

“Expoentes dinâmicos no mapa padrão
dissipativo”

Aluno: Cleber Cosme Bueno

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

CLEBER COSME BUENO

Expoentes dinâmicos no mapa padrão dissipativo

Dissertação de Mestrado apresentado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Interunidades entre o Instituto de Ciências e Tecnologia de Sorocaba e o Câmpus de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

São João da Boa Vista

2021

B928e Bueno, Cleber Cosme
Expoentes dinâmicos no mapa padrão dissipativo / Cleber Cosme
Bueno. -- São João da Boa Vista, 2021
57 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Câmpus Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa
Vista
Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

1. Caos determinístico. 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3.
Dinâmica. 4. Sistemas não lineares. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus
Experimental de São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO DA
DISSERTAÇÃO:**

Exponentes dinâmicos no mapa padrão dissipativo

AUTOR: CLEBER COSME BUENO

ORIENTADOR: JULIANO ANTONIO DE OLIVEIRA

**Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em
ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:**

Juliano Antonio de Oliveira

**Prof. Dr. JULIANO ANTONIO DE OLIVEIRA (Participação Virtual)
UNESP / São João da Boa Vista (SP)**

Edson Denis Leonel

**Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL (Participação Virtual)
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)**

André Luis Prando Livorati

**Prof. Dr. ANDRÉ LUIS PRANDO LIVORATI (Participação
Virtual) ICET-Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia /
UNIP**

Sorocaba, 25 de junho de 2021

CLEBER COSME BUENO

Expoentes dinâmicos no mapa padrão dissipativo

Dissertação de Mestrado apresentado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Interunidades entre o Instituto de Ciências e Tecnologia de Sorocaba e o Câmpus de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovação em 25/06/2021

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

UNESP - Câmpus de São João da Boa Vista (SP)

Orientador

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

IGCE - Instituto de Geociências e Ciências Exatas

UNESP - Câmpus de Rio Claro (SP)

Prof. Dr. André Luis Prando Livorati

ICET - Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia

UNIP - Câmpus de Rio Claro (SP)

São João da Boa Vista

2021

aos meus pais: Gervásio e Laídes.

Agradecimentos

Primeiramente, ao Nosso Deus, que me agraciou com esta oportunidade e por ter me fortalecido nesta caminhada acadêmica.

À minha família, pais e irmãos e irmã, pelo incentivo e compreensão.

Ao Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira pela oportunidade, parceria e disponibilidade em transmitir o conhecimento e motivação necessária para realização desta pesquisa.

Aos meus amigos professores da escola Eletrô e aos companheiros de estudo desta jornada; compartilhamos bons momentos de aprendizagem, partilha e descontração.

Ao Centro Paula Souza, representado pela Diretora Inês de Lourdes Madureira da Etec. “João Baptista de Lima Figueiredo”, que facilitou meu horário de trabalho, para que fosse possível meu deslocamento até São João da Boa Vista e que eu pudesse ter momentos de estudo.

Aos Professores e Funcionários da UNESP de São João da Boa Vista e Sorocaba pela paciência em transmitir seus conhecimentos e carinho ao atender minhas solicitações.

À UNESP de São João da Boa Vista pela oportunidade em realizar meu objetivo.

O presente trabalho foi realizado com apoio das entidades:

Processo nº 303242/2018-3, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq);

Processo nº 421254/2016-5, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq);

Processo nº 311105/2015-7, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq);

Processo nº 2018/14685-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP);

Processo nº 2014/18672-8, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Ninguém vence sozinho, nem no campo, nem na vida!

Papa Francisco

BUENO, C. C. **Expoentes dinâmicos no mapa padrão dissipativo**. Dissertação de Mestrado UNESP - Universidade Estadual Paulista, São João da Boa Vista, 2021.

Resumo

O trabalho tem como escopo estudar o rotor pulsado e assim investigar algumas das suas propriedades dinâmicas. O modelo é descrito por um mapeamento não linear bidimensional com as variáveis de ação (I), ângulo (θ) e pelos parâmetros de controle de não linearidade (k) e de dissipação (γ). Verificaremos que o comportamento do sistema está atrelado à escolha dos valores da parametrização; quando $k > 0$ teremos no sistema uma não linearidade e para $\gamma \in [0, 1]$ encontraremos um comportamento dissipativo. Mostraremos que para $\gamma = 0$ o sistema remonta-se ao caso conservativo, no qual preserva área no espaço de fases e para $\gamma \neq 0$ o sistema se apresenta como dissipativo, onde surgirá uma variação na sua área e o surgimento de atratores. Notaremos que, no caso dissipativo, a utilização de valores elevados para o parâmetro k , ocasionará o surgimento de atratores caóticos. Este comportamento caótico nos permitirá investigar o decaimento exponencial existente, além da velocidade que isso ocorre, quando alteramos o valor do parâmetro de dissipação. Na sequência examinaremos os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos no sistema. Por fim, investigamos o transporte de partículas, de modo que determinaremos numericamente os expoentes dinâmicos que podem ser utilizados para colapsar as curvas contidas nos histogramas de escape em uma única curva universal e, por fim, investigaremos a probabilidade de sobrevivência de partículas.

Palavras-chave: Rotor pulsado, mapa padrão dissipativo, atratores caóticos, expoentes de Lyapunov, propriedades de transporte e expoentes dinâmicos.

Abstract

The work aims to study the pulsed rotor and thus investigate some of its dynamic properties. The model is described by a two-dimensional non-linear mapping with the action variables (I), angle (θ) and by the non-linearity control parameters (k) and dissipation (γ). We will verify that the behavior of the system is linked to the choice of parameterization values; when $k > 0$ we will have a non-linearity in the system and for $\gamma \in [0.1]$ we will find a behavior dissipative. We will show that for $\gamma = 0$ the system goes back to the conservative case, in which it preserves area in the space of phases and for $\gamma \neq 0$ the system presents itself as dissipative, where there will be a variation in its area and the appearance of attractors. We will notice that, in the dissipative case, the use of high values for the parameter k , will cause the appearance of chaotic attractors. This chaotic behavior will allow us to investigate the existing exponential decay, in addition to the speed it occurs, when we change the value of the parameter dissipation. Then we will examine Lyapunov's exponents to characterize the chaos in the system. Finally, we investigate particle transport, so that we will numerically determine the dynamic exponents that can be used to collapse the curves contained in the escape histograms in a single universal curve and, finally, we will investigate the probability of particle survival.

Keywords: Pulsed rotor, dissipative standard map, chaotic attractors, Lyapunov exponents, transport properties and dynamic exponents.

Sumário

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	13
1 Introdução	15
2 Mapa Padrão	21
2.1 Mapa padrão conservativo	21
2.2 Mapa padrão dissipativo	22
2.3 Atrator ponto fixo e atrator caótico	25
3 Decaimento de órbitas para atratores caóticos e cálculo dos expoentes de Lyapunov	29
3.1 Decaimento de órbitas para os atratores caóticos	29
3.2 Expoentes de Lyapunov para evidenciar o comportamento caótico	31
4 Transporte de Partículas: escape e sobrevivência	37
4.1 Escape de partículas	37
4.2 Probabilidade de sobrevivência de partículas	43
5 Comentários finais e perspectivas de continuidade	47
A Construção do Modelo: Mapa Padrão	50

Lista de Figuras

1.1	Atrator do sistema de Lorenz. Utilizamos a integração do método de Euler: condição inicial $X(0) = 1$, $Y(0) = 2$ e $Z(0) = 3$; parâmetros de controle: $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. Figura gerada pelo autor.	18
1.2	Representação de uma seção de Poincaré. Figura retirada da referência [2].	18
2.1	Espaço de fases do mapa padrão conservativo: utilizando a equação (2.1) e quatro valores distintos para k : (a) $k = 0, 4$, (b) $k = 0, 9716$, (c) $k = 1, 4$ e (d) $k = 2$	23
2.2	Espaço de fases do mapa padrão dissipativo, com $\gamma = 10^{-3}$ utilizando os mesmos quatro valores de k da Figura 2.1: (a) $k = 0, 4$, (b) $k = 0, 9716$, (c) $k = 1, 4$ e (d) $k = 2$	24
2.3	Espaço de fases do mapa padrão dissipativo, com $\gamma = 10^{-3}$ utilizando quatro novos valores para k : (a) $k = 10$, (b) $k = 100$, (c) $k = 1000$ e (d) $k = 10000$	26
2.4	Estimativa do valor máximo do atrator caótico: (a) $\gamma = [10^{-4}, 10^{-3} \text{ e } 10^{-2}]$ e $k \in [10^{-2}, 10^3]$ e (b) $k = [1, 3, 4, 7, 10, 10^2 \text{ e } 10^3]$ e $\gamma \in [10^{-4}, 10^{-1}]$	27
3.1	Decaimento de órbita para o atrator caótico: (a) comportamento de $I \times n$ para diferentes valores de γ , k e I_0 (conforme figura) e (b) apresentação de uma única curva universal, mediante a sobreposição de todas as curvas.	31
3.2	Demonstração da divergência entre órbitas de duas partículas, com condições iniciais próximas. Figura extraída da referência [14].	32
3.3	Comportamento das curvas dos expoentes de Lyapunov: (a) positivo e (b) negativo, com a utilização dos parâmetros de controle $k = 10$ e $\gamma = 10^{-3}$. Em (c) temos a soma dos valores médios dos expoentes de Lyapunov $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$ [24].	34
3.4	Comportamento das curvas dos expoentes de Lyapunov: (a) positivo e (b) negativo, com a utilização dos parâmetros de controle $k = 10$ e $\gamma = 10^{-4}$. Em (c) temos a soma dos valores médios dos expoentes de Lyapunov $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$ [24].	35

3.5	Comportamento do valor médio dos expoentes de Lyapunov em função dos parâmetros de controle (a) k e (b) γ [24].	36
4.1	Espaço de fases do mapa padrão dissipativo utilizando os parâmetros de controle $k = 1000$ e $\gamma = 10^{-4}$, com a representação da estimativa do posicionamento de I_{max}^* e a I_{min}^* (pois o seu posicionamento depende de n iterações) e do posicionamento da faixa limitadora de h_{max} e h_{min}	38
4.2	<i>Histograma</i> da frequência de escape em função de n utilizando os parâmetros de controle $k = 10$, $\gamma = 10^{-3}$ e $h_{max,min} = 20\%I_{max,min}^*$. O valor de pico da curva: $n_p = 1$, após a sua normalização.	39
4.3	Escape de partículas: (a) $n_p \times h(\gamma)$ para quatro diferentes valores de k e (b) $n_p \times h(k)$ para três diferentes valores de γ . Em (c) temos um reescala das curvas de (a): $n_p \times h(\gamma)/k$	40
4.4	Comportamento de n_p em função dos parâmetros de controle: em (a) $n_p \times \gamma$ com quatro valores diferentes para k e em (b) $n_p \times k$ com três valores diferentes para γ	42
4.5	Em (a) temos o <i>Histograma</i> de escape em função de n utilizando quatro valores diferentes para γ e k . Em (b) encontramos uma reescala no n (conforme apresentado na legenda) que tem por escopo sobrepor todas as curvas.	44
4.6	(a) $P_s \times n$ mostrando o comportamento exponencial, para as três situações, com valores pequenos de ν (conforme rotulado na figura); (b) curvas de $-\nu \times h(\gamma)$ para quatro valores diferentes de k ; (c) curvas de $-\nu \times h(k)$ para três valores diferentes de γ ; (d) sobreposição das curvas mostradas em (b) após a transformação $h(\gamma) \rightarrow h(\gamma)/k$	45
A.1	Modelo físico do rotor pulsado. Figura retirada da referência [30]	51
.	..	

Lista de Tabelas

2.1	Valores dos expoentes dinâmicos (α) para $k \in [10^{-2}, 10^3]$ obtidos através de ajuste em lei de potência.	27
2.2	Valores dos expoentes dinâmicos (α) para $\gamma \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ obtidos através de ajuste em lei de potência.	28
3.1	Soma dos valores médios dos expoentes Lyapunov $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$, para oito combinações de valores para k e γ	35
3.2	Valores das variáveis de ajustes encontradas para as curvas de $\bar{\lambda}$ em função de k para quatro valores diferentes de γ fixo.	36
4.1	Valores dos expoentes dinâmicos (u_i), referentes a Figura 4.3(a): quando $i = 1$ e 2 , os valores para $k = 7$ e quando $i = 3$, os valores para $k > 7$. Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times h(\gamma)$ para quatro valores diferentes de k	41
4.2	Valores dos expoentes dinâmicos (u_4), referentes a Figura 4.3(b). Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times h(k)$ para três valores diferentes de γ	41
4.3	Valores dos expoentes dinâmicos (z_i), referentes a Figura 4.4(a): quando $i = 1$ e 2 , o valor para $k = 7$ e quando $i = 3$, os valores para $k > 7$. Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times \gamma$ para quatro valores diferentes de k	42
4.4	Valores dos expoentes dinâmicos (z_4), referentes a Figura 4.4(b). Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times k$ para três valores diferentes de γ	43
4.5	Valores dos expoentes dinâmicos (u'_i), referentes a Figura 4.6(b): quando $i = 1$ e 2 , o valor para $k = 7$ e quando $i = 3$, os valores para $k > 7$. Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajuste em lei de potência nas curvas de $-\nu \times h(\gamma)$ para quatro valores diferentes de k	46

4.6 Valores dos expoentes dinâmicos (u'_4), referentes a Figura 4.6(c). Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $-\nu \times h(k)$ para três valores diferentes de γ 46

Capítulo 1

Introdução

A teoria sobre Sistemas Dinâmicos se remonta ao período da Mecânica Clássica [1] entre os séculos XV e XVI, que tinha como foco o estudo da mecânica celeste [2]. Todavia, somente com Isaac Newton (1642-1727) houve um avanço na modelagem matemática, nas fundamentações sobre as Leis do movimento e na Lei da gravitação universal. Cabe ressaltar, que físicos e matemáticos anteriores a este período, foram fundamentais para este estudo, tais como: Cláudio Ptolomeu ($\pm 85-165$), que propôs um modelo geocêntrico, onde a Terra ocupa o centro do Universo; Johannes Kepler (1571-1630), que estudou a Mecânica Celeste de caráter cinemático, isto é, sem considerar as forças que governam os movimentos; e Galileu Galilei (1564-1642), que introduziu os conceitos de Dinâmica, ou seja, o fundamento da teoria que trata das causas dos movimentos [1].

