

Lucas de Haro Silva

ANÁLISE DINÂMICA EM VIGAS COMPOSTAS COM  
AMORTECIMENTO UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS ESPECTRAIS E ELEMENTOS FINITOS

**Bauru**  
**2015**

Lucas de Haro Silva

ANÁLISE DINÂMICA EM VIGAS COMPOSTAS COM  
AMORTECIMENTO UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS ESPECTRAIS E ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Área de Projeto Mecânico, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo J. Paupitz Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Edson A. Capello Sousa

**Bauru**  
**2015**

Silva, Lucas de Haro.  
ANÁLISE DINÂMICA EM VIGAS COMPOSTAS COM  
AMORTECIMENTO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
ESPECTRAIS E ELEMENTOS FINITOS / Lucas de Haro Silva,  
2015

103 f.

Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves  
Coorientador: Edson Antonio Capello Sousa

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual  
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2015

1. Material viscoelástico. 2. Análise dinâmica. 3.  
Vibração. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade  
de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE LUCAS DE HARO SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 31 dias do mês de julho do ano de 2015, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação, da Faculdade de Engenharia de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. PAULO JOSE PAUPITZ GONCALVES do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. FABRICIO CÉSAR LOBATO DE ALMEIDA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de LUCAS DE HARO SILVA, intitulado "ANÁLISE DINÂMICA EM VIGAS COMPOSTAS COM AMORTECIMENTO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS E ELEMENTOS FINITOS". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: ---  
Aprovado ---. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. PAULO JOSE PAUPITZ GONCALVES



Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR



Prof. Dr. FABRICIO CÉSAR LOBATO DE ALMEIDA



*“Toda nossa ciência, medida contra a realidade, é primitiva e infantil e ainda assim a coisa mais preciosa que temos.”*  
*- Albert Einstein*

# Agradecimentos

Conhecimento algum seria capaz ao ser humano se este não pudesse contar com seu semelhante, desde um simples gesto de apoio, palavra de conforto ou amparo nos tempos difíceis. Para tanto, às várias pessoas, colegas e amigos, que colaboraram direta ou indiretamente com o desenvolvimento deste, ficam aqui meus sinceros agradecimentos:

- Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde e capacidade para vencer barreiras e alcançar objetivos;
- Agradeço à minha família pelo apoio incondicional em todas as horas;
- Agradeço ao prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves, do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Bauru, pela confiança e oportunidade de poder trabalhar junto e compartilhar de vosso precioso conhecimento e experiência e pelo grande apoio e auxílio do desenvolvimento do presente trabalho nas partes experimental e científica;
- Agradeço aos profs. Dr. Marcos Silveira, Dr. José Manoel Balthazar, Dr. Bento Rodrigues de Pontes Júnior e Dr. Edson Antônio Capello Sousa, do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Bauru, pelas valiosas aulas de Métodos numéricos e simulação em dinâmica não linear, Controle de sistemas não lineares e caóticos, Vibrações de sistemas mecânicos discretos e contínuos sujeitos a carregamentos aleatórios, Vibrações Mecânicas, Modelagem de sistemas mecânicos e Elementos finitos.
- Agradeço aos colegas mestrands, em especial aos amigos Júlio de Moraes Fernandes e Michael Andrade Maedo, pelos muitos conhecimentos discutidos e compartilhados durante os dias e madrugadas de aulas e estudo e a todos os demais pelo apoio e troca de experiências;
- Agradeço à doutoranda Najla Varalta, por fazer parte da minha vida e me apoiar e acompanhar sempre em todos os momentos.
- Finalmente, agradeço a CAPES pelo importante apoio financeiro a esta pesquisa

# Sumário

<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xvi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	4
1.2 Escopo do trabalho . . . . .	5
1.2.1 Análise numérica . . . . .	6
1.2.2 Validação experimental . . . . .	6
1.3 Objetivos do trabalho . . . . .	6
1.4 Contribuições . . . . .	7
1.5 Estrutura da dissertação . . . . .	7
<b>2 Revisão bibliográfica</b>	<b>9</b>
2.1 Sistemas discretos . . . . .	15
2.2 Sistemas contínuos . . . . .	15
2.3 Materiais viscoelásticos . . . . .	18
2.3.1 Efeito da temperatura . . . . .	18
2.3.2 Efeito da frequência . . . . .	19
2.4 Formulação do comportamento viscoelástico . . . . .	20
<b>3 Modelagem de sistemas discretos</b>	<b>22</b>
3.1 Modelos de amortecimentos viscoelásticos . . . . .	24

3.1.1	Modelo de Maxwell . . . . .	24
3.1.2	Modelo de Kelvin . . . . .	26
3.1.3	Modelo de Maxwell-Kelvin . . . . .	28
3.1.4	Modelo de Zener . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Modelagem de sistemas contínuos</b>	<b>32</b>
4.1	Teoria de viga de Euler Bernoulli . . . . .	32
4.2	Método dos Elementos Espectrais . . . . .	34
4.3	Método dos Elementos Finitos . . . . .	36
4.3.1	Método pela transformada de Fourier . . . . .	38
4.3.2	Método por Lagrange e Hamilton . . . . .	38
4.3.3	Método de elementos finitos utilizando os softwares <i>Calculix</i> e <i>Gmsh</i> . . . . .	45
4.4	Formas alternativas da FRF . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Validação experimental</b>	<b>50</b>
5.1	Vigas dos ensaios experimentais . . . . .	51
5.2	Ensaio experimental . . . . .	54
5.3	Aplicação com LabVIEW 2013 . . . . .	54
5.4	Estimadores $H_S$ , $H_1$ , $H_2$ e $H_3$ . . . . .	57
5.5	Análise de estimadores . . . . .	59
5.6	Resultados em função da frequência . . . . .	62
5.6.1	Viga A . . . . .	63
5.6.2	Viga B . . . . .	65
5.6.3	Viga C . . . . .	67
5.6.4	Viga D . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Discussões, conclusões e sugestões para trabalhos futuros</b>	<b>73</b>
6.1	Discussões . . . . .	73
6.2	Conclusões . . . . .	74
6.3	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	75
	<b>Bibliografia</b>	<b>76</b>
	<b>A Matriz de aceleração</b>	<b>80</b>
	<b>B Módulo de aquisição de sinais NI PXIe-1078</b>	<b>81</b>

<b>C Martelo de teste de força/impulso PCB MOD.ICP 086C03</b>	<b>83</b>
<b>D Acelerômetro piezoelétrico PCB MOD.ICP 352C33</b>	<b>85</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exemplos de aplicações de material viscoelástico . . . . .	2
1.2	Malha de elementos de camada simples e dupla . . . . .	3
2.1	Capsula Apollo, Davies (2008) . . . . .	9
2.2	Estrutura do material sanduíche, Davies (2008) . . . . .	10
2.3	Mosquito da De Havilland, Zenkert (1997) . . . . .	11
2.4	Diagrama de corpo livre . . . . .	15
2.5	Viga em balanço (com número infinito de graus de liberdade) . . . . .	16
2.6	Condições de contorno geométrico e deslocamento virtual . . . . .	17
2.7	Variação do módulo de armazenamento e fator de perda de um material viscoelástico com temperatura Nashif and Henderson (1985) . . . . .	19
2.8	O gradiente de velocidade Ward and Hadley (1993) . . . . .	20
3.1	Modelos discretos . . . . .	22
3.2	(a) Modelo de Maxwell com elementos mola e amortecedor em série; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ( $\sigma \times t$ ) e da deformação em função do tempo ( $\epsilon \times t$ ) . . . . .	25
3.3	(a) Modelo de Kelvin com elementos mola e amortecedor em paralelo; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ( $\sigma \times t$ ) e da deformação em função do tempo ( $\epsilon \times t$ ) . . . . .	27
3.4	(a) Modelo de Maxwell-Kelvin; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ( $\sigma \times t$ ) e da deformação em função do tempo ( $\epsilon \times t$ ) . . . . .	29
3.5	Modelo de amortecimento de Zener . . . . .	30
3.6	Resultados de transmissibilidade pela frequência do modelo de Zener . . . . .	31
4.1	Representação de um elemento de viga . . . . .	33
4.2	Modos de vibrar de uma viga com condição de contorno livre-livre. (a) Primeiro Modo, (b) Segundo Modo, (c) Terceiro Modo, (d) Quarto Modo. . . . .	35

4.3	Elemento de viga de duas camadas . . . . .	39
4.4	Graus de liberdade da viga de duas camadas . . . . .	42
4.5	Malhas de vigas com diferentes camadas pelo software <i>Gmsh</i> . . . . .	46
4.6	Elemento <i>C3D8R</i> (8 nós) . . . . .	46
4.7	Três primeiros modos de vibrar na flexão . . . . .	47
4.8	Influência dos termos massa ( <b>m</b> ), rigidez ( <b>k</b> ) e amortecimento ( <b>c</b> ) . . . . .	49
5.1	Fitas usadas no experimento, da direita para esquerda, Fita 113, Fita 4411 e Fita VHB 4910. . . . .	51
5.2	Vigas prontas para realização dos ensaios. Acima vigas com marcação e abaixo, detalhe da extremidade livre das vigas B, C e D para fixação . . . . .	51
5.3	Vigas prontas para realização dos ensaios. Acima vigas com marcação e abaixo, detalhe da extremidade livre das vigas B, C e D para fixação . . . . .	52
5.4	Função de Resposta em Frequência para uma viga na condição livre-livre. . . . .	53
5.5	Experimento; 1 Modulo de aquisição de dados, 2 Acelerômetro, 3 Martelo de impacto, 4 Vigas, Suporte (livre-livre) . . . . .	54
5.6	Gráficos LabVIEW 2013 - a)Gráfico de força, b)Gráfico de aceleração, c)Gráfico de FRF, d)Gráfico de estimadores . . . . .	55
5.7	Gráficos LabVIEW 2013 - a)Gráfico FRF linear, b)Gráfico de fase, c)Gráfico de coerência, d)Gráfico estimador $H_1$ , e)Gráfico estimador $H_2$ , f)Gráfico estimador $H_3$ . . . . .	55
5.8	Programa LabVIEW 2013 - Aquisição de sinais . . . . .	56
5.9	Definição de função de transferência . . . . .	57
5.10	Estimadores $H_S$ , $H_1$ , $H_2$ e $H_3$ . . . . .	59
5.11	Comparações entre os estimadores $H_S$ , $H_1$ , $H_2$ e $H_3$ . . . . .	61
5.12	Resultados experimentais para as vigas A, B, C e D . . . . .	62
5.13	Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga A. . . . .	63
5.14	Resultado da FRF pelo MLH para Viga A . . . . .	64
5.15	Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga B. . . . .	65
5.16	Resultado da FRF pelo MLH para Viga B . . . . .	66
5.17	Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga C. . . . .	67
5.18	Resultado da FRF pelo MLH para Viga C . . . . .	68
5.19	Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga D. . . . .	69
5.20	Resultado da FRF pelo MLH para Viga D . . . . .	70
5.21	Resultados pelo método MEE para as vigas A, B, C e D . . . . .	71
5.22	Resultados pelo método MEF para as vigas A, B, C e D . . . . .	71

5.23	Resultados pelo método MLH para as vigas A, B, C e D . . . . .	72
B.1	Módulo de aquisição de sinais, parte 1 . . . . .	81
B.2	Módulo de aquisição de sinais, parte 2 . . . . .	82
C.1	Tabela de especificação do martelo de teste de força/impulso PCB MOD.ICP 086C03 - Fonte original - <a href="http://www.pcb.com">www.pcb.com</a> . . . . .	83
C.2	Curvas de resposta do martelo PCB MOD.ICP 086C03 - Fonte original - <a href="http://www.pcb.com">www.pcb.com</a> . . . . .	84
C.3	Layout de dimensional do martelo PCB MOD.ICP 086C03 - Fonte ori- ginal - <a href="http://www.pcb.com">www.pcb.com</a> . . . . .	84
D.1	Tabela de especificação do acelerômetro PCB MOD.ICP 352C33 - Fonte original - <a href="http://www.pcb.com">www.pcb.com</a> . . . . .	85
D.2	Curvas de resposta do acelerômetro PCB PCB MOD.ICP 352C33 - Fonte original - <a href="http://www.pcb.com">www.pcb.com</a> . . . . .	86
D.3	Layout de dimensional do acelerômetro PCB MOD.ICP 352C33 - Fonte original - <a href="http://www.pcb.com">www.pcb.com</a> . . . . .	86

# Lista de Tabelas

4.1	Raizes de uma viga livre-livre . . . . .	35
5.1	Propriedades do material e propriedades geométricas as vigas metálicas .	52
5.2	Propriedades dos materiais viscoelásticos . . . . .	53
5.3	Frequências naturais de uma viga nas condições livre-livre(Hz) . . . . .	53
5.4	Valores da FRF com estimadores . . . . .	60
5.5	Valores de $\eta$ e $\beta$ para Viga A . . . . .	63
5.6	Resultados por elementos espectrais, experimental e elementos finitos para Viga A . . . . .	63
5.7	Resultado através do software <i>Calculix</i> para Viga A . . . . .	64
5.8	Valores de $\eta$ e $\beta$ para Viga B . . . . .	65
5.9	Resultados por elementos espectrais, experimental e elementos finitos para Viga B . . . . .	65
5.10	Resultado através do software <i>Calculix</i> para Viga B . . . . .	66
5.11	Valores de $\eta$ e $\beta$ para Viga B . . . . .	67
5.12	Resultados por elementos espectrais, experimental e elementos finitos para Viga C . . . . .	67
5.13	Resultado através do software <i>Calculix</i> para Viga C . . . . .	68
5.14	Valores de $\eta$ e $\beta$ para Viga D . . . . .	69
5.15	Resultados por elementos espectrais, experimental e elementos finitos para Viga D . . . . .	69
5.16	Resultado através do software <i>Calculix</i> para Viga D . . . . .	70
5.17	Resultados Viga A . . . . .	72
5.18	Resultados Viga B . . . . .	72
5.19	Resultados Viga C . . . . .	72
5.20	Resultados Viga D . . . . .	72

# Lista de símbolos

## *Letras latinas*

<b>Símbolo</b>	<b>Descrição</b>
$m$	Massa
$c$	Amortecimento
$k$	Rigidez
$x$	Deslocamento
$\dot{x}$	Velocidade
$\ddot{x}$	Aceleração
$t$	Tempo
$x$	Vetor na direção X
$y$	Vetor na direção Y
$z$	Vetor na direção Z
$b$	Largura
$L$	Comprimento
$h$	Espessura
$F$	Força
$F_0$	Força inicial
$f(x,t)$	Força distribuída
$N$	Constante de proporcionalidade

$E$	Módulo de elasticidade
$I$	Segundo momento de área
$S$	Área da seção transversal
$M$	Momento
$*E$	Módulo de Young complexo
$W$	Trabalho virtual
$k_b$	Número de onda (Wave number)
$u_b$	Deslocamento axial da viga de aço
$u_c$	Deslocamento axial da viga de alumínio
$H$	Função de transferência
$T$	Energia cinética
$V$	Energia potencial
$G_{xx}$	Auto espectro de entrada
$G_{yy}$	Auto espectro de saída

*Letras Gregas*

<b>Símbolo</b>	<b>Descrição</b>
$\beta$	Valor de amortecimento para método dos elementos finitos pela transformada de Fourier
$\delta W_{cn}$	Trabalho virtual realizado pela força não conservativa
$\omega$	Frequência
$\omega_n$	Frequência natural
$\omega(x,t)$	Deslocamento transversal
$\eta_i$	Fator de perda
$\eta$	Valor de amortecimento para método dos elementos espectrais

$\rho$	Densidade do material
$\theta$	Momento angular
$\Sigma$	Somatório

*Abreviações*

<b>Símbolo</b>	<b>Descrição</b>
<i>E.</i>	Elástico
<i>E.V.</i>	Elástico Viscoelástico
<i>CDP</i>	Corpo de Prova
<i>FRF</i>	Função de Resposta em Frequência
<i>GFE</i>	Elemento Fracionário Generalizado
<i>ME</i>	Material Elástico
<i>MEE</i>	Método dos Elementos Espectrias
<i>MEF,FE</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>MVE,MV</i>	Material Viscoelástico
<i>MLH</i>	Método de Lagrange a Hamilton

## *Resumo*

Novos materiais viscoelásticos tem sido desenvolvidos recentemente para ajudar a melhorar níveis de ruído e vibrações em estruturas mecânicas para aplicações em todo tipo de indústria como a aeronáutica, espacial, naval, civil, ferroviária e automobilística. O tratamento da camada viscoelástica aplicada a estruturas metálicas sólidas modifica duas propriedades principais que estão relacionadas com a distribuição de massa e o mecanismo de amortecimento. A outra propriedade controlando a dinâmica de um sistema mecânico é a rigidez, a qual sofre alterações com a aplicação do material viscoelástico. O modelo de sistema deste tipo é geralmente complexo, pois o material viscoelástico pode apresentar comportamento não linear, em contraste com as várias ferramentas disponíveis para a dinâmica linear. Neste trabalho, o comportamento dinâmico das vigas compostas são modelados através dos métodos de elementos espectrais e dos elementos finitos, utilizando diferentes tipos de elementos que serão então comparados com os resultados experimentais desenvolvidos em laboratório para várias vigas com diferentes materiais de camada viscoelástica. Após a obtenção dos dados gerados no laboratório, os modelos de elementos espectrais e de elementos finitos são atualizados para ajudar a entender os efeitos nos amortecimentos para várias frequências naturais e do trade-off entre a atenuação e a massa adicionada a estrutura.

**Palavras-chave:** Material viscoelástico, Análise dinâmica, Vibração.

## *Abstract*

New viscoelastic materials have recently been developed to help improve noise levels and vibrations in mechanical structures for applications in all kinds of industries such as aeronautics, space, naval, civil, railway and automobile. Treatment of the viscoelastic layer applied to solid metallic structures change two main properties that are related to the mass distribution and the damping mechanism. The other dynamic property controlling system is a mechanical stiffness which suffers changes with the application of viscoelastic material. The system for this kind is usually complex because the viscoelastic material may have nonlinear behavior, in contrast to the various tools available for linear dynamics. In this work, the dynamic behavior of the composite beams are modeled by methods of spectral elements and the finite elements using different types of elements that are then compared with experimental results developed in the laboratory for various beams with different viscoelastic material layer. After obtaining the data generated in the laboratory models of spectral elements and finite elements are updated to help understand the effects on damping for various natural frequencies and the trade-off between the attenuation and the added mass structure.

**Keywords:** viscoelastic material,dynamic analysis, vibration.

# Capítulo 1

## Introdução

O grande desafio para a indústria é a redução de custo faz-se necessário assim, o aprimoramento de soluções de problemas físicos tais como vibrações e ruídos indesejados. Com isso o desenvolvimento de novos materiais para atender esta demanda é vasta. Neste contexto, a aplicação do material viscoelástico pode ser encontrado nas indústrias aeronáutica, espacial, naval, civil, ferroviária, e automobilística. O material viscoelástico é de uma classe de materiais que apresentam reologia viscoelástica, ou seja, são materiais que, ao deformar-se, sofrem simultaneamente deformações elásticas e viscosas. Ao aplicar este material em estruturas de qualquer tipo, são obtidos ganhos significativos na redução de vibração ou ruído.

As estruturas têm se tornado mais flexíveis e leves devido aos recentes avanços tecnológicos na área de materiais e de produção e em consequência, análises estruturais estáticas não são mais suficientes para garantir segurança e conforto. Para a análise de sistemas mecânicos dinâmicos, as propriedades de rigidez e massa são necessárias mesmo de estruturas com geometria complexa.

É de grande utilização o uso dos materiais poliméricos, principalmente pelo seu baixo custo e significativas propriedades mecânicas. As propriedades mecânicas dos polímeros são dependentes da mobilidade molecular que é influenciada pela natureza química das macromoléculas, pela elevada massa molecular, pela presença ou não de ramificações e de ligações cruzadas, do grau de cristalinidade, presença ou não de plastificante, carga, aditivos, orientação e outros aspectos relacionados.

A viscoelasticidade dos polímeros está associada à capacidade destes materiais armazenarem e dissiparem energia simultaneamente, durante uma sollicitação mecânica. A natureza dual destes materiais implica no seu comportamento complexo e ao mesmo tempo interessante. Na figura (1.1) são apresentados algumas aplicações para o material

viscoelástico.

A descrição do comportamento viscoelástico dos materiais é feita através de equações diferenciais que combinam três termos: a deformação elástica, a taxa de deformação viscosa, e um termo inercial de aceleração. A tensão total é a soma das tensões parciais de cada termo. O desenvolvimento teórico da viscoelasticidade é feito através da combinação em série ou em paralelo dos modelos idealizados. Na literatura temos exemplos destes modelos de Maxwell, Kelvin(Voigth) e Zener. Estes modelos citados serão apresentados ao decorrer desta dissertação.



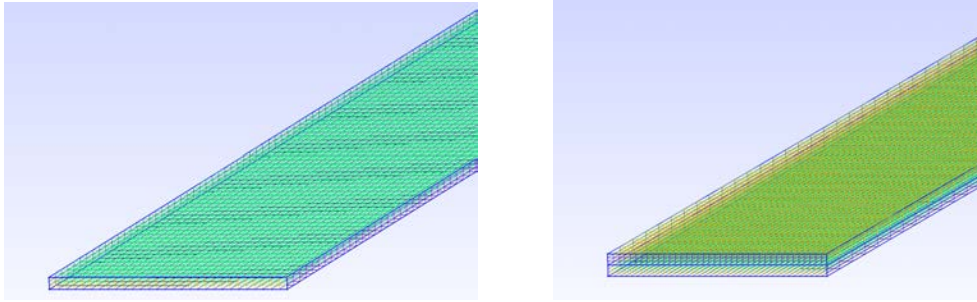
Figure 1.1: Exemplos de aplicações de material viscoelástico

Para a modelagem das vigas com e sem a camada de material viscoelástico, serão apresentados métodos através dos elementos espectrais (MEE), através do método dos elementos finitos (MEF) e resultado numérico. O MEF é desenvolvido através da resolução de equações diferenciais, pela aproximação da solução contínua por pequenas soluções discretas aproximadas em elementos distribuídos em seu volume total.

O termo Elementos Finitos surgiu no século XVIII, mas apenas à partir da década de 60 tornou-se mais difundido. Com o desenvolvimento do uso dos computadores este método tem sido cada vez mais desenvolvido, de modo a cada vez mais apresentar recursos à solução dos problemas industriais de engenharia e demais áreas tecnológicas.

