidas para qualquer cilindro reto inscrito em cone reto, o que está coerente com o que foi solicitado pela professora. Neste sentido, eles trabalharam com três controles deslizantes, que são a , b_1 e g , onde o a é a altura do cone, que varia de 0 a 4, o b_1 é o raio do cone, que varia de 0 a 4, e o g é a altura do cilindro inscrito, que varia de 0 a 4. Ou seja, todos estes comprimentos podem ser observados variando de 0 a 4, podendo, assim, conjecturar sobre essas medidas.

Com a criação destes controles deslizantes, os estudantes mostraram também as variações de área e volume do sólido inscrito, dando dinamismo à construção, o que mostra as infinitas possibilidades de um cilindro inscrito em um cone. Para esta elaboração, vários recursos do *software* foram usados, o que mostra interações entre estudantes e mídias para a realização da tarefa proposta, além de conhecimento do que estavam fazendo.

O potencial das explorações oferecidas pelo programa, em relação à movimentação dos sólidos, para uma melhor visualização e consequentemente, elaboração do pensamento para o desenvolvimento da atividade proposta, pode ser observado através dos dados apresentados.

Outra observação em relação a esta atividade é que os estudantes deixaram a construção preparada, que é uma outra possibilidade oferecida pelo GG, ocultar o que é feito ou apresentar, apenas clicando em um ícone do *software*, ou seja, na “bolinha” que aparece à direita de cada comando na janela de álgebra.

Nesse sentido, a possibilidade de trabalhar a Geometria e a Álgebra, ao mesmo tempo, é fator significativo para a criação de conjecturas, processo de experimentação e *feedbacks* oferecidos de forma rápida. Sendo assim, o coletivo professora e estudante-com-mídias pode produzir conhecimento (Borba; Villarreal, 2005) quando, ao interagir com a interface do *software*, tem a possibilidade de experimentar, testar conjecturas, obter *feedbacks* do computador, apagar, fazer de novo e..., novamente, até encontrar o melhor caminho para a reorganização do pensamento.

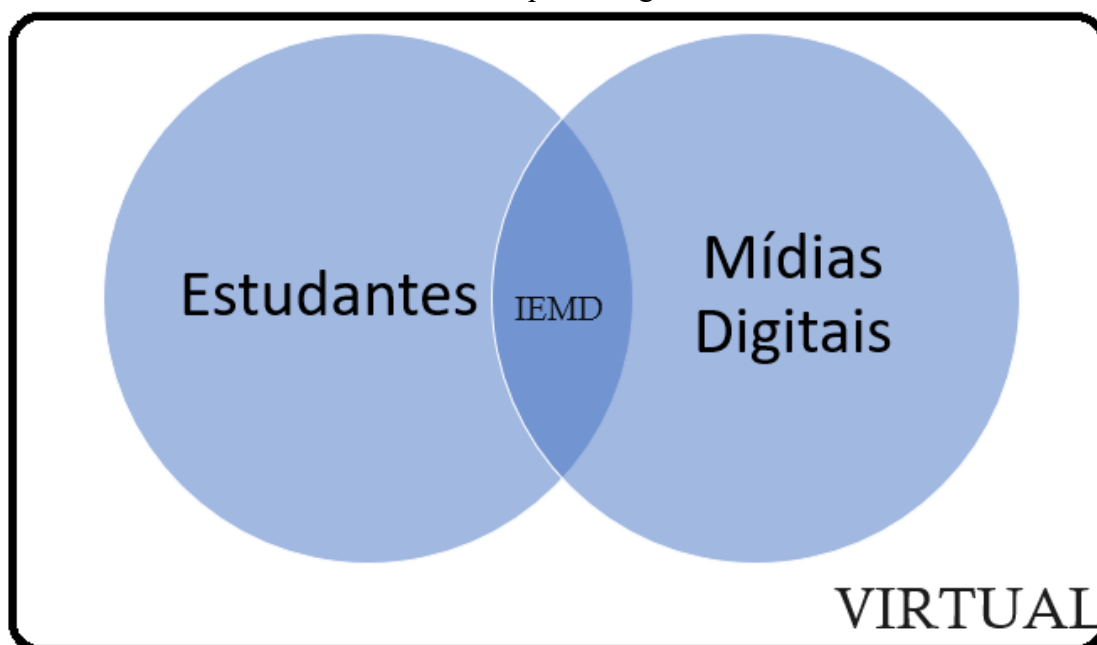
Como pode ser visto, neste curso de GEE, em tempos de ensino remoto, as TD foram muito utilizadas nas interações da professora-com-mídias, estudantes-com-mídias e professoras-com-estudantes-com-mídias.

De acordo com Levy (1999), o virtual é potência. Então, considerando o virtual como o conjunto universo, os estudantes e as mídias são subconjuntos, que quando estão em intersecção fazem com que o pensamento se estruture de uma maneira diferente, trazendo entendimento de conteúdos de GEE a partir de um coletivo pensante capaz de usar a criatividade para a construção de objetos que podem levar a algumas generalizações.

A intersecção entre estudantes e mídias está sendo aqui denominada de interações entre estudantes e mídias digitais (IEMD) e é com este conjunto de elementos que estou analisando

os dados nesta subseção da tese, em um contexto de AV, conforme foi discutido na subseção anterior. O Diagrama 1 representa a situação descrita:

Diagrama 1 - Representação das interseções de conjuntos entre estudantes e mídias digitais em um contexto de aprendizagem virtual – AV



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Neste sentido, Borba e Villarreal (2005) já diziam sobre os computadores serem um artefato a partir do qual pode-se experimentar e formular conjecturas. Os dados nos mostram a experimentação com um *software* livre, o *Geogebra* 3D, no qual os estudantes podem manipular diferentes objetos, colocando-os e ocultando-os, sempre que quiserem, buscando uma melhor elaboração daquele conhecimento que almeja alcançar.

Ao elaborarem esta atividade, a dupla de estudantes A_1 e A_{22} utilizaram controles deslizantes que permitem a variação, em um intervalo escolhido por eles, de comprimentos, como o raio e a altura, permitindo que, ao testar conjecturas, possam chegar em generalizações matemáticas, como as equações encontradas para cálculos de medidas que se relacionam quando um cilindro reto está inscrito em um cone reto. De acordo com os dados, nas outras experimentações, como em pirâmide ou prisma inscrito em outro sólido, buscaram experimentar com bases diferentes, trazendo estes resultados, em suas apresentações, para a turma.

Este experimento apresentado para a turma fez com que os alunos pudessem observar o que os outros colegas fizeram e testar em seus computadores novas possibilidades, além de possuir uma gama de vídeos no Youtube, os quais podiam assistir, que ensinam como realizar

construções dinâmicas no *software* elaborados pelos pesquisadores que se dedicam a esta temática na EM. Após as apresentações, os estudantes concluíram que foi diferente fazer a experimentação utilizando um *software*. Os estudantes sentiram-se autônomos em relação à tomada de decisão para a criação e foram motivados pelos feedbacks proporcionados pelo *software*.

Em uma pesquisa, antes do surgimento do GG, com algumas atividades realizadas entre alunos e *Geogebra 2D*, Souto (2012, p. 34) concluiu que a interação entre humanos e não-humanos, “no processo de busca por uma justificativa formal do ponto de vista matemático foi pautado na procura de padrões e conjecturas, os quais foram moldados pelas interações e interatividades entre os diversos atores, ou seja, o processo foi mediado pelos feedbacks dados pelo *Geogebra*”.

Corroboro as conclusões da pesquisa realizada por Souto (2012) e acredito que os *feedbacks* imediatos oferecidos pelo *Geogebra* podem contribuir para que as interações entre estudantes e mídias digitais proporcionem reestruturação do pensamento e a produção de conhecimento matemático ocorra através do trabalho conjunto realizado entre alunos e mídia. Neste sentido, o GG é um ator do processo de aprendizagem e alunos-com-mídia constituem-se em um conjunto com grande potencial para repensar a prática docente em relação à GEE, pois os alunos (futuros professores) ao aprenderem a utilizar mídias, podem levar para as suas aulas estas práticas. Porém, tal discussão é para a formação de educadores e, por isso, não aprofundarei no assunto.

Finalmente, em relação aos dados aqui apresentados, observo que as tarefas propostas usam o resultado anterior, ou seja, é necessário ter os conhecimentos básicos, os quais já foram estudados anteriormente (retas, planos e sólidos geométricos), para a progressão da produção de conhecimento. Neste sentido, o coletivo alunos-com-mídias já teria que conhecer os assuntos anteriores à inscrição de cilindro em cone, como conceitos da Geometria Plana, de cilindros e cones.

Sigo apresentando e procedendo a análise dos dados que foram produzidos na plataforma *Google Classroom*.

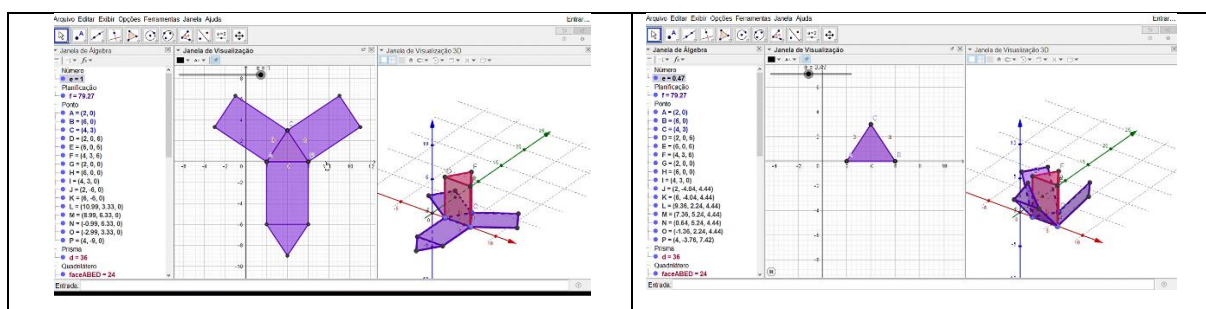
5.2.4. Tarefas realizadas e enviadas pela plataforma Google Classroom

Todas as atividades desenvolvidas pelos estudantes, sejam aquelas apresentadas em sala de aula virtual, ou as que foram realizadas em outros horários diferentes daqueles das aulas síncronas, eram enviadas através do *Google Classroom*, onde os colegas e professora poderiam fazer comentários e/ou perguntas. Vale ressaltar que não renderam muitos questionamentos/discussões nesses momentos, na citada plataforma.

Apesar disso, as atividades desenvolvidas a partir das interações entre os estudantes e as mídias constituíram um conjunto de dados produzidos que quero apresentar nesta ocasião, pelo fato de fomentarem algumas observações interessantes.

Em uma aula sobre prismas, foi solicitado pela professora que os estudantes fizessem um prisma animado no GG. A aluna A₈ enviou um prisma triangular animado, conforme a Figura 30.

Figura 30 - Prisma triangular regular animado



Fonte: Dados da pesquisa.

O vídeo que a estudante postou na plataforma Google Classroom pode ser visto através do *QR Code* abaixo (Figura 31):

Figura 31 - QR Code 8: Vídeo animado de prisma triangular regular



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Este é um dos exemplos dos prismas animados desenvolvidos pelos estudantes. Esta tarefa foi realizada individualmente e tinha como propósito a exploração da planificação de um sólido geométrico a partir das interações de estudantes e mídias.

Já diziam Borba e Villarreal (2005) que na experimentação com tecnologias que transcorre quando um ser humano ou um grupo de seres humanos interage com uma mídia, ocorrem *feedbacks* rápidos. No caso desta planificação do prisma triangular regular, o *feedback* é imediato, com a visualização das figuras no plano, no caso, o dos triângulos das bases e dos retângulos da lateral, produzindo aos estudantes a possibilidade de trabalhar com a área total, áreas laterais e áreas da base de forma precisa.

Antigamente, como por exemplo em minha época de estudante universitária, ou enquanto professora sem mídias, era necessário utilizar da imaginação para fazer a planificação de um sólido utilizando lápis e papel. Existia também a possibilidade do uso de materiais manipuláveis para fazer esta planificação, o que não era comumente utilizado em meu contexto escolar. Me recordo que os alunos que estudavam GEE em minhas aulas sempre me procuravam para perguntar qual seria a forma correta de planificar determinado sólido geométrico, revelando a dificuldade que encontravam para executar esta tarefa.

Além disso, conforme diziam Borba e Villarreal (2005), os experimentos feitos com tabelas, gráficos e representações algébricas fazem com que a ideia sobre representações múltiplas se torne importante em experimentações com tecnologias. No caso da situação descrita anteriormente, a combinação de imagem, álgebra e a animação pode ser considerada um experimento com representações múltiplas e, no caso da GEE, com possibilidades para os estudantes poderem calcular cada área separada e ver as medidas na janela de álgebra, oferecida pelo *software* GG.

Segundo Trainotti e Silva (2018), as tecnologias digitais utilizadas na planificação de sólidos geométricos contribuem para a aprendizagem de determinados conteúdos de GEE, como prismas e pirâmides, desenvolvem a curiosidade e a motivação dos estudantes, fazem com que a sala de aula seja vista como um ambiente de exploração, criação de conjecturas e validação de hipóteses pelos estudantes. Corroboro o pensamento dos autores e acrescento o potencial do coletivo seres-humanos-com-mídias para a aprendizagem de planificação de sólidos geométricos.

As respostas dos estudantes A₂₁ e A₁₁ para a pergunta “Como você vê o uso do *software* Geogebra nas suas aulas de Geometria Euclidiana Espacial em seu curso de Graduação em Matemática? Justifique a resposta.” que se encontra no primeiro questionário enviado (Apêndice B), via plataforma *Google Classroom* para a turma, está relacionada ao que acabo de discutir. A seguir, respostas de dois alunos.

A₂₁(04/05/2021): *Eu o vejo como uma ferramenta para auxiliar na compreensão e facilitar, pois mostra as Figuras no espaço em 3d, 2d, faz os(as) alunos/pessoas*

aprenderem a como construir, pensar em cada passo a passo, poder mudar o tamanho e cores da Figura (algo que no papel não daria para fazer toda hora, com tanta rapidez e eficiência).

A₁₁(04/05/2021): *Em resumo, não tive acesso a esse software no ensino comum, então é notório que houve uma grande perda de oportunidades. Portanto, pretendo em minha carreira de professor de matemática apresentar o Geogebra para os alunos.*

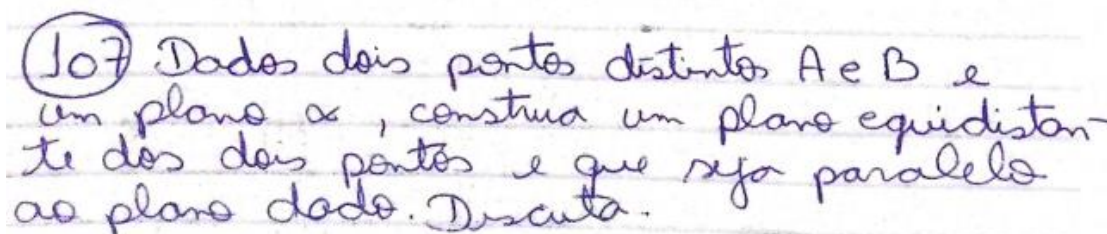
Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante A₂₁ considera que o *software Geogebra 3D* auxilia na compreensão dos conteúdos da GEE, comentando sobre as várias possibilidades de recursos oferecidas pelo *software*, enquanto o estudante A₁₁ mostra que gostaria de já ter aprendido a utilizar o *software* desde a Educação Básica, porém que tem a pretensão de utilizar em suas aulas de Matemática, quando se tornar professor.

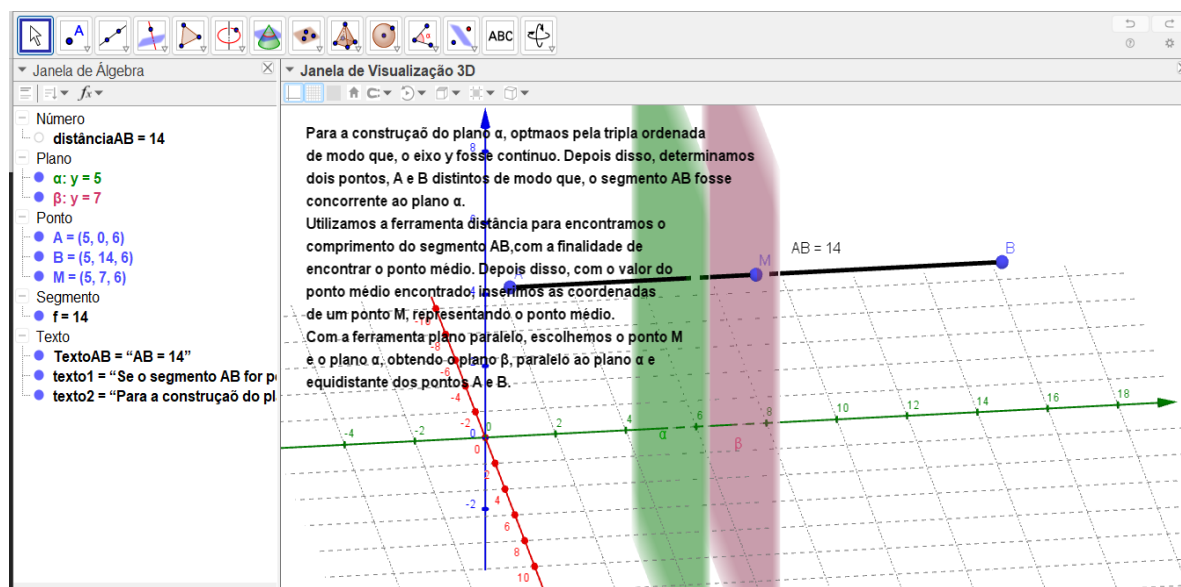
Neste sentido que fala o estudante A₁₁, é importante recordar que falta a presença de tecnologias para a Educação Matemática tanto na formação inicial, quanto na formação continuada de professores de Matemática e, além disso, há ausência de recursos, como computadores, o que causa o não ensino com tecnologias e a não aprendizagem de conceitos geométricos com a utilização de *softwares*. Silva e Novello (2020) consideram que a escassez de formação continuada para professores, em tecnologias digitais, é um dos principais fatores para que os fundamentais recursos usados por eles seja o livro didático e a internet para pesquisa de conceitos.

Em seguida, apresento os dados produzidos a partir da plataforma *Google Classroom*, que se referem a construções feitas pelos estudantes para a realização de algum exercício proposto. A Figura 32, a seguir mostra uma destas construções.

Figura 32 - Construções realizadas pelos estudantes A₁₂ e A₈ e postadas na plataforma Google Classroom



107 Dados dois pontos distintos A e B e um plano α , construa um plano equidistante dos dois pontos e que seja paralelo ao plano dado. Discuta.



Fonte: Dados da pesquisa.

Essas construções não foram pedidas para que fossem feitas com a utilização de alguma mídia, porém como as aulas estavam sendo realizadas no GG, os estudantes enviavam a lista de exercícios pela plataforma e alguns anexos, os quais continham as construções.

Nessa atividade, duas alunas escreveram o passo-a-passo por elas realizado para a construção e discussão. Como já dizia Tikhomirov (1981), a teoria da reorganização sustenta que o computador regula a atividade humana, além de apresentar diferenças em relação à linguagem. O que vemos na realização desta atividade é que um programa no computador influenciou o pensamento das estudantes, as quais puderam construir e escrever o que entendiam em cada segmento construído pelo coletivo.

A possibilidade de pensar e resolver um problema de GEE pelos alunos-com-mídias se deu de maneira distinta daquela tradicional. Em relação, especificamente aos conteúdos de GEE que, desenhados em um papel ou em um quadro negro, não se consegue ver todas as dimensões de uma situação estabelecida, torna-se muito rica a interação dos estudantes com as mídias em relação ao saber.

Percebo que a mudança na resolução da questão considerada faz com que as estudantes possam ver todas as dimensões das figuras, podendo movimentá-las e renovando a sua forma de pensar.

Dando continuidade a essa subseção, apresento e analiso os dados produzidos quando um grupo de estudantes elaborou e apresentou uma possível aula com conteúdo de

GEE para os seus colegas e a professora. Neste momento, eles criaram a aula utilizando as mídias que quisessem, sendo que esta aula seria realizada no *Google Meet*.

5.2.5. *Interação entre grupo de alunos e mídias – elaboração de uma aula para a Educação Básica*

Um dos trabalhos, em grupo, que a professora pediu para que a turma realizasse foi o planejamento e a elaboração de uma aula para a Educação Básica sobre um dos temas: prismas; paralelepípedos, cubos e Princípio de Cavalieri; pirâmides; cilindros; cones; esferas e inscrição e circunscrição de sólidos.

A escolha foi feita a partir de sorteio ocorrido em uma apresentação de tela cheia no decorrer de uma aula do *Google Meet* e, com o uso de um *software*, o *Sorteio*go, para sorteio, encontrado no Google, no computador, em tempo real e, em seguida, enviado para o grupo de *WhatsApp* Geo. Euclidiana Espacial.

Neste contexto, os estudantes produziram uma aula sobre a temática sorteada para o seu grupo, contendo vídeos elaborados pelo grupo sobre o conteúdo proposto, construções realizadas no *Geogebra* 3D e exemplos resolvidos.

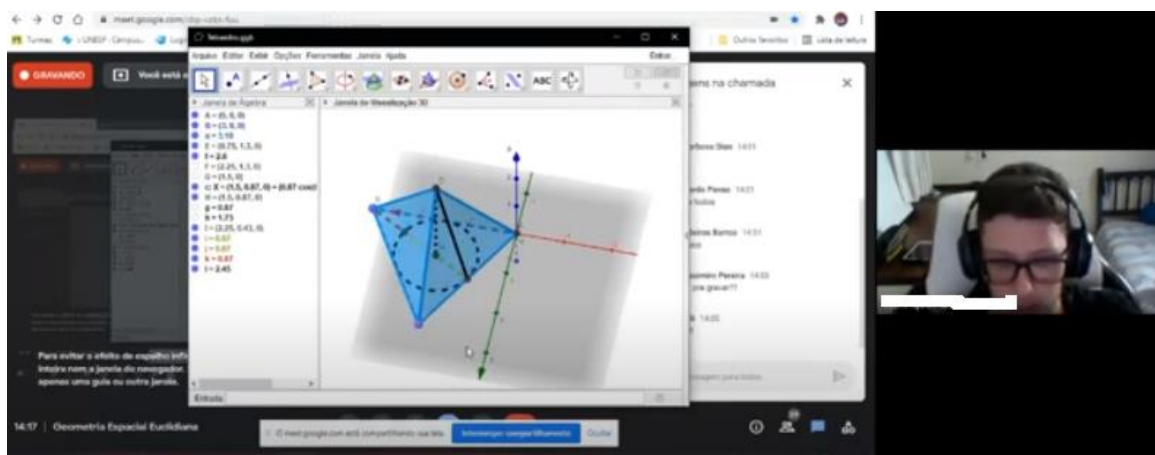
Como dados desta pesquisa, vou trazer dois recortes de aulas elaboradas e desenvolvidas sincronamente pelos estudantes e apresentadas em sala de aula virtual para a professora e a turma. O primeiro recorte foi retirado da aula que tinha como temática inscrição e circunscrição de sólidos geométricos, que foi elaborada pelo grupo de estudantes A₁₁ e A₁₈.

Após os estudantes contarem sobre a história das pirâmides, explicar as principais medidas, de vértices, comprimentos, áreas e volumes, além das pirâmides regulares, o aluno A₁₈ começou a falar sobre tetraedro, apresentando as suas características, área, volume e resolveu mostrar uma situação no GG.

A₁₈(16/08/201): Aqui a gente tem um tetraedro, que foi feito com a ferramenta do tetraedro e conseguimos ver uma relação interessante. Por que tem um círculo aqui?

A Figura 33 representa a situação que está sendo explicada pelo estudante A₁₈.