Em síntese, o estudo de Newton foi pautado em investigar a atração gravitacional entre dois corpos celestes; primeiramente estudou o Sol e a Terra e posteriormente a Terra e a Lua. Ao longo dos anos mais pesquisadores contribuíram para a compreensão das órbitas do Sistema Solar, dentre eles: Joseph Louis Lagrange (1736-1813), que propôs três parâmetros para se investigar o Sistema Solar (excentricidade; ângulo de inclinação entre a Terra e o planeta estudado; e a razão entre a massa dos planetas e a massa do Sol); Pierre Simon Laplace (1749-1827), que estudou a estabilidade do Sistema Solar; Siméon Denis Poisson (1781-1840), que propôs considerar perturbações de segunda ordem com relação às massas; Spiru C. Haret (1851-1912), que provou que os movimentos dos planetas não são necessariamente limitados no tempo, tal afirmação anulava as previsões de estabilidade feitas por Laplace, Lagrange e Poisson. Após anos de investigações, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) propõe uma teoria geral sobre estabilidade, considerando que a estabilidade é produto de uma equação diferencial ordinária, em outras palavras, “uma solução $x(t)$ é estável se outras soluções, cujos valores no instante $t = t_0$ estão ‘próximos’ de $x(t_0)$, permanecem ‘próximas’ de $x(t)$ durante o passar do tempo” [1]; desta forma o problema da estabilidade do Sistema Solar foi desvinculado, sendo possível relacioná-la

com à teoria das equações diferenciais. Através desta contribuição foi possível investigar o comportamento caótico de um sistema quando se determina, a partir da evolução de duas condições iniciais próximas, o afastamento uma da outra exponencialmente no tempo [2].

O estudo de Jules Henri Poincaré (1854-1912) observou que em sistemas dinâmicos a existência de pequenas incertezas na sua condição inicial, são capazes de alterar, ao longo do tempo, a sua previsibilidade. Esta afirmação é perceptível em sistemas caóticos, visto que estas incertezas/erros crescem rapidamente (exponencialmente), inviabilizando sua previsão, ao longo do tempo. Poincaré também contribuiu em outras temáticas, tais como: as equações diferenciais não lineares, através de uma abordagem qualitativa; e o estudo sobre a existência do caos, quando estudou o comportamento da massa de três corpos celestiais [1]. Já na obra, “Princípio de Incerteza”, de Werner Karl Heisenberg (1901-1976), foi possível afirmar que medidas de posição e *momentum*, em qualquer instante, são sempre incertas.

Edward Norton Lorenz (1917-2008), que era meteorologista, estudava as dificuldades em se ter uma previsão do tempo com um grau de confiabilidade razoável. Na década de 50 ele tinha a sua disposição um computador, que lhe auxiliava no processamento de suas simulações, algo que contribuiu vigorosamente na análise de suas investigações. Certa vez, ao refazer as simulações sobre a investigação do comportamento de um objeto, Lorenz digitou no seu computador, os três primeiros algarismos decimais dos resultados que obtinha impresso, ao invés dos seis algarismos decimais que se dispunha armazenados na base de dados do computador [1]. Inicialmente, os novos valores coincidiam com os velhos valores, mas logo passavam a diferir na última casa decimal, até que os valores atuais não se pareciam mais com os antigos valores. Ao analisar o motivo desta discrepância nos resultados (que crescia rapidamente), ele percebeu que a diferença era fruto do arredondamento do valor inserido no seu cálculo (de apenas três casas decimais). Assim, Lorenz, descobriu que a menor alteração nas medidas das condições climáticas, ocasionaria em um comprometimento da viabilidade da previsão do tempo num instante seguinte. Neste contexto surgiu a expressão: “o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode provocar o surgimento de um tornado no Texas”. O impacto destas descobertas levou aos cientistas a se depararem com os sistemas caóticos e que os métodos tradicionais não refletiam as previsões experimentais, tornando intrinsecamente impossível a validação de uma teoria. Em suma, as contribuições de Lorenz foram: a descoberta da extrema sensibilidade nas condições iniciais; que há estrutura no caos; e o estudo sobre atrator estranho no formato de borboleta [1, 3].

Agora o desafio pairava sobre como conhecer os sistemas caóticos e como compreender as regras que governam as mudanças que ocorrem; pois se desejava prever, de modo científico, o comportamento futuro de um sistema caóticos. Neste momento, a Física se

apresentou com um agente capaz de elucidar as leis que governam o funcionamento de sistemas não lineares, seja qual for a área do saber/conhecimento, como por exemplo: elétrica [4, 5], mecânica [6], biológica [7], química [8, 9], propriedades de transporte [10], etc.

O estudo de sistemas dinâmicos visa compreender o comportamento de um objeto em um dado momento futuro (ou o que ocorrerá no passado em um instante determinado). Todavia, para se realizar a modelagem matemática é necessário abarcar as regras de interações dos elementos no sistema e utilizar ferramentas matemáticas apropriadas, que no caso em questão, são denominadas de equações diferenciais (para variação do tempo contínuo, ou seja, para todo instante de tempo) e equações de diferenças (para variação do tempo descontínuo, ou seja, para um determinado instante de tempo), que será definida de acordo com sua aplicação e precisão almejada.

Quanto à sua classificação, o sistema pode se comportar como linear (onde o sistema é integrável) ou não linear (onde não é possível integrar), conter variáveis temporais (contínuas ou descontínuas) e possuir parâmetros de controle [11, 12]. Neste estudo, iremos analisar os conceitos de sistemas dinâmicos bidimensionais não lineares de tempo discreto.

Os sistemas dinâmicos, são representados por mapas que descrevem o comportamento de alguns sistemas físicos, como por exemplo, o Mapa Padrão (Mapa de Chirikov). Tal mapa é nomeado padrão por representar matematicamente alguns sistemas, como o rotor pulsado e o pêndulo simples. No nosso estudo utilizaremos o mapa padrão, descrito pelas variáveis de ação e ângulo (I e θ) e por dois parâmetros de controle; a não linearidade (k) e a dissipação (γ). No Capítulo 2 trabalharemos mais conceitos sobre o mapa padrão.

No sistema de Lorenz o espaço de fases é descrito com três variáveis e três parâmetros de controle. O sistema é formado pelas equações diferenciais [13];

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma(X - Y), \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde, $X, Y, Z \in \Re$ são variáveis que representam: X a intensidade da convecção; Y a diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes do fluido; e Z a distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao perfil linear. Já σ, r, b são parâmetros de controle do sistema e devem ser > 0 [12].

A Figura 1.1 mostra a evolução do sistema de Lorenz ao longo do tempo, a partir de uma dada condição inicial (descrita na legenda).

A seção de Poincaré (ou superfície de seção) é uma maneira para se investigar o comportamento de um sistema. O método tem a finalidade em reduzir o estudo de um

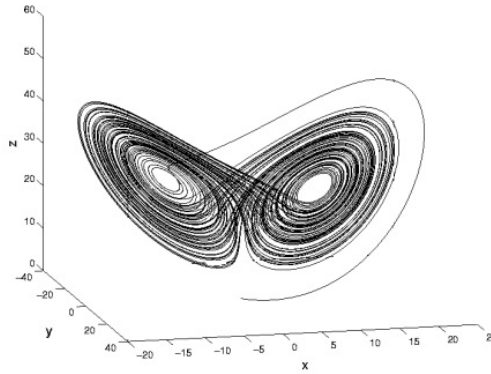


Figura 1.1: Atrador do sistema de Lorenz. Utilizamos a integração do método de Euler: condição inicial $X(0) = 1$, $Y(0) = 2$ e $Z(0) = 3$; parâmetros de controle: $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. Figura gerada pelo autor.

fluxo contínuo num espaço de fases de dimensão N para o estudo de um mapa num espaço de fases com dimensão $N - 1$ [1]. O procedimento está pautado em interceptar o fluxo de soluções no espaço de fases utilizando uma superfície transversal (ou seja, uma seção ou um plano) que corta o conjunto de soluções (Figura 1.2). A cada travessia de fluxo, produzirá um ponto na seção de Poincaré; desta forma, a sequência destes pontos é descrita por um mapeamento discreto,

$$F(\vec{x}_n) = \vec{x}_{n+1}, \quad (1.2)$$

onde, F descreve o operador que evolui o vetor de soluções \vec{x} de dimensão $(N - 1)$ [2].

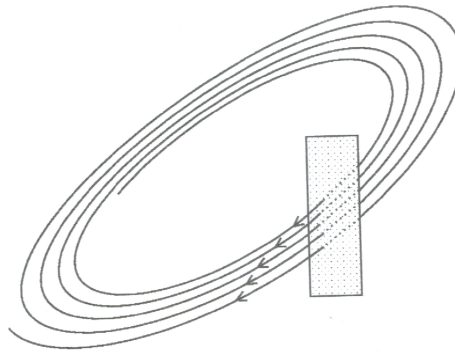


Figura 1.2: Representação de uma seção de Poincaré. Figura retirada da referência [2].

O sistema pode apresentar comportamento conservativo ou dissipativo, este comportamento pode ser determinado pelo teorema de Liouville, que consiste em calcular o determinante da matriz Jacobiana do sistema. Para o caso conservativo o $Det(J) = 1$; a densidade de pontos no espaço de fase é constante, não sofrendo alteração, tal fato nos garante a inexistência de sorvedouros (que é um conjunto de pontos que atraem as soluções para tempos suficientemente longos) que é uma característica dos sistemas dissipativos.

Já para o caso dissipativo o $\text{Det}(J) \neq 1$; o sistema produzirá uma redução da energia (oriunda por exemplo de um arrasto viscoso) e é comum a presença de sorvedouros; cabe ressaltar, que o sistema quando atinge o sorvedouro, ele permanece nesta condição até que haja uma ação externa, para retirá-lo desta situação. Este conjunto de pontos em que as soluções convergem assintoticamente são denominados de atratores [2, 14].

Um atrator é um conjunto de valores no espaço de fases, para o qual o sistema migra com o tempo (para função contínua) ou por iterações (para função discreta). Um atrator pode ser, por exemplo, uma figura geométrica que consiste em um ponto (ou conjunto de pontos) no espaço de fases, após um tempo suficientemente longo de evolução do sistema. O tempo para que o atrator seja alcançado, ocorre através da evolução do sistema, e esta ação é denominada de transiente. Quando o sistema encontra seu atrator, ele perde seu histórico de desenvolvimento e se torna atemporal [1].

O comportamento dos atratores está associado às condições do sistema, citaremos dois exemplos: o atrator de ponto fixo (que é independente do tempo) e o ciclo limite periódico (que é caracterizado pela sua amplitude e período). Suas aplicações são diversas, o ponto fixo, por exemplo, pode ser utilizado na biologia para determinar o *habit* de determinados seres vivos [15], já o ciclo limite pode ser encontrado no oscilador de Van der Pol [16].

A dinâmica destes comportamentos está presente em sistemas caóticos. Algumas das ferramentas utilizadas para caracterizar esta dinâmica caótica são: os diagramas de bifurcação e os expoentes de Lyapunov. A bifurcação é uma mudança de comportamento associado a um fluxo de soluções produzido por uma equação diferencial ou mapeamento discreto; assim uma pequena variação em um dos parâmetros de controle, ocasiona uma mudança repentina no comportamento do fluxo de soluções do sistema [2]. O físico matemático Mitchell Jay Feigenbaum (1944-2019), ao analisar os diagramas de bifurcação, conseguiu determinar duas constantes de fator de escala (δ e α); esta descoberta ficou conhecida como constantes de Feigenbaum [1, 12, 17]. Já o método de obtenção dos expoentes de Lyapunov é outra ferramenta utilizada para analisar o comportamento de um sistema dinâmico, a fim de classificar sua órbita como caótica ou não caótica. A temática sobre os expoentes de Lyapunov será tratada na seção 3.2.

Em síntese, este trabalho tem como escopo investigar: a propriedade, o escape e a sobrevivência de partículas, em sistemas caóticos, analisando seu comportamento no espaço de fases.

Por fim, o trabalho está dividido em três capítulos. No Capítulo 2, investigaremos o mapa padrão, que tem a característica de ser: não linear, bidimensional e conter duas variáveis, ação (I) e ângulo (θ), e um parâmetro de controle de não linearidade (k) para o caso conservativo e para o caso dissipativo é inserido um outro parâmetro, o de dissipação (γ). Veremos que, para o caso dissipativo, quando $\gamma = 0$ o sistema recupera sua configura-

ração conservativa e para $\gamma \neq 0$, verificaremos no espaço de fases, uma variação na sua área e o surgimento de atratores; isso vai se tornando mais presente quanto mais elevados forem os valores aplicados ao parâmetro k . Este comportamento caótico nos permitirá investigarmos no Capítulo 3 o decaimento de órbitas para atratores caóticos, além da velocidade que isso ocorre, quando variamos os valores dos parâmetros de controle. Aprofundaremos nossa investigação através dos expoentes de Lyapunov, onde caracterizaremos algumas órbitas como caóticas e mostraremos algumas observações através da média dos expoentes de Lyapunov em função da parametrização. Já no Capítulo 4, analisaremos o transporte de partículas, onde investigaremos a existência de expoentes dinâmicos, oriundos de diversos dados numéricos investigados; isso resultou na confirmação da existência de uma invariância de escala para os Histogramas de escape e para a Probabilidade de sobrevivência. Finalmente no Capítulo 5, faremos os nossos comentários sobre os resultados encontrados e apresentaremos as perspectivas de continuidade para nosso estudo.

Capítulo 2

Mapa Padrão

O mapa padrão apresenta a evolução de um sistema no tempo em um plano. Ele é descrito por duas equações recursivas, onde são usadas duas variáveis dinâmicas e um ou mais parâmetros de controle (dependendo da sua aplicação): as variáveis são denominadas de ação e ângulo (representadas pelos símbolos I e θ , respectivamente e se referem ao posicionamento do eixo quanto a aplicação de força e a sua inclinação), já os parâmetros de controle podem ser de não linearidade, dissipação e descontinuidade. Desta forma, estes parâmetros determinam o comportamento do sistema, que pode ser conservativo ou dissipativo. Este trabalho investigará os parâmetros de não linearidade e dissipação. Primeiramente analisaremos o parâmetro de não linearidade do sistema (aqui simbolizado pela letra k); esta não linearidade é decorrente da função seno presente na equação.

A equação do mapa padrão está delineada e apresentada no Apêndice A, sendo descrita pela equação [18]:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + k \operatorname{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \quad \text{mod } (2\pi) \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde, I e θ são as variáveis dinâmicas de ação e ângulo e k é o parâmetro de controle de não linearidade do sistema.

Na seção 2.1 será apresentada a característica inerente ao comportamento conservativo. Já na seção 2.2 dedicaremos ao comportamento dissipativo.

2.1 Mapa padrão conservativo

Analisando o efeito que o parâmetro k causa na equação (2.1), percebe-se que, quando $k = 0$, a variável I se conserva ($I_{n+1} = I$) e para $k \neq 0$, nota-se que a variável I se torna dependente do parâmetro de não linearidade, ou seja, a variável I se altera com a iteração do mapeamento. Observa-se também, que o sistema conservativo tem a característica de, ao longo de sua evolução temporal, preservar a área no espaço de fases, em outras

palavras, a área ocupada por estes pontos fixos permanece inalterada [1].

A escolha de valores pequenos para o parâmetro de não linearidade (k) pode produzir espaços de fases mistos, com mares caóticos em torno de ilhas periódicas e limitados por curvas invariantes *spanning*. A curva invariante *spanning* cria uma barreira que impede que uma partícula, que está se move no mar de caos, escape; portanto, as curvas invariantes *spanning* separam duas regiões distintas do sistema: o caos local e o caos global [2]. Todavia, à medida que o valor de k é aumentado, ocorre a destruição das curvas invariantes *spanning* e a expansão do mar caótico, ao ponto de só haver caos no sistema. Cabe ressaltar que o ponto de transição do comportamento de caos local para caos global é denominado de k crítico (k_c) e seu valor corresponde a 0,9716..., tal afirmação é bastante estudada em sistemas dinâmicos discreto. Em síntese tem-se [19]: para $k < k_c$ a região do caos local e para $k \geq k_c$ a região do caos global.