O MEF consiste em uma técnica numérica para obtenção de uma solução aproximada das equações diferenciais parciais de um problema físico. É de uso rotineiro nas

análises de problemas dinâmicos de estruturas, sendo normalmente utilizado quando o sistema a ser modelado possui geometria complexa, inviabilizando a solução por métodos analíticos tradicionais. Este método foi inicialmente desenvolvido para análise de tensões, e hoje, é utilizado na análise de problemas de várias áreas, tais como vibrações e acústica. Na figura (1.2) são apresentadas malhas utilizadas para as análises de elementos finitos.



(a) Malha de material de uma camada (b) Malha de material de duas camadas

Figure 1.2: Malha de elementos de camada simples e dupla

Neste método a estrutura, de geometria qualquer, é representada por um conjunto de elementos de geometria simples. Estes elementos são unidos de tal forma que sua união representa aproximadamente a forma geométrica real do sistema. As coordenadas dos vértices de cada elemento definem os nós da malha de elementos usados no modelo.

Do ponto de vista da análise dinâmica, ao selecionar o tipo de elemento, define-se o grupo de equações o qual monta-se um problema de autovalores, e quando resolvidas produzem as respostas da estrutura em termos de um grupo de frequências naturais. Para cada frequência natural (associada ao autovalor), as respostas nos nós na forma de amplitude e fase relativa (autovetor), fornecem a forma do modo de vibração da estrutura naquela frequência.

## 1.1 Motivação

Com a crescente necessidade da indústria em desenvolver novos materiais e buscar soluções para melhorar os sistemas físicos, o desenvolvimento de materiais inteligentes torna-se um desafio necessário em muitas aplicações de engenharia, desde a indústria aeroespacial, naval, metal / mecânica atingindo até mesmo as áreas de biomecânica. Em muitas destas aplicações, onde há a necessidade de redução de peso e usando estruturas finas construídas por materiais leves.

Estes materiais, por sua vez, podem apresentar problemas de dinâmica flexível relacionados com o ruído e vibrações. Muitos estudos têm sido baseados no desenvolvimento de estruturas compósitas de construção de diferentes tipos de materiais, tais como as ligas de aço, novos materiais cerâmicos, compósitos laminados e outros. Outros têm-se baseado na combinação de diferentes materiais para atingir um melhor efeito estrutural, como é o caso de vigas combinadas com materiais viscoelásticos. Materiais viscoelásticos têm a característica de dependência da magnitude da condição do esforço envolvido, assim como a velocidade com que esta tensão é aplicada a ele. Este é um exemplo da funcionalidade base dos materiais poliméricos, quando o sistema está sujeito a excitações externas (principalmente vibração forçada), que oscila com a mesma frequência de oscilação de uma fonte geradora. Um dos principais problemas em estruturas de edifícios, pontes, as asas do avião, vigas e outros é causado quando a frequência de excitação corresponde a frequência natural do sistema (problema de ressonância) Rao (2009). Esses efeitos dinâmicos são frequentemente induzidos, seja por causas naturais (terremotos, vento e outros) quanto pelas ações do ser humano. Uma estrutura em movimento dissipa energia através de tensões internas geradas pelos elos das cadeias moleculares, o atrito entre a estrutura e o meio, deformações plásticas e outros. As amplitudes de vibração são menores quanto maior for a capacidade da estrutura em dissipar a energia. Alguns materiais usados em estruturas de aeronaves e em plantas industriais para edifícios exibem baixa atenuação, o que resulta em uma maior amplitude de vibração, daí o interesse na aplicação de tais materiais com maior capacidade de amortecimento, como é o caso de materiais viscoelásticos. O tratamento de vibração usando materiais viscoelásticos não é nova, Mead (1982) ilustra a utilização deste tipo de material usando camada restrita e sem restrições para o amortecimento estrutural. Quanto aos trabalhos relevantes envolvendo camada de amortecimento sem restrições, podem ser citados em ordem cronológica a primeira obra de Lunden (1979) onde se realizou um estudo sobre a melhor distribuição de amortecimento adicionado em vigas sujeitas a vibração livre (flexão de esforço). Uma das conclusões importantes de seu trabalho foi

a redução da frequência de ressonância com reduzido custo da adição de amortecimento convenientemente distribuído. Mais tarde, Yildiz and Stevens (1985) publicaram seu trabalho na otimização de chapas grossas com camada de amortecimento viscoelástico submetidas a vibração livre. Em sua conclusão, os autores apresentam que o ganho do fator de perda do sistema aumentou a mais de 100% por meio de distribuição e espessura do material viscoelástico. Mais recentemente, Kim and Kim (2004) realizaram um estudo sobre camada de distribuição otimizada do material viscoelástico para uma viga flexível, Mead (2007) abordou em seu trabalho medir os fatores de perda de vigas e placas com vibração livre e forçada envolvendo camadas de materiais viscoelástico. Kim and Lee (2009) publicou sobre o uso de parâmetros do modelo que envolvem viga livre com camada adicional de material viscoelástico, quantificando esses parâmetros em sua conclusão. Quanto a publicações envolvendo amortecimento forçado, em ordem cronológica, obras importantes, Mead (1982) apresentou uma comparação entre os modelos por representação equacional de flexão de vigas com amortecimento viscoelástico. Posteriormente Lall et al. (1988) realizou uma análise de vigas sanduíche com camada parcial do material viscoelástico, fazendo uma comparação entre as formulações por Método Markus, Método de Rayleigh-Ritz e Método Clássico. Mais recentemente, Lee (2005) tem discutido na sua publicação o uso de controladores ativos em vigas com adição de camada de amortecimento viscoelástico, com o objetivo de maximizar o fator de perda, Li and Crocker (2006) publicaram um estudo sobre os efeitos da estrutura de material viscoelástico grosso com vigas sanduíche de estrutura tipo favo de mel e Blais et al. (2009) realizou uma abordagem de soluções de equações de movimento de vigas impactadas compostas com camada viscoelástica parcial de amortecimento. Uma abordagem semelhante foi também realizada por Granger and Ross (2009), apresentando resultados experimentais e numéricos.

## 1.2 Escopo do trabalho

Este capítulo apresenta breve informações a respeito do que será apresentado nesta dissertação quanto ao método adotado para as análises numéricas, os resultados para as comparações com as análises experimentais para cada uma das vigas estudadas com seus respectivos resultados.

### 1.2.1 Análise numérica

Foram utilizados dois métodos de análise numérica, sendo eles, método dos elementos espectrais e método dos elementos finitos.

Na análise numérica por elementos espectrais, foi utilizada a formulação de *Euler-Bernoulli* para vigas finas. Foi implementada a matriz de aceleração para a obtenção das FRF (Função de resposta em frequência).

Para a obtenção dos resultados numéricos do método dos elementos finitos, foi utilizado o método de *Euler-Lagrange* através da *Função de Lagrange*  $\mathcal{L}$  ou simplesmente *Lagrangiana*  $L$  dada matematicamente pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial que é equivalente à lei de *Newton* do movimento, mas possui a vantagem de possuir a mesma forma independente do sistema de coordenadas generalizadas. E também utilizando do *Princípio de Hamilton* do trabalho virtual, que são as forças externas e as condições de contorno de um determinado sistema, sendo assim, o trabalho virtual é somado a equação *Lagrangiana*.

### 1.2.2 Validação experimental

Para a validação dos resultados numéricos foram realizados em laboratório experimentos que consiste em medir a aceleração imposta a uma viga com o uso de acelerômetro, devido a excitação do tipo impulso obtida através de um martelo instrumentado.

## 1.3 Objetivos do trabalho

Os objetivos do presente trabalho proposto foram:

- Avaliar sistemas mecânicos do tipo viga, constituída de diferentes materiais;
  - E (Elástico)
  - E.V. (Elástico viscoelástico)
- Implementar modelos que descrevam o comportamento da viga elástica proposta para análise, validando os resultados experimentais através de resultados numéricos através do método dos elementos finitos (MEF) e pelo método dos elementos espectrais (MEE), de modo a obter um parâmetro comparativo para os modelos envolvendo adição de camadas de material viscoelásticos;

- Demonstrar os efeitos da viscoelasticidade como atenuador de amplitude de vibração estrutural de vigas, de modo a resultar num parâmetro quantificado da participação da viscoelasticidade no fator amortecimento da vibração resposta do sistema (em forma percentual de massa adicionada);
- Validar a análise experimental através dos métodos numéricos utilizados.

Neste trabalho, um estudo de diferentes metodologias para análise de amortecimento em uma viga com camada sem restrições de material viscoelástico é estudado (Método dos Elementos Finitos(MEF), e Método dos Elementos Espectrais(MEE)). Apesar do fato de que estes materiais têm um forte efeito não linear, a análise considera apenas pequenos deslocamentos, de tal forma que os modelos lineares podem ser usados. O comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos é altamente dependente da temperatura, neste caso a temperatura será adotada como 25°C, temperatura ambiente. Testes experimentais são utilizados para validar os modelos numéricos.

## 1.4 Contribuições

Para esta dissertação de mestrado são apresentadas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho, foram realizadas através de artigos com publicações em congressos que são partes deste trabalho, são apresentadas conforme referências De Haro Silva et al. (2014a), De Haro Silva et al. (2014b).

## 1.5 Estrutura da dissertação

Este trabalho fora dividido em capítulos para uma melhor compreensão cronológica dos conteúdos aqui abordados, conforme os seguintes tópicos:

- Capítulo 1 - Introdução

Neste capítulo é apresentada uma breve introdução a respeito do uso dos materiais viscoelásticos, a motivação para a elaboração da presente dissertação, um breve escopo, apresentando os métodos utilizados para análise numérica e validação experimental, é apresentado também os objetivos e as contribuições para a dissertação.

- Capítulo 2 - Revisão bibliográfica

Este capítulo aborda as referências bibliográficas e apresenta diversos trabalhos relacionados ao apresentado, apresenta a classificação de vibrações, sistemas contínuos, tipos de amortecimentos, apresenta propriedades de materiais viscoelásticos e seus efeitos quanto a temperatura e frequência, é também apresentado a formulação do comportamento viscoelástico e seus modelos já conhecidos na literatura, como os modelos de Maxwell, Kelvin(Voigth) e Zener.

- Capítulo 3 - Modelagem matemática

Neste capítulo é apresentado as modelagens utilizadas para validar o modelo experimental, é apresentado a teoria de viga, o método dos elementos espectrais e o método dos elementos finitos para as vigas simples (apenas uma camada elástica) e duplas (com camada elástica e viscoelástica).

- Capítulo 4 - Validação experimental

Este capítulo aborda a rotina de aquisição de sinal da análise experimental, é apresentada as vigas utilizadas nas análises e suas propriedades, é apresentado o software LabVIEW 2013, para a aquisição dos sinais experimentais, e apresentada a diferença e escolha dos estimadores para a FRF, e é também realizada a comparação entre os métodos adotados com os resultados experimentais, em seguida apresentado resultados das vigas em função da frequência.

- Capítulo 5 - Discussão e Conclusão

Este capítulo aborda as discussões e conclusões dos resultados e proposta para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Revisão bibliográfica

A pesquisa no campo da análise teórica da construção de estruturas compósitas teve o seu início logo após a 2<sup>a</sup> Guerra Mundial, pesquisa esta que se concentrou sobretudo na mecânica de vigas, colunas e placas sanduíche. O trabalho teórico tem sido precursor da aplicação prática da tecnologia sanduíche, desde os anos 40 até aos nossos dias Zenkert (1997). A primeira alunagem de um veículo tripulado na lua a 20 de Julho de 1969 foi o resultado da aplicação bem sucedida de várias novas tecnologias, entre as quais se encontram a propulsão, os computadores e a construção sanduíche. Embora o interesse público naquela altura se centrasse mais na propulsão e nos computadores, tal feito não teria sido possível sem que o veículo tivesse uma estrutura leve e ainda assim suficiente resistente para suportar os esforços de lançamento e alunagem. A figura (2.1) mostra a construção da parede da cápsula Apollo que era constituída por duas cascas sanduíche interligadas.

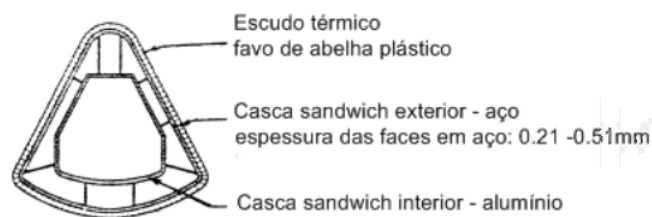


Figure 2.1: Capsula Apollo, Davies (2008)

A figura (2.2) mostra um detalhe da casca exterior, composta por duas faces em aço e um núcleo em favo de abelha. A vantagem inerente à construção sanduíche é clara, nomeadamente alta resistência e rigidez com um baixo peso Cooke (2004).

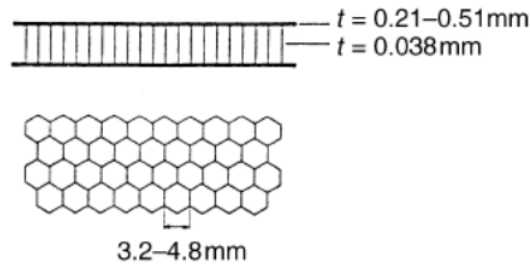


Figure 2.2: Estrutura do material sanduíche, Davies (2008)

Esta alunagem da tecnologia sanduíche tem, no entanto, bastante história. Pensa-se que este tipo de construção terá começado a ser considerado primeiro por Duleau em 1820 e mais tarde por volta de 1849 por Fairbairn, embora apenas 110 anos mais tarde o conceito tenha sido aplicado num produto final, com um objetivo comercial Zenkert (1997). Como tem sido norma na História, a maioria dos 3 desenvolvimentos tecnológicos dá-se em época de conflitos, sendo que a tecnologia sanduíche não é exceção. Assim, é no período da 1ª Guerra Mundial que se registam as primeiras aplicações da tecnologia sanduíche em painéis com faces de amianto e núcleo de fiberboard. Mas é na 2ª Grande Guerra que se verifica, pela primeira vez, a produção em larga escala de laminados sanduíche destinados ao fabrico da aeronave Mosquito da de Havilland Zenkert (1997).

Em 1939, logo após o início da guerra, a empresa britânica *de Havilland* apresentou ao Ministro do Ar o projeto do seu mais recente bombardeiro. A sua performance estimada era considerada fenomenal e assim, pouco depois, a de Havilland recebeu a encomenda de 50 unidades deste bombardeiro, mais tarde designado Mosquito. A fuselagem de secção oval era construída em duas metades, que se uniam depois ao longo do plano vertical, figura (2.3).

A fuselagem tinha estrutura sanduíche com faces de folha de madeira e núcleo de madeira balsa, conhecida pela sua leveza. Na parte traseira da fuselagem, onde era necessário haver maior resistência à torção, a folha de madeira envolvia o núcleo na diagonal, otimizando-se a orientação do grão da madeira. Antes de 1960, a tecnologia sanduíche foi praticamente exclusiva das aplicações aeroespaciais. Por volta do ano de 1960 aumentava o número de aplicações alternativas, tais como em edifícios, em armazenamento refrigerado, na indústria automóvel e naval Cooke (2004).

A partir destes trabalhos, com materiais compósitos tipo sanduíche, por volta da



Figure 2.3: Mosquito da De Havilland, Zenkert (1997)

década de 1950 iniciou-se a aplicação de materiais viscoelásticos como atenuadores de vibrações em estruturas para a composição das vigas sanduíches. Um dos primeiros trabalhos relatados foi o de Kerwin Jr (1959) com sua publicação do artigo “*Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer*” (*Amortecimento de Ondas de Flexão por uma Camada Viscoelástica Restrita*).

Campi and Monetto (2013) em seu artigo desenvolveu uma nova formulação para análise de vigas de duas camadas. Cada camada é modelado como uma viga de Timoshenko linearmente elástica. A ligação entre as camadas é assumido como sendo perfeito na direção transversal enquanto imperfeita no longitudinal (apenas são permitidos deslizamentos entre camadas). O comportamento da interface no sentido longitudinal é descrito através de uma relação proporcional não linear relativas reações tangenciais transmitidos entre as duas camadas e deslizamentos. O problema é então resolvido analiticamente. Esta solução analítica é mostrado para ser utilizada na análise de vigas mistas para diferentes condições de carga e de contorno que geram trações interfaciais que induzem um processo irreversível, progressiva de descolagem na interface. Alguns exemplos numéricos são considerados e uma análise paramétrica realizada para investigar a influência do comportamento da interface sobre a resposta da viga mista quando as camadas são ainda elásticas.

De acordo com Rao (2009) qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado vibração ou oscilação. A teoria de vibração e oscilação trata do estudo de movimentos oscilatórios de corpos e as forças associadas a eles.

Conforme Maia and e Silva (1997), vibrações ou movimento dinâmico, são inerentes à vida em geral, embora a humanidade considere como fenômenos desagradáveis e indesejados por causar tais consequências indesejáveis como desconforto, ruído, mau

funcionamento, desgaste, fadiga e até mesmo destruição. Terremotos são talvez as manifestações mais assustadoras de movimento dinâmico, causadas por forças geradas na crosta da terra, e os seus efeitos destrutivos sobre o meio ambiente e estruturas feitas pelo homem é bem conhecida. Através de uma menor escala, a própria humanidade é responsável pela criação de um ambiente onde as más vibrações estão constantemente presentes.

No trabalho proposto por Rao (2003), o autor abordou em seu artigo a aplicação da tecnologia de amortecimento passivo utilizando materiais viscoelásticos para controlar ruído e a vibração em veículos e aviões comerciais. Materiais viscoelásticos têm sido utilizados para melhorar o amortecimento numa estrutura de três maneiras diferentes: tratamento de amortecimento de camada livre, camada restrita ou camada de tratamento de amortecimento tipo sanduíche e amortecedor viscoelástico sintonizado. Embora esses projetos têm sido em torno de mais de 40 anos, as melhorias recentes na compreensão e aplicação dos princípios de amortecimento, juntamente com os avanços da ciência e fabricação de materiais levaram a muitas aplicações bem-sucedidas. O ponto-chave em qualquer modelo é de reconhecer que o material de amortecimento tem de ser aplicado de tal maneira que ele é esticado de forma significativa sempre que a estrutura é deformada no modo de vibração sob investigação. Apresenta também os efeitos da temperatura e frequência em dado sistema.

Wasilkoski (2006) propôs em sua dissertação que a viscoelasticidade é uma propriedade exclusiva dos polímeros e influencia na aplicação dos materiais. Devido a sua importância, esta característica tem sido amplamente explorada em livros, capítulos de livros e inúmeros artigos têm se dedicado na descrição e interpretação do fenômeno viscoelástico. Com o intuito de promover um maior refinamento da teoria predominante, em seu trabalho, apresenta uma nova abordagem incluindo a variação da energia cinética numa bem conhecida equação baseada na segunda lei de Newton. A massa relaxada aumenta constantemente durante o estiramento, ocasionando uma variação inercial ao invés da viscosidade inerente a dissipação de energia. As equações desenvolvidas tornam possível avaliar importantes propriedades viscoelásticas (tais como módulo de perdas e o amortecimento) em qualquer condição experimental através de prévios experimentos. Seus estudos usaram como base os modelamentos propostos por Maxwell-Kelvin (Maxwell-Voigt).

Aseka (2008) desenvolveu sua tese de doutorado com o objetivo de calcular respostas de sistemas dinâmicos com amortecimento viscoelástico, utilizando a base gerada pela resposta impulso, desenvolvida por Claeysen no seu próprio espaço físico e utilizada em variadas aplicações por seus colaboradores e orientados. O uso da resposta impulso

permitiu determinar a resposta dinâmica de um sistema dinâmico viscoelástico concentrado e de uma viga concentrada usando o princípio da correspondência. A metodologia desenvolvida para resolver problemas dinâmicos viscoelásticos com o uso da resposta impulso foi implementada em sistemas concentrados e em um sistema distribuído correspondente a uma viga de Euler-Bernoulli. A resposta impulso foi calculada através de equações características de natureza algébrica, diferencial e em diferenças. e em sua simulações fez o uso do software Maple.

Recentemente, nota-se novas pesquisas afim de apresentar novos métodos matemáticos analíticos e numéricos, como também experimentais, estão disponíveis para o modelamento e análise para os mais diversos problemas envolvendo o uso de material viscoelástico são encorajadores.

Conforme Cajic et al. (2014) em seu artigo foi proposto um modelo de Zener derivado fracionário de quatro parâmetros para a modelagem de um elemento viscoelástico conectado em um sistema robótico. Foi utilizado uma relação força-deslocamento a fim de obter as forças generalizadas do elemento ligado a dois corpos diferentes no sistema. Forças generalizada do elemento são derivadas utilizando o princípio do trabalho virtual. A fim de obter resultados numéricos, foi sugerido um sistema robótico com três graus de liberdade. Comportamento de forças generalizadas é examinada para mudanças de parâmetro de ordem fraccionada e tempo de relaxação.

No trabalho apresentado por Luo (2014), os modelos de viscoelasticidade de Kelvin-Voigt e Zener foram estudados utilizando uma barra uniforme estressado. Os resultados apresentados mostram que, desde um modelo de único elemento clássico e uma estrutura real são regidos por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e uma equação diferencial parcial de segunda e terceira ordem, respectivamente, um modelo ideal de único elemento comporta-se de forma diferente a partir de uma estrutura quando a aceleração tem de ser tida em conta. Quando a viscoelasticidade de Zener detém  $\tau_\epsilon < \tau_\sigma$ , então ele não pode causar nenhum relaxamento devido a uma parte real positiva de um valor próprio em vibração que pode se tornar instável. Isto sugere que o modelo de Zener é válido por um material real quando, e somente quando,  $\tau_\epsilon \geq \tau_\sigma$ . Verificou-se que as formulações calculando  $Q^{-1}$  parâmetros desenvolvidos na literatura a partir de um único modelo de elementos pode ter de ser melhorada e que a resposta inicial obtido a partir de um modelo clássico de único elemento muito mais rapidamente do que a em uma barra.

Conforme Fan et al. (2015), em seu artigo é abordado um problema inverso para estimar os parâmetros do modelo de Zener de viscoelasticidade com base no elemento fracionário generalizada (GFE) rede é estudado. O método Bayesiano é proposto para

obter a estimativa otimizada dos parâmetros viscoelásticos. Três exemplos são realizados para certificar a validade do método. Todos os resultados numéricos leva a um excelente encaixe entre os resultados calculados e os dados experimentais. Mostra-se que o método Bayesian é viável no problema inverso de estimativa de parâmetros para a equação constitutiva fracionário, e o modelo Zener rede GFE é eficiente na modelagem do comportamento viscoelástico.

