

RENATO DA COSTA SANTOS

**Partículas de spin-1 em D -dimensões
via tensor simétrico**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual
Paulista , para a obtenção do Título de Mestre em
Física na área de partículas e campos.

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá

2012

S237p	Santos, Renato da Costa Partículas de spin-1 em D-dimensões via tensor simétrico / Renato da Costa Santos – Guaratinguetá : [s.n], 2012. 85 f : il. Bibliografia: f. 74-77 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012. Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi 1. Teoria de campos (Física) I. Título CDU 530.145(043)
-------	---

RENATO DA COSTA SANTOS

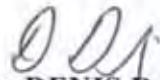
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

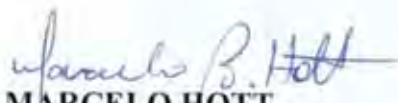
PROGRAMA: FÍSICA

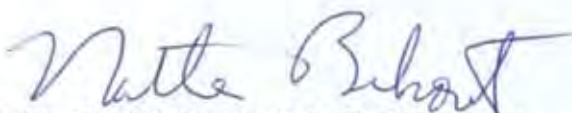
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. MARCELO HOTT
Unesp-Feg


Prof. Dr. NATHAN JACOB BERKOVITS
Unesp-IFT

Fevereiro de 2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à natureza por existir e com seus padrões e regras intrigar a natureza interior de nossas mentes, criando assim um propósito de vida para muitos.

Agradeço aos meus pais, Nelson e Luzia, pelo apoio e incentivo em todas as minhas decisões e por serem para mim um paradigma a ser seguido. Aos meus irmãos, Davi e Danilo, pelas conversas e palavras de motivação e à minha namorada Ingrid pelo carinho e paciência comigo.

Ao professor Denis pelos ensinamentos e dedicação ao longo desses dois anos de estudo.

A todos os amigos e professores que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Este trabalho contou com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (**CAPES**).

Jovens, não tenham medo de levar porrada!

Mário Schenberg

SANTOS, R. C. Partículas de spin-1 em D -dimensões via tensor simétrico. 2012, 85f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Resumo

Nesta dissertação obtemos modelos duais de *rank* superior para partículas de spin-0, spin-1 e spin-2 em D -dimensões utilizando a técnica da ação mestra. Como introdução obtemos um modelo simples para uma partícula de spin-0 utilizando um campo vetorial o qual servirá de paradigma para os capítulos posteriores. Verificamos o conteúdo físico obtido através de suas equações de movimento, propriedades analíticas do propagador e do algoritmo de Dirac-Bergman para sistemas vinculados. No caso de partículas de spin-1, fazemos um acoplamento mínimo na ação mestra tanto com o campo gravitacional quanto com o campo eletromagnético o que resulta, curiosamente, no aparecimento de termos não mínimos nas ações descendentes.

Palavras Chave: ação mestra, spin, *rank* superior, dualidade, graus de liberdade.

SANTOS, R. C. Partículas de spin-1 em D -dimensões via tensor simétrico. 2012, 85f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Abstract

In this master thesis we obtain dual models of the higher rank type for particles of spin-0, spin-1 and spin-2 in D -dimensions by using the master action technique. As an introduction we obtain a simple model for a spin-0 particle by using a vectorial field which serve as paradigm for the next chapters. We verify the particle content of the models through the analysis of the equations of motion, analytical properties of the propagator and we count the degrees of freedom by using the Dirac-Bergman algorithm for constrained systems. In the case of spin-1 particles, we do a minimal coupling in the master action first with the gravitational field and secondly with the electromagnetic field which result, curiously, in the appearance of non minimal couplings terms in the descendent actions.

Key Words: master action, spin, higher rank, duality, degrees of freedom.

Sumário

1	Introdução	11
2	Uma introdução aos vínculos hamiltonianos	14
2.1	Vínculos	15
2.2	Fixação de calibre e os graus de liberdade independentes	21
2.3	Contagem dos graus de liberdade	22
3	Spin-0	24
3.1	Descrição vetorial de um campo de spin-0 massivo	24
3.2	Mapeamento dual e ação mestra	27
3.3	Limite de massa nula	32
3.4	Obtenção de um modelo de 4ª ordem	35
3.4.1	Limite de massa nula	37
4	Spin-1	39
4.1	Modelo de Maxwell-Proca D -dimensional	39
4.2	Mapeamento dual no tensor simétrico	41
4.2.1	Caso não massivo	41
4.2.2	Caso massivo	45
4.3	Consistência do modelo $S_W^{(1,m)}$	47
4.3.1	Equações de movimento	47
4.3.2	Conteúdo físico via propagador	48
4.3.3	Formalismo hamiltoniano	50

4.4	Limite de massa nula do modelo $S_W^{(1,m)}$	55
4.5	Obtenção de um modelo de 4ª ordem de spin-1	57
4.5.1	Análise do conteúdo físico de partículas e equações de movimento	58
4.5.2	Limite de massa nula	60
5	Spin-1 com interação e Spin-2 livre	64
5.1	Adição de interação	64
5.1.1	Campo gravitacional	64
5.1.2	Campo eletromagnético	66
5.2	Spin-2	68
6	Conclusão	72
A	Álgebra dos projetores	79
B	Graus de liberdade do modelo $S_W^{(1,0)}$	81
C	Linearização do Modelo-K	84

Capítulo 1

Introdução

Desde os primeiros pensadores de que se tem conhecimento até os dias de hoje, os seres humanos tem tentado continuamente elaborar possíveis modelos para a explicação de certos padrões da natureza. Alguns modelos surgiram e foram derrubados - quem não conhece a história dos modelos geocêntrico e heliocêntrico? - muitas vezes devido ao surgimento de um outro modelo relativamente mais completo. No entanto, em alguns casos, modelos equivalentes também surgiram ao longo da história da ciência, sendo a dualidade onda-partícula talvez a mais conhecida. A luz tem lugar privilegiado nesta história, pois já foi tratada como sendo composta de ondas propagantes por Huygens e também como sendo composta por partículas por Newton. A concepção de Newton foi quase extinta com o advento do eletromagnetismo de Maxwell, no entanto como todos sabem, Einstein ao retomar o conceito de que a luz poderia se comportar tanto como onda quanto como partícula, consegue explicar o efeito fotoelétrico o que lhe rendeu o prêmio nobel em 1921. A história fica ainda mais interessante quando De Broglie, em 1924, introduz o conceito de dualidade onda-partícula para a matéria, na qual elétrons se comportariam também tanto como ondas quanto como partículas. A posterior observação experimental da difração de elétrons em 1927, por Clinton Joseph Davisson e Lester Germer, fez com que De Broglie recebesse o prêmio nobel de física em 1929. Enfim, o que podemos tirar de conclusão da pequena síntese

acima é que a natureza não diferencia duas formulações teóricas equivalentes. A grande vantagem de formulações duais é que certos aspectos físicos podem ser mais evidentes em uma formulação do que em outra. O que será feito nesta dissertação será algo que tange este argumento, pois trabalharemos com modelos duais aos modelos de Klein-Gordon para partículas de spin-0, Maxwell-Proca e Maxwell, para partículas de spin-1 e com uma ação mestra para partículas de spin-2.

Modelos duais tem sido bastante utilizados nos últimos anos, vide por exemplo [7, 8, 11, 24, 25] e referências contidas em [8, 11, 25]. Exemplos importantes da utilização de teorias duais são encontrados em [36], e no caso da conjectura AdS/CFT sugerida em [28]. Uma motivação fundamental para buscarmos modelos duais para partículas de spin-1 massivas é o fato de que o bóson de Higgs até agora não foi encontrado. Modelos massivos com simetria de calibre alternativos para partículas de spin-1, vide por exemplo [13], podem ser úteis caso esta partícula não seja observada.

Mas como encontrar um modelo dual? Em teorias de campos (quadráticas), que é o caso dos modelos encontrados ao longo desta dissertação, um método eficiente para se obter teorias duais é o uso da ação mestra [16] a qual depende de dois campos diferentes. Na ação mestra temos um termo quadrático no campo A , outro no campo B e um termo que mistura ambos, tal que podemos obter uma teoria dual através de uma integração gaussiana tanto no campo B quanto no campo A . No capítulo 3, começaremos com uma ação de primeira ordem (em derivadas) em D -dimensões, contendo um campo escalar ϕ e um campo vetorial A_μ acoplados. Integrando no campo vetorial na ação mestra obtemos a teoria de Klein-Gordon. Por outro lado, integrando sobre o campo escalar obtemos uma teoria vetorial dual a Klein-Gordon. Calculamos o propagador de ambas as teorias e conseguimos um mapeamento dual entre as duas. O conteúdo das equações de movimento também é analisado, além de propriedades analíticas do propagador e contagem de graus de liberdade via formalismo hamiltoniano. Este capítulo é apenas introdutório e serve para elucidar o capítulo

posterior, pois resultados análogos serão obtidos para partículas de spin-1. No capítulo 4, definimos uma ação mestra que mistura um campo vetorial A_μ , com um tensor simétrico $W_{\mu\nu}$. Seguimos os passos contidos no capítulo 3 e encontramos um novo modelo para partículas de spin-1, dual à teoria de Maxwell em D dimensões. A consistência deste novo modelo é analisada de forma análoga ao caso de spin-0, e encontramos um mapeamento entre ambas as teorias. O modelo dual encontrado para o caso não massivo, se mostra particularmente interessante nos casos $D = 2 + 1$, onde obtemos o modelo recentemente descoberto em [4], e $D = 3 + 1$, onde obtemos o modelo primeiramente encontrado em [19]. Posteriormente, acrescentamos um termo de massa (Proca) na ação mestra e também obtemos um modelo dual à Maxwell-Proca. Encontramos um mapeamento entre ambas as teorias e verificamos, também neste caso, a consistência deste modelo dual. No capítulo 5, colocamos interação no nosso modelo. No primeiro caso, estudaremos o acoplamento com um campo gravitacional e, em seguida, acoplaremos com um campo eletromagnético. No final do capítulo 5, aplicamos as ideias desenvolvidas ao longo desta dissertação, para o caso de spin-2. Apresentamos, na última seção do capítulo 5, resultados preliminares para uma ação mestra para partículas de spin-2, utilizando um tensor de *rank* 3 totalmente simétrico, e com um tensor, também de *rank* 3, porém com simetria apenas em um par de índices. No capítulo 6 tiramos nossas conclusões. Em particular, notamos que a introdução de interação via derivada covariante na ação mestra é diferente da introdução direta nas teorias duais descendentes.

Capítulo 2

Uma introdução aos vínculos hamiltonianos

Um fato importante em teoria de campos é que, em geral, estas teorias apresentam vínculos. A mecânica analítica é bem estabelecida no formalismo hamiltoniano para sistemas físicos onde podemos inverter a matrix hessiana e então, encontrar para cada momento canonicamente conjugado p no espaço de fase um único $\dot{q}$ no espaço de configurações. Quando isto não ocorre, algumas dificuldades, como a existência de vínculos, surgem na teoria e estas são ditas singulares. A existência de vínculos exige, por motivos técnicos, que toda uma classificação seja feita. Por exemplo, vínculos primários de primeira classe são sempre geradores de transformações de calibre, enquanto vínculos secundários de primeira-classe (as definições precisas encontram-se no capítulo 2) nem sempre [22]. Vínculos também são úteis na verificação do conteúdo físico de uma teoria, por exemplo, podemos contar graus de liberdade apenas contando o número de campos independentes e o número de vínculos que a teoria apresenta, desde que tomemos algum cuidado como explicado no capítulo 2 desta dissertação. Existem, ao meu conhecimento, duas formas de obter tais vínculos de uma teoria física, uma delas é através da lagrangiana, usando as equações de Euler-Lagrange. Neste caso os vínculos estão associados a indeterminação das acelerações da teoria em

função das velocidades e coordenadas generalizadas [21]. Tal processo é, em geral, equivalente ao algoritmo de Dirac-Bergmann, o qual é utilizado no formalismo hamiltoniano, porém, como o próprio Dirac disse [20], “I feel that there will always be something missing from alternative methods which we can only get by working from the Hamiltonian”. Neste capítulo, uma revisão de como obter vínculos através do algoritmo de Dirac-Bergmann é apresentada, além de uma discussão de como contar graus de liberdade de uma teoria física depois de obtidos os vínculos através deste algoritmo. Com esse arcabouço em mãos vamos obter, no capítulo 4, os vínculos da teoria de Maxwell-Proca em D -dimensões e do seu modelo dual, via tensor simétrico obtido em [14], com o intuito de comparar os graus de liberdade que ambas apresentam.

2.1 Vínculos

As teorias físicas tradicionais começam com a definição de uma ação dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_n, \dot{q}_n) dt. \quad (2.1)$$

Se impusermos a condição de que a variação da ação seja nula, $\delta S = 0$, ou seja, que a ação seja estacionária, juntamente com as condições de que as variações $\delta q_n(t_1) = 0 = \delta q_n(t_2)$, obtemos as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

as quais podem ser reescritas na forma:

$$\ddot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} - \dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}. \quad (2.3)$$

As equações acima são, na verdade, um conjunto de equações lineares nas acelerações e podem ser resolvidas para os $\ddot{q}_i$ em função dos q_j 's e $\dot{q}_j$'s de forma única, se e somente se, a matriz hessiana $\mathbb{W}$ com elementos definidos por:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (2.4)$$

for não-singular, ou seja, $\det \mathbb{W} \neq 0$. Quando isto não ocorre, dizemos que a teoria possui vínculos lagrangianos. Este fato está intrinsicamente ligado aos vínculos hamiltonianos introduzidos por Dirac. De fato, se quisermos obter o formalismo hamiltoniano de forma única, a partir do lagrangiano, devemos fazer a mudança $(q, \dot{q}) \longrightarrow (q, p)$, onde:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}, \quad (2.5)$$

com a condição de que o jacobiano dessa transformação dado por:

$$\frac{D(q, p)}{D(q, \dot{q})} = \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \right\|, \quad (2.6)$$

deva ser não nulo. Esta condição coincide exatamente com a condição de não-singularidade de $\mathbb{W}$ explicada acima no caso dos $\ddot{q}_a$'s. No caso em que o jacobiano é nulo, não conseguimos obter um p no espaço de fase para cada $\dot{q}$ no espaço de configuração. Neste caso dizemos que o sistema físico em questão possui vínculos hamiltonianos e as coordenadas do espaço de fase não são todas independentes, mas sim, obedecem relações do tipo:

$$\phi_k(q, p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.7)$$

que surgem da definição dos momenta (2.5). Vínculos que aparecem diretamente da definição dos momenta são denominados *vínculos primários*. Mesmo na presença de tais vínculos podemos construir a hamiltoniana a partir da definição $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, porém no caso em que há vínculos primários devemos utilizar uma hamiltoniana mais geral, de modo que esta seja definida em todo o espaço de fase e não apenas em uma subvariedade definida pelos vínculos primários. Este passo é fundamental para que as equações de Euler-Lagrange sejam equivalentes às de Hamilton. Tal fato pode ser expresso matematicamente pela hamiltoniana primária:

$$H_P = H + \sum_k \lambda_k \phi_k, \quad (2.8)$$

onde os λ_k são funções arbitrárias do tempo conhecidas como multiplicadores hamiltonianos. Deve-se tomar cuidado ao trabalhar com vínculos pois não devemos

usá-los antes de calcularmos os parênteses de Poisson, uma vez que os vínculos são satisfeitos apenas na hipersuperfície definida por (2.7) e não em todo o espaço de fase. Usaremos o símbolo $\approx$ para frisar isto,

$$\phi_k(q, p) \approx 0, \quad (2.9)$$

e diremos que o vínculo é fracamente nulo. Com isto em mente, podemos escrever as equações de movimento de uma quantidade física qualquer na forma,

$$\dot{h} \approx \{h, H_P\}, \quad (2.10)$$

onde $\{F, G\}$ significa que estamos calculando os parênteses de Poisson de duas grandezas físicas F e G . Se h for um dos vínculos devemos ter, por consistência,

$$\dot{\phi}_k \approx 0, \quad (2.11)$$

ou,

$$\{\phi_k, H\} + \sum_{k'} \lambda_{k'} \{\phi_k, \phi_{k'}\} \approx 0. \quad (2.12)$$

Tais condições de consistência dão origem ao algoritmo denominado *algoritmo de Dirac-Bergmann*. Três casos distintos podem acontecer:

(1) As condições de consistência são satisfeitas identicamente. Neste caso, não surgem mais vínculos e os multiplicadores hamiltonianos λ_k permanecem inteiramente arbitrários; portanto a dinâmica do sistema possui funções do tempo arbitrárias.

(2) Os multiplicadores hamiltonianos são determinados univocamente através das condições de consistência. Isto ocorre se a matriz $\|\{\phi_k, \phi_{k'}\}\|$ é não-singular. Neste caso, se $\|M_{kk'}\|$ é a inversa de $\|\{\phi_k, \phi_{k'}\}\|$, temos:

$$\sum_{k''} \|M_{kk''}\| \|\{\phi_{k''}, \phi_{k'}\}\| = \delta_{kk'}. \quad (2.13)$$

Através das condições de consistência obtemos,

$$\lambda_k \approx - \sum_{k'} M_{kk'} \{\phi_{k'}, H\}, \quad (2.14)$$

e assim,

$$\dot{h} \approx \{h, H\} - \sum_{k,k'} \{h, \phi_k\} M_{kk'} \{\phi_{k'}, H\}, \quad (2.15)$$

o que nos induz a definir os parênteses de Dirac de duas grandezas físicas quaisquer, F e G , como

$$\{F, G\}_D \doteq \{F, G\} - \sum_{k,k'} \{F, \phi_k\} M_{kk'} \{\phi_{k'}, G\}, \quad (2.16)$$

e com o auxílio deste, podemos escrever a equação de movimento no formalismo hamiltoniano na forma compacta em função da hamiltoniana canônica,

$$\dot{F} = \{F, H\}_D. \quad (2.17)$$

Podemos usar a igualdade forte $\phi_k = 0$ na última relação, pois:

$$\{F, \phi_k\}_D = \{F, \phi_k\} - \sum_{k',k''} \{F, \phi_{k'}\} M_{k'k''} \{\phi_{k''}, \phi_k\} = \{F, \phi_k\} - \sum_{k'} \{F, \phi_{k'}\} \delta_{k'k} = 0. \quad (2.18)$$

Logo, se usarmos os parênteses de Dirac, podemos colocar os vínculos como sendo fortemente nulos de modo que $H = H_P$. Outra propriedade interessante dos parênteses de Dirac é que eles satisfazem as mesmas propriedades algébricas dos parênteses de Poisson, como por exemplo, a identidade de Jacobi.

(3) Novos vínculos surgem ao impormos condições de consistência, gerando vínculos denominados *secundários*

$$\chi_l(q, p) \approx 0, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (2.19)$$

e impomos novamente condições de consistência sobre esses vínculos. Se voltarmos ao caso (1) ou (2), o processo termina. Caso contrário, teremos vínculos terciários e repetimos novamente o processo. Genericamente, podemos denominar secundários todos os vínculos que não sejam primários. Este procedimento é denominado *algoritmo de Dirac-Bergmann*. O procedimento termina após um número finito de etapas e ficamos com mais,

$$\gamma_k(q, p) \approx 0, \quad k = L + 1, \dots, L + K, \quad (2.20)$$

vínculos. Assim, terminamos o procedimento com o total de M vínculos,

$$\phi_m(q, p) \approx 0, \quad m = 1, 2, \dots, L + K = M. \quad (2.21)$$

No caso (3), o algoritmo acaba quando as condições de consistência,

$$\{\phi_m, H\} + \sum_k \lambda_k \{\phi_m, \phi_k\} \approx 0, \quad (2.22)$$

impõem restrições sobre os λ 's. O sistema com M equações lineares acima, não-homogêneas para $K \leq M$ incógnitas, é solúvel para os λ_k 's pois assumimos que nossa lagrangiana não possui inconsistências. A solução geral desse sistema é da forma,

$$\lambda_k = U_k + \sum_{b=1}^B w_b V_k^{(b)}, \quad (2.23)$$

sendo U_k uma solução particular das equações não-homogêneas e $V_k^{(b)}$, $b = 1, \dots, B$, soluções linearmente independentes das equações homogêneas

$$\sum_k V_k^{(b)} \{\phi_m, \phi_k\} \approx 0, \quad (2.24)$$

onde os coeficientes w_b são arbitrários. Com isso, podemos reescrever a hamiltoniana primária da seguinte forma,

$$H_P = H + \sum_k \lambda_k \phi_k = H + \sum_k U_k \phi_k + \sum_{k,b} w_b V_k^{(b)} \phi_k = H' + \sum_b w_b \Phi_b, \quad (2.25)$$

onde

$$H' \equiv H + \sum_k U_k \phi_k, \quad \Phi_b \equiv \sum_k V_k^{(b)} \phi_k. \quad (2.26)$$

As equações de movimento de uma quantidade física qualquer F podem ser escritas em termos da hamiltoniana primária da seguinte forma,

$$\dot{F} \approx \{F, H_P\}. \quad (2.27)$$

Os coeficientes arbitrários w_b em H_P , aparecem também nas equações de movimento, assim as condições iniciais não determinam, de forma única, a evolução do sistema físico em questão. Tal fato é característico de teorias com invariância

de calibre que, em geral, são descritas com mais variáveis do que graus de liberdade físicos da teoria. Podemos classificar os vínculos não só como primários ou secundários, como também em *vínculos de primeira-classe* e *segunda-classe*. Vínculos de primeira-classe tem um papel importante na quantização de teorias físicas, pois estão ligados a geradores de transformações de calibre.