A Figura 2.1 mostra o comportamento do sistema, quando se altera o valor do parâmetro de não linearidade: nela são apresentados quatro valores distintos para k , com 10^3 iterações, em um transiente de 10^5 vezes.

Na Figura 2.1(a) foi utilizado $k = 0,4$; é possível identificar, no espaço de fases, uma ilha de periodicidade, localizada no centro da figura, além das curvas invariantes *spanning*. Para a Figura 2.1(b) foi utilizado o valor de $k = 0,9716$, onde pode ser observado, no espaço de fases, a ausência das curvas invariantes *spanning* e um conjunto de duas regiões bem definidas; uma delas é uma região de caos que existe no regime de baixas energias e a outra são as ilhas de periodicidade. Quando aumentamos o valor de k , para além do k_c , se torna perceptível a aniquilação gradual das ilhas de periodicidade e a expansão paulatina do mar caótico, como é mostrada na Figura 2.1(c) para $k = 1,4$ e na Figura 2.1(d), para $k = 2$.

2.2 Mapa padrão dissipativo

Nesta seção discutimos os efeitos da dissipação no sistema. A equação do mapa dissipativo é fruto do acréscimo, na Equação (2.1), do parâmetro de dissipação (γ), resultando no mapeamento descrito como:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + k \operatorname{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \quad \text{mod } (2\pi) \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde $\gamma \in [0, 1]$. Para $\gamma = 0$, o sistema remonta ao mapa conservativo.

Através do parâmetro γ , o sistema se aproxima das condições reais, visto que ele representa ações que causam perdas no sistema. Na nossa pesquisa, do rotor pulsado, pode

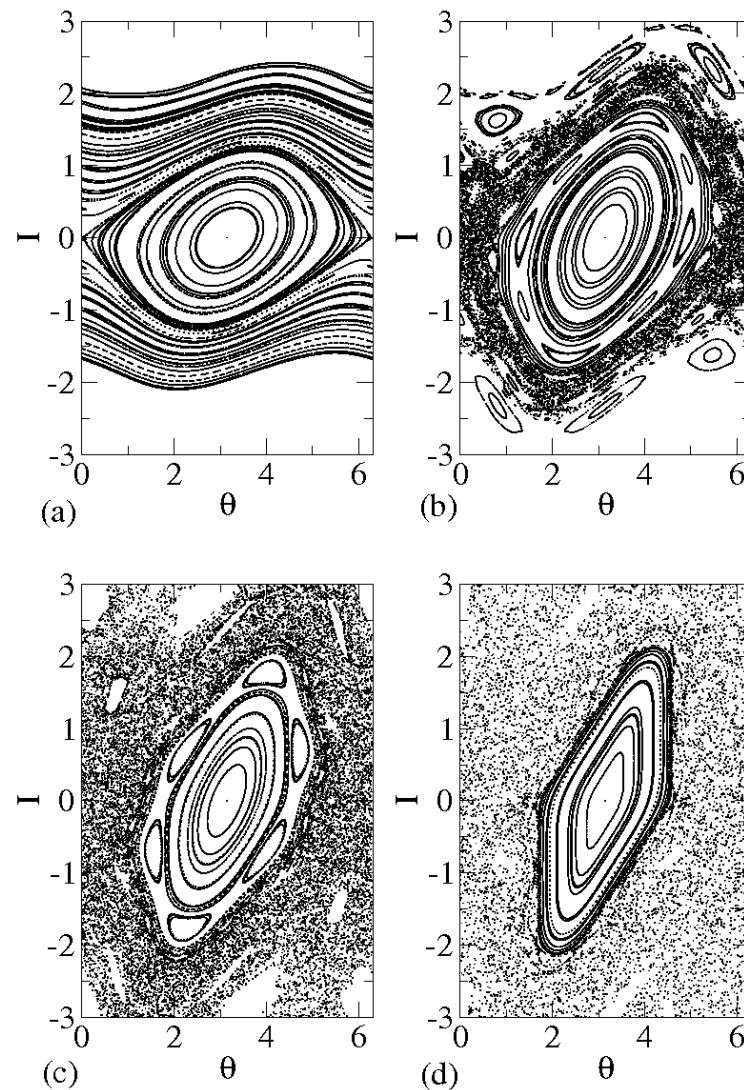


Figura 2.1: Espaço de fases do mapa padrão conservativo: utilizando a equação (2.1) e quatro valores distintos para k : (a) $k = 0,4$, (b) $k = 0,9716$, (c) $k = 1,4$ e (d) $k = 2$.

ser o atrito do eixo do rotor, um outro exemplo, pode ser o atrito entre as articulações de um pêndulo, a resistência causada pelo ar quando o pêndulo descreve seu percurso, etc. Sendo assim, a equação (2.2) do mapa dissipativo se torna mais próxima da realidade do que a equação (2.1) do mapa conservativo. Nota-se que o parâmetro γ , na equação (2.2), causa no espaço de fases uma contração na sua área ao longo da sua evolução no tempo; sendo esta uma característica deste mapeamento. Esta não preservação de área no espaço de fases, será apresentada na seção 3.2, momento em que vamos calcular o $Det(J)$ para o mapa dissipativo.

A Figura 2.2 mostra o espaço de fases do mapa padrão dissipativo. Para cada figura foi utilizado um valor para o parâmetro de controle de não linearidade: $k = 0,4$, $k = 0,9716$, $k = 1,4$ e $k = 2$ (os mesmos quatro valores utilizados na análise do caso conservativo).

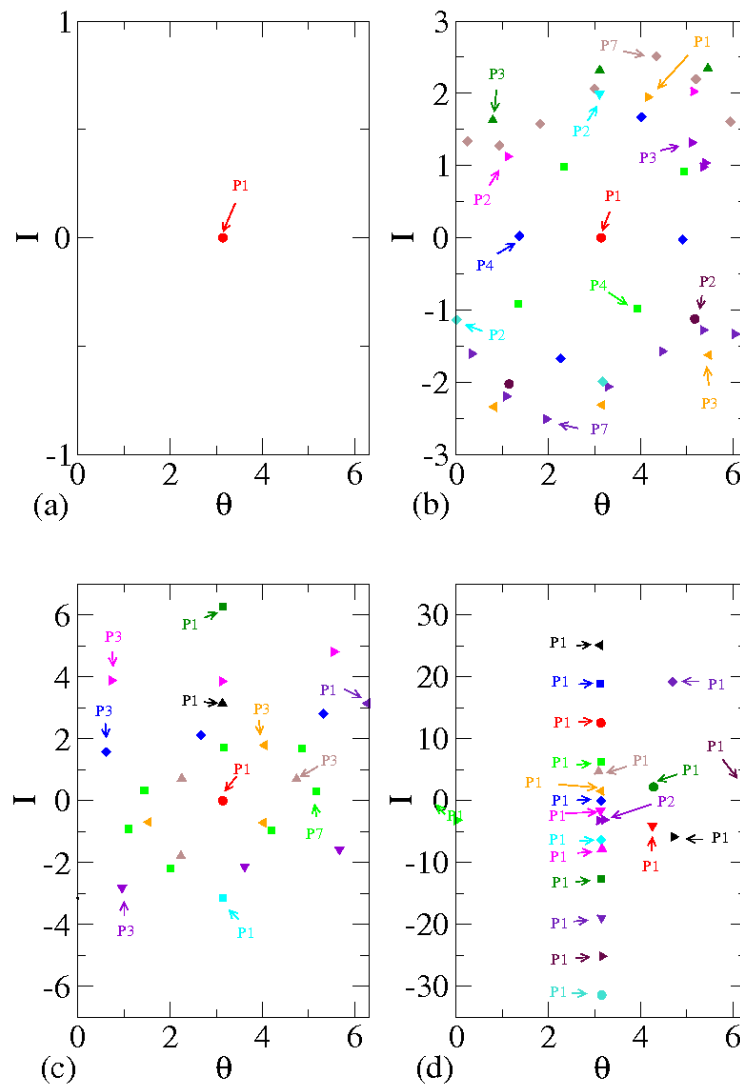


Figura 2.2: Espaço de fases do mapa padrão dissipativo, com $\gamma = 10^{-3}$ utilizando os mesmos quatro valores de k da Figura 2.1: (a) $k = 0, 4$, (b) $k = 0, 9716$, (c) $k = 1, 4$ e (d) $k = 2$.

Já o valor do parâmetro de dissipação foi: $\gamma = 10^{-3}$. Foram realizadas 10^3 iterações, com um transiente de 10^5 vezes.

Na Figura 2.2 é observado o efeito que o parâmetro dissipativo causa no sistema: o surgimento de órbitas periódicas. Notamos que o sistema dissipativo converge para atratores pontos fixos; este comportamento está estritamente atrelado à escolha dos valores dos parâmetros de controle k e γ .

Também foi investigada na Figura 2.2 a caracterização das órbitas periódicas contidas no espaço de fases. O estudo partiu da escolha de um ponto fixo qualquer da Figura 2.2. Deste ponto foi extraído sua coordenada e a partir desta informação foi localizado a órbita deste ponto de referência. Este processo foi repetido até encontrarmos todas

as órbitas dos pontos fixos existentes. De posse dos resultados encontrados foi possível determinarmos o período de cada uma das órbitas existentes no espaço de fases estudado. O período de cada órbita está demonstrado na figura.

Notamos que para $k < k_c$ (Figura 2.2(a)), existe uma única órbita periódica de período 1. Já para $k = k_c$ (Figura 2.2(b)) a quantidade de órbitas cresce de forma acentuada e o mesmo ocorre para $k = 1, 4$ (Figura 2.2(c)). Contudo, para $k = 2$ (Figura 2.2(d)) é perceptível a incidência de órbita com período 1.

Enfim, com o objetivo de aprofundar nossa investigação e evidenciar o efeito do parâmetro de dissipação no sistema foi elaborado um novo conjunto de valores para k . Os quatro valores adotados foram; conforme legenda da figura, com o valor da dissipação permanecendo inalterado ($\gamma = 10^{-3}$). Através desses dados obtidos foi gerada a Figura 2.3. Notamos na figura a difusão dos atratores caóticos, fruto da elevação do valor do parâmetro de não linearidade imposto ao sistema.

2.3 Atrator ponto fixo e atrator caótico

Abordaremos, nesta seção, as regiões que compõem os atratores pontos fixos e os atratores caóticos.

Plotando os dados, gerados pela equação do mapa padrão dissipativo (equação 2.2), foi possível encontrar os pontos de máximo valor para cada conjunto de variáveis e parâmetros desejados no sistema. Estes valores de pontos de máximo são uma estimativa, pois eles dependem da quantidade de n iterações (que na nossa investigação foi de 10^8 vezes); sendo assim, o seu posicionamento pode sofrer alterações. Com estes valores estimados de pontos de máximo construímos a Figura 2.4.

Para a confecção da Figura 2.4, realizamos 10^8 iterações com um transiente de 10^6 vezes. Para a Figura 2.4(a) mantivemos o γ num valor fixo para três valores ($\gamma = 10^{-4}$, $\gamma = 10^{-3}$ e $\gamma = 10^{-2}$), enquanto k sofria alterações no seu valor ($k \in [10^{-2}, 10^3]$), criando assim diversos conjuntos de valores para os parâmetros de controle. Para cada γ fixo e k alternando seu valor, investigamos 64 conjuntos de valores para os parâmetros, estas interações geraram dados de valores estimados dos pontos de máximo e os valores estimados de pontos de mínimo (os pontos de mínimo serão necessários em outras observações, que trabalharemos na seção 4.1): a linguagem de programa utilizada para todas as iteradas, desta obra, foi o Fortran. Analisando estes dados, através do programa Xm-grace, foi possível conhecer os valores numéricos estimados dos pontos de máximo para cada uma das situações; através destas informações foram construídas as três curvas da Figura 2.4(a). A linha magenta tracejada, mostra as duas regiões da Figura 2.4 (a): à esquerda atratores pontos fixos e à direita atratores caóticos. A linha magenta tracejada

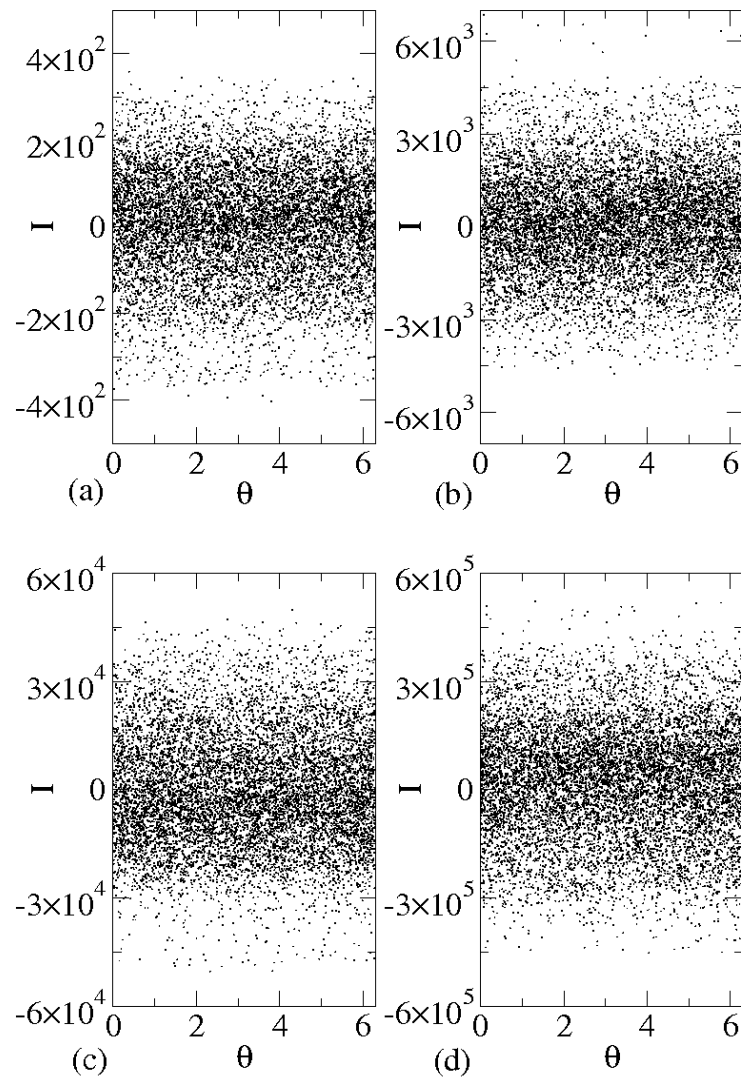


Figura 2.3: Espaço de fases do mapa padrão dissipativo, com $\gamma = 10^{-3}$ utilizando quatro novos valores para k : (a) $k = 10$, (b) $k = 100$, (c) $k = 1000$ e (d) $k = 10000$.

se encontra perpendicular ao eixo k , estando nas proximidades do referencial 7. Notamos a existência de três comportamentos para estas curvas, sendo dois na região de atratores de pontos fixos e um na região de atratores caóticos: a) no início das curvas, verificamos a existência de um conjunto de pontos, que têm a característica de serem atratores de pontos fixos de período 1; b) as curvas têm um crescimento súbito, em relação ao eixo da variável de ação, e assim encontramos o segundo conjunto de atratores de pontos fixos, agora com períodos > 1 ; c) no terceiro conjunto de pontos, notamos o surgimento de atratores caóticos (podendo ser analisados analiticamente pelos expoentes de Lyapunov), que tem crescimento linear. Por fim, foi analisado um ajuste em lei de potência para $k \geq 7$, de onde são fornecidos os valores dos expoentes dinâmicos (α) apresentados na Tabela 2.1.