Figura 33 - Representação apresentada sobre tetraedro

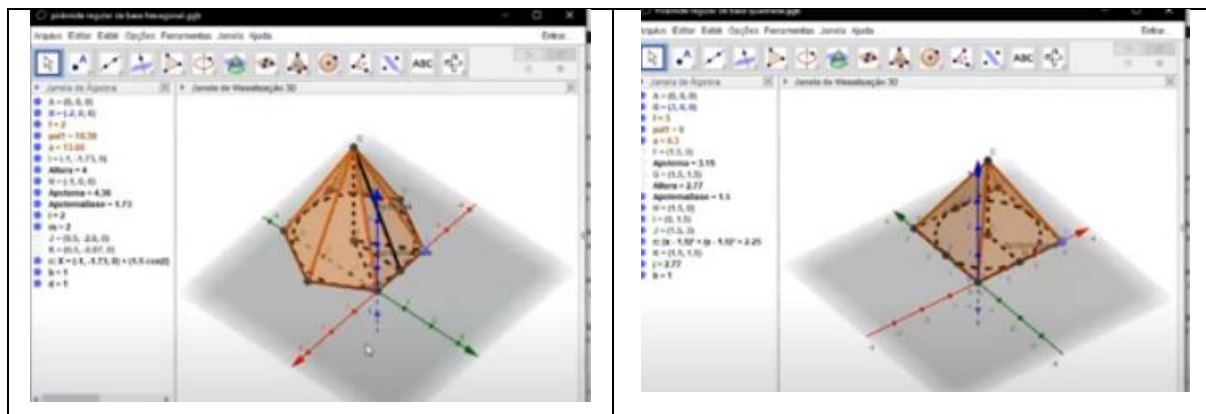


Fonte: Dados da Pesquisa.

A₁₈(16/08/2021): *A altura de um tetraedro não forma com o plano da base os 90 graus bem no centro da figura, e sim no centro do círculo inscrito na base da figura. Temos essa relação para todas as pirâmides, por exemplo a hexagonal e a com base quadrada, onde a altura está exatamente no centro do círculo inscrito na base.*

A Figura 34 representa as situações descritas pelo estudante.

Figura 34 - Altura de pirâmides de base hexagonal e quadrada



Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₈(16/08/2021): *Bem, aqui no tetraedro então, o apótema é o raio do círculo inscrito. Mas quanto vale isso? Se a gente pegar aqui que esses três segmentos são iguais [refere-se à altura do triângulo da base, que pode ser dividida em três partes, em que cada uma é o raio da circunferência inscrita na base], conforme podemos ver aqui ao lado esquerdo, na janela de álgebra. Ou seja, o nosso apótema da base será a altura do triângulo equilátero da base, dividido por três. Isto é válido para qualquer pirâmide triangular.*

O vídeo mostra o conteúdo apresentado pelo aluno (Fig. 35).

Figura 35 - QR Code 9: Vídeo da apresentação do estudante A₁₈



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Nesta apresentação, o estudante falou sobre a altura de uma pirâmide, apótema da base e raio de círculo inscrito na base de uma pirâmide, a qual precisa de alguns conhecimentos matemáticos para serem calculadas. A forma como o aluno constrói a circunferência na base do tetraedro e de outras pirâmides mostra que teve o interesse para encontrar o apótema da base de uma pirâmide, de forma geral, ou seja, para qualquer caso.

O estudante usa a janela de álgebra para verificar que, cada segmento correspondente ao raio da circunferência inscrita na base de uma pirâmide, tem a mesma medida que os outros dois, ou seja, ele pode experimentar com o GG, para certificação de um resultado, no caso, que o apótema de uma pirâmide é igual ao raio da circunferência inscrita na base da pirâmide.

Este tipo de pensamento, realizado por um coletivo estudante-mídia, se dá de forma diferente daqueles realizados em um quadro negro de sala de aula, ou com materiais manipuláveis, ou ainda, com lápis e papel. Neste sentido, o coletivo produz conhecimento, mediado pelo *feedback* rápido oferecido pelo *software* (Borba; Villarreal; 2005).

Nesta apresentação, a mídia não foi utilizada de forma domesticada, pois Borba, Scucuglia e Gadaniadis (2018) já consideravam que a manipulação dinâmica dos objetos construídos, o convencimento sobre a veracidade de conjecturas, a criação e conexão entre diferentes tipos de representações de objetos matemáticos, a exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo, a maneira de ensinar e aprender matemática de forma alternativa, a compreensão de conceitos, o conhecimento de novas dinâmicas, formas de conectividade e relação de poder em sala de aula são alguns dos meios que devem ser pensados em uma atividade que envolve TD, baseada no constructo seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2005).

A atividade proposta para um coletivo de alunos com mídias, ou seja, a elaboração de uma aula para a Educação Básica, em um contexto de ensino remoto, possibilitou que os estudantes utilizassem os meios descritos anteriormente, por ser uma tarefa aberta, na qual as

mídias estariam presentes de qualquer forma, dada a situação emergencial de isolamento social. A escolha por quais mídias, que iriam “trabalhar com” elas, ficou a cargo dos alunos.

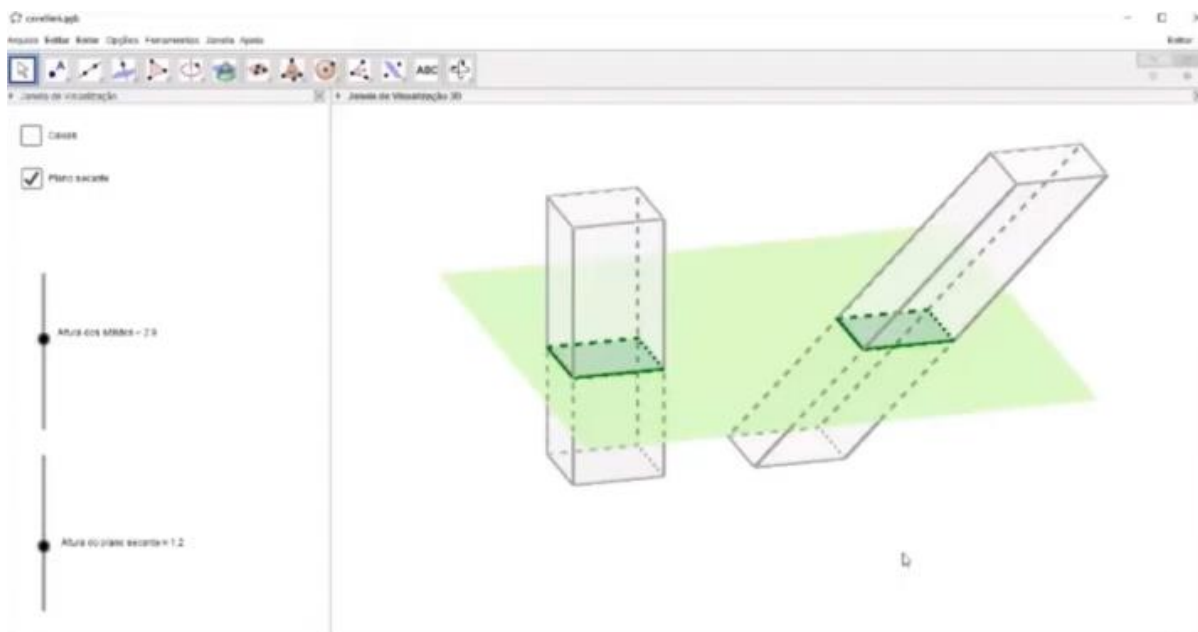
Além disso, embora a proposta da atividade fosse para ser realizada em grupo, os dados mostram que o grupo de estudantes dividiu o conteúdo do qual iam falar em partes individuais e cada um dos participantes ficou encarregado de apresentar uma pequena parte do todo. Um dos fatores que pode ter propiciado esta ocorrência foi a questão da pandemia 2020-2021, devido ao isolamento social, embora este fato também seja comum ser visto nas aulas presenciais.

O segundo recorte desta atividade é sobre o Princípio de Cavalieri, na aula elaborada pelos estudantes A₁₄, A₂₀, A₁ e A₇, em que a temática era paralelepípedo retângulo, cubo e Princípio de Cavalieri.

A₁(12/08/2021): “São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.” Vamos explorar o que diz o Princípio de Cavalieri no Geogebra.

Ao dizer isto, a estudante apresentou a tela que pode ser vista na Figura 36.

Figura 36 - Representação do Princípio de Cavalieri pela estudante A₁



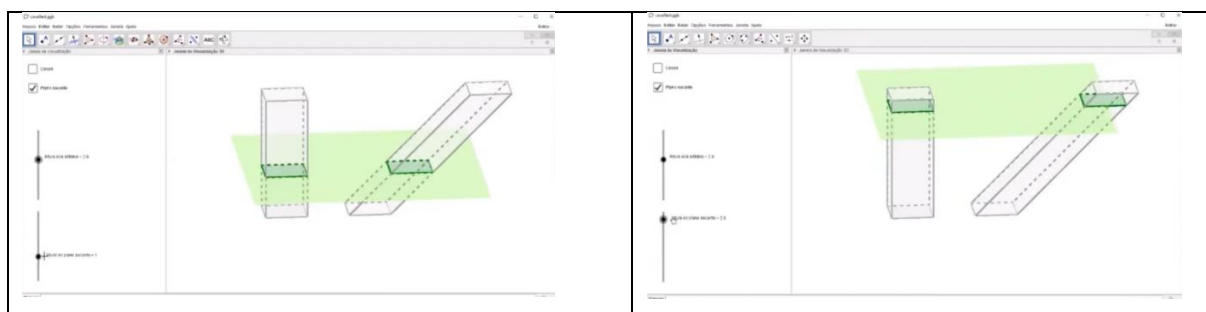
Fonte: Dados da Pesquisa.

A₁: Bom, então aqui nós temos dois paralelepípedos conforme foi apresentado por outro colega. Um é reto e o outro é oblíquo e eles têm a mesma altura conforme podemos ver e, com os controles deslizantes [associados à altura da seção plana paralela à base] ao lado esquerdo conseguimos colocar a altura

que a gente quer. Se a gente colocar a altura 1, como os outros lados eu coloquei sendo 1, a gente tem um cubo aqui, conforme o A₂₀ apresentou. E o que o Princípio de Cavalieri fala para a gente é que se os sólidos têm a mesma altura e a área da base é a mesma conforme a gente montou aqui, então eles vão ter o mesmo volume e, para isto basta eu verificar que todo plano que passa paralelo ao plano das bases ele vai me dar secções com a mesma área. No caso, as secções são quadriláteros aqui no nosso exemplo.

A Figura 37 mostra a estudante usando o controle deslizante para mostrar a secção em ambos os sólidos.

Figura 37 - Representação das alturas das secções planas nos sólidos.

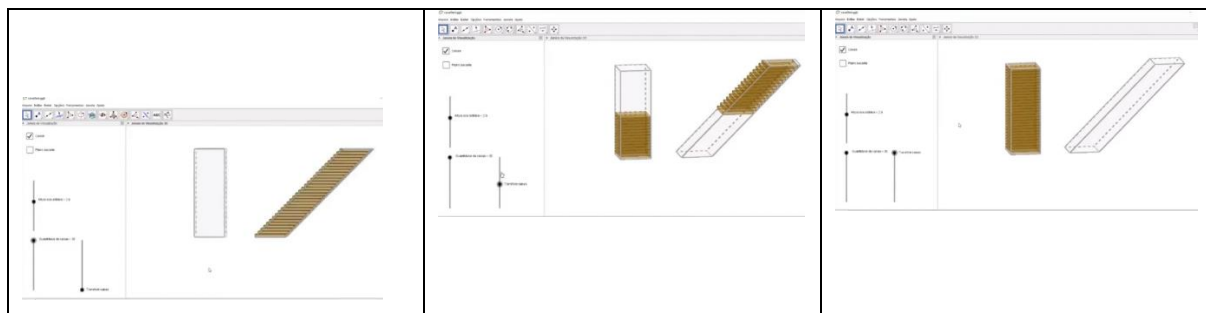


Fonte: Dados da pesquisa.

A₁: Uma maneira de fixar e visualizar porque que isso funciona é dividindo estes meus paralelepípedos em pedaços menores. Aqui temos uma pilha de caixas tentando preencher este meu paralelepípedo. Se eu diminuir a quantidade de caixas, essa aproximação não fica muito boa, mas quanto mais eu aumentar mais próximo fica do sólido inicial, né? E olha que legal, essas caixas que antes estavam preenchendo o meu primeiro sólido quando eu transfiro para o meu outro sólido, eles continuam a preencher e isso é uma intuição do porquê esse princípio funciona. Porque o volume das caixas não foi alterado, eu não aumentei o volume delas, eu apenas transferei.

A Figura 38 mostra o coletivo aluna-mídia fazendo a transferência de paralelepípedos de uma caixa para outra, mantendo-se o volume de ambas.

Figura 38 - Transferências de paralelepípedos de uma caixa para outra



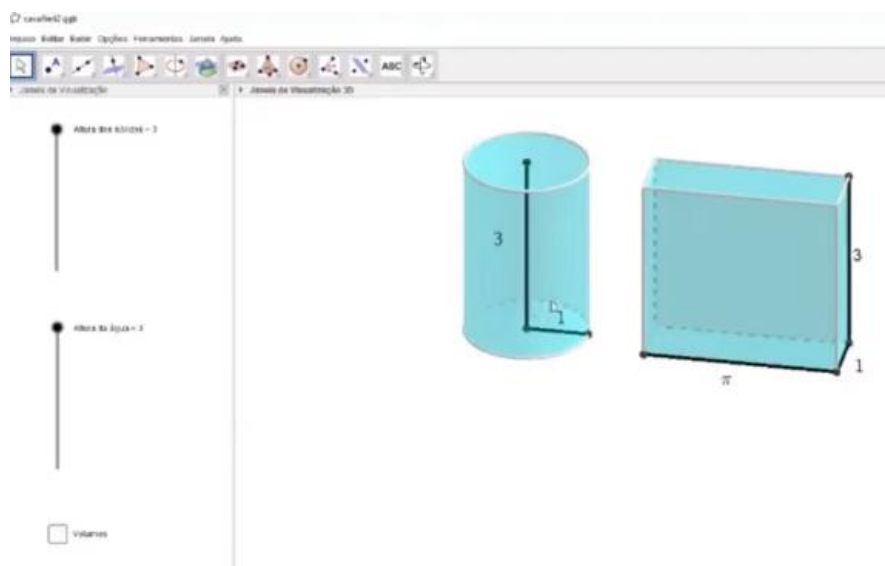
Fonte: Dados da pesquisa.

Dando continuidade à apresentação, a estudante traz um exemplo relacionado ao Princípio de Cavalieri.

A₁: Então trouxe uma atividade para pensarmos juntos sobre este Princípio de Cavalieri. Aqui eu tenho dois aquários que tem a mesma área da base. Como eu sei disso? Sabemos que a área do círculo é πr^2 e como tenho um círculo de raio igual a 1, a área da base da figura da esquerda é π . Por um outro lado, a área do meu paralelepípedo da esquerda é $\pi \cdot 1$ que também é π .

A Figura 39 abaixo representa a situação descrita pela aluna.

Figura 39 - Construção de dois aquários realizada pela aluna A₁



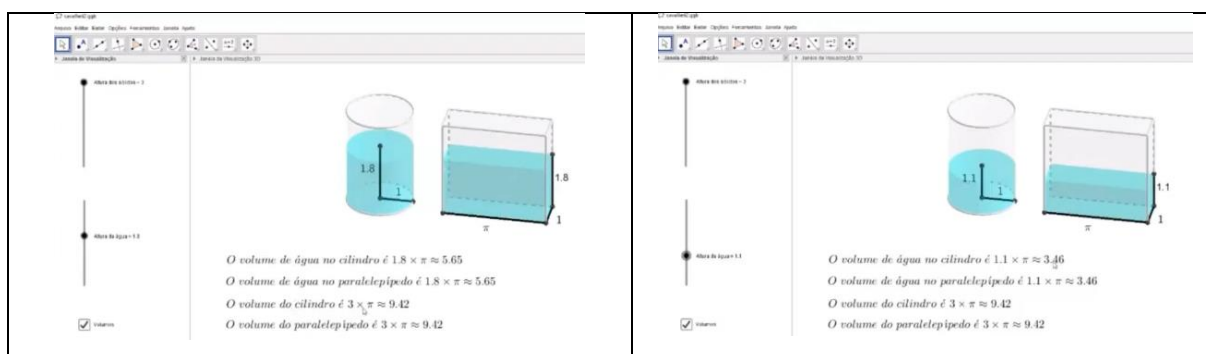
Fonte: Dados da pesquisa.

A₁: Os meus aquários têm a mesma altura. Posso alterar a altura dos dois [utilizando os controles deslizantes], mas vou deixar a altura igual a 3 para ficar mais visível, fica maior e melhor para a gente visualizar. Como já falei, pelo

Princípio de Cavalieri, estes dois aquários devem ter o mesmo volume total, pois como são retos, todas as secções que eu cortar serão iguais às secções da base; neste caso, as seções paralelas às bases, pois existem outros tipos de seções. Quero mostrar que, conforme eu vou aumentando a quantidade de água, de forma que a altura seja sempre a mesma, o volume sempre vai permanecer o mesmo, de água. E podemos verificar pelo Geogebra também que ele nos dá, né? Então, conforme eu vario a altura nos dois aquários, o volume de água em cada um deles permanece o mesmo.

A Figura 40 mostra o cálculo dos volumes quando é variada a altura da água dentro deles.

Figura 40 - Variação de volumes em relação à altura, com a base de mesma área



Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, o grupo continua apresentando a sua aula, resolvendo exercícios sobre o conteúdo que foi tratado ali. O vídeo abaixo mostra a construção e a proposição de atividade do Princípio de Cavalieri com a utilização do GG.

Figura 41 - QR Code 10: Apresentação do Princípio de Cavalieri e construção no GG



Fonte: Produzido pela autora.

Em um primeiro momento, a aluna apresentou o Princípio de Cavalieri conforme descrito nos livros didáticos, porém utilizou diversos recursos do GG, tornando a sua construção dinâmica, cheia de movimentos e mostrando o Princípio de Cavalieri conforme é enunciado, o que diferiu do modelo estático apresentado nos livros didáticos.

Para uma aula na Educação Básica, a estudante poderia criar conjecturas para explorar o princípio junto aos estudantes. Nesse sentido, seria capaz de ter mostrado, com o GG, a área da base e das seções. Porém, nesta tese, meu objetivo não é fazer tal análise e, sim, a experimentação com o coletivo aluna-mídia, que mostrou a utilização de diversas ferramentas do *software*, fazendo com que o pensamento fosse organizado de forma diferente da tradicional.

Ao transferir as caixas de paralelepípedos do poliedro reto ao oblíquo, o coletivo em interação mostra uma construção dinâmica, a partir do uso de diversos recursos do programa, o que não seria possível de se fazer fisicamente. Os dados revelam a interação com o GG para a elaboração destas imagens.

Já em um segundo momento, a estudante cria um exemplo para ilustrar o Princípio de Cavalieri, considerando dois aquários diferentes, um cilíndrico e o outro, em formato de paralelepípedo retângulo, ambos com áreas das bases iguais. Ela mostra a variação dos volumes de água, quando as alturas são iguais. Esta construção, realizada com o auxílio de controles deslizantes para a altura da água, mostra um grande potencial para o “pensar com” mídias e “fazer matemática”.

Esta é uma atividade na qual a domesticação de mídias não está presente, pois o trabalho se deu entre os estudantes e as mídias com colaboração mútua, ou seja, os estudantes usavam a criatividade e a mídia oferecia *feedbacks* para a continuação e nova criação, como o exemplo dos aquários, que foi desenvolvido pelo coletivo, quando mostrava a variação do volume nos aquários ao variar a altura, que apesar de mudar, era igual em ambos.

O *software* GG tem grande potencial para contribuir com a aprendizagem de conteúdos da GEE (Barbosa; Fontes, 2023) porque possibilita a construção, exploração e visualização de sólidos geométricos, o que, anteriormente, era realizado apenas com lápis, papel, materiais manipuláveis e um pouco da imaginação do estudante.

Nesta construção, a estudante buscou uma situação real do nosso cotidiano, no caso, os aquários, para “pensar junto” com o *software* e poder “fazer matemática” com contextualização. Sendo assim, a estudante se mostra motivada ao realizar a atividade proposta. Este tipo de relação transforma a forma como pensamos, agimos e aprendemos (Borba; Villarreal, 2005).

Observo que os estudantes não estão domesticando a mídia (Borba; Penteado, 2001), ou seja, estão explorando as suas potencialidades ao invés de reproduzir outras práticas advindas e características de outras mídias e, sim, interagindo com ela para buscar significados e produzir conhecimentos.

Nesta atividade, foi perceptível a criação de exemplos para a própria compreensão de um conteúdo da GEE, utilizando a criatividade em sua elaboração e a interação de estudante e

software que formam um coletivo capaz de produzir conhecimento de GEE. Corroboro Montes *et al.* (2023) quando dizem que a exemplificação é uma atividade humana essencial, pois nos comunicamos usando exemplos e consideram que nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, tal atividade pode tomar um papel relevante. Acrescentam que a capacidade de exemplificar está relacionada à capacidade de demonstrar e definir. Neste sentido, o exemplo criado pela estuante e idealizado com o GG nos mostra que os conteúdos, de fato, foram compreendidos por ela.

Pensando nos produtos apresentados pelos estudantes, é importante ressaltar que a disciplina de GEE, com carga horária de 60 h/aula aconteceu remotamente, ou seja, mesmo nos trabalhos em grupos como este, não existiu contato físico entre os alunos, que se reuniam virtualmente, através do Google Meet, para planejamento e desenvolvimento de suas atividades.

Neste sentido, o contexto da investigação foi modificado pela pandemia e, mesmo sendo uma AV, não houve prejuízo na aprendizagem. Conforme Lévy (1996), aquilo que era considerado possível, no caso, a experimentação com tecnologia, concretizou-se e tornou-se real, conforme podemos ver através dos trabalhos realizados pelos estudantes.

Em seguida, escolhi uma pergunta que foi realizada no segundo questionário (ver Apêndice C, ao final desta tese) e outra ocorrida durante a entrevista, (ver roteiro no Apêndice D) para que possamos “ouvir a voz” dos estudantes participantes dessa investigação, no tocante à temática desta subseção.

5.2.6. *A voz dos estudantes em relação à experimentação com as tecnologias*

Para finalizar esta subseção, apresento e analiso alguns dados produzidos no segundo questionário desta investigação (Apêndice C), que foi elaborado no *Google Forms*, encaminhado aos alunos via plataforma *Google Classroom* e na entrevista, cujo roteiro encontra-se na seção de Apêndices, ao final deste documento.

Uma das perguntas do segundo questionário era “Para utilizar o *software Geogebra* em aulas de Geometria Euclidiana Espacial, você considera que o *software* pode ser aprendido junto com a disciplina ou seria importante um curso sobre o *software* com antecedência? Em caso da segunda opção em qual fase escolar?”.

A₂₄(05/08/2021): *Acredito que seria melhor haver um curso com antecedência, digo isto até como um veterano pois no meu primeiro ano eu não conhecia o software e os professores já exigiam saber a ferramenta em algumas atividades o que dificultou minha aprendizagem na época, logo acredito que durante o Ensino*

Médio é um período interessante para aprender os mecanismos do software com algum conteúdo mesmo seu design sendo bem intuitivo acredito que no Ensino Médio, os alunos provavelmente tem mais acesso à tecnologia que possam usar o software e mais intimidade com as tecnologias móveis.

A₂₀(07/08/2021): *Acredito que para implementar o Geogebra, em qualquer tipo de aula, deve se ter uma bagagem, para que a pessoa ao construir as coisas entenda e queira aprofundar, porque caso contrário, ela só passará por ele e não sentirá que houve algo que tenha agregado a ela e consequentemente não irá gostar. Eu acho que um curso sobre o Geogebra poderia vir talvez já no Ensino Fundamental, porque lá os estudantes já poderão ter alguma ligação com o conteúdo e depois pode tornar tudo mais fácil, além de poder utilizar o software para quaisquer outras matérias que possa auxiliar.*

Fonte: Dados da pesquisa.

No início do curso, observei em notas de campo e, em pergunta no primeiro questionário (ver Apêndice B), que a maioria dos estudantes, apesar de já ter utilizado o *software Geogebra* em algum momento, desconheciam o *Geogebra 3D*, então a pesquisa passou por um *redesign* para que as aulas que haviam sido pensadas com o GG, fossem reestruturadas de forma que sempre fosse ensinado sobre a utilização do *software* junto com os conceitos previstos para a aula, pois sem os alunos saberem utilizar nenhuma ferramenta do programa, a pesquisa tomaria uma outra direção e, por isso, considero importante trazer esses dados.