Quando uma função arbitrária $K(q, p)$ possui parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os vínculos, ou seja,

$$\{K, \phi_m\} \approx 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2.28)$$

ela é dita uma função de *primeira-classe*. Se o parêntese de Poisson de $K(q, p)$ com pelo menos um dos vínculos for fracamente não-nulo, ela será dita uma função de *segunda-classe*.

Os vínculos primários de primeira-classe são geradores de transformações de calibre. De fato, são os vínculos primários que são acrescentados na hamiltoniana primária. Se esses vínculos forem de segunda-classe, determinaremos os multiplicadores hamiltonianos, logo estes não serão arbitrários. Já no caso dos vínculos primários de primeira-classe, temos funções arbitrárias do tempo w_b e os multiplicadores hamiltonianos não são determinados de forma única. Assim, dadas as condições iniciais em t_0 , consideremos

$$K_{t_0+\delta t} = K_0 + \dot{K}\delta t = K_0 + \{K, H_P\}\delta t = K_0 + \delta t[\{K, H'\} + \sum_b w_b \{K, \Phi_b\}]. \quad (2.29)$$

Como os w_b são arbitrários, se fizermos a mesma variação acima porém agora usando um w'_b , teremos,

$$\Delta K_{t_0+\delta t} = \delta t \sum_b (w'_b - w_b) \{K, \Phi_b\} = \sum_b \epsilon_b \{K, \Phi_b\}, \quad (2.30)$$

onde

$$\epsilon_b \equiv (w'_b - w_b)\delta t, \quad (2.31)$$

e vemos que a equação (2.30) é uma soma de transformações canônicas infinitesimais, cada uma gerada pelos Φ_b com parâmetro infinitesimal ϵ_b . Logo, os

vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações canônicas infinitesimais [26] que mudam as variáveis do espaço de fase, ou seja, os q 's e os p 's, mas não mudam o estado físico do sistema, isto é, geram transformações de calibre. A explicação acima garante que vínculos primários de primeira-classe são geradores de transformações de calibre, porém alguns vínculos secundários de primeira-classe também podem gerar transformações de calibre, como por exemplo o vínculo da lei de Gauss na teoria de Maxwell. Dirac [20] acreditava que seria possível mostrar que todos os vínculos secundários de primeira-classe também seriam geradores de simetrias de calibre, porém podemos encontrar um contra-exemplo no livro de M. Henneaux e C. Teitelboim [22].

2.2 Fixação de calibre e os graus de liberdade independentes

Como foi visto na subseção anterior, quando uma lagrangiana (ou hamiltoniana) apresenta vínculos primários de primeira-classe teremos necessariamente transformações de calibre associadas a esta teoria (também podemos ter transformações de calibre associadas a alguns vínculos secundários de primeira-classe). Tais transformações nos dizem que o sistema não é univocamente descrito pelo conjunto de variáveis (q, p) do qual dispomos, ou seja, teremos funções arbitrárias dependentes do tempo, w_b 's, presentes nas equações de movimento. A forma canônica de se obter a evolução temporal de maneira única é impor mais restrições sobre as variáveis canônicas, ou seja, condições canônicas de calibre, e assim teremos uma evolução unívoca das variáveis físicas do sistema em estudo, pois estaremos trabalhando apenas com as variáveis independentes. É bom frisar que as condições de calibre em questão não são consequências naturais da teoria, e sim, condições postas *ad-hoc* necessárias para nos livrarmos de variáveis redundantes. Isto é possível, pois tais condições extras apenas removem os elementos não observáveis da teoria e não afetam as propriedades observáveis, ou seja, as

quantidades invariantes de calibre.

Em resumo, temos a seguinte situação, dada uma teoria física, extraímos os vínculos desta e para cada conjunto de vínculos de primeira-classe,

$$\phi_k(q, p) \approx 0, \quad (2.32)$$

impomos um outro conjunto de equações,

$$J_a(q, p) \approx 0, \quad (2.33)$$

tal que a matrix quadrada formada pelos elementos $\{J_a, \phi_k\}$ seja não-singular, ou seja,

$$\det\{J_a, \phi_k\} \neq 0. \quad (2.34)$$

Isto nos diz precisamente que os vínculos J_a e ϕ_k juntos formam um conjunto de vínculos independentes de segunda-classe. É importante notar que devemos sempre checar que $\dot{J}_a \approx 0$ não gera novos vínculos. Logo, após a fixação de calibre, a teoria não possui mais vínculos de primeira-classe. Nossa teoria fica apenas com vínculos de segunda-classe e podemos usar os parênteses de Dirac para a obtenção das equações de movimento. Como vimos anteriormente, também podemos tomar agora os vínculos como identidades fortes e usá-los para eliminar os graus de liberdade espúrios.

2.3 Contagem dos graus de liberdade

Se ao trabalharmos com uma teoria física obtivermos apenas vínculos de segunda-classe, tal teoria não apresentará as funções arbitrárias w_b 's já citadas. Logo, usando os vínculos como identidades fortes podemos eliminar as variáveis dependentes e com isso eliminar um grau de liberdade do sistema físico em questão, no espaço de fase, para cada vínculo de segunda-classe. Caso a teoria possua vínculos de primeira-classe geradores de simetria de calibre, fixamos um calibre para cada vínculo deste tipo e obtemos uma teoria apenas com vínculos de segunda-classe, assim eliminamos dois graus de liberdade no espaço de fase

para cada vínculo de primeira-classe gerador de simetria de calibre. De forma geral, a contagem de graus de liberdade físicos é feita da seguinte maneira:

$$N_f = \frac{[N - N_2 - 2N_1]}{2},$$

onde N_f é o número de graus de liberdade físicos da teoria no espaço de configuração, N_2 é o número de vínculos de segunda-classe, N_1 é o número de vínculos de primeira-classe geradores de simetria de calibre e N é a dimensão do espaço de fase (número de campos e momenta na teoria de campos).

Capítulo 3

Spin-0

3.1 Descrição vetorial de um campo de spin-0 massivo

Um fato bem conhecido em teoria de campos é que se construirmos uma ação envolvendo um campo vetorial, de segunda ordem em derivadas e covariante de Poincarè, apenas 3 modelos serão fisicamente consistentes [29], desconsiderando tensores de Levi-Civita. Isto pode ser verificado analisando o conteúdo físico de partículas da seguinte ação¹:

$$S = \int d^D x \left[a A_\mu \square \theta^{\mu\nu} A_\nu + b A_\mu \square \omega^{\mu\nu} A_\nu + c A_\mu A^\mu \right], \quad (3.1)$$

onde a, b e c são constantes reais quaisquer e os operadores,

$$\omega^{\mu\alpha} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square}; \quad \theta^{\mu\alpha} \equiv \eta^{\mu\alpha} - \omega^{\mu\alpha}, \quad \mu, \alpha = 0, 1, \dots, D-1, \quad (3.2)$$

são projetores pois satisfazem a álgebra:

$$\theta^{\mu\nu} \theta_{\nu\alpha} = \theta^\mu{}_\alpha, \quad \omega^{\mu\nu} \omega_{\nu\alpha} = \omega^\mu{}_\alpha, \quad \theta^{\mu\nu} \omega_{\nu\alpha} = 0 = \omega^{\mu\nu} \theta_{\nu\alpha}, \quad \theta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, \quad (3.3)$$

e possuem traço $\eta_{\mu\alpha} \theta^{\mu\alpha} = D-1$ e $\eta_{\mu\alpha} \omega^{\mu\alpha} = 1$. Assim, o operador $\theta^{\mu\alpha}$ projeta em um subespaço de dimensão $D-1$ transversal ao subespaço no qual $\omega^{\mu\alpha}$ projeta,

¹Usaremos ao longo desta dissertação a notação $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, \dots, +)$.

o qual possui dimensão 1. Por essa mesma razão, dizemos que θ projeta vetores no setor de spin-1 e ω no setor de spin-0.

Reescrevendo a ação (3.1) acima na forma:

$$S = \int d^D x \{A_\mu K^{\mu\nu} A_\nu\}, \quad (3.4)$$

onde $K^{\mu\nu} = (a\Box + c)\theta^{\mu\nu} + (b\Box + c)\omega^{\mu\nu}$ possui inversa dada por $K_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{(a\Box + c)}\theta_{\mu\nu} + \frac{1}{(b\Box + c)}\omega_{\mu\nu}$, caso a, c e b, c não sejam simultaneamente nulos. Como é sabido da teoria quântica de campos [9, 23, 35], para encontrarmos o conteúdo físico de partículas de uma dada teoria, devemos analisar o sinal da parte imaginária dos resíduos associados aos pólos da amplitude de dois pontos. Se o sinal for positivo, teremos uma partícula física, se for negativo, teremos um fantasma e caso o resíduo seja nulo, não haverá partículas na teoria. Para calcularmos a amplitude de dois pontos de uma teoria qualquer, devemos primeiro escrever a ação na forma $S = \int d^D x B \hat{K} B$ e encontrar a inversa do operador $\hat{K}$, pois a amplitude de dois pontos definida por:

$$A(k) = J^*(k) \langle B(-k) B(k) \rangle J(k), \quad (3.5)$$

onde $J(k)$ é a fonte e $\langle B(-k) B(k) \rangle$ é o propagador, pode ser facilmente calculada utilizando a relação,

$$\langle B(-k) B(k) \rangle = -\frac{i}{2} \hat{K}^{-1}(k). \quad (3.6)$$

Portanto, a amplitude de dois pontos para a teoria dada pela ação (3.4) será,

$$A(k) = \frac{i}{2} J_\mu^*(k) \left[\frac{1}{ak^2 - c} \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{bk^2 - c} \omega^{\mu\nu} \right] J_\nu(k). \quad (3.7)$$

Podemos verificar os possíveis tipos de partícula que a teoria proposta contém analisando os possíveis valores para as constantes a, b e c . Por exemplo, caso a, b e c sejam não nulos, então a teoria possuirá duas partículas massivas de massas distintas, sendo uma de spin-0 e outra de spin-1. No entanto, se ajustarmos os sinais das constantes de modo a evitarmos *tachyons*, esta imposição leva necessariamente à presença de um fantasma e a teoria deve ser descartada. Se $b = 0$,

teremos uma partícula massiva de spin-1 e a teoria se reduz à teoria de Maxwell-Proca (basta olhar para a ação (3.1) com $b = 0$, $a = 1$ e $c = m^2/2$). Se fizermos $b = c = 0$ teremos em (3.1) a ação de Maxwell. O fato curioso, porém já bem conhecido [29], é que se fizermos $a = 0$ teremos apenas uma partícula massiva de spin-0 descrita por um campo vetorial. Verificaremos isto a seguir, analisando o sinal do resíduo da amplitude de dois pontos acima colocando $a = 0$. Com isto teremos:

$$A(k) = \frac{i}{2} J_\mu^*(k) \left[-\frac{1}{c} \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{b(k^2 + m^2)} \omega^{\mu\nu} \right] J_\nu(k), \quad m^2 = -\frac{c}{b}. \quad (3.8)$$

Logo, teremos um pólo em $k^2 = -m^2$. Para que a teoria não apresente *tachyons*, devemos ter $bc < 0$. O resíduo associado a este pólo será:

$$R_{-m^2} = \lim_{k^2 \rightarrow -m^2} (k^2 + m^2) A(k) = \frac{i}{2b} J_\mu^*(k) \omega^{\mu\nu} J_\nu(k). \quad (3.9)$$

Como o operador $\omega^{\mu\nu}$ projeta na direção de propagação do momento, escolhendo $k^\mu = (m, 0, 0, \dots, 0)$ teremos $R_{-m^2} = -\frac{i}{2b} |J_0|^2$. Logo, $Im R_{-m^2} > 0$ caso $b < 0$ e teremos um modelo que descreve uma partícula física de spin-0 utilizando um campo de *rank* superior (vetor). Escolhendo $b = -1/2$ e $c = m^2/2$, obtemos a ação:

$$S_A^{(0,m)} = \int d^D x \left[\frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu \right]. \quad (3.10)$$

Verificaremos agora se o modelo acima fornece as mesmas equações de movimento que o modelo de Klein-Gordon. Podemos reescrever a ação (3.10) na forma:

$$S_A^{(0,m)} = \int d^D x \frac{1}{2} A^\mu \left[-\partial_\mu \partial_\nu + m^2 \eta_{\mu\nu} \right] A^\nu. \quad (3.11)$$

Extremizando a ação encontramos as seguintes equações de movimento:

$$\frac{\delta S_A^{(0,m)}}{\delta A^\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu A^\nu - m^2 A_\mu = 0. \quad (3.12)$$

Aplicando-se ∂^μ em (3.12):

$$(\square - m^2) \partial \cdot A = 0, \quad (3.13)$$

e segue que o divergente do campo vetorial A_μ satisfaz a equação de Klein-Gordon. Como a equação (3.13) foi obtida de (3.12) aplicando-se uma derivada, é natural se perguntar se o modelo original (3.12) contém mais informações do que a equação (3.13). Com o intuito de responder esta questão, sem perda de generalidade, decompomos o campo vetorial em sua parte longitudinal e transversal na forma,

$$A_\mu = \partial_\mu \phi + A_\mu^T, \quad (3.14)$$

onde $\partial^\mu A_\mu^T = 0$. Substituindo (3.14) em (3.12):

$$\partial_\mu[(\square - m^2)\phi] - m^2 A_\mu^T = 0. \quad (3.15)$$

Aplicando-se o projetor $\theta^{\mu\alpha}$ na equação acima obtemos,

$$A_\mu^T = 0 \Rightarrow A_\mu = \partial_\mu \phi. \quad (3.16)$$

Voltando este último resultado nas equações de movimento, temos:

$$\partial_\mu \psi = 0 \quad (3.17)$$

onde $\psi = (\square - m^2)\phi$. Com condições de contorno tais que os campos sejam nulos no infinito, a solução geral de (3.17) é dada por:

$$\psi = (\square - m^2)\phi = 0. \quad (3.18)$$

Logo, o componente longitudinal do campo vetorial satisfaz a equação de Klein-Gordon enquanto a parte transversal é nula. Como a parte longitudinal possui apenas um grau de liberdade, nosso modelo é equivalente ao de Klein-Gordon no sentido de que possui os mesmos graus de liberdade e satisfaz as mesmas equações de movimento.

3.2 Mapeamento dual e ação mestra

Tendo como base os argumentos da seção anterior, vimos que é possível obter um modelo de *rank* superior para partículas de spin-0, ou seja, um modelo

que utilize um campo vetorial (*rank* 1) ao invés de um campo escalar (*rank* 0). Como o modelo vetorial $S_A^{(0,m)}$ é equivalente ao modelo de Klein-Gordon, deve ser possível mapear uma teoria na outra. Com este intuito, usaremos a técnica da ação mestra.

A primeira ação mestra da qual temos conhecimento foi proposta por Deser e Jackiw [16], em 1984, com o intuito de mostrar a dualidade entre o modelo por eles proposto em [17], conhecido atualmente por Maxwell-Chern-Simons (com simetria de calibre), e o modelo obtido por P.K. Townsend, K. Pilch e P. van Nieuwenhuizen em [38], conhecido por modelo Auto-Dual (sem simetria de calibre). Ambos modelos descrevem partículas massivas de helicidade +1 ou -1 em 2+1 dimensões utilizando campos vetoriais.

Nessa dissertação utilizaremos a técnica da ação mestra para encontrar modelos duais para partículas de spin-0, spin-1 e spin-2 em D -dimensões, porém o modelo dual será sempre de *rank* superior. Uma ação mestra consistirá, basicamente, em misturar os campos de uma teoria já conhecida com um campo de *rank* superior, como por exemplo um campo escalar usado para descrever o modelo de Klein-Gordon, e um campo vetorial (vide equação (3.25)), sendo o termo de mistura da ação mestra linear nas derivadas.

Encontrar uma ação mestra nem sempre é uma tarefa fácil e não há, em geral, uma receita para se conectar duas teorias supostamente equivalentes (duais). Uma ação mestra simples, porém muito interessante, que podemos construir com o intuito de obter um modelo dual à D’Alambert é obtida através da seguinte ação:

$$S_M = \int d^D x \left[\frac{1}{2} B_\mu B^\mu + B^\mu \partial_\mu \phi \right]. \quad (3.19)$$

As equações de movimento do campo vetorial nos fornecem:

$$\frac{\delta S_M}{\delta B^\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_\mu = -\partial_\mu \phi. \quad (3.20)$$

Substituindo este resultado de volta na ação (3.19), obtemos a ação do modelo de D’Alambert:

$$S[\phi] = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right]. \quad (3.21)$$

No entanto, se calcularmos,

$$\frac{\delta S_M}{\delta \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu B^\mu = 0. \quad (3.22)$$

Resolvendo esta equação e substituindo a solução na ação mestra, obtemos um modelo dual à teoria de D'Alambert. De fato, em $D = 3$ temos $B^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta$. De volta em (3.19) obtemos:

$$S_{MAX}^{D=3}[A] = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A), \quad (3.23)$$

o que prova a conhecida dualidade [24] entre a teoria de Maxwell e a de um campo escalar sem massa em $D = 3$. Em $D = 4$ teríamos $B^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha A_{\beta\gamma}$, com $A_{\beta\gamma} = -A_{\gamma\beta}$ sendo o campo de Kalb-Ramond. De volta em (3.19) obtemos:

$$S_{KR}^{D=4}[A_{\alpha\gamma}] = \frac{1}{12} \int d^4x (\partial_{[\alpha} A_{\beta\gamma]})^2, \quad (3.24)$$

e assim temos a dualidade entre um campo escalar e um tensor antissimétrico (KR) em $D = 4$. Ambas as teorias descrevem partículas sem massa de spin-0. Estes são casos especiais de dualidade entre o campo escalar não massivo e uma $D - 2$ forma.

Uma extensão natural da ação mestra (3.19) pode ser obtida incluindo termos de massa e acrescentando um termo de fonte J para o campo escalar e outro termo J^μ para o campo vetorial. Assim, construímos:

$$S_M = \int d^Dx \left[\frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + m A^\mu \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi + J^\mu A_\mu \right]. \quad (3.25)$$

Podemos reescrever a ação acima completando quadrado da seguinte forma,

$$S_M = \int d^Dx \left[\frac{m^2}{2} \left(A^\mu + \frac{\partial^\mu \phi}{m} + \frac{J^\mu}{m^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi - \frac{J_\mu \partial^\mu \phi}{m} - \frac{J^\mu J_\mu}{2m^2} \right]. \quad (3.26)$$

Fazendo-se um *shift* no campo A^μ de forma que $A^\mu \longrightarrow \tilde{A}^\mu - \frac{\partial^\mu \phi}{m} - \frac{J^\mu}{m^2}$, podemos escrever o funcional gerador para a ação acima,

$$Z_M[J, J^\mu] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{A}^\mu e^{i \int d^Dx \left[\frac{m^2}{2} \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu + \frac{\phi(\Box - m^2)\phi}{2} + J\phi - \frac{J_\mu \partial^\mu \phi}{m} - \frac{J^\mu J_\mu}{2m^2} \right]}. \quad (3.27)$$

Calculando a derivada segunda do funcional gerador acima com respeito à fonte escalar, obtemos a função de dois pontos para a teoria de Klein-Gordon. De fato,

$$\frac{1}{Z_M[0,0]} \left(- \frac{\delta^2 Z_M}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0, J^\mu=0} \right) = \frac{\int \mathcal{D}\phi [\phi(x)\phi(y)] e^{i \int d^D x \left[\frac{\phi(\square - m^2)\phi}{2} \right]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^D x \left[\frac{\phi(\square - m^2)\phi}{2} \right]}}, \quad (3.28)$$

ou seja,

$$\frac{1}{Z_M[0,0]} \left(- \frac{\delta^2 Z_M}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0, J^\mu=0} \right) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{KG}, \quad (3.29)$$

onde o subscrito KG é a abreviação de Klein-Gordon.

Podemos ainda completar o quadrado em ϕ e reescrever (3.25), obtendo assim um modelo dual a Klein Gordon, agora utilizando um campo vetorial ao invés de um campo escalar. Neste caso obtemos:

$$S_M = \int d^D x \left[-\frac{m^2}{2} \left(\phi + \frac{\partial_\mu A^\mu}{m} - \frac{J}{m^2} \right)^2 + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu + \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} - \frac{J \partial^\mu A_\mu}{m} + J^\mu A_\mu + \frac{J^2}{2m^2} \right]. \quad (3.30)$$

Fazendo-se um *shift* no campo ϕ de forma que $\phi \longrightarrow \tilde{\phi} - \frac{\partial_\mu A^\mu}{m} + \frac{J}{m^2}$, ficamos com,

$$S_M = \int d^D x \left[-\frac{m^2}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu + \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} - \frac{J \partial^\mu A_\mu}{m} + J^\mu A_\mu + \frac{J^2}{2m^2} \right], \quad (3.31)$$

e o funcional gerador é dado por:

$$Z_M[J, J^\mu] = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \mathcal{D}\tilde{A}^\mu e^{i \int d^D x \left[-\frac{m^2}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu + \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} - \frac{J \partial^\mu A_\mu}{m} + J^\mu A_\mu + \frac{J^2}{2m^2} \right]}. \quad (3.32)$$

Analogamente ao caso anterior, derivando-se o funcional gerador duas vezes com relação à fonte obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_M[0,0]} \left(- \frac{\delta^2 Z_M}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0, J^\mu=0} \right) &= \frac{\int \mathcal{D}\tilde{A}^\mu \left(\frac{\partial_\mu A^\mu}{m} \frac{\partial_\nu A^\nu}{m} \right) e^{i \int d^D x \left[\frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu + \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} \right]}}{\int \mathcal{D}\tilde{A}^\mu e^{i \int d^D x \left[\frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu + \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} \right]}} \\ &+ \frac{i}{m^2} \delta(x-y). \end{aligned} \quad (3.33)$$

O modelo dual à Klein-Gordon obtido através da ação mestra (3.25) é exatamente o modelo da ação (3.10), o qual denominaremos por $S_A^{(0,m)}$, onde o índice subscrito

A é referente ao campo vetorial e os índices superescritos são referentes ao spin e à massa do modelo em questão, respectivamente. De (3.33) e (3.28) temos:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{KG} = \left\langle \frac{\partial \cdot A(x)}{m} \frac{\partial \cdot A(y)}{m} \right\rangle_{S_A^{(0,m)}} + \frac{i}{m^2} \delta(x-y). \quad (3.34)$$

Conseguimos assim, via funcional gerador, um mapeamento entre ambas as teorias dado por:

$$\phi(x) \longleftrightarrow \frac{\partial^\mu A_\mu(x)}{m}, \quad (3.35)$$

onde o mapeamento é conseguido a menos do termo de contato (delta de Dirac), ou seja, a função de n-pontos de ambas as teorias será igual em todos os pontos do espaço, exceto quando $x = y$. Se derivarmos (3.27) e (3.32) em relação à fonte vetorial J_μ , obteremos, ao invés de (3.35):

$$\left\langle \frac{\partial^\mu \phi(x)}{m} \frac{\partial^\nu \phi(y)}{m} \right\rangle_{KG} = \left\langle A^\mu(x) A^\nu(y) \right\rangle_{S_A^{(0,m)}} + \frac{i}{m^2} \delta(x-y), \quad (3.36)$$

de onde tiramos o mapeamento:

$$A^\mu(x) \longleftrightarrow \frac{\partial^\mu \phi(x)}{m}. \quad (3.37)$$

Uma regra que pode ser observada após os cálculos acima e será adotada para as próximas seções é que o mapeamento dual é dado pelo termo linear na fonte.