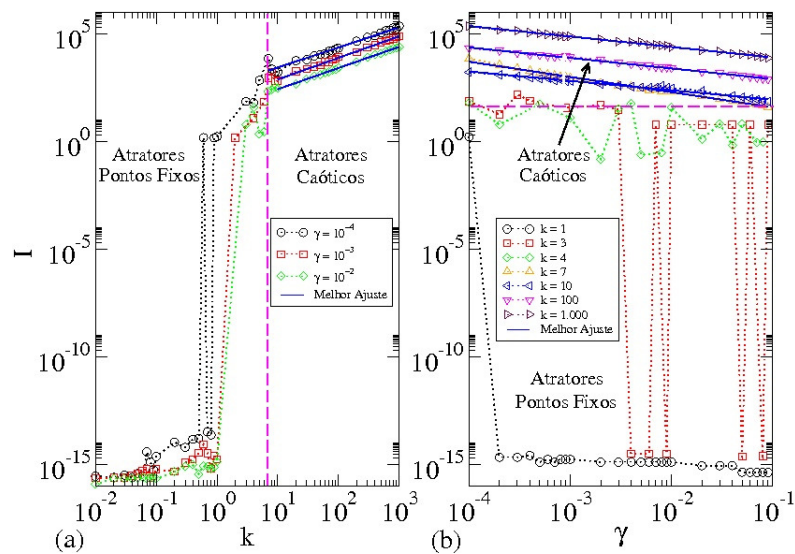


Figura 2.4: Estimativa do valor máximo do atrator caótico: (a) $\gamma = [10^{-4}, 10^{-3} \text{ e } 10^{-2}]$ e $k \in [10^{-2}, 10^3]$ e (b) $k = [1, 3, 4, 7, 10, 10^2 \text{ e } 10^3]$ e $\gamma \in [10^{-4}, 10^{-1}]$.

Tabela 2.1: Valores dos expoentes dinâmicos (α) para $k \in [10^{-2}, 10^3]$ obtidos através de ajuste em lei de potência.

γ	α
10^{-4}	0,93(4)
10^{-3}	1,00(1)
10^{-2}	0,98(7)

Já para a Figura 2.4(b), consideramos fixo k para sete valores ($k = 1, k = 3, k = 4, k = 7, k = 10, k = 10^2$ e $k = 10^3$), enquanto $\gamma \in [10^{-4}, 10^{-1}]$, isso resultou em 27 pares de valores de parâmetros de controle, para cada k fixo analisado, de onde foram extraídos os valores estimado dos pontos de máximo e os valores estimados dos pontos de mínimo. De posse destes valores estimados dos pontos de máximo, foram geradas as sete curvas da figura (b). O ponto de transição entre as duas regiões está representado pela linha magenta tracejada, que está perpendicular ao eixo I ; a parte inferior à linha tracejada é a região dos atratores de pontos fixos e a parte superior a região dos atratores caóticos. Para a região dos atratores caóticos, onde $k \geq 7$, foi investigada um ajuste em lei de potência, cujo valores dos expoentes dinâmicos (α) são apresentados na Tabela 2.2.

Durante a investigação foi notado que para os valores de $k = 3$ e 4 ocorrem migrações de comportamento destas curvas, entre as duas regiões (atratores pontos fixos e atratores caóticos, para alguns valores de γ), não estabelecendo uma constância numa dada região. Por fim, temos que para $k \geq 7$ as curvas estão na região dos atratores caóticos e para $k < 7$ as curvas estão na região do atratores pontos fixos.

Cabe ressaltar que para a construção da Figura 2.4(b) também foram analisados outros

Tabela 2.2: Valores dos expoentes dinâmicos (α) para $\gamma \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ obtidos através de ajuste em lei de potência.

k	α
7	-0,70(1)
10	-0,43(1)
10^2	-0,489(6)
10^3	-0,485(6)

valores de k fixo ($k = 0, 1, k = 1, 5, k = 2, k = 5, k = 6, k = 8, k = 9$ e $k = 10^4$). Esta investigação foi imprescindível para que fosse apresentado os melhores valores que evidenciassem o comportamento sondado: o ponto de transição entre atrator ponto fixo e atrator caótico.

Capítulo 3

Decaimento de órbitas para atratores caóticos e cálculo dos expoentes de Lyapunov

Neste Capítulo apresentaremos uma investigação sobre o decaimento de órbitas para atratores caóticos e o comportamento caótico através dos expoentes de Lyapunov. Também observaremos o comportamento dos expoentes de Lyapunov em função dos parâmetros de controle.

3.1 Decaimento de órbitas para os atratores caóticos

Nossa investigação sobre o decaimento das órbitas terá como ponto de partida o modelo dissipativo. Utilizaremos o primeiro elemento da equação (2.2) do mapa padrão dissipativo e iteramos a partir de um par de condições iniciais I_0 e θ_0 :

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 - \gamma) I_0 + k \operatorname{sen}(\theta_0), \\ I_2 &= (1 - \gamma)^2 I_0 + k\{(1 - \gamma) \operatorname{sen}(\theta_0) + \operatorname{sen}(\theta_1)\}, \\ I_3 &= (1 - \gamma)^3 I_0 + k\{(1 - \gamma)^2 \operatorname{sen}(\theta_0) + (1 - \gamma) \operatorname{sen}(\theta_1) + \operatorname{sen}(\theta_2)\}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Desta forma, a expressão que vamos obter destas iterações é:

$$I_n = (1 - \gamma)^n I_0 + k \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \gamma)^{n-1-i} \operatorname{sen}(\theta_i). \tag{3.2}$$

Observando o segundo termo da equação (3.2), onde é apresentada a função seno, notamos que ela poderá ser suprimida, visto que este conjunto terá uma contribuição pouco

expressiva sobre o decaimento médio [20], pois ele produzirá principalmente pequenas oscilações em torno do decaimento médio. Assim, a expressão se tornará:

$$I_n \simeq (1 - \gamma)^n I_0. \quad (3.3)$$

Expandindo a equação (3.3) em potências de n :

$$I_n \simeq I_0 \left[1 + \ln(1 - \gamma)n + \frac{1}{2!} \ln(1 - \gamma)^2 n^2 + \frac{1}{3!} \ln(1 - \gamma)^3 n^3 + \dots \right]. \quad (3.4)$$

Realizando uma expansão de Taylor e impondo que γ assume um valor pequeno, obtemos:

$$I_n \simeq I_0 e^{-\gamma n}. \quad (3.5)$$

Na equação (3.5), analisamos o comportamento dinâmico do decaimento exponencial, para atratores caótico, de uma partícula em função de sua variável de ação (I) e do seu parâmetro de controle (γ).

Quando a equação do mapa padrão dissipativo (2.2) for iterada, poderemos vislumbrar a curva de decaimento, através da variável de ação e da quantidade de iterações para a obtenção do decaimento ($I \times n$).

Na Figura 3.1(a) apresentamos este comportamento: a variável ação (I) em função da quantidade de iterações (n). Foram utilizados valores aleatórios para os parâmetros de controle (γ e k) e para as variáveis de ação (I_0); os valores utilizados encontram-se na legenda da Figura 3.1(b). Observamos que todos os comportamentos das curvas apresentam decaimentos exponenciais das suas órbitas para atratores caóticos. Também foi investigado um ajuste exponencial do tipo $I = Ae^{Bn}$ (curva amarela) para a primeira curva (preta), que tem como $\gamma = 5 \times 10^{-4}$, $k = 7$ e $I_0 = 1,2 \times 10^5$, onde foram encontradas as constantes de ajuste $A = 1,1157 \times 10^5$ e $B = -0,00047653$. Notamos que o parâmetro de controle γ (0,0005) é semelhante, em grandeza, ao coeficiente B (-0,00047) e quando comparamos com a equação (3.5), concluímos que γ corresponde ao coeficiente B do ajuste exponencial.

Já na Figura 3.1(b) temos a apresentação da sobreposição das quatro curvas mostradas na figura (a). O escopo desta sobreposição é evidenciar a existência de uma única curva universal. Para que a sobreposição ocorresse, foi necessário transformar o eixo I em I/I_0 e no eixo n em $n\gamma$. Notamos que o decaimento exponencial possui uma escala invariante, que estão vinculadas ao parâmetro controle (γ) e a variável de ação inicial (I_0).

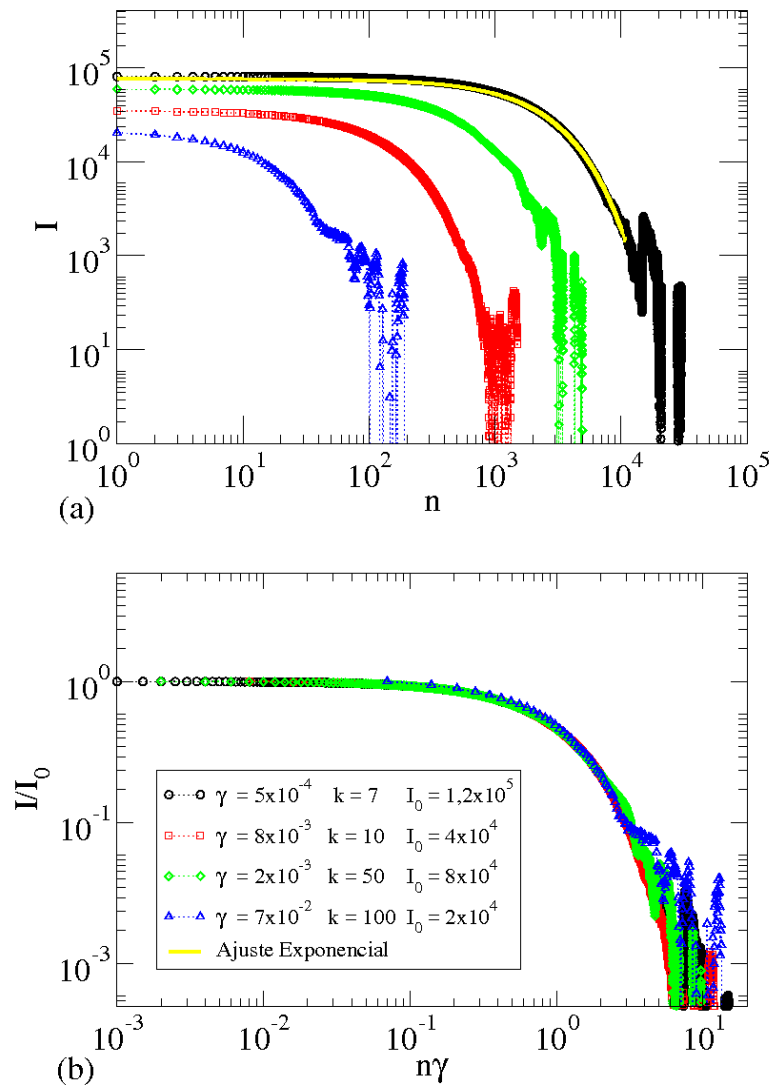


Figura 3.1: Decaimento de órbita para o atrator caótico: (a) comportamento de $I \times n$ para diferentes valores de γ , k e I_0 (conforme figura) e (b) apresentação de uma única curva universal, mediante a sobreposição de todas as curvas.

3.2 Expoentes de Lyapunov para evidenciar o comportamento caótico

Os expoentes de Lyapunov (λ) são uma ferramenta matemática que tem como objetivo caracterizar o comportamento caótico de uma órbita de um sistemas não lineares. Este método é sensível às condições iniciais e por este fato, é utilizado para analisar o comportamento de uma partícula (no nosso estudo, o movimento descrito pelo rotor pulsado) no espaço de fases. O procedimento requer a evolução de duas órbitas no tempo; as partículas do sistema analisado precisam ter condições iniciais muito próximas, pois será analisado a taxa de divergência média destas órbitas e quantificar a dependência sensítiva

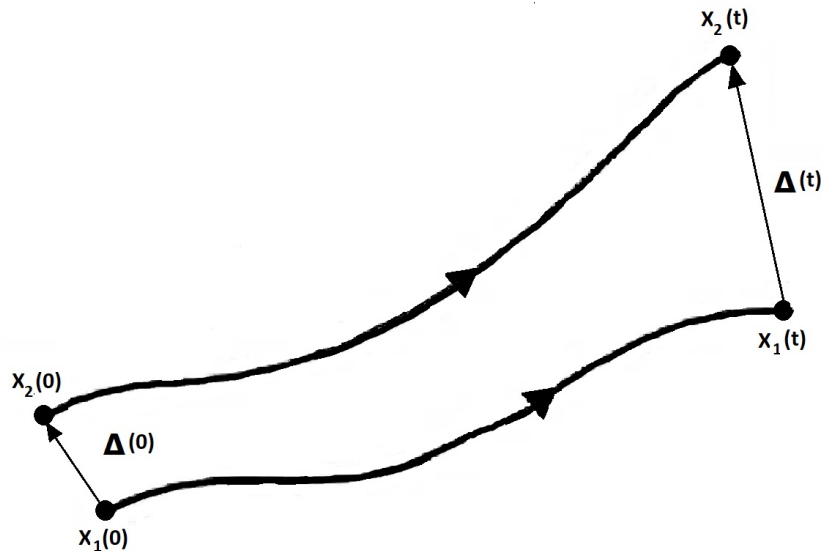


Figura 3.2: Demonstração da divergência entre órbitas de duas partículas, com condições iniciais próximas. Figura extraída da referência [14].

às condições iniciais [1, 12].

Em outras palavras, os expoentes de Lyapunov demonstram a velocidade com que duas órbitas evoluem (com condições iniciais próximas), seja no ato de aproximarem-se ou distanciarem-se no espaço de fases. Para que o sistema seja caracterizado com comportamento caótico é necessário que ao menos um dos expoentes encontrados seja positivo ($\lambda > 0$). Já para $\lambda \leq 0$ o comportamento será caracterizado como periódico ou quase-periódico [1, 2, 12]. A Figura 3.2 ilustra a taxa média de divergência entre duas condições iniciais x_1 e x_2 [21].

Para sistemas bidimensionais, os expoentes de Lyapunov podem ser utilizados para evidenciar os atratores caóticos e podem ser medidos por [22, 23]:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^n|, \quad j = 1, 2, \quad (3.6)$$

onde $\Lambda^{(n)}$ são os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(\theta, I)$, sendo que J_i representa a evolução da matriz Jacobiana ao longo da órbita.