Zopf et al. (2015) utiliza duas abordagens para descrever um modelo de Zener fracionário. Ambos os modelos utilizam o modelo viscoelástico de Zener, que consistem de uma mola elástica não-linear e um elemento de Maxwell fracionário em paralelo. O elemento de Maxwell fracionário representa o comportamento viscoelástico da formulação. Assim, o desenvolvimento de um novo modelo de material viscoelástico fracionário sob consideração da teoria de tensão finita é apresentada. Além disso, as equações constitutivas através de duas abordagens de diferentes algoritmos para capturar a integração no tempo fracionário dentro deste modelo de material são derivados. A consideração de elementos fracionários permite a caracterização de materiais altamente inelástico e a dependência no tempo desses materiais com relativamente poucos parâmetros. Para o elemento fracionário, um parâmetro  $\alpha$  do material determina a transição do comportamento do elemento de mola entre reológico ( $\alpha = 0$ ) e amortecedor ( $\alpha = 1$ ). Precisão e eficiência de um clássico (não-recursivo) e um novo algoritmo recursivo para lidar com os elementos fracionários foram verificados e validados pela comparação de várias simulações de elementos finitos (FE) para os resultados dos testes de materiais. As simulações encontraram tensões finitas e um esquema de integração de tempo implícito. Finalmente, uma simulação de moldagem por FE, foi encontrado o modelo constitutivo estendido para o regime de tempo de integração explícito, foi realizado para ilustrar o desempenho para as simulações em grande escala, em comparação com um processo de formação real e verificou-se ser bastante eficiente.

Em seu artigo, Atanackovic et al. (2015) utiliza a equação de onda fracionária para o modelo de Zener no espaço-tempo que descreve materiais viscoelásticos, obedecendo o modelo de Zener no tempo fracionário e a medida tensão-espaço fracionária, é derivada e analisada. Este modelo inclui ondas com velocidade finita, assim como perturbações de não propagação. A existência e a singularidade da solução para o problema de Cauchy generalizado são provados. Casos especiais são investigados e exemplos numéricos são apresentados.

## 2.1 Sistemas discretos

Vibrações são iniciadas quando um elemento é deslocado da sua posição de equilíbrio, devido a uma energia transmitida para o sistema através de uma fonte externa conforme Kelly et al. (2000), todo movimento repetitivo é chamado vibração ou oscilação, Rao (2009). A teoria de vibração estuda movimentos oscilatórios de corpos e as forças associadas a eles.

Quando aplicado uma força no bloco da figura (2.4) para deslocá-lo de sua posição de equilíbrio, a energia potencial é desenvolvido na mola  $k$  através de um deslocamento  $x$ , quando o bloco é libertado a força de mola  $kx$  puxa o bloco para o equilíbrio com a energia potencial e é convertido em energia cinética. na ausência de forças não conservativas, esta transferência de energia é contínuo, fazendo com que o bloco sofra oscilação sobre a sua posição de equilíbrio, Kelly et al. (2000).

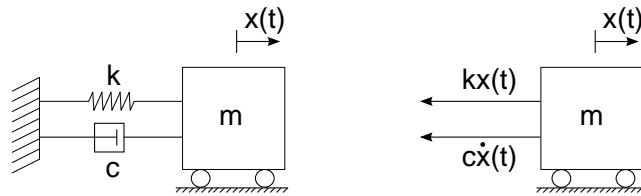


Figure 2.4: Diagrama de corpo livre

Vibrações podem ser classificadas de várias maneiras. Pode-se classificar como principais, Rao (2009):

- Vibração amortecida e não amortecida
- Vibração linear e não linear
- Vibração determinística e aleatória

## 2.2 Sistemas contínuos

Uma grande quantidade de sistemas práticos pode ser descrita usando um número finito de graus de liberdade. Alguns sistemas, em especial os que envolvem elementos elásticos contínuos, tem um número infinito de graus de liberdade Rao (2009). Como

exemplo simples, apresentado na figura (2.5). Visto que a viga tem um número infinito de pontos de massa, precisamos de um número infinito de coordenadas para especificar sua configuração defletida. Este número de coordenadas, define sua curva de deflexão elástica. Assim, a viga em balanço tem um número infinito de graus de liberdade.

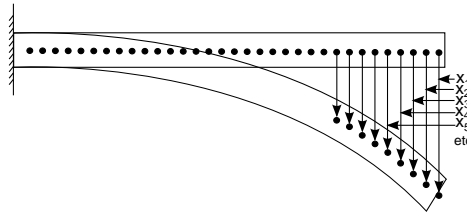


Figure 2.5: Viga em balanço (com número infinito de graus de liberdade)

Conforme Rao (2009) sistemas com número finito de graus de liberdade são denominados sistemas discretos ou de parâmetros concentrados, e os que têm um número infinito de graus de liberdade são denominados contínuos ou distribuídos.

Conforme Craig (1981), todas as estruturas são de fato, corpos tridimensionais, e cada ponto de tal corpo, a não ser contido, pode deslocar ao longo de três direções perpendiculares entre si, dizer  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

As leis de Newton e o princípio dos deslocamentos virtuais foram empregados em derivar as equações de movimento de vários sistemas de um grau de liberdade. O princípio de Hamilton, que é usado para a solução numérica do sistema em questão, está diretamente relacionado com o princípio dos deslocamentos virtuais e poderia ser usado para derivar as equações de movimento de um grau de liberdade. Este mesmo emprega a energia cinética e a energia potencial, que são quantidades escalares, ao invés do trabalho virtual que emprega as forças de inércia e as forças elásticas, que deve ser obtido a partir de quantidades vetoriais, o princípio de Hamilton pode ser um pouco mais fácil de aplicar do que o princípio dos deslocamentos virtuais, Craig (1981). Para sistemas contínuos o uso do princípio de Hamilton e fornece uma grande importância, ou seja, as condições de contorno são pegadas sistematicamente no processo de obtenção da equação de movimento.

Na formulação de princípio Hamilton, deslocamentos virtuais, ou mudanças de configuração virtuais, são empregues. Na figura (2.6) mostra a viga engastada com mudanças virtuais de configuração  $\delta v(x,t)$ , as mudanças virtuais de configuração deve satisfazer todas as condições de contorno da geometria. Hamilton também assumiu que a configuração é especificada nos momentos  $t_1$  e  $t_2$ . Para uma viga engastada isso

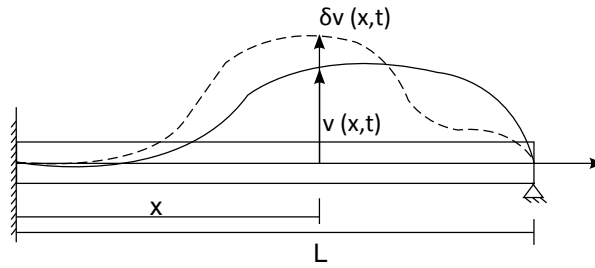


Figure 2.6: Condições de contorno geométrico e deslocamento virtual

implicaria que  $\delta v(x,t_1) = \delta v(x,t_2) = 0$ . Princípio de Hamilton pode ser definido como.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0 \quad (2.1)$$

Sendo:

- $T$  = Energia cinética total do sistema
- $V$  = Energia potencial do sistema, incluindo a energia de tensão e a energia potencial conservativa das forças externas
- $\delta W_{nc}$  = Trabalho virtual realizado pela força não conservativa, incluindo amortecimento e forças externas
- $\delta()$  = Este simbolo denota a primeira variação, ou mudança virtual
- $t_1, t_2$  = Tempos onde a configuração do sistema é conhecido

## 2.3 Materiais viscoelásticos

Viscoelasticidade pode ser definida como uma resposta material que apresenta características de um fluido viscoso e um sólido elástico. Um material elástico tal como uma mola retrai-se para a sua posição original quando esticado e libertado, ao passo que um fluido viscoso, tal como massa de vidraceiro mantém a sua forma estendida quando puxada. Um material viscoelástico (MVE) combina essas duas propriedades ele retorna à sua forma original depois de ser forçado, mas isso devagar o suficiente para se opor o próximo ciclo de vibração. O grau para o qual um material se comporta tanto viscoso ou elasticamente depende principalmente da temperatura e da taxa de carregamento (frequência). Muitos materiais poliméricos (plásticos, borrachas, acrílicos, silicones, vinis, adesivos, urathanes e epóxis, etc) com moléculas de cadeia longa apresentam comportamento viscoelástico. As propriedades dinâmicas (módulo de cisalhamento, módulo extensional, etc), de materiais viscoelásticos lineares podem ser representados pela abordagem módulo complexo. A introdução do módulo complexo traz um monte de conveniência em estudar as propriedades dos materiais de materiais viscoelásticos. As propriedades dos materiais viscoelásticos dependem significativamente das condições ambientais, tais como temperatura ambiente, a frequência de vibração, a carga de pré, de carga dinâmica, a umidade do meio ambiente e assim por diante. Portanto, um bom entendimento de tais efeitos, tanto separadamente como em conjunto, sobre a variação das propriedades de amortecimento é necessário, a fim de adaptar estes materiais para aplicações específicas.

Há alguns efeitos que devem ser considerados para o amortecimento viscoelástico:

- Efeito da temperatura
- Efeito da frequência

### 2.3.1 Efeito da temperatura

A temperatura é, talvez, o factor ambiental mais importante que afecta as propriedades dinâmicas de materiais de amortecimento . Este efeito é mostrado na figura (2.7), por um material polimérico típico tendo quatro regiões distintas . A primeira região é o estado vítreo , onde o material tem grande módulo de armazenamento ( rigidez dinâmica ) , mas muito baixo amortecimento . O módulo de armazenamento desta região muda lentamente com a temperatura, enquanto que o factor de perda muda significativamente com o aumento da temperatura . Na região de transição, no qual o material muda de um estado vítreo a um estado elástico , o módulo de material diminui rapidamente com

o aumento da temperatura por causa de amolecimento do material de que o factor de perda aumenta . O amortecimento normalmente picos a ou à volta da temperatura de transição vítrea do material . Alguns polímeros pode ser feito para ter mais do que uma região de transição , alterando a estrutura e composição polimérica para tirar vantagem da capacidade de amortecimento de pico nesta região . No estado de borracha ambos módulo e fator de perda assumir valores um pouco baixos e variam muito lentamente com a temperatura. A região de fluxo é típica para alguns materiais de amortecimento tais como esmaltes vítreos e materiais termoplásticos , em que o material continuar a abrandar o aumento da temperatura , enquanto factor de perda atinge valores muito altos .

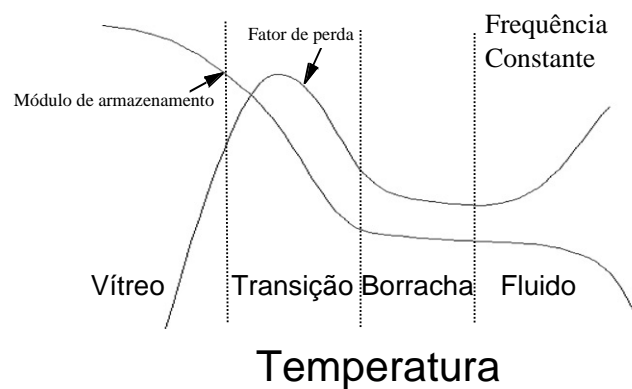


Figure 2.7: Variação do módulo de armazenamento e fator de perda de um material viscoelástico com temperatura Nashif and Henderson (1985)

### 2.3.2 Efeito da frequência

Experimentos têm mostrado que a frequência de vibração ou a taxa de carga tem efeito significativo sobre o amortecimento e o módulo dinâmico de materiais viscoelásticos. A variação do módulo de elasticidade e fator de perda de um típico material de amortecimento com alta frequência ao longo de um intervalo de 3-5 décadas mostra que, para um material sem a região de fluxo, o efeito do aumento da temperatura sobre o módulo de armazenamento é semelhante ao efeito de redução frequência. Este comportamento fornece a base para o princípio da sobreposição de temperatura frequência que é utilizada para transformar as propriedades do material do domínio da frequência para o domínio de temperatura, e vice-versa, Jones (1990).

## 2.4 Formulação do comportamento viscoelástico

A lei da viscosidade de Newton define a viscosidade  $\eta$  como:

$$\sigma = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2)$$

Sendo  $\eta$  o coeficiente de atrito viscoso,  $v$  a velocidade e  $y$  a direção do gradiente de velocidade, conforme representado na figura (2.8). Para um gradiente de velocidade no plano  $xy$

$$\sigma = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

Sendo  $\partial v_x/\partial y$  e  $\partial v_y/\partial x$  são os gradientes de velocidade nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Visto que  $v_x = \partial u/\partial t$  e  $v_y = \partial v/\partial t$  onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, e  $e_{xy}$  a deformação no plano  $xy$  tem-se que:

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial e_{xy}}{\partial t} \quad (2.5)$$

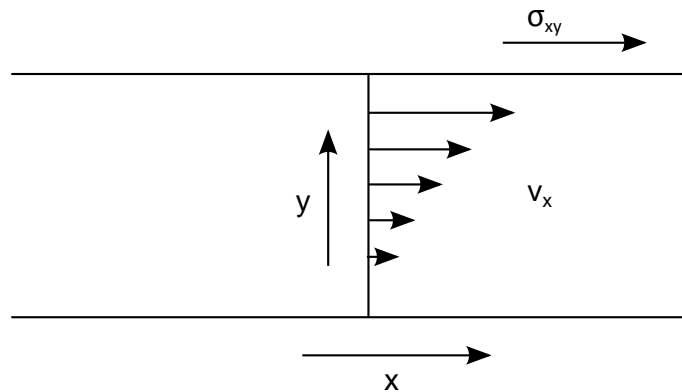


Figure 2.8: O gradiente de velocidade Ward and Hadley (1993)

Pode-se observar que a tensão de cisalhamento  $\sigma_{xy}$  é diretamente proporcional à taxa de velocidade por cisalhamento com o tempo. Esta formulação traz a semelhança entre a lei de Hooke para sólidos elásticos e a lei de Newton para líquidos viscosos conforme Ward and Hadley (1993). A lei de Hooke descreve o comportamento de um sólido elástico linear e a lei de Newton para um líquido viscoso linear. Uma relação simples das propriedades de um sólido viscoelástico linear é obtida pela combinação destas duas leis: Para comportamento elástico

$$(\sigma_{xy})_e = G\epsilon_{xy} \quad (2.6)$$

Sendo  $G$  o módulo de cisalhamento.

Para o comportamento viscoso temos que

$$(\sigma_{xy})_v = \eta \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Uma simples formulação do comportamento viscoelástico linear combina estas equações, assumindo que a tensão de cisalhamento relatada para deformação e a taxa de deformação são grandezas aditivas

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{xy})_e + (\sigma_{xy})_v = G\epsilon_{xy} + \eta \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Esta equação representa um dos modelos simples para o comportamento viscoelástico linear, modelo de Kelvin ou Voight Ward and Hadley (1993)

A lei de Hooke para sólidos elásticos é válida somente para pequenas deformações e a lei de Newton para a viscosidade é restrita para fluxo laminar relativamente baixo. Geralmente previsões quantitativas são possíveis somente no caso de viscoelasticidade linear, para os quais os resultados de mudança de tensão ou deformação são simplesmente aditivos, mas o tempo no qual esta mudança ocorre deve ser considerado.

## Capítulo 3

# Modelagem de sistemas discretos

Uma grande quantidade de sistemas práticos pode ser descrita usando um número finito de graus de liberdade. Sistemas com um número finito de graus de liberdade são denominados sistemas discretos ou de parâmetros concentrados

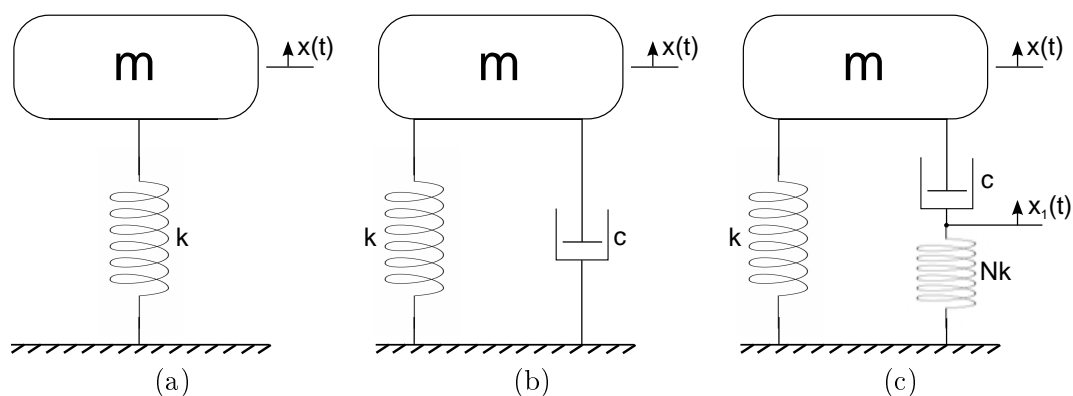


Figure 3.1: Modelos discretos

Para o primeiro modelo discreto, na figura (3.1(a)) é apresentado um sistema com amortecimento estrutural, sendo assim, conforme a segunda Lei de Newton, o equilíbrio de forças é dado por

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad (3.1)$$

Considerando a força  $F_k = -kx$  (mola); Pode-se obter

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.2)$$

sendo o amortecimento estrutural é dado por

$$k(1 + j\eta) \quad (3.3)$$

O segundo modelo discreto que representa um sistema massa, mola e amortecedor, é apresentado na figura (3.1(b)), de acordo com a segunda Lei de Newton, o equilíbrio de forças é dado por

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad (3.4)$$

Considerando as duas forças  $F_k = -kx$  (mola) e  $F_c = -c\dot{x}$  (amortecedor); Pode-se obter

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.5)$$

Assumindo que o sistema responde harmonicamente é possível adotar uma função para o deslocamento do sistema como:

$$x(t) = C_1 e^{st} \quad (3.6)$$

Substituindo a equação 3.6 em 3.5, obtêm-se o polinômio característico

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (3.7)$$

O qual as raízes são

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (3.8)$$

Sendo assim, se  $c^2 - 4mk > 0$ , o sistema apresenta duas raízes distintas, se  $c^2 - 4mk < 0$ , o sistema apresenta duas raízes complexas conjugadas e se  $c^2 - 4mk = 0$ , o sistema apresenta duas raízes iguais. Com isto,  $c^2 = 4mk$  e assim, tomando  $k = m\omega_n^2$  temos  $c_c = 2m\omega_n$ .

O fator de amortecimento  $\zeta$ , pode-se então definir

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (3.9)$$

O terceiro modelo discreto, figura (3.1(c)), representa um sistema de amortecimento do tipo viscoelástico, e será apresentado com mais detalhes no próximo capítulo, *Modelos de amortecimentos viscoelásticos*

### 3.1 Modelos de amortecimentos viscoelásticos

Vários são os modelamentos possíveis para viscoelasticidade linear dos polímeros, modelos estes que podem ser tratados matematicamente. Os principais modelos simplificados que permitem fazer uma previsão aproximada do comportamento físico-mecânico de um material viscoelástico são:

- Modelo de Maxwell
- Modelo de Kelvin
- Modelo de Maxwell-Kelvin
- Modelo de Zener

#### 3.1.1 Modelo de Maxwell

Como um fluido viscoelástico apresenta por definição os dois componentes da deformação, um elástico e um plástico, Maxwell sugeriu que este pudesse ser representado por uma associação de uma mola e um amortecedor, como mostrado na figura (3.2).

A figura (3.2) (b) representa a deformação e o restabelecimento deste modelo. Conforme a figura (3.2) as quatro regiões da resposta de deformação ( $\epsilon$  x  $t$ ) são:

- Região 1 – deformação elástica instantânea da mola;

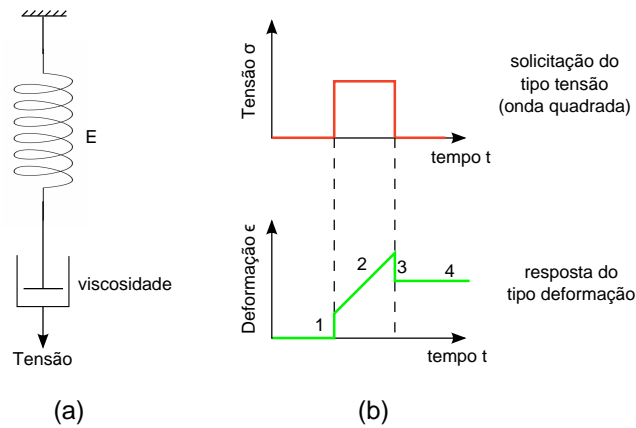


Figure 3.2: (a) Modelo de Maxwell com elementos mola e amortecedor em série; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ( $\sigma \times t$ ) e da deformação em função do tempo ( $\epsilon \times t$ )

- Região 2 – deformação plástica, dependente do tempo, do amortecedor;
- Região 3 – recuperação elástica instantânea da mola;
- Região 4 – deformação plástica residual e irrecuperável do amortecedor

Sendo assim, a tensão da mola é dada por:

$$\sigma_1 = K\epsilon \quad (3.10)$$

A tensão do amortecedor é dada por:

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (3.11)$$

Sendo as tensões aplicadas na mola e amortecedor as mesma, a tensão total  $\sigma$ :

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (3.12)$$

A deformação total será:  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$

A relação entre a tensão e a deformação pode ser descrita por:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{K} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.13)$$

Para  $t = 0$ ,  $\sigma = \sigma_0$

$$\sigma = \sigma_0 e^{\left(\frac{-\kappa}{\eta}\right)} \quad (3.14)$$

Na equação (3.14) apresenta que exponencialmente a tensão decai. Sendo  $\tau$  o tempo de relaxação:

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (3.15)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)} \quad (3.16)$$

Considerando as tensões constantes, temos que:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.18)$$

Isto não pode ser generalizado para materiais viscoelásticos onde o comportamento de fluência é mais complexo. A propriedade de relaxação de tensão não pode ser representada por uma exponencial simples do termo de decaimento, pois esta não decairá necessariamente a zero a um tempo infinito, Ward and Hadley (1993).

### 3.1.2 Modelo de Kelvin

O modelo de Kelvin sendo igual ao modelo também conhecido chamado modelo de Voight, consiste de uma mola de módulo  $K$ , em paralelo com um amortecedor com viscosidade  $\eta$ . Ao se aplicar uma tensão durante um certo intervalo de tempo, obtém-se

como resposta, uma curva de variação da deformação com o tempo, conforme figura (3.3).

No modelo de Kelvin, a tensão total é iniciada no pistão, isto porque a mola não pode se deformar instantaneamente. Sob influência da tensão constante, o pistão começa a fluir transferindo parte da carga para a mola. Retirada a tensão, a amostra retorna, a sua forma original.