Podemos verificar que os mapeamentos obtidos são consistentes um com o outro. De fato, substituindo por exemplo o mapeamento dado pela equação (3.35) na equação de Klein-Gordon, obtemos justamente a equação de movimento do modelo $S_A^{(0,m)}$ obtida em (3.13). De maneira análoga, substituindo o mapeamento (3.37) na equação (3.12) obtemos a equação de Klein-Gordon.

Quanticamente podemos checar que as equações de movimento também são mantidas pelo mapeamento obtido. De uma maneira geral, sabemos que a integral funcional de uma derivada funcional total é nula:

$$\int \mathcal{D}B \frac{\delta}{\delta B(x_1)} [e^{iS} B(x_2) \dots B(x_n)] = 0, \quad (3.38)$$

onde simbolicamente $S = \int d^D x B \hat{O} B / 2$. Aplicando-se a mesma sequência acima, podemos encontrar a função de n-pontos desta teoria, a qual fornece,

$$\langle \hat{O} B(x_1) B(x_2) \dots B(x_N) \rangle = 0,$$

desde que $x_1 \neq x_i$ para todo $i = 2, 3, \dots, N$. Assim, as equações de movimento $\hat{O} B = 0$ são também válidas nas funções de correlação a menos de termos de contato que é justamente como esperamos que os mapeamentos duais ocorram.

3.3 Limite de massa nula

Os mapeamentos duais (3.35) e (3.37) sugerem que o limite de massa nula possa ser singular. De fato, o limite de massa nula da teoria $S_A^{(0,m)}$ é diferente do limite de massa nula da teoria de Klein-Gordon. Vamos checar de 3 formas distintas que quando $m \rightarrow 0$ o primeiro modelo citado não possui conteúdo físico de qualquer natureza. Isto será importante posteriormente, pois este modelo sem conteúdo físico pode ser usado como termo de mistura na lagrangiana massiva e nos permitirá obter um modelo de quarta ordem em derivadas na seção seguinte.

No limite de massa nula temos:

$$S_A^{(0,0)} = \int d^D x A^\mu(x) \left(\frac{-\partial_\mu \partial_\nu}{2} \right) A^\nu(x). \quad (3.39)$$

Neste caso, o modelo possui simetria de calibre, ou seja, se fizermos uma transformação,

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \partial_\alpha \Lambda^{\mu\alpha}; \quad \Lambda^{\mu\alpha} = -\Lambda^{\alpha\mu}. \quad (3.40)$$

a ação permanece invariante. Se acrescentarmos um termo de fonte $A^\mu J_\mu$,

$$S_A^{(0,0)}[J] = \int d^D x \left(\frac{(\partial_\mu A^\mu(x))^2}{2} + J_\mu(x) A^\mu(x) \right), \quad (3.41)$$

e impormos que a ação permaneça invariante sob a transformação (3.40), devemos ter $\partial_\nu J_\mu - \partial_\mu J_\nu = 0$, ou seja, $J_\mu = \partial_\mu J$. Este resultado será útil na análise da amplitude de dois pontos que será feita posteriormente.

Extremizando a ação obtemos as equações de movimento, para fonte nula:

$$\partial_\mu[\partial_\nu A^\nu(x)] = 0. \quad (3.42)$$

Como os campos devem ser nulos no infinito, temos $\partial_\nu A^\nu(x) = 0$. Portanto, teremos um campo transversal, $A^\mu(x) = \partial_\alpha B^{\mu\alpha}(x)$, onde $B^{\mu\alpha}(x) = -B^{\alpha\mu}(x)$ é um tensor antissimétrico arbitrário. Como a teoria é invariante sob a transformação (3.40), podemos sempre fazer a transformação (3.40) com, $\Lambda^{\mu\alpha}(x) = -B^{\mu\alpha}(x)$, e assim, $A^\mu(x) = 0$, ou seja, a teoria (3.39) não possui conteúdo físico e é dita uma *teoria puro gauge*.

Podemos analisar o conteúdo físico de partículas da teoria $S_A^{(0,0)}$ via propagador e checar que, de fato, ela não descreve nenhuma partícula física. Como a teoria dada pela equação (3.41) possui simetria de calibre, devemos fixá-lo com o intuito de obter a inversa do operador contido no interior da ação. Neste caso, fixamos o calibre usando um termo do tipo Maxwell da seguinte forma:

$$S_A^{(0,0)}[J] = \int d^D x \left(\frac{(\partial_\mu A^\mu(x))^2}{2} + \frac{\lambda}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (3.43)$$

Esta última pode ser reescrita, sem fonte, de uma forma mais conveniente dada por:

$$S_A^{(0,0)}[0] = \int d^D x \left[A^\mu \left(\lambda \square \theta_{\mu\nu} - \frac{\square \omega_{\mu\nu}}{2} \right) A^\nu \right]. \quad (3.44)$$

Como no caso anterior, devemos calcular a inversa do operador $K_{\mu\nu} = \lambda \square \theta_{\mu\nu} - \frac{\square \omega_{\mu\nu}}{2}$, o qual é facilmente encontrado e dado por $(K_{\mu\nu})^{-1} = \frac{1}{\lambda \square} \theta_{\mu\nu} - \frac{2}{\square} \omega_{\mu\nu}$. Com estes dados, calculamos a amplitude de dois pontos:

$$A(k) = -\frac{i}{2} J_\mu^*(k) \left(\frac{-1}{\lambda k^2} \theta^{\mu\nu} + \frac{2}{k^2} \omega^{\mu\nu} \right) J_\nu(k). \quad (3.45)$$

Usando a restrição, $J_\mu = k_\mu J$, temos:

$$A(k) = -i J_\mu^*(k) \left(\frac{\omega^{\mu\nu}}{k^2} \right) J_\nu(k) = -i |J(k)|^2. \quad (3.46)$$

Portanto a amplitude de dois pontos não possui pólos e o espectro de partículas é vazio.

Além das checagens de equação de movimento e propagador, podemos também verificar que o modelo $S_A^{(0,0)}$ não possui nenhum grau de liberdade via o formalismo hamiltoniano, contando o número de vínculos de primeira e segunda-classe. Como vimos, a lagrangiana do modelo não massivo é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} = \frac{(\partial_0 A_0)^2}{2} - \partial_0 A_0 \partial_i A_i + \frac{(\partial_i A_i)^2}{2}. \quad (3.47)$$

Com isso, calculamos os momenta canonicamente conjugados:

$$\pi^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = \partial_0 A_0(x) - \partial_i A_i(x), \quad (3.48)$$

$$\pi^i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \phi^i(x) \equiv \pi^i(x) \approx 0. \quad (3.49)$$

Observando as equações (3.48) e (3.49) vemos que a primeira delas não é um vínculo, pois podemos inverter a “velocidade” do campo $A_0(x)$ em função do seu momento canonicamente conjugado. No entanto, a última equação fornece $\phi^i(x) \approx 0, i = 1, 2, \dots, D - 1$ vínculos primários. A hamiltoniana canônica será:

$$H_c = \int d^{D-1}x \left[\pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} \right] = \int d^{D-1}x \left[\frac{(\pi^0)^2}{2} + \pi^0 \partial_i A^i \right]. \quad (3.50)$$

Com o intuito de utilizar o algoritmo de Dirac-Bergmann, calculamos a hamiltoniana primária:

$$H_p = \int d^{D-1}x \left[\frac{(\pi^0)^2}{2} + \pi^0 \partial_i A^i + \lambda_i \pi^i \right]. \quad (3.51)$$

Impondo as condições de consistência sobre os vínculos $\phi^i(x)$ ’s definidos em (3.49), temos $D - 1$ vínculos secundários:

$$\chi^i(x) \equiv \dot{\phi}^i(x) = \{\phi^i(x), H_p\} = \partial^i \pi^0(x) \approx 0. \quad (3.52)$$

Impondo condições de consistência sobre os vínculos acima, obtemos $0 \approx 0$ e a imposição é identicamente satisfeita, portanto, o algoritmo termina aqui. Além disso, os vínculos são de primeira-classe pois $\{\chi^i(x), \phi^l(y)\} = 0$ para todo $l = 1, \dots, D - 1$ e $i = 1, \dots, D - 1$. A contagem de graus de liberdade canônica não é

feita neste caso, pois como vemos, a equação (3.52) impõe apenas condições sobre $\pi^0(x)$. Na verdade, resolvendo-as temos:

$$\pi^0(x) \approx cf(t), \quad (3.53)$$

porém, como os campos devem ser nulos para distâncias grandes, devemos ter $\pi^0(x) \approx 0$ já que a função $f(t)$ arbitrária só depende do tempo. Portanto, terminamos o processo com $D - 1$ vínculos primários de primeira classe $\pi^i = 0$ e 1 vínculo secundário de primeira-classe π^0 . Assim, podemos eliminar $2D$ campos (π_μ, A^μ) , ou seja, a teoria possui 0 graus de liberdade. Após terminar os cálculos, tomamos conhecimento da referência [11] onde conclusões semelhantes são obtidas.

3.4 Obtenção de um modelo de 4ª ordem

Como verificamos na seção anterior, a teoria $S_A^{(0,0)}$ é do tipo puro gauge, ou seja, não possui conteúdo físico de qualquer natureza. Teorias deste tipo, a princípio, podem parecer inúteis, porém é sabido que tais teorias podem ser adicionadas como termo de mistura na ação original (massiva) e com isso, podemos obter uma ação mestra. Podemos então, utilizando esta última, obter um modelo vetorial de 4ª ordem dual ao modelo Klein-Gordon. Acrescentando fonte para os campos B_μ e A_μ , temos:

$$S_M = \int d^D x \left(\frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{(\partial_\mu B^\mu)^2}{2} + J_\mu A^\mu + T_\nu B^\nu \right). \quad (3.54)$$

O funcional gerador para esta ação será:

$$Z_M[T_\nu, J_\mu] = \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}B^\nu e^{i \int d^D x \left[\frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{(\partial_\mu B^\mu)^2}{2} + J_\mu A^\mu + T_\nu B^\nu \right]}. \quad (3.55)$$

Fazendo-se um *shift* nos campos $B^\mu(x) \rightarrow B^\mu(x) - A^\mu(x)$, podemos escrever a ação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_M = & \int d^D x \left[\frac{m^2}{2} \left(A_\mu - \frac{\partial_\mu (\partial \cdot B)}{m^2} + \frac{J^\mu}{m^2} \right)^2 - \frac{(\partial_\mu \partial \cdot B)^2}{2m^2} - \frac{(\partial_\mu B^\mu)^2}{2} \right. \\ & \left. + \frac{J^\mu \partial_\mu (\partial \cdot B)}{m^2} - \frac{1}{2m^2} J_\mu J^\mu + T_\nu B^\nu \right], \end{aligned} \quad (3.56)$$

ou ainda,

$$S_M = \int d^D x \left[\frac{m^2}{2} \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu - \frac{1}{2m^2} (\partial \cdot B (\square - m^2) \partial \cdot B) + \frac{J^\mu \partial_\mu (\partial \cdot B)}{m^2} - \frac{1}{2m^2} J_\mu J^\mu + T_\nu B^\nu \right]. \quad (3.57)$$

Na ausência de fontes, integrando em $\tilde{A}_\mu \equiv A_\mu - \frac{\partial_\mu (\partial \cdot B)}{m^2}$ no funcional gerador e reescalando os campos $B^\mu \rightarrow \sqrt{2}mB^\mu$, obtemos um modelo massivo de 4ª ordem dado por:

$$S_B^{(0,m)} = \int d^D x (\partial \cdot B (\square - m^2) \partial \cdot B). \quad (3.58)$$

Podemos ver claramente que a ação (3.58) é invariante pela transformação $B^\mu \rightarrow B^\mu + \partial_\alpha \Lambda^{\mu\alpha}$, onde $\Lambda^{\mu\alpha} = -\Lambda^{\alpha\mu}$. Se acrescentarmos um termo de fonte $B^\mu J_\mu$ e impormos que a ação permaneça invariante frente esta transformação, teremos novamente, $J_\mu = \partial_\mu J$.

Extremizando a ação, temos:

$$\frac{\delta S_B^{(0,m)}}{\delta B^\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\square - m^2) \partial \cdot B = 0. \quad (3.59)$$

Novamente, como queremos que os campos sejam nulos no infinito, devemos ter:

$$(\square - m^2) \partial \cdot B = 0. \quad (3.60)$$

Podemos verificar ainda que a parte longitudinal satisfaz a equação de Klein-Gordon, enquanto que a transversal é puro gauge.

Vamos analisar agora o conteúdo físico de partículas do modelo de 4ª ordem analisando os pólos encontrados na amplitude de dois pontos. Como este modelo tem simetria de calibre, devemos fixá-lo para que possamos encontrar o propagador. Assim, reescrevemos a ação (3.58), já com o termo de fixação de calibre, na forma:

$$S_B^{(0,m)} = \int d^D x \left\{ B^\mu \left[-\square (\square - m^2) \omega_{\mu\nu} + \lambda \square \theta_{\mu\nu} \right] B^\nu \right\}. \quad (3.61)$$

Definindo o operador,

$$K_{\mu\nu} = -\square(\square - m^2)\omega_{\mu\nu} + \lambda\square\theta_{\mu\nu}, \quad (3.62)$$

temos,

$$(K^{\mu\nu})^{-1} = \frac{1}{-\square(\square - m^2)}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda\square}\theta^{\mu\nu}. \quad (3.63)$$

Usando este último resultado, calculamos a amplitude de dois pontos:

$$A(k) = \frac{i}{2}J_\mu^*(k)\left(\frac{1}{k^2(k^2 + m^2)}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda k^2}\theta^{\mu\nu}\right)J_\nu(k). \quad (3.64)$$

Usando a condição de que J_ν é puramente longitudinal, ou seja, $J_\nu = k_\nu J$, obtemos:

$$A(k) = \frac{i}{2} \frac{|J|^2}{(k^2 + m^2)} \quad (3.65)$$

e temos apenas um pólo em $k^2 = -m^2$. Analisando o resíduo associado a este pólo, temos:

$$R_{-m^2} = \lim_{k^2 \rightarrow -m^2} (k^2 + m^2)A(k) = \frac{i}{2}|J|^2 \Rightarrow \text{Im}R_{-m^2} > 0. \quad (3.66)$$

Novamente, temos uma partícula física massiva associada ao pólo no setor de spin-0 e o modelo tem o mesmo conteúdo físico de partículas que o modelo de Klein-Gordon.

3.4.1 Limite de massa nula

Tomando o limite de massa nula na equação (3.64) temos:

$$A(k) = \frac{i}{2}J_\mu^*(k)\left(\frac{1}{k^4}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda k^2}\theta^{\mu\nu}\right)J_\nu(k). \quad (3.67)$$

Usando $J_\nu = k_\nu J$, concluimos que:

$$A(k) = \frac{i}{2} \frac{|J|^2}{k^2}, \quad (3.68)$$

e temos um pólo simples em $k^2 = 0$. O resíduo será:

$$R_0 = \lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 A(k) = \frac{i}{2}|J|^2 \Rightarrow \text{Im}R_0 > 0. \quad (3.69)$$

Portanto, nossa teoria possui um limite de massa nula bem comportado e o modelo obtido após tomado esse limite é uma teoria com o mesmo conteúdo físico de partículas que a teoria de D’Alambert, logo tal teoria não é puro gauge. Um último aspecto que pode ser observado é um possível mapeamento entre a teoria de Klein-Gordon original e o modelo obtido de quarta ordem (3.58). Novamente, através do termo linear na fonte da equação (3.57) obtemos, após o reescalamento, o mapeamento

$$A_\mu(x) \leftrightarrow \frac{\partial_\mu(\partial \cdot B(x))}{m}, \quad (3.70)$$

e usando os mapeamentos (3.35) e (3.37) somos levados ao mapeamento entre a teoria de KG e o modelo (3.58):

$$\phi(x) \leftrightarrow \partial \cdot B(x). \quad (3.71)$$

Em resumo, obtivemos neste capítulo duas representações vetoriais para o campo de KG (spin-0) dadas em (3.11) e (3.58). A primeira não possui limite de massa nula, ao contrário da segunda de ordem superior em derivadas. No próximo capítulo iremos obter duas representações tensoriais para o campo de spin-1.

Capítulo 4

Spin-1

Neste capítulo vamos apresentar um novo modelo tensorial, proposto em [14], que descreve partículas de spin-1 massivas e não massivas. Como introdução, apresentamos na seção 4.1 uma breve revisão do modelo de Maxwell-Proca que corresponde à forma tradicional de descrevermos partículas de spin-1.

4.1 Modelo de Maxwell-Proca D -dimensional

O modelo de Maxwell-Proca, sem fonte, em D -dimensões é expresso através da seguinte lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{MP}(A) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad \mu = 0, 1, \dots, D-1. \quad (4.1)$$

Com o intuito de fazer um mapeamento entre o campo vetorial do modelo de Maxwell-Proca e o campo tensorial do modelo a ser discutido, é conveniente obter as equações de movimento para o primeiro modelo. Estas são facilmente obtidas da lagrangiana (4.1) e tem a forma,

$$(\square - m^2)A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.2)$$

É sabido que toda partícula de spin-1 massiva deve satisfazer as equações de Klein-Gordon $(\square - m^2)g^\mu = 0$ e a condição de transversalidade, ou seja $\partial \cdot g = 0$, vide por exemplo [10], sendo g^μ o campo vetorial que representa a partícula

em estudo. Podemos tirar ambas condições da equação (4.2) acima. De fato, aplicando-se ∂_ν nesta equação obtemos,

$$\partial_\nu A^\nu = 0, \quad (4.3)$$

e concluímos, também de (4.2) que,

$$(\square - m^2)A^\nu = 0. \quad (4.4)$$

Logo, a equação de Maxwell-Proca representa uma partícula massiva de spin-1. É possível checar também, através do cálculo da amplitude de dois pontos, que o pólo massivo desta última se encontra justamente no setor de spin-1 e que a parte imaginária do resíduo é positiva, representando portanto, uma partícula física massiva.

Outra análise que será útil para compararmos posteriormente é a análise de vínculos desse modelo. Através da lagrangiana (4.1) obtemos apenas um vínculo primário,

$$\phi^0(x) \equiv \pi^0(x) \approx 0. \quad (4.5)$$

Enquanto que a hamiltoniana primária tem a seguinte forma,

$$H_P = \int d^{D-1}x \left(\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \lambda_0 \pi^0 \right). \quad (4.6)$$

Impondo condições de consistência sobre o vínculo primário, obtém-se um vínculo secundário,

$$\phi^1(x) \equiv \partial_i \pi^i(x) + m^2 A_0(x) \approx 0. \quad (4.7)$$

A condição de consistência sobre este último vínculo não fornece outro vínculo, mas sim determina o multiplicador de Lagrange λ_0 ,

$$\lambda_0(x) \approx -\partial_i A^i(x), \quad (4.8)$$

e o algoritmo termina aqui.

Podemos checar também que a hamiltoniana de Maxwell-Proca é definida positiva substituindo os vínculos (4.5) e (4.7) em (4.6),

$$H_P = \int d^{D-1}x \left(\frac{1}{2} (\pi^i)^2 + \frac{1}{4} (F^{ij})^2 + \frac{m^2}{2} (A_0^2 + A_i^2) \right). \quad (4.9)$$

Pode-se verificar, além disso, que os vínculos são de segunda-classe. De fato,

$$\{\phi^0(x), \phi^1(y)\} = -m^2 \delta(x - y). \quad (4.10)$$

Fazendo a contagem de graus de liberdade, como explicada anteriormente, temos $2D$ campos independentes no formalismo hamiltoniano (A_μ, π^μ) , 2 vínculos de segunda classe (ϕ^0 e ϕ^1) e portanto $D - 1$ graus de liberdade físicos, ou seja, o modelo de Maxwell-Proca em D -dimensões descreve uma partícula com $D - 1$ graus de liberdade.

