



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Estudo de Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios

Maykon Souza Santos

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Estudo de Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios

Maykon Souza Santos

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da UNESP para obtenção do tí-
tulo de Mestre em Matemática Aplicada e
Computacional.

S237e Santos, Maykon Souza
Estudo de resultados clássicos sobre zeros de polinômios / Maykon Souza Santos. -- Presidente Prudente, 2021
108 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientadora: Vanessa Avansini Botta Pirani

1. Zeros de Polinômios. 2. Círculo Unitário. 3. Equação Polinomial.. 4. Pirani, Vanessa Avansini Botta. 5. Título. I. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Estudo de Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios

AUTOR: MAYKON SOUZA SANTOS

ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. MARCELO MESSIAS (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Profa. Dra. MIRELA VANINA DE MELLO (Participação Virtual)
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas / Universidade Estadual de Santa Cruz

Presidente Prudente, 29 de setembro de 2021

Dedico este trabalho aos meus pais, Vanda e Moacir,

à minha esposa, Mayene Reverte,

à minha orientadora, Vanessa Botta.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida, e pelas experiências aprendidas ao longo dela e no decorrer da realização deste trabalho.

Aos meus pais, Vanda e Moacir, por terem me dado uma boa educação, e por todo o apoio e incentivo nos momentos difíceis que tive em minha vida, que muito contribuiu para chegar neste momento na realização deste trabalho; à minha irmã Mayene Souza, pelo incentivo e pela amizade incondicional demonstrado ao longo de todo este período.

À minha esposa, Mayene Reverte, pelo amor, apoio, incentivo, companheirismo e por estar sempre ao meu lado nos momentos bons e ruins.

Agradeço a todos os amigos, funcionários e professores do POSMAC, que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

Agradeço em especial à minha orientadora, Professora Dra. Vanessa, por sua sabedoria, incentivo, motivação, por sua paciência e pelo seu conhecimento compartilhado.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar algumas características e propriedades sobre polinômios, além de alguns resultados clássicos sobre os seus zeros. Tendo em vista que encontramos os polinômios em muitas áreas da Matemática, aplicações que utilizam os resultados sobre a localização de zeros de polinômios para analisar diversos problemas têm grande utilidade. Por exemplo, no estudo da estabilidade de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias é importante o conceito relacionado à quantidade de zeros que um polinômio possui no círculo unitário. Outra vantagem é que os polinômios são funções que possuem um comportamento bem estável, ou seja, são funções simples de se derivar e integrar, além de possuírem algumas propriedades interessantes. Portanto, neste estudo serão abordadas algumas dessas propriedades, assim como a resolução algébrica das equações de segundo, terceiro e quarto graus sob diferentes aspectos, como também a apresentação de métodos mais recentes para a resolução de alguns tipos de equações de graus cinco e seis.

Palavras-Chave: *Polinômios, Zeros de Polinômios, Equação Polinomial.*

Abstract

The main objective of this work is the study of some characteristics and properties of polynomials, in addition to some classical results about their zeros. Since we find polynomials in many areas of Mathematics, applications that use the results on the location of polynomial zeros to analyze various problems are very useful. For example, in the study of the stability of numerical methods for the solution of ordinary differential equations, the concept related to the number of zeros that a polynomial has in the unit circle is very important. Another advantage is that polynomials are functions that have a very stable behavior, that is, they are simple functions to derive and integrate, in addition to having some interesting properties. Therefore, in this study we will present some of these properties, as well as the algebraic resolution of the second, third and fourth degree equations under different aspects, including the presentation of more recent methods for solving some types of equations of degrees five and six.