O método de triangularização das matrizes foi utilizado para calcular os expoentes de Lyapunov [22] e a matriz Jacobiana para este sistema é definida como:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial I_n}{\partial \theta_{n+1}} & \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_{n+1}} \\ \frac{\partial I_n}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde os termos da matriz J são dados por:

$$j_{11} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma, \quad (3.8)$$

$$j_{12} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = k \cos(\theta_n), \quad (3.9)$$

$$j_{21} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma, \quad (3.10)$$

$$j_{22} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + k \cos(\theta_n), \quad (3.11)$$

substituindo os termos, a matriz J ficará escrita como:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \gamma & k \cos(\theta_n) \\ 1 - \gamma & 1 + k \cos(\theta_n) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A partir dos elementos da matriz Jacobiana (J) calculamos o determinante do sistema, que é dado por:

$$\text{Det}(J) = 1 - \gamma. \quad (3.13)$$

O teorema de Liouville assevera que quando o resultado do determinante de uma matriz Jacobiana é igual a ± 1 , é uma evidência que o comportamento deste sistema pode ser conservativo; isso quer dizer, que mesmo que ocorra alguma mudança no espaço de fases, seja na região e/ou no formato geométrico, a área dos pontos não sofrerão alterações. Portanto, para valor de $\gamma \neq 0$ a área no espaço de fases não será preservada, caracterizando assim um comportamento dissipativo [2].

Os expoentes de Lyapunov foram utilizados para a geração da Figura 3.3. A figura foi construída a partir da equação (2.2) com seis condições iniciais diferentes (porém próximas entre si, conforme rotulado na figura); com o escopo de investigar a evolução das órbitas no espaço de fases. Os parâmetros de controle utilizados, para a geração das curvas, foram $k = 10$ e $\gamma = 10^{-3}$, com iteração de 10^8 vezes. Na Figura 3.3(a) foram encontrados expoentes positivos, com o valor médio de $\bar{\lambda}_1 = 1,6193(1)$; cabe ressaltar, que o fato de termos encontrado um expoente positivo, temos a caracterização que esta órbita tem comportamento caótico. O mesmo procedimento foi realizado na Figura 3.3(b); nela foram encontrados expoentes negativos e o valor médio entre as curvas é de $\bar{\lambda}_2 = -1,6203(1)$. Já na Figura 3.3(c) é mostrado a soma dos valores médios dos expoentes de Lyapunov ($\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \approx -10^{-3}$), que é um valor muito próximo, em magnitude, ao valor utilizado para γ (10^{-3}) [24].

Com o objetivo de continuar a investigação, foi elaborada a Figura (3.4) utilizando a mesma equação 2.2, porém com outro valor para o parâmetro de dissipação. Os valores dos parâmetros foram $k = 10$ e $\gamma = 10^{-4}$, com as mesmas seis condições iniciais e com 10^8

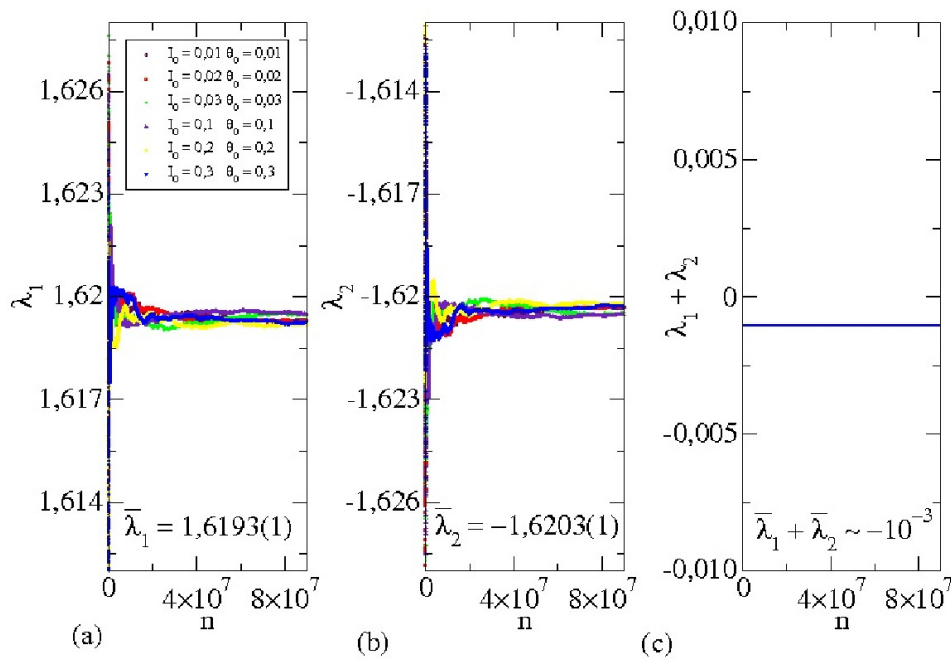


Figura 3.3: Comportamento das curvas dos expoentes de Lyapunov: (a) positivo e (b) negativo, com a utilização dos parâmetros de controle $k = 10$ e $\gamma = 10^{-3}$. Em (c) temos a soma dos valores médios dos expoentes de Lyapunov $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$ [24].

iterrações. Na Figura 3.4(a) temos o comportamento dos expoentes de Lyapunov positivos e a média do conjunto das diferentes curvas com o valor de $\bar{\lambda}_1 = 1,6198(1)$. Na Figura 3.4(b) temos o comportamento dos expoentes de Lyapunov negativos e seu valor médio é de $\bar{\lambda}_2 = -1,6199(1)$. E na Figura 3.4(c) temos a soma dos valores médios dos expoentes Lyapunov ($\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \approx -10^{-4}$), que tem a mesma magnitude do valor do γ utilizado.

A Tabela 3.1 foi elaborada para apresentar outras combinações de valores dos parâmetros de controle, para a obtenção do valor médio dos expoentes de Lyapunov. Foram observados oito combinações com $k \in [7, 10^4]$ e $\gamma \in [10^{-5}, 10^{-2}]$. Assim como nas Figuras 3.3 e 3.4, a soma das médias dos expoentes de Lyapunov, resultou num valor numérico de mesma magnitude que o valor utilizado para dissipação.

A Figura 3.5 foi gerada a partir dos valores médios dos expoentes de Lyapunov e dos parâmetros de controle. Para a obtenção de cada par de coordenadas, foi necessário encontrar a média entre seis condições iniciais próximas (I_0 e θ_0 : assumindo sempre os mesmos valores: 0,01, 0,02, 0,03, 0,1, 0,2 e 0,3). Este procedimento se repetiu para 31 pares de valores de k e γ . Na Figura 3.5(a) foi investigado o comportamento da média dos expoentes de Lyapunov ($\bar{\lambda}_1$) em função do parâmetro da não linearidade (k), para $k \in [7, 10^4]$ com $\gamma = 10^{-3}$. Observamos na figura a existência de um ajuste logarítmico do tipo $\bar{\lambda} = A + B \ln(k)$, onde $A = -0,7496(2)$ e $B = 1,0074(2)$. Na Figura 3.5(b) foi analisado a média dos expoentes de Lyapunov ($\bar{\lambda}_1$) em função do parâmetro da dissipação

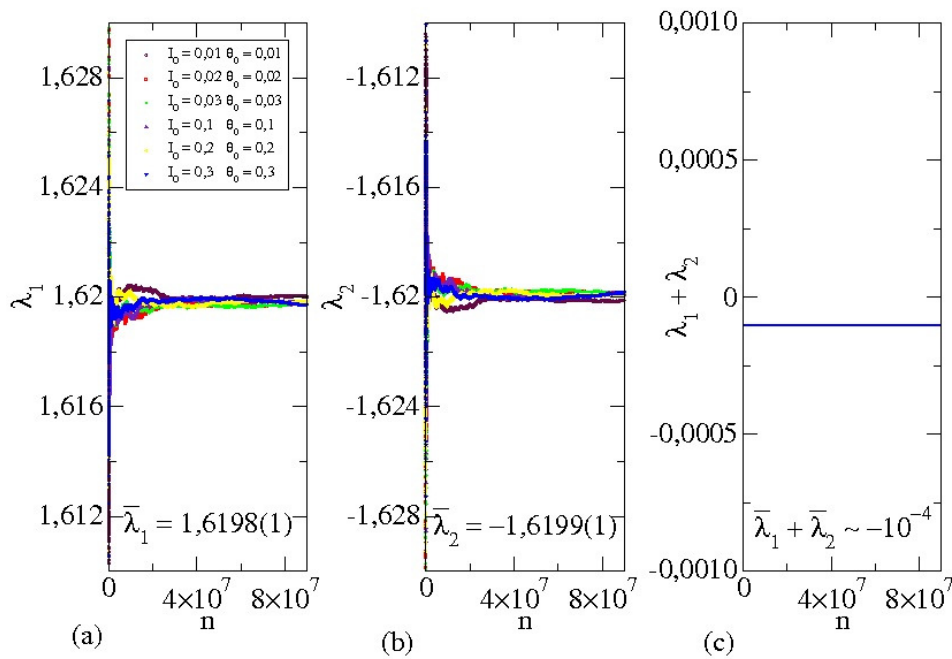


Figura 3.4: Comportamento das curvas dos expoentes de Lyapunov: (a) positivo e (b) negativo, com a utilização dos parâmetros de controle $k = 10$ e $\gamma = 10^{-4}$. Em (c) temos a soma dos valores médios dos expoentes de Lyapunov $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$ [24].

Tabela 3.1: Soma dos valores médios dos expoentes Lyapunov $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$, para oito combinações de valores para k e γ .

k	γ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2$
7	3×10^{-3}	1,27606(2)	-1,27906(2)	$\approx -0,003$
8	6×10^{-2}	1,40819(2)	-1,47007(2)	$\approx -0,06$
9	2×10^{-4}	1,51724(4)	-1,51744(4)	$\approx -0,0002$
10	10^{-2}	1,61713(8)	-1,62718(8)	$\approx -0,01$
50	4×10^{-5}	3,21938(4)	-3,21942(4)	$\approx -0,00004$
100	8×10^{-4}	3,91232(4)	-3,91312(4)	$\approx -0,0008$
500	5×10^{-2}	5,52149(1)	-5,57278(1)	$\approx -0,05$
1000	10^{-3}	6,21443(4)	-6,21543(4)	$\approx -0,001$

(γ), para $\gamma \in [10^{-5}, 9 \times 10^{-1}]$ com $k = 10$. Para este caso notamos um valor quase constante: embora ocorra uma grande variação no parâmetro de controle γ , isso não influenciou para que houvesse uma variação significativa no valor médio dos expoentes de Lyapunov [25]. A Figura 3.5(a) também nos permite notar que o regime de transição, entre ponto fixo e atrator caótico, do sistema é encontrado quando o parâmetro de não linearidade assume o valor $k \approx 7$.

Com o intuito de prosseguir com investigação do comportamento de $\bar{\lambda}$ em função dos parâmetros de controle, foram elaboradas outras combinações para k e γ . Primeiramente

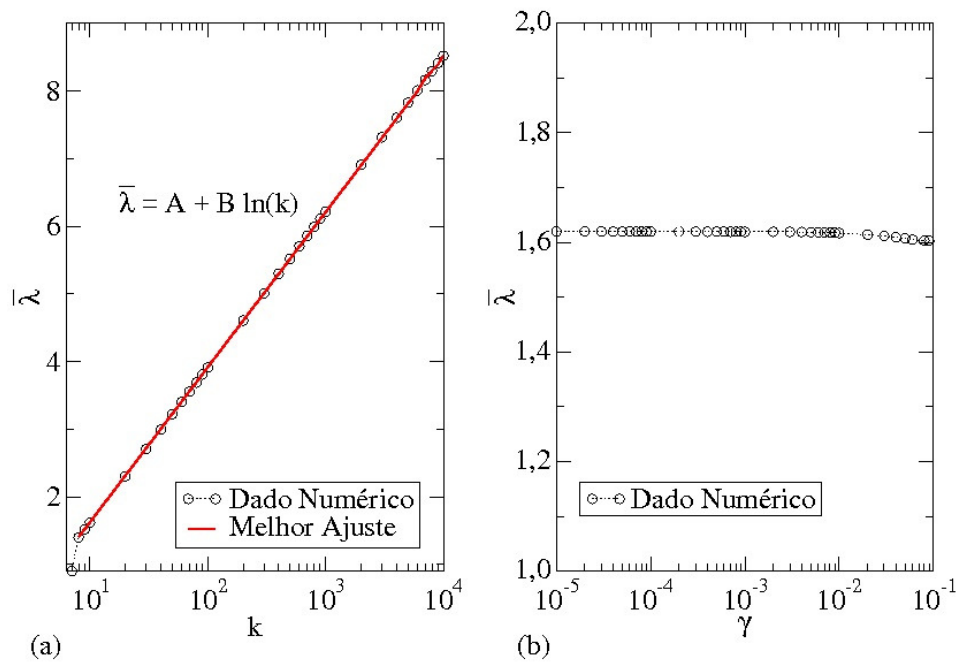


Figura 3.5: Comportamento do valor médio dos expoentes de Lyapunov em função dos parâmetros de controle (a) k e (b) γ [24].

Tabela 3.2: Valores das variáveis de ajustes encontradas para as curvas de $\bar{\lambda}$ em função de k para quatro valores diferentes de γ fixo.

γ	$\bar{\lambda} = A + B \ln(k)$	
	A	B
10^{-5}	-0,672(2)	0,9977(5)
10^{-4}	-1,1(1)	1,00(2)
10^{-3}	0,7496(2)	1,0074(2)
10^{-2}	-1,39(1)	1,077(1)

analisamos o comportamento de $\bar{\lambda}$ em função de k para o intervalo $k \in [7, 10^4]$ para outros valores de γ fixo ($\gamma = 10^{-5}$, $\gamma = 10^{-4}$, $\gamma = 10^{-3}$ e $\gamma = 10^{-2}$); os resultados encontrados estão apresentados na Tabela 3.2. Na sequência observamos o comportamento de $\bar{\lambda}$ em função de γ no intervalo $[10^{-5}, 9 \times 10^{-2}]$ para outros valores de k fixo ($k = 7$, $k = 8$, $k = 9$, $k = 10$, $k = 50$, $k = 100$, $k = 500$ e $k = 1000$); assim como na Figura 3.5(b), não foi encontrado variação significativa no valor médio dos expoentes de Lyapunov.

Capítulo 4

Transporte de Partículas: escape e sobrevivência

Neste Capítulo investigaremos o comportamento das partículas em uma determinada região no espaço de fases e assim observarmos o seu comportamento para uma dada situação; ou seja, se elas escapam ou sobrevivem a uma condição de faixa limitadora, imposta ao espaço de fases. Discutiremos sobre as temáticas de escape e de sobrevivência das partículas e acerca dos expoentes dinâmicos encontrados destas investigativação.