4.2 Mapeamento dual no tensor simétrico

4.2.1 Caso não massivo

No caso de spin-0, reescrevemos a parte não massiva da lagrangiana de KG $(-\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi / 2)$ em primeira ordem com o auxílio de um campo vetorial $(B_\mu B^\mu + B_\mu \partial^\mu \phi)$. Vamos agora, com o objetivo de obter um modelo dual à teoria de Maxwell-Proca, definir uma ação mestra de maneira análoga. Começamos com uma versão em primeira ordem da teoria de Maxwell obtida em [25], para $D = 4$, com auxílio de um campo tensorial simétrico $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$. Generalizando-a para D -dimensões e acrescentando um termo de fonte, temos¹:

$$S_M^{(1,0)}[W, A, T] = \int d^D x \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} + 2W^{\mu\nu} \partial_{(\mu} A_{\nu)} + W_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right). \quad (4.11)$$

Podemos reescrever a ação acima de forma inteiramente análoga ao que foi feito no capítulo 3, na forma:

$$\begin{aligned} S^{(1,0)} &= \int d^D x \left\{ \left(W^{\mu\nu} + \partial^{(\mu} A^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \partial \cdot A + \frac{T^{\mu\nu}}{2} - \frac{\eta^{\mu\nu} T}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{(D-1)} \left[W - (D-1) \left(\partial \cdot A + \frac{T}{2} \right) \right]^2 + T^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \partial \cdot A - \partial_{(\mu} A_{\nu)}] \\ &\quad \left. + \frac{T^2 - T_{\mu\nu}^2}{4} - [(\partial_{(\mu} A_{\nu)})^2 - (\partial \cdot A)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

¹Definimos: $A_{(\mu} B_{\nu)} \equiv \frac{A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu}{2}$

a qual, após um deslocamento no campo $W^{\mu\nu} = \tilde{W}^{\mu\nu} - \partial^{(\mu} A^{\nu)} + \eta^{\mu\nu} \partial \cdot A - \frac{T^{\mu\nu}}{2} + \frac{\eta^{\mu\nu} T}{2}$, podemos eliminar o campo $W^{\mu\nu}$ através de suas equações de movimento (integral gaussiana) e após uma integração por partes no último termo entre colchetes da ação (4.12), obtemos a ação de Maxwell mais termos de fonte:

$$S^{(1,0)} = \int d^D x \left\{ T^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \partial \cdot A - \partial_{(\mu} A_{\nu)}] + \frac{T^2 - T_{\mu\nu}^2}{4} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A) \right\}. \quad (4.13)$$

Note que embora (4.12) dependa apenas de $\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$, na fórmula (4.13) aparece somente $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. A ação mestra (4.11) reescrita na forma (4.12) torna evidente que tal ação é invariante, na ausência de fontes, frente às transformações,

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \psi; \quad \delta W_{\mu\nu} = \square \theta_{\mu\nu} \psi \quad \Rightarrow \quad \delta W = (D-1) \square \psi. \quad (4.14)$$

Por outro lado, substituindo a ação (4.11) no funcional gerador e calculando agora a integral sobre o campo vetorial obteremos um vínculo funcional da forma:

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = 0. \quad (4.15)$$

Resolvendo o vínculo funcional acima e colocando a solução de volta na ação, obtemos enfim, o modelo dual à Maxwell utilizando-se um tensor simétrico. A solução geral do vínculo funcional acima, em D dimensões, é dada por:

$$W^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}} \epsilon^{\nu\beta_1 \dots \beta_{D-2}} \partial_\delta \partial_\gamma h_{[\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}][\beta_1 \dots \beta_{D-2}]}, \quad (4.16)$$

onde $h_{[\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}][\beta_1 \dots \beta_{D-2}]} = h_{[\beta_1 \dots \beta_{D-2}][\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}]}$, e os colchetes significam uma combinação antissimétrica de índices.

No caso em que $D = 1 + 1$ dimensões, vê-se facilmente que a solução geral tem a forma $W^{\mu\nu} = \square \theta^{\mu\nu} h$ e portanto, a teoria será puro gauge, pois como foi dito na equação (4.14), o tensor $W^{\mu\nu}$ possui simetria de calibre justamente desta forma. Logo, a teoria não apresenta nenhum grau de liberdade estando de acordo com o esperado, pois é sabido que uma partícula de spin-1 sem massa em D -dimensões possui apenas $D - 2$ graus de liberdade.

No caso em que $D = 2+1$ dimensões, se substituirmos a solução de (4.15), dada por (4.16), em (4.11), conseguimos obter o chamado termo- K linearizado. Este termo é obtido fazendo-se a linearização do limite de massa nula [15] da teoria conhecida como *new massive gravity* [4]. Na aproximação quadrática nas flutuações da métrica, obtemos:

$$\begin{aligned} S^*[h] &= \int d^3x h_{\alpha\beta} \left\{ \square \theta^{\alpha\mu} \square \theta^{\beta\nu} - \frac{\square \theta^{\alpha\beta} \square \theta^{\mu\nu}}{2} \right\} h_{\mu\nu} \\ &= \int d^3x \left\{ \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right] \right\}_{hh}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde fizemos a linearização nos *dreibeine*, $e_{\rho a} = \eta_{\rho a} + h_{\rho a}$, e substituímos esse resultado em, $g_{\rho\sigma} = e_{\rho a} e^a_{\sigma}$ (vide apêndice C). Apesar de ser um modelo de quarta ordem, conseguimos verificar, de modo original, que o modelo- K linearizado é dual à teoria de Maxwell, um fato que foi primeiramente notado em [5].

Para o caso D -dimensional e excluindo o caso em que $D = 1 + 1$ pois este é, como discutido acima, trivial, podemos reescrever a solução geral dada por (4.16), na forma:

$$W_{\mu\nu} = \partial^\sigma \partial^\rho B_{\mu\sigma\nu\rho}, \quad (4.18)$$

onde

$$B_{\mu\sigma\nu\rho} = \epsilon_{\mu\sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}} \epsilon_{\nu\rho}^{\beta_1 \dots \beta_{D-2}} h_{[\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}][\beta_1 \dots \beta_{D-2}]}. \quad (4.19)$$

Substituindo a solução geral em (4.11), obtemos um modelo de quarta ordem dual à Maxwell para qualquer dimensão $D \geq 3$ dado por ²:

$$S^*[h] = \int d^Dx \left[(\partial^\sigma \partial^\rho B_{\mu\sigma\nu\rho})^2 - \frac{(\partial^\sigma \partial^\rho B^\mu_{\sigma\mu\rho})^2}{(D-1)} \right]. \quad (4.20)$$

Podemos obter ainda um mapeamento dual entre a teoria de Maxwell e a teoria dual $S^*[h]$ acima, porém este mapeamento não é feito de maneira direta como no caso do modelo massivo para partículas de spin-0, tratado no capítulo 3. Como vimos, em modelos massivos os mapeamentos duais podem ser obtidos,

²Em $D = 4$ o modelo (4.20) coincide com o de [19]

na prática, apenas comparando os termos lineares na fonte da ação mestra do modelo em questão, ora reescrevendo esta última completando-se quadrado em um dos campos, ora em outro. No caso não massivo isto também é possível, porém é necessário um pouco de cuidado, pois a ação possui simetria de calibre e por isso haverá restrições sobre as fontes, como já vimos nos limites não massivos já estudados. Um fato mais fundamental do que o que foi dito até agora, é que ao acrescentarmos o termo de fonte $W_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ à equação (4.11), como consequência da simetria de calibre, a fonte deve satisfazer o vínculo:

$$\square\theta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.21)$$

Talvez a solução mais natural para o vínculo acima seja da forma $T^{\mu\nu} = \partial^\mu J^\nu + \partial^\nu J^\mu$, no entanto, ao substituirmos esta fonte na ação mestra (4.11) e integrarmos este termo por partes, ficamos com um termo do tipo $-2\partial^\mu W_{\mu\nu}J^\nu$, o qual possuirá funções de correlação nulas devido ao vínculo (4.15). Além disso, é possível verificar que o termo $\partial^\mu W_{\mu\nu}$ é mapeado em $-\partial^\mu F_{\mu\nu}/2$, sendo este último justamente as equações de movimento do modelo de Maxwell, e portanto, teríamos um mapeamento trivial.

Uma forma de se obter um mapeamento não trivial é notando que na teoria de Maxwell a quantidade básica invariante de calibre é dada pelo tensor antissimétrico $F_{\mu\nu}$. Já no modelo dual $S^*[h]$, devemos construir uma quantidade antissimétrica invariante pelas transformações (4.14) para que possamos mapear quantidades invariantes de calibre dos dois modelos. Como o tensor $W_{\mu\nu}$ é simétrico, talvez a maneira mais simples de se obter uma quantidade invariante de calibre e antissimétrica no modelo $S^*[h]$, seja tomar combinações de derivadas do tensor $W_{\mu\nu}$. Pensando desta maneira, podemos fazer uma combinação linear dos termos antissimétricos $\partial_\sigma W_{\rho\nu} - \partial_\rho W_{\sigma\nu}$ e $(\eta_{\sigma\nu}\partial_\rho - \eta_{\rho\nu}\partial_\sigma)W$ e com isto, construímos uma quantidade invariante pelas transformações (4.14) dada por:

$$G_{[\sigma\rho]\nu}(W) \equiv \partial_\sigma W_{\rho\nu} - \partial_\rho W_{\sigma\nu} + \frac{(\eta_{\sigma\nu}\partial_\rho - \eta_{\rho\nu}\partial_\sigma)}{(D-1)}W. \quad (4.22)$$

Como a quantidade acima é invariante frente às transformações (4.14), podemos substituir o termo $W_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ da equação (4.11) por $G_{[\sigma\rho]\nu}T^{[\sigma\rho]\nu}$ e a ação continuará

invariante de calibre, sem termos que impor qualquer restrição à fonte $T^{[\sigma\rho]\nu}$. Fazendo isto, obtemos:

$$S_M^{(1,0)}[W, A, T] = \int d^D x \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} + 2W^{\mu\nu} \partial_{(\mu} A_{\nu)} + G_{[\sigma\rho]\nu} T^{[\sigma\rho]\nu} \right), \quad (4.23)$$

e integrando por partes o último termo da ação acima, obtemos,

$$S_M^{(1,0)}[W, A, T] = \int d^D x \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} + 2W^{\mu\nu} \partial_{(\mu} A_{\nu)} + W_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} \right), \quad (4.24)$$

onde $\tilde{T}^{\mu\nu} \equiv -2 \left(\partial_\alpha T^{[\alpha\mu]\nu} - \frac{1}{D-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha T^{[\alpha\sigma]_\sigma} \right)$ e é possível verificar que esta fonte satisfaz o vínculo (4.21). Portanto, podemos utilizar os cálculos que nos levaram a reescrever a ação (4.11) na forma (4.12), simplesmente trocando $T^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{T}^{\mu\nu}$. Reescrevendo, portanto, a ação (4.24) na forma (4.12) e integrando por partes o termo linear na fonte, obtemos:

$$\begin{aligned} S^{(1,0)} &= \int d^D x \left\{ \left(W^{\mu\nu} + \partial^{(\mu} A^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \partial \cdot A + \frac{\tilde{T}^{\mu\nu}}{2} - \frac{\eta^{\mu\nu} \tilde{T}}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{(D-1)} \left[W - (D-1) \left(\partial \cdot A + \frac{\tilde{T}}{2} \right) \right]^2 - \frac{1}{2} T^{[\alpha\mu]\nu} \partial_\nu F_{[\alpha\mu]} \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{T}^2 - \tilde{T}_{\mu\nu}^2}{4} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2(A) \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Comparando os termos lineares na fonte $T^{[\alpha\mu]\nu}$ das equações (4.23) e (4.25), somos levados ao mapeamento dual,

$$G_{[\sigma\mu]\nu}(W) \leftrightarrow -\frac{1}{2} \partial_\nu F_{\sigma\mu}(A). \quad (4.26)$$

4.2.2 Caso massivo

Uma forma simples de se obter uma ação mestra para o caso massivo é feita de forma análoga ao caso de spin-0. Acrescentando o termo de massa (Proca) e fontes, temos a ação mestra:

$$\begin{aligned} S_M^{(1,m)}[W, A, J, T] &= \int d^D x \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} + 2W^{\mu\nu} \partial_{(\mu} A_{\nu)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu + J \cdot A + W_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, a qual pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
S_M^{(1,m)}[W, A, J, T] &= \int d^D x \left\{ \left(W^{\mu\nu} + \partial^{(\mu} A^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \partial \cdot A + \frac{T^{\mu\nu}}{2} - \frac{\eta^{\mu\nu} T}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad - \frac{1}{(D-1)} \left[W - (D-1) \left(\partial \cdot A + \frac{T}{2} \right) \right]^2 + T^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \partial \cdot A - \partial_{(\mu} A_{\nu)}] \\
&\quad + \frac{T^2 - T_{\mu\nu}^2}{4} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{m^2}{2} A^2 + J \cdot A \Big\} \\
&= \int d^D x \left\{ \tilde{W}^{\mu\nu} \tilde{W}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{W}^2}{(D-1)} + T^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \partial \cdot A - \partial_{(\mu} A_{\nu)}] \right. \\
&\quad + \frac{T^2 - T_{\mu\nu}^2}{4} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{m^2}{2} A^2 + J \cdot A \Big\}, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{W}^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} + \partial^{(\mu} A^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \partial \cdot A + \frac{T^{\mu\nu}}{2} - \frac{\eta^{\mu\nu} T}{2}$. Assim teremos a ação de Maxwell-Proca e termos de fonte mais termos quadráticos em $\tilde{W}^{\mu\nu}$, os quais não possuem dinâmica e podem ser desprezados. Por outro lado, podemos reescrever (4.27), após $W^{\mu\nu} \rightarrow mW^{\mu\nu}/\sqrt{2}$, como:

$$\begin{aligned}
S_M^{(1,m)} &= S_W^{(1,m)} + \int d^D x \left\{ \frac{J^2}{2m^2} - \frac{\sqrt{2} J^\mu \partial^\nu W_{\mu\nu}}{m} - \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{\sqrt{2} \partial^\nu W_{\mu\nu}}{m} - \frac{J_\mu}{m^2} \right)^2 \right. \\
&\quad + \frac{m}{\sqrt{2}} W_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \Big\} = S_W^{(1,m)} + \int d^D x \left\{ \frac{J^2}{2m^2} - \frac{\sqrt{2} J^\mu \partial^\nu W_{\mu\nu}}{m} - \frac{m^2}{2} \tilde{A}_\mu^2 \right\} \tag{4.29}
\end{aligned}$$

onde,

$$S_W^{(1,m)} = \int d^D x \left[(\partial^\nu W_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu}^2 - \frac{W^2}{(D-1)} \right) \right], \tag{4.30}$$

e $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{\sqrt{2} \partial^\nu W_{\mu\nu}}{m} - \frac{J_\mu}{m^2}$. Note que $\tilde{A}_\mu$ não possui dinâmica e pode ser desprezado. Logo, ficamos com uma ação para o campo $W_{\mu\nu}$ mais termos de fonte, e dizemos que $S_W^{(1,m)}$ é dual ao modelo de Maxwell-Proca. Os mapeamentos duais entre as teorias são obtidos calculando-se funções de correlação como feito no caso de spin-0. Via de regra eles são dados pelos termos lineares nas fontes da ação mestra em estudo após reescrevê-la completando-se o quadrado. No nosso caso eles serão dados, a menos de termos de contato, pelos termos lineares nas fontes das equações (4.28) e da equação (4.29), ou seja, por:

$$W_{\mu\nu} \leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{m} [\eta_{\mu\nu} \partial \cdot A - \partial_{(\mu} A_{\nu)}], \tag{4.31}$$

$$A_\mu \leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{m} \partial^\nu W_{\nu\mu}. \tag{4.32}$$

4.3 Consistência do modelo $S_W^{(1,m)}$

4.3.1 Equações de movimento

Podemos consolidar a dualidade entre o modelo de Maxwell-Proca e o modelo $S_W^{(1,m)}$ analisando as equações de movimento de ambos. As equações de movimento para o modelo $S_W^{(1,m)}$ são obtidas da ação,

$$S_W^{(1,m)} = \int d^D x \left[(\partial^\nu W_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu}^2 - \frac{W^2}{(D-1)} \right) \right], \quad (4.33)$$

fazendo-se,

$$\frac{\delta S_W}{\delta W_{\mu\nu}} = \partial_\nu \partial^\alpha W_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha W_{\nu\alpha} + m^2 \left(\eta_{\mu\nu} \frac{W}{(D-1)} - W_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (4.34)$$

Aplicando-se $\eta^{\mu\nu}$ na equação (4.34) obtemos,

$$\partial^\mu \partial^\nu W_{\mu\nu} = -\frac{m^2}{2} \frac{W}{(D-1)}. \quad (4.35)$$

Por fim, aplicando-se ∂^μ em (4.34) e utilizando (4.35) nesta mesma equação, temos

$$\square(\partial^\alpha W_{\nu\alpha}) - \partial_\nu(\partial^\alpha \partial^\beta W_{\alpha\beta}) - m^2 \partial^\alpha W_{\nu\alpha} = 0, \quad (4.36)$$

a qual é equivalente à equação de Maxwell-Proca com $A_\mu \sim \partial^\alpha W_{\alpha\mu}$, pois neste último modelo às equações de movimento são:

$$\square A_\nu - \partial_\nu(\partial \cdot A) - m^2 A_\nu = 0. \quad (4.37)$$

Das relações acima obtemos a condição de transversalidade,

$$\partial \cdot A = \partial^\mu \partial^\nu W_{\mu\nu} = 0, \quad (4.38)$$

e a equação Klein-Gordon $(\square - m^2)A_\mu = 0$. Como (4.36) é obtida de (4.34) aplicando-se uma derivada, podemos indagar-nos se a solução geral de (4.34) contém mais informação do que a condição de transversalidade e a equação de Klein-Gordon. Com o objetivo de responder a esta questão, começamos com um *ansatz* para decompor um tensor simétrico de *rank* 2 da seguinte maneira,

$W_{\mu\nu} = \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu + W_{\mu\nu}^T$, com $\partial^\mu W_{\mu\nu}^T = 0$. De (4.38) e (4.35) temos em geral $W = 0$, o que mostra que o traço W é um campo auxiliar. Logo, colocando este último resultado em (4.34), concluímos que $W_{\mu\nu}$ é puramente longitudinal, i.e., $W_{\mu\nu}^T = 0$. Substituindo $W_{\mu\nu} = \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu$ em (4.34), obtemos uma equação de terceira ordem

$$(\square - m^2)\partial_{(\mu}f_{\nu)} + \partial_\mu\partial_\nu(\partial \cdot f) = 0. \quad (4.39)$$

Aplicando-se $\eta^{\mu\nu}$ em $W_{\mu\nu} = \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu$ e usando $W = 0$, deduzimos $\partial \cdot f = 0$. Substituindo este resultado na equação (4.39), temos $\partial_\mu g_\nu + \partial_\nu g_\mu = 0$ onde $g_\mu \equiv (\square - m^2)f_\mu$. Admitindo como condição de contorno que os campos sejam nulos no infinito, a solução para esta equação é $g_\mu = 0$. Consequentemente, concluímos que (4.34) descreve classicamente uma partícula massiva de spin-1 e nada mais.