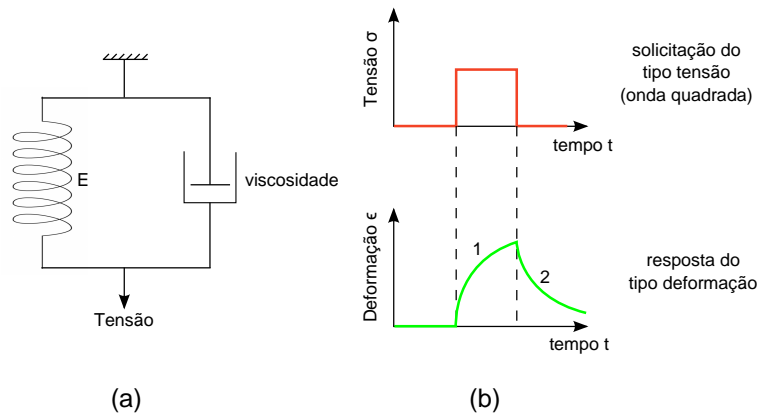


Figure 3.3: (a) Modelo de Kelvin com elementos mola e amortecedor em paralelo; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ( $\sigma \times t$ ) e da deformação em função do tempo ( $\epsilon \times t$ )

Conforme a figura (3.3) as duas regiões da resposta de deformação ( $\epsilon \times t$ ) são:

- Região 1 – deformação elástica retardada por um componente viscoso;
- Região 2 – Recuperação elástica retardada pelo mesmo componente viscoso anteriormente dito;

Este modelo consiste de uma mola de módulo  $K$ , em paralelo com um amortecedor de viscosidade  $\eta$ . Se uma tensão constante  $\sigma$  é aplicada a um tempo  $0 = t$  a elongação a mola poderá não ser instantânea, sendo retardada pelo amortecedor. A deformação ocorre a uma taxa variável, com a tensão distribuída entre os dois componentes, após um tempo dependente da viscosidade do amortecedor, a mola aproxima-se da elongação máxima finita. Quando a tensão é removida, ocorre o processo reverso, onde a deformação decai com o tempo, então o comprimento inicial tende a se restabelecer conforme figura (3.3). O modelo representa o componente tempo-temperatura da fluência para uma primeira aproximação.

As relações tensão-deformação são para a mola

$$\sigma = K_K \epsilon_1 \quad (3.19)$$

e para o amortecedor

$$\sigma_2 = \eta d\epsilon_2/dt \quad (3.20)$$

Sendo, a tensão total  $\sigma$  é  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ , e a deformação total é  $e = e_1 = e_2$

$$\sigma = K_K \epsilon + \eta_K \frac{d\epsilon}{dt} \quad (3.21)$$

Considerando-se o tempo de retardo  $\tau'$  após o carregamento para a deformação atingir  $(1 - \frac{1}{e})$  da deformação máxima. Após remover a tensão, a deformação assume valor de decaimento de  $(\frac{1}{e})$  do valor máximo no tempo  $\tau'$ .

Na deformação temos que:

$$e(t) = e_0 \left( 1 - \text{Exp} \left( \frac{-t}{\tau'} \right) \right) \quad (3.22)$$

E para a relaxação

$$e(t) = e_0 \left( \text{Exp} \left( \frac{-t}{\tau'} \right) \right) \quad (3.23)$$

### 3.1.3 Modelo de Maxwell-Kelvin

Como apresentado nos modelos anteriormente, os modelos anteriores de modo individual, não representa bem todos os casos de comportamento real dos fluidos viscoelásticos, sugeriu-se então uma associação dos dois em série. Ao aplicar uma tensão constante por um certo intervalo de tempo, obtém-se como resposta uma curva de variação da deformação com o tempo, como demonstrado na figura (3.4).

Nesse modelo, cada porção da curva resposta ( $\epsilon$  x  $t$ ) é a função da ação conjunta dos dois elementos.

Sendo:

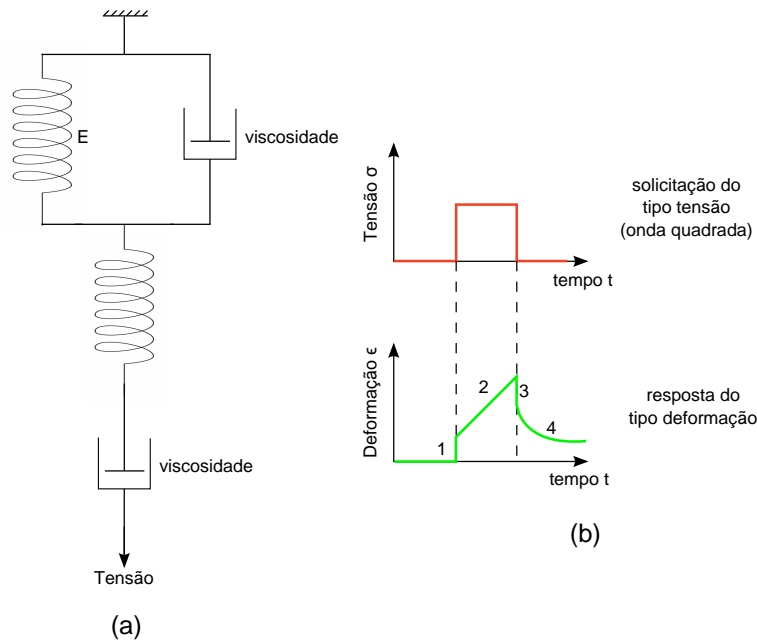


Figure 3.4: (a) Modelo de Maxwell-Kelvin; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ( $\sigma \times t$ ) e da deformação em função do tempo ( $\epsilon \times t$ )

- Região 1 - Resposta instantânea da mola.
- Região 2 - Deformação elástica retardada por dois componentes viscosos.
- Região 3 - Recuperação elástica instantânea da mola.
- Região 4 - Recuperação elástica retardada pelos componentes elásticos.

### 3.1.4 Modelo de Zener

O modelo de *Zener* apresenta uma combinação linear dos modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt, conhecido como o “padrão sólido linear”, fazendo assim, uma descrição mais adequada do comportamento desses materiais do que os outros modelos anteriormente citados. Na figura (3.5) é apresentado o modelo analisado.

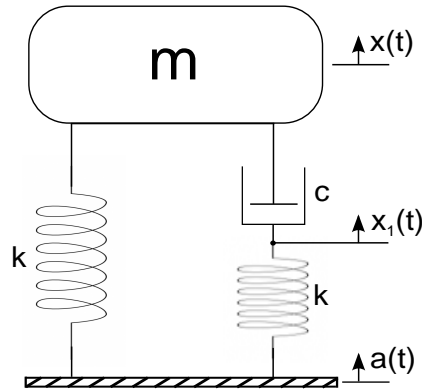


Figure 3.5: Modelo de amortecimento de Zener

De acordo com a segunda Lei de Newton, o equilíbrio de forças é dado por

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (3.24)$$

Assim,

$$m\ddot{x} = -kx - c(\dot{x} - \dot{x}_1) + F_0 \sin(\omega t) \quad (3.25)$$

Obtêm-se

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} - c\dot{x}_1 = +F_0 \sin(\omega t) \quad (3.26)$$

Temos que o coeficiente de amortecimento tem uma velocidade relativa que é dada por

$$c(\dot{x} - \dot{x}_1) = Nkx_1 \quad (3.27)$$

Com isto a equação(3.25) pode ser reescrita como

$$x_1 = -\frac{m}{Nk}\ddot{x} - \frac{k}{Nk}x + \frac{1}{Nk}F_0\sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{m}{Nk}\dot{\ddot{x}} - \frac{\dot{x}}{N} + \frac{1}{Nk}F_0\omega\cos(\omega t) \quad (3.28)$$

Assim, substituindo o valor de  $\dot{x}_1$  segue

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} - c\left[-\frac{m}{Nk}\dot{\ddot{x}} - \frac{\dot{x}}{N} + \frac{1}{Nk}F_0\omega\cos(\omega t)\right] = F_0\sin(\omega t) \quad (3.29)$$

Dessa forma, a equação de movimento do sistema é dada por

$$\frac{cm}{Nk}\dot{\ddot{x}} + m\ddot{x} + c\left(1 + \frac{1}{N}\right)\dot{x} + kx = F_0\sin(\omega t) + \frac{c}{Nk}F_0\omega\cos(\omega t) \quad (3.30)$$

Na figura 3.6 são apresentados resultados do modelo de zener linear com variação de amortecimento de 2 a 7.

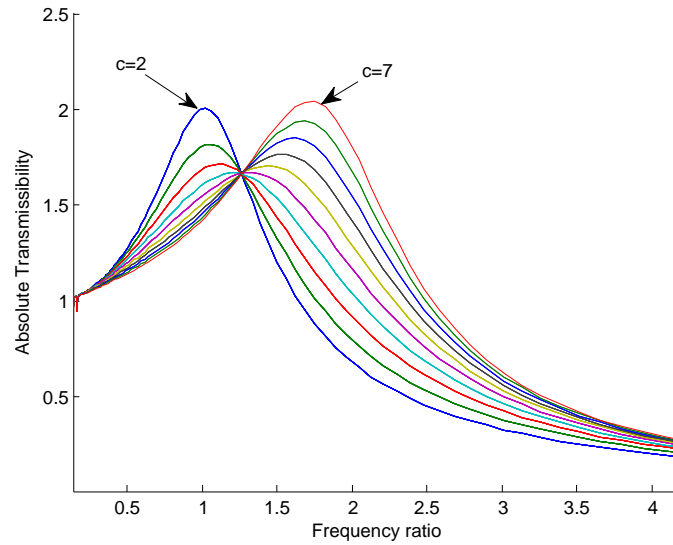


Figure 3.6: Resultados de transmissibilidade pela frequência do modelo de Zener

## Capítulo 4

# Modelagem de sistemas contínuos

Nesta seção são apresentados os métodos utilizados para obtenção de modelos matemáticos para estudo do comportamento dinâmico e influência do amortecimento na estrutura. São apresentados dois modelos, sendo o primeiro desenvolvido pelo Método dos Elementos Espectrais (MEE). Em sequência, Método dos Elementos Finitos (MEF).

### 4.1 Teoria de viga de Euler Bernoulli

Considera-se a formulação de Euler-Bernoulli para vigas finas. Sendo que a equação diferencial parcial que descreve o movimento de flexão de uma viga é dada por Fahy and Walker (2004)

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (4.1)$$

Sendo que  $E$  corresponde ao módulo de elasticidade,  $I$  é o segundo momento de área,  $\rho$  é a densidade do material,  $S$  é a área de seção transversal,  $w(x,t)$  é o deslocamento transversal e  $f(x,t)$  é a representação de força distribuída. Um modelo de viga na condição livre-livre é apresentada na figura(4.1), serão apenas analisados as forças no sentido vertical e os momentos sendo características do movimento de flexão.

Quando as dimensões da seção transversal da estrutura são pequenas quando comparadas ao comprimento, a deformação elástica é primariamente causada pela flexão, podendo-se, então, considerar a viga como uma estrutura de Euler-Bernoulli.

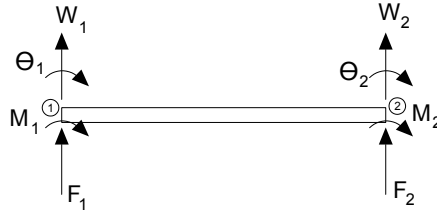


Figure 4.1: Representação de um elemento de viga

O amortecimento é introduzido transformando o Módulo de Young complexo, sendo:

$$E^* = E(1 + j\eta_i) \quad (4.2)$$

Sendo que  $\eta_i$  é o fator de perda da estrutura, materiais viscoelásticos apresentam fator de perda da ordem de 0,1 a 1,0. A solução da equação(4.1) para excitação harmônica é apresentada na equação(4.3) sendo:

$$W(x) = C_R e^{-k_b x} + D_R e^{-j k_b x} + C_L e^{k_b x} + D_L e^{j k_b x} \quad (4.3)$$

Sendo,  $C_R$  e  $D_R$  são as amplitudes de onda do deslocamento na região  $x > 0$  com propagação de ondas direitas,  $C_L$  e  $D_L$  são as amplitudes de onda do deslocamento na região  $x < 0$  com propagação de ondas esquerdas e  $k_b$  é o número de onda (Wave Number), ou seja, uma constante adimensionalizada de comprimento de onda em relação à unidade de comprimento da viga, sendo apresentada abaixo na equação(4.4).

$$k_b = \left( \frac{\rho S}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \omega^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

De acordo com Fahy and Walker (2004) a solução da equação(4.3) pode ser escrita de outra forma além da solução característica típica da equação(4.1). A solução da equação do movimento pode ser escrita em termos do campo de propagação de ondas, mas para uma viga finita é mais conveniente escrevê-la em termos de funções trigonométricas e hiperbólicas, conforme a equação(4.5).

$$W(x) = A \sin(k_b x) + B \cos(k_b x) + C \sinh(k_b x) + D \cosh(k_b x) \quad (4.5)$$

Sendo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $D$  são constantes.

## 4.2 Método dos Elementos Espectrais

Para uma viga infinita com aplicação de força em  $x = 0$  e as condições de contorno são

$$F = 2EIW''' \quad (4.6)$$

Sendo  $F$  é composta pela força de cisalhamento e pela força aplicada, sendo elas iguais

$$EIW''_- = EIW''_+ \quad (4.7)$$

O momento de flexão da força aplicada a esquerda é igual ao momento de flexão da força aplicada a direita, e  $W_-$  e  $W_+$  são os deslocamentos a esquerda e direita à força aplicada respectivamente.

A resultante das amplitudes das ondas são

$$C_R = C_L = \frac{-F}{4EI k_b^3} \quad (4.8)$$

$$D_R = D_L = \frac{-jF}{4EI k_b^3} \quad (4.9)$$

Para determinar a mobilidade de uma viga considerando  $x \geq 0$ ,  $C_R$  e  $C_L$  são substituídos na equação(4.3) com  $C_L = D_L = 0$  isto é diferenciado a respeito do tempo ( $x j\omega$ ) e rearranjando para obter a mobilidade de transferência temos

$$\frac{\dot{W}(x)}{F} = \frac{-\omega}{4EI k_b^3} (j e^{-k_b x} - e^{-j k_b x}) \quad (4.10)$$

Através da aplicação de condições de limite geométricos e naturais em cada extremidade da viga a impedância e as matrizes de mobilidade pode ser determinadas. A matriz de mobilidade é obtida invertendo a matriz de impedância ou por aplicação de condições de contorno adequadas. Uma unidade de força  $F_1$  é aplicada e aceleração  $\ddot{W}_1$  determinada enquanto  $F_2$ ,  $M_1$  e  $M_2$  são todos ajustados para zero. A matriz de

acelerância é definida por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{W}_1 \\ \ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{W}_2 \\ \ddot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{-(\omega^2)}{(EIK_bN)} \begin{bmatrix} -Q_{11} & -P & Q_{12} & V \\ -P & K_{11} & -V & K_{12} \\ Q_{12} & -V & -Q_{11} & P \\ V & K_{12} & P & K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

São apresentadas no apêndice A as equações dos termos da matriz de aceleração. Analisando a equação(4.5) pelo método analítico temos a equação(4.12).

$$\omega_n = \left( \frac{EI}{\rho S} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(k_b L)^2}{L^2} \quad (4.12)$$

Sendo:  $\omega_n$  é a frequência natural,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  é o segundo momento de área,  $\rho$  é a densidade do material,  $S$  é a seção de área transversal,  $L$  é o comprimento da seção e  $K_b$  é um valor conforme apresentado na tabela(4.1).

Table 4.1: Raizes de uma viga livre-livre

Modo	1º	2º	3º	4º	5º, 6º...
Valor	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372	$(2n + 1)\pi/2$

Conforme Craig (1981), os quatro primeiros modos de vibrar de uma viga na condição de contorno livre-livre são ilustrados na figura(4.2).

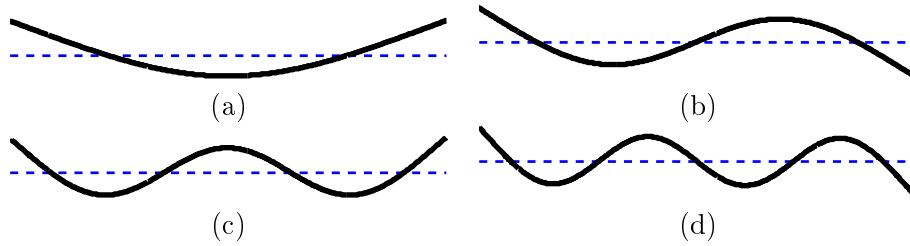


Figure 4.2: Modos de vibrar de uma viga com condição de contorno livre-livre. (a) Primeiro Modo, (b) Segundo Modo, (c) Terceiro Modo, (d) Quarto Modo.

Através da aplicação de condições de limite geométricos e naturais em cada extremidade da viga a impedância e as matrizes de mobilidade pode ser determinadas. Os modelos de elementos espectrais são formulados usando a abordagem variacional. Os modelos convencionais de elementos finitos são também fornecidos para avaliar o

desempenho dos modelos de elementos espectrais.

### 4.3 Método dos Elementos Finitos

A definição moderna do método de elementos finitos pode-se afirmar que é simplesmente uma técnica numérica para a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais parciais. Diferente do modelo anterior de elementos espectrais, o método dos elementos finitos não utiliza funções hiperbólicas e trigonométricas, este método é usada uma aproximação polinomial.

Considerando um elemento de viga uniforme de comprimento  $L$ , densidade de massa  $\rho$ , módulo de elasticidade  $E$ , área da seção transversal  $A$  e momento de inércia  $I$ . Temos que os deslocamentos são dados por

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(t)\nu_i(t) \quad (4.13)$$

Sendo que as funções  $\psi_i(x)$  satisfazem as condições de contorno

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = 1, \psi_1'(0) = \psi_1(L) = \psi_1'(L) = 0 \\ \psi_2'(0) = 1, \psi_2(0) = \psi_2(L) = \psi_2'(L) = 0 \\ \psi_3(0) = 1, \psi_3(0) = \psi_3'(L) = \psi_3'(L) = 0 \\ \psi_4'(0) = 1, \psi_4(0) = \psi_4'(L) = \psi_4(L) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

A solução geral para a equação (4.13) para uma viga uniforme é dado por um polinômio cúbico como segue

$$v(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{x}{L}\right) + c_3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_4 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (4.15)$$

Substituindo a equação (4.14) na equação (4.15) temos

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
\psi_2 &= x - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
\psi_3 &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
\psi_4 &= -L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= \int_0^L EI\psi_i''\psi_j'' dx \\
m_{ij} &= \int_0^L \rho A\psi_i\psi_j dx \\
p_i &= \int_0^L p(x,t)\psi_i dx
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Substituindo  $k_{ij}$  e  $m_{ij}$  na equação (4.15), obtemos

$$k = \left(\frac{EI}{L^3}\right) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{simétrico} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$m = \left(\frac{\rho AL}{420}\right) \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{simétrico} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Nesta dissertação foram utilizadas três diferentes metodologias de elementos finitos para obtenção de resultados, a primeira os resultados são obtidos pelo método da transformada de Fourier, o segundo método os resultados são obtidos pelo método

de Lagrange e pelo princípio de Hamilton e, a terceira metodologia utiliza o software *Calculix*.

#### 4.3.1 Método pela transformada de Fourier

As vigas foram divididas em 21 nós sendo assim 20 elementos retangulares com integração reduzida com as funções de forma, de modo que a equação de movimento para o sistema amortecido pode ser escrita como:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.20)$$

Onde  $\mathbf{m}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{c}$  é a matriz de amortecimento e  $\mathbf{k}$  é a matriz de rigidez. Depois de obtida a matriz de massa e rigidez do sistema, a função de resposta em frequência pode ser calculada em termos dos modos de vibração e frequências naturais.

$$(\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m})\mathbf{X} = 0 \quad (4.21)$$

A equação (4.22) é resolvida para obter os autovalores do sistema (frequências naturais ao quadrado) e autovetores (modos de vibração). Depois de obter as frequências naturais e modos de vibração, é possível calcular a frequência de resposta usando o método da somatória modal descrito por Maia and e Silva (1997):

$$\mathbf{X} = (-\omega^2\mathbf{m} + j\omega\mathbf{c} + \mathbf{k})^{-1}\mathbf{F} \quad (4.22)$$

Onde o amortecimento  $\mathbf{C}$  é expresso pela equação (4.23)

$$\mathbf{c} = \beta\mathbf{k} \quad (4.23)$$

#### 4.3.2 Método por Lagrange e Hamilton

Para exemplificar o método de Lagrange e Hamilton, considere um elemento de viga de duas camadas conforme figura (4.3).

Sendo:  $w(x,t)$  é o deslocamento transversal da viga,  $u_b(x,t)$  é o deslocamento axial da viga de aço,  $u_c(x,t)$  é o deslocamento axial da viga de alumínio,  $h_b$  e  $h_c$  são as espessuras das vigas. Com uma condição de contorno perfeita podemos obter a relação cinemática:

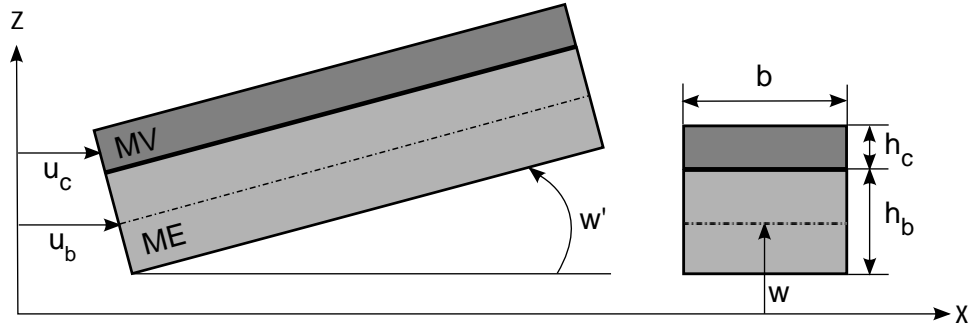


Figure 4.3: Elemento de viga de duas camadas

$$u_c = u_b - \left(\frac{h}{2}\right) \omega' \quad (4.24)$$

Sendo:

$$h = h_b + h_c \quad (4.25)$$

O ( $'$ ) é a derivada parcial em relação ao eixo  $x$ .