Nota-se que os estudantes entendem que é necessário ter um curso sobre o *software* antes de sua utilização em sala de aula. Como educadores, não podemos exigir que os alunos saibam aquilo que nunca aprenderam. Neste sentido, a maior parte dos estudantes é favorável a ter um curso sobre o *Geogebra* antes de sua utilização em uma disciplina.

Em relação ao período em que esse curso deveria ser ofertado para estudantes, deixo aqui alguns questionamentos. Em qual fase da formação escolar, deveria ser ofertada uma disciplina de utilização de mídias digitais para os estudantes? Qual deveria ser a duração do curso? Segundo Borba (2021) e Borba, Souto e Canedo Júnior (2022), a intensificação do uso das tecnologias digitais ocorreu durante a pandemia. Para Borba, Souto e Canedo Júnior (2022, p. 15),

[...] o vírus SARS-CoV-2, um ator não humano, transformou abruptamente as relações de uso das tecnologias digitais em todos os setores da sociedade, particularmente nos processos de ensino e aprendizagem na Educação Matemática.

Com essa intensificação das TD nas aulas de Matemática, torna-se cada vez mais necessária a aprendizagem da utilização das mídias digitais nas salas de aula, em especial, o GG. Os estudantes consideram importante um curso sobre este *software* devido ao fato de ele

poder ser usado no estudo de diversos temas, como as geometrias, o estudo de funções, a estatística, dentre outras.

Para finalizar esta subseção, apresento a resposta do estudante A₁₆ para o questionamento realizado em entrevista: *Após finalizar a disciplina de GEE, você considera importante as suas interações com as mídias em seu curso? Em qual sentido?*

A₁₆(02/09/2021): *Eu vou contar uma experiência minha. Nesse semestre, eu estava abrindo um startup certo? Porque eu estava em um projeto muito legal com a PUC do Paraná e meu projeto era para fazer um, meio que GPS, mas dentro das lojas, sabe? Isso foi uma das coisas que eu usei o Geogebra para ter uma visão geral de como é que poderia funcionar os negócios, sabe? Por que eu criei um monte de retas e, eu interliguei as retas, e a onde seria um ponto das retas [no caso, ponto de intersecção de retas em planos distintos], seria real um stand de roupa ou alguma coisa assim. Daí eu fui usando o software para ter uma visão de meio como ia funcionar o aplicativo, sabe? E aí, eu usei o Geogebra, esse foi um dos pontos positivos que tive, ao aprender a utilizar o Geogebra. Não vi pontos negativos, pois aprender coisas é sempre bom e, depende do jeito que você usa.*

No entendimento do estudante, a aprendizagem de conteúdos de GEE com o GG teve pontos positivos, pois considera que agregar coisas à aprendizagem é favorável, desde que use para melhorias. Na situação descrita por ele, foi utilizado o *software* para ter as ideias referentes à produção de um trabalho que deveria desenvolver extraclasse.

Sendo assim, o estudante usou o *software* com um propósito diferente daquele para o qual foi elaborado, podendo moldar a mídia e ser moldado por ela, ocorrendo moldagem recíproca e produção de conhecimento.

Borba e Villarreal (2005) já compreendiam que o fato de poder testar uma conjectura com vários exemplos, o ato de poder repetir o número de vezes que for necessário, pois o computador oferece *feedbacks* rápidos, além da possibilidade de obtenção de diversas representações de uma única situação, tornam a abordagem experimental com tecnologias um potencial nas aulas de matemática. Na situação declarada acima, o estudante testou conjecturas experimentando com o GG em sua casa.

Nesta situação, o estudante usou os conhecimentos aprendidos em seu curso de GEE, relacionados ao *software Geogebra* para poder desenvolver atividades relacionadas a outros propósitos em sua vida, em uma atividade além do curso. O *software* teve outras utilidades para esse estudante em sua vida.

Na próxima subseção, apresento os dados referentes à visualização e EM que foi outra dimensão dessa investigação que emergiu dos dados.

5.3 Visualização e Educação Matemática

Nesta subseção, apresento e discuto os dados produzidos que levaram à constituição desta dimensão da pesquisa, que tem como enfoque principal, a visualização de figuras espaciais. Quando olhamos ao nosso redor, sempre nos deparamos com objetos tridimensionais que, na maior parte do tempo, encontram-se estáticos. Porém, se nos movemos ao redor deles, podemos visualizar as partes destas imagens.

Uma outra opção que temos para visualizar estes sólidos espaciais é através dos *softwares* que dispõem de opções de visualização em 3D e realidade aumentada, como é o caso do programa *Geogebra* 3D Classic e do aplicativo *Calculator* para *smartphones*. Essas tecnologias apareceram, conforme já dito anteriormente, no início dos anos 2000. Antes disso, na Educação Matemática era utilizado o livro didático, o quadro negro, materiais manipuláveis, além de lápis e papel para a aprendizagem de conceitos da Geometria Euclidiana Espacial.

O quadro negro foi uma tecnologia presente nas escolas por muito tempo, onde o professor ‘passava o conteúdo no quadro e o aluno copiava’. Segundo Bastos (2005, p. 133)

Pode-se afirmar que a centralidade pedagógica do e sobre o quadro negro resulta da ausência de manuais escolares e de outros recursos visuais para a aprendizagem, e da centralidade do processo pedagógico na figura do professor.

Com a popularização das tecnologias digitais – TD no cotidiano das pessoas, já é possível utilizar *softwares* livres, ou seja, de acesso gratuito, para visualizar objetos espaciais em sala de aula. Infelizmente, nem todos assumiram a prática de uso. Existe uma preocupação com o uso do celular pelos estudantes para a realização de outras atividades, como o envolvimento em redes sociais, em relação a aprendizagem, dentre outros.

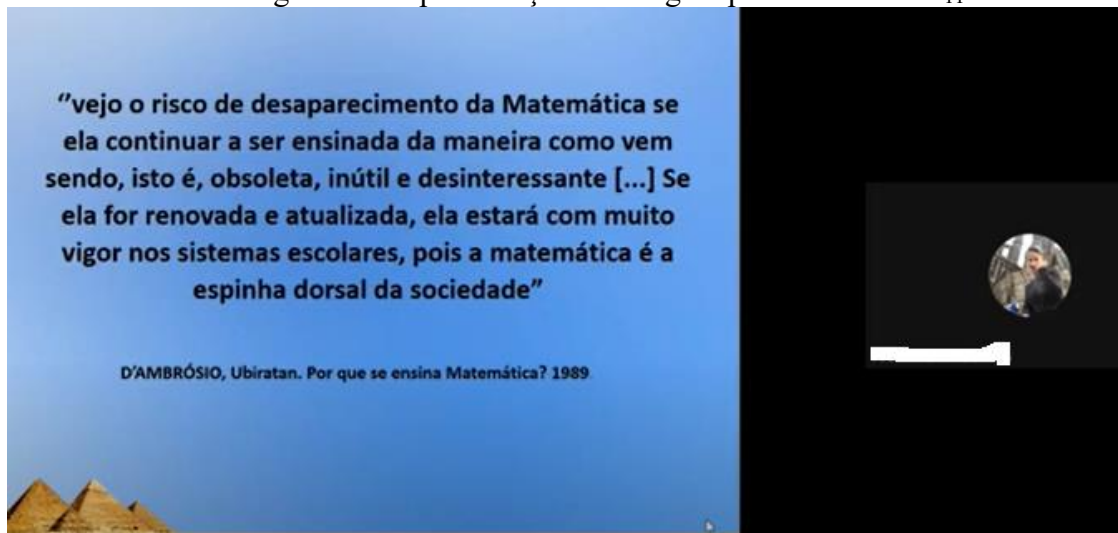
No entanto, as TD são cada vez mais presentes nos cotidianos dos estudantes e da comunidade como um todo, sendo motivo de várias pesquisas em EM a participação delas nas salas de aula de Matemática.

Olhando para os meus dados, em uma atividade apresentada pelos estudantes A₁₁ e A₁₈, com o título “Um estudo sobre as pirâmides: histórico e matemático”, o primeiro aluno inicia a exposição.

A₁₁(16/08/2021): *Queria comentar uma frase que eu gosto muito do nosso Professor Ubiratan, que para mim ele mostra, como o nosso curso, que desde o começo a gente utilizou o Geogebra, a Geometria Dinâmica e o uso das tecnologias. Então, aqui ele fala.*

Neste momento, o aluno está apresentando no *Google Meet* a tela que pode ser vista na Figura 42.

Figura 42 - Apresentação da imagem pelo estudante A₁₁



Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₁(16/08/2021): *Eu gosto muito dessa frase porque a gente consegue traduzir ela em diversos contextos. E ele pontua na parte de renovar a matemática, de atualizar sempre a matemática, e esse é o nosso papel como professor. Então, por isso, além de ensinarmos a Geometria, conforme diz na BNCC, é interessante mostrar através de software a Geometria Dinâmica, que é o que o Prof. Ubiratan fala e é o que estamos fazendo este semestre inteiro. Também gente, Geometria Espacial sem usar alguma tecnologia fica um pouco difícil da gente enxergar, né?*

Fonte: Dados da Pesquisa.

O vídeo elaborado e apresentado pelo estudante A₁₁ pode ser visto através do *QR Code* 11 (Figura 43).

Figura 43 - QR Code 11: Apresentação do estudante A₁₁



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Conforme pontua o estudante, o uso de TD facilita a visualização de sólidos geométricos. Segundo ele, são importantes a renovação e a atualização das formas de ensinar a Matemática; em particular, a GEE. Quanto mais evoluímos como seres humanos, precisamos adequar o momento atual às possibilidades que ele nos oferece para poder facilitar a aprendizagem, proporcionando aos estudantes, por exemplo, a visualização em 3D durante as aulas de GEE.

De acordo com Lévy (2010), as tecnologias da inteligência, oralidade, escrita e informática estão atreladas ao momento histórico, social e cultural no qual os indivíduos estão inseridos em uma determinada ocasião. Segundo este autor, “escrita, leitura, visão, audição, criação, aprendizagem são capturadas por uma informática cada vez mais avançada” (LÉVY, 2010, p. 7).

Neste sentido, não se podem perder de vista as tecnologias da inteligência que surgem antes da informática, ao mesmo tempo que não se pode afastar as TD da educação, quando elas estão tão próximas do cotidiano dos estudantes, levando-se em consideração que se olharmos ao nosso redor, quase não encontramos aluno sem um aparelho *smartphone* em suas mãos, independentemente do seu nível social.

Em uma outra situação, após trinta minutos do início de uma aula próxima ao final do curso, pedi aos estudantes para responderem à pergunta “Como você considera sua interação com as mídias digitais (Videoaulas, *Softwares*, lousa digital, a própria aula remota, etc...) utilizadas no curso em relação aos conteúdos de Geometria Euclidiana Espacial?”

Pedi para que os estudantes escrevessem a sua resposta, contendo 4 a 5 linhas, no *chat* do *Google Meet* e que só apertassem a tecla “*enter*” quando eu dissesse ok. Essa ideia foi retirada de uma aula que eu tive enquanto aluna da pós-graduação, na disciplina de metodologia ministrada pelo Professor Marcelo de Carvalho Borba, em janeiro de 2021. Achei a ideia interessante e resolvi replicar.

Após transcorridos três minutos, pedi para que apertassem a tecla “*enter*” com o intuito de que todas as respostas aparecessem no *chat* simultaneamente e que, nesse sentido, cada um pudesse escrever a sua opinião em relação ao questionamento feito de acordo com o primeiro pensamento que fosse construído em sua mente, sem observar as respostas dos outros.

A₆(29/07/2021): Acho que as mídias usadas foram um complemento, elas ajudam a entender melhor o que acontece na Geometria, a visualizar melhor.

A₂₁(29/07/2021): Eu acho que está sendo muito bom, a gente consegue visualizar as coisas que só falando não conseguimos pensar a "imagem" na hora. É importante o uso de softwares para que aumente nosso entendimento na teoria, porque neles

conseguimos explorar coisas que em sala de aula apenas com lápis, caderno e lousa não conseguiríamos

A₁₃(29/07/2021): *Acredito que de modo geral tenho facilidades com o uso de tecnologias então não foi um problema para mim. Acredito que as interações com softwares propostas ajudam na visualização e entendimento da matéria. Se tivesse que apontar um problema, diria que não me sinto motivado a fazer essas interações, considero alguns softwares chatos de mexer.*

A₁₉(29/07/2021): *Considero minha relação com as mídias utilizadas no curso um processo contínuo de aprendizagem. Essa aprendizagem acaba ocorrendo tanto no âmbito da própria disciplina, facilitando a visualização e entendimento dos sólidos e afins quanto na familiaridade com os softwares e programas.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados revelam que os estudantes envolvidos nesta pesquisa acreditam que o uso das mídias ajuda na visualização em relação aos conteúdos de GEE. Ao pontuarem que a utilização de uma mídia favorece o entendimento de conteúdos de GEE porque a visualização faz parte do processo, entendo que, a visualização dá um novo significado para a aprendizagem das geometrias, em especial a GEE, já que o uso de *softwares* permite a visualização de todas as partes de uma figura tridimensional e da dinamicidade possibilitada por ele.

Quando o estudante A₂₁ pontua que, em relação aos conteúdos de GEE, no contexto de que o professor só fala em uma aula expositiva, às vezes os alunos não conseguem criar uma imagem mental naquele momento e, nesse sentido, o uso de materiais manipuláveis ou, como é o caso aqui, de um *software* de Geometria Dinâmica, possibilita a visualização em tempo real, auxiliando no entendimento do conteúdo estudado, ele está dizendo sobre as imagens mentais e as representações visuo-espaciais.

Nesse sentido, as imagens mentais são diferentes das representações visuo-espaciais pelo concretismo que as imagens visuais apresentam, enquanto as representações mais abstratas constantemente não possuem, e também pelos formatos variados e flexíveis de codificação da informação sobre o mundo em memória para recordar ou utilizar imagens e outras representações visuo-espaciais.

Neste sentido, as imagens mentais podem ser elaboradas sem um elemento externo apropriado, enquanto as representações visuo-espaciais utilizadas nos processos para o reconhecimento são associadas com as informações exteriores disponíveis e podem derivar da análise dessa informação (Santos, 2000).

As imagens mentais compõem um dos quatro elementos da visualização, para Gutiérrez (1996). No entanto, para esse autor, quando aliamos a elas as representações externas, o processo de visualização e as habilidades visuais, temos a visualização.

Todas as vezes em que foi apresentado um sólido geométrico no contexto dessa pesquisa foi realizada uma construção, na qual os estudantes poderiam formar uma imagem mental instantaneamente, ainda que nunca tivessem conhecimento daquele objeto e, juntos aos outros três elementos, acontecia a visualização.

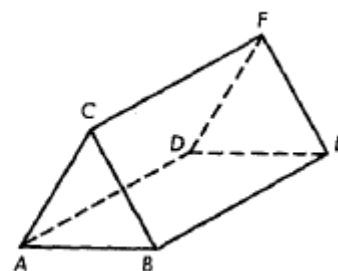
No contexto desta investigação, essa visualização passa a ser parte de um outro processo, o de aprendizagem virtual de GEE por um coletivo de estudantes-com-mídias. Quero dizer que a visualização se constitui como um elemento desse processo.

O estudante A₁₃ afirma que não se sente motivado a interagir com as mídias. Entendo que é comum encontrarmos alunos desmotivados em relação às aulas de Matemática, a abrir o livro didático, a abrir o caderno, a escrever alguma coisa, a resolver uma atividade ou até mesmo a ouvir o que o professor está dizendo (Predebon; Gritti, 2020; Pontes, 2021). Mesmo não se sentindo motivado, o estudante desenvolveu as atividades e considerou que as interações propostas ajudam na visualização e entendimento do conteúdo.

Em outro momento, nos últimos minutos da aula síncrona do dia 28/06/2021, após a explicação realizada pela professora sobre prismas, foram propostas duas atividades para serem realizadas na sala de aula, além de uma lista de exercícios para a aula seguinte. Uma das atividades, encontrava-se no livro de Moise *et al.* (1966) e pode ser vista na Figura 44.

Figura 44 - Atividade proposta retirada do livro do Moise *et al.* (1966)

8. Las bases del prisma representado a la derecha son triángulos equiláteros y sus caras laterales son regiones rectangulares. Si se sabe que la longitud de una arista de la base es 6 y la altura del prisma es 10, calcúlese el área de la superficie total del prisma.



Fonte: Dados da pesquisa.

Após decorrido um tempo de aproximadamente dez minutos para a resolução, a professora pediu para que alguém mostrasse como havia feito a atividade e o estudante A₁₈ logo se prontificou a apresentar a sua tela com o GG aberto e fazer a atividade junto com a professora e a turma.

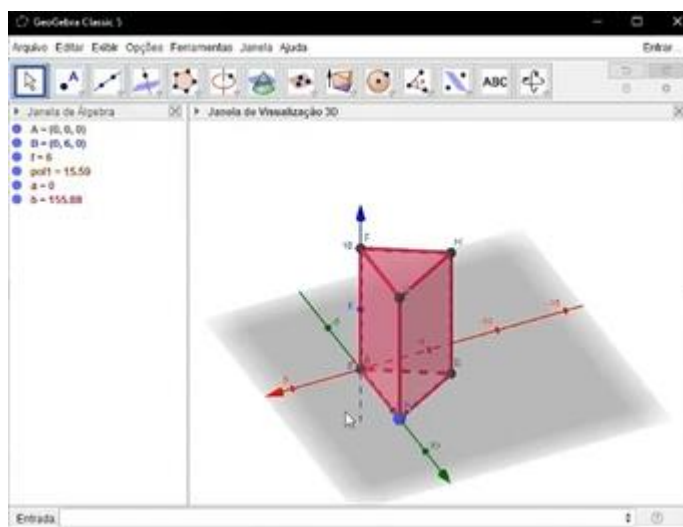
A₁₈(28/06/2021): *Três lados [construindo o triângulo da base], agora sim temos o triângulo equilátero de lado 6. [usou a ferramenta prisma, mas não estava conseguindo parar na altura de medida 10].*

Professora (28/06/2021): *Você pode fazer a extrusão para prisma que aí você tem como dar a medida da altura.*

O estudante buscou a ferramenta de extrusão e deu continuidade, situação ilustrada pela Figura 45.:

A18(28/06/2021): *A altura é 10, então temos aqui o prisma do nosso problema.*

Figura 45 - Prisma construído pelo estudante A18



Fonte: Dados da pesquisa.

A18(28/06/2021): *No caso, o que eu fiz foi, como aqui [aresta da base] tem 6 de lado e 10 de altura, eu só peguei e fiz a área desse retângulo e multipliquei por três, porque tem três iguais e, na verdade o meu valor ficou diferente porque eu esqueci de multiplicar por dois a área da base.*

Professora (28/06/2021): *que é a aresta ao quadrado raiz de 3 sobre 4, né?*

A18(28/06/2021): *É. Lado ao quadrado, raiz de 3 dividido por 4. No caso eu dividiria por 2. Acho que tem uma ferramenta para mostrar a área não tem?*

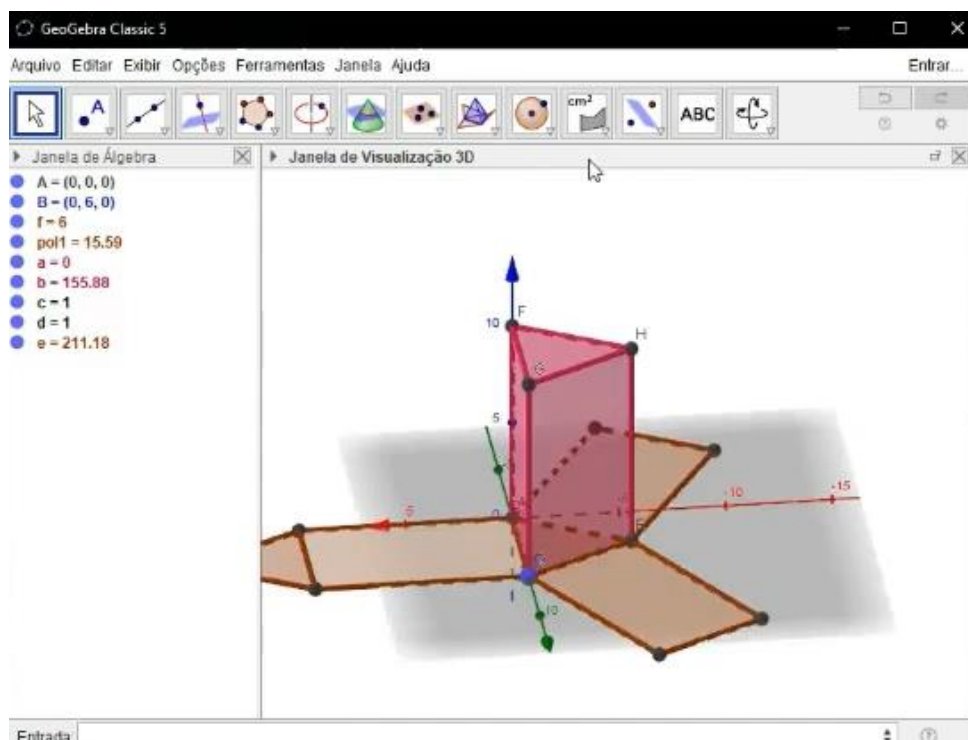
Professora (28/06/2021): *É... a área. Tenta digitar aí...*

A18(28/06/2021): *Vou fazer a planificação.*

Professora (28/06/2021): *Pela planificação fica melhor. Mas você não planificou o negócio [sólido] todo não.*

Neste instante, o estudante fez a planificação do sólido, conforme pode ser visto na Figura 46.

Figura 46 - Imagem da planificação do sólido realizada pelo estudante A18



Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₈(28/06/2021): *E aqui escolho a ferramenta área.*

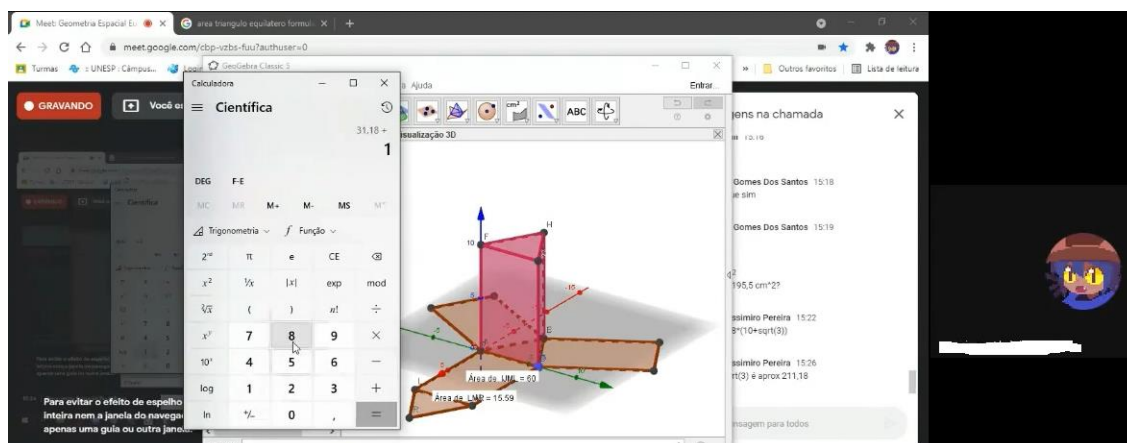
Professora (28/06/2021): *Aí você clica em uma por uma e depois soma tudo, né?*

A₁₈(28/06/2021): *A área do retângulo é 60, então temos 180 de área dos retângulos e a área do triângulo é 15,59 vezes 2.*

Professora (28/06/2021): *Isso. Igual o estudante A₂₂ colocou no chat.*

Neste instante, o estudante A₁₈ abriu a calculadora para fazer as contas. As áreas calculadas pelo GG e a calculadora podem ser vistas na Figura 47.

Figura 47 - Cálculo de áreas e calculador

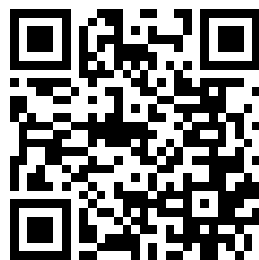


Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₈(28/06/2021): tem que fazer até o final. Eu tinha feito errado porque eu esqueci de calcular as duas bases do prisma, eu só peguei a de baixo.