4.3.2 Conteúdo físico via propagador

Como já vimos, a análise do conteúdo físico de partículas de um modelo pode ser útil para checar se o modelo dual obtido é quanticamente consistente (unitariedade), assim como o já verificado modelo de Maxwell-Proca. Analogamente ao caso de spin-0, torna-se conveniente introduzir os operadores de projeção [3, 34]:

$$(P_{SS}^{(2)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\theta^\mu{}_\rho\theta^\nu{}_\sigma + \theta^\mu{}_\sigma\theta^\nu{}_\rho) - \frac{\theta^{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}}{(D-1)}, \quad (4.40)$$

$$(P_{SS}^{(1)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\theta^\mu{}_\rho\omega^\nu{}_\sigma + \theta^\mu{}_\sigma\omega^\nu{}_\rho + \theta^\nu{}_\rho\omega^\mu{}_\sigma + \theta^\nu{}_\sigma\omega^\mu{}_\rho), \quad (4.41)$$

$$(P_{SS}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{\theta^{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}}{(D-1)} \quad , \quad (P_{WW}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \omega^{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}, \quad (4.42)$$

e os operadores de transição [2],

$$(P_{SW}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{\theta^{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}}{\sqrt{D-1}} \quad , \quad (P_{WS}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{\omega^{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}}{\sqrt{D-1}} \quad , \quad (4.43)$$

onde os índices numéricos superiores indicam o setor de spin do tensor no qual o projetor atua. A álgebra de tais operadores encontra-se no apêndice A.1. Nossa meta nesta seção é analisar o conteúdo físico de partículas da teoria S_W dada em

(4.33) a qual pode ser reescrita, após algumas manipulações, na forma:

$$\begin{aligned}
S_W^{(1,m)} &= \int d^D x \left\{ W_{\mu\nu} \left[\frac{m^2}{2} (P_{SS}^{(2)}) + \left(\frac{-\square + m^2}{2} \right) (P_{SS}^{(1)}) \right. \right. \\
&\quad + \left(-\square + \frac{m^2(D-2)}{2(D-1)} \right) (P_{WW}^{(0)}) \\
&\quad \left. \left. - \frac{m^2}{2\sqrt{D-1}} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right] \right\}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

A inversa deste operador pode ser facilmente encontrada utilizando o resultado contido no apêndice A, o qual nos permite encontrar o propagador:

$$\begin{aligned}
\langle W^{\mu\nu}(k) W_{\alpha\beta}(-k) \rangle &= (K^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma})^{-1} \\
&= \left[\frac{2}{m^2} (P_{SS}^{(2)}) + \left(\frac{2}{k^2 + m^2} \right) (P_{SS}^{(1)}) \right. \\
&\quad + \left(2 - D - \frac{2(D-1)k^2}{m^2} \right) \frac{2}{m^2} (P_{SS}^{(0)}) \\
&\quad \left. - \frac{2\sqrt{D-1}}{m^2} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right]^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

É possível verificar que os pólos em $k^2 = 0$, contidos nos projetores, sempre se cancelam de forma que o propagador $\langle W^{\mu\nu}(k) W_{\alpha\beta}(-k) \rangle$ é analítico em $k^2 = 0$ e temos apenas um pólo $k^2 = -m^2$ no setor de spin-1. Enfim, podemos calcular a amplitude de dois pontos e analisar o conteúdo físico de partículas do modelo em questão,

$$\begin{aligned}
A_W(k) &= T_{\mu\nu}^*(k) \langle W^{\mu\nu}(-k) W_{\alpha\beta}(k) \rangle T^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{2i}{k^2(k^2 + m^2)} (T_{\mu\nu}^*(k) k^\nu \theta^{\mu\alpha} k^\beta T_{\alpha\beta}(k) + \dots),
\end{aligned} \tag{4.46}$$

onde os três pontos dentro dos parênteses denotam o restante do propagador, o qual é analítico em $k^2 = -m^2$. Podemos facilmente continuar o cálculo acima se utilizarmos $k^\beta T_{\alpha\beta}(k) \equiv J_\alpha(k)$ e o fato de que $\theta^{\mu\alpha}$ projeta o vetor $J_\alpha(k)$ na direção transversal ao vetor $k^\mu \equiv (m, 0, 0, \dots, 0)$. De $k^\mu \theta_{\mu\alpha} J^\alpha = k^\mu J_\mu^T = 0$, segue que $J_0^T = 0$. Assim, obtemos

$$A_W(k) = -\frac{2i}{k^2(k^2 + m^2)} (|J_i^T|^2 + \dots). \tag{4.47}$$

O resíduo associado ao único pólo existente³, $k^2 = -m^2$, pode ser facilmente calculado e fornece,

$$R_{-m^2} = (k^2 + m^2)A_W(k) = \frac{2i}{m^2}|J_i^T|^2, \quad (4.48)$$

e portanto,

$$Im(R_{-m^2}) > 0. \quad (4.49)$$

Concluindo, o modelo proposto possui 1 partícula física massiva de spin-1, exatamente o mesmo conteúdo físico de partículas do modelo de Maxwell-Proca.

4.3.3 Formalismo hamiltoniano

Analisaremos agora os vínculos obtidos através da lagrangiana do modelo $W_{\mu\nu}$ massivo, dual ao modelo de Maxwell-Proca, em D dimensões usando o algoritmo de Dirac-Bergmann e verificaremos que tal modelo representa de fato o que esperávamos, i.e., uma teoria com $D - 1$ graus de liberdade e com hamiltoniana definida positiva. Como vimos, a lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \partial^\nu W_{\mu\nu} \partial_\alpha W^{\mu\alpha} + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} \right). \quad (4.50)$$

Para simplificar os cálculos, trabalharemos apenas com os componentes independentes do tensor $W^{\mu\nu}$ com $\mu \leq \nu$. Como sabemos, $W^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, logo, temos que tomar cuidado e trocar a ordem dos índices de $W^{\mu\nu}$ quando $\mu > \nu$. Tendo isto em mente, podemos reescrever a lagrangiana acima da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -(-\partial_0 W_{00} + \partial_i W_{0i})^2 + (-\partial_0 W_{0i} + \partial_j W_{ij})^2 + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} \right). \quad (4.51)$$

Podemos agora calcular os momentos canônicos conjugados,

$$\pi^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 W_{00})} = 2(-\partial_0 W_{00} + \partial^i W_{0i}) \quad \implies \quad \partial_0 W_{00} = -\frac{\pi^{00}}{2} + \partial^i W_{0i}, \quad (4.52)$$

³O pólo aparente $k^2 = 0$ é cancelado pelos termos contidos nas reticências como já adiantamos.

$$\pi^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 W_{0i})} = -2(-\partial_0 W_{0i} + \partial^j W_{ij}) \quad \implies \quad \partial_0 W_{0i} = \frac{\pi^{0i}}{2} + \partial^j W_{ij}, \quad (4.53)$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 W_{ij})} \approx 0; \quad i \leq j, \quad (4.54)$$

e terminamos essa primeira etapa com $\frac{D(D-1)}{2}$ vínculos primários, por causa da restrição imposta de que $i \leq j$. Agora, obtemos a hamiltoniana canônica

$$H_c = \int d^{D-1}y [\pi^{00} \partial_0 W_{00} + \pi^{0i} \partial_0 W_{0i} + \pi^{ij} \partial_0 W_{ij} - \mathcal{L}]. \quad (4.55)$$

$$H_c = \int d^{D-1}y \left[-\frac{(\pi^{00})^2}{4} + \pi^{00} \partial^i W_{0i} + \frac{(\pi^{0i})^2}{4} + \pi^{0i} \partial^j W_{ij} - \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} \right) \right]. \quad (4.56)$$

Assim, a hamiltoniana primária será,

$$H_P = H_c + \int d^{D-1}y \quad \lambda_{ij}(y) \pi^{ij}(y), \quad (4.57)$$

onde a soma acima só existe para $i \leq j$ como já dito e os λ_{ij} são os multiplicadores hamiltonianos. Impondo as condições de consistência sobre os vínculos através do algoritmo de Dirac-Bergmann e usando as relações abaixo com $\mu \leq \nu$ e $\rho \leq \lambda$,

$$\begin{aligned} \{W_{\mu\nu}(x), W_{\rho\lambda}(y)\} &= 0; & \{\pi^{\mu\nu}(x), \pi^{\rho\lambda}(y)\} &= 0; \\ \{W_{\mu\nu}(x), \pi^{\rho\lambda}(y)\} &= \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\lambda \delta(x-y); \end{aligned} \quad (4.58)$$

podemos separar $\dot{\pi}^{lk}(x)$, com $l \leq k$, da seguinte maneira,

$$\chi^{lk} \equiv \dot{\pi}^{lk} = \partial^k \pi^{0l} + \partial^l \pi^{0k} + 2m^2 W^{lk} \approx 0; \quad l < k, \quad (4.59)$$

e,

$$\chi^{kk} \equiv \dot{\pi}^{kk} = \partial^k \pi^{0k} + m^2 \left(W^{kk} - \frac{W}{(D-1)} \right) \approx 0, \quad k = 1, 2, \dots, D-1; \quad (4.60)$$

onde não há soma sobre k na última equação. E assim, as condições de consistência fornecem $\frac{D(D-1)}{2}$ vínculos secundários. Condições de consistência sobre os vínculos secundários resultam em,

$$\dot{\chi}^{lk}(x) = \{\chi^{lk}(x), H_c\} + \int d^{D-1}y \lambda_{ij}(y) \{\chi^{lk}(x), \pi^{ij}(y)\} \approx 0; \quad (4.61)$$

onde,

$$\{\chi^{lk}(x), \pi_{ij}(y)\} = 2m^2 \delta_i^l \delta_j^k \delta(x-y). \quad (4.62)$$

Logo, os $\dot{\chi}^{lk}$ determinam os λ_{ij} para $i < j$, e o processo termina para estes vínculos. Algo não trivial acontece com os $\dot{\chi}^{kk}$, de fato,

$$\dot{\chi}^{kk}(x) = \{\chi^{kk}(x), H_c\} + \int d^{D-1}y \lambda_{ij}(y) \{\chi^{kk}(x), \pi^{ij}(y)\} \approx 0; \quad (4.63)$$

onde,

$$\{\chi^{kk}(x), \pi^{ij}(y)\} = m^2 \left(\delta_i^k \delta_j^k - \frac{\eta^{ij}}{(D-1)} \right) \delta(x-y). \quad (4.64)$$

O cálculo acima poderia sugerir que o processo acabaria aqui com a determinação dos multiplicadores λ_{kk} , mas se prestarmos atenção vemos que a soma $\sum_{k=1}^{D-1} \chi^{kk}(x)$ tem parênteses nulo com π^{ij} pois,

$$\chi(x) \equiv \sum_{k=1}^{D-1} \chi^{kk}(x) = \partial_j \pi^{0j}(x) + m^2 W_{00}(x) \approx 0. \quad (4.65)$$

Assim, as condições de consistência $\dot{\chi}^{kk}(x) \approx 0$ determinam todos os λ_{kk} exceto a soma $\sum_{j=1}^{D-1} \lambda_{jj}$. De fato,

$$\dot{\chi}^{11}(x) = \{\chi^{11}(x), H_c\} + \frac{m^2}{D-1} ((D-2)\lambda_{11} - \lambda_{22} - \dots - \lambda_{(D-1)(D-1)}) \approx 0, \quad (4.66)$$

$$\dot{\chi}^{22}(x) = \{\chi^{22}(x), H_c\} + \frac{m^2}{D-1} (-\lambda_{11} + (D-2)\lambda_{22} - \dots - \lambda_{(D-1)(D-1)}) \approx 0, \quad (4.67)$$

⋮

$$\begin{aligned} \dot{\chi}^{(D-1)(D-1)}(x) &= \{\chi^{(D-1)(D-1)}(x), H_c\} \\ &+ \frac{m^2}{D-1} (-\lambda_{11} - \lambda_{22} - \dots + (D-2)\lambda_{(D-1)(D-1)}) \approx 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

vemos facilmente que,

$$\gamma_1 \equiv \{\chi^{11}(x), H_c\} + \{\chi^{22}(x), H_c\} + \dots + \{\chi^{(D-1)(D-1)}(x), H_c\} \approx 0, \quad (4.69)$$

i.e., temos um vínculo terciário. Este último vínculo pode ser escrito também da seguinte maneira,

$$\gamma_1 = \left(\partial^j \partial_j - \frac{m^2}{2} \right) \pi^{00} - m^2 \partial^j W_{0j} \approx 0, \quad (4.70)$$

e agora sim temos soma sobre os j 's. Devido ao fato de que $\{\gamma_1(x), \pi^{ij}(y)\} = 0$, a condição $\dot{\gamma}_1 \approx 0$ fornece

$$\gamma_2 \equiv \dot{\gamma}_1 = \left(\partial_j \partial^j - \frac{m^2}{2} \right) \left(W^{00} + \frac{W}{(D-1)} \right) - \frac{1}{2} \partial_i \pi^{0i} - \partial^j \partial^j W_{jj} - 2 \partial^i \partial^j W_{ij} \approx 0. \quad (4.71)$$

Frisamos que há soma em j e chamamos a atenção para o termo $\partial^i \partial^j W_{ij}$ onde a soma ocorre apenas para $i < j$. O vínculo $\gamma_2 \approx 0$ é o último vínculo gerado pelo algoritmo. Podemos visualizar isso mais facilmente reescrevendo o vínculo acima com o auxílio de (4.59) e (4.60) da seguinte forma. Aplicando-se $\partial_i \partial_j$ em (4.59) com $i < j$, e somando-se em i e j com $i < j$, obtemos o último termo da equação (4.71),

$$2m^2 \partial^i \partial^j W_{ij} \approx -(\partial_i \partial_i \partial_j \pi^{0j} + \partial_j \partial_j \partial_i \pi^{0i}), \quad i < j. \quad (4.72)$$

Aplicando-se $\partial_k \partial_k$ em (4.60) e somando-se em k , obtemos o penúltimo termo da equação (4.71),

$$m^2 \partial^j \partial^j W_{jj} \approx \frac{m^2}{(D-1)} \nabla^2 W - \partial_j \partial_j \partial^j \pi^{0j}. \quad (4.73)$$

Assim, somando-se (4.72) e (4.73), obtemos

$$2 \partial^i \partial^j W_{ij} + \partial^j \partial^j W_{jj} \approx \frac{1}{(D-1)} \nabla^2 W - \frac{1}{m^2} \nabla^2 (\partial_j \pi^{0j}). \quad (4.74)$$

Substituindo (4.74) em (4.71) e usando a relação (4.65), obtemos enfim,

$$\gamma_2 = W = -W_{00} + W_{jj} \approx 0. \quad (4.75)$$

O que está de acordo com a demonstração de $W = 0$ via equações de Euler-Lagrange.

Reescrevendo a equação (4.71) acima, fica claro que as condições de consistência $\dot{\gamma}_2 \approx 0$ fornecem uma equação para a determinação do último λ_{kk} . Portanto, somando os vínculos dados por (4.54), (4.59), (4.60), (4.70) e (4.75) terminamos o processo com,

$$N_2 = \frac{D(D-1)}{2} + \frac{D(D-1)}{2} + 2 = D(D-1) + 2 \quad (4.76)$$

vínculos de segunda classe. Como a dimensão do espaço de fase $(W_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu})$ é $2D(D+1)/2$, temos

$$N_f = \frac{D(D+1)}{2} - \frac{[D(D-1)+2]}{2} = D-1. \quad (4.77)$$

Logo, o modelo $W_{\mu\nu}$ massivo possui o mesmo número de graus de liberdade que o modelo de Maxwell-Proca. Em particular, podemos usar os vínculos encontrados acima para escrever a hamiltoniana primária em função apenas das $2(D-1)$ variáveis $(W_{0k}(x), \pi^{0k}(x))$. De fato,

$$W_{kk} \approx -\frac{1}{m^2} \partial^k \pi^{0k}, \quad (4.78)$$

$$W_{00} \approx -\frac{1}{m^2} \partial_j \pi^{0j}, \quad (4.79)$$

$$W_{lk} \approx -\frac{1}{2m^2} (\partial_k \pi^{0l} + \partial_l \pi^{0k}), \quad l < k, \quad (4.80)$$

$$\pi^{ij} \approx 0 \quad (4.81)$$

$$\pi^{00} \approx \frac{m^2}{(\nabla^2 - \frac{m^2}{2})} (\partial^i W_{0i}), \quad (4.82)$$

e substituindo as igualdades fracas de (4.78) à (4.82) na hamiltoniana primária (4.57), temos

$$\begin{aligned} H_P = & \int d^{D-1}x \left[m^2 \frac{\partial^j W_{0j} (\nabla^2 - 3m^2/4) \partial^j W_{0j}}{(\nabla^2 - \frac{m^2}{2})^2} \right. \\ & \left. + m^2 W_{0j} W_{0j} + \frac{(\pi^{0j})^2}{4} + \frac{\sum_{j<l} (\partial^j \pi^{0k} - \partial^k \pi^{0j})^2}{4m^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Podemos reescrever a hamiltoniana primária com o auxílio dos componentes longitudinal e transversal,

$$W_j^T = \theta_{jk} W_{0k}; \quad W_j^L = \omega_{jk} W_{0k}, \quad (4.84)$$

e vemos que a hamiltonina primária pode ser escrita em uma forma explicitamente positiva definida dada por,

$$\begin{aligned} H_P = & \int d^{D-1}x \left[\frac{m^4}{4} \frac{W_j^L (m^2 - \nabla^2) W_j^L}{(\nabla^2 - \frac{m^2}{2})^2} + m^2 W_j^T W_j^T \right. \\ & \left. + \frac{(\pi^{0j})^2}{4} + \frac{\sum_{j<k} (\partial^j \pi^{0k} - \partial^k \pi^{0j})^2}{4m^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

O fato de que a hamiltoniana pode ser escrita em uma forma explicitamente positiva definida é importante pois garante a estabilidade clássica e é um indicativo de que a teoria será unitária quanticamente, o que estaria de acordo com o sinal do resíduo do pólo em $k^2 = -m^2$ que calculamos anteriormente.

4.4 Limite de massa nula do modelo $S_W^{(1,m)}$

Novamente, como o mapeamento dual é singular para $m \rightarrow 0$, analogamente ao caso de spin-0, é curioso verificar se o limite de massa nula para o modelo obtido recai, assim como o de Maxwell-Proca, no modelo de Maxwell ou se obtemos um resultado diferente assim como foi obtido no caso de spin-0. De fato, fazendo-se $m \rightarrow 0$ na equação (4.30), temos:

$$S_W^{(1,0)} = \int d^D x (\partial^\nu W_{\mu\nu})^2, \quad (4.86)$$

a qual não possui conteúdo físico e é uma teoria puro gauge. Verificaremos que isto realmente ocorre abaixo.

Antes de analisarmos as equações de movimento é importante notar que, neste caso, o modelo possui simetria de calibre, ou seja, se fizermos a transformação,

$$\delta_\Lambda W^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}\delta} \epsilon^{\nu\beta_1 \dots \beta_{D-2}\sigma} \partial_\delta \partial_\sigma \Lambda_{[\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}][\beta_1 \dots \beta_{D-2}]}, \quad (4.87)$$

para qualquer $\Lambda_{[\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}][\beta_1 \dots \beta_{D-2}]}$, a ação permanece invariante pois $\delta_\Lambda(\partial^\nu W_{\mu\nu}) = 0$. Extremizando a ação, obtemos as equações de movimento:

$$\partial_\mu q_\nu + \partial_\nu q_\mu = 0, \quad q_\mu \equiv \partial^\alpha W_{\alpha\mu}. \quad (4.88)$$

Novamente com condições de contorno no infinito, a solução geral de (4.89) é

$$q_\mu = \partial^\alpha W_{\alpha\mu} = 0. \quad (4.89)$$

Assim, as soluções para $W_{\mu\nu}$ serão puro gauge, ou seja, a teoria não possui conteúdo físico.

Vamos agora checar o conteúdo físico de partículas analisando os pólos do propagador. Escrevendo a lagrangiana (4.30) em termos dos projetores, temos:

$$S_W^{(1,0)} = \int d^D x W^{\nu\alpha} \left[-\frac{\square}{2} P_{SS}^{(1)} - \square P_{WW}^{(0)} \right]_{\nu\alpha\mu\sigma} W^{\mu\sigma}. \quad (4.90)$$

A análise do ponto de vista físico pode parecer não muito interessante, porém este exemplo possui características ímpares quando se trata de escolher uma fixação de calibre correta para que se possa analisar os pólos do propagador. Note que $S_W^{(1,0)}$ é invariante sob transformações de calibre geradas pelo operador $P_{SW}^{(0)}$, e pelos projetores $P_{SS}^{(0)}$ e $P_{SS}^{(2)}$ que projetam em espaços ortogonais a $P_{SS}^{(1)}$ e $P_{WW}^{(0)}$. Sabendo disso, um termo de fixação que podemos escolher é:

$$\begin{aligned} G_{FG}^{\nu\alpha} &= \square^2 \theta_{\mu(\alpha} \theta_{\beta)\nu} W^{\mu\nu} \\ &= \square^2 W^{\nu\alpha} + \partial^\nu \partial^\alpha (\partial_\mu \partial_\sigma W^{\mu\sigma}) - 2\square \partial_\mu \partial^{(\nu} W^{\alpha)\mu} \\ &= \square^2 [P_{SS}^{(0)} + P_{SS}^{(2)}]_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Podemos ver facilmente que o termo acima fixa o calibre escrevendo a lagrangiana de fixação,

$$\mathcal{L}_{FG} = \lambda (\square^2 W^{\nu\alpha} + \partial^\nu \partial^\alpha (\partial_\mu \partial_\sigma W^{\mu\sigma}) - 2\square \partial_\mu \partial^{(\nu} W^{\alpha)\mu})^2, \quad (4.92)$$

na forma,

$$\mathcal{L}_{FG} = \lambda W^{\nu\alpha} \square^4 (P_{SS}^{(2)} + P_{SS}^{(0)})_{\nu\alpha\mu\sigma} W^{\mu\sigma}. \quad (4.93)$$

Logo, somando-se a lagrangiana acima na lagrangiana da ação (4.90) obtemos:

$$S_W = \int d^D x W^{\nu\alpha} K_{\nu\alpha\mu\sigma} W^{\mu\sigma}, \quad (4.94)$$

onde $K_{\nu\alpha\mu\sigma} \equiv \left(-\frac{\square}{2} P_{SS}^{(1)} - \square P_{WW}^{(0)} + \lambda \square^4 [P_{SS}^{(2)} + P_{SS}^{(0)}] \right)_{\nu\alpha\mu\sigma}$ possui inversa dada por,

$$K_{\nu\alpha\mu\sigma}^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda \square^4} P_{SS}^{(2)} - \frac{2}{\square} P_{SS}^{(1)} - \frac{1}{\square} P_{WW}^{(0)} + \frac{1}{\lambda \square^4} P_{SS}^{(0)} \right)_{\nu\alpha\mu\sigma}. \quad (4.95)$$

Obtidos esses resultados, podemos calcular a amplitude de dois pontos. Lembrando que se acrescentarmos um termo de fonte, $\int d^D x T^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$, com $T^{\mu\nu} =$

$\partial^\mu J^\nu + \partial^\nu J^\mu$, teremos, após uma integração por partes,

$$\int d^D x T^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = -2 \int d^D x J^\nu \partial^\mu W_{\mu\nu}, \quad (4.96)$$

o que garante, ao termo de fonte, as mesmas simetrias da ação (4.86). Assim,

$$\begin{aligned} A(k) = & -\frac{i}{2} T_{\nu\mu}^*(k) \left(\frac{1}{\lambda k^8} P_{SS}^{(2)} - \frac{2}{k^2} P_{SS}^{(1)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{k^2} P_{WW}^{(0)} + \frac{1}{\lambda k^8} P_{SS}^{(0)} \right)^{\nu\mu\alpha\sigma} T_{\alpha\sigma}(k), \end{aligned} \quad (4.97)$$

o que implica em,

$$A(k) = -2i J_\nu^* J^\nu. \quad (4.98)$$

Logo, a amplitude de dois pontos não apresenta nenhum pólo e assim, não possui conteúdo físico de partículas. Este resultado está em acordo com a análise anterior das equações de movimento e com a conclusão de [29] para $D = 4$. No apêndice B reiteramos, do ponto de vista hamiltoniano, que o limite sem massa da teoria $S_W^{(1,0)}$ não possui graus de liberdade físicos.