Através do princípio de Hamilton, temos as equações de movimento:

$$\int_{t1}^{t2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (4.26)$$

Sendo,  $T$  e  $V$  são respectivamente a energia cinética e a energia potencial,  $W$  é o trabalho virtual, As equações de energia potencial e cinética são dadas por:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L [E_b A_b u_b'^2 + E_b I_b w''^2 + E_c I_c w''^2 + E_b A_b u_c'^2 + F w'^2] dx \quad (4.27)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_b A_b (\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2) + \rho_c A_c (\dot{u}_c^2 + \dot{w}^2)] dx \quad (4.28)$$

Sendo,  $E$ ,  $A$ ,  $I$  e  $\rho$  são respectivamente o módulo de elasticidade, a área da seção transversal, o momento de inércia em torno do eixo e a densidade, isso aplicado para

cada material,  $F$  é a força axial aplicada à viga. E o ponto  $(.)$  é a derivada parcial em relação ao tempo  $(t)$ . Ao eliminar  $u_c$  das equações cinética equação(4.28) e potencial equação(4.27), usando a equação(4.24) temos as seguintes equações respectivamente:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L (EAu_b'^2 + EIw''^2 - 2\beta w''u_b' + Fw'^2)dx \quad (4.29)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A \dot{u}_b^2 + \rho A \dot{w}^2 - 2\alpha \dot{w}' \dot{u}_b + \gamma \dot{w}'^2)dx \quad (4.30)$$

As equações deixam de serem individuais para cada um dos elementos, tornando-se somente uma devido a somatória das variáveis abaixo:

$$EA = E_b A_b + E_c A_c \quad (4.31)$$

$$EI = E_b I_b + E_c I_c + (1/4)E_c A_c h^2 \quad (4.32)$$

$$\rho A = \rho_b A_b + \rho_c A_c \quad (4.33)$$

$$\alpha = (1/2)\rho_c A_c h \quad (4.34)$$

$$\beta = (1/2)E_c A_c h \quad (4.35)$$

$$\gamma = (1/4)\rho_c A_c h^2 \quad (4.36)$$

O trabalho virtual  $\delta W$  é composto pelas forças externas  $p(x,t)$  e  $\tau(x,t)$ , pelas forças de amortecimento viscoso  $c_b \dot{r}_b$  e  $c_c \dot{r}_c$  e pelas forças das condições de contorno  $(N_1, N_2, M_1, M_2, Q_1, Q_2)$  que estão relacionados aos modos de vibrar da viga, sendo assim:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^L p(x,t) \delta w dx + \int_0^L \tau(x,t) \delta u_b dx - \int_0^L \int_{A_b} c_b \dot{r}_b \cdot \delta r_b dA_b dx \\ & - \int_0^L \int_{A_b} c_c \dot{r}_c \cdot \delta r_c dA dx + N_1(t) \delta u_b(0,t) + N_2(t) \delta u_b(L,t) \\ & + M_1(t) \delta w'(0,t) + M_2(t) \delta w'(L,t) + Q_1(t) \delta w(0,t) + Q_2(t) \delta w(L,t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Sendo:

$$r_b = u_b \mathbf{n}_x + w \mathbf{n}_z \quad (4.38)$$

$$r_c = u_c \mathbf{n}_x + w \mathbf{n}_z \quad (4.39)$$

Sendo  $\mathbf{n}_x$  e  $\mathbf{n}_z$  são os vetores nas direções de  $x$  e  $z$ , respectivamente.  $N_i$ ,  $M_i$  e  $Q_i$  sendo ( $i = 1, 2$ ) são as forças e momentos de contorno associados com  $u_b$ ,  $w$  e  $\theta$ , e  $c_b$  e  $c_c$  são os coeficientes de amortecimento viscoso. Com isto, resolvendo a equação(4.37) por partes, sendo  $L$  o comprimento total do viga, temos:

$$\begin{aligned} \delta W = \int_0^L [p(x,t)\delta w + \tau(x,t)\delta u_b - cA\dot{u}_b\delta u_b - cA\dot{w}\delta w + c_4\dot{w}'\delta u_b \\ + c_4\dot{u}_b\delta w'] dx + N_1(t)\delta u_b(0,t) + N_2(t)\delta u_b(L,t) + M_1(t)\delta w'(0,t) \\ + M_2(t)\delta w'(L,t) + Q_1(t)\delta w(0,t) + Q_2(t)\delta w(L,t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sendo:

$$cA = c_b A_b + c_c A_c \quad (4.41)$$

$$c_1 = (1/4)c_c A_c h^2 \quad (4.42)$$

$$c_4 = (1/2)c_c A_c h \quad (4.43)$$

Substituindo a equação(4.40) nas equações(4.29 e 4.30) no principio de Hamilton nos retorna duas equações de movimento

$$\begin{aligned} EIw' + \rho A\ddot{w} + cA\dot{w} = -\alpha\ddot{u}_b' + \beta u'''' + \gamma\ddot{w}'' + c_1\dot{w}'' - c_4\dot{u}_b' + Fw'' + p(x,t) \\ EAu''_b - \rho A\ddot{u}_b - cA\dot{u}_b = -\alpha\ddot{w}' + \beta w'''' - c_4\dot{w}' - \tau(x,t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

E as condições de contorno

E a resultante da força axial  $N$ , da flexão  $M$  e a força transversal  $Q$  estão relacionados com os campos de deslocamento como

$$\begin{aligned}
Q(0,t) &= -Q_1(t) - Fw'(0,t) & \text{ou} & & w(0,t) &= w_1(t) \\
M(0,t) &= -M_1(t) & \text{ou} & & w'(0,t) &= \theta_1(t) \\
N(0,t) &= -N_1(t) & \text{ou} & & u_b(0,t) &= u_1(t) \\
Q(0,t) &= +Q_2(t) - Fw'(0,t) & \text{ou} & & w(L,t) &= w_2(t) \\
M(0,t) &= +M_2(t) & \text{ou} & & w'(L,t) &= \theta_2(t) \\
N(0,t) &= +N_2(t) & \text{ou} & & u_b(L,t) &= u_2(t)
\end{aligned}$$

$$Q(x,t) = -EI_w w''' - \alpha \ddot{u}_b + \beta u_b'' + \gamma \ddot{w}' + c_1 \dot{w}' - c_4 \dot{u}_b \quad (4.45)$$

$$M(x,t) = EI_w w'' - \beta u_b' \quad (4.46)$$

$$N(x,t) = EA u_b' - \beta w'' \quad (4.47)$$

A equação de movimento para a viga é dada por:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_c(t) + \mathbf{f}_d(t) \quad (4.48)$$

Sendo  $\mathbf{m}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{c}$  é a matriz de amortecimento,  $\mathbf{k}$  é a matriz de rigidez,  $\mathbf{f}_c$  são as forças nodais e momentos e  $\mathbf{f}_d$  são as forças externas. Os graus de liberdade do sistema pode ser definido também no domínio do tempo sendo conforme figura(4.4).

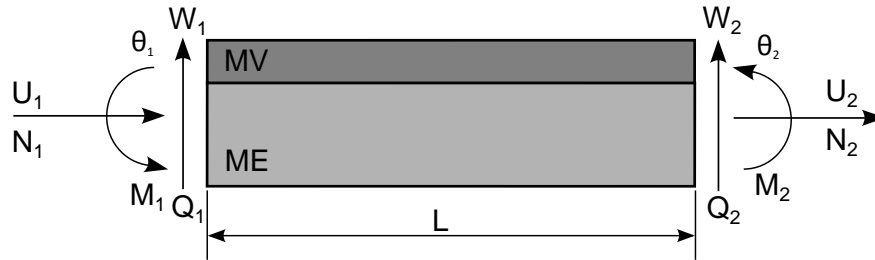


Figure 4.4: Graus de liberdade da viga de duas camadas

Sendo

$$d(t) = \{U_1(t) \ W_1(t) \ \theta_1(t) \ U_2(t) \ W_2(t) \ \theta_2(t)\} \quad (4.49)$$

E as forças nodais e momentos são dados pelo vetor

$$\begin{aligned} f_c(t) &= \{N_1(t) \quad Q_1(t) \quad M_1(t) \quad N_2(t) \quad Q_2(t) \quad M_2(t)\}^T \\ &= \{-N(0,t) \quad -Q(0,t) \quad -Fw'(0,t) \quad -M(0,t) \\ &\quad N(L,t) \quad -Q(L,t) \quad -Fw'(L,t) \quad -M(L,t)\}^T \end{aligned} \quad (4.50)$$

Sendo (0,t) o ponto inicial do elemento e (L,t) o comprimento total de cada elemento.

$$f_d(t) = \int_0^L [p(x,t)\mathbf{N}_w^T(x) + \tau(x,t)\mathbf{N}_u^T(x)]dx \quad (4.51)$$

Os deslocamentos são assumidos como:

$$u_b(x,t) = \mathbf{N}_u(x)\mathbf{d}(t) \quad (4.52)$$

$$w(x,t) = \mathbf{N}_w(x)\mathbf{d}(t) \quad (4.53)$$

Sendo

$$\mathbf{N}_u(x) = [N_{u1}(x) \quad 0 \quad 0 \quad N_{u2}(x) \quad 0 \quad 0] \quad (4.54)$$

$$\mathbf{N}_w(x) = [0 \quad N_{w1}(x) \quad N_{\theta1}(x) \quad 0 \quad N_{w2}(x) \quad N_{\theta2}(x)] \quad (4.55)$$

Sendo

$$N_{u1}(x) = 1 - (x/L)$$

$$N_{u2}(x) = x/L$$

$$N_{w1}(x) = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3$$

$$N_{w2}(x) = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 \quad (4.56)$$

$$N_{\theta 1}(x) = x[1 - 2(x/L) + (x/L)^2]$$

$$N_{\theta 2}(x) = -x[(x/L) - (x/L)^2]$$

Para as análises numéricas foram aplicadas as equações abaixo. As vigas foram divididas em 21 nós sendo assim 20 elementos retangulares com integração reduzida com as funções de forma.

Conforme a equação de movimento apresentada anteriormente, matriz de massa é definida conforme abaixo

$$m = \int_0^L [\rho A(N_w^T N_w + N_u^T N_u) - \alpha(N_w'^T N_u + N_u^T N_w') + \gamma N_w'^T N_w'] dx$$

Suprimindo os termos relacionados as condições de contorno, a matriz de massa  $\mathbf{m}$  é apresentada abaixo

$$m = m_{\rho A} - m_{\alpha} + m_{\gamma} \quad (4.57)$$

A matriz de amortecimento e seus respectivos termos de condições de contorno são apresentados abaixo

$$c = \int_0^L [cA(N_w^T N_w + N_u^T N_u) + c_1 N_w'^T N_w' - c_4(N_w'^T N_u + N_u^T N_w')] dx$$

Suprimindo os termos relacionados as condições de contorno da equação de amortecimento a matriz  $\mathbf{c}$  é definida como:

$$c = c_{cA} + c_{c1} - c_{c4} \quad (4.58)$$

A matriz de rigidez do sistema é dada através da equação abaixo

$$k = \int_0^L [EAN_u'^T N_u' + EIN_w''^T N_w'' - \beta(N_w''^T N_u' + N_u^T N_w'') + FN_w'^T N_w'] dx$$

Suprimindo os termos relacionados as condições de contorno, temos a matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  sendo:

$$k = k_{EA} + k_{EI} - k_{\beta} + k_F \quad (4.59)$$

### 4.3.3 Método de elementos finitos utilizando os softwares *Calculix* e *Gmsh*

Software desenvolvido por uma equipe de entusiastas, funcionários da empresa MTU de Munique, Alemanha, fabricante de motores aeronáuticos, que concedeu o direito de publicação do software e atualmente encontra-se na versão 2.5. Este outro método adotado para obtenção de resultados e concretizar a validação experimental, é através do software *Calculix*, que é um processador de elementos finitos.

Para gerar a malha da viga estudada, é utilizado o software *Gmsh*, que cria a malha através de linhas e pontos. Software originalmente desenvolvido em 1997 por Christophe Geuzaine e Jean-Francois Remacle e que nesta dissertação foi utilizada a versão 2.8.2. Trata-se de um gerador 3D baseado em elementos finitos para pré e pós-processamento. Seu objetivo é fornecer uma leve, rápida e fácil ferramenta de entrosamento com a entrada paramétrica e capacidades avançadas de visualização. *Gmsh* é construído por quatro módulos:

- Definição de geometria,
- Definição de malha,
- Módulo solver e
- Módulo de pós-processamento.

A especificação de qualquer entrada para estes módulos é feito de forma interativa utilizando a interface gráfica do usuário ou em arquivos de texto ASCII usando a linguagem de script *Gmsh* própria. Por tratar-se de um software livre é uma opção para utilização de simulações baseadas em MEF bastante interessante para solução de problemas físicos.

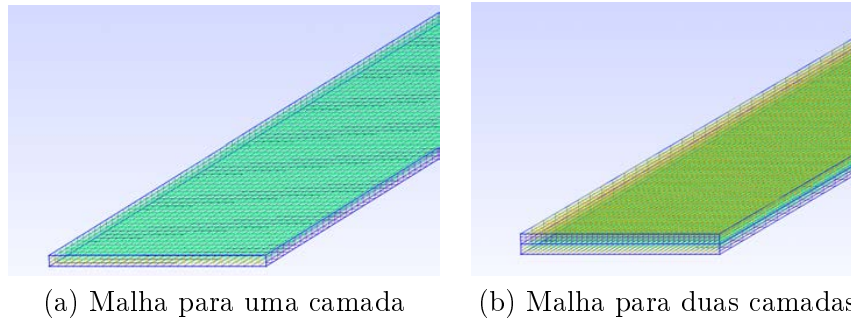


Figure 4.5: Malhas de vigas com diferentes camadas pelo software *Gmsh*

Conforme Figura 4.5, para cada viga implementada no software *Gmsh* foram discretizadas da seguinte forma:

- 12.963 elementos para a viga de aço,
- 25.926 elementos para a viga com suas camadas, sendo elas, aço e material viscoelástico.

Com a malha e a quantidade de elementos das vigas definidas, é implementado no software *Calculix* para obter as frequências naturais, cada elemento gerado consta 8 nós como apresentado na figura(4.6)

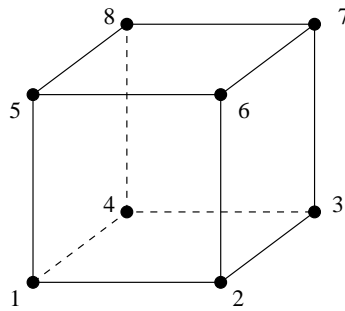


Figure 4.6: Elemento *C3D8R* (8 nós)

Os dados de entrada utilizados para modelar as vigas no programa *Calculix* foram Para a camadas metálicas (Aço) temos

- tipo de elemento C3D8R
- características do material (Aço)

Para as camadas de material viscoelástico temos

- tipo de elemento C3D8R
- características do material (Viscoelástico)

Através do *Calculix* é possível visualizar os três primeiros modos de vibrar na flexão que são apresentados na figura(4.7)

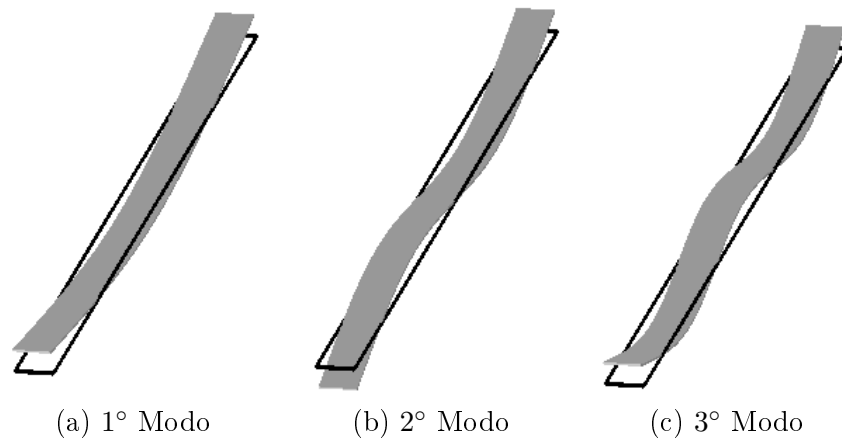


Figure 4.7: Três primeiros modos de vibrar na flexão

#### 4.4 Formas alternativas da FRF

A Função de Resposta em Frequência (FRF) é dada quando os dados que estão no domínio do tempo são transformados para o domínio da frequência usando a transformada de Fourier. Nota-se que existem picos nesta FRF que ocorrem nas frequências naturais do sistema, ou seja, estes picos ocorrem exatamente nas frequências que correspondem a parte do diagrama temporal onde foi observado ter um máximo na resposta, devido a excitação de entrada representada pela força  $F$ . Em contra ponto,

os picos invertidos são denominados de anti-ressonâncias e apresentam um comportamento importante que é uma mudança de fase justamente como aquelas associadas às ressonâncias.

Comumente, a forma de se apresentar a FRF, que é um caso particular da Função de Transferência é dada por

$$H(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \quad (4.60)$$

Sabendo que  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  e  $\xi = c/(2m\omega_n)$ , temos que a equação (4.60) é reescrita da seguinte forma

$$H(\omega) = \frac{1/m}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_n\omega} \quad (4.61)$$

Dessa forma, a equação (4.61) nos fornece a FRF para um grau de liberdade. De maneira análoga tem-se a equação (4.62) que representa a solução para vários graus de liberdade de um determinado sistema.

$$H(\omega) = \frac{1/m}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\eta\omega_n^2} \quad (4.62)$$

Sendo  $\eta = \frac{d}{k}$  denominado como fator de perda.

Geralmente, a partir do movimento pode-se medir a vibração, com isto, a FRF pode ser apresentada em função do deslocamento, velocidade ou aceleração, ou seja,

**Acelerância:**  $A(\omega) = \text{Aceleração} / \text{Força}$ ;

**Mobilidade:**  $Y(\omega) = \text{Velocidade} / \text{Força}$ ;

**Receptância:**  $\alpha(\omega) = \text{Deslocamento} / \text{Força}$ .

São diferentes os efeitos que cada um dos termos de um sistema sendo eles, massa, amortecimento e rigidez.

Na figura(4.8(a)) considerando o amortecimento( $c$ )=0.2 e a rigidez( $k$ )=1.0, ao diminuir

a massa do sistema irá aumentar a capacidade do sistema para responder rapidamente aos sinais de comando. O sistema com menos massa oferece uma maior frequência natural e fator de amortecimento no entanto, o sistema de baixa massa tem a maior amplitude em frequências superiores à frequência de pico.

Na figura (4.8(b)) considerando a massa( $m$ )=1.0 e a rigidez( $k$ )=1.0 ao aumentar o amortecimento do sistema faz uma melhoria dramática na resposta do sistema perto de sua frequência natural. mostra como ao aumentar o amortecimento reduz a amplificação de ressonância do sistema.

Na figura (4.8(c)) considerando a massa( $m$ )=1.0 e o amortecimento( $c$ )=0.2 aumentando a rigidez aumenta a frequência natural e reduz deslocamentos de vibração para uma dada força de entrada. O aumento da rigidez de um sistema é sempre desejável, mas o ruído pode ser agravado pela adição de rigidez (porque o aumento da rigidez reduz o fator de amortecimento).

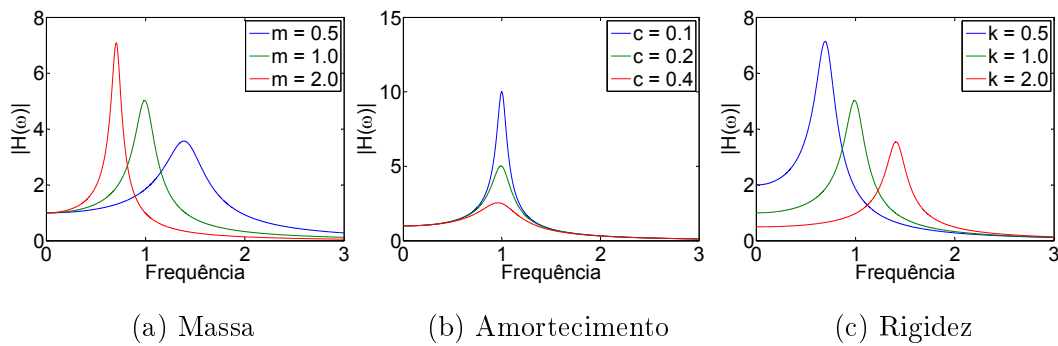


Figure 4.8: Influência dos termos massa (**m**), rigidez (**k**) e amortecimento (**c**)

Em resumo, a rigidez da maioria das estruturas deve ser maximizado para melhorar a precisão e a massa deve ser minimizada para reduzir o esforço do controlador e melhorar a resposta de frequência e fator de amortecimento. O amortecimento deve estar presente para atenuar vibrações e compensar a rigidez adicionada

## Capítulo 5

# Validação experimental

Este capítulo aborda a relação dos materiais e equipamentos utilizados experimentalmente, propriedades dos corpos de prova (CDPs), metodologia dos ensaios e validação das propriedades dos materiais.

Os materiais e equipamentos necessários à realização dos procedimentos experimentais propostos, fez-se necessária utilização de:

- 04 vigas de teste conforme arranjos pré-determinados;
- 01 Martelo de Teste de Força/Impulso PCB Modelo ICP 086C03 com tampa vermelha de impacto suave (vide Anexo);
- 01 Acelerômetro Piezoelétrico PCB Modelo ICP 352C33 (vide Anexo);
- 01 Módulo de Aquisição de Sinal Dinâmico Modelo NI PXIe-1078 (vide Anexo);
- 01 Monitor PL1700
- Software LabVIEW 2013 Professional Development System.

## 5.1 Vigas dos ensaios experimentais

As vigas metálicas foram confeccionadas em aço inoxidável austenítico, da Aperam/Acesita, conforme padrão AISI 304 ASTM A240, com dimensões de 24x400mm.

Os materiais viscoelásticos utilizados para a análise experimental deste trabalho foram fitas dupla-face da série Fixa Forte do fabricante 3M-Scotch.



Figure 5.1: Fitas usadas no experimento, da direita para esquerda, Fita 113, Fita 4411 e Fita VHB 4910.

Abaixo, na figura(5.2) são apresentadas as vigas completas, prontas para as análises experimentais.

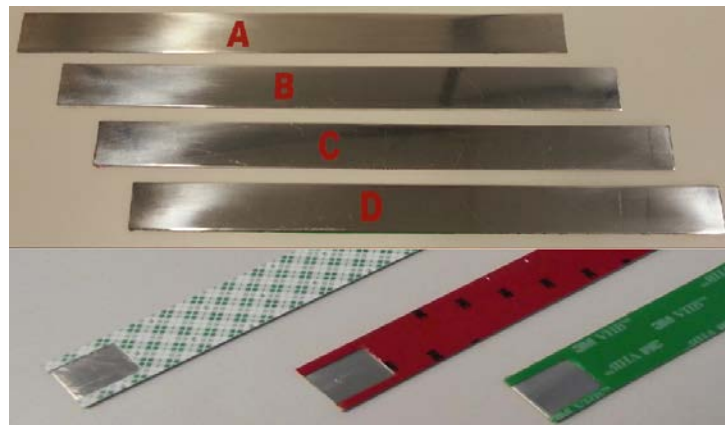


Figure 5.2: Vigas prontas para realização dos ensaios. Acima vigas com marcação e abaixo, detalhe da extremidade livre das vigas B, C e D para fixação

Para início do procedimento experimental, a construção física das vigas foi idealizada conforme ilustrado na figura(5.3).