A resolução do exercício proposto pode ser vista no vídeo através do *QR Code* 12 (Figura 48).

Figura 48 - QR Code 12: Resolução do exercício proposto pelo estudante A₁₈



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Nessa situação, a questão foi proposta para a turma com o objetivo de ser executada e discutida na própria sala de aula virtual. O exercício fornecia a aresta da base e a altura de um prisma triangular e pedia para que fosse calculada a área da superfície do prisma. Observo aqui que, nos livros mais antigos, que nem posso considerar como livros didáticos, as questões eram menos contextualizadas do que as que aparecem nos livros didáticos dos dias atuais, porém não tenho a intenção de entrar nesta discussão.

Os dados revelam que o estudante construiu o prisma de acordo com os dados do exercício, no GG, e logo viu que tinha encontrado um resultado diferente do que seu colega, o estudante A₂₂, havia colocado no *chat*. Ao resolver a questão com a planificação no GG, o estudante percebeu que tinha pegado apenas uma das bases para calcular a área da superfície do sólido.

A visualização, a partir da planificação do prisma triangular, possibilitou ao estudante recordar-se das duas bases existentes e calcular a área total do prisma de forma correta. Segundo Alves (2022), a interação de alunos do Ensino Médio com o GG em relação à planificação de sólidos geométricos levou ao desenvolvimento da visualização espacial e às habilidades de conversão nas representações.

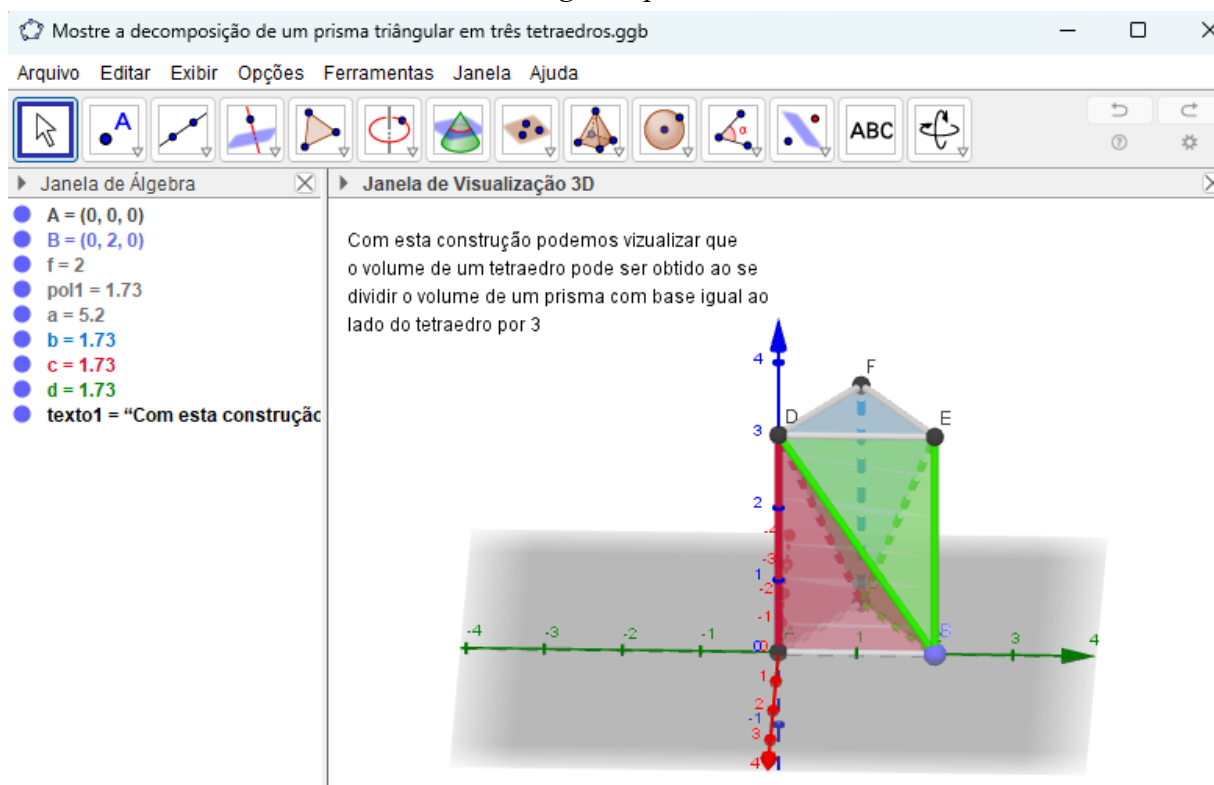
Neste sentido, corroboro Alves (2022) e Scalabrin e Mussato (2019), quando consideram que os estudantes interagindo com o GG apresentam a habilidade da visualização espacial, o que contribui diretamente com a representação mental dos objetos tridimensionais em um contexto real.

A visualização do sólido em 3D e do sólido planificado possibilita, conforme vimos na cena apresentada, que o cálculo das áreas planas realizados pelos alunos possam ser verificados em relação ao valor calculado pelo *software*. Conforme Borba e Villarreal (2005), os estudantes podem validar seus conhecimentos ao utilizarem um *software* que aqui, é de Geometria Dinâmica, mas possui uma janela de Álgebra onde os cálculos são realizados pelo programa.

Em outro momento, ao final da aula do dia 01/07/2021, foi proposta uma lista de exercícios para ser resolvida e postada via plataforma sala de aula (*Google Classroom*), onde uma das atividades era fazer a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros de mesma aresta. Apresento os arquivos encaminhados por duas estudantes.

A Figura 49 traz a imagem enviada pela estudante A₁₂:

Figura 49 - Decomposição de um prisma triangular em três tetraedros de mesma aresta realizada no *Geogebra* pela Estudante A₁₂



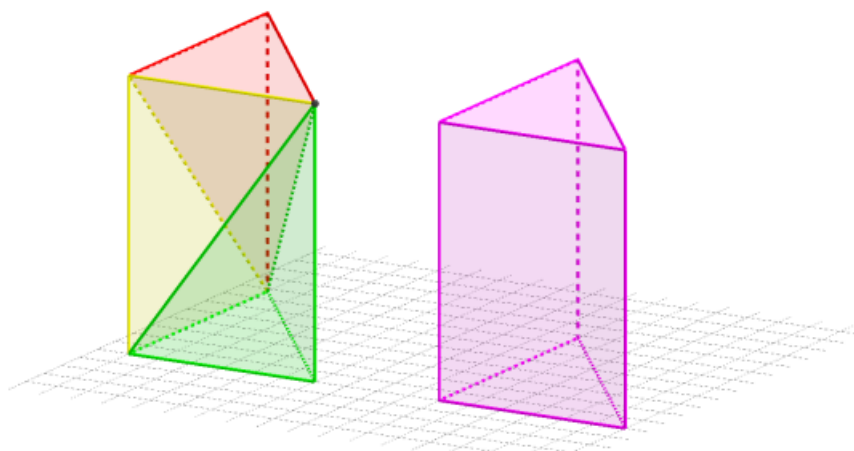
Fonte: Dados da pesquisa.

A estudante A₁ também enviou uma imagem, como a postada pela estudante A₁₂, em sua lista de exercícios, além de um vídeo explicando como fez a decomposição. A Figura 50 mostra a imagem.

Figura 50 - Imagem retirada da lista de atividades resolvida pela estudante A₁

2 Decomposição de um prisma triangular em três tetraedros

A gravação do passo a passo da decomposição feita no GeoGebra se encontra em outro arquivo anexo.



Fonte: dados da pesquisa.

A₁: Bom, então estou aqui no Geogebra para mostrar a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. Então, eu vou começar construindo aqui o nosso prisma [usou a ferramenta prisma], triangular, vou escolher os pontos aqui [do triângulo da base] e colocar uma altura aqui de 4. Vou ocultar os eixos e criar uma cópia do prisma para fazer a construção na cópia e ir comparando com o original. Então, só precisamos construir os nossos tetraedros, nossas pirâmides. Então vou selecionar aqui a nossa primeira pirâmide [com a mesma base do prisma] e vou ocultar o nosso prisma para podermos enxergar o nosso primeiro tetraedro, então vou construir mais os outros dois e daí a gente tem a composição aqui em três tetraedros. Vou mostrar um de cada vez para conseguir enxergar melhor. Então, temos o primeiro [ocultou os outros dois], o segundo [idem] e o terceiro [idem] e juntos temos a figura para comparar [prisma feito inicialmente].

Fonte: Dados da pesquisa.

O QR Code 13 abaixo mostra o vídeo enviado pela estudante (Figura 51).

Figura 51 - QR Code 13: Vídeo gravado pela estudante A₁ e postado no Google Classroom



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Ao utilizar o *software* GG para fazer a decomposição de um prisma em três tetraedros, a estudante A₁₂ optou por usar cores diferentes para diferenciar cada um dos três tetraedros

dentro do prisma, mostrando que o volume do prisma é três vezes o volume de cada tetraedro. A aluna resolveu escrever no próprio *software* GG o que tinha encontrado ao realizar a atividade.

Já estudante A₁ enviou a lista de exercícios com a decomposição realizada e gravou um vídeo, o qual enviou separadamente, na plataforma *Google Classroom* mostrando como realizou a construção, além de apresentar cada tetraedro separadamente.

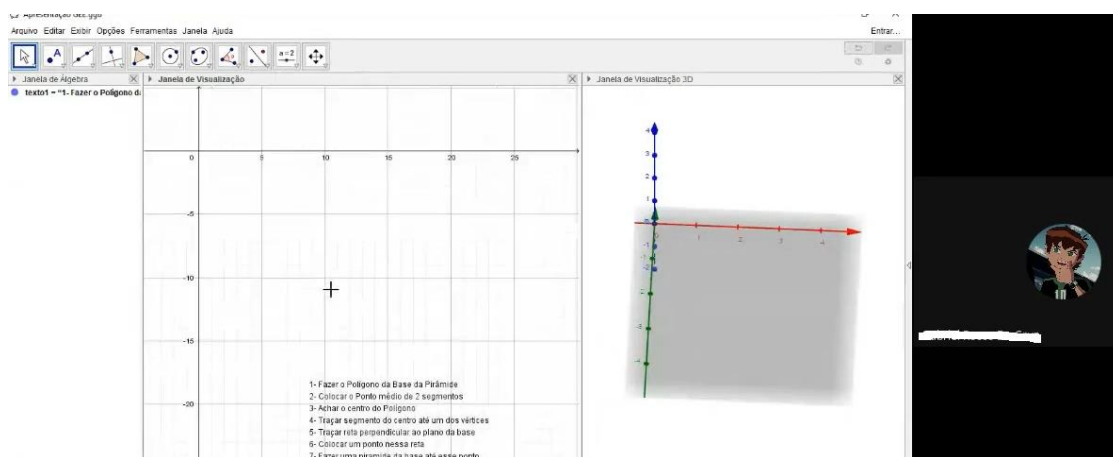
Gutierrez (1992) já dizia sobre a “visualização espacial” que trata das habilidades mentais, as quais considero coerentes com a aprendizagem da GEE, quando são utilizadas diferentes formas de representação dos conceitos matemáticos, controle da criação, transformação e transmissão. Os dados aqui apresentados condizem com esse pensamento, já que os conceitos matemáticos, no caso, prisma e tetraedros, foram representados no GG com a criação de cada uma das estudantes e transmissão distinta.

Neste sentido, ambas as estudantes utilizaram a visualização espacial para representar a decomposição de um prisma em três tetraedros. Conforme pondera Gutierrez (1996), as alunas usaram os quatro elementos principais da visualização: as imagens mentais, ao representarem uma definição que inclui elementos visuais ou espaciais; as representações externas, ao construírem figuras que propiciam a criação ou transformação de imagens mentais para a construção de um raciocínio visual; o processo de visualização, onde obtiveram, em sua construção, a interpretação visual de informações e a interpretação de imagens mentais; e finalmente, as habilidades visuais, como a percepção de figura base, quando A₁ omite o prisma para mostrar cada um dos tetraedros, a constância perceptual, apresentando entendimento quando uma figura é percebida em diferentes orientações, rotação mental, quando construíram as imagens mentais dinâmicas podendo visualizar uma construção em movimento, a percepção de posições no espaço, quando relacionaram objetos distintos, porém que se relacionavam, a percepção de relações espaciais e a discriminação visual, ao se compararem objetos.

Em uma outra situação, quando foi proposta a realização da atividade em duplas de inscrição e circunscrição de sólidos, os estudantes A₁₇ e A₁₃ ficaram responsáveis por mostrar para a turma quais eram as relações entre as medidas de uma pirâmide inscrita em um cone e as medidas do cone.

O estudante A₁₃ iniciou a sua apresentação mostrando a tela que pode ser vista na Figura 52.

Figura 52 - Imagem apresentada pelo estudante A₁₃

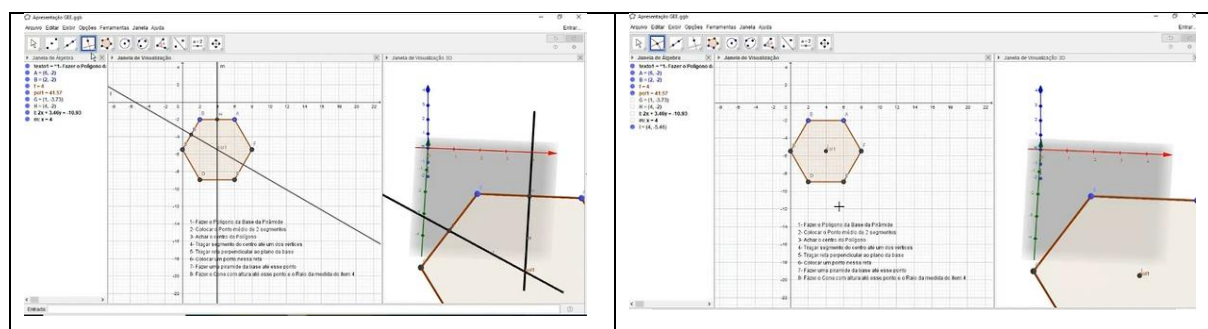


Fonte: Dados da pesquisa.

A13(19/07/2021): Então, eu coloquei aqui um passo a “passozinho” só para eu seguir do mesmo jeito que eu fiz alguns testando lá [anteriormente] e o nosso era fazer a pirâmide por dentro do cone, inscrito no cone. Então, como é que vai funcionar, primeiro de tudo, a gente vai escolher um polígono para a base da pirâmide e vai fazê-lo [na janela 2D]. Então no caso aqui, eu vou selecionar para fazer um polígono regular para facilitar um pouquinho durante a construção. Então vou selecionar dois pontos aqui, e para este caso eu vou fazer com um hexágono. Então eu seleciono 6 faces e chegamos nesse polígono para a nossa base. Como o polígono é regular eu só vou... eu preciso achar o centro dele, né?... então eu vou fazer o seguinte: vou encontrar o ponto médio de dois lados e a partir disso, eu vou traçar a reta perpendicular que passa pelos pontos médios, as mediatrizes para achar o centro. Poderia achar o baricentro, o circuncentro, pois, como o polígono é regular, qualquer um deles estaria no centro. Em seguida vou marcar a intersecção das duas retas e, como não vou precisar delas, vou omitir elas aqui, já que só preciso do centro.

A Figura 53 mostra a construção das retas perpendiculares e o centro do polígono, após omitir as retas.

Figura 53 - Retas perpendiculares que passam pelo ponto médio de dois lados consecutivos do polígono e centro do polígono

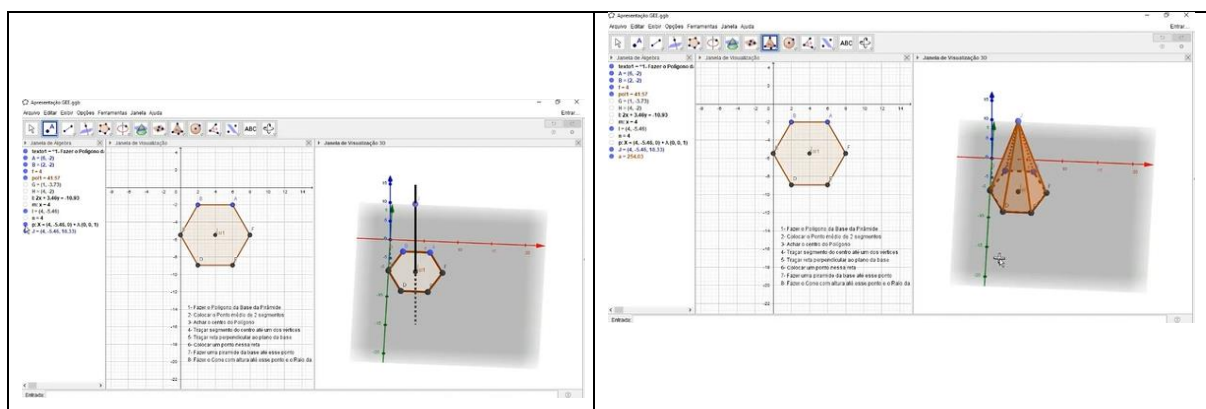


Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₃: Vou traçar um segmento do centro até um dos vértices. No caso do hexágono regular ele pode ser dividido em seis triângulos (acho que foi o A₂₀ que falou) então o seguimento que construí é igual a aresta do polígono, mas para os outros que eu fiz e vou mostrar depois, eu precisava de um seguimento entre o centro e um vértice. A partir disso, eu vou tirar esta distância, porque não preciso que ela apareça, pois eu preciso do valor dela, que através da janela de álgebra sabemos que é 4. Ai agora a gente vai dar uma migrada para a nossa parte 3D. Então aqui, o que eu vou fazer, eu vou passar uma reta perpendicular a um plano [usando a ferramenta do GG] e quero que ela passe pelo centro e vou selecionar um ponto qualquer sobre a reta na parte de cima. Como não preciso que essa reta apareça, eu vou tirar ela, e a partir disso eu vou montar algumas coisas aqui. Primeiro a pirâmide, onde eu vou selecionar o polígono da base e linkar com o ponto que eu coloquei lá em cima.

A Figura 54 representa a reta perpendicular ao centro do polígono da base e um ponto sobre ela (a esquerda) e uma pirâmide (a direita).

Figura 54 - Reta perpendicular (esquerda) e pirâmide (direita)

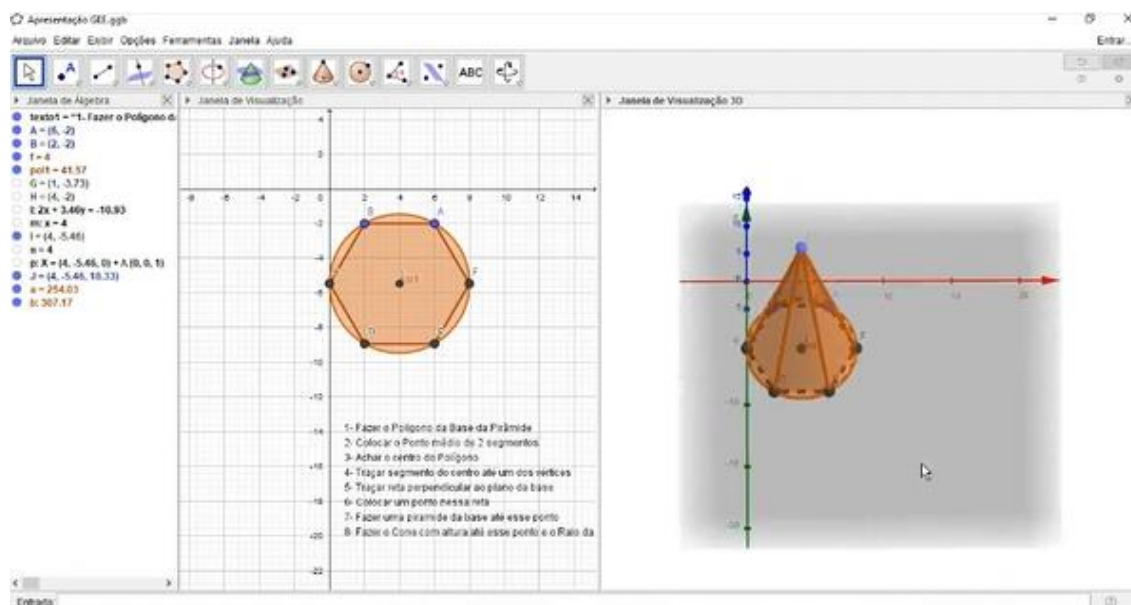


Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₃(19/07/2021): E agora, para fazer o cone, a gente seleciona o ponto central da base, o ponto lá de cima e preciso do raio, que no caso foi aquela medida que tirei antes, que é 4 e, assim temos a pirâmide inscrita em um cone. Vou dar uma rodada.

Após desenvolver a reta perpendicular e a pirâmide, o estudante A₁₃ passou então a colocar a pirâmide inscrita em um cone, no software GeoGebra, conforme ilustra a Figura 55.

Figura 55 - Pirâmide inscrita em um cone

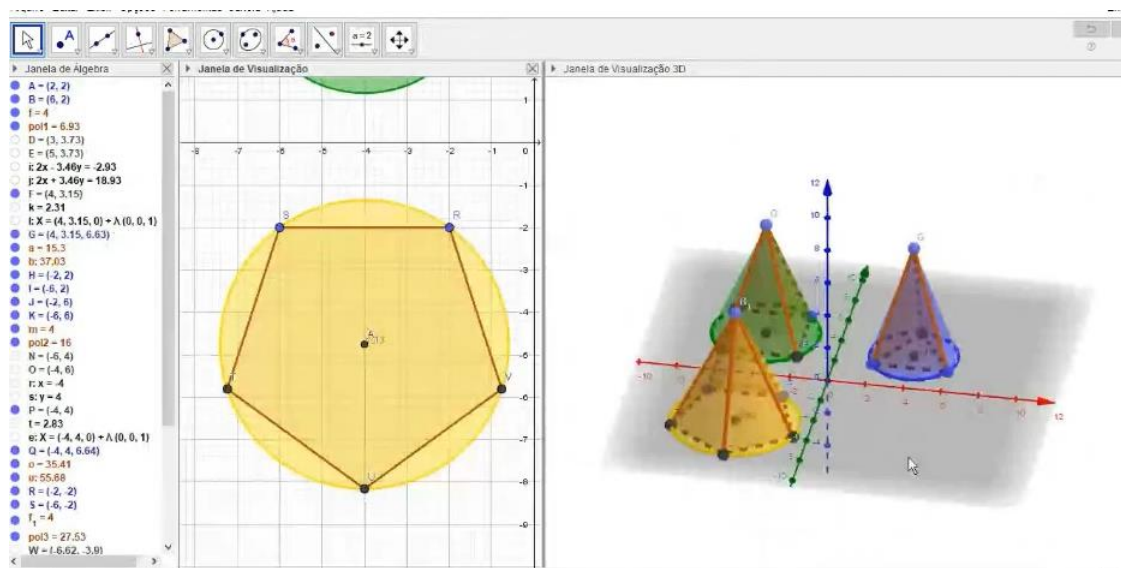


Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₃: Agora, vamos ver as relações que podemos estabelecer entre eles. Primeiro de tudo, a altura é igual. A distância entre o centro do polígono e um dos vértices é o raio do cone. No caso do hexágono e, isso acontece também quando a base for quadrada, a diagonal maior é o diâmetro [da circunferência que é base do cone] e a aresta lateral da pirâmide, ela também é a geratriz do setor circular. Aí, eu fiz algumas outras aqui.

A Figura 56, a seguir, ilustra o pensamento matemático do estudante A₁₃.

Figura 56 - Pirâmides inscritas em um cone, com bases diferentes do hexágono



Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₃(19/07/2021): *Todas elas são regulares, uma base é um pentágono, a outra um triângulo equilátero e um quadrado. A relação do volume entre elas varia de uma para a outra, mas o que a gente pode dizer é que a relação entre os volumes é a mesma relação que as áreas das bases, porque o volume da pirâmide é a base da pirâmide vezes a altura dividido por três e o volume do cone também é a mesma coisa, é a área da base vezes a altura dividido por três como a altura é igual, e é tudo dividido por três, a relação entre elas vai ser a mesma relação que a gente tem entre as áreas das bases [círculo e polígono da base] e é isto aí. Fiz estas últimas para ficarmos olhando e vou deixar rodando.*

Fonte: Dados da pesquisa.