4.5 Obtenção de um modelo de 4ª ordem de spin-1

Como vimos anteriormente, a teoria $S_W^{(1,m)}$, no limite de massa nula, é dada pela integral do termo $(\partial^\mu W_{\mu\nu})^2$ a qual não possui conteúdo físico e é chamada de teoria puro gauge. Assim como no caso de spin-0, podemos usá-la como termo de mistura no modelo $S_W^{(1,m)}$ e obter um modelo dual à Maxwell-Proca, porém de 4ª ordem. Assim, utilizando um campo auxiliar simétrico $N_{\mu\nu} = N_{\nu\mu}$, temos a ação mestra:

$$S_M = \int d^D x \left\{ (\partial^\mu W_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} \right) - (\partial^\alpha N_{\alpha\nu})^2 \right\}. \quad (4.99)$$

Fazendo-se um deslocamento em $N_{\alpha\nu} \rightarrow N_{\alpha\nu} + W_{\alpha\nu}$, temos

$$\begin{aligned} S_M = & \int d^D x \left\{ -(\partial^\mu N_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} \right) \right. \\ & \left. - 2\partial^\alpha W_{\alpha\nu} \partial_\mu N^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

A equação (4.100) pode ser reescrita ainda na forma conveniente,

$$\begin{aligned}
S_M &= \int d^D x \left\{ -(\partial^\mu N_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} + \frac{2}{m^2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\sigma N_{\alpha\sigma} - \frac{2}{m^2} \partial^\alpha \partial_{(\mu} N_{\nu)\alpha} \right)^2 \right. \\
&\quad - \frac{m^2}{2(D-1)} \left(W + \frac{2(D-1)}{m^2} \partial^\sigma \partial^\alpha N_{\sigma\alpha} \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{2}{m^2} [(\partial^\alpha \partial^\sigma N_{\alpha\sigma})^2 - (\partial^\alpha \partial_{(\mu} N_{\nu)\alpha})^2] \right\}. \tag{4.101}
\end{aligned}$$

Novamente fazendo-se o tensor $W^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{W}^{\mu\nu} - \frac{2}{m^2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\sigma N_{\alpha\sigma} + \frac{2}{m^2} \partial^\alpha \partial_{(\mu} N_{\nu)\alpha}$ e reescrevendo os campos $N_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{N}_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{2}}{m} N_{\mu\nu}$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
S_M &= \int d^D x \left\{ \frac{m^2}{2} \left((\tilde{W}_{\mu\nu})^2 - \frac{\tilde{W}^2}{(D-1)} \right) - \frac{m^2}{2} (\partial^\mu \tilde{N}_{\mu\nu})^2 \right. \\
&\quad \left. + (\partial^\alpha \partial^\sigma \tilde{N}_{\alpha\sigma})^2 - (\partial^\alpha \partial_{(\mu} \tilde{N}_{\nu)\alpha})^2 \right\}. \tag{4.102}
\end{aligned}$$

Como os termos em $\tilde{W}^{\mu\nu}$ não tem dinâmica, obtemos um modelo de 4ª ordem dual a $S_W^{(1,m)}$ e a Maxwell-Proca dado por:

$$S_N^{(1,m)} = \int d^D x \left\{ (\partial^\alpha \partial^\sigma N_{\alpha\sigma})^2 - (\partial^\alpha \partial_{(\mu} N_{\nu)\alpha})^2 - \frac{m^2}{2} (\partial^\mu N_{\mu\nu})^2 \right\}. \tag{4.103}$$

Observe que o modelo (4.103) corresponde, após integração por partes, a ação de Maxwell-Proca com a identificação $A_\mu = \partial^\alpha N_{\mu\alpha}$. Note que, embora de quarta ordem, o modelo obtido não é equivalente (no limite de massa nula) ao modelo obtido anteriormente em (4.20).

4.5.1 Análise do conteúdo físico de partículas e equações de movimento

Podemos reescrever a ação $S_N^{(1,m)}$ dada pela expressão (4.103) na forma:

$$S_N^{(1,m)} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\alpha N^{\nu\alpha} (\eta_{\mu\nu} (\square - m^2) - \partial_\nu \partial_\mu) \partial_\sigma N^{\mu\sigma} \right\}, \tag{4.104}$$

ou ainda como,

$$S_N^{(1,m)} = \int d^D x \left\{ N^{\nu\alpha} \left(-\frac{\square(\square - m^2)}{2} P_{SS}^{(1)} + m^2 \square P_{WW}^{(0)} \right)_{\mu\nu\sigma\alpha} N^{\mu\sigma} \right\}. \tag{4.105}$$

Através da equação acima vemos que o operador entre parênteses não possui inversa, pois possui simetria de calibre. Comparando a ação (4.105) com a ação (4.90) vemos que, novamente, uma condição de calibre que podemos usar é:

$$G_{FG}^{\nu\alpha} = \square^2 N^{\nu\alpha} + \partial^\nu \partial^\alpha (\partial_\mu \partial_\sigma N^{\mu\sigma}) - 2\square \partial_\mu \partial^\nu N^{\alpha\mu} = 0. \quad (4.106)$$

Somando então a lagrangiana de fixação, obtida através do termo de fixação de calibre acima, dada por $\mathcal{L}_{GF} = \lambda N^{\nu\alpha} (\square^4 P_{SS}^{(2)} + \square^4 P_{SS}^{(0)})_{\nu\alpha\mu\sigma} N^{\mu\sigma}$ com a ação dada pela equação (4.105), obtemos:

$$S_N = \int d^D x N^{\nu\alpha} K_{\nu\alpha\mu\sigma} N^{\mu\sigma}, \quad (4.107)$$

onde,

$$K^{\mu\nu\sigma\alpha} \equiv \left(\lambda [\square^4 P_{SS}^{(2)} + \square^4 P_{SS}^{(0)}] - \frac{\square(\square - m^2)}{2} P_{SS}^{(1)} + m^2 \square P_{WW}^{(0)} \right)^{\mu\nu\sigma\alpha}, \quad (4.108)$$

e cuja inversa é,

$$K_{\mu\nu\sigma\alpha}^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda \square^4} P_{SS}^{(2)} - \frac{2}{\square(\square - m^2)} P_{SS}^{(1)} + \frac{1}{m^2 \square} P_{WW}^{(0)} + \frac{1}{\lambda \square^4} P_{SS}^{(0)} \right)_{\mu\nu\sigma\alpha}. \quad (4.109)$$

A amplitude de dois pontos será:

$$A(k) = T_{\nu\alpha}^*(k) \langle N^{\nu\alpha}(-k) N^{\sigma\mu}(k) \rangle T_{\sigma\mu}(k). \quad (4.110)$$

Para que a ação $S_N^{(1,m)}$ com fonte possua as mesmas simetrias que o modelo sem fonte, esta última deve ser da forma $T_{\mu\nu} = k_\mu J_\nu + k_\nu J_\mu$ e portanto, a amplitude de dois pontos:

$$A(k) = -\frac{i}{2} T_{\nu\alpha}^* \left(\frac{1}{\lambda k^8} P_{SS}^{(2)} - \frac{2}{k^2(k^2 + m^2)} P_{SS}^{(1)} - \frac{1}{m^2 k^2} P_{WW}^{(0)} + \frac{1}{\lambda k^8} P_{SS}^{(0)} \right)^{\mu\nu\sigma\alpha} T_{\mu\sigma},$$

se reduz a,

$$A(k) = \frac{i}{2} T_{\nu\alpha}^* \left(\frac{2}{k^2(k^2 + m^2)} P_{SS}^{(1)} + \frac{1}{m^2 k^2} P_{WW}^{(0)} \right)^{\mu\nu\sigma\alpha} T_{\mu\sigma}. \quad (4.111)$$

Se colocarmos os projetores e a fonte em sua forma explícita na equação (4.111), após algumas manipulações, é possível verificar que o pólo não massivo $k^2 = 0$

se cancela. Temos portanto, apenas o pólo massivo $k^2 = -m^2$. Calculando o resíduo referente a este pólo, obtemos:

$$R_{-m^2} = \lim_{k^2 \rightarrow -m^2} (k^2 + m^2)A(k) = \lim_{k^2 \rightarrow -m^2} 2i \left(\tilde{T}_\nu^* \frac{\theta^{\mu\nu}}{k^4} \tilde{T}_\mu \right), \quad (4.112)$$

onde $\tilde{T}_\nu \equiv k^\alpha T_{\nu\alpha}$. Fazendo-se $k = (m, 0, 0, \dots, 0)$, temos $\theta^{\mu\nu} \tilde{T}_\mu = \tilde{T}^i \delta_i^\nu$, logo:

$$R_{-m^2} = \frac{2i}{m^4} |\tilde{T}_i|^2 \Rightarrow \text{Im} R_{-m^2} > 0, \quad (4.113)$$

ou seja, nosso modelo possui uma partícula física massiva no setor de spin-1, assim como o modelo de Maxwell-Proca e o modelo $S_W^{(1,m)}$, embora o modelo seja de quarta ordem em derivadas, não há quebra de unitariedade.

Podemos ainda checar que nosso modelo de 4ª ordem de fato representa uma partícula de spin-1 classicamente, pois satisfaz as relações de transversalidade e a equação de Klein-Gordon. Obtendo as equações de movimento através da extremização da ação:

$$S_N^{(1,m)} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\alpha N^{\nu\alpha} (\eta_{\mu\nu} (\square - m^2) - \partial_\nu \partial_\mu) \partial_\sigma N^{\mu\sigma} \right\}, \quad (4.114)$$

obtemos,

$$\frac{\delta S_N^{(1,m)}}{\delta N^{\nu\alpha}} = \partial_\alpha T_\nu + \partial_\nu T_\alpha = 0, \quad T_\nu \equiv [\eta_{\mu\nu} (\square - m^2) - \partial_\nu \partial_\mu] \partial_\sigma N^{\mu\sigma}. \quad (4.115)$$

Usando as condições de contorno de que os campos devem ser nulos no infinito, temos $T_\nu = 0$ e portanto:

$$(\square - m^2) \partial^\sigma N_{\nu\sigma} - \partial_\nu (\partial_\mu \partial_\sigma N^{\mu\sigma}) = 0. \quad (4.116)$$

que corresponde à equação de Maxwell-Proca com a identificação $A_\mu = \partial^\alpha N_{\alpha\mu}$. Como a solução geral da equação $\partial^\alpha N_{\alpha\mu} = 0$ é puro gauge, o conteúdo de (4.116) corresponde apenas a uma partícula massiva de spin-1.

4.5.2 Limite de massa nula

No limite de massa nula, nosso modelo de 4ª ordem, diferentemente do modelo $S_W^{(1,m)}$, é bem comportado. De fato, podemos checar o conteúdo físico do

modelo dado pela equação (4.114), o qual torna-se, no limite de massa nula,

$$S_N^{(1,0)} = \int d^D x N^{\nu\alpha} \left(-\frac{1}{2} \square^2 \theta_{\nu\mu} \omega_{\alpha\sigma} \right) N^{\mu\sigma}. \quad (4.117)$$

Simetrizando o operador $\theta_{\nu\mu} \omega_{\alpha\sigma} \rightarrow \frac{1}{4}(\theta_{\nu\mu} \omega_{\alpha\sigma} + \theta_{\alpha\mu} \omega_{\nu\sigma} + \theta_{\nu\sigma} \omega_{\alpha\mu} + \theta_{\alpha\sigma} \omega_{\nu\mu}) = \frac{1}{2}(P_{SS}^{(1)})_{\nu\alpha\mu\sigma}$, temos:

$$S_N^{(1,0)} = \int d^D x N^{\nu\alpha} \left(-\frac{1}{4} \square^2 (P_{SS}^{(1)})_{\nu\alpha\mu\sigma} \right) N^{\mu\sigma}. \quad (4.118)$$

Nossa teoria, além de bem comportada no limite de massa nula, nos fornece um resultado interessante onde apenas o operador de projeção do setor de spin-1 aparece, de forma análoga à lagrangiana de Maxwell.

Podemos checar, obtendo os pólos do propagador da teoria obtida, que o modelo de fato só possui uma partícula sem massa de spin-1. Como o modelo acima possui simetria de calibre, devemos fixá-la de forma que todas as simetrias locais da ação acima sejam quebradas. Em particular, a simetria de Weyl $\delta_W N_{\alpha\mu} = \eta_{\mu\nu} \phi$ corresponde a simetria de calibre $U(1)$:

$$\delta_W \partial^\alpha N_{\alpha\mu} = \partial_\mu \phi. \quad (4.119)$$

A simetria de Weyl pode ser fixada através da escolha $N = \eta_{\mu\nu} N^{\mu\nu} = 0$. Além de Weyl, (4.118) é invariante sob qualquer transformação local tal que $\delta \partial^\alpha N_{\alpha\beta} = 0$ e, para tais simetrias, podemos usar a condição de calibre (4.106):

$$\square^2 N_{\nu\alpha} + \partial_\nu \partial_\alpha (\partial_\mu \partial_\sigma N^{\mu\sigma}) - 2 \square \partial_\mu \partial_{(\nu} N_{\alpha)}^\mu = 0.$$

As escolhas acima nos permitem construir a seguinte lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{FG} = \lambda (\square^2 B_{\nu\alpha} + \partial_\nu \partial_\alpha (\partial_\mu \partial_\sigma B^{\mu\sigma}) - 2 \square \partial_\mu \partial_{(\nu} B_{\alpha)}^\mu)^2 + \tilde{\lambda} B^2. \quad (4.120)$$

A lagrangiana acima fixa o calibre da teoria em estudo e as escolhas acima podem ser justificadas reescrevendo a lagrangiana em operadores do tipo projetor. De fato, podemos reescrever (4.120) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FG} &= B^{\nu\alpha} \{ \lambda \square^4 [P_{SS}^{(2)} + P_{SS}^{(0)}] + \tilde{\lambda} [(D-1) P_{SS}^{(0)} \\ &+ \sqrt{D-1} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)} + P_{WW}^{(0)})] \}_{\nu\alpha\mu\sigma} B^{\mu\sigma}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

e vemos que acrescentando este termo na ação (4.118) podemos enfim inverter o operador da ação com o intuito de encontrar o propagador. Isto feito, podemos escrever a ação (4.118) na forma:

$$S_N^{(1,0)} = \int d^D x N^{\nu\alpha} \left[\lambda \square^4 P_{SS}^{(2)} - \frac{1}{4} \square^2 P_{SS}^{(1)} + (\lambda \square^4 + \tilde{\lambda}(D-1)) P_{SS}^{(0)} \right. \\ \left. + \tilde{\lambda} \sqrt{D-1} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) + \tilde{\lambda} P_{WW}^{(0)} \right]_{\nu\alpha\mu\sigma} N^{\mu\sigma}, \quad (4.122)$$

onde o operador contido na ação acima possui inversa dada por:

$$D_{\nu\alpha\mu\sigma}^{-1} = \left[\frac{1}{\lambda \square^4} P_{SS}^{(2)} - \frac{4}{\square^2} P_{SS}^{(1)} + \frac{\tilde{\lambda} P_{SS}^{(0)} + (\lambda \square^4 + \tilde{\lambda}(D-1)) P_{WW}^{(0)}}{\bar{l}} \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\lambda} \sqrt{D-1}}{\bar{l}} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right]_{\nu\alpha\mu\sigma}, \quad (4.123)$$

sendo $\bar{l} \equiv \tilde{\lambda} \lambda \square^4$. Podemos agora calcular a amplitude de dois pontos, porém antes é instrutivo chamar a atenção para o fato de que a fonte é restrita pelas simetrias da ação original. Por exemplo, na teoria eletromagnética de Maxwell com fonte, $S_{MAX} = \int d^D x [A^\mu \square \theta_{\mu\nu} A^\nu + A_\mu J^\mu]$, devemos ter $J^\mu = \square \theta^{\mu\nu} \tilde{J}_\nu$, para que a teoria continue tendo simetria de calibre. De modo análogo, devemos ter no nosso caso $T^{\mu\nu} = (\square^2 P_{SS}^{(1)})^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}$, ou seja, a fonte deve ser simétrica (pois os campos são simétricos), com traço nulo (simetria de Weyl) e, utilizando nosso *ansatz* para um tensor simétrico, a fonte terá a forma: $T^{\mu\nu} = k^\mu J_T^\nu + k^\nu J_T^\mu$, onde $k_\mu J_T^\mu = 0$. Enfim podemos calcular a amplitude de dois pontos:

$$A(k) = -\frac{i}{2} T_{\nu\alpha}^*(k) \left[\frac{1}{\lambda k^8} P_{SS}^{(2)} - \frac{4}{k^4} P_{SS}^{(1)} + \frac{\tilde{\lambda} \sqrt{D-1}}{\bar{l}} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right. \\ \left. + \frac{\tilde{\lambda} P_{SS}^{(0)} + (\lambda \square^4 + \tilde{\lambda}(D-1)) P_{WW}^{(0)}}{\bar{l}} \right]_{\nu\alpha\mu\sigma} T_{\mu\sigma}(k). \quad (4.124)$$

Como a fonte é da forma $T^{\mu\nu} = (\square^2 P_{SS}^{(1)})^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$, devido a ortogonalidade dos projetores de spins diferentes, somente o setor de spin-1 não será nulo. Com isso, chegamos em:

$$A(k) = 8i \frac{J_{T\mu}^* J_T^\mu}{k^2}, \quad (4.125)$$

e temos um pólo simples em $k^2 = 0$. Escolhendo o vetor momento como $k = (k, k, 0, \dots, 0)$ e analisando o resíduo associado ao pólo $k^2 = 0$:

$$R_0 = \lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 A(k) = 8i |J_l|^2, \quad l = 2, 3, \dots, D-1 \Rightarrow \text{Im} R_0 > 0, \quad (4.126)$$

e temos apenas uma partícula física de spin-1 sem massa assim como no modelo de Maxwell. Além disso, vemos que o limite de massa nula para o modelo de 4ª ordem é bem comportado, ou seja, há uma total analogia com o modelo de quarta ordem de spin zero.

Capítulo 5

Spin-1 com interação e Spin-2 livre

5.1 Adição de interação

5.1.1 Campo gravitacional

Neste capítulo trataremos basicamente de teorias de spin-1 interagindo primeiramente com um campo gravitacional e posteriormente com um campo eletromagnético, utilizando um tensor simétrico $W_{\mu\nu}$ complexo (carregado). A ação mestra que será útil na primeira interação deste capítulo é a ação mestra (4.11) discutida no capítulo 4 a qual, na ausência de fontes, tem a forma:

$$S_M^{(1,0)}[W, A] = \int d^D x \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} + 2W^{\mu\nu} \partial_{(\mu} A_{\nu)} \right). \quad (5.1)$$

A dualidade obtida entre o teoria de Maxwell e o modelo $S_W^{(1,0)}$ na seção 4.2, apesar de muito interessante por deixar mais clara a conexão entre o modelo- K e o modelo de Maxwell em $D = 2+1$, é obtida para teorias livres. Discutiremos agora um possível acoplamento do campo de radiação com o campo gravitacional utilizando o campo $W^{\mu\nu}$, simplesmente trocando a derivada em (5.1) pela derivada covariante da gravitação ($\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$) e acrescentando o fator $\sqrt{-g}$ no elemento de volume. A versão do modelo $S_W^{(1,0)}$ para espaços curvos mais natural, na ausência

de fontes, é portanto:

$$\begin{aligned}
S[W, A] &= \int d^D x \sqrt{-g} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{(D-1)} + 2W_{\mu\nu} \nabla^{(\mu} A^{\nu)} \right) \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} \left\{ (W^{\mu\nu} + \nabla^{(\mu} A^{\nu)} - g^{\mu\nu} \nabla \cdot A)^2 - \frac{[W - (D-1) \nabla \cdot A]^2}{(D-1)} \right. \\
&\quad \left. - (\nabla_{(\mu} A_{\nu)})^2 + (\nabla \cdot A)^2 \right\}. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Reescrevendo os dois últimos termos da ação acima com o intuito de obter a lagrangiana de Maxwell, temos que integrar o último termo da segunda igualdade por partes e comutar as derivadas. No entanto, o comutador da derivada covariante da gravitação aplicado a um campo vetorial é $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\mu = R_{\mu\nu} A^\mu$, ou seja, as derivadas covariantes não comutam. Isto implicará no aparecimento do tensor de Ricci, e assim:

$$S[W, A] = \int d^D x \sqrt{-g} \left(\tilde{W}_{\mu\nu} \tilde{W}^{\mu\nu} - \frac{\tilde{W}^2}{(D-1)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \right) \tag{5.3}$$

onde fizemos $\tilde{W}_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} + \nabla^{(\mu} A^{\nu)} - g^{\mu\nu} \nabla \cdot A$. Portanto, fazer um acoplamento mínimo com a gravidade na ação mestra ($\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$) não é o mesmo que fazer um acoplamento mínimo em uma das teorias descendentes (Maxwell). Como vimos, ao trocar derivada simples por derivada covariante na ação mestra, esta última pode ser reescrita como a teoria de Maxwell mais um termo de “massa” (não mínimo) dado pelo tensor de Ricci, além de termos quadráticos em $\tilde{W}^{\mu\nu}$ os quais não possuem dinâmica e podem ser desprezados. O aparecimento do tensor de Ricci quebra a simetria de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi$ que a teoria de Maxwell possui mesmo quando trocamos derivada simples por derivada covariante, ou seja, no espaço curvo.