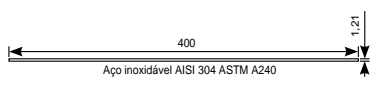
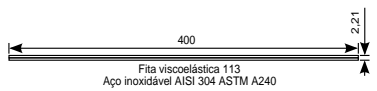
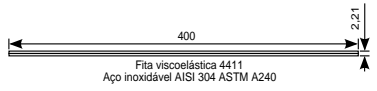
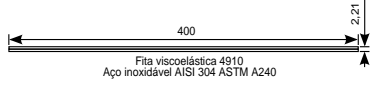
	Viga A	
	Viga B	Camada sup = Viscoelástica Camada inf = Aço
	Viga C	Camada sup = Viscoelástica Camada inf = Aço
	Viga D	Camada sup = Fita Viscoelástica Camada inf = Aço

Figure 5.3: Vigas prontas para realização dos ensaios. Acima vigas com marcação e abaixo, detalhe da extremidade livre das vigas B, C e D para fixação

Abaixo são apresentadas as propriedades geométricas e as propriedades do material das quais serão adotadas nos modelos numéricos, as propriedades são dadas na tabela(5.1):

Table 5.1: Propriedades do material e propriedades geométricas as vigas metálicas

Propriedade	Valor	Unidade (SI)
Comprimento (L)	0.40	m
Largura (b)	$24 \times 10^{-3}$	m
Espessura (h)	$1.21 \times 10^{-3}$	m
Seção da área transversal (S)	$29.04 \times 10^{-6}$	m <sup>2</sup>
Segundo momento de área	$1.39392 \times 10^{-9}$	m <sup>4</sup>
Densidade ( $\rho$ )	7850	m <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidade (E)	$200 \times 10^9$	Pa

Na tabela(5.2) são apresentados os valores das propriedades do materiais viscoelástico

Table 5.2: Propriedades dos materiais viscoelásticos

Propriedade	Viga (B)	Viga (C)	Viga (D)
Modelo	3M113	3M4411	3M4910
Espessura( $m$ )	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$
Densidade( $kg/m^3$ )	95	234	960
Coefficiente de Poisson	0.5	0.5	0.5
Módulo de Elasticidade(GPa)	$114 \times 10^7$	$109.5 \times 10^7$	$144 \times 10^7$

Para o método dos elementos espectrais, aplicando os valores da tabela(5.1) que são os valores adquiridos a partir de um sistema físico definido em laboratório e aplicando os valores na equação da frequência natural conforme equação(4.12), são obtido os seis primeiros valores de frequência natural da viga na condição livre-livre.

Table 5.3: Frequências naturais de uma viga nas condições livre-livre(Hz)

Modo	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Valor	39.2	108.2	212.1	350.5	523.6	731.3

A figura(5.4) representa a resposta em frequência da viga livre-livre, tem-se os picos do gráfico os respectivos modos de vibrar apresentados anteriormente na tabela(5.3).

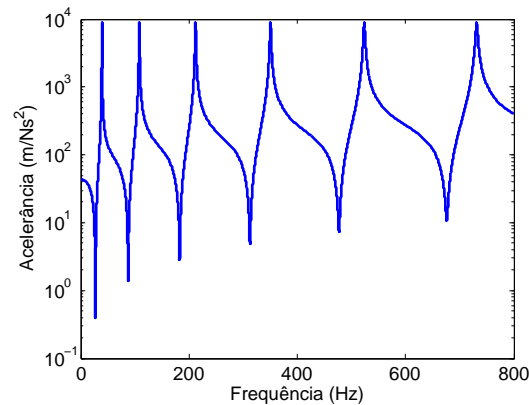


Figure 5.4: Função de Resposta em Frequência para uma viga na condição livre-livre.

## 5.2 Ensaio experimental

A rotina experimental é descrita pela figura(5.5), e nela são apresentados os itens necessários para as análises experimentais.

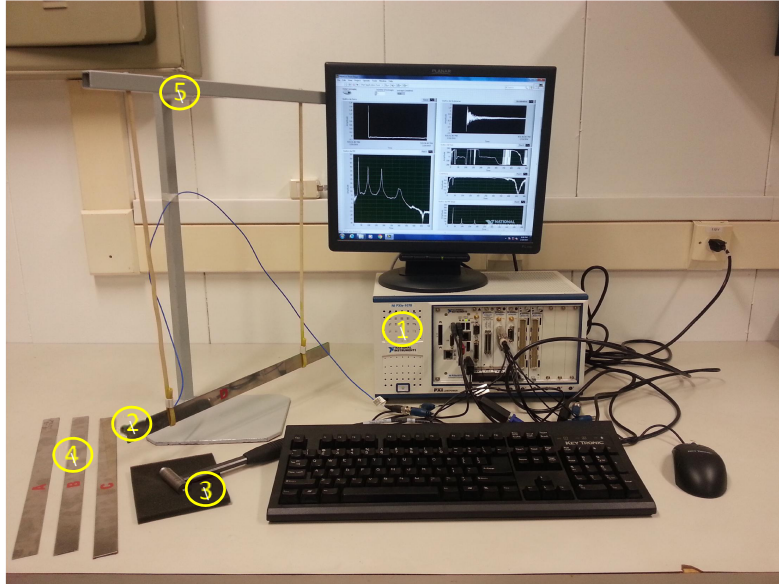


Figure 5.5: Experimento; 1 Módulo de aquisição de dados, 2 Acelerômetro, 3 Martelo de impacto, 4 Vigas, Suporte (livre-livre)

A viga é sustentada pelo suporte(5) através de elásticos para melhor representar a condição livre-livre, o acelerômetro(2) é aplicado em uma extremidade da viga no mesmo ponto onde é aplicada a excitação externa, através do martelo de impacto(3), e através do módulo de aquisição de sinais(1) e com o software LabVIEW 2013 as FRFs foram adquiridas.

## 5.3 Aplicação com LabVIEW 2013

O software LabVIEW 2013 foi utilizado para as análises experimentais para a comparação com os resultados numéricos, tendo como entrada os sinais do martelo instrumentado e o acelerômetro, gráfico de força(a) e aceleração(b) respectivamente e apresentados

na figura(5.6). E na mesma figura, são apresentados a FRF simplificada(c) que seria uma FRF padrão do LabVIEW e por ultimo os estimadores de FRF(d).

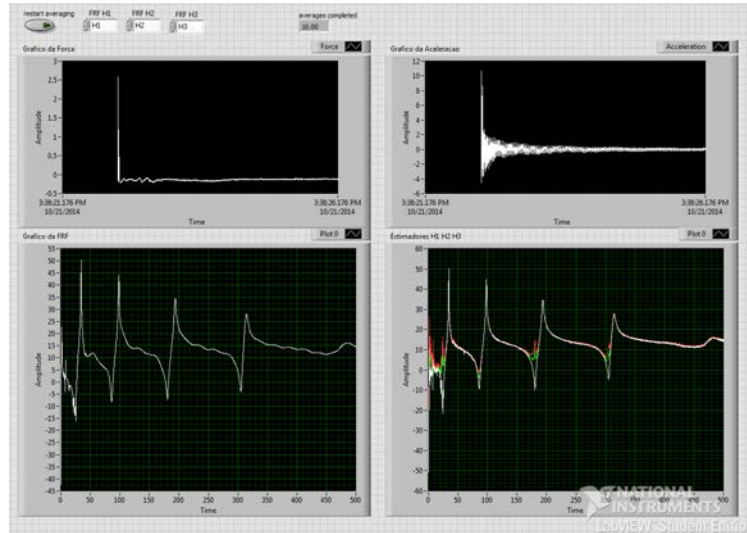


Figure 5.6: Gráficos LabVIEW 2013 - a)Gráfico de força, b)Gráfico de aceleração, c)Gráfico de FRF, d)Gráfico de estimadores

Na figura(5.7) sendo a continuação da figura(5.6), apresenta o gráfico da FRF linear(a), o gráfico de fase(b), a coerência(c), e os três estimadores  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  são apresentados separadamente nos gráficos(d), (e) e (f) respectivamente.

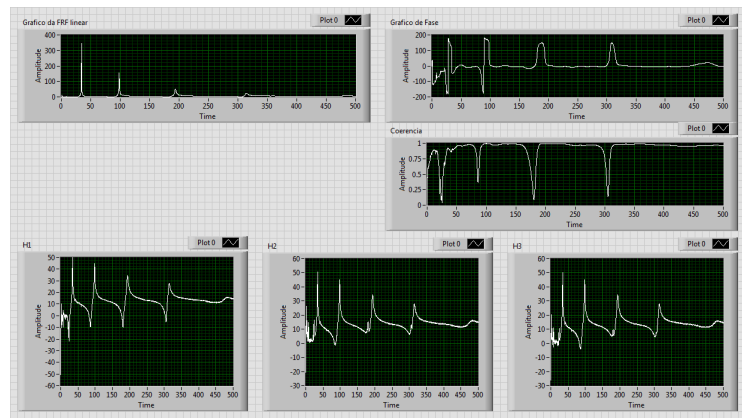


Figure 5.7: Gráficos LabVIEW 2013 - a)Gráfico FRF linear, b)Gráfico de fase, c)Gráfico de coerência, d)Gráfico estimador  $H_1$ , e)Gráfico estimador  $H_2$ , f)Gráfico estimador  $H_3$

Os gráficos apresentados anteriormente são respostas de um programa apresentado



## 5.4 Estimadores $H_S$ , $H_1$ , $H_2$ e $H_3$

Para estimar a FRF em um sistema dinâmico é utilizada funções de densidade espectral calculadas a partir dos sinais de entrada e saída do experimento em questão Bendat and Piersol (1986). Seja  $H(\omega)$  a FRF de um sistema vibratório, e  $X(\omega)$  a entrada e  $Y(\omega)$  a saída no domínio da frequência. É denotado por  $H_S$  o estimador simplificado

$$H_S = \frac{G_{yy}}{G_{xx}} \quad (5.1)$$

Sendo  $G_{yy}$  e  $G_{xx}$  o auto espectro de saída e entrada respectivamente. Para os demais estimadores  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ , a resposta do sistema  $Y(\omega)$ , é dada por:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (5.2)$$

É apresentado na figura(5.9) o modelo de sistema de medição tradicional para descrever uma FRF quando há presença de ruído na entrada e/ou saída do sistema, que descreve a equação(5.2).

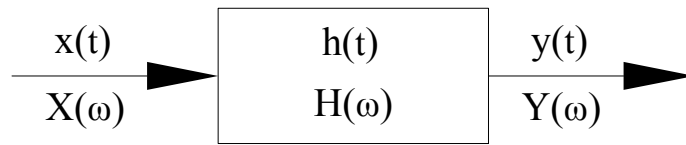


Figure 5.9: Definição de função de transferência

Sendo assim, possível obter dois diferentes valores de estimadores da FRF do sistema em questão, sendo definidos na literatura como  $H_1$  e  $H_2$  Bendat and Piersol (1986). Por exemplo, ao multiplicar ambos os lados da equação acima pelo complexo conjugado da entrada,  $X^*(\omega)$ :

$$X^*(\omega)Y(\omega) = H(\omega)X^*(\omega)X(\omega) \quad (5.3)$$

Usando o operador esperança, que é um operador linear e igual a média o aplicando em ambos os lados da equação(5.3), tem-se que:

$$G_{xy} = H_1 G_{xx} \quad (5.4)$$

Sendo,  $G_{xy}$  é a função da densidade espectral cruzada entra a entrada e a saída e  $G_{xx}$  é a função de auto-densidade espectral da entrada. As funções  $G_{xy}$  e  $G_{xx}$  podem ser calculadas através de um processo de médias de várias amostras de sinais ou via Transformada de Fourier Discreta de funções de correlação no domínio do tempo Bendat and Piersol (1986). A técnica  $H_1$  dá o melhor desempenho na presença de ruído para medir anti-ressonâncias, onde a relação sinal-ruído tende a menor.

Se, a equação(5.2) for multiplicada pelo complexo conjugado da saída,  $Y^*(\omega)$  e se aplicado o operador esperança aos dois lados desta equação, é obtido um novo modelo de estimador:

$$Y^*(\omega)Y(\omega) = H(\omega)Y^*(\omega)X(\omega) \quad (5.5)$$

Aplicando o operador linear em ambos os lados da equação(5.5), tem-se que:

$$G_{yy} = H_2 G_{yx} \quad (5.6)$$

Tal que  $G_{yy}$  é a função auto-densidade espectral da saída e  $G_{yx}$  é a função espectral cruzada entre a saída e a entrada. A técnica  $H_2$  proporciona o melhor desempenho, na presença de ruído para a medição de ressonâncias, onde a relação sinal ruído tende a ser maior. Em um ambiente livre de ruídos. A escolha do tipo de estimador a ser usado na identificação depende da presença do ruído na entrada ou saída do sistema. Bendat and Piersol (1986) demonstram que para um ruído não correlacionado com a entrada e nem com a saída, somado a saída do sistema, o estimador  $H_2$  é dado por:

$$H_2 = H + \frac{G_{nn}}{G_{yx}} \quad (5.7)$$

Sendo,  $H$  representa o valor exato da FRF do sistema e  $G_{nn}$  é a função auto-densidade espectral do ruído aditivo a saída. Sendo assim, de acordo com a equação(5.7), para ruído não correlacionado atuante na saída o melhor estimador é o  $H_1$ , pois  $H_2$  fornece uma função superestimada de  $H$  somada a parcela  $G_{nn}/G_{yx}$ . Considerando agora

um ruído não correlacionado somado à entrada:

$$H_1 = \frac{H}{1 + \frac{G_{mm}}{G_{xx}}} \quad (5.8)$$

Sendo  $H_1$  um estimador do limite inferior e  $H_2$  o estimador limite superior, pode-se calcular a média ou a média geométrica de  $H_1$  e  $H_2$  para obter outra estimativa de FRF. A expressão para a FRF,  $H_3$ , o qual é a média geométrica de  $H_1$  e  $H_2$  e situa-se entre a parte superior e um limite inferior da estimada FRF, é dada como:

$$H_3 = H(\omega) \sqrt{\left(1 + \frac{G_{mm}}{G_{xx}}\right) \left(1 + \frac{G_{nn}}{G_{yx}}\right)} \quad (5.9)$$

## 5.5 Análise de estimadores

Para a análise experimental, foi selecionado um dos estimadores apresentados na figura(5.10) fica claro a diferença entre os estimadores  $H_S$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  para fazer esta conclusão sobre qual estimador utilizar para as rotinas de análise do projeto, foi utilizada a Viga A para extrair as FRF's para comparação entre os estimadores.

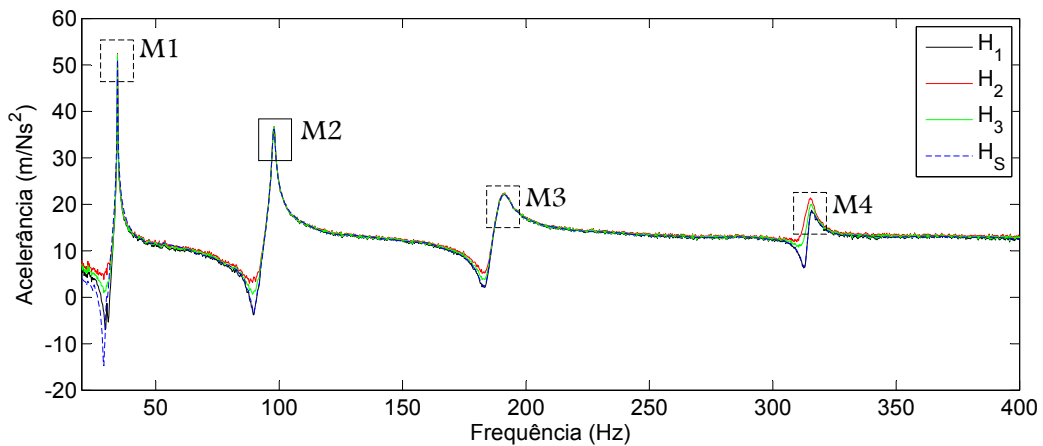


Figure 5.10: Estimadores  $H_S$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$

Sendo M1, M2, M3 e M4 os modos de vibrar estrutural com os diferentes estimadores sendo a análise de comparação realizada na Viga A.

O  $H_S$  é o estimador simplificado e é um padrão do software LabVIEW que é apresentado quando não é definido nenhum estimador, automaticamente o software utiliza o ES, há uma pequena diferença entre o estimador  $H_S$  e o estimador  $H_1$  na tabela(5.4) abaixo são apresentados os valores máximos das amplitudes nas mesmas frequências nos diferentes modos de vibrar da Viga A.

Table 5.4: Valores da FRF com estimadores

	$H_S$ ( $m/Ns^2$ )	$H_1$ ( $m/Ns^2$ )	$H_2$ ( $m/Ns^2$ )	$H_3$ ( $m/Ns^2$ )	<b>Frequência (Hz)</b>
Modo 1	51,18	51,98	52,55	52,27	34,5
Modo 2	36,18	36,54	36,74	36,64	98
Modo 3	22,11	22,21	22,48	22,35	191,5
Modo 4	18,42	18,75	21,42	20,04	315 - 316

Sendo assim, para melhor visualização e comparação dos valores entre os estimadores da tabela(5.4) que foram obtidos através de análises experimentais, na figura(5.11) é apresentados os gráficos dos quatro primeiros modos de vibrar apresentados na figura(5.10).

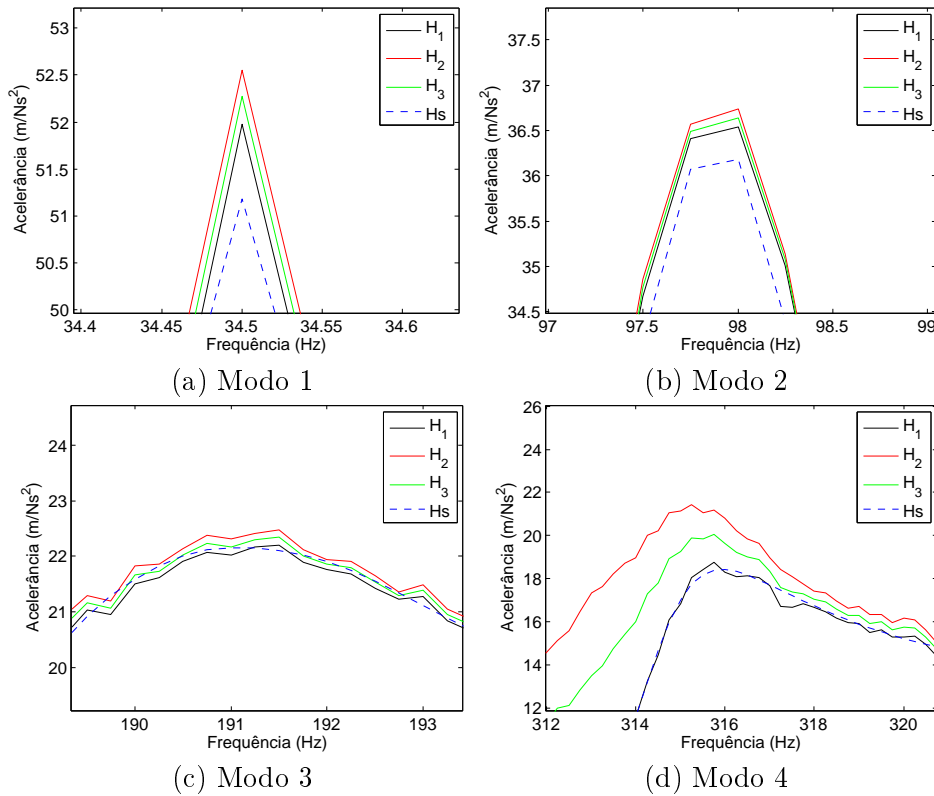


Figure 5.11: Comparações entre os estimadores  $H_S$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$

Analisando os resultados apresentados na figura(5.11), utilizando o estimador  $H_1$  que é um estimador que tem um melhor desempenho no ruído para medir anti-ressonâncias(entrada), onde a relação sinal-ruído tende a ser menor e  $H_2$  é o estimador que fornece o melhor desempenho na presença de medição de ruído de ressonâncias(saída), onde a relação sinal-ruído tende a ser mais elevado. Sendo assim, o estimador  $H_3$  foi escolhido, pois, trata-se da média geométrica dos estimadores  $H_1$  e  $H_2$ .

Após definido o estimador para realizar as análises, é obtidas as  $FRFs$  das vigas (A, B , C e D), pode-se perceber a variação distinta de amplitudes de vibração e pontos de pico bem definidos, indicando os três modos de vibração das vigas em flexão. Os valores das frequências naturais obtidos pelo experimento e os modelos numéricos para cada vigas. A figura(5.12) representa os valores da  $FRFs$  adquiridos via experimento.

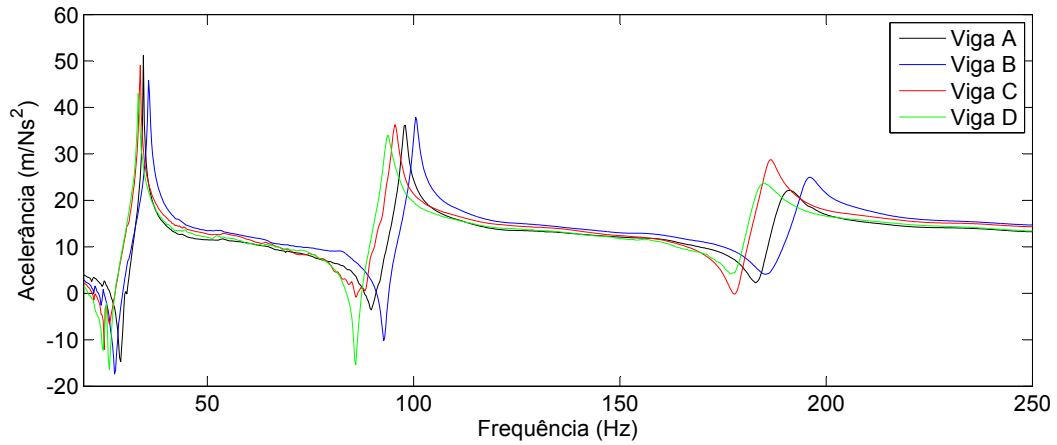


Figure 5.12: Resultados experimentais para as vigas A, B, C e D

## 5.6 Resultados em função da frequência

Para obtenção dos resultados, foram analisados quatro métodos numéricos para a comparação com a análise experimental, sendo eles: MEF (método dos elementos finitos) utilizando um amortecimento descrito por  $\beta$  que é um multiplicador da rigidez  $k$  do sistema, em seguida, o MEE (método dos elementos espectrais) onde o amortecimento é dado pelo método de *Young* complexo, outras duas análises foram feitas através de modelagem por elementos finitos, uma usando o software *MatLab* através do MLH (Método de Lagrange e Hamilton), e outra através do software *Calculix*.