O vídeo pode ser assistido através do *QR Code* apresentado na Figura 54.

Figura 57 - QR Code 14: Apresentação das relações de uma pirâmide inscrita em um cone pelo estudante A₁₃



Fonte: Produzido pela autora (2023).

A atividade, que foi desenvolvida pelo estudante A₁₃ e apresentada em tempo síncrono através do *Google Meet* para a turma de estudantes e a professora da disciplina pode ser considerada um bom exemplo, tanto para a experimentação com tecnologias, quanto para a visualização.

Conforme dizia Zulatto (2007), a visualização pode assumir um valor pedagógico quando envolve a compreensão dos estudantes com ou sem a utilização das mídias. Considero que os dados aqui apresentados podem constituir um valor pedagógico, com a produção de um coletivo estudante-com-mídia que analisa as relações existentes entre as medidas, áreas e volumes de uma pirâmide inscrita em um cone, sendo que a pirâmide regular foi mostrada com bases diferentes, o que realça o valor pedagógico descrito pela autora.

Além disso, a forma de girar os sólidos realizada pelo coletivo faz com que o ambiente tenha um potencial diferente do tradicional uso do lápis e papel (Zulatto, 2007). Nessa apresentação, quando os sólidos aparecem rotacionados 360 graus, tanto no sentido longitudinal, quanto no sentido latitudinal, as possibilidades de visualização se ampliam para observação de cada detalhe,

como arestas, vértices, pontos de intersecção entre os sólidos e todos os lados da figura 3D, que se encontra em movimento.

Esse olhar tridimensional em todo o sólido propicia o pensar nos objetos, suas dimensões, suas relações entre áreas e volumes, conforme apontam os dados. Novamente, as habilidades visuais (Gutiérrez, 1996) são encontradas aqui, um pouco diferente de como descrito pelo autor e com um maior suporte do GG em relação as habilidades mentais, que agora podem ser ditas habilidades mentais-com-mídias, pois continuam relacionadas à aprendizagem de conteúdos dentro do campo da Matemática, controlando a criação, transformação, transmissão e a utilização das diferentes formas de representação dos conceitos matemáticos nas aulas, porém com o acréscimo de um *software* de Geometria Dinâmica em que é possível a visualização em 3D.

Esse fato permite que a visualização espacial tenha um componente a mais em relação ao ensino e à aprendizagem de conceitos da GEE. Além disso, o trabalho com realidade aumentada, no aplicativo *Calculator 3D*, com celulares potencializa a visualização espacial, por ser outra forma de representação dos conceitos de GEE nas salas de aula.

Leivas (2009) já entendia a visualização como um processo de formação das imagens mentais com o objetivo de construir e comunicar algum conceito matemático. Estas imagens mentais são facilitadas quando participa de tal processo um *software* de Geometria Dinâmica que proporciona a visualização em 3D, como foi apresentado pelo estudante A₁₃ nas construções das pirâmides inscritas no cone e a visualização ganha potencial quando o aluno diz “vou dar uma rodada”, fazendo que os sólidos sejam vistos em todas as suas dimensões.

Além disso, os dados mostram o aluno A₁₃ estabelecendo as relações das pirâmides inscritas nos cones, tanto de medidas unidimensionais, como de áreas (bidimensionais) e de volumes (tridimensionais). Já diziam Gutiérrez *et al.* (2018) que a importância da visualização no entendimento dos conceitos e nas relações matemáticas tem sido afirmada, assim como a necessidade para o desenvolvimento de habilidades de visualização e dos meios eficazes do uso desse raciocínio na resolução de problemas. A visualização se faz presente no entendimento dessas relações. Ressalto aqui que após as relações estabelecidas, os estudantes resolveram problemas utilizando-as.

Retore e Notare (2023) constataram que o ambiente proporcionado pelo GG 3D, em realização de uma atividade proposta, auxilia o desenvolvimento da visualização dos estudantes após identificarem o uso de diversas habilidades espaciais, como a identificação visual, a discriminação visual e o reconhecimento de relações espaciais. Concluem que o GG contribui para a criação de imagens mentais, assim como o uso e desenvolvimento de habilidades de visualização.

Ao utilizar o *software* GG, o estudante apresentou para a turma uma construção qualitativamente diferente daquela feita com lápis e papel, conseguindo fazer com que a professora e os colegas visualizassem os sólidos e as suas relações com possibilidades de explorar todas as suas propriedades, além de assistir à movimentação que dá potencial de compreensão dos conceitos de GEE a partir da visualização.

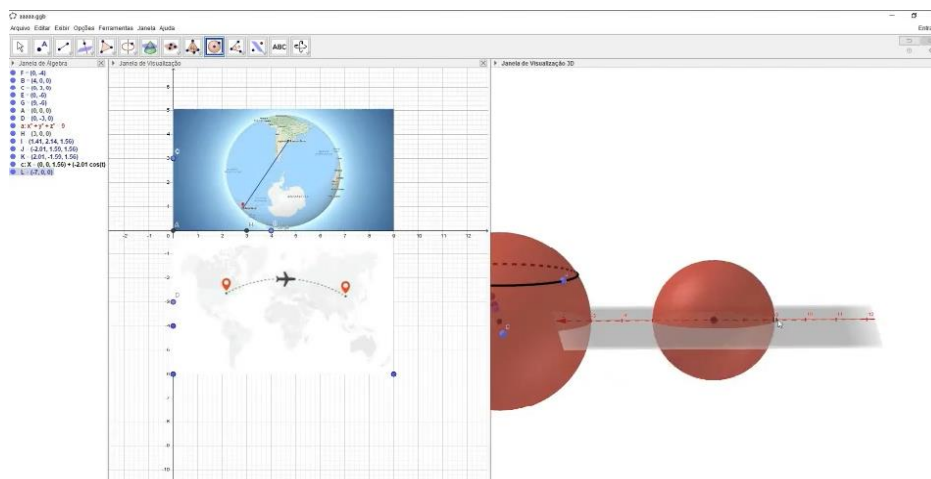
De acordo com os dados aqui apresentados e com os pensamentos dos autores sobre a a visualização, acrescento que habilidades-mentais-com-mídias proporcionam, ao coletivo e a quem o assiste, melhor conforto e maior potencial para a visualização e compreensão das imagens mentais.

Em um outro episódio, desta vez sobre esferas, a aula foi elaborada e desenvolvida pelos estudantes A₁₄, A₅ e A₁₆, conforme foi solicitado pela professora. O estudante A₁₆ utilizou a ferramenta de apresentação do *Google Meet* e começou a falar enquanto apresentava a imagem, que pode ser vista na Figura 58.

A₁₆(12/08/2021): Agora, aqui eu vou apresentar a minha parte no Geogebra que seria como fazer uma esfera. Primeiro, vou começar do básico, como eu faço uma esfera no Geogebra. Tem dois jeitos, o primeiro você pode usar as ferramentas onde ativa a janela 3D e você teria que vir aqui nas esferas e você simplesmente clica [no centro] e escolhe o tamanho do raio da esfera que você quer escolher. O outro jeito que você pode fazer é utilizando a entrada e digitando $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, onde r é o raio da esfera. Por exemplo, se eu colocar 9, a esfera fica igual a que já tenho ali, ou seja, o raio será 3.

A Figura 58, portanto, mostra a construção de uma esfera no GG, além de o estudante trazer a imagem de um globo terrestre na janela de visualização 2D.

Figura 58 - Apresentação da construção de uma esfera



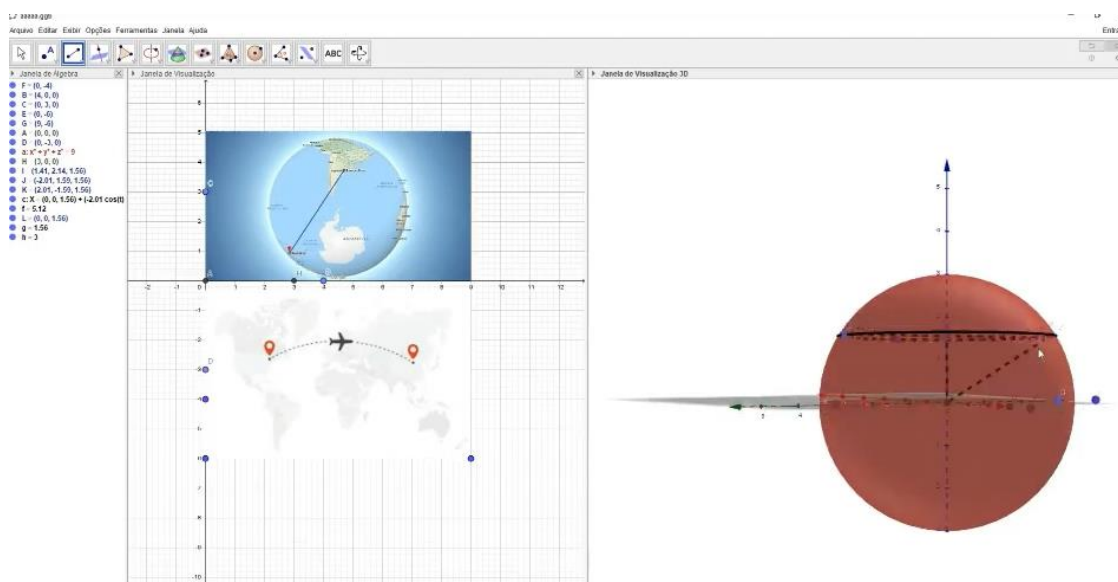
Fonte: Dados da Pesquisa.

A₁₆(12/08/2021): *Aqui eu já deixei desenhada a seção esférica para a gente, para mostrar como poderia fazer. No caso, eu deixei os pontos J e o K para facilitar um pouco o meu trabalho e se a gente pegar o segmento nas ferramentas, podemos ligar um ao outro que podem ver que passa exatamente pelo eixo y, ou seja, ele vai estar em um ponto bom para a gente trabalhar. Se a gente ligar mais outra seção no centro e um ponto a gente vai ter como calcular a seção esférica dessa esfera [na figura que se encontra a esquerda, ou seja, na janela de visualização 3D] que a gente tem aqui que no caso. Já conhecemos o raio, pois quando criei a esfera escolhi a sua medida.*

A Figura 59, a seguir, mostra a representação da seção esférica desenvolvida pelo aluno

A₁₆.

Figura 59 - Representação da seção esférica



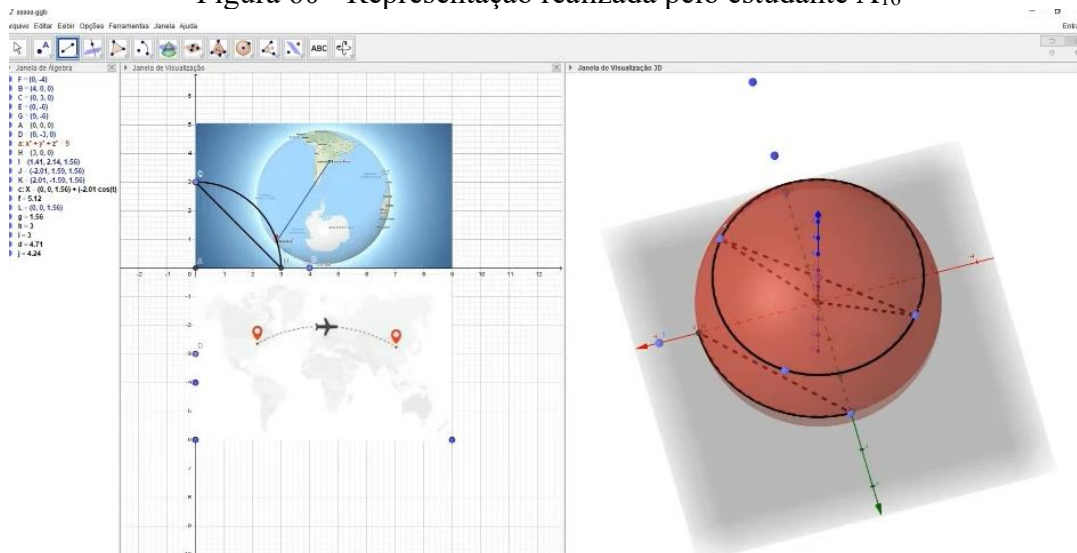
Fonte: Dados da pesquisa.

A₁₆: *Eu trouxe também um conhecimento público que talvez seja legal para a gente entender que é sobre o caminho dos aviões, pois como todo mundo sabe, a gente vive no planeta terra e o planeta terra é bem próximo de uma esfera e podemos ver na primeira imagem que quando as pessoas vão colocar um caminho sobre um mapa, uma esfera, a gente tem um caminho reto. Porém quando a gente vai no plano, no mapa mundi, que a gente vê nas escolas, nas aulas de geografia e tudo mais, a gente vê que os caminhos de aviões são curvados e isso se dá devido a característica principal da esfera, porque se você quisesse por exemplo, ir do ponto C ao ponto H, a gente teria que fazer uma curva para chegar no ponto, mas só que se a gente fizesse um caminho reto de um ponto ao outro, a gente teria que passar por dentro da terra né, que eu acho que é impossível, não ficaria muito bom. Seria um caminho um pouco estranho. Aqui temos algumas propriedades da esfera determinados aqui utilizando o Geogebra e podemos calcular o que as colegas já disseram [colegas do grupo responsável por elaborar a aula de esfera que já haviam realizado a apresentação anteriormente] e este aqui é um método de*

mostrar interativamente e ajuda os alunos a pegar um pouco porque é uma matéria um pouco estranha as vezes, que sai um pouco do nosso cotidiano.

A Figura 60 mostra a representação realizada pelo aluno.

Figura 60 - Representação realizada pelo estudante A₁₆



Fonte: dados da pesquisa.

A apresentação do estudante pode ser vista no vídeo abaixo, a partir do *QR Code* (Figura 61).

Figura 61 - QR Code 15 - Recorte da apresentação do grupo 4 sobre o tema esfera



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Os dados revelam que o estudante A₁₆ estava mostrando como fazer uma esfera no GG, além de uma seção esférica. O aluno trouxe também um exemplo de uma situação do cotidiano para falar de rotas dos aviões, que são curvas e não retas.

Quando o estudante movimentava a esfera, era possível visualizar cada um dos segmentos que estava falando, no instante em que fazia a sua apresentação, como o raio da esfera, a seção esférica e o raio da seção esférica. Neste sentido, os dados revelam que, conforme já diziam Borba e Villarreal (2005), a visualização é uma maneira alternativa para

acessar o conhecimento matemático, sendo parte da atividade matemática. A representação visual pode transformar a compreensão em si mesma.

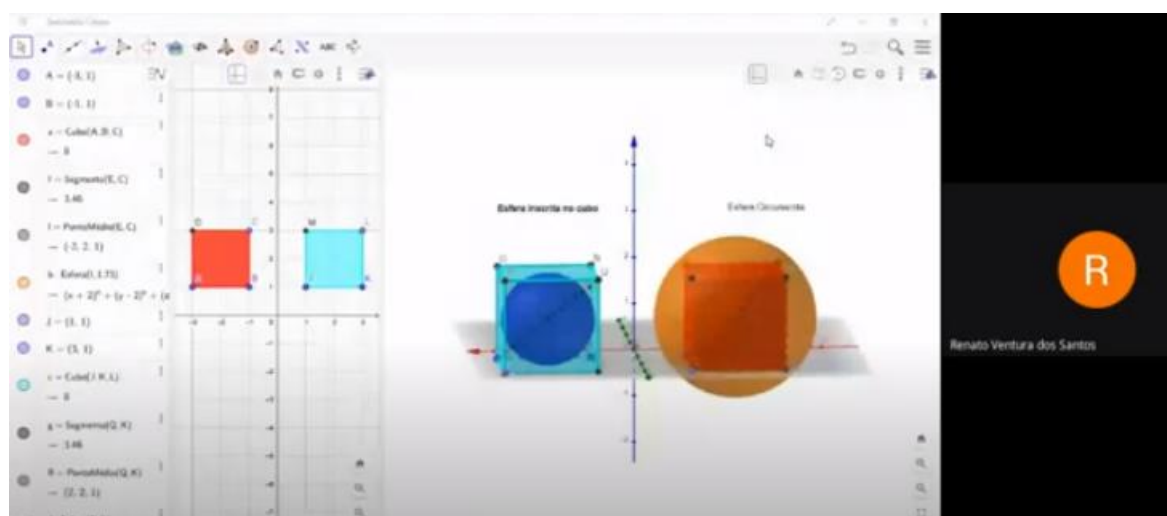
O GG possibilita que a visualização dos sólidos geométricos ocorra em grande potencial, pois oferece uma ferramenta de movimentação que faz com que os usuários possam ver cada dimensão do sólido, tanto externa, quanto interna. Isso facilita a observação de uma seção plana em uma figura espacial. Neste sentido, os recursos tecnológicos apresentam características experimental e visual, promovendo a produção de sentidos e cognição matemática (Borba; Scucuglia; Gadanadis, 2018).

Assad (2013) e Leme (2017) identificaram, em seus trabalhos, que os estudantes apresentam dificuldades tanto na identificação, quanto na visualização de um sólido geométrico. Quando um coletivo estudantes-com-mídias realizam uma tarefa de GEE, a visualização abarca um esquema mental onde está contida a informação visual ou espacial (Borba; Scucuglia; Gadanadis, 2018). A situação apresentada por um coletivo, neste caso, representa um esquema mental.

Além disso, corroboro Tori e Hounsell (2018) quando afirmaram que manipular objetos tridimensionais virtualmente pode ajudar os estudantes a visualizar e compreender as imagens espaciais 3D que são representadas em papéis no formato 2D.

Em um outro episódio, na aula do dia 19/08/2021, o estudante A₁₅, participante do grupo que preparou e desenvolveu uma aula sobre esferas, mostra como realizou a construção de uma esfera inscrita e uma esfera circunscrita no cubo. O aluno iniciou a sua fala, apresentando a imagem que pode ser vista na Figura 62.

Figura 62 - Imagem apresentada pelo estudante A₁₅



Fonte: Dados da Pesquisa.

A₁₅ (19/08/2021): *Bem, aqui eu fiz a esfera inscrita em um cubo e a esfera circunscrita. Para fazer [esfera inscrita, a esquerda] basicamente peguei dois pontos no plano, A e B, e aí eu construí um cubo [usando a ferramenta cubo]. Aí eu precisei da diagonal do cubo, usando segmento e criei o QK. Em seguida, eu precisei do ponto médio desse segmento [usou ferramenta de ponto médio] e da aresta/2 [que é o raio da esfera] para criar a esfera inscrita. Para a circunscrita, novamente eu construí o cubo da mesma forma que o primeiro, a diagonal e o ponto médio. Só que para você construir você tem duas opções [usando a ferramenta esfera], pode usar a esfera dado centro e raio ou a esfera dada centro e um dos seus pontos. Se você usar a esfera dado centro e raio, você tem que pegar a metade da diagonal, do segmento EC, ela deu 3,46 [a partir da janela de álgebra] aí eu dividi pela metade, que é o raio da esfera circunscrita. Mas você podia fazer usando a esfera dado o centro e um dos seus pontos, que aí você pega o ponto médio da diagonal do cubo e um dos vértices, como o cubo é regular.*

A explicação realizada pelo estudante A₁₅ pode ser vista através do QR Code 16 (Figura 63).

Figura 63 - QR Code 16: Apresentação do estudante A₁₅



Fonte: Produzido pela autora (2023).

Nesta cena apresentada para a turma e a professora, o estudante A₁₅ faz a construção de uma esfera inscrita em um cubo e outra esfera circunscrita, usando cores diferentes em cada sólido para facilitar a visualização.

Segundo Borba e Villarreal (2005), a visualização pode ser vista como um processo que segue um caminho de mão dupla entre a compreensão dos estudantes e as mídias externas. De acordo com esses autores, a visualização está intimamente relacionada à mídia, em especial, aos computadores.

Os *softwares* e os vídeos, que fazem com que as imagens mentais sejam vistas de forma real, são programas encontrados nos computadores, muitas vezes já vêm no computador em suas configurações iniciais; e em outras vezes, podem ser instalados utilizando-se o próprio hardware para isso. Muitos *softwares* são gratuitos.

Para Borba e Villarreal (2005), a visualização pode ser pensada como uma “linguagem” que pode expressar matemática, quando ela não pode ter representação com a linguagem

algébrica padrão. Os dados aqui apresentados mostram que, através da visualização, pode-se relacionar as medidas de dois sólidos geométricos, inscrito ou circunscrito. Nesse caso, a visualização faz parte de uma das linguagens utilizada para tornar significativa a aprendizagem.

Segundo Villarreal (2000), uma abordagem visual para lidar com questões matemáticas é considerada complementar a uma abordagem algébrica, pois possui como características: a utilização de informações gráficas na resolução de problemas matemáticos que também podem ser abordados algebricamente; as dificuldades no estabelecimento de interpretações algébricas de soluções gráficas; falta de necessidade de executar a álgebra em primeiro lugar quando soluções gráficas são solicitadas; e, facilidades na formulação de conjecturas e refutações ou dar explicações utilizando informação gráfica.

Em relação à GEE, considero necessário trocar o termo ‘informações gráficas’ descrito por Villarreal (2000) por ‘sólidos construídos e manipulados em um *software* de Geometria Dinâmica’, por pensar que o que a autora dizia nos anos 2000, condiz com uma abordagem visual para a aprendizagem de conteúdos da Geometria, porém usando a mesma ideia com as imagens que podem ser construídas, alteradas e movimentadas em 3D.

Nesse sentido, o GG propicia a visualização de sólidos geométricos, podendo fazer com que as figuras construídas no *software* sejam associadas às imagens que encontramos no espaço, em nossa casa, em nosso trabalho, em nossas viagens, ou seja, em todo o nosso cotidiano.

De acordo com Borba e Villarreal (2005), a abordagem visual está relacionada ao uso do computador para verificar conjecturas, calcular e decidir questões que apresentam como ponto de partida a informação visual. Neste caso, todos os dados apresentados nessa subseção correspondem a esse entendimento. Como os *softwares* com possibilidades para a visualização 3D vão oferecendo cada vez mais ferramentas para os estudantes interagirem com eles e construírem as imagens espaciais, o coletivo consegue visualizar o que produz e, também compartilhar com outros para explorarem tais construções.

Para Settimy e Bairral (2020), a visualização pode ser considerada uma habilidade importante do pensamento matemático. Para esses autores, a visualização é um processo individual que não é específico e, por isso, precisa ser ensinado. Nesta pesquisa, a professora mediou a atividade de interação dos estudantes com o GG, para que eles pudessem ter a visualização sempre presente no desenvolvimento de cada atividade, como na última apresentada.

Para Borba e Villarreal (2005), a dicotomia de externo e interno, em relação a visualização, não faz sentido quando utilizamos o construto seres-humanos-com-mídias. Considero que quando estudantes-com-mídias se propõem a estudar um conteúdo matemático,

a visualização passa a fazer parte do processo o tempo todo, ou seja a visualização é parte do processo de entendimento para um coletivo estudantes-com-mídia.

Neste sentido, a imagem mental, como está associada a uma imagem real, pode ser mais bem compreendida, sem ter que ser rebuscada na memória o tempo todo, já que a imagem faz parte do processo e está presente nele, ou seja, a visualização é inerente ao processo de interação aluno e mídia, em relação à aprendizagem de conceitos da GEE.

Na próxima subseção, teço uma análise prescritiva, após apresentar os dados por meio de uma análise descritiva deles.

5.4 Análise Prescritiva dos dados

Após realizada uma análise descritiva dos dados, e de acordo com o objetivo geral desta pesquisa (investigar como as interações entre alunos e mídias promovem a reorganização do pensamento para a produção de conhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina da Graduação em Matemática, em tempos de pandemia), procedo a uma análise prescritiva dos dados, fazendo algumas ponderações importantes.

A primeira delas é que a investigação sofreu o seu primeiro *redesign*, aprimorado nas ideias da pesquisa baseada em *design*, quando na aula inicial síncrona da disciplina, os estudantes pediram para a professora criar um grupo de interação via *WhatsApp* entre estudantes e professora. Nesse sentido, o *WhatsApp* passou a ser um instrumento de pesquisa, que deveria ser observado para a produção de dados.