Por outro lado, fazendo-se a integral no campo vetorial A_μ na primeira linha da equação (5.2) obtemos o vínculo:

$$\nabla^\mu W_{\mu\nu} = 0. \tag{5.4}$$

A solução geral de tal vínculo nós não sabemos, porém podemos começar com termos de ordem mais baixa na métrica e nas suas derivadas e propor uma solução

do tipo $W_{\mu\nu}(g) = b_0 g_{\mu\nu} + b_2(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2) + \dots$, onde $b_0, b_2, \dots$, são constantes arbitrárias e $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ é o tensor de Einstein. Substituindo a solução acima na primeira linha da equação (5.2), obtemos o seguinte modelo:

$$S[W_{\mu\nu}(g)] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{b_0^2 D}{D-1} + \frac{b_0 b_2 (D-2)}{D-1} R + b_2^2 \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{D}{4(D-1)} R^2 \right) + \dots \right], \quad (5.5)$$

onde as reticências referem-se a termos extras providos da solução mais geral para o vínculo (5.4). Para $D = 4$, os termos contidos nos três pontos serão de sexta ordem ou superior nas derivadas e se desprezarmos tais termos, o modelo se reduz à teoria da gravidade crítica recentemente descoberta em [27]. Uma análise um pouco mais completa da solução geral para o vínculo (5.4) pode ser encontrada em [14]. Em [6], a teoria (5.5) em $D = 4$ foi estudada para espaços anti de-sitter $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, $\Lambda < 0$, onde foi notada a presença de partículas de spin-1 massivas, cuja massa concorda com a obtida do termo de massa $R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ de acordo com a dualidade que encontramos aqui, entretanto, modos de spin-2 também foram achados.

Um último comentário a respeito da ação mestra no espaço curvo é que podemos fazer com que a ação (5.2) nos forneça a teoria de Maxwell minimamente acoplada com o campo gravitacional, simplesmente somando o termo $-R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ à esta ação, ou seja, fazendo-se um acoplamento não mínimo na ação mestra. Este acoplamento não mínimo na ação mestra nos permite reescrevê-la completando quadrado no campo vetorial A_μ e, ao integrarmos neste campo, obtemos um modelo dual à Maxwell no espaço curvo o qual contém o termo exótico $\nabla^\mu W_{\mu\nu} (R^{-1})^{\nu\rho} \nabla^\alpha W_{\alpha\rho}$ que depende da inversa do tensor de Ricci, no entanto, ainda não sabemos se tal modelo é consistente.

5.1.2 Campo eletromagnético

Outro modelo interessante que podemos tratar com nossa ação dual tensorial é o de uma partícula de spin-1 massiva e carregada interagindo com

o campo eletromagnético. Como é sabido, devemos utilizar campos complexos para que as partículas massivas que o modelo descreve possuam carga. Faremos algo semelhante à generalização da ação mestra (5.2) para o campo gravitacional, no entanto utilizaremos agora a derivada covariante, $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, e acrescentaremos um termo de massa. Começamos definindo a ação mestra:

$$S_M = \int d^D x \left\{ W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} - \frac{WW^*}{(D-1)} + W_{\mu\nu}^* \mathcal{D}^{(\mu} B^{\nu)} + W^{\mu\nu} (\mathcal{D}_{(\mu} B_{\nu)})^* - \frac{m^2}{2} B^\mu B_\mu^* \right\}. \quad (5.6)$$

Podemos ainda reescrever a ação mestra acima na forma mais interessante,

$$S_M = \int d^D x \left\{ [W_{\mu\nu}^* - \eta_{\mu\nu} (\mathcal{D}^\alpha B_\alpha)^* + (\mathcal{D}_{(\mu} B_{\nu)})^*] [W^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{D}^\alpha B_\alpha + \mathcal{D}^{(\mu} B^{\nu)}] - \frac{1}{(D-1)} [W^* - (D-1)(\mathcal{D}^\alpha B_\alpha)^*] [W - (D-1)(\mathcal{D}^\alpha B_\alpha)] - \mathcal{D}_{(\mu} B_{\nu)} (\mathcal{D}^{(\mu} B^{\nu)})^* + (\mathcal{D}_\alpha B^\alpha) (\mathcal{D}_\mu B^\mu)^* \right\}. \quad (5.7)$$

Novamente, com o intuito de obter a lagrangiana de Maxwell-Proca para o campo de matéria B_μ , devemos integrar por partes o último termo da expressão acima e comutar as derivadas. Como $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] A^\mu = ieF_{\mu\nu} A^\mu$, teremos agora um acoplamento não mínimo na ação de Maxwell-Proca. Fazendo-se $\tilde{W}^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{D}^\alpha B_\alpha + \mathcal{D}^{(\mu} B^{\nu)}$ e integrando nos campos W 's no funcional gerador a equação (5.7) torna-se,

$$S_B^I = \int d^D x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^*(B) F^{\mu\nu}(B) - \frac{m^2}{2} B_\mu^* B^\mu + ie F^{\mu\nu}(A) B_\mu^* B_\nu \right\}. \quad (5.8)$$

onde $F_{\mu\nu}(B) = \mathcal{D}_\mu B_\nu - \mathcal{D}_\nu B_\mu$, $F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e o índice superior I da ação é para lembrarmos da interação.

Assim, terminamos com a lagrangiana de Maxwell-Proca mais um termo não mínimo $ieF^{\mu\nu} B_\mu^* B_\nu$, ou seja, analogamente ao acoplamento com o campo gravitacional, se fizermos um acoplamento mínimo na ação mestra ($\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$), teremos um acoplamento não mínimo no modelo descendente de Maxwell-Proca.

Podemos ainda reescrever a ação mestra (5.6), fazendo $W_{\mu\nu} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{2}} W_{\mu\nu}$, na forma:

$$\begin{aligned}
S_M = & \int d^D x \left\{ (\mathcal{D}^\mu W_{\mu\nu})^* (\mathcal{D}_\alpha W^{\alpha\nu}) + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} - \frac{WW^*}{(D-1)} \right) \right. \\
& \left. - \frac{m^2}{2} \left(B_\nu^* + \frac{\sqrt{2}}{m} (\mathcal{D}^\mu W_{\mu\nu})^* \right) \left(B^\nu + \frac{\sqrt{2}}{m} \mathcal{D}_\alpha W^{\alpha\nu} \right) \right\}. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Fazendo-se $\tilde{B}^\nu = B^\nu + \frac{\sqrt{2}}{m} \mathcal{D}_\alpha W^{\alpha\nu}$, terminaremos com termos quadráticos nos campos $\tilde{B}$'s e integrando em tais campos, terminamos com um modelo dual à Maxwell-Proca, porém minimamente acoplado, dado por:

$$S_W^I = \int d^D x \left\{ (\mathcal{D}^\mu W_{\mu\nu})^* (\mathcal{D}_\alpha W^{\alpha\nu}) + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu}^* W^{\mu\nu} - \frac{WW^*}{(D-1)} \right) \right\}. \quad (5.10)$$

É interessante notar que, ao contrário do que poderíamos pensar, a teoria dual minimamente acoplada ao campo eletromagnético (5.10) não é dual à Maxwell-Proca minimamente acoplada e sim dual à teoria dada pela ação (5.8), ou seja, Maxwell-Proca com um acoplamento não mínimo. Se colocarmos um termo de fonte para o campo B_μ e outro para o campo $W_{\mu\nu}$ na ação mestra e reescrevermos a ação completando quadrado, de forma inteiramente análoga ao caso da teoria livre discutida na seção 3.2, obteremos os mapeamentos duais,

$$W_{\mu\nu} \leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{m} [\eta_{\mu\nu} \mathcal{D} \cdot B - \mathcal{D}_{(\mu} B_{\nu)}], \quad (5.11)$$

$$B_\mu \leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{m} \mathcal{D}^\nu W_{\nu\mu}. \quad (5.12)$$

5.2 Spin-2

Tendo como paradigma os resultados desta dissertação, somos induzidos a tentar obter agora uma teoria de *rank* superior para partículas de spin-2. A primeira idéia que surge é a de tentar obter um modelo dual à Einstein-Hilbert usando um tensor de 3 índices simétrico pela permutação de qualquer par de índices $W_{\alpha\beta\gamma} \equiv W_{(\alpha\beta\gamma)}$. Observando os resultados anteriores, vemos que um ingrediente fundamental de uma ação mestra é que ela é de primeira ordem em

derivadas. Tendo isto em mente, construímos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & AW_{\alpha\beta\gamma}\partial^{(\alpha}h^{\beta\gamma)} + BW_{\alpha}\partial^{\alpha}h \\ & + CW_{\alpha}\partial_{\mu}h^{\mu\alpha} + d(W_{\alpha\beta\gamma})^2 + eW_{\alpha}W^{\alpha},\end{aligned}\quad (5.13)$$

onde $W_{\alpha} \equiv W_{\alpha\beta}{}^{\beta}$. Ao eliminarmos os campos $W_{\alpha\beta\gamma}$, teremos uma ação quadrática em $\partial_{\alpha}h_{\beta\gamma}$ que descreve uma partícula de spin-2 sem massa, ou seja, a ação de Einstein-Hilbert truncada até termos quadráticos em $h_{\alpha\beta}$, onde $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$. Equivalentemente, podemos reescrever (5.13) como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & d[W_{\alpha\beta\gamma} + a(\partial_{\alpha}h_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}h_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma}h_{\alpha\beta}) + b(\eta_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}h + \eta_{\beta\gamma}\partial_{\alpha}h + \eta_{\gamma\alpha}\partial_{\beta}h)]^2 \\ & + e[W_{\alpha} + a(\partial_{\alpha}h + 2\partial^{\beta}h_{\alpha\beta}) + b(D+2)\partial_{\alpha}h]^2 - \mathcal{L}_{hh},\end{aligned}\quad (5.14)$$

onde a, b, d e e são constantes arbitrárias. Sabemos que se escrevermos explicitamente a lagrangiana acima, os termos independentes do tensor $W_{\alpha\beta\gamma}$ deverão se cancelar. Assim, devemos comparar,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{hh} = & da^2\left[(\partial_{\alpha}h_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}h_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma}h_{\alpha\beta}) + \frac{b}{a}(\eta_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}h + \eta_{\beta\gamma}\partial_{\alpha}h + \eta_{\gamma\alpha}\partial_{\beta}h)\right]^2 \\ & + ea^2\left[(\partial_{\alpha}h + 2\partial^{\beta}h_{\alpha\beta}) + \frac{b}{a}(D+2)\partial_{\alpha}h\right]^2,\end{aligned}\quad (5.15)$$

com a lagrangiana de Einstein-Hilbert com o sinal negativo:

$$-\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}h_{\beta\gamma})^2 - \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}h)^2 - (\partial_{\alpha}h^{\alpha\beta})^2 + \partial_{\alpha}h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}h. \quad (5.16)$$

Isto feito, obtemos um sistema de quatro equações e três incógnitas dadas por da^2, ea^2 e b/a . No entanto, se incluirmos a dimensão como uma possível incógnita, podemos resolver o sistema exatamente, porém a solução do sistema nos impõe a condição $D = 2$, o qual não é interessante para a gravitação. Portanto, não é possível uma formulação de 1ª ordem de Einstein-Hilbert usando tensores totalmente simétricos de *rank* 3 e *rank* 2.

Nossa segunda tentativa foi tentar obter um modelo, não usando um tensor de 3 índices simétrico pela troca de qualquer par deles, mas sim um tensor de 3 índices simétrico em apenas um par de índices. Isto é natural se pensarmos na

formulação em primeira ordem da gravitação segundo Pallatini [31], que utiliza a métrica, $g_{\alpha\beta}$, e símbolos de Christoffel, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, que são simétricos em dois índices na ausência de torção. Similarmente, tentamos construir uma lagrangiana fazendo uma combinação linear em termos de um tensor simétrico em apenas dois índices, $W_{\alpha(\beta\gamma)} \equiv (W_{\alpha\beta\gamma} + W_{\alpha\gamma\beta})/2$, e de derivadas do tensor simétrico $h_{\alpha\beta}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & d \left[W_{\alpha(\beta\gamma)} + a \partial_{\alpha} h_{\beta\gamma} + b \partial_{(\beta} h_{\gamma)\alpha} + c \eta_{\beta\gamma} \partial_{\alpha} h \right. \\
& + n \eta_{\alpha(\beta} \partial_{\gamma)} h + r \eta_{\beta\gamma} \partial^{\sigma} h_{\sigma\alpha} + s \eta_{\alpha(\beta} \partial^{\sigma} h_{\gamma)\sigma} \left. \right]^2 \\
& + e \left[W_{\alpha(\beta}{}^{\beta)} + (a + cD + n) \partial_{\alpha} h + (b + rD + s) \partial^{\sigma} h_{\sigma\alpha} \right]^2 \\
& + l \left[W^{\beta}{}_{(\beta\gamma)} + \left(\frac{b}{2} + c + \frac{n(D+1)}{2} \right) \partial_{\gamma} h + \left(a + r + \frac{(D+1)s + b}{2} \right) \partial^{\sigma} h_{\sigma\gamma} \right]^2 \\
& + p \left[W_{\alpha(\beta\gamma)} + a \partial_{\alpha} h_{\beta\gamma} + b \partial_{(\beta} h_{\gamma)\alpha} + c \eta_{\beta\gamma} \partial_{\alpha} h \right. \\
& + n \eta_{\alpha(\beta} \partial_{\gamma)} h + r \eta_{\beta\gamma} \partial^{\sigma} h_{\sigma\alpha} + s \eta_{\alpha(\beta} \partial^{\sigma} h_{\gamma)\sigma} \left. \right] \left[W^{\gamma(\alpha\beta)} + a \partial^{\gamma} h^{\alpha\beta} \right. \\
& + b \partial^{(\alpha} h^{\beta)\gamma} + c \eta^{\alpha\beta} \partial^{\gamma} h + n \eta^{\gamma(\alpha} \partial^{\beta)} h + r \eta^{\alpha\beta} \partial_{\sigma} h^{\sigma\gamma} + s \eta^{\gamma(\alpha} \partial_{\sigma} h^{\beta)\sigma} \left. \right]^2 \\
& + q \left[W_{\gamma}^{(3)} + \left(\frac{b}{2} + c + \frac{n(D+1)}{2} \right) \partial_{\gamma} h + \left(a + r + \frac{(D+1)s + b}{2} \right) \partial^{\sigma} h_{\sigma\gamma} \right] \\
& \times \left[W^{(1)\gamma} + (a + cD + n) \partial^{\gamma} h + (b + rD + s) \partial_{\delta} h^{\delta\gamma} \right] \\
& - \mathcal{L}_{hh},
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde $W_{\gamma}^{(3)} = W^{\alpha}{}_{(\alpha\gamma)}$; $W^{(1)\gamma} = W^{\gamma(\alpha}{}_{\alpha)}$ e os coeficientes $a, b, c, d, e, l, p, q, r, s$ e n são constantes arbitrárias¹.

Devemos encontrar quais são os coeficientes corretos na lagrangiana acima, de forma que os termos quadráticos em $h_{\alpha\beta}$ desapareçam. Assim, fazendo-se um deslocamento nos campos $W_{\alpha(\beta\gamma)}$, teremos uma integração gaussiana nestes campos e portanto, ficaremos apenas com a ação de Einstein-Hilbert. Seguindo os

¹Para o caso $D = 4$, é ainda possível somar a $W_{\alpha(\beta\gamma)}$ um termo do tipo abaixo, vide [11], que não consideramos nesta dissertação,

$$\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\sigma\kappa} \partial_{\partial} h_{\kappa\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma}{}^{\sigma\kappa} \partial_{\partial} h_{\kappa\beta}. \tag{5.18}$$

passos descritos acima obtivemos um sistema de 4 equações e 11 incógnitas, onde uma possível solução para os coeficientes é:

$$\begin{aligned} a = 1/2; \quad b = 0; \quad c = -1/4; \quad d = 2; \quad l = -4; \quad r = 0; \\ n = 0; \quad p = 0; \quad q = 0; \quad e = -2/(D-2); \quad s = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Substituindo esses parâmetros na lagrangiana (5.17), obtemos:

$$\begin{aligned} S_M = \int d^D x \quad & 2 \left[(W_{\alpha(\beta\gamma)})^2 - 2(W^\beta_{(\beta\gamma)})^2 - \frac{(W_\alpha)^2}{(D-2)} + W_{\alpha(\beta\gamma)} \partial^\alpha h^{\beta\gamma} \right. \\ & \left. - 2W^\beta_{(\beta\gamma)} \partial_\alpha h^{\alpha\gamma} + W^\beta_{(\beta\gamma)} \partial^\gamma h \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde $W_\alpha \equiv W_{\alpha(\beta}{}^\beta)$. Ainda estamos investigando se podemos, analogamente ao caso de spin-0 e spin-1, obter um modelo dual através da ação mestra proposta e tentar acrescentar também um termo de massa de Fierz-Pauli, com o intuito de obter também um modelo dual para a ação massiva de Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli usando um tensor de 3 índices simétrico em um par deles. Estamos seguindo nesta direção e acreditamos poder obter bons resultados num futuro próximo.

É importante salientar ainda, que são conhecidas ações de primeira ordem para tensores parcialmente antissimétricos, $W_{a[bc]}$, os quais fazem uso ainda de tensores não simétricos, $e_{ab} \neq e_{ba}$, denominados *vielbein*. Neste contexto, os $W_{a[bc]}$ fazem o papel da chamada conexão de spin, vide por exemplo [39] e [8], para uma discussão no contexto de teorias duais.

Capítulo 6

Conclusão

A obtenção de modelos duais para partículas de spin-0 e spin-1 massivas foi feita com sucesso e pudemos verificar que as teorias duais obtidas possuem as mesmas características essenciais que os modelos originais. Verificamos isto ao analisar as equações de movimento, propriedades analíticas do propagador e, em alguns casos, o número de graus de liberdade através do algoritmo de Dirac-Bergman e a positividade da hamiltoniana. Conseguimos também encontrar modelos unitários de quarta ordem duais à teoria de Klein-Gordon e ao modelo de Maxwell-Proca. Isto foi feito verificando-se que o limite de massa nula dos modelos duais de segunda ordem obtidos eram puro gauge. Verificamos que as teorias eram puro gauge analisando propriedades analíticas do propagador, as equações de movimento e os graus de liberdade de tais teorias. Nos deparamos com fato curioso ao analisarmos os graus de liberdade utilizando o algoritmo de Dirac-Bergman para as teorias puro gauge de *rank* superior, qual seja: a contagem de graus de liberdade não pode ser feita da maneira canônica. Não é do nosso conhecimento a existência de um outro método para avaliar o número de graus de liberdade, via formalismo hamiltoniano, de teorias do tipo *rank* superior, no entanto, conseguimos fazer a contagem de uma maneira alternativa plausível. Os modelos duais de quarta ordem são, ao contrário dos modelos de segunda ordem, bem comportados no limite de massa nula, isto é, ao tomarmos o limite de massa

nula obtemos uma teoria de quarta ordem dual aos modelos de D’Alambert (no caso de spin-0) e Maxwell (no caso de spin-1). Isto já era esperado se notarmos que os modelos massivos de 4ª ordem obtidos são os próprios modelos de Klein-Gordon e Maxwell-Proca com a troca $\phi \rightarrow \partial \cdot B$ e $A^\mu \rightarrow \partial_\alpha W^{\alpha\mu}$.

Obtivemos também, através de uma ação mestra, um modelo não trivial dual ao de Maxwell via tensor simétrico. A obtenção deste modelo dual é, no entanto, mais sutil, pois resulta da solução de um vínculo funcional. Vimos que o modelo dual obtido é especialmente interessante no caso de dimensão $D = 2 + 1$, onde ele se torna o chamado termo-K linearizado, o qual provém da linearização do limite de massa nula [15] da teoria conhecida como ‘*new massive gravity*’ [4]. Para o caso $D = 4$, nosso modelo coincide com o obtido em [19], e para o caso D dimensional obtivemos um novo modelo, não trivial, de quarta ordem dual à Maxwell. Conseguimos também um mapeamento dual invariante de calibre entre ambas as teorias para o caso D dimensional. Obtivemos também um modelo dual à Maxwell-Proca via tensor simétrico e conseguimos mapear as duas teorias. Checamos o conteúdo físico de partículas e verificamos que os modelos são compatíveis.

Para o caso de partículas de spin-2 conseguimos uma ação mestra a qual, após integração no tensor de *rank* 3, leva ao modelo de Einstein-Hilbert linearizado. Os resultados obtidos para spin-0 e spin-1 nos dão um indicativo de que podemos encontrar também um modelo dual para partículas de spin-2. Atualmente estamos seguindo nesta direção e comparando com outros resultados da literatura.

No último capítulo discutimos a adição de interação. Primeiramente colocamos a ação mestra do início do capítulo 4 em um espaço curvo, simplesmente trocando derivada por uma derivada covariante e, ao repetirmos o procedimento de dualização, obtivemos em um caso o modelo de Maxwell com um acoplamento não mínimo, enquanto que no outro caso obtivemos um vínculo funcional. Uma possível solução para este vínculo em $D = 4$ até quatro derivadas, nos levou incrivelmente à teoria recentemente descoberta [27] conhecida como *critical gra-*

vity. No entanto, para dimensões maiores perdemos a *critical gravity* [14]. O acoplamento não mínimo no caso da teoria de Maxwell-Proca pode ser resolvido acrescentando o termo $R^{\mu\nu}$ na ação mestra acoplada minimamente, no entanto, ao integrarmos no campo vetorial obtemos uma teoria contendo um termo exótico do tipo $\nabla^\mu W_{\mu\nu} (R^{-1})^{\nu\rho} \nabla^\alpha W_{\alpha\rho}$. Esta teoria não foi investigada a fundo.