### 5.6.1 Viga A

Para a Viga A que é composta apenas por uma camada de material metálico(aço inox), serão apresentados os resultados para os diferentes métodos adotado.

Os primeiros resultados obtidos através do MEE e MEF são apresentados na figura(5.13)

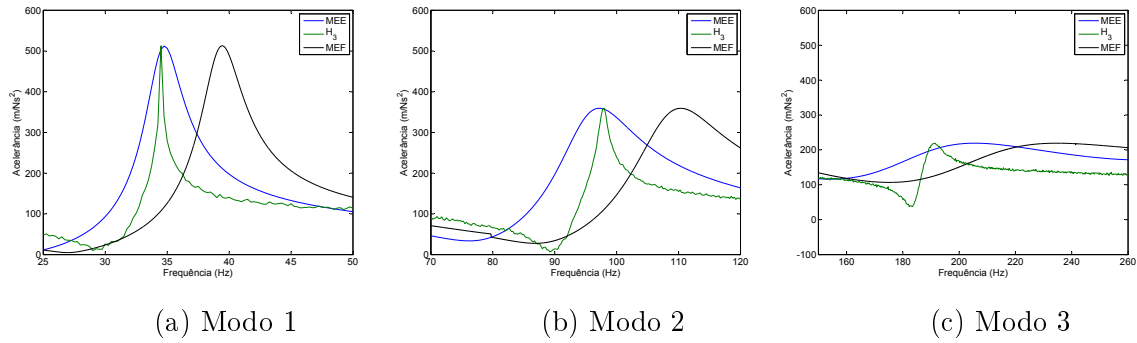


Figure 5.13: Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga A.

Sendo necessário a aplicação dos valores de amortecimento conforme tabela(5.5) para atenuação da amplitude da resposta

Table 5.5: Valores de  $\eta$  e  $\beta$  para Viga A

Modos	1°	2°	3°
$\eta$	0,0869	0,1329	0,3441
$\beta$	$35,1 \cdot 10^{-5}$	$19,4 \cdot 10^{-5}$	$25,1 \cdot 10^{-5}$

Assim, os valore em função da frequência para a Viga A é apresentado na tabela(5.6)

Table 5.6: Resultados por elementos expectrais, experimental e elementos finitos para Viga A

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
MEE	34,75	97,25	205,8
Experimental	34,5	98,0	191,5
MEF	39,42	110,5	235,2

Para a obtenção das respostas em função da frequência através do MLH com uma matriz de amortecimento definida é apresentada na figura(5.14)

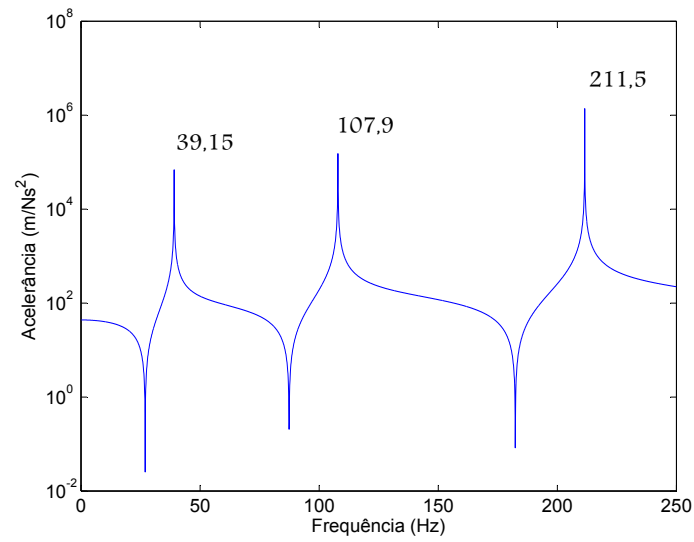


Figure 5.14: Resultado da FRF pelo MLH para Viga A

Através do software *Calculix* tem-se os valores conforme tabela(5.7)

Table 5.7: Resultado através do software *Calculix* para Viga A

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Calculix	38,53	106,38	208,76

### 5.6.2 Viga B

Para a Viga B que é composta por duas camadas sendo uma de material metálico(aço inox), e outra por material viscoelástico, serão apresentados os resultados para os diferentes métodos adotado.

Os primeiros resultados obtidos através do MEE e MEF são apresentados na figura(5.15)

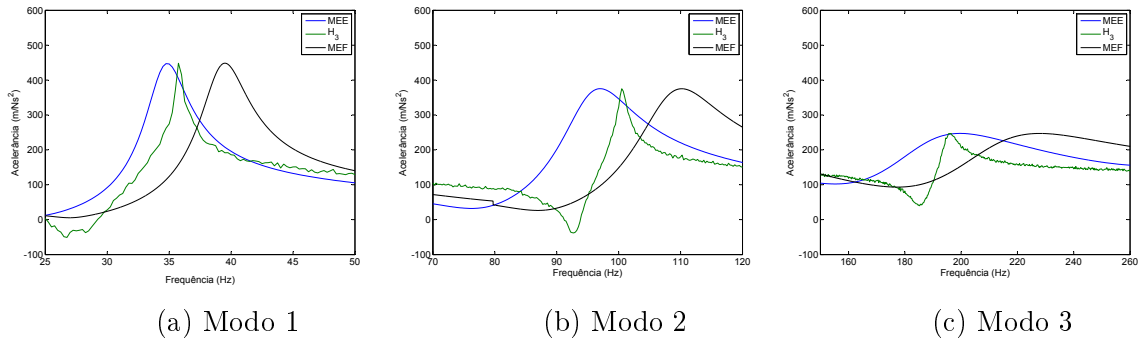


Figure 5.15: Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga B.

Sendo necessário a aplicação dos valores de amortecimento conforme tabela(5.8) para atenuação da amplitude da resposta

Table 5.8: Valores de  $\eta$  e  $\beta$  para Viga B

Modos	1°	2°	3°
$\eta$	0,09973	0,1263	0,2620
$\beta$	$40,27 \cdot 10^{-5}$	$18,47 \cdot 10^{-5}$	$19,4 \cdot 10^{-5}$

Assim, os valores em função da frequência para a Viga B é apresentado na tabela(5.9)

Table 5.9: Resultados por elementos espectrais, experimental e elementos finitos para Viga B

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
MEE	34,75	97,0	199,5
Experimental	35,75	100,5	196,3
MEF	39,5	110,2	227,8

Para a obtenção das respostas em função da frequência através do MLH com uma matriz de amortecimento definida é apresentada na figura(5.16)

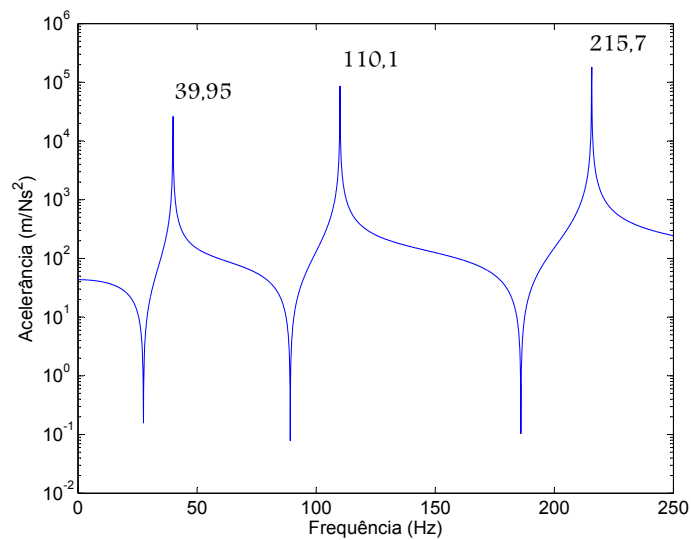


Figure 5.16: Resultado da FRF pelo MLH para Viga B

Através do software *Calculix* tem-se os valores conforme tabela(5.10)

Table 5.10: Resultado através do software *Calculix* para Viga B

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Calculix	36,3	100,3	197,33

### 5.6.3 Viga C

Os primeiros resultados obtidos através do MEE e MEF são apresentados na figura(5.17)

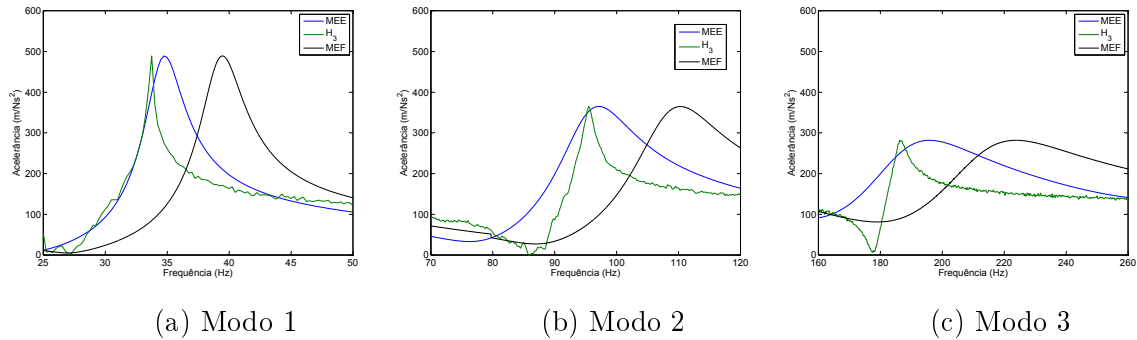


Figure 5.17: Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga C.

Sendo necessário a aplicação dos valores de amortecimento conforme tabela(5.11) para atenuação da amplitude da resposta

Table 5.11: Valores de  $\eta$  e  $\beta$  para Viga B

Modos	1°	2°	3°
$\eta$	0,09124	0,1305	0,2068
$\beta$	$36,85 \cdot 10^{-5}$	$19,07 \cdot 10^{-5}$	$15,45 \cdot 10^{-5}$

Assim, os valore em função da frequência para a Viga C é apresentado na tabela(5.12)

Table 5.12: Resultados por elementos espectrais, experimental e elementos finitos para Viga C

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
MEE	34,75	97,0	195,5
Experimental	33,75	95,5	186,3
MEF	39,45	110,3	223,5

Para a obtenção das respostas em função da frequência através do MLH com uma matriz de amortecimento definida é apresentada na figura(5.18)

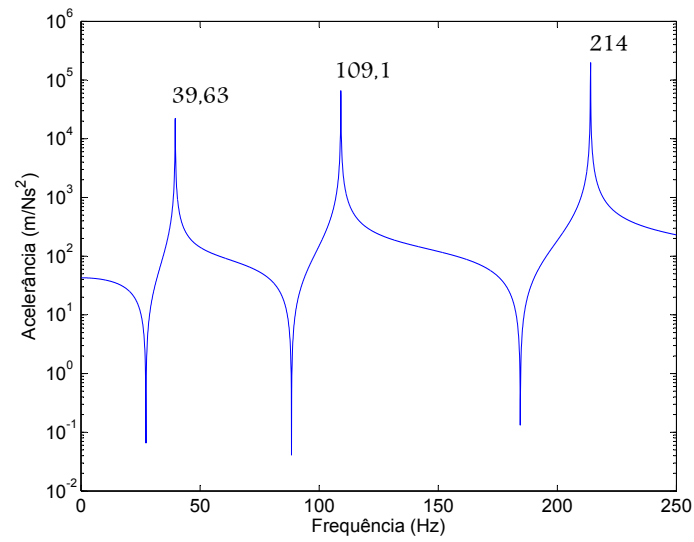


Figure 5.18: Resultado da FRF pelo MLH para Viga C

Através do software *Calculix* tem-se os valores conforme tabela(5.13)

Table 5.13: Resultado através do software *Calculix* para Viga C

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Calculix	34,61	95,63	188,1

### 5.6.4 Viga D

Os primeiros resultados obtidos através do MEE e MEF são apresentados na figura(5.19)

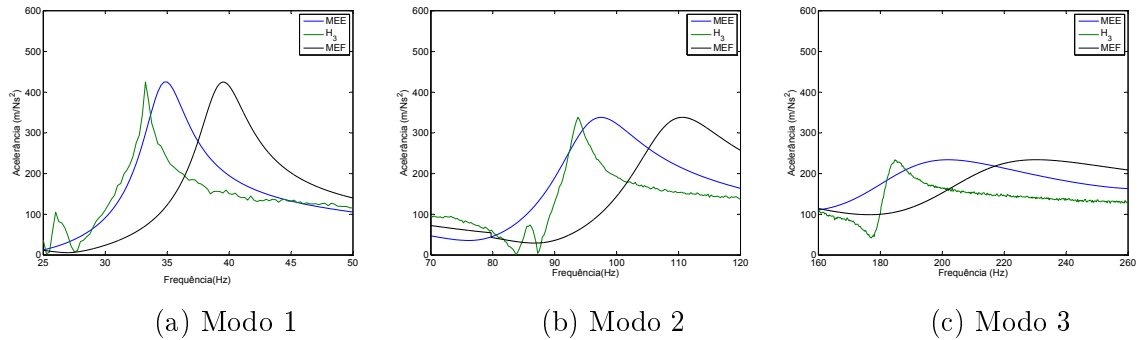


Figure 5.19: Comparação entre MEE, Experimental e MEF para Viga D.

Sendo necessário a aplicação dos valores de amortecimento conforme tabela(5.14) para atenuação da amplitude da resposta

Table 5.14: Valores de  $\eta$  e  $\beta$  para Viga D

Modos	1°	2°	3°
$\eta$	0,1054	0,1429	0,294
$\beta$	$42,57 \cdot 10^{-5}$	$20,80 \cdot 10^{-5}$	$21,6 \cdot 10^{-5}$

Assim, os valore em função da frequência para a Viga D é apresentado na tabela(5.15)

Table 5.15: Resultados por elementos espectrais, experimental e elementos finitos para Viga D

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
MEE	35,0	97,5	201,8
Experimental	33,25	93,75	184,8
MEF	39,53	110,3	229,9

Para a obtenção das respostas em função da frequência através do MLH com uma matriz de amortecimento definida é apresentada na figura(5.20)

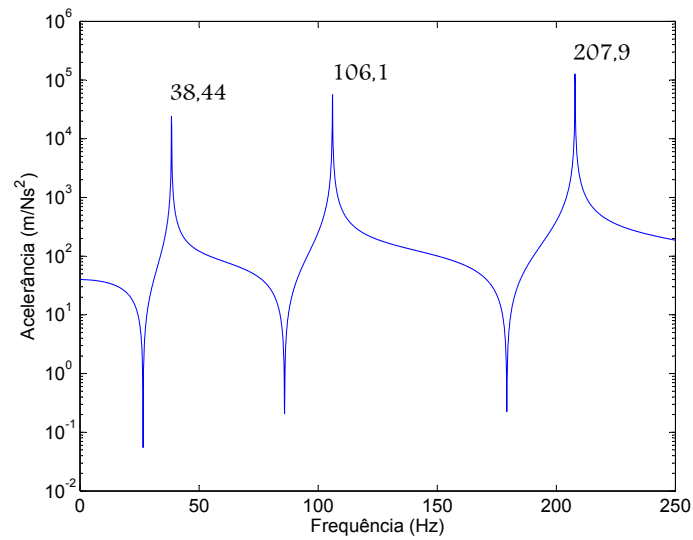


Figure 5.20: Resultado da FRF pelo MLH para Viga D

Através do software *Calculix* tem-se os valores conforme tabela(5.16)

Table 5.16: Resultado através do software *Calculix* para Viga D

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Calculix	34,26	94,67	186,26

Na figura (5.21) são apresentados todos os valores através do método do MEE.

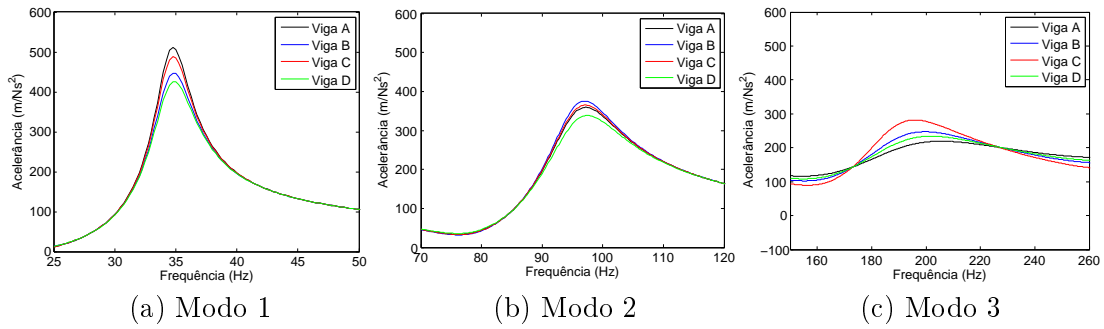


Figure 5.21: Resultados pelo método MEE para as vigas A, B, C e D

Na figura (5.22) são apresentados todos os valores através do método do MEF.

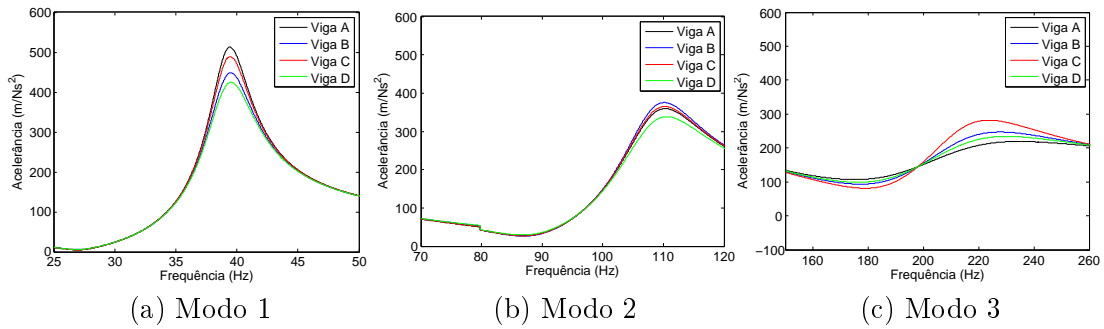


Figure 5.22: Resultados pelo método MEF para as vigas A, B, C e D

A figura (5.23) apresenta todos os valores para as diferentes vigas através do método MLH.

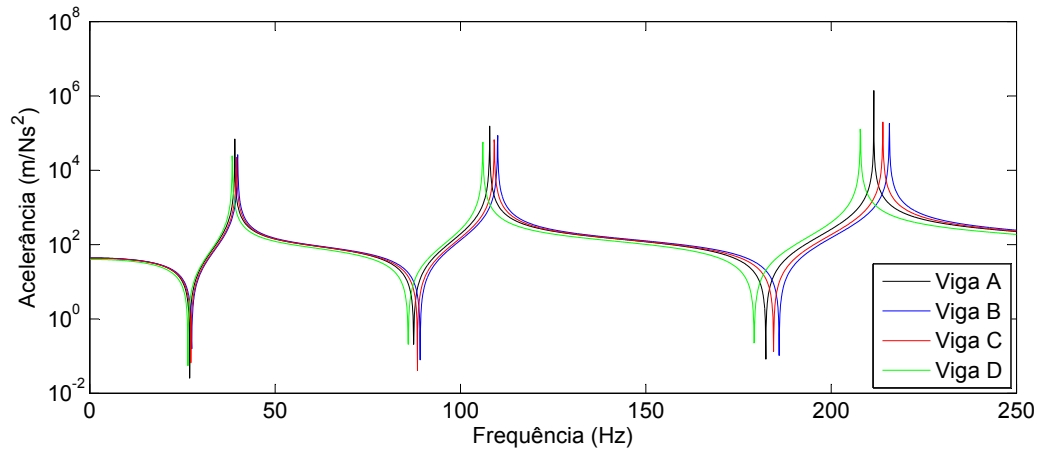


Figure 5.23: Resultados pelo método MLH para as vigas A, B, C e D

As tabelas (5.17, 5.18, 5.19, 5.20) apresentam todos os resultados analisados por todos os métodos e abaixo de cada tabela é apresentado um percentual a respeito da diferença entre os métodos, tendo como base os valores coletados em ensaios experimentais em laboratório.

Table 5.17: Resultados Viga A

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Experimental	34,5	98,0	191,5
MEE	34,75	97,25	205,8
MEF	39,42	110,5	235,2
MLH	39,15	107,9	211,5
Calculix	38,53	106,38	208,76
Percentual	12,49%	11,99%	18,58%

Table 5.18: Resultados Viga B

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Experimental	35,75	100,5	196,3
MEE	34,75	97,0	199,5
MEF	39,5	110,2	227,8
MLH	39,95	110,1	215,7
Calculix	36,3	100,3	197,33
Percentual	13,01%	11,97%	13,82%

Table 5.19: Resultados Viga C

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Experimental	33,75	95,5	186,3
MEE	34,75	97,0	195,5
MEF	39,45	110,3	223,5
MLH	39,63	109,1	214
Calculix	34,61	95,63	188,1
Percentual	14,83%	13,41%	16,64%

Table 5.20: Resultados Viga D

Modos	1° (Hz)	2° (Hz)	3° (Hz)
Experimental	33,25	93,75	184,8
MEE	35,0	97,5	201,8
MEF	39,53	110,3	229,9
MLH	38,44	106,1	207,9
Calculix	34,26	94,67	186,26
Percentual	15,88%	15%	19,61%

## Capítulo 6

# Discussões, conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Neste capítulo serão apresentadas as discussões referentes as análises realizadas nesta dissertação, com isso algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas.

### 6.1 Discussões

Nas análises apresentadas nesta dissertação, não foi considerada a influência da massa do acelerômetro que é de 5,8 gramas sendo uma massa pequena mas que comparado a massa das vigas, tem grande influência nos resultados.

O comportamento esperado nas análises dos resultados experimentais das vigas é uma redução da amplitude de oscilação, com respeito à frequência, especialmente nos valores que representam as frequências naturais que caracterizam os modos de vibração de estruturas. Esta redução deve ser maior em vigas com material viscoelástico, pois isso representa mais amortecimento estrutural. Este comportamento pode ser observado na figura (5.12).

O esperado seria somente a influência do amortecimento nas vigas, sendo diferentes valores de amplitudes mas com o mesmo valor de frequência para cada um dos modos de vibrar para cada viga, sendo assim observa-se uma grande influência da massa e da rigidez onde os mesmos deslocam os picos dos modos de vibrar em relação a frequência no sistema conforme apresentado na figura (4.8).