4.1 Escape de partículas

Averiguaremos, nesta seção, a dinâmica do escape de partículas para o mapa padrão dissipativo. Para esta etapa do estudo, estabelecemos que o valor de k deverá ser maior que 7, para termos somente situações que resultará em atratores caóticos (conforme investigado e apresentado na Figura 2.4(b)) e utilizaremos como condições iniciais $I_0 = 10^{-5}$ e θ_0 variando uniformemente ao longo do intervalo de $\theta \in [0, 2\pi]$ e iterando 10^6 vezes. Após este período de evolução (onde ocorre variações na órbita da partícula), a partícula apropria-se do valor da última iteração como valor da condição inicial da próxima órbita; assim se inicia uma nova etapa com iteração de 10^8 vezes. Nesta nova etapa, toda partícula que atingir em sua órbita $I \geq h$, será armazenada a coordenada deste ponto em um vetor e a simulação finalizada; pois a partir deste ponto assumiremos que a partícula alcançou seu ponto de fuga, ou seja, ocorreu o escape da partícula. Cabe ressaltar que h_{max} e h_{min} são os valores da nossa faixa de observação e que estes valores estão atrelados ao I_{max}^* e a I_{min}^* . Já os valores dos I_{max}^* e a I_{min}^* são uma estimativa dos valores máximos e mínimos do atrator caótico; estes valores máximos e mínimos são uma estimativa, visto que o seu posicionamento pode sofrer alterações, pois eles dependem da quantidade de n iterações imposta na investigação: no nosso caso $n = 10^7$. O ciclo se repete evoluindo uma

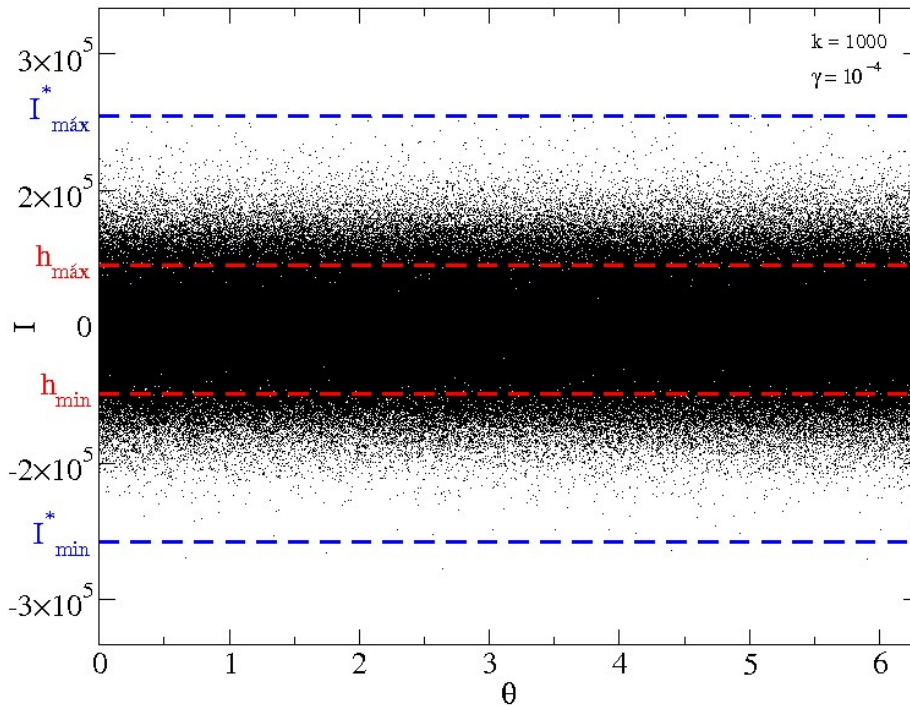


Figura 4.1: Espaço de fases do mapa padrão dissipativo utilizando os parâmetros de controle $k = 1000$ e $\gamma = 10^{-4}$, com a representação da estimativa do posicionamento de I_{max}^* e a I_{min}^* (pois o seu posicionamento depende de n iterações) e do posicionamento da faixa limitadora de h_{max} e h_{min} .

nova órbita, a partir da próxima condição inicial (I_0 assumindo o mesmo valor de 10^{-5} e θ assumindo o próximo valor do intervalo $\in [0, 2\pi]$), até que todos os conjuntos de condições iniciais sejam contempladas. Na Figura 4.1 temos uma ilustração do posicionamento de h . Na figura visualizamos a posição de h_{max} e h_{min} (linhas tracejadas vermelhas) em relação a estimativa dos valores máximos e mínimos da variável de ação I^* no espaço de fases (linhas tracejadas azuis).

De posse destes valores, onde ocorreram o escape de partículas, foi gerado uma figura denominada de histograma da frequência de escape. Para a confecção deste histograma foi considerado $h = c_p I^*$, onde c_p é nossa faixa de observação e está definida como 20% do valor estimado máximo e mínimo da variável de ação I^* , com os parâmetros de controle $k = 10$, $\gamma = 10^{-3}$. A Figura 4.2 mostra o número de partículas que escaparam por n iterações.

Na Figura 4.2 conseguimos observar que há um crescimento acentuado na trajetória da curva; no ápice deste crescimento encontramos o valor máximo do histograma, representado por n_p . Após atingido o pico, a curva decresce até atingir o valor zero assintoticamente para $n \rightarrow \infty$. Ressaltamos, que a curva da figura foi normalizada, para que seu valor de pico tivesse o valor de uma unidade; isso foi necessário para que pudessemos

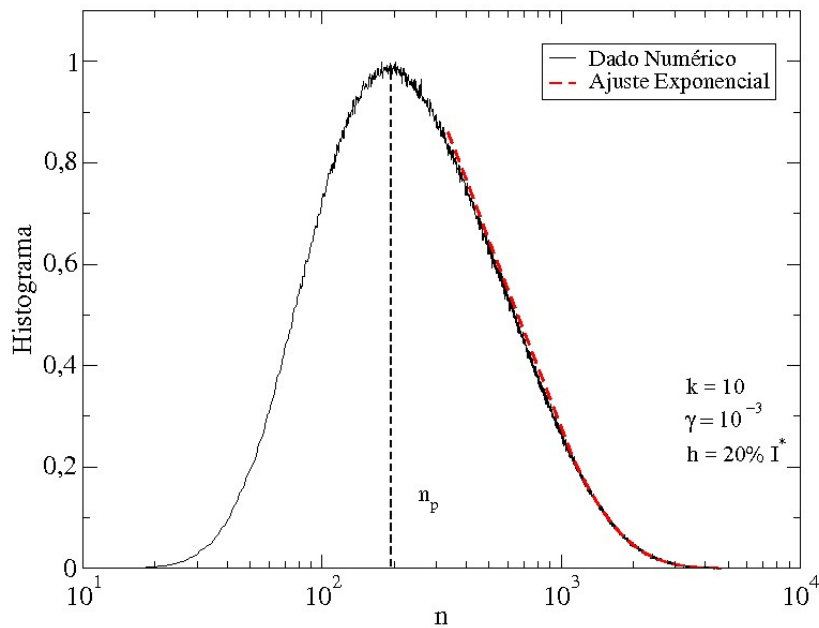


Figura 4.2: *Histograma* da frequência de escape em função de n utilizando os parâmetros de controle $k = 10$, $\gamma = 10^{-3}$ e $h_{max,min} = 20\%I_{max,min}^*$. O valor de pico da curva: $n_p = 1$, após a sua normalização.

analisá-la, observá-la e compará-la com outras figuras de histograma. Nota-se que o decaimento desta curva é exponencial e sendo assim, foi apresentado um ajuste exponencial do tipo *Histograma* = $A e^{Bn}$, onde $A = 1,548(1)$ e $B = -0,001752(2)$.

A fim de explorarmos mais sobre a temática e conhecermos o comportamento dos histogramas gerados, analisamos os valores máximos alcançado no eixo de n , ou seja, o n_p e elaboramos algumas curvas em função da altura do escape h ; utilizando diferentes valores para os parâmetros de controle e os resultados obtidos foram apresentados na Figura 4.3, onde observamos que o tempo de fuga é um bom parâmetro para se determinar um fator de escala. Na Figura 4.3(a) temos n_p em função de $h(\gamma)$ para quatro valores diferentes de k ($k = 7$, $k = 10$, $k = 100$ e $k = 1000$), em (b) temos n_p em função de $h(k)$ para três valores diferentes de γ ($\gamma = 10^{-2}$, $\gamma = 10^{-3}$ e $\gamma = 10^{-4}$), já em (c) temos uma reescala de todas as curvas de (a), que resultou em $n_p \times h(\gamma)/k$; assim evidenciamos à existência de um fator de escala, capaz de reescrever as curvas, causando uma sobreposição para valores de $k \geq 7$. No nosso estudo foi considerado $h_{max,min} = 20\%I_{max,min}^*$, para a Figura 4.3(a) com o intervalo $\gamma \in [10^{-4}, 10^{-2}]$, resultando em 27 simulações para cada uma das quatro curvas e para (b) o intervalo $k \in [7, 10^5]$ onde foram realizadas 40 simulações para cada uma das três curvas. Notamos também na Figura 4.3(a) a existência de três expoentes dinâmicos. Assim diferenciamos que para $k = 7$ temos dois expoentes dinâmicos u_1 e u_2 e para $k > 7$ temos um expoente dinâmico u_3 .

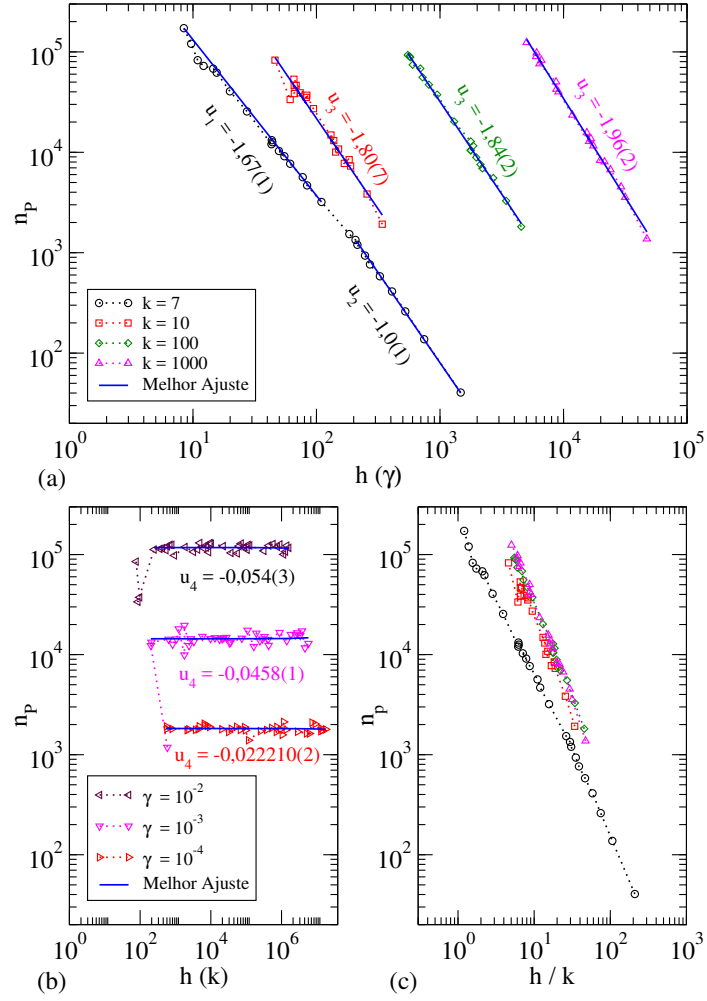


Figura 4.3: Escape de partículas: (a) $n_p \times h(\gamma)$ para quatro diferentes valores de k e (b) $n_p \times h(k)$ para três diferentes valores de γ . Em (c) temos um reescala das curvas de (a): $n_p \times h(\gamma)/k$.

A investigação sobre a Figura 4.3(a) também nos permite supor duas equações para $k = 7$ [26]:

$$n_p \propto h(\gamma)^{u_1} h(k)^{u_4}, \quad (4.1)$$

e

$$n_p \propto h(\gamma)^{u_2} h(k)^{u_4}, \quad (4.2)$$

e uma para $k > 7$ [26]:

$$n_p \propto h(\gamma)^{u_3} h(k)^{u_4}, \quad (4.3)$$

Com o intuito de evidenciar estes ajustes em lei de potência, oriundos da Figura 4.3(a), foi elaborada a Tabela 4.1, com os expoentes dinâmicos de u_i . A análise se estendeu para

Tabela 4.1: Valores dos expoentes dinâmicos (u_i), referentes a Figura 4.3(a): quando $i = 1$ e 2, os valores para $k = 7$ e quando $i = 3$, os valores para $k > 7$. Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times h(\gamma)$ para quatro valores diferentes de k .

k	u_i
7	-1,0(1) e -1,53(1)
10	-1,80(7)
100	-1,84(2)
1000	-1,96(2)

Tabela 4.2: Valores dos expoentes dinâmicos (u_4), referentes a Figura 4.3(b). Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times h(k)$ para três valores diferentes de γ .

γ	u_4
10^{-2}	-0,054(3)
10^{-3}	-0,0458(1)
10^{-4}	-0,022210(2)

a Figura 4.3(b), com os expoentes dinâmicos u_4 . Verificamos que o ajuste de $u_4 \approx 0$, conforme apresentado na Tabela 4.2. Assim, podemos definir que o valor de $u_4 = 0$, tornando o elemento $h(k)^{u_4}$ das equações (4.1), (4.2) e (4.3) neutro no seu equacionamento. Por fim, na Figura 4.3(c), foi realizada uma transformação em escala $h(\gamma) \rightarrow h(\gamma)/k$. Esta ação ocasionou uma sobreposição das curvas (para os valores de $k = 10$, $k = 100$ e $k = 1000$) da Figura 4.3(a).

Na Figura 4.4 continuamos analisando o comportamento de n_p , porém em função dos parâmetros de controle. Em (a) utilizamos o n_p em função do parâmetro de controle γ para quatro diferentes valores de k e em (b) n_p em função do parâmetro de controle k para três diferentes valores de γ .