O segundo *redesign* da investigação aconteceu quando, a partir das respostas ao primeiro questionário (Apêndice B) e, às primeiras anotações no diário de campo, foi pensado pela pesquisadora, em conformidade com as teorias que foram base para essa pesquisa, que as aulas deveriam acontecer com a utilização do *Geogebra 3D*, já que nesses instrumentos de pesquisa, ficou claro que nenhum dos estudantes sabia utilizá-lo.

Se esta atitude não fosse tomada, a proposição de atividades de Geometria Euclidiana Espacial (GEE) para estudantes-com-mídias deveria se iniciar pelas atividades mais básicas, já que eles não sabiam interagir com o *software*.

Novos *redesigns* surgiram a cada atividade planejada com a proposição do uso das mídias digitais, elaboradas pela pesquisadora. Esses *redesigns* eram amparados na teoria, sempre após o desenvolvimento do coletivo estudantes-com-mídias até o momento da proposta da nova atividade. A Figura 64 mostra um diagrama apresentando parte do ciclo iterativo que ocorreu no desenvolver dessa pesquisa.

Figura 64 - Parte do ciclo iterativo da DBR desenvolvido na pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Esse ciclo nos mostra o primeiro *design* que surgiu amparado na teoria, Estudantes-com-mídias e os primeiros *redesigns*. A partir do terceiro *redesign*, a proposição de atividades para o coletivo passou a acontecer, sendo que cada uma delas era analisada pela pesquisadora e passava por um refinamento, para a proposição e a análise da próxima. Esse ciclo foi ocorrendo durante toda a pesquisa até a proposição da última atividade para o coletivo, que foi a elaboração de uma aula para a Educação Básica, realizada por grupos de estudantes-com-mídias.

Nesse momento, é importante observar que o final deste trabalho coincide com o término do último ciclo, já que a pesquisa de *design* é constituída por ciclos e que, após fechada essa tese, é possível outros passos para afrontar novos desafios, iniciando novos ciclos (Oliveira, 2022).

Segundo Freire (1996), ensinar é ser epistemologicamente curioso, do que resulta a participação na construção do conhecimento do objeto. Para a realização desta pesquisa, aprendi a utilizar mídias digitais, inclusive fazendo curso sobre GG, repassei aos meus alunos os conhecimentos, agregando os conteúdos de GEE, para que eles pudessem formar um coletivo pensante na realização das atividades que seriam propostas.

Para Santos (2017, p. 4), “o professor pesquisador é, sobretudo aquele que aprende enquanto ensina e que ensina enquanto aprende”. Não foi fácil ser professora e pesquisadora ao mesmo tempo em um cenário de pandemia, momento no qual um dos que faleceu atacado pelo vírus foi o meu pai, no dia 25/07/2021²⁰, ou seja, no desenvolvimento da investigação, momento em que estava lecionando.

²⁰ As aulas da graduação estavam ocorrendo em julho devido ao atraso no ano de 2020 (pandemia da COVID-19).

Como se isso não fosse suficiente, apesar de ter assistido aulas das disciplinas da pós-graduação desde 2020, início da pandemia, existia aquela sensação de impotência quando todos os alunos desligavam as câmeras e não respondiam às minhas perguntas. Nesses momentos, um sentimento de vazio muito grande tomava conta daquele ambiente da sala de aula virtual.

Um outro ponto a ser considerado, nesse contexto, eram as mensagens enviadas pelo *WhatsApp* a qualquer momento, e que demandavam tempo da professora para responder. Talvez uma ferramenta nova seja necessária para cursos como este, nos próprios AVAs, para que o *WhatsApp* dos professores tenha a finalidade de uso pessoal e não para assuntos de trabalho, o que pode trazer mais uma sobrecarga para a docência.

Nesse sentido, observo que a proposição de diversas atividades, em que poderiam ser usadas ou não as mídias, porém em que na maior parte do tempo elas eram bastante participativas no processo, fez com que o curso de GEE não fosse uma mera transposição de uma disciplina de ensino presencial para o ensino remoto.

A escolha por utilizar, como mídia principal, o *software* GG deu-se pelas diversas possibilidades de movimentação, visualização e dinamização da GEE. Segundo Torres (2009, p. 13, tradução minha),

Com uma filosofia similar ao resto de programas de geometria dinâmica, a partir de objetos elementares se constroem novos elementos e se estabelecem relações entre eles, de maneira que ao mover qualquer elemento, se mantem todas as relações afins e métricas entre os objetos que nós intervimos na construção.

Nesse sentido, ao longo do curso, percebi um grande crescimento no que diz respeito ao envolvimento dos estudantes com o *software* em relação aos conceitos de GEE. Essa percepção se deu pelas apresentações realizadas pelo coletivo, de maneira cada vez mais rica de conhecimento. Senti-me surpresa diversas vezes, no sentido positivo, com as atividades apresentadas pelos estudantes-com-mídias. O leitor pode acompanhar as cenas iniciais e finais, através do quadro que traz o cronograma do curso, no início da seção de apresentação e análise dos dados para ver essa evolução.

Outras mídias foram utilizadas no curso. É importante observar que a experimentação com tecnologias precisa deixar de estar apenas na teoria e fazer parte das aulas de Matemática. Para isso acontecer é preciso que as políticas públicas propiciem e facilitem esse processo. Vale ressaltar também que as TD estão em um processo de ascensão e que novos *softwares* estão sendo criados e testados a cada minuto, ou seja, agora mesmo, vários *softwares* estão sendo

produzidos e ainda há aqueles que passam por um processo de refinamento, como é o caso do GG.

Por um outro lado, a escolha pelo *software* a ser utilizado em uma disciplina ou em um curso deve ser coerente ao conteúdo proposto. Além disso, o professor deve conhecer bem o programa para mediar a aprendizagem. E aqui, volto a dizer do desafio encontrado na formação inicial e continuada de professores, em relação às TD. Professores que nunca viram *softwares* no seu processo formativo iriam levá-los para a sala de aula?

A apresentação e análise dos dados me leva a crer que os dados apresentados em uma dimensão da pesquisa poderiam ser apresentados em uma das outras duas. Considero que as três dimensões da pesquisa estão intimamente relacionadas, com um realce maior para as duas últimas, ou seja, a experimentação-com-tecnologias e a visualização e Educação Matemática. Conforme a análise feita, torna-se fato que a visualização é inerente ao aprendizado de conceitos de GEE por um coletivo de estudantes-com-mídias que experimentam no ciberespaço, ou seja, a visualização é parte desse processo de aprendizagem.

Quem poderia imaginar que iria chegar um momento em que uma disciplina da graduação iria acontecer sem que os colegas nunca se vissem presencialmente e que, além disso, nenhum estudante encontrasse a professora ‘cara a cara’, durante todo o período? Nessa investigação, eu (pesquisadora) observei o trabalho da professora (eu também) por uma tela de um computador. Para mim, apesar de já ter sido tutora e professora da Educação a Distância na Universidade Aberta do Brasil, tudo foi muito diferente, os desafios foram grandes e encontrei limitações em relação à inserção da realidade aumentada (RA), já que os estudantes não possuíam um celular que permitisse esse trabalho, naquele ano de 2021.

Como os estudantes não tinham como fazer as atividades de RA que seriam propostas, resolvi apenas mostrar alguns exemplos que fiz em meu celular no programa *Calculator* (uma versão do GG) na sala virtual. Em um estágio que fiz na Universidade Nacional de Córdoba (UNC), sob a supervisão da Professora Dra. Mônica E. Villarreal, pude oferecer um minicurso de realidade aumentada. Em relação a esse seguimento da minha pesquisa, pretendo considerar essa temática para os próximos trabalhos que pretendo desenvolver.

Com certeza, foi diferente para os estudantes também. Os dados produzidos nessa pesquisa nos revelam interações entre estudantes e professora no *WhatsApp*, a afetividade mais a florada, o diálogo durante e pós-aula em ambiente virtual, as discussões realizadas em grupos e uma avaliação elaborada pelo próprio coletivo estudantes-com-mídias, com essa mudança do ensino presencial para medida emergencial de ensino remoto devido ao vírus da COVID-19. Esses fatores aliados com a experimentação com tecnologias e a visualização como processo

inerente da produção de conhecimentos da GEE, trouxe-nos um contexto novo, o da aprendizagem virtual (AV).

Apesar de todo o curso acontecer de forma virtual, as aulas, as atividades, os pensamentos, a resolução de exercícios, a elaboração de aula para a Educação Básica, a criação e resolução de uma avaliação, ocorreram em um contexto real. Posso dizer que, neste caso, o virtual multiplicou as oportunidades para que as ações relacionadas ao curso ocorressem de forma real. Além disso, cada situação atual do curso, alimentou o virtual e deu respostas ao atual durante cada momento das sessenta horas de curso. Pondero que aquilo que era possível, no caso, a disciplina de GEE, concretizou-se, tornando-se real em um ambiente virtual.

Em relação à AV de conteúdos da GEE, deixo aberta para outras investigações a observação ou a atuação do professor e pesquisador em relação a outros conteúdos da Matemática, por acreditar que seja possível a proposição, para a educação *online* (Santos, 2009), uma metodologia de ensino de AV, com todas as propriedades apresentadas na subseção 5.1 dessa tese. Penso também que a AV pode ser aplicada em cursos de diversas disciplinas como Física, Química, Geografia, História, dentre outras.

Esta pesquisa nos mostra que o uso de TD na proposição de atividades, com perspectivas diferentes, fez com que os estudantes experimentassem com as mídias digitais o desenvolvimento de tarefas com possibilidades para a elaboração, construção, criação e investigação de objetos da GEE de maneiras diversas, nas quais todas elas ocorrem de uma forma diferente do uso de caneta e papel ou do uso de objetos manipuláveis, para que o coletivo estudantes-com-mídias reorganize o seu pensamento e produza conhecimento.

Podemos observar que as construções realizadas pelo coletivo estudantes-com-mídias são qualitativamente diferentes daquelas realizadas com lápis e papel, principalmente pela movimentação que podem realizar com os sólidos geométricos, que com os materiais mencionados não era possível. Essa dinamicidade que os *softwares* de Geometria Dinâmica - SGD propicia para a aprendizagem dos conceitos de GEE faz com que esta aconteça de forma interativa e recíproca entre os estudantes e as mídias.

O coletivo não ficou repetindo e memorizando conceitos e fórmulas da GEE, eles (os estudantes do coletivo) construíram os conceitos, exploraram propriedades, pesquisaram conceitos para a realização das atividades propostas, visualizaram desde o ponto, até construções mais complexas, tiveram o *feedback* do *software*, fizeram cálculos e confirmaram com os realizados e apresentados rapidamente pelo programa.

Voltando ao início da criação dos computadores, é impressionante pensarmos que um conjunto binário 0-1 teve um desenvolvimento tão grande através de estudo de pesquisadores e

evolução da ciência para encontrarmos hoje programas que podem formar um coletivo pensante junto aos estudantes. Não parece uma moldagem recíproca de algo enorme? Pensando em um contexto mais amplo, observo que as TD surgiram, tendo como base principal, a composição binária 0-1 da Matemática e suas combinações e, hoje, vemos ocorrer a participação dos *softwares* elaborados e desenvolvidos como aliados nas aprendizagens de conceitos da Matemática. Posso considerar aqui uma situação de moldagem recíproca a longo prazo.

Esse algo enorme continua crescendo. Onde isso vai parar? E nós, educadores, vamos trazer essas TD para as salas de aula de Matemática? Ou, vamos ignorar? Será que proibir o uso das TD nas salas de aula não significa ignorar uma tecnologia inerente ao nosso tempo? Os jovens estudantes, tão imersos nas TD, conseguem ficar cinco horas ou mais sentados vivenciando as aulas presenciais tradicionais? Será que se sentem punidos ao terem que guardar os seus aparelhos celulares? São diversos questionamentos que necessitam de uma reflexão.

Ainda que esteja perceptível para nós, pesquisadores e educadores matemáticos, que o uso de programas, como o GG, contribui para a aprendizagem dos nossos estudantes, quando são realizadas moldagens recíprocas e/ou ‘o fazer junto com tecnologias’ observadas nas interações de estudantes com a interface do *software*, Borba e Villarreal (2010) já diziam sobre uma forte resistência referente ao uso das tecnologias em ambientes educacionais. Infelizmente, passados quatorze anos, ainda encontramos essa resistência nas escolas brasileiras (Bahia; Santos, 2023).

Além disso, pesquisas revelam que as TD são subutilizadas nas escolas (Javaroni; Zampieri, 2019). Tais fatos parecem não ter mudado até os dias de hoje, mesmo após o uso de TD nas aulas de Matemática, nos anos de pandemia, 2020 e 2021. Borba e Canedo Junior (2023, p. 20) afirmam que

Em nossas observações temos percebido que a presença das tecnologias digitais na Educação Matemática se tornou menos intensa com o fim da ameaça mais aguda do vírus. Isso evidencia um descompasso entre o estar no mundo, em que as tecnologias digitais estão cada vez mais presentes, e o estar na escola, que continua a resistir à presença dessas atrizes.

Estes autores acrescentam que as TD têm ganhado espaço nas ementas das disciplinas de cursos de formação de professores. Muitas pesquisas se preocupam em observar o papel das TD nas aulas de Matemática, porém existe uma necessidade maior de que essas TD cheguem às salas de aula e, para isso, é necessário que os órgãos públicos possibilitem o acesso à computadores e internet nas escolas públicas, ofertem formação continuada para aqueles

professores que já atuam na área, além, é claro, que preocupem-se com os salários dos nossos docentes.

Os jovens dos dias de hoje usam as TD desde a hora que levantam, com o despertador, a agenda, uma primeira olhada no *WhatsApp* para ver as mensagens recebidas, um vídeo no *tik tok* (ou similar) para ver se algum “amigo” postou algo novo e, segue durante todo o dia, buscando o treino daquele dia da academia, vencer uma etapa em um jogo, olhar a sua dieta, comprar algum item através de uma loja virtual, assistir um vídeo *online*, ver o saldo bancário, observar o *instagram*, o *twitter* (ou alguma outra rede social) e diversas outras possibilidades que o seu aparelho celular, atualmente podendo ser considerado um companheiro próximo, proporciona. Ouso dizer que, nos dias de hoje, a primeira ação do dia, assim como a última, é realizada no celular pela maioria das pessoas.

Nesse sentido, não podemos simplesmente ignorar o uso diário dessa tecnologia na vida dos seres humanos e propor, nas salas de aula, que os estudantes guardem os seus aparelhos, com medo de não conseguirmos lecionar. Essa investigação nos mostra que o celular ou outros aparelhos, podem ser usados nas aulas de forma a auxiliar na produção de conhecimento. A meu ver, os celulares com internet devem ser usados nas salas de aula. Os tempos mudaram e a Educação precisa evoluir com o uso das TD. Além disso, é importante usar as mídias com planejamento para que não haja sua domesticação.

No que diz respeito à visualização, ela está intrinsecamente relacionada ao processo de experimentação com TD, em conformidade aos conteúdos de GEE. Considero que a visualização faz parte dos processos de ensino e aprendizagem de um coletivo de estudantes-com mídias dos conceitos de GEE. Deixo em aberto a possibilidade de novas investigações nessa temática, para outros conteúdos da Matemática.

Além disso, embora quisesse trabalhar com realidade aumentada (RA) nessa pesquisa, a produção de dados não foi possível de ser realizada devido aos aparelhos celulares dos estudantes, em maioria, não possuírem a ferramenta RA. Nesse sentido, pretendo continuar essa investigação, em outro curso, em que estudantes-com-mídias possam experimentar a RA e visualizar os sólidos espaciais de forma diferente, buscando compreender uma nova forma de reorganização do pensamento.

Borba e Villarreal (2005, p. 97, tradução minha) apresentam dois questionamentos:

A visualização matemática pode levar consistentemente a novos resultados de pesquisa ou é principalmente adequada para comunicar trabalhos previamente descobertos a outros pesquisadores ou estudantes?;

A visualização simplesmente contribui para o corpo de conhecimento da matemática ou pode mudar a própria natureza do conhecimento matemático?

Quase vinte anos depois, em resposta à primeira pergunta, posso dizer que a visualização tanto pode ser encarada na comunicação de trabalhos, como pode ser vista nos vídeos apresentados ao longo do texto e nas imagens que são mostradas ao leitor, como pode participar ativamente de novos resultados de pesquisa como essa, já que a visualização é inerente à produção de conhecimentos por um coletivo de estudantes-com-mídias em uma AV de conteúdos da GEE. Em relação ao segundo questionamento, a visualização pode mudar a natureza do conhecimento matemático, já que participa ativamente da aprendizagem de conteúdos de GEE, quando um coletivo de estudantes-com-mídias, ao experimentar com tecnologias, reorganiza a forma de pensar no objeto de estudo.

É importante ressaltar aqui que, embora essa pesquisa tenha sido realizada em tempos de ensino remoto, a proposição de atividades para coletivos de estudantes-com-mídias pode acontecer, de forma presencial, em todos os níveis de ensino, ou seja, para Educação Infantil, Educação Básica e Ensino Superior. Considerando que existem diversos *softwares* elaborados para a educação, eles podem ser estudados na formação inicial e continuada de professores para entrarem em ação no cenário da educação brasileira.

Além disso, em algum momento quando estava fazendo a transcrição dos dados e trazendo as imagens, fiquei refletindo, e acho importante dizer isto aqui por se tratar de uma investigação que envolve as tecnologias digitais. Ocorre que o vídeo que pode ser assistido através do *QR Code*, talvez tenha mais veracidade e pode ser uma economia para o tempo do pesquisador em relação a transcrição dos dados, já que pode ser feito muito rapidamente, utilizando-se um editor de vídeo, neste caso o *clipchamp*, hospedando o vídeo criado no *YouTube*, obtendo um *link*, copiando, colando com a utilização do suplemento *QR4Office*, no *Word*.

Porém, essa não parece ser uma preocupação só minha, pois Borba, Souto e Canedo Júnior (2022, p.11), logo na primeira página da introdução do livro *Vídeos na Educação Matemática*, já questionam “faz sentido um livro sobre vídeos? [...] Não seria melhor um vídeo sobre a importância dos vídeos?” e concluem que “[...] nós, utilizando diversos modos de comunicação, iremos fazer um vídeo e uma live para falar sobre o livro”. Acredito que não haja perda de entendimento por parte do leitor ao escolher assistir o vídeo ou ler a transcrição dos dados produzidos em uma pesquisa.

Na prática, sugiro aos novos pesquisadores que realizem uma pesquisa neste sentido, buscando o que é mais utilizado pelo leitor, se o *QR Code* ou a leitura dos dados produzidos.

Como será no futuro a transcrição de dados na qual as mídias digitais sejam atores do processo da produção de conhecimento?

Antes de concluir, deixo aqui o registro de que, já no final da escrita da tese, deparei-me com uma teoria, a Teoria de Redes, que tem como principal foco a identificação e a compreensão de um conjunto de nós ou atores conectados por tipos específicos de relações sociais que possuem força, conteúdo, densidade e que se caracterizam como redes (Granovetter, 1973; Cunha; Passador; Passador, 2011). Essa teoria, que é alimentada por diversos autores do mundo, pode ser um bom alicerce para pesquisas como a minha, a qual envolve as TD para a Educação.

Na próxima seção, apresento as considerações finais, buscando responder à pergunta que gerou esta investigação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para responder à questão de pesquisa, *Como um coletivo de alunos-com-mídias compreende conceitos da Geometria Euclidiana Espacial em uma disciplina do Ensino Superior do curso de Matemática em tempos de ensino remoto?*, faço algumas considerações finais.

O Ensino Remoto Emergencial (ERE) foi uma opção temporária que aconteceu nos anos de 2020-2021, momento em que ocorreu a pandemia do COVID-19. A medida adotada pelo governo brasileiro naquele período não pode ser considerada uma forma de educação de qualidade, pois apresentou diversos problemas, sendo o principal deles ter sido visto como uma transposição do ensino presencial para o remoto, sem oferecer as adequações necessárias às mudanças de ambiente.

Como aconteceu de forma imediata, não houve tempo para o planejamento e, muito menos, para que professores e alunos pudessem ter alguma formação que oportunizasse o contato, a familiaridade e a exploração das potencialidades educacionais das tecnologias digitais (TD). Além disso, a desigualdade social e a demora na tomada de decisões em relação às políticas públicas brasileiras dificultaram a maneira como ocorreu o ERE.

Nesta pesquisa, considerei importante elucidar as diferenças entre a Educação a Distância – EaD, o ERE e a Educação *Online*, já que a ERE apresentou um formato diferente das demais. Uma das respostas para a pergunta diretriz é que a afetividade aflorada, o diálogo durante e pós-aula em ambiente virtual, as discussões realizadas em grupos e uma avaliação elaborada pelo próprio coletivo estudantes-com-mídias, além da experiência do ER, trouxe-nos um contexto novo, o da aprendizagem virtual (AV).

Nesta conjuntura, a AV ocorreu por apresentar algumas características próprias, tais como: ter as ideias de virtual e virtualização discutidas por Lévy; ocorrer em duas plataformas virtuais do ciberespaço; possuir diferentes formas de avaliação; ser a turma um Espaço do Saber; fazer uso das TD; ter as aulas gravadas e disponibilizadas aos alunos; ser desenvolvida com o uso de mídias digitais diferentes; apresentar *feedbacks* constantes; possuir número de alunos menor ou igual a quarenta; permitir a apresentação de trabalhos pelos estudantes; possuírem os alunos um computador pessoal, com acesso à internet.

Além disso, este contexto da AV só foi possível devido às diversas fases do ciclo iterativo da pesquisa baseada em *design* (DBR), que foi passando por vários refinamentos, na medida em que atividades, com a utilização das tecnologias digitais (TD), eram propostas e desenvolvidas por um coletivo de estudantes-com-mídias.

Nesse processo de DBR, a proposição de cada atividade era pensada com apoio na teoria, ou seja, nos pensamentos de Lévy, nas ideias do constructo seres-humanos-com-mídias e nos pensamentos sobre visualização. Cada atividade proposta para o coletivo era analisada e era modificada em um *redesign*, passando por um refinamento para melhor exploração do que estava sendo desenvolvido. Sendo assim, foi realizada a proposição de diversas atividades, até chegar na última, que foi a elaboração e apresentação de uma aula para a Educação Básica.

Por um outro lado, vale ressaltar que os resultados das pesquisas que foram desenvolvidas no período da pandemia estão surgindo no momento atual, e a minha investigação é uma das que representa esses trabalhos, sendo caracterizada por seu ineditismo.

Esta pesquisa valorizou a sala de aula virtual, com suas sessenta horas de curso, todo ele ocorrendo de forma virtual, através das plataformas *Google Meet* e *Google Classroom*, sendo este o cenário em que os dados foram produzidos.

Esse fato pode ser considerado como um diferencial desta investigação, ou seja, tanto pela produção dos dados realizada com todos os alunos da disciplina de Geometria Euclidiana Espacial (GEE) da UNESP/Rio Claro que cursavam seu terceiro período do curso de Matemática, como pelo momento de pandemia cuja principal medida era o isolamento social.

Não obstante, outra resposta para a pergunta diretriz da pesquisa é que a proposição de diversas atividades para um coletivo ocorreu de uma forma qualitativamente diferente do uso de lápis e papel, fazendo com que estudantes-com-mídias reorganizassem o seu pensamento e produzissem conhecimento dos conteúdos da GEE.

As construções realizadas pelo coletivo estudantes-com-mídias mostraram-se cheias de criatividade, de movimentação, de entendimento dos conceitos da GEE, de dinamicidade, com aprofundamento em cada atividade proposta em um novo *redesign* do ciclo iterativo da DBR.

Além disso, a terceira resposta para a questão diretriz da investigação é que a visualização faz parte do processo de aprendizagem dos conceitos de GEE por um coletivo de estudantes-com-mídias que experimentam no ciberespaço na AV. Cada interação realizada pelo coletivo mostra como a visualização participou de todo o processo.

A planificação dos sólidos, a inscrição e circunscrição dos sólidos, o cálculo de áreas e volumes, a percepção das relações entre as medidas de sólidos geométricos, a possibilidade de movimentação, tudo isso fez com que as imagens fossem percebidas além do plano, e em cada detalhe. Nesse sentido, as imagens no processo de construção de conhecimento de conteúdos de GEE por um coletivo de estudantes-com-mídias se deu de forma real, permitindo que a visualização fizesse parte desse processo de AV.