Considerando-se que as vigas possuem uma pequena massa, cada viga é influenciada tanto pela massa e rigidez do material viscoelástico, os gráficos mostram, assim, os

diferentes valores de modos para cada uma delas. Este fato está relacionada à condição livre - livre que não é totalmente verdadeira, a presença de ruído e precisão do martelo e acelerômetro, são de 15% e 10%, respectivamente.

Como apresentados nas tabelas, a maior diferença percentual entre as vigas foi de 19,61% para a viga D no terceiro modo, trata-se da viga com o complemento viscoelástico de maior densidade, nota-se que os resultados para a mesma são os maiores, dado ao fato da influência da massa, rigidez e amortecimento do material viscoelástico.

Analisando os resultados para as vigas, podemos observar que quando a frequência aumenta os valores de modos de vibrações estão distantes em relação à modelagem adotada (Espectral, Experimental e Elementos Finitos). Este fato reforça a ideia de que a adoção de um problema linear para o modelo simplificado proposto pode, efetivamente, ser válido, especialmente para o primeiro modo de vibração (baixa frequência) e, com o aumento da frequência (outros modos de vibração) esta simplificação torna-se inviável.

## 6.2 Conclusões

Primeiramente foi introduzido um modelo de viga elástica e o mesmo foi comparado aos métodos analíticos, numéricos e experimentais, e foram obtidos bons resultados com esta análise, sendo assim as análises deram continuidade para vigas com adição de materiais viscoelásticos.

Houve a atenuação de amplitude nos modos de vibrar com o uso de materiais viscoelásticos, sendo mais atenuado na viga com material viscoelástico de maior densidade.

Pode-se visualizar que entre os resultados de um mesmo método, houve apenas a atenuação de vibração. Porém quando comparado aos resultados experimentais analisados em laboratório, nota-se não apenas a variação da amplitude mas também a variação da frequência entre os modos. Isso se dá pelo fato da influência da massa e rigidez do material viscoelástico adicionado a viga de aço, sendo que a massa da viga não é dominante no sistema e não há diferença significativa entre as massas da viga e do material viscoelástico.

Como este trabalho é uma análise linear, nota-se que os melhores resultados, os resultados mais próximos entre os métodos se dá em baixa frequência, para frequências mais altas esse método não é ideal, sendo assim a necessidade de aprofundar em análises não lineares.

### 6.3 Sugestões para trabalhos futuros

Por este trabalho apresentar grande potencial de aplicabilidade, como sugestão para trabalhos futuros seguindo a presente linha de pesquisa, sugere-se variações tanto na rotina de experimentos quanto a variação com diferentes materiais algumas sugestões são:

- Variação dos materiais viscoelásticos;
- Variação do material metálico;
- Analisar vigas tipo sanduíche, duas camadas metálicas com uma camada no núcleo com material viscoelástico;
- Verificação da influência da temperatura no comportamento de resposta dos materiais (comportamentos viscoelástico das fitas e elástico do metal) sujeitos a fenômenos vibracionais;
- Realizar as mesmas análises alterando o sinal de entrada, utilizando um shaker para comparação experimental;
- Considerar modelos analíticos e numéricos não lineares para a comparação com as análises experimentais;

# Bibliografia

- Aseka, E. H. (2008). Sistemas concentrados e distribuídos com amortecimento viscoelástico, utilizando a base gerada pela resposta impulso.
- Atanackovic, T. M., Janev, M., Oparnica, L., Pilipovic, S., and Zorica, D. (2015). Space–time fractional zener wave equation. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 471, page 20140614. The Royal Society.
- Bendat, J. S. and Piersol, A. G. (1986). Decomposition of wave forces into linear and non-linear components. *Journal of Sound and Vibration*, 106(3):391–408.
- Blais, J.-F., Cimmino, M., Ross, A., and Granger, D. (2009). Suppression of time aliasing in the solution of the equations of motion of an impacted beam with partial constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3):870–882.
- Cajic, M. S., Lazarevic, M. P., and Sekara, T. B. (2014). Robotic system with viscoelastic element modeled via fractional zener model. In *Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA), 2014 International Conference on*, pages 1–6. IEEE.
- Campi, F. and Monetto, I. (2013). Analytical solutions of two-layer beams with inter-layer slip and bi-linear interface law. *International Journal of Solids and Structures*, 50(5):687–698.
- Cooke, G. M. (2004). Stability of lightweight structural sandwich panels exposed to fire. *Fire and materials*, 28(2-4):299–308.
- Craig, R. R. (1981). *Structural dynamics: an introduction to computer methods*, volume 40. Wiley New York.
- Davies, J. M. (2008). *Lightweight sandwich construction*. John Wiley & Sons.

- De Haro Silva, L., Santade, F., Gonçalves, P. J. P., and Sousa, E. A. C. (2014a). Análise dinâmica por elementos finitos para diferentes modelos de vigas com camada de amortecimento viscoelástico. *Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - Conem*.
- De Haro Silva, L., Santade, F., Gonçalves, P. J. P., and Sousa, E. A. C. (2014b). Dynamic analysis for different finite element models of beams with viscoelastic damping layer. *IX International Conference on Structural Dynamics - EUROLYN*.
- Fahy, F. and Walker, J. (2004). *Advanced applications in acoustics, noise and vibration*. Taylor & Francis.
- Fan, W., Jiang, X., and Qi, H. (2015). Parameter estimation for the generalized fractional element network zener model based on the bayesian method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 427:40–49.
- Granger, D. and Ross, A. (2009). Effects of partial constrained viscoelastic layer damping parameters on the initial transient response of impacted cantilever beams: Experimental and numerical results. *Journal of Sound and Vibration*, 321(1):45–64.
- Jones, D. (1990). On temperature-frequency analysis of polymer dynamic mechanical behaviour. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1):85–102.
- Kelly, G. et al. (2000). *Fundamentals of mechanical vibrations*. McGraw-Hill.
- Kerwin Jr, E. M. (1959). Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *The Journal of the Acoustical society of America*, 31(7):952–962.
- Kim, S.-Y. and Lee, D.-H. (2009). Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured frfs. *Journal of sound and vibration*, 324(3):570–586.
- Kim, T.-W. and Kim, J.-H. (2004). Eigensensitivity based optimal distribution of a viscoelastic damping layer for a flexible beam. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1):201–218.
- Lall, A., Asnani, N., and Nakra, B. (1988). Damping analysis of partially covered sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 123(2):247–259.
- Lee, J. T. (2005). Active structural acoustics control of beams using active constrained layer damping through loss factor maximization. *Journal of sound and vibration*, 287(3):481–503.

- Li, Z. and Crocker, M. J. (2006). Effects of thickness and delamination on the damping in honeycomb-foam sandwich beams. *Journal of sound and vibration*, 294(3):473–485.
- Lunden, R. (1979). Optimum distribution of additive damping for vibrating beams. *Journal of Sound and Vibration*, 66(1):25–37.
- Luo, R. (2014). Reinvestigation of the behavior of viscoelastic damping. *Acta Mechanica*, 225(12):3559–3568.
- Maia, N. M. M. and e Silva, J. M. M. (1997). *Theoretical and experimental modal analysis*. Research Studies Press Taunton.
- Mead, D. (1982). A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 83(3):363–377.
- Mead, D. J. (2007). The measurement of the loss factors of beams and plates with constrained and unconstrained damping layers: A critical assessment. *Journal of sound and vibration*, 300(3):744–762.
- Nashif, A. D. and Henderson, J. P. (1985). *Vibration damping*. John Wiley & Sons.
- Rao, M. D. (2003). Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. *Journal of Sound and Vibration*, 262(3):457–474.
- Rao, S. S. (2009). *Vibrações mecânicas*. Pearson Prentice Hall.
- Ward, I. M. and Hadley, D. W. (1993). *An introduction to the mechanical properties of solid polymers*. John Wiley & Sons Ltd.; John Wiley & Sons, Inc.
- Wasilkoski, C. M. (2006). *Comportamento mecânico dos materiais poliméricos*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia-PIPE. Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.
- Yildiz, A. and Stevens, K. (1985). Optimum thickness distribution of unconstrained viscoelastic damping layer treatments for plates. *Journal of Sound and Vibration*, 103(2):183–199.
- Zenkert, D. (1997). *Handbook of sandwich construction*. Engineering Materials Advisory Services.

- Zopf, C., Hoque, S., and Kaliske, M. (2015). Comparison of approaches to model viscoelasticity based on fractional time derivatives. *Computational Materials Science*, 98:287–296.

## Apêndice A

# Matriz de aceleração

Este apêndice apresenta propriedades da matriz de aceleração usada no método dos elementos espectrais.

Os termos que descrevem a matriz de aceleração são apresentados abaixo, sendo  $k_b$  as raízes de uma determinada viga e  $L$  o comprimento da viga. E a partir disto, pode-se construir a matriz de aceleração.

$$K_{11} = \cos(k_b L) \sinh(k_b L) + \sin(k_b L) \cosh(k_b L) \quad (\text{A.1})$$

$$K_{12} = \sin(k_b L) + \sinh(k_b L) \quad (\text{A.2})$$

$$P = \frac{\sin(k_b L) \sinh(k_b L)}{k_b} \quad (\text{A.3})$$

$$V = \frac{\cos(k_b L) - \cosh(k_b L)}{k_b} \quad (\text{A.4})$$

$$Q_{11} = \frac{\cos(k_b L) \sinh(k_b L) - \sin(k_b L) \cosh(k_b L)}{k_b^2} \quad (\text{A.5})$$

$$Q_{12} = \frac{\sin(k_b L) - \sinh(k_b L)}{k_b^2} \quad (\text{A.6})$$

$$N = \cos(k_b L) \cosh(k_b L) - 1 \quad (\text{A.7})$$

## Apêndice B

# Módulo de aquisição de sinais NI PXIe-1078

Este apêndice apresenta as especificações do módulo utilizado para realização das análises experimentais.



Technical Sales  
Brasil  
(11) 3149-3149  
ni.brazil@ni.com

### NI PXIe-1078

#### Chassi PXI Express de 3U com 9 slots e alimentação CA - Até 1 GB/s

5 slots híbridos, 3 slots PXI Express  
Potência total disponível de 300 W entre 0 e 50 °C  
Performance padrão - Largura de banda dedicada para cada slot de até 250 MB/s, com largura de banda do sistema de 1 GB/s  
Chassi de pequena profundidade (214,2 mm), ideal para aplicações de montagem em rack e bancada  
Compatibilidade com módulos PXI, PXI Express, CompactPCI e CompactPCI Express



#### Visão geral

O backplane do chassi de nove slots NI PXIe-1078 oferece uma conexão PXI Express para cada um de seus slots, podendo atender uma ampla gama de aplicações de teste e medição. Além de módulos PXI Express em todos seus slots, esse chassi pode alojar módulos compatíveis com chassis padrão PXI híbridos em até cinco slots. O chassi inclui recursos integrados de temporização e sincronização, incluindo clocks de referência de 10 e 100 MHz, além do barramento de trigger PXI (se você precisar de um slot de temporização do sistema, veja as especificações do chassi de oito slots NI PXIe-1082.)

Figure B.1: Módulo de aquisição de sinais, parte 1

## Especificações

### Documentos de especificações

Specifications  
Datasheet

### Resumo das especificações

#### Geral

Nome do produto	NI PXIe-1078
Formato	PXI Platform
Tipo de produto	Chassis
Tipo de barramento PXI	PXI Express , Compatível com PXI híbrido
Part Number	781622-01
Sistema operacional/target	Any
Suporte a LabVIEW RT	Sim
Fonte de alimentação	AC
Quantidade de slots	9
Quantidade de slots para periféricos PXI	0
Quantidade de slots para periféricos PXI Express	3
Quantidade de slots híbridos para periféricos	5
Largura de banda máxima do sistema	1 GB/s
Aceita módulos 3U para PXI e CompactPCI	Sim
Montagem em rack frontal ou traseira opcional	Sim
Controladoras integradas	Não
Controle remoto de desativação de alimentação e monitoração de tensão	Não
Potência total disponível	300 W
Faixa de tensão de entrada	100 V , 240 V
Faixa de frequência de entrada	50 Hz , 60 Hz
Fonte de alimentação substituível em campo	Não
Nível de pressão sonora da ventoinha em Auto	49.9 dBA
Potência sonora da ventoinha no modo Auto	59.3 dBA
Nível de pressão sonora da ventoinha no modo High	65.4 dBA
Potência sonora da ventoinha no modo High	74.1 dBA
Seletor de modo Auto/High da ventoinha	Sim
Quantidade de ventoinhas	2
<b>Especificações físicas</b>	
Comprimento	214.2 mm
Largura	355.6 mm
Altura	177 mm
Temperatura mínima de operação	0 °C
Temperatura máxima de operação	50 °C
Altitude máxima	2000 m

<http://sine.ni.com/nips/cds/print/plang/plnid/209253>

2/2

Figure B.2: Módulo de aquisição de sinais, parte 2

## Apêndice C

# Martelo de teste de força/impulso PCB MOD.ICP 086C03

O apêndice C apresenta a tabela de especificações do martelo de teste de força/impulso utilizado para realização das análises experimentais, apresenta também imagens da geometria do martelo e os diversos sensores com diferentes sensibilidades.

	<b>Especificação</b>	<b>Valor no SI</b>
<b>RENDI- MENTO</b>	<b>Sensitividade</b>	2,25 mV/N $\pm$ 15%
	<b>Faixa de Medição</b>	$\pm$ 2224 N pk
	<b>Frequência de Ressonância</b>	$\geq$ 22 kHz
	<b>Não-linearidade</b>	$<$ 1%
<b>ELÉTRICA</b>	<b>Tensão Elétrica de Excitação</b>	20 a 30 VDC
	<b>Corrente Elétrica de Excitação Constante</b>	2 a 20 mA
	<b>Impedância de Saída</b>	$<$ 100 Ohm
	<b>Tensão Elétrica de Polarização de Saída</b>	8 a 14 VDC
	<b>Tempo de Descarga Constante</b>	$\geq$ 2000 sec
<b>FÍSICA</b>	<b>Elemento Sensor</b>	Quartzo
	<b>Vedação</b>	Epóxi
	<b>Massa do Martelo</b>	0,16 kg
	<b>Diâmetro da Cabeça</b>	1,57 cm
	<b>Diâmetro da Ponta</b>	0,63 cm
	<b>Comprimento do Martelo</b>	21,6 cm
	<b>Posição de Conexão Elétrica</b>	Inferior do Punho
	<b>Massa do Extensor</b>	75 gm
<b>Conector Elétrico</b>	BNC Jack	

Figure C.1: Tabela de especificação do martelo de teste de força/impulso PCB MOD.ICP 086C03 - Fonte original - www.pcb.com

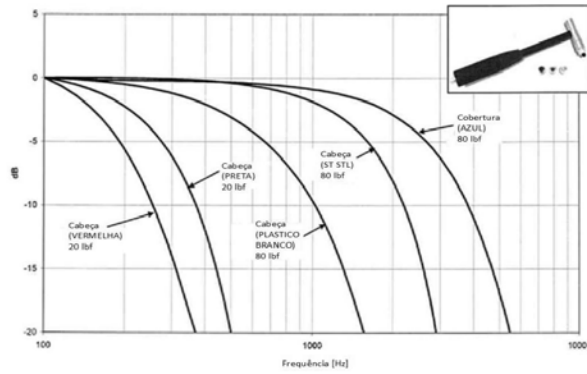


Figure C.2: Curvas de resposta do martelo PCB MOD.ICP 086C03 - Fonte original - www.pcb.com

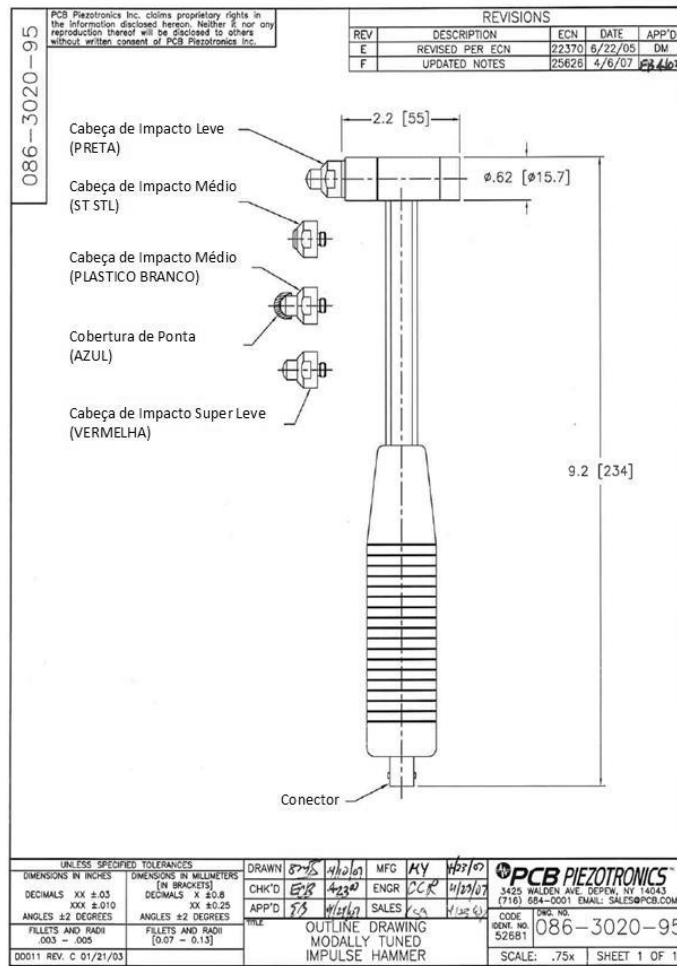


Figure C.3: Layout de dimensional do martelo PCB MOD.ICP 086C03 - Fonte original - www.pcb.com

## Apêndice D

# Acelerômetro piezoelétrico PCB MOD.ICP 352C33

O apêndice D apresenta a tabela de especificações do acelerômetro piezoelétrico PCB, o qual foi utilizado para realização das análises experimentais, apresenta também imagens das curvas de resopstas e layout dimensional do acelerômetro.

	Especificação	Valor no SI
RENDIMENTO	Sensitividade	10,2 mV/(m/s <sup>2</sup> ) ± 10%
	Faixa de Medição	± 490 m/s <sup>2</sup> pk
	Faixa de Frequência (± 5%)	0,5 a 10000 Hz
	Faixa de Frequência (± 10%)	0,3 a 15000 Hz
	Frequência de Ressonância	≥ 50 kHz
	Resolução de Banda Larga (1 a 10000 Hz)	0,0015 m/s <sup>2</sup> rms
	Não-linearidade	≤ 1%
	Sensibilidade Transversal	≤ 5%
AMBIEN- TAL	Limite de Sobrecarga (choque)	± 49000 m/s <sup>2</sup> pk
	Faixa de Temperatura (funcionamento)	-54 a +93 °C
	Sensibilidade à Tensão de Base	0,029 (m/s <sup>2</sup> )/με
ELÉTRICA	Tensão Elétrica de Excitação	18 a 30 VDC
	Corrente Elétrica de Excitação Constante	2 a 20 mA
	Impedância de Saída	≤ 200 Ohm
	Tensão Elétrica de Polarização de Saída	7 a 12 VDC
	Tempo de Descarga Constante	1 a 2,5 sec
	Ajuste de Tempo (dentro de 10% da polarização)	< 0 sec
	Espectro de Ruído (1 Hz)	380 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz
	Espectro de Ruído (10 Hz)	110 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz
Espectro de Ruído (100 Hz)	33 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz	
Espectro de Ruído (1 kHz)	14 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz	
FÍSICA	Altura	15,7 mm
	Massa	5,8 gramas
	Elemento Sensor	Cerâmica
	Tamanho (Hex)	11,2 mm
	Sensoriamento de Geometria	Cisalramento
	Material da Caixa	Titânio
	Comprimento do Martelo	21,6 cm
	Vedação	Hermética
	Conector Elétrico	10-32 Coaxial Jack
	Posição do Conector Elétrico	De Lado
Rosca de Montagem	10-32 fêmea	
Torque de Montagem	113 a 226 N.cm	

Figure D.1: Tabela de especificação do acelerômetro PCB MOD.ICP 352C33 - Fonte original - [www.pcb.com](http://www.pcb.com)

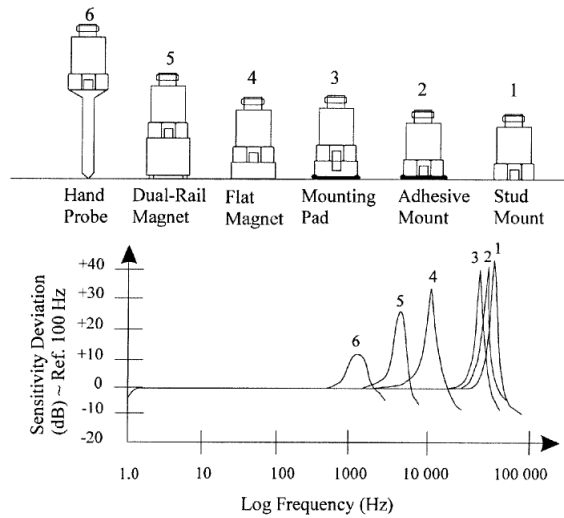


Figure D.2: Curvas de resposta do acelerômetro PCB MOD.ICP 352C33 - Fonte original - www.pcb.com

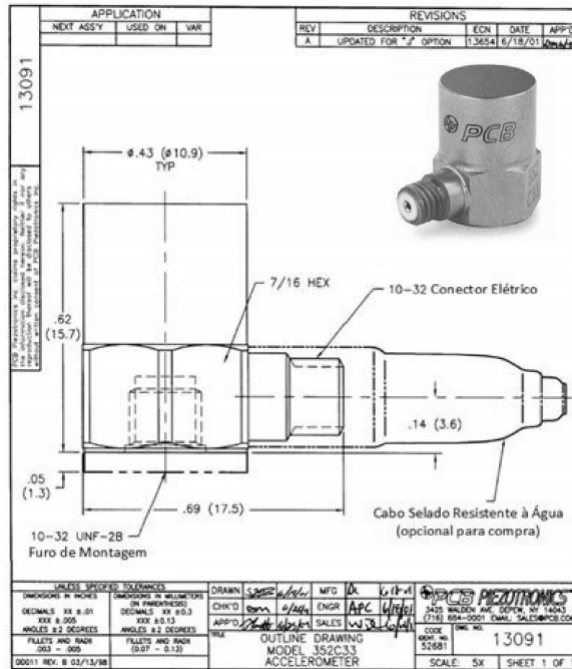


Figure D.3: Layout de dimensional do acelerômetro PCB MOD.ICP 352C33 - Fonte original - www.pcb.com