Por último, construímos uma ação mestra para partículas de spin-1 (matéria) interagindo com um campo eletromagnético, utilizando na ação mestra tanto um campo vetorial complexo quanto um tensor simétrico complexo (carregado) de *rank* 2, para representar o campo de matéria carregado de spin-1. Ao prosseguirmos com a técnica de dualização obtivemos em um caso a teoria de Maxwell-Proca, para o campo vetorial complexo, com um acoplamento não mínimo, enquanto que no outro caso obtivemos o modelo tensorial complexo dual à Maxwell-Proca por nós encontrado em [14], porém minimamente acoplado com o campo eletromagnético.

O surgimento do termo não mínimo, tanto no caso gravitacional como no eletromagnético, é devido ao fato das derivadas covariantes não comutarem e isto faz com que a dualidade com interação seja distinta da dualidade dos modelos livres. A introdução de acoplamento mínimo na ação mestra não equivale a introdução de acoplamento mínimo nas ações descendentes. O procedimento de dualização não comuta com o de introdução de interação. Da mesma forma que a versão não comutativa do modelo auto-dual, em $D = 2 + 1$, não é dual à versão não comutativa do modelo de MCS, (vide [33]). Conseguimos também obter um mapeamento entre ambas as teorias no caso em que há interação.

Enfim, a partir da técnica da ação mestra foi possível obter modelos duais de *rank* superior de maneira bastante eficaz. Esta técnica nos permitiu observar vários padrões, os quais podem sugerir novas investigações. Um aspecto interessante do trabalho é que conseguimos conectar um de nossos modelos com as teorias recentes da *new massive gravity* e da *critical gravity*. No entanto, muito trabalho ainda pode ser feito nesta direção para partículas de spin-2 ou superior.

Referências Bibliográficas

- [1] ARAGONE.C, Khoudeir.A, *Selfdual Massive Gravity*, Phys.Lett.B173:141-144, (1986).
- [2] ARIAS.P.J, *Spin 2 in 2+1 dimensions*, Ph.D. thesis (in Spanish), Simon Bolivar University, arXiv:gr-qc/9803083, (1994).
- [3] BARNES.K.J, Ph.D. thesis (1963), unpublished.
- [4] BERGSHOEFF.E, Hohm.O, Townsend.P.K, *Massive Gravity in Three Dimensions*, Phys.Rev.Lett.102, 201301 (2009).
- [5] BERGSHOEFF.E, Hohm.O, Townsend.P.K, *More on massive 3D gravity*, Phys.Rev.D.79:124042 (2009).
- [6] BERGSHOEFF.E, Hohm.O, Rosseel.J, Townsend.P.K, *Modes of Log Gravity*, Phys.Rev.D.83:104038 (2011).
- [7] BOTTA.M Cantcheff, *Topologically massive gauge theories from first order theories in arbitrary dimensions*, Phys.Lett.B533:126-130, (2002).
- [8] BOULANGER.et al, *A note on spin s duality*, JHEP 0306:060, (2003).
- [9] BOULWARE.D.G, Deser.S, *Can gravitation have a finite range?*, Phys.Rev.D6:3368-3382, (1972).
- [10] BUCHBINDER.I.L, Gitman.D.M, Pershin.V.D, *Causality of massive spin-2 field in external gravity*, Phys.Lett.B492:161-170, (2000).

- [11] CASINI.H, Montemayor.R, Urrutia.L.F, *Duality for symmetric second rank tensors. II. The linearized gravitational field*, Phys.Rev.D.68.065011, (2003).
- [12] DALMAZI.D, *Unitarity of spin-2 theories with linearized Weyl symmetry in $D=2+1$* , Phys.Rev.D80: 085008, (2009).
- [13] DALMAZI.D, Mendonça.E.L *Mass generation for abelian spin-1 particles via a symmetric tensor*, Phys.Lett.B707:409–414, (2012).
- [14] DALMAZI.D, Santos.R.C, *Spin-1 Duality in D -dimensions*, Phys.Rev.D84: 045027, (2011).
- [15] DESER.S, *Ghost-Free, Finite, Fourth-Order $D=3$ Gravity*, Phys.Rev.Lett.103, 101302 (2009).
- [16] DESER.S, Jackiw.R, *‘Selfduality’ of Topologically Massive Gauge Theories*, Phys.Lett.B139: 371, (1984).
- [17] DESER.S, Jackiw.R, Templeton.S, *Topologically Massive Gauge Theories*, Ann.Phys.140:372-411, (1982).
- [18] DESER.S, Liu.H, Lu.H, Pope.C.N, Sisman.T.C, Tekin.B, *Critical Points of D -Dimensional Extended Gravities*, Phys.Rev.D83: 061502, (2011).
- [19] DESER.S, Siegel.W, Townsend.P.K, *Higher Rank Representations Of Lower Spin*, Nucl.Phys.B184,333 (1981).
- [20] DIRAC.P.A.M, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University (Academic, New York, 1964).
- [21] GITMAN.D.M, Tyutin.I.V, *Quantization of Field with Constraints*, Springer (1990).
- [22] HENNEAUX.M, Teitelboim.C, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, (1992).

- [23] HERNASKI.C.A *Novos Cenários Efetivos para Gravitação Quântica: Torção Dinâmica e Grávitons Massivos na Escala do LHC*, Ph.D. thesis (in Portuguese), Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, cbpfindex.cbpf.br, (2011).
- [24] HJELMELAND.S.E, Lindstrom.U *Duality for the nonspecialist*, arXiv:hep-th/9705122, (1997).
- [25] KHOUDEIR.A, Montemayor.R, Urrutia.L.F, *Dimensional Reduction as a Method to Obtain Dual Theories for Massive Spin Two in Arbitrary Dimensions*, Phys.Rev.D78:065041, (2008).
- [26] LEMOS.N.A, *Mecânica Analítica*, Livraria da Física (2007).
- [27] LU.H, Pope.C.N, *Critical Gravity in Four Dimensions*, Phys.Rev.Lett.106, 181302 (2011).
- [28] MALDACENA.J.M, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv.Theor.Math.Phys.2:231-252, (1998); Int.J.Theor.Phys.38:1113-1133, (1999); arXiv:hep-th/9711200.
- [29] NIEUWENHUIZEN.P van, *On Ghost-Free Tensor Lagrangians and Linearized Gravitation*, Nucl.Phys.B60: 478, (1973).
- [30] OGIEVETSKY.V.I, Polubarinov.I.V, *The notoph and its possible interactions*, Sov.J.Nucl.Phys.4:156-161, (1967), Yad.Fiz.4-216-223, (1966).
- [31] PAPAPETROU.A, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel Publishing Company, (1974).
- [32] PINHEIRO.C, Pires.G.O, *Extending the Barnes-Rivers operators to $D = 3$ topological gravity*, arXiv:hep-th/9212008 (1992)
- [33] RIVELLES.V.O, *Duality in Noncommutative Maxwell-Chern-Simons Theory*, Phys.Lett. B625:156-164, (2005), e-Print: hep-th/0506078.

- [34] RIVERS.R.J, *Lagrangian theory of neutral massive spin-2 fields II* Nuovo Cimento 34:387, (1964).
- [35] SCHWINGER.J, *Particles, Sources, and Fields*, Perseus Books Publishing, Vol.I, (1998).
- [36] SEIBERG.N, Witten.E, *Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl.Phys.B426:19-52, (1994), Erratum-ibid.B430:485-486, (1994), arXiv:hep-th/9407087.
- [37] SON.D.T, *AdS/CFT overview and recent applications to strongly interacting systems*, Nucl.Phys.A827:61C-65C, (2009).
- [38] TOWNSEND.P.K, Pilch.K, Nieuwenhuizen.P van, *Selfduality in Odd Dimensions*, Phys.Lett.136:38, (1984).
- [39] WEST.P.C, *$E(11)$ and M theory*, Class.Quant.Grav.18:4443-4460, (2001).

Apêndice A

Álgebra dos projetores

Vamos agora colocar explicitamente as relações existentes entre os operadores de projeção simétricos. Como no capítulo 4, definimos os projetores,

$$(P_{SS}^{(2)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\theta^\mu{}_\rho\theta^\nu{}_\sigma + \theta^\mu{}_\sigma\theta^\nu{}_\rho) - \frac{\theta^{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}}{(D-1)}, \quad (\text{A.1})$$

$$(P_{SS}^{(1)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\theta^\mu{}_\rho\omega^\nu{}_\sigma + \theta^\mu{}_\sigma\omega^\nu{}_\rho + \theta^\nu{}_\rho\omega^\mu{}_\sigma + \theta^\nu{}_\sigma\omega^\mu{}_\rho), \quad (\text{A.2})$$

$$(P_{SS}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{\theta^{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}}{(D-1)} \quad , \quad (P_{WW}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \omega^{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.3})$$

e os operadores de transição,

$$(P_{SW}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{\theta^{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}}{\sqrt{D-1}} \quad , \quad (P_{WS}^{(0)})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{\omega^{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}}{\sqrt{D-1}} \quad , \quad (\text{A.4})$$

onde os índices numéricos superiores indicam o setor de spin do tensor no qual o projetor atua. Com o auxílio desses, podemos facilmente escrever a identidade simétrica,

$$(1_S)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \frac{(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma + \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho)}{2}, \quad (\text{A.5})$$

usando,

$$\delta^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_\nu + \theta^\mu{}_\nu, \quad (\text{A.6})$$

na forma,

$$(1_S)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = [(P_{SS}^{(2)}) + (P_{SS}^{(1)}) + (P_{SS}^{(0)}) + (P_{WW}^{(0)})]^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.7})$$

onde,

$$(1_S)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma} = T^{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

para qualquer tensor simétrico $T^{\rho\sigma}$.

Um resultado bastante utilizado é o seguinte; qualquer operador escrito na forma,

$$D^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \left[a(P_{SS}^{(2)}) + b(P_{SS}^{(1)}) + c(P_{SS}^{(0)}) + d(P_{WW}^{(0)}) + e(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right]^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.9})$$

possui inversa dada por,

$$\begin{aligned} (D^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma})^{-1} &= \left[\frac{1}{a}(P_{SS}^{(2)}) + \frac{1}{b}(P_{SS}^{(1)}) + \frac{d(P_{SS}^{(0)}) + c(P_{WW}^{(0)})}{\bar{k}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{\bar{k}}(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right]^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde $\bar{k} = cd - e^2$. Obviamente, o operador $D^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ não possuirá inversa caso a, b ou $\bar{k}$ sejam nulos. Além disso, para obtermos (A.10), usamos o fato que os projetores satisfazem ,

$$P_{IL}^s \cdot P_{JK}^{s'} = \delta^{ss'} \delta_{LJ} P_{IK}^{(s)}, \quad (\text{A.11})$$

e vemos que $P_{SS}^{(2)}, P_{SS}^{(1)}, P_{SS}^{(0)}$ e $P_{WW}^{(0)}$ são projetores legítimos pois são idempotentes, ou seja, $P^2 = P$, enquanto que $P_{SW}^{(0)}$ e $P_{WS}^{(0)}$ não o são.

Apêndice B

Graus de liberdade do modelo

$$S_W^{(1,0)}$$

Faremos uma contagem de graus de liberdade da teoria $S_W^{(1,0)}$ via algoritmo de Dirac-Bergman. Começamos com a lagrangiana escrita na forma explicitamente simétrica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial^\nu (W_{\mu\nu} + W_{\nu\mu}) \partial^\alpha (W^\mu{}_\alpha + W_\alpha{}^\mu), \quad (\text{B.1})$$

Através desta deduzimos,

$$\pi^{00} = \partial^\nu (W_{0\nu} + W_{\nu 0}) \Rightarrow \partial_0 W_{00} = \frac{1}{2} (\partial^i (W_{i0} + W_{0i}) - \pi^{00}), \quad (\text{B.2})$$

$$\pi^{0i} = -\frac{1}{2} \partial^\nu (W_{i\nu} + W_{\nu i}), \quad (\text{B.3})$$

$$\pi^{i0} = -\frac{1}{2} \partial^\nu (W_{i\nu} + W_{\nu i}). \quad (\text{B.4})$$

Das equações (B.3) e (B.4) deduzimos $D - 1$ vínculos primários,

$$\phi^i \equiv \pi^{i0} - \pi^{0i} \approx 0, \quad i = 1, 2, \dots, D - 1. \quad (\text{B.5})$$

Além disso temos,

$$\pi^{ij} \approx 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, D - 1, \quad (\text{B.6})$$

e temos $(D-1) + (D-1)^2$ vínculos primários. Com a lagrangiana e os momenta acima calculados, podemos encontrar a hamiltoniana canônica:

$$H_C = \int d^{D-1}x \left[-\frac{1}{4}(\pi^{00})^2 + \frac{\pi^{00}}{2}\partial^i(W_{0i} + W_{i0}) + \frac{(\pi^{0i} + \pi^{i0})^2}{4} \right. \\ \left. + \frac{(\pi^{0i} + \pi^{i0})}{2}\partial^j(W_{ij} + W_{ji}) \right], \quad (\text{B.7})$$

e a hamiltoniana primária será,

$$H_P = H_C + \int d^{D-1}x [\lambda_i \phi^i + \lambda_{lk} \pi^{lk}], \quad (\text{B.8})$$

onde os λ_i e λ_{lk} são funções arbitrárias do tempo conhecidas como multiplicadores hamiltonianos. Impondo condições de consistência sobre os vínculos primários, obtemos

$$\dot{\phi}^l \approx 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\phi}^{lk} = \{\pi^{lk}, H_P\} = \partial^k \pi^{0l} + \partial^l \pi^{0k} \approx 0 \Rightarrow \chi^{lk} \equiv \partial^k \pi^{0l} + \partial^l \pi^{0k} \approx 0, \quad (\text{B.10})$$

ou seja, os $D-1$ vínculos primários não geram novos vínculos, enquanto os $(D-1)^2$ vínculos primários geram mais $(D-1)$ vínculos secundários, pois a condição (B.10) impõe restrições apenas nos campos π^{0l} , $l = 1, 2, \dots, D-1$. Condições de consistência sobre os vínculos secundários nos fornecem mais um vínculo,

$$\dot{\chi}^{lk} = \{\chi^{lk}, H_P\} \approx 0 \Rightarrow \gamma^{lk} \equiv \partial^k \partial^l \pi^{00} \approx 0, \quad (\text{B.11})$$

enquanto a condição de consistência sobre este último vínculo é identicamente satisfeita, ou seja, $\dot{\gamma}^{lk} \approx 0$, e o algoritmo termina aqui. Os vínculos são todos de primeira-classe (todos os vínculos só dependem dos campos π 's). A contagem canônica neste caso não é feita diretamente, no entanto podemos verificar que todos os graus de liberdade espúrios são eliminados com os vínculos acima. De fato, através dos vínculos dados pela equação (B.5), podemos fixar um calibre da forma $W^{0i} - W^{i0} \approx 0$ e eliminar os π^{i0} em função dos π^{0i} , bem como os W^{0i} em função dos W^{i0} . Os vínculos dados pela expressão (B.6) nos permitem eliminar

os π^{lk} , enquanto a condição de calibre $W_{lk} \approx 0$, elimina os campos W_{lk} . Ficamos então com os campos, $\pi^{00}, W^{00}, \pi^{0i}, W^{0i}$, que podem ser eliminados utilizando os vínculos dados pela expressão (B.10) e (B.11). Isto pode ser feito, pois fazendo $l = k$ em (B.10), obtemos:

$$\partial^k \pi^{0k} \approx 0. \quad (\text{B.12})$$

Aplicando ∂^l em (B.10) e usando (B.12), temos:

$$(\partial^l)^2 \pi^{0k} \approx 0, \quad \Rightarrow \quad \pi^{0k} \approx a^k + b^{km} x_m. \quad (\text{B.13})$$

Impondo como condição de contorno que os campos se comportem de tal maneira que $\pi^{0k}(x \rightarrow \infty) \approx 0$, devemos ter $a^k = b^{km} = 0$. Logo, $\pi^{0k} \rightarrow 0$, e este vínculo de primeira-classe nos permite fixar o calibre $W^{0k} \approx 0$. De forma análoga, fazendo $l = k$ no último vínculo dado pela expressão (B.11), ficamos com:

$$(\partial^l)^2 \pi^{00} \approx 0, \quad \Rightarrow \quad \pi^{00} \approx c^k + d^{km} x_m, \quad (\text{B.14})$$

e a condição de que $\pi^{00}(x \rightarrow 0) \approx 0$, implica que $\pi^{00} \approx 0$, e novamente isto nos permite escolher um calibre da forma $W^{00} \approx 0$. Assim, terminamos o processo com zero graus de liberdade, como era esperado.

Apêndice C

Linearização do Modelo-K

Verificaremos neste apêndice que a versão linearizada do limite de massa nula da *new massive gravity* [5, 15] (também conhecida como modelo-K linearizado) é dada pela equação (4.17). O que faremos aqui será deixar mais explícito a passagem da primeira para a segunda linha da equação (4.17).

A primeira linha da equação (4.17) é obtida simplesmente substituindo a solução do vínculo funcional (4.15), no caso $D = 3$, na ação mestra (6.1). A parte não trivial é verificar que este resultado é igual ao modelo-K linearizado.

A lagrangiana do modelo-K não linearizado é dada por:

$$\int d^3x \left\{ \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right] \right\}. \quad (\text{C.1})$$

Na equação acima g é o determinante da métrica, R é o escalar de Riemann e $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci. Os dois últimos tensores podem ser obtidos a partir do tensor de curvatura de Riemann que é escrito em função dos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\delta}^\alpha$,

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\mu, \quad (\text{C.2})$$

com

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (\text{C.3})$$

A linearização pode ser feita linearizando a métrica da seguinte forma, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde temos a métrica plana de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e uma perturbação da métrica $h_{\mu\nu}$. Podemos também fazer a linearização nos *dreibeine*, $e_{\rho a} = \eta_{\rho a} + h_{\rho a}$, e, neste

caso, a métrica é escrita na forma, $g_{\rho\sigma} = e_{\rho a} e^a_{\sigma}$. Seguindo a linearização nos *dreibeine*, com o intuito de obter o modelo-K linearizado até termos quadráticos em $h_{\mu\nu}$, vamos expandir a métrica, $g_{\mu\nu}$, e os Christoffel, $\Gamma_{\beta\delta}^\alpha$, até termos em primeira ordem em $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma} + 2h_{(\rho\sigma)}, \quad (\text{C.4})$$

$$g^{\rho\sigma} = \eta^{\rho\sigma} - 2h^{(\rho\sigma)}, \quad (\text{C.5})$$

pois, tanto o escalar de Riemann quanto o tensor de Ricci já são quadráticos em (C.1). Substituindo (C.4) e (C.5) em (C.3) nós obtemos uma expansão até termos lineares para o símbolo de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \partial_\mu h_{\nu}^{(\rho} + \partial_\nu h_{\mu}^{(\rho} - \partial^\rho h_{\mu\nu}. \quad (\text{C.6})$$

O escalar de Riemann é obtido da aplicação da inversa da métrica ao tensor de Ricci, no entanto, o tensor de Ricci é quadrático na ação (C.1). Assim, o termo linear em $h_{\mu\nu}$ da equação (C.5) só contribuirá com termos de terceira ordem ou superior em $h_{\mu\nu}$ no cálculo do tensor de curvatura de Riemann. Portanto, podemos fazer:

$$\begin{aligned} R &= g^{\beta\delta} R_{\beta\delta} \\ &= \eta^{\beta\delta} R_{\beta\delta} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

onde:

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha_{\beta\alpha\delta} = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\mu. \quad (\text{C.8})$$

Substituindo (C.6) em (C.8) obtemos o tensor de Ricci até termos lineares em $h_{\mu\nu}$,

$$R_{\mu\nu} = \partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h \quad (\text{C.9})$$

Substituindo (C.9) em (C.7), temos o escalar de Riemann R ,

$$R = 2\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - 2\square h, \quad (\text{C.10})$$

onde $h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$.

Para a construção do modelo-K linearizado devemos ainda calcular o fator $\sqrt{-g}$ em (C.1). Novamente, como queremos a aproximação quadrática em $h_{\mu\nu}$ e como os tensores de Ricci e escalar de Riemann são lineares em $h_{\mu\nu}$ e quadráticos na ação (C.1) não devemos ter o tensor h no termo $\sqrt{-g}$. Não é difícil verificar, usando a matriz 3×3 dada em (C.4), que $g = -(1 + 2h)$. Após outra expansão obtemos $\sqrt{-g} = 1 + h$. Logo, para nosso propósito, $\sqrt{-g} = 1$. Com isso obtemos o modelo-K linearizado nos *dreibein*,

$$\begin{aligned}
S_{lin}[h] &= \int d^3x \left\{ \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right] \right\}_{hh} \\
&= \int d^3x h_{\lambda\gamma} \left\{ \frac{1}{2} (\partial^\lambda \partial^\gamma \partial^\alpha \partial^\beta - \square^2 \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\alpha\beta}) \right. \\
&\quad \left. + \square^2 \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\gamma\beta} - 2 \square \eta^{\lambda\alpha} \partial^\gamma \partial^\beta + \square \eta^{\lambda\gamma} \partial^\alpha \partial^\beta \right\} h_{\alpha\beta} \\
&= \int d^3x h_{\lambda\gamma} \left\{ \square \theta^{\lambda\alpha} \square \theta^{\gamma\beta} - \frac{\square \theta^{\lambda\alpha} \square \theta^{\alpha\beta}}{2} \right\} h_{\alpha\beta} \\
&= S^*[h].
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Logo, concluimos que o modelo-K linearizado é, de fato, dado pela segunda linha da equação (4.17), em $D = 3$ dimensões.