Observando o comportamento das curvas da Figura 4.4 nos leva a duas hipóteses para $k = 7$ temos [26]:

$$n_p \propto \gamma^{z_1} k^{z_4}, \quad (4.4)$$

e

$$n_p \propto \gamma^{z_2} k^{z_4}, \quad (4.5)$$

e para $k > 7$ [26]:

$$n_p \propto \gamma^{z_3} k^{z_4}, \quad (4.6)$$

onde, os elementos z_1 , z_2 , z_3 e z_4 são expoentes dinâmicos. Os expoentes dinâmicos z_1 , z_2

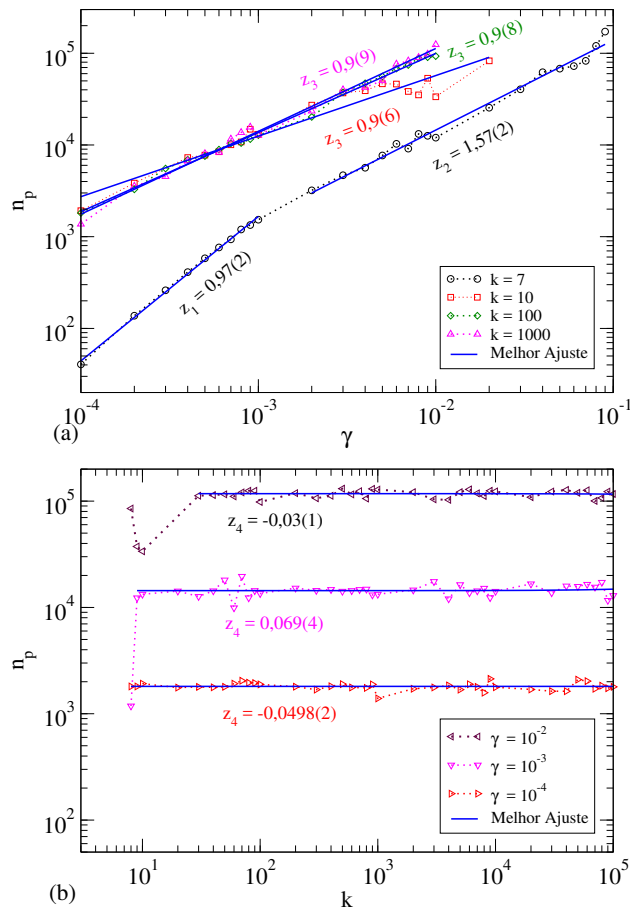


Figura 4.4: Comportamento de n_p em função dos parâmetros de controle: em (a) $n_p \times \gamma$ com quatro valores diferentes para k e em (b) $n_p \times k$ com três valores diferentes para γ .

Tabela 4.3: Valores dos expoentes dinâmicos (z_i), referentes a Figura 4.4(a): quando $i = 1$ e 2, o valor para $k = 7$ e quando $i = 3$, os valores para $k > 7$. Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times \gamma$ para quatro valores diferentes de k .

k	z_i
7	0,97(2) e 1,57(2)
10	0,9(6)
100	0,9(8)
1000	0,9(9)

e z_3 foram obtidos através de um ajuste em lei de potência das quatro curvas da Figura 4.4(a). Estes expoentes dinâmicos estão apresentados na Tabela 4.3. Já os expoentes dinâmicos z_4 foram obtidos através de um ajuste em lei de potência das três curvas da Figura 4.4(b). Eles estão apresentados na Tabela 4.4. Notamos que $z_4 \approx 0$, para os três valores de γ investigados.

Tabela 4.4: Valores dos expoentes dinâmicos (z_4), referentes a Figura 4.4(b). Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $n_p \times k$ para três valores diferentes de γ .

γ	z_4
10^{-2}	-0,03(1)
10^{-3}	0,069(4)
10^{-4}	-0,0498(2)

As figuras desta seção nos auxiliaram para a obtenção dos expoentes dinâmicos u e z . Investigaremos agora o impacto que estes expoentes podem ocasionar num histograma de escape e apresentaremos a existência da invariância de escala das curvas do histograma de escape, ou seja, demonstraremos um fator de reescala, através dos expoentes dinâmicos, onde ocorrerá uma sobreposição de todas as curvas em uma única curva. Na Figura 4.5(a) temos os histogramas de escape em função de n para quatro conjuntos diferentes valores de γ e k , conforme apresentado na figura; optamos por valores de $k > 7$, visto que para estes valores encontramos somente atratores caóticos, conforme já apresentado na Figura 2.4(b) da seção 2.3.

A Figura 4.5(a) tem uma reescala no eixo do histograma, para que todas as curvas tivessem a mesma altura, visto que estas curvas foram escolhidas de maneira aleatória e com valores diferentes para γ e k ; portanto este procedimento de normalização é necessário para a nossa investigação. Já o foco da Figura 4.5(b) foi evidenciar a existência de uma invariância de escala do histograma de escape; nelas replicamos as mesmas quatro curvas da figura (a) e aplicamos o fator de reescala no eixo n ($n \rightarrow n/(\gamma^{u_3} k^{u_4} \gamma^{z_3} k^{z_4})$). Com o auxílio das Tabelas 4.1 e 4.3 localizamos os valor correspondentes para u_3 e z_3 e impondo que $u_4 = 0$ e $z_4 = 0$. Calculamos o fator de reescala de cada uma das quatro curvas e o aplicamos à cada curva correspondente; o efeito que observamos foi sobreposição de todas as curvas. Assim, fica demonstrado a existência da invariância de escala do histograma de escape.

4.2 Probabilidade de sobrevivência de partículas

Nesta seção analisaremos o comportamento de uma partícula no espaço de fases, quando imposta uma faixa limitadora para os valores estimados de h_{max} e h_{min} (o mesmo método utilizado na seção 4.1) e investigaremos a probabilidade de sobrevivência desta partícula. A equação que define este comportamento é dada por:

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N N_{surv}(n), \quad (4.7)$$

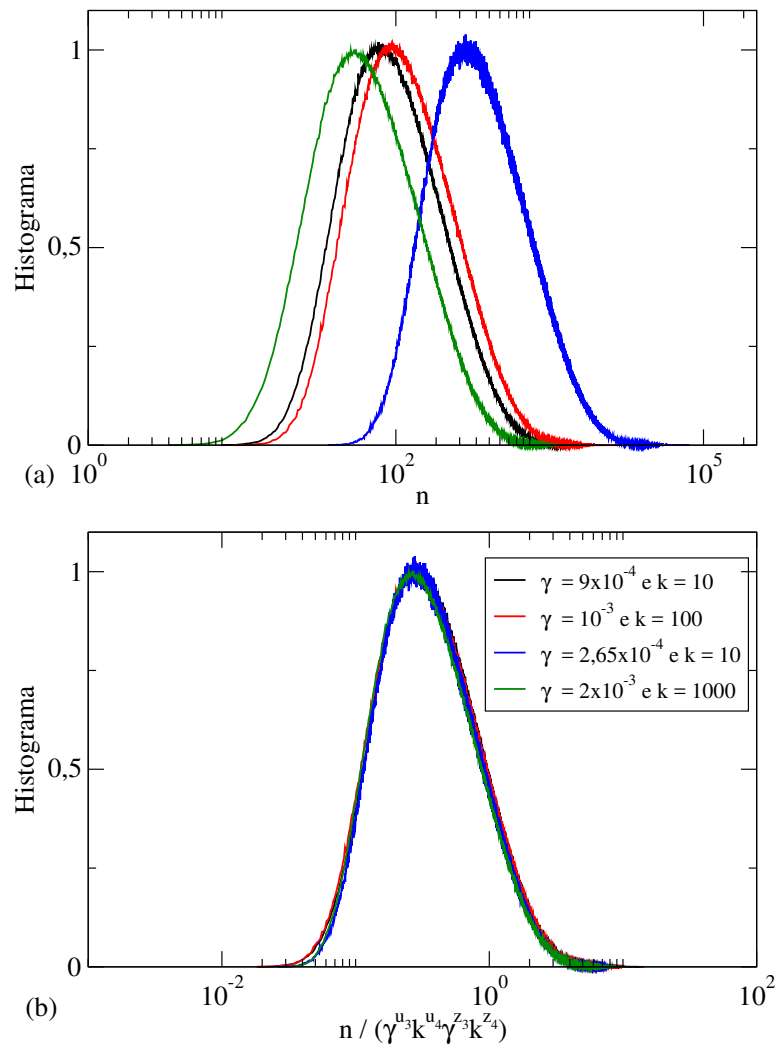


Figura 4.5: Em (a) temos o Histograma de escape em função de n utilizando quatro valores diferentes para γ e k . Em (b) encontramos uma reescala no n (conforme apresentado na legenda) que tem por escopo sobrepor todas as curvas.

onde a somatória que é feita ao longo do conjunto do número de condições iniciais de $N_{surv}(n)$; que é o número de condições iniciais que não ultrapassam a faixa limitadora (que não escapam pelo furo) até um tempo n .

A Figura 4.6 evidenciamos o comportamento da sobrevivência da partícula. Na Figura 4.6(a) temos o comportamento de P_s em função de n para três conjunto de valores dos parâmetros de controle, conforme apresentado na legenda da figura; podemos notar que o comportamento do decaimento da sobrevivência de partículas tem uma trajetória exponencial [10, 27]. Assim foi possível investigar um ajuste exponencial do tipo $P_s \propto e^{\nu n}$, onde foi encontrado o valor $\nu = -0,0017179(8)$, $\nu = -0,0024005(6)$ e $\nu = -0,0040384(6)$ (conforme sequência da parametrização informada na legenda).

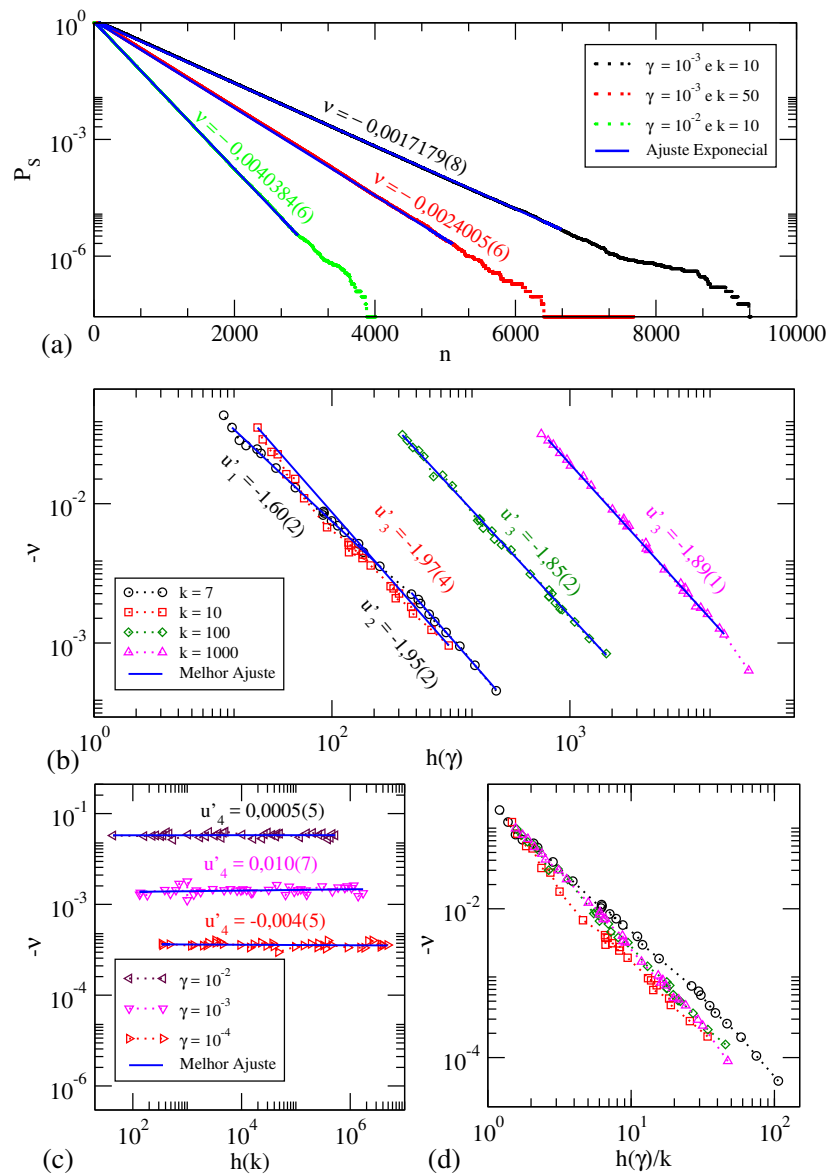


Figura 4.6: (a) $P_s \times n$ mostrando o comportamento exponencial, para as três situações, com valores pequenos de ν (conforme rotulado na figura); (b) curvas de $-\nu \times h(\gamma)$ para quatro valores diferentes de k ; (c) curvas de $-\nu \times h(k)$ para três valores diferentes de γ ; (d) sobreposição das curvas mostradas em (b) após a transformação $h(\gamma) \rightarrow h(\gamma)/k$.

Nas Figuras 4.6(b) e (c), temos o ajuste de $-\nu$ em função da altura h : $h(\gamma)$ e $h(k)$, respectivamente. Nelas encontramos os expoentes dinâmicos (u'_i) de cada uma das curvas. Estes expoentes dinâmicos são frutos do ajuste em lei de potência aplicado a cada uma das curvas. Na Tabela 4.5 está evidenciado os valores de u'_i da Figura 4.6(b), já na Tabela 4.6 temos os valores de u'_4 da Figura 4.6(c).

Também notamos, nesta investigação, a existência de dois expoentes dinâmicos para $k = 7$, já para os demais valores de k encontramos um expoente dinâmico para cada curva.

Tabela 4.5: Valores dos expoentes dinâmicos (u'_i), referentes a Figura 4.6(b): quando $i = 1$ e 2, o valor para $k = 7$ e quando $i = 3$, os valores para $k > 7$. Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajuste em lei de potência nas curvas de $-\nu \times h(\gamma)$ para quatro valores diferentes de k .

k	u'_i
7	-1,60(2) e -1,95(3)
10	-1,97(4)
100	-1,85(2)
1000	-1,89(1)

Tabela 4.6: Valores dos expoentes dinâmicos (u'_4), referentes a Figura 4.6(c). Os expoentes dinâmicos foram encontrados através de ajustes em lei de potência nas curvas de $-\nu \times h(k)$ para três valores diferentes de γ .

γ	u'_4
10^{-2}	0,0005(5)
10^{-3}	0,010(7)
10^{-4}	-0,004(5)

Observamos que para γ , os valores dos expoentes dinâmicos são pequenos, conforme é mostrado na Tabela 4.6; portanto podemos considerar que $u'_4 \simeq 0$.

Na Figura 4.6(d) mostramos a existência de uma invariância de escala da probabilidade de sobrevivência da Figura 4.6(b). Para isso realizamos uma transformação de $h(\gamma) \rightarrow h(\gamma)/k$ para os quatro valores de k , que resultou na sobreposição das curvas para os valores de $k > 7$.

Por fim, observamos que os valores dos expoentes dinâmicos encontrados nesta pesquisa (que investigou o mapa padrão dissipativo) são equivalentes aos valores dos expoentes dinâmicos encontrados para o caso do mapa padrão dissipativo com função de descontinuidade [28].

Capítulo 5

Comentários finais e perspectivas de continuidade

O nosso estudo sobre o rotor pulsado partiu do mapa padrão conservativo, descrito pelas variáveis de ação (I) e ângulo (θ). Evoluímos sua órbita no espaço de fases, na seção 2.1, e observamos seu comportamento com quatro valores diferentes para o parâmetro de controle k (que é responsável pela integrabilidade do sistema). Notamos que para $k = 0,9716\dots$ ocorre a transição da região de caos local para a região de caos global; onde encontramos um espaço de fases mistos, com mares caóticos, ilhas periódicas e curvas invariantes *spanning*.

Já na seção 2.2, ao inserirmos o parâmetro de dissipação (γ) verificamos a destruição da estrutura conservativa e o surgimento de atratores caóticos. Notamos que os atratores caóticos surgem quando $k \approx 7$ e que os atratores pontos fixos estão nos valores de $k < 7$. Na sequência, na seção 2.3, analisamos no espaço de fases o valor máximo estimado do atrator caótico e notamos a existência de uma lei de potência através deles.