Considerando tudo o que foi elencado, acredito que este trabalho tem potencialidade para que, a partir da sua leitura e compreensão, novas investigações sejam realizadas em salas de aula de Matemática, com enfoque na proposição de atividades para conteúdos como geometria plana, geometria analítica, funções e estatística, a partir da construção de coletivos de estudantes-com-mídias. A possibilidade de trabalhar com realidade aumentada com celulares nessa perspectiva também é uma possibilidade para trabalhos futuros.

Além disso, em caso de ser curso ou disciplina em ensino *online*, os pesquisadores podem seguir as propriedades da AV, já que elas têm potencial para estabelecer novos significados e reflexões para a Educação Matemática, em que o virtual, as TD e os coletivos alunos-com-mídias são atores importantes nos processos de ensino e aprendizagem.

Para que isso seja possível, é necessário que os professores tenham acesso a cursos de tecnologias digitais que abordem a utilização das mídias digitais em sua formação inicial ou continuada. Nesse sentido, é importante que as políticas públicas apontem algum direcionamento para que este avanço possa acontecer.

A questão de ser mulher, mãe, avó, professora e pesquisadora demanda que assumamos diversos papéis simultaneamente. O desfecho da tese traz uma sensação de missão cumprida e de realização profissional de um sonho.

Nesse momento, para finalizar, fecho as diversas abas abertas em minha cabeça que me possibilitaram iniciar, desenvolver e concluir esta pesquisa, sabendo que algumas delas serão reabertas para novos estudos e deixando a cargo de novos pesquisadores darem prosseguimentos aos pensamentos iniciados nesta investigação.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P. Teorias da Transposição Didática e Informática na criação de estratégias para a prática do professor com a utilização de tecnologias digitais. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v.5, n. 1, p.29-45, 2020. DOI: <https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.11893>. Acesso em: 18 jul. 2019.
- AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. **Vértices**, Campos dos Goytacazes (RJ), v. 10, n. 1, p. 63-72, jan./dez. 2008.
- ALMEIDA, H. R. F. L. Das Tecnologias às Tecnologias Digitais e seu uso na Educação Matemática. **Nuances: Estudos Sobre Educação**, v. 26, n. 2, p. 222–239, 2016.
- ALMOULOUD, S. Integração de tecnologias digitais no ensino: reflexões sobre práticas e formação de professores. **Revista Debates em Educação**, v. 10, n. 22, Maceió, 2018. DOI: <https://doi.org/10.28998/2175-6600.2018v10n22p205-230>. Acesso em 15 maio 2022.
- ALONSO, K. M. A expansão do ensino superior no Brasil e a EAD: dinâmicas e lugares. **Revista Educação e Sociedade**, Campinas, v. 31, n. 113, p. 1319-1335, out/dez. 2010.
- ALVES, Paulo Bento. **Planificações de sólidos geométricos no ensino remoto**: um estudo da gênese instrumental de estudantes. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.
- ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Sociais. *In*: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER. **O método nas Ciências Naturais e Sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2 ed. São Paulo: Pioneira, 2001. p. 107-203.
- AMARAL-SCHIO, R. B. Livro Didático de Ensino Médio, Geometria e a Presença das Tecnologias. **RENTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 2, 2018, p. 127-137.
- AMIEL, T.; REEVES, T. C. Design-Based Research and Educational Technology: Rethinking Technology and the Research. **Agenda.Journal of Educational Technology & Society**, v.11, n. 4, p. 29-40, 2008,
- ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.
- ARETIO, L. G. **La educación a distancia**: De la teoría a la práctica. Barcelona: Ariel Educación, 2001.
- ARRUDA, E. P. Educação remota emergencial: elementos para políticas públicas na educação brasileira em tempos de Covid-19. **EmRede-Revista de Educação a Distância**, v. 7, n. 1, p. 257-275, 2020.

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F.; PAOLA, D.; ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practices in cabri environments. **ZDM**, v. 34, n. 3, p. 66–72, 2002.

ASSAD, A. **Usando o Geogebra para analisar os níveis de pensamento geométrico dos alunos de Ensino Médio na perspectiva de Van Hiele** (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2013.

ATAIDE, D. M. da S.; PINHO, M. J. de. Letramento digital e alfabetização tecnológica: reflexões a partir de um estudo com alunos do PARFOR. **Educação, Formação e Tecnologias**, v. 6, n. 02, p. 68-79, 2013.

BAHIA, S.; SANTOS, S. C. Formação de professores na pedagogia e os debates sobre tecnologias digitais no ensino de matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 41, p. 1-21, 2023.

BAIER, T. BICUDO, M. A. V. A criação da inteligência coletiva, de acordo com Pierre Lévy, em cursos de educação a distância. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 3, p. 420-431, set./dez., 2013.

BALDANZA, R. F. Comunicação no ciberespaço: reflexões sobre a relação do corpo na interação e sociabilidade em espaço Virtual. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS DA COMUNICAÇÃO, 29, 2006, Brasília - DF. **Anais eletrônicos**. Brasília: INTERCOM, 2006.

BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. **The Journal Of The Learning Sciences**, v. 13, n. 1, p.1-14, 2004.

BARBOSA, A. (Org.). **Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras: tic educação**2013. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2014.

BARBOSA, A. A. S.; CARVALHO, R. N. de. **O uso do WhatsApp como ferramenta de pesquisa na EAD**. In: Congresso Internacional de educação e tecnologias (CIET) – Encontros de pesquisadores em educação a distância (EnPED), São Carlos, SP, p. 1-10, 2018. Disponível em: <https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/download/148/143>. Acesso: 06 dez. 2022.

BARBOSA, N. M.; FONTES, G. F. O estudo da Clepsidra via Princípio de Cavalieri: uma experimentação didática em geometria espacial utilizando a versão tridimensional do *Geogebra*. **Research, Society and Development**, v. 12, n. 3, p. e18412340619-e18412340619, 2023.

BASTOS, M. Do quadro-negro à lousa digital: uma história de um dispositivo escolar. **Em Cadernos de História da Educação**, Uberlândia, n. 4, pág. 133–141, 2005.

BATISTA, C. C.; PAULO, R. M. Ver e Visualizar em Geometria: uma experiência com o software *Geogebra*. **REMATEC**, [S. l.], v. 16, n. 38, p. 160–178, 2021. DOI:

10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n38.p160-178.id343. Disponível em:
<http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/44>. Acesso em: 9 nov. 2022.

BAUMAN, Z. **Amor líquido**: Sobre a fragilidade dos laços humanos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

BEHAR, P. A. **Modelos Pedagógicos em Educação a Distância**. Porto Alegre: Penso, 2009.

BODGAN, R., BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. **ZDM**, v. 41, n. 4, p. 453-465, 2009.

BORBA, M. C. **Students Understanding of transformations of functions using multirepresentational software**. Tese (Doctor of Philosophy) – Faculty of graduate school of Cornell University, 372f., 1993.

BORBA, M. C. The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things. **Educational Studies in Mathematics**, v. 108, p. 385-400. DOI: <https://doi.org/10.1007/si0649-021-10043-2>, 2021. Acesso em 22 nov. 2023.

BORBA, M. C., SCUCUGLIA, R. R. S., GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C., SOUTO, D. L. P., CANEDO JR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática**: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; AMARAL, R. B. **Educação a distância online**. Autêntica. Belo Horizonte, 2011.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula**: diferentes vozes em uma investigação. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

BORBA, M. C.; CHIARI, A. **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2013.

BORBA, M. C.; LACERDA, H. D. G. Políticas públicas e tecnologias digitais: um celular por aluno. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 490-507, 2015.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática** (coleção tendências em educação matemática). Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016, 5. ed.

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CANEDO JUNIOR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática**: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2022.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V., **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, **Springer Science & Business Media**, New York, 2005.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 6. ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática**: sala de aula e internet em movimento. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M. Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. **Springer**, 2005.

BORSOI, C. **Geogebra 3D no Ensino Médio**: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial. 159 f. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática (IM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2016.

BOTTENTUIT JUNIOR, J. B. Sala de aula invertida: recomendações e tecnologias digitais para a sua implementação na educação. **RENOTE**, v. 17, n. 2, p. 11-21, 2019.

BRASIL. Decreto Nº 9.057, de 25 de maio de 2017. **Regulamenta o art. 80 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf/legisla09.pdf>. Acesso em 14 abr. 2023.

BRASIL. **Guia nacional do livro didático – PNLD – 2017 – Matemática**. Brasília: MEC, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BROWN, A. Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. **The Journal of the Learning Science**, v. 2, n. 2, p. 141-178, 1992. Disponível em:

<https://www.uio.no/studier/emner/uv/iped/PED4550/h14/pensumliste/brown-1992.pdf>. Acesso em: 4 jul. 2023.

BURATTO, I. C. **Historicidade e Visualidade: Proposta Para Uma Nova Narrativa na Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

CANEDO JÚNIOR, N. da R.; BORBA, M. C. GPIMEM, Educação Matemática e Tecnologias: Uma busca por novas formas de estar no mundo com os outros. *In*: BORBA, M. C.; XAVIER, J. F.; SCHÜNEMANN, T. A. **Educação matemática: múltiplas visões sobre tecnologias digitais**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, v. 1, cap. 1, p. 9-21, 2023. ISBN 978-65-5563-343-6.

CARDOSO, C. A.; FERREIRA, V. A.; BARBOSA, F. C. G. (Des) igualdade de acesso à educação em tempos de pandemia: uma análise do acesso às tecnologias e das alternativas de ensino remoto. **Revista Com Censo: Estudos Educacionais do Distrito Federal**, v. 7, n. 3, p. 38-46, 2020.

CHIARI, A. S. S. O que faço e o que (não) posso com as tecnologias digitais na educação a distancia? *In*: ROCHA, P. G. (Org.). **Dez anos da UAB na UFMS: as licenciaturas em EAD**. cap. 2. 1. ed. Porto Alegre: Editora Fi, 2018. P. 43-64.

CHRISTOU, C.; JONES, K.; PITTA-PANTAZI, D.; PITTALIS, M.; MOUSOULIDES, N., MATOS, J.F.; SENDOVA, E.; ZACHARIADES, T.; BOYTCHEV, P. Developing student spatial ability with 3D software applications. *In*: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), 5, 2007, **Anais...** Larnaca, Cyprus, 2007.

CIEB. **Notas técnicas #17: estratégias de aprendizagem remota (EAR), características e diferenciação da educação a distância (EAD)**. São Paulo: CIEB, 2020. Disponível em: https://cieb.net.br/wp-content/uploads/2020/05/CIEB_NotaTecnica17_MAIO2020_FINAL_web.pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

COBB, P., CONFREY, J., diSESSA, A., LEHRER, R.; SCHAUPE, L. **Designing experiments in educational research**. **Educational Researcher**, v. 32; n. 1, p. 9-13, 2003.

COBB, P., JACKSON, K., DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. *In*: ENGLISH, L.; KIRSHNER, D. (Eds.). **Handbook of international research in mathematics education**. New York, NY: Routledge, p. 481-503, 2016.

COLLINS, A. Toward a design science of education. *In*: SCANLON, E.; O'SHEA, T. (Orgs.). **New directions in educational technology**. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

CRESWELL, J. W. **Investigação Qualitativa e Projeto de Pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens**. Trad: Sandra Mallman da Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. *In*: LINDQUIST, M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

CRUZEIRO, M; ANDRADE, A; MACHADO, J. Formação de professores e utilização das tecnologias digitais na escola. **Revista Portuguesa de Investigação Educacional**, n. 19, p. 281-307, 2020.

CUNHA, J. A. C.; PASSADOR, J. L.; PASSADOR, C. S. Recomendações e apontamentos para categorizações em pesquisas sobre redes interorganizacionais. **CADERNOS EBAPE.BR**, v. 9, n. 4, p. 505-529, 2011.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 9. ed. São Paulo: Papirus, 2002 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

D'AMBRÓSIO, U. **Por que se ensina matemática?** Disponível em: http://www.ciadaescola.com.br/eventos/reuniao2004/natureza/pos/por_que_se_ensina_matematica.pdf. Acesso em: 09 jan. 2024.

DANTAS, S. C. Pensando e resolvendo problemas com o *Geogebra*. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo**, v. 12, n. 2, p. 133-164, 2023.

DBR-Collective. Design-Based Research: An emerging paradigm for educational inquiry. **Educational Researcher**, v. 32; n. 1, p. 5–8, 2003. DOI:10.3102/0013189X032001005.

de Educação e Psicologia. Braga: Portugal, 2004. www.uminho.pt/. Acesso 12-fev-2023.

DELEUZE, G. **Différence et répétition**, PUF, Paris, p. 169-176, 1968.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. Tradução de Sandra Regina Netz. Porto Alegre: Artmed, 2006.

DENZIN, N. K.; LINCOLN Y. S. **Introduction: the discipline and practice of qualitative research**. The sage handbook of qualitative research. 4. ed. Thousand Oaks, CA: Sage, 2011. p. 1-19.

DIMANTAS, H. Marketing Hacker: a revolução dos mercados. Rio de Janeiro. Garamond, 2003.

DIMANTAS, H. **Linkania**: uma teoria de redes. Senac, 2017.

DUVAL, R. Quel cognitifretenir em didatique des mathématiques? **RDM**, Grenoble, v. 16, n. 3, p. 349-282, 1995.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 3 jul. 2023.

DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *In*: MACHADO, S, D, A. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus editora, 2010.

DUVAL, R. Representação, visão e visualização: funções cognitivas no pensamento matemático. *In*: HITT, F.; SANTOS, M. (org.). **Actas da 21ª Reunião Anual Capítulo Norte-Americano do Grupo Internacional de PME**. Columbus, OH: ERIC/CSMEE, p. 3-26, 1999.

ETCHEVERRY, S. B. A. **O uso do aplicativo de mensagens whatsapp e a percepção de seus reflexos na comunicação interna e na cultura organizacional no órgão X**. 274 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Inovação em Comunicação e Economia Criativa Instituição de Ensino), Universidade Católica de Brasília, Biblioteca Depositária: Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2019.

FAINGUELERNT, E. K. A desvalorização do ensino de geometria. **Pátio: Revista Pedagógica**. Porto Alegre, ano XV, n. 57, fev./abr. 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**. 3 ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FRAEFEL, U. **Professionalization of pre-service teachers through univer-sity-school partnerships Partner schools for Professional Development: development, implementation and evaluation of cooperative learning in schools and classes**. Edinburgh: WERA Focal Meeting, 2014.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. Editora Paz e terra, 1996.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3 ed., São Paulo: Atlas, 1991.

GOLDENBERG, Miriam. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando Geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

GRACIAS, T. A. de S. **A natureza da reorganização do pensamento em um curso a distância sobre tendências em educação matemática**. (Tese de Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista/ UNESP, Rio Claro, São Paulo, 2003.

GRANDO, A.; TAROUÇO, L. M. R. O uso de jogos educacionais do tipo RPG na educação. **RENTE**, v. 6, n. 1, 2008.

GRANOVETTER, M. The strength of weak ties. **American Journal of Sociology**, v. 78, n. 6, p. 1360-1380, 1973.

GRAVEMEIGER, K., COBB, P. Design research from the learning design perspective. In: PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (Eds.). **Educational design research**, Part A: An introduction (p. 72-113). Enschede: SLO, 2013.

GRAVINA, M. A. *et al.* **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação de professores de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. Disponível em: http://www6.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A. Aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4, 1998, Brasília. **Anais eletrônicos...**: IV Congresso RIBIE, Brasília, Centro de Convenções Ulysses Guimarães, 1998. Disponível em: http://www.niee.ufrgs.br/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/117.pdf Acesso em 20 dez. 2020.

GUTIÉRREZ, A. The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. In: BATTURO, A.R. (Ed.), **New directions in geometry education**. Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T., p. 23-32, 1996b.

GUTIÉRREZ, A. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. **Revista Ema**, v. 3, n. 3, p. 193-220, 1998.

GUTIÉRREZ, A. **Procesos y habilidades en visualización espacial**. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría, p. 44-59, 1992. Disponível em: <http://www.uv.es/angel.Gutiérrez/marcotex.html>. Acesso em: 17 jun. 2015.

GUTIÉRREZ, Á. R. *et al.* Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. In: Mix, K. S.; Battista, M. T. (Ed). **Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought**. Cham: Springer, p. 309-337, 2018.

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-dimensional geometry**: In search of a framework. Proceedings of the 20th PME Conference 1, p. 3-19, 1996a. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 26 jul. 2019.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J. M. Um paradigma alternativo para avaliar a aquisição dos níveis de van Hiele. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 22, n.3, p.237–251, 1991.

GUTIÉRREZ, A.; Pegg J.; Lawrie C. Characterization of students reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry, **Proceedings of the 28 th P. M. E. Conference 2**, p. 511-518, 2004.

HAREL, G.; SOWDER, L. Student proof schemes result from exploratory studies. *In*: SCHOENFELD, A.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (eds.), **Research in Collegiate Mathematics III**. American Mathematical Society, p. 234-282, 1998.

HEGARTY, M.; WALTER, D. Individual differences in spatial abilities. *In*: SHAH, P.; MIYAKE, A. (eds.), **The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking**. Cambridge: Cambridge University Press, p. 121-169, 2005.

HERRINGTON, J. *et al.* **Design-based research and doctoral students: Guidelines for preparing a dissertation proposal**. Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications, Chesapeake: VA, p. 4089-4097, 2007.

HODGES, C.; MOORE, S.; LOCKEE, B.; TRUST, T.; BOND, A. **The difference between emergency remote teaching and online learning**. Educause Review, 2020. Disponível em: <https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning>. Acesso em: 19 abr. 2021.

JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. **Tecnologias digitais nas aulas de matemática: um panorama acerca das escolas públicas do estado de São Paulo**. 2. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

KAPUT, J. Technology and mathematics education. *In*: GROWNS, D. A. (ed). **A handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, p. 515-556, 1992.

KAPUT, J. Technology becoming infrastructural in mathematics education. **models & modeling as foundations for the future in mathematics education**. Mahwah, NJ: LEA, 2007.

KENSKI, V. M.; MEDEIROS, R. A.; ORDÉAS, J. Ensino superior em tempos mediados pelas tecnologias digitais. **Trabalho & Educação**, v. 28, n. 1, p. 141-152, 2019.

KNEUBIL, F. B.; PIETROCOLA, M. A pesquisa baseada em design: visão geral e contribuições para o ensino de ciências. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 1-16, 2017.

LEITE, B. S. **Uso das tecnologias para o ensino das ciências: a web 2.0 como ferramenta de aprendizagem**. 286 f. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2011. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/274195205_Uso_das_Tecnologias_para_o

_Ensino_de_Ciencias_A_Web_20_como_ferramenta_de_aprendizagem. Acesso em 23 nov. 2022.

LEITE, N. M.; LIMA, E. G. O.; CARVALHO, A. B. G. Os professores e o uso de tecnologias digitais nas aulas remotas emergenciais, no contexto da pandemia da covid-19 em Pernambuco. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 11, n. 2, p. 1-15, 2020.

LEME, C. B. **O uso do *Geogebra* no ensino de geometria espacial para alunos do 2º ano do ensino médio** (Dissertação de mestrado), 127 p. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2017.

LEMOS, A.; LÉVY, P. **O futuro da internet**: em direção a uma ciberdemocracia planetária. São Paulo: Paulus, 2010. 258 p.

LÉVY, O. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora, 34, 1993. 203 p.

LÉVY, P. **A inteligência coletiva**: por uma antropologia do ciberespaço. São Paulo: Folha de São Paulo, 2015. 206 p.

LÉVY, P. **A máquina Universo**: criação, cognição e cultura informática. São Paulo: Artmed, 1998.

LÉVY, P. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 1999.

LÉVY, P. **Ciberespaço**: um hipertexto com Pierre Lévy. Porto Alegre: Artes e Ofícios, 2000. 250 p.

LÉVY, P. **O que é o virtual?** São Paulo: Editora 34, 1996. 157 p.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Editora 34, 2010.

LIMA, R. M. L. **O uso da realidade aumentada no ensino de prismas: um referencial didático para professores do ensino médio**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab), 2021.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. London: Sage Publications, 1985.

LINN, M. C.; PETERSEN, A. C. 'Emergence and characterisation of gender differences in spatial abilities: a meta-analysis', **Child Development**, v. 56, p. 1479- 1498, 1985.

LOHMAN, D. Spatial abilities as traits, processes and knowledge. *In*: STERNBERG, R. J. (ed.), **Advances in the psychology of human intelligence**. v. 4. p. 181-248. Hillsdale, NJ: LEA, 1988.

LOPES, C. G.; VAS, B. B. O ensino de história na palma da mão: o whatsapp como ferramenta pedagógica para além da sala de aula. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 1, 2016, São Carlos; ENCONTRO DE PESQUISADORES EM EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 1., 2016, São Carlos. **Anais...** São Carlos: Ed. da UFSCar, 2016. Disponível em: <http://www.sied-enped2016.ead.ufscar.br/ojs/index.php/2016/article/view/1519>. Acesso em: 3 out. 2022.

LUDKE, H. A.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisas em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986. 99p.

MARQUETTI, C. **O uso de tecnologias digitais para a compreensão da construção de sólidos a partir de suas propriedades**. 94 f. 2015. Dissertação (mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015.

MARTINO, L. M. S. **Teoria das mídias digitais: linguagens, ambientes e redes**. Editora Vozes Limitada, 2014.

MARTINS, A.; SANTOS, S. C. dos. Construindo diálogos com professores formadores sobre metodologias ativas e tecnologias digitais. **Formação Docente – Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores**, [S. l.], v. 13, n. 27, p. 45–58, 2021. DOI: 10.31639/rbpf.v13i27.455. Disponível em: <https://www.revformacaodocente.com.br/index.php/rbpf/article/view/455>. Acesso em: 6 mar. 2023.

MENEZES, J. B. F. Práticas de avaliação da aprendizagem em tempos de ensino remoto. **Revista de Instrumentos, Modelos e Políticas em Avaliação Educacional**, Fortaleza, v.2, n.1, e021004, 2021. DOI: <https://doi.org/10.51281/impae021004>.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. São Paulo: Hucitec, 8. ed., 269 p, 2004.

MOISE, E. E.; DOWNS Jr. F. L.; GARCÍA, M. Geometría moderna. **(No Title)**, 1966.

MONTES, M.; CODES, M.; CONTRERAS, L. C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En L. Blanco, n. Climent, M. T. González, a. Moreno, g. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), **Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática**. Editorial universidad de Granada, p. 37-54, 2022.

MOORE, M; KEARSLEY, G. **Educação a distância: uma visão integrada**. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

MORAN, J. **A Educação que Desejamos: novos desafios e como chegar lá**. 5. ed. São Paulo: Papirus, p.1-232, 2014.

MOREIRA, J. A.; SCHLEMMER, E. Por um novo conceito e paradigma de educação digital online. **Revista uFG**, v. 20, 63438, 2020.

MORENO-ARMELLA, L; HEGEDUS, S.; KAPUT, J. From static to dynamic Mathematics: historical and representational perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, Nova York, v. 68, n. 2, p. 99-111, 2008.

MOTA, J. F.; LAUDARES, J. B. Um Estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 497–512, ago., 2013.

NICOLACI-DA-COSTA, A. M. Sociabilidade virtual: separando o joio do trigo. **Psicologia & Sociedade**, v.17, p. 50-57, 2005.

NOBRE, S. Alguns “porquês” na História da Matemática e suas contribuições para a educação matemática. **Cadernos CEDES – História e Educação Matemática**. São Paulo: Papirus, v. 40, p. 29-35, 1996.

NOTARE, M.; BASSO, M. V. A. Geometria dinâmica 3D: novas perspectivas para o pensamento espacial. **RENTE**. Porto Alegre: CINTED-UFRGS, v. 14. n. 2, p. 1- 10, 2016.

NUNES, V. B. O papel do tutor na educação a distância: o estado da arte. In: Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância, 10, 2013, Belém/PA, 2013. **Anais do ESUD**, Belem, 2013. Disponível em: <http://www.aedi.ufpa.br/esud/trabalhos/oral/AT2/114143.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2023.