Observamos o decaimento de órbita para alguns atratores caóticos, na seção 3.1 e encontramos uma invariância de escala que resulta na sobreposição das curvas; evidenciando a existência de um fator de escala que produz uma curva universal. Utilizamos, na seção 3.2, os expoentes de Lyapunov para caracterizar algumas órbitas como caóticas. Também analisamos a média dos expoentes de Lyapunov em função dos parâmetros de controle e notamos que no parâmetro de não linearidade (k) existe de uma lei de potência, já para o parâmetro de dissipação (γ) não existe variação significativa para a existência de um ajuste. Também investigamos a soma entre os expoentes positivos e negativos de Lyapunov e notamos que a soma deste resultado é semelhante, em magnitude, ao parâmetro de dissipação (γ) utilizado [29].

Investigamos as propriedades de escape e de sobrevivência de uma partícula no capítulo 4; pois buscávamos encontrar uma invariância de escala, onde houvesse a sobreposição das

curvas do histograma de escape. Analisamos o comportamento de n_p em função de h (para $h(k)$ e $h(\gamma)$), de n_p em função das parametrizações (k e γ) e encontramos os expoentes dinâmicos que validaram a existência de uma invariância de escala para o histograma de escape. Já na probabilidade de sobrevivência, também descobrimos expoentes dinâmicos que confirmam a existência de parâmetro de escala para as curvas de P_s .

Por fim, como perspectiva de continuidade, propomos uma investigação do ponto analítico da transição entre atratores de pontos fixos e atratores caóticos; visto que em nossa investigação observamos que este ponto ocorre para $k \approx 7$.

APÊNDICE

Apêndice A

Construção do Modelo: Mapa Padrão

A equação do mapa j_i de tempo discreto é oriunda de alguns modelos físicos, como por exemplo, o rotor pulsado, o pêndulo e o movimento de uma partícula em um campo magnético [18].

O estudo teve como ponto de partida o rotor pulsado, apresentado pela Figura A.1

A Figura A.1 descreve o movimento do rotor pulsado, que possui uma barra inflexível de comprimento L . Em uma de suas extremidades temos a sua ancoragem, que ocorre num ponto fixo (sem atrito), e na outra extremidade encontramos uma carga (peso) que exerce uma força impulsionadora vertical e periódica, com intensidade \tilde{k}/L e período τ . Adotaremos I como momento de inércia do sistema e desprezaremos a força gravitacional. Desta forma, a equação que descreve a força aplicada na barra será:

$$\vec{F}_{(r,\phi,t)} = \frac{\tilde{k}}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) \hat{j}. \quad (\text{A.1})$$

O sistema tem comportamento simétrico, sendo assim, é possível expressar a equação (A.1) em coordenadas polares:

$$\vec{F}_{(r,\phi,t)} = \frac{\tilde{k}}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) (\hat{\phi} \sin(\phi) - \hat{r} \cos(\phi)). \quad (\text{A.2})$$

O termo, $\delta(t - n\tau)$, pertence a função de Dirac, ele surgiu decorrente a utilização da força periódica na barra. Cabe ressaltar que todos os pulsos gerados pela carga são somados. Também é observado que para $t = n\tau$ encontramos um pulso ($\vec{F} \neq \vec{0}$) e para os demais valores de tempo ($t \neq \tau$) encontramos $\vec{F} = \vec{0}$.

A energia potencial do sistema é convertida em energia mecânica: sabendo-se que a energia potencial está diretamente associada a posição inicial do rotor, que por sua vez, está presa na extremidade da barra. Já a energia cinemática é oriunda do movimento do

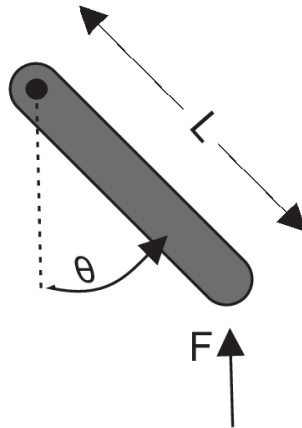


Figura A.1: Modelo físico do rotor pulsado. Figura retirada da referência [30]

rotor. A equação abaixo descreve a energia potencial do sistema:

$$U(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (\text{A.3})$$

desta maneira,

$$U(\vec{r}) = \tilde{k} \cos(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (\text{A.4})$$

Para a energia cinética, denominada aqui por K é obtida por:

$$K = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (\text{A.5})$$

onde I o momento de inércia da barra e ω é a velocidade angular. Conhecendo que o momento generalizado é expressa por $p = I\omega$, sendo assim, através da substituição na Equação (A.5) temos:

$$K = \frac{p^2}{2I}. \quad (\text{A.6})$$

Uma equação Hamiltoniana ($H(p, q, t)$) é uma função que está atrelada aos vetores “momento” \mathbf{p} e a “posição” \mathbf{q} . Com ela também se define o número de graus de liberdade que o sistema possui. Faremos uso desta ferramenta matemática para determinarmos o mapa padrão, visto que a utilização de equações discretas abrevia o tempo das simulações computacionais [14]. Destarte, a Hamiltoniana do sistema será delineada a partir das equações (A.4) e (A.6), e que a posição angular do sistema é descrita por ϕ ($q = \phi$), obtemos:

$$H(p, \phi, t) = \frac{p^2}{2I} + \tilde{k} \cos(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (\text{A.7})$$

A Hamiltoniana obtida na equação (A.7) é periódica no tempo e em ϕ , visto que,

$H(p, \phi + 2\pi, t) = H(p, \phi, t)$. Derivando a Hamiltoniana encontramos as equações de movimento:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (\text{A.9})$$

Derivando os termos:

$$\dot{p} = \tilde{k} \operatorname{sen}(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{\phi} = \frac{p}{I}. \quad (\text{A.11})$$

Sabemos que a equação (A.7) é uma Hamiltoniana e está atrelada a periodicidade do tempo, sendo assim, é fundamental adotarmos para $t_n = t_0 + n\tau$ (sabendo que t_0 é uma variável constante, com característica positiva e que pode variar entre 0 e τ [31]), a fim de transformá-la em um mapa. Portanto, consideremos as equações e movimento:

$$p_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau - \varepsilon), \quad (\text{A.12})$$

$$\phi_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t = n\tau - \varepsilon), \quad (\text{A.13})$$

onde ε é a variável que representa a discretização, já os elementos p_n e ϕ_n são as variáveis do sistema no instante de tempo anterior ao n -ésimo pulso. Quanto ao instante de tempo posterior ao n -ésimo pulso, as variáveis podem ser apresentadas como:

$$p_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau + \varepsilon), \quad (\text{A.14})$$

$$\phi_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t = n\tau + \varepsilon). \quad (\text{A.15})$$

Adotaremos $n \rightarrow (n + 1)$, para o instante de tempo posterior ao n -ésimo pulso, para as equações (A.14) e (A.15), podemos conhecer o estado do sistema em qualquer ponto. Deste modo, as equações obtidas serão:

$$p_{n+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = (n + 1)\tau - \varepsilon), \quad (\text{A.16})$$

$$\phi_{n+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t = (n + 1)\tau - \varepsilon). \quad (\text{A.17})$$

Adotaremos dois intervalos de tempos diferentes, na integração das equações (A.10) e (A.11).

Para o primeiro resultado utilizaremos o intervalo entre dois pulsos $n\tau + \varepsilon < t <$

$(n + 1)\tau - \varepsilon$. Assim encontramos:

$$\dot{p}_n = \frac{dp_n}{dt} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau+\varepsilon)}^{p((n+1)\tau-\varepsilon)} dp_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau+\varepsilon)}^{p((n+1)\tau-\varepsilon)} \left[\tilde{k} \operatorname{sen}(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) dt \right] \quad (\text{A.18})$$

e

$$\dot{\phi}_n = \frac{d\phi_n}{dt} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau+\varepsilon)}^{\phi((n+1)\tau-\varepsilon)} d\phi_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau+\varepsilon)}^{\phi((n+1)\tau-\varepsilon)} \frac{p}{I} dt. \quad (\text{A.19})$$

Integrando as equações (A.18) a (A.19) e fazendo uso das considerações das equações de (A.12) a (A.17) determinaremos:

$$p_{n+1} = p_n^*, \quad (\text{A.20})$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n^* + \frac{p_n^*}{I} \tau. \quad (\text{A.21})$$

Para o segundo resultado, será adotado o intervalo de duração de um pulso $((n\tau - \varepsilon) < t < (n\tau + \varepsilon))$.

$$\dot{p}_n = \frac{dp_n}{dt} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau-\varepsilon)}^{p(n\tau+\varepsilon)} dp_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau-\varepsilon)}^{p(n\tau+\varepsilon)} \left[\tilde{k} \operatorname{sen}(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) dt \right] \quad (\text{A.22})$$

e

$$\dot{\phi}_n = \frac{d\phi_n}{dt} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau-\varepsilon)}^{\phi(n\tau+\varepsilon)} d\phi_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau-\varepsilon)}^{\phi(n\tau+\varepsilon)} \frac{p}{I} dt. \quad (\text{A.23})$$

Integrando novamente as equações (A.18) a (A.19) encontraremos:

$$p_n^* = p_n + \tilde{k} \operatorname{sen}(\phi_n), \quad (\text{A.24})$$

$$\phi_n^* = \phi_n. \quad (\text{A.25})$$

Trabalhando com as equações (A.24) em (A.20) e (A.25) em (A.21), chegaremos a:

$$p_{n+1} = p_n + \tilde{k} \operatorname{sen}(\phi_n), \quad (\text{A.26})$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\tau}{I} p_{n+1} \quad \text{mod } (2\pi). \quad (\text{A.27})$$

A equação (A.26) será multiplicada por $\frac{\tau}{I}$, pois é necessário que o sistema seja adimensional. Portanto:

$$\frac{\tau}{I} p_{n+1} = \frac{\tau}{I} p_n + \frac{\tau}{I} \tilde{k} \operatorname{sen}(\phi_n), \quad (\text{A.28})$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\tau}{I} p_{n+1} \quad \text{mod } (2\pi). \quad (\text{A.29})$$

Por fim, se adequarmos algumas variáveis ($\frac{\tau}{I}p \rightarrow I$, $\frac{\tau}{I}\tilde{k} \rightarrow k$ e $\phi \rightarrow \theta$), obteremos o mapa padrão de Taylor-Chirikov [18, 31]:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + k \operatorname{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (\text{A.30})$$

onde, I é a variável de ação, θ a variável de ângulo e k é o parâmetro de controle do sistema.

Referências Bibliográficas

- [1] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 3. ed., 2011.
- [2] LEONEL, E. D. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares*. São Paulo: Editora Blucher, 2019.
- [3] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. New York: Perseus Book, 1994.
- [4] LUNA-ACOSTA, G. A.; MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. A.; SEBA, P.; PICHUNGIN, K. N. Classical versus quantum structure of the scattering probability matrix: Chaotic waveguides. *Physical Review E*, v. 65, p. 046605, 2002.
- [5] DA COSTA, D. R.; SILVA, M. R.; LEONEL, E. D. Escape beam statistics and dynamical properties for a periodically corrugated waveguide. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 19, p. 842-850, 2014.
- [6] POLLACK, G. H.; WEI-CHUN, C. *Phase transition in Cell Biology*. New York: Springer Netherlands, 2009.
- [7] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics. Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer Verlag, 1992.
- [8] JACKSON, K. A. *Kinetic Processes: Crystal Growth, Diffusion, and Phase Transitions in Materials*. Germany: Wiley, 2010.
- [9] CHENG, S. Z. D. *Phase Transition in Polymers: The role of Metastable States*. Boston: Elsevier, 2008.
- [10] DE OLIVEIRA, J. A.; DA COSTA, D. R.; LEONEL, E. D. Survival probability for chaotic particles in a set of area preserving maps. *The European Physical Journal Special Topics*, 225, 2751, 2016.
- [11] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Scaling features of a breathing circular billiard. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 41, p. 365101, 2008.

- [12] FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. P. C. *Caos: Uma introdução*. São Paulo: Blucher, 1994.
- [13] LORENZ, E.N. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the Atmospheric Sciences. 20, 130-141.
- [14] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Maryland: Cambridge University Press, 2002.
- [15] DELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. New York: Random House, 1988.
- [16] BALTH, Van der Pol; MARK, Van der. *The Heartbeat considered as a Relaxation oscillation, and an Electrical Model of the Heart*. Mag. Suppl. 6, 763-775, 1928.
- [17] FEIGENBAUM, M. J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, v. 19, 1978.
- [18] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, v. 52, p. 263-379, 1979.
- [19] KUWANA, C. M.; DE OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. A family of dissipative two-dimensional mappings: Chaotic, regular and steady state dynamics investigation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 395, p. 458-465, 2014.
- [20] DE OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. The effect of weak dissipation in two-dimensional mapping. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. v. 22, p. 1250248, 2012.
- [21] SANDRI, M. Numerical calculation of Lyapunov exponents. *The Mathematica Journal*, Italia, v. 6, p. 78-84, 1996.
- [22] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*. v. 57, p. 617-656, 1985.
- [23] SKOKOS, C. The Lyapunov characteristic exponents and their computation. *Lecture Notes in Physics*, v. 790, p. 63-135, 2010.
- [24] PERRE, R. M.; CARNEIRO, B. P.; MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. A.; LEONEL, E. D.; DE OLIVEIRA, J. A. On the dynamics of two-dimensional dissipative discontinuous maps. *Journal Chaos, Solitons and Fractals*. v. 131, p. 109520(1)-109520(4), 2020.
- [25] LEONEL, E. D.; DE OLIVEIRA, J. A.; SAIF, F. Characterization of a continuous phase transition in a chaotic system. *A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics*, EPL, v. 131, p. 20002, 2020.

- [26] PERRE, R. M. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Câmpus Experimental de São João da Boa Vista – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” / Instituto de Ciência e Tecnologia – Câmpus de Sorocaba - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. *Propriedades de transporte caótico em um rotor pulsado dissipativo descontínuo*. UNESP, 2020. (<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/191999>, acesso em 15/05/2020)
- [27] BUNIMOVICH, L. A.; DETTMANN, C. P. Peeping at chaos: Nondestructive monitoring of chaotic systems by measuring long-time escape rates. *Europhysics Letters*, 80, 40001, 2007.
- [28] DE OLIVEIRA, J. A.; PERRE, R. M.; MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. A.; LEONEL, E. D. Leaking of orbits from the phase space of the dissipative discontinuous standard mapping. *Physical Review E*, v. 103, p. 012211, 2021.
- [29] DE OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. Dissipation and its consequences in the scaling exponents for a family of two-dimensional mappings. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 45, p. 165101(1)-165101(11), 2012.
- [30] OLIVEIRA, Hercules A.; VIEIRA, Caio V; KROETZ, Tiago. Aprendizagem através da modelagem computacional de sistemas físicos. *Cornell University, physics.ed-ph*, arXiv: 1711.09695v1.
- [31] CARNEIRO, B. P. *Análise de escala no mapa padrão dissipativo descontínuo*. 2018. 54 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2018.