OECHSLER, V. **Comunicação Multimodal**: produção de vídeos em aulas de matemática. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2018.

OLIVEIRA, C A.; AMANCIO, J. R. S. Experiências formativas potencializadas pelas tecnologias digitais nas aulas de matemática. **Revista Docência e Ciberultura**, v. 5, n. 3, set.-dez., p. 165-179, 2022. DOI: <https://doi.org/10.12957/redoc.2022.63254>.

OLIVEIRA, D. V. **Visualização espacial no ensino fundamental**: rotações no *Geogebra*. 2021. 143 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

OLIVEIRA, F. C. de; SILVA, R. R. da; BISSACO, M. A. S. O uso de tecnologias digitais no ensino de geometria espacial: uma revisão de literatura. **Pesquisa, Sociedade e Desenvolvimento**, [S. l.], v. 10, n. 15, p. e235101522743, 2021. DOI: 10.33448/rsd-v10i15.22743. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/22743>. Acesso em: 26 out. 2022.

OLIVEIRA, G. P. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias digitais com o uso do superlogo e do *Geogebra*. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7, 2013, Montivideo. **Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**. Montivideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, v. 1. p. 1-359, 2013.

OLIVEIRA, G. W. B. de. **Olhar, ver, reparar, representar: o desenvolvimento da visualização**. 2022. 145 f. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares) - Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar de Nova Iguaçu, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, 2022.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J. C. P. Visualização e representação geométrica com suporte na teoria de Van Hiele. **Ciência e Natura**, v. 39; n. 1, p. 108-117, 2017.

OLIVERO, F. Cabri-Géomètre como mediador no processo de transição para provas em situações geométricas abertas'. In: MAULL, W.; SHARP, J. (eds), **Atos do 4º Conferência Internacional de Tecnologia no Ensino de Matemática**, Universidade de Plymouth, Reino Unido, 1999.

ÖNDES, R. N. Research trends in dynamic geometry software: A content analysis from 2005 to 2021. **World Journal on Educational Technology: Current Issues**, v.2, p. 236-260, 2021.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, v.1, n.1, p. 7-18, mar. 1993.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica**. Campinas, 1989, 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1989.

PELLI, D. **As contribuições do software Geogebra como um mediador do processo de aprendizagem da geometria plana na educação a distância (EAD) em um curso de licenciatura em pedagogia**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, MG: UFOP, 2014.

PINTO, K. L. J.; SILVA, J. M. C. Da visão do gestor a realidade do professor: uma análise da formação continuada referente as novas tecnologias em escolas estaduais de Minas Gerais. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA – WIE, 22., 2016, Uberlândia. **Anais...** Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2016. p. 968-972.

PIROLA, N. A.; MORACO, A. S. C. T. Uma análise da linguagem geométrica no ensino de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 5, 2005, Baurú, SP. **Caderno de Resumos**. V Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, p. 263, 2005.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N. Pensamento algébrico na formação inicial de professores. **Educar em Revista**. Curitiba, Paraná. n. 50, p. 135- 155, out/dez, 2013. Disponível em: (<https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/34750/21534>). Acesso em: 20 abr. 2022.

PONTES, E. A. S. A práxis do professor de matemática por intermédio dos processos básicos e das dimensões da aprendizagem de Knud Illeris. **Rebena-Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**, v. 2, p. 78-88, 2021.

PONTES, R. L. J.; CASTRO FILHO, J. A. O uso do blog como ferramenta pedagógica: um estudo de caso com professores participantes do projeto Um Computador por Aluno (UCA). **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 21, n. 2, p. 12–26, 2013.

PREDEBON, F. T.; GRITTI, P. O que desmotiva os alunos para aprender Matemática? **CONTRAPONTO: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, v. 1, n. 1, p. 79-94, 2020.

PRESMEG, N. Visualization and mathematical giftedness. **Educational Studies in Mathematics**, v.17, n. 3, p.297-311, 1986.

RETORE, L. D.; NOTARE, M. R. Matemática Dinâmica e Arte: uma proposta com projeção ortogonal para o desenvolvimento da visualização espacial. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 21, n. 2, p. 87-97, 2023. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/137730>. Acesso em: 10 jan. 2024.

RITTER, A. M. **A visualização no ensino de geometria espacial**: possibilidades com o software Calques 3D. 2011. 143 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2011.

ROSA, M. C.; SANTOS, J. E. B.; SOUZA, D. S. (2021). O ensino de matemática e tecnologias: ações e perspectivas de professores de matemática em tempo de pandemia. **Devir Educação**, p. 287-302, 2021. DOI: <https://doi.org/10.30905/rde.v0i0.424>. Acesso em 12 mar. 2023.

RUBIO, J. E. **Control and optimization**: the linear treatment of nonlinear problems. U.K. Manchester: Manchester Univ. Press, 1986.

RUDIO, R. V. **Introdução ao Processo de Pesquisa Científica**. Petrópolis: Vozes, 1986.

SADALLA, A. M.; LAROCCA, P. Autoscopia: um procedimento de pesquisa e de formação. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 419-433, set-dez. 2004.

SALDANHA, L. C. D. O discurso do ensino remoto durante a pandemia de COVID-19. **Revista Educação e Cultura Contemporânea**, Rio de Janeiro, ano 50, v. 17, n. 50, p. 124-144, 2020. Disponível em: <http://periodicos.estacio.br/index.php/reeduc/article/view/8701/47967205>. Acesso em: 20 abr. 2021.

SAMPAIO, M. N.; LEITE, L. S. **Alfabetização tecnológica do professor**. Petrópolis: Vozes, 110 p., 2004.

SAMPAIO, R. S. **A visualização no ensino de geometria com o Geogebra 3D**. Trabalho de Graduação. (Licenciatura em Matemática). Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

SANCHEZ, J. B. **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre geometria espacial**: período 2007 a 2017. 101 f. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2018.

SANTOS, A. S. C. dos. Sobre imagens mentais e representações visuo-espaciais de objectos e ambientes. **Estudos de Psicologia (Campinas)**, v. 17, p. 18-30, 2000.

SANTOS, D. T.; SANTOS, S. C. dos; JAVARONI, S. L. O conceito de tecnologia e seres-humanos-com-mídias: aspectos epistemológicos da cibernética e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; XAVIER, J. F.; SCHÜNEMANN, T. A. **Educação Matemática: múltiplas visões sobre tecnologias digitais**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2023. v. 1, cap. 1, p. 9-21. ISBN 978-65-5563-343-6.

SANTOS, E. Educação online como dispositivo na ciberpesquisa-formação. **Revista Tecnologias na Educação**, v. 20, p. 1-9, 2017.

SANTOS, E. Educação online para além da EAD: um fenômeno da cibercultura. In: **Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia**. Braga: Universidade do Minho. 2009. p. 5658-5671.

SANTOS, E. O. dos. Ambientes virtuais de aprendizagem: por autorias livres, plurais e gratuitas. **Revista da FAEEBA - Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 11, n. 18, p. 425-435, jul./dez. 2002. Disponível em: <http://www.revistas.uneb.br/index.php/faeeba/issue/viewFile/239/138#page=182>. Acesso em: 23 nov. 2022.

SANTOS, E. Pesquisa-formação na cibercultura. **Santo Tirso: Whitebooks**, v. 2014, 2014.

SANTOS, S. C. **A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial**. 144 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91097>. Acesso em: 22 fev. 2022.

SARAIVA, A. M. **O uso dos softwares matemáticos no processo de ensino e aprendizagem no estudo dos sólidos de Platão no 3º ano do ensino médio**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Especialização em Metodologia do Ensino de Matemática do Ensino Médio). Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2015.

SAVIANI, D. Crise estrutural, conjuntura nacional, coronavírus e educação – o desmonte da educação nacional. **Revista Exitus**, [S. l.], v.10, n.1, p. e020063, 2020. DOI: 10.24065/2237-9460.2020v10n1ID1463. Disponível em: <http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/1463>. Acesso em: 23 ago. 2022.

SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S. Produto educacional: geometria espacial com o software *Geogebra* 3D. **Educitec - Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, Manaus, Brasil, v. 5, n. 10, 2019. DOI: 10.31417/educitec.v5i10.554. Disponível em: <https://sistemascmc.ifam.edu.br/educitec/index.php/educitec/article/view/554>. Acesso em: 9 nov. 2022.

SCALABRIN, A.M.M.O.; MUSSATO, S. Produto educacional: geometria espacial com o software *Geogebra* 3D. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico (EDUCITEC)**, Manaus, v. 5, n. 10, p.88-106, 2019.

SCHEFFER, N.; FINN, G.; ZEISER, M. H. Tecnologias Digitais na área de Matemática da política educacional da BNCC: reflexões para o ensino fundamental. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista – ENCITEC**, v. 11, n. 2, p. 119-131, 9 jul. 2021.

SCHLEMMER, E.; BACKES, L. Metaverso: novos espaços para a construção do conhecimento. **Revista Diálogo Educacional**, n. 24, p. 519-532, 2008.

SETTIMY, T. F. de O.; BARRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, jan./jun., 2020 - Santa Maria, 2020. ISSN 2176-4603. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/343556166>. Acesso em: 09 out. 2022.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SHAFFER, D. W.; CLINTON, K. A. Toolforthoughts: reexaminando o pensamento na era digital. **Cultura e Atividade**, v. 13, p.283-300, 2006.

SHAFFER, D. W.; KAPUT, J. J. Mathematics and virtual culture: na evolutionary perspective on thechnology and mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Nova York, v. 37, n. 2, p. 97-119, 1999.

SILVA, Á. A. T. **Ensinar e aprender com as Tecnologias: Um estudo sobre as atitudes, formação, condições de equipamento e utilização nas escolas do 1º Ciclo do Ensino Básico do Conselho de Cabeceiras de Basto**. Dissertação de Mestrado. Universidade do Minho. Instituto de Educação e Psicologia. Braga: Portugal, 2004. Disponível em <http://www.uminho.pt/>. Acesso em: 12 fev. 2023.

SILVA, A. J. N.; NERY, E. S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 2020. DOI: <https://doi.org/10.29378/plurais.2447-9373.2020.v5.n2.97-118> Acesso em 13 de jun. 2022.

SILVA, D. M. da; FERNANDES, V. Ciberespaço, cibercultura e metaverso: a sociedade virtual e território cibernético. **Humanidade & Inovação**, v. 8, n. 67, p. 211-223, 2021.

SILVA, Raquel Silveira da; NOVELLO, Tanise Paula. O uso das tecnologias digitais no ensinar matemática: recursos, percepções e desafios. **RELACult - Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade**, v. 6, n. 4, 2020. Disponível em: <https://periodicos.claec.org/index.php/relacult/article/download/1733/1159>. Acesso em: out. 2023.

SOUSA, R. T., AZEVEDO, I. F., ALVES, F. R. V. El software *Geogebra* como recurso para sólidos de revolución en geometría espacial. **Revista Tecnologia Educativa**. Cuba, 2021. Disponível em: <https://tecedu.uho.edu.cu/index.php/tecedu/article/view/260/202>. Acesso em: 20 jul. 2020.

SOUTO, D. L. P. Refletindo sobre o papel do software *Geogebra* na produção de conhecimento Matemático construído por um coletivo pensante formado por humanos e mídias. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo (IGISP)**, v. 1, p. 2236, 2012.

SOUZA, L. A. **Uma proposta para o ensino da Geometria Espacial usando o Geogebra 3D**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

SOUZA, V. V. Soares. Letramento digital e formação de professores. **Revista Língua Escrita**, n. 2, p. 55-69, dez. 2007.

TENÓRIO, A.; AGUIAR, D. V.; TENÓRIO, T. O uso de construções manuais e do software Poly Pro no estudo de poliedros. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 7, n.2, p. 141-160, mai./ago. 2017.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of the computerization. *In*: WERSTCH, J. **The concept of activity in soviet psychology**. New York: Sharp, 1981.

TORI, R; HOUNSELL, M. S.; KIRNER, C. Realidade virtual. **Introdução à realidade virtual e aumentada**. Porto Alegre: Editora SBC, p. 9-25. 2018.

TORRES, A. C. de A; CENTEIO, I. L. **Geogebra: muito mais que geometria dinâmica**. (*Sem título*), RA-MA Editorial, Madrid, Espanha, 2009. ISBN: 978-84-7897-939-4.

TORRES, J.; BROCADO, J. **As tecnologias digitais na aula de matemática: concepções e práticas de ensino de professores**. *In*: VASCONCELOS, A. A. (org). **Entre a teoria, os dados e o conhecimento (III)**: [Investigar práticas em contexto]. [Em linha]. Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico, 2015. p. 181-192. Disponível em http://www.si.ips.pt/ese_si/web_base.gera_pagina?P_pagina=29926. Acesso em 16 mar. 2021.

TRAINOTTI, A.; DA SILVA, R. S. Poly e *Geogebra* 3D: um experimento de ensino na educação básica. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 1, 2018.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (UNESP). Coordenadoria Geral de Bibliotecas. Rede de Bibliotecas. **Manual de normalização de trabalhos acadêmicos**: apresentação: ABNT. São Paulo, 2023.

VALENTE, L. J. **Docência em tempos de pandemia**: um estudo sobre o que dizem professores das áreas de ciências e matemática da educação básica. 73f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

VAN HIELE. **Structure and insight**. A theory of mathematics Education. London: Academic Press Inc, 1986.

VIANA, O. A. **O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceitos**. 2000. 229f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, 2000.

VIANA, O. A.; BRITO, M. R. F. **Os conceitos espontâneos e científicos: uma análise da linguagem utilizada por futuros professores para descrever figuras espaciais**. **SBEM**, Paulista, 2005.

VIEIRA, C. A. **Formação continuada de professores, uso de ferramentas tecnológicas, ensino de Matemática e situações-limite: uma revisão dos trabalhos da CAPES**. 2023. 118 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia) – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Diamantina, 2023.

VILLARREAL, M. E. e BORBA, M. C. Coletivos de humanos-com-mídia na educação matemática: cadernos, lousas, calculadoras, computadores e... cadernos ao longo dos 100 anos do ICMI. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, DOI:10.1007/s11858-009-0207-3, v. 42, n. 1, p. 49-62. 2010.

VILLARREAL, M. E. Pensamento matemático e tecnologias intelectuais: o visual e o algébrico. **Para a aprendizagem da matemática**, v. 20, n. 2 p. 2-7, 2000.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa: do início ao fim**. Porto Alegre: Penso, 2016.

ZOTTO, N. D.; MACHADO, G. M. Z.; MELLO, K. B. DE; SILVA, R. S. da. **Geogebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de Geometria Espacial no ensino médio**. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2013, Canoas. Anais. Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2013.

ZULATTO, R. B. A. **A natureza da Aprendizagem Matemática em um Ambiente online de Formação Continuada de Professores** (Tese de doutorado). 2007. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - (TCLE) (Conselho Nacional de Saúde, Resolução 466/12)

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa de Doutorado intitulada “*Interações entre alunos e mídias digitais aplicadas à Geometria Espacial no ensino superior de Matemática*”, que será desenvolvida por Débora Pelli, RG MG-8.639.629, CPF 033.232.606-35, pertencente ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, sob a orientação da Professora Dra. Rúbia Barcelos Amaral Schio, professora do referido Programa de Pós- Graduação e do Departamento de Educação Matemática, da Universidade Estadual Paulista (UNESP), *campus* de Rio Claro.

O objetivo da referida pesquisa é analisar como um coletivo de alunos-com-mídias compreende conteúdos de Geometria Espacial no ensino superior, à partir das interações entre alunos e mídias em Cursos de Graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Unesp).

Caso aceite este convite, responderá a dois questionários e, caso necessário participará de uma entrevista, que será gravada para posterior análise. A entrevista será agendada conforme disponibilidade do participante e espera-se que o tempo destinado para tal, não seja superior a uma hora. Também será usado as gravações das aulas e dos chats realizados durante as aulas síncronas, para a complementação dos dados coletados pelos questionários e entrevista. Transcrições de falas e informações passadas pelos participantes serão utilizados em relatórios de pesquisa, artigos, livros e, principalmente, na publicação de uma tese de doutorado, de domínio público. Fica garantido ao participante da pesquisa, o anonimato de sua participação e dos dados fornecidos, direito previsto nas resoluções que regem a normatização de realização deste tipo de estudo.

Ressalto que, as entrevistas serão previamente marcadas, conforme a disponibilidade dos participantes e nos locais indicados por eles. Ademais, haverá tempo hábil para preenchimento do questionário. Durante a entrevista, a discussão será voltada ao objetivo da pesquisa, buscando compreender se e quais aprendizados e benefícios as interações entre alunos e mídias relacionada a Geometria Espacial trouxe, visando a futura prática docente aos licenciandos.

Existem riscos mínimos ao participante, como a possibilidade dele sentir-se constrangido em ter divulgado alguma opinião/relato sobre as aulas ou alguma opinião sobre os temas tratados. Nesse sentido, destacamos que o participante poderá, a qualquer momento, pedir para que seja retirada/corrigida toda manifestação que ele tiver durante a produção de dados. Além disso, está garantido ao participante o seu anonimato na divulgação dos resultados.

Para minimizar tais riscos, serão adotados alguns procedimentos, tais como: agendamento prévio da produção de dados; busca de um local privado e sem interferência de terceiros para a realização da produção; permissão que o participante tenha acesso ao material, às perguntas antes da gravação da entrevista e dos questionários, caso seja de sua vontade; aceitar a solicitação de interrupção da gravação do procedimento em áudio ou imagem, pelo participante ou providenciar tal interrupção, caso observe alterações de humor ou saúde que coloquem o participante em risco durante a coleta de dados.

Os benefícios de sua participação podem ser variados e ir além do que visualiza-se inicialmente. Você estará colaborando em uma reflexão sobre a formação do futuro professor de Matemática, principalmente relacionada a Geometria Espacial. Os dados fornecidos por você podem desencadear reflexões e possíveis mudanças na formação inicial de professor em relação a utilização das mídias nas aulas de Geometria Espacial.

O pesquisador está à disposição para esclarecimentos sobre eventuais dúvidas que possam surgir durante a realização da pesquisa. Além disso, o participante tem o direito de deixar a pesquisa a qualquer momento, sem constrangimento ou penalização alguma. Para participar, também não terá nenhuma despesa, bem como nenhum tipo de remuneração. A participação é voluntária.

Se você se sente esclarecido sobre a sua participação na pesquisa, seus objetivos, eventuais riscos e benefícios, convido-o a assinar este Termo.

Rio Claro, 20 de agosto de 2021.


Assinatura do Pesquisador Responsável

Assinatura da Participante

Dados sobre a Pesquisa:

Título do Projeto: Interações entre alunos e mídias digitais aplicadas à Geometria Espacial no ensino superior de Matemática.

Pesquisador Responsável: Débora Pelli

Instituição: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Instituto de Geociência e Ciências Exatas/Unesp/Rio Claro

Endereço: Av. 24A, nº 1515 – Bela Vista – 13506-900 – Rio Claro/SP. Fone: (19) 3526-9381

Dados para Contato: Fone (38) 9 8805-1159 / e-mail: deborico252@gmail.com

Dados sobre o Participante da Pesquisa:

Nome: _____

Pseudônimo: _____

RG: _____

Fone: _____

Local: Rio Claro - SP

Data: _____

CEP-IB/UNESP-CRC

Av. 24A, nº 1515 – Bela Vista – 13506-900 – Rio Claro/SP

Telefone: (19) 35269678

Número do parecer: 34445020.0.0000.5465

APÊNDICE B – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO – FORMULÁRIOS GOOGLE

07/05/24, 16:07

Primeiro Questionário

Primeiro Questionário

Pesquisa - Produção de dados

* Indica uma pergunta obrigatória

1. E-mail *

2. NOME *

3. Email *

4. Pseudônimo *

5. Idade *

6. Gênero *

07/05/24, 16:07

Primeiro Questionário

7. Você gosta de estudar e aprender os conteúdos de geometria? Tem preferência por alguma das geometrias: plana, espacial ou analítica? *

8. Você conhece algum software, ou alguma mídia, que possa interagir para aprender conteúdos de Geometria Espacial? *

9. Você já usou o software GeoGebra para realizar alguma atividade de matemática? Em caso afirmativo, qual? *

10. Qual é o seu pensamento em relação a interagir com uma mídia para aprender os conteúdos da Geometria Espacial? *

07/05/24, 16:07

Primeiro Questionário

11. Você já usou software para obter realidade aumentada? *

Marcar apenas uma oval.

☐ Sim

☐ Não

12. Tem alguma sugestão de algum software para aprender geometria espacial? *

13. Como você vê o uso do software GeoGebra nas suas aulas de Geometria Euclidiana Espacial em seu curso de Graduação em Matemática? Justifique a resposta *

14. NOME *

15. Email *

16. Pseudônimo *

APÊNDICE C – SEGUNDO QUESTIONÁRIO – FORMULÁRIOS GOOGLE

07/05/24, 16:09

Segundo Questionário

Segundo Questionário

Referente à pesquisa realizada na disciplina Geometria Euclidiana Espacial

* Indica uma pergunta obrigatória

1. **E-mail ***

2. **Nome ***

3. **1. Quais as mídias que você interagiu na disciplina de Geometria Euclidiana Espacial? *
Quais você considera interessante e quais você descartaria? Justifique.**

4. **2. Para utilizar o software GeoGebra em aulas de Geometria Euclidiana Espacial, você *
considera que o software pode ser aprendido junto com a disciplina ou seria
importante um curso sobre o software com antecedência? Em caso da segunda opção
em qual fase escolar?**

07/05/24, 16:09

Segundo Questionário

5. **3. Como você considera o uso do software GeoGebra em relação à visualização, construção, demonstração, exploração de objetos geométricos, elaboração de uma questão, raciocínio geométrico e experimentação?** *

6. **4. Em suas aulas de Geometria Euclidiana Espacial, sempre que você colocou a mão na massa para fazer uma atividade você interagiu com alguma mídia. Como considera essa interação entre aluno e mídia?** *

7. **5. No constructo seres-humanos-com-mídias (BORBA, VILLARREAL, 2005) existe a ideia de moldagem recíproca, onde a mídia molda o homem e o homem molda a mídia. Como você relaciona essa noção com a disciplina que cursou de Geometria Euclidiana Espacial (GEE)?** *

07/05/24, 16:09

Segundo Questionário

8. **6. Comente sobre a frase: “A utilização de diversas mídias leva a matemáticas diferentes.”, em relação às suas aulas de GEE.** *

9. **7. Borba e Penteado (2001), defendem que a informática é uma nova extensão na memória e que possui diferenças qualitativas sobre outras tecnologias da inteligência e “permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea” (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 48). Você vê alguma relação entre esse pensamento e a disciplina de GEE que você cursou?** *

10. **8. Em relação ao conteúdo e feedbacks realizados pela professora na disciplina GEE, você gostaria de comentar alguma coisa?** *

07/05/24, 16:09

Segundo Questionário

11. **9. Ao preparar a sua aula de algum conteúdo de GEE você pretende usar alguma mídia como o GeoGebra e/ou realidade aumentada? Justifique.** *

12. **10. Você considera que a disciplina GEE, com o uso de mídias, seria mais adequada em qual forma de ensino: presencial, remoto, ou EAD? Justifique.** *

13. **11. Avalie a forma como foi realizada a disciplina de Geometria Euclidiana Espacial.** *

14. **Untitled Question**

Marcar apenas uma oval.

☐ Option 1

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE D – ROTEIRO PARA ENTREVISTA (31/08/2021)

1. Em relação aos Livros Didáticos adotados na disciplina, e outros livros didáticos de Geometria Euclidiana Espacial, como você indicaria a utilização de tecnologias digitais para uma boa interação entre alunos e mídias digitais?
2. Ao utilizar o software GeoGebra você pode fazer experimentações matemáticas. Você poderia descrever uma experimentação realizada por você?
3. Você considera que é importante ter algum conhecimento prévio sobre o software GeoGebra para interagir com ele no sentido dessas interações produzirem algum conhecimento, ao reorganizar o pensamento, de Geometria Euclidiana Espacial?
4. Quais são os obstáculos que você considera importantes no uso de mídias digitais em um curso de GEE?
5. Após finalizar a disciplina GEE você considera importante as suas interações com mídias em seu curso? Em qual sentido?
6. Qual a atividade que você percebeu um melhor resultado em sua realização, ao utilizar mídias digitais? Explique o motivo.