Keywords: *Polynomials, Zeros, Polynomial Equation.*

Lista de Figuras

3.1	Gráficos dos polinômios $f(x) = -x^2 + 16$ e $f(x) = x^2 + 6x - 7$, respectivamente.	27
3.2	Gráficos dos polinômios $f(x) = x^2 - 4x + 4$ e $f(x) = -x^2 + 4x - 4$, respectivamente.	27
3.3	Gráficos dos polinômios $f(x) = -x^2 - 16$ e $f(x) = x^2 + 16$, respectivamente.	28
3.4	Gráfico do polinômio $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$	37
3.5	Gráfico do polinômio $f(x) = x^3 - 15x - 4$	45
3.6	Gráfico do polinômio $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$	50
4.1	Gráfico do polinômio $f(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 12x - 6$	59
4.2	Gráfico do polinômio $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$	64
6.1	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z - 2$	99
6.2	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 9z^5 + 7z^4 - 6z^3 + 2z^2 + z - 1$	102

LISTA DE FIGURAS

6.3	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + 0.8z^4 + 0.6z^3 + 0.4z^2 +$ $0.2z + 0.1$	103
6.4	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 9z^5 + 7z^4 - 6z^3 + 2z^2 + z - 1$.	104

SUMÁRIO

Resumo

Abstract

1	Introdução	15
2	Zeros de Polinômios: uma abordagem geral	17
2.1	Introdução	17
2.2	Relações entre Coeficientes e Raízes da Equação	21
3	Zeros dos polinômios de graus 2, 3 e 4	25
3.1	Equação do Segundo Grau	26
3.2	Equação do Terceiro Grau	33
3.3	Equação do Quarto Grau	46
4	Zeros dos polinômios de graus 5 e 6	55
4.1	Introdução	55

<i>SUMÁRIO</i>	ii
4.2 Equação Polinomial do Quinto Grau	56
4.3 Equação Polinomial do Sexto Grau	74
5 Método Único	81
5.1 A Equação Quadrática	84
5.2 Equação Cúbica	86
5.3 A Equação Quártica	91
6 Limitantes para os zeros de um polinômio	97
7 Considerações Finais	105

CAPÍTULO 1

Introdução

O estudo de polinômios, em geral, e técnicas de como encontrar seus zeros é um assunto muito abordado na matemática, pois é um tema de grande utilidade tanto na área computacional quanto na teórica. Encontrar zeros de polinômios têm sido resultados de pesquisas de vários matemáticos, tais como Gauss, Bhaskara, Rhind, Euclides, Euler, Fibonacci, Tartaglia, Cardano e Ludovico Ferrari, entre outros.

Na análise numérica, podemos utilizá-los para encontrar aproximações de funções na interpolação de Lagrange, quadraturas numéricas, para estudar problemas de mal condicionamento e a instabilidade dos métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias. Com isso, os polinômios estão sendo bastante utilizados por apresentarem propriedades e características importantes que podem ser empregadas em várias áreas da Matemática Pura e Aplicada, e também nas áreas de Arquitetura, Engenharias, Estatística e Biologia.

Desta forma, o presente trabalho visa apresentar um estudo sobre as técnicas de resolução das equações polinomiais de graus dois, três, quatro, cinco e seis, sendo que também serão apresentados alguns resultados que determinam regiões do plano complexo onde os zeros de um polinômio de grau n qualquer estão localizados.

Este texto foi dividido em sete capítulos. Este capítulo, o primeiro, traz uma motivação para o estudo de polinômios e uma introdução do que será visto no decorrer deste trabalho. No segundo capítulo veremos alguns resultados preliminares sobre os polinômios para conhecer seus conceitos básicos, bem como suas propriedades, características e algumas operações. Neste capítulo estudaremos fatorações dos polinômios, algumas propriedades e relações com suas raízes e iremos mostrar um importante resultado que é o Teorema Fundamental da Álgebra .

No capítulo três estudaremos as equações algébricas, como encontrar raízes de polinômios de graus dois, três e quatro. Neste capítulo iremos abordar desde métodos bem conhecidos como completamento de quadrado e a Fórmula de Bhaskara como um método mais atual para a resolução da equação do segundo grau, e veremos também métodos para a resolução da equação cúbica e quártica.

No capítulo quatro iremos abordar métodos clássicos para a resolução de alguns casos para a equação quártica e a equação sêxtica. No quinto capítulo apresentaremos um método único que aborda a resolução de equações de graus menores que cinco.

No sexto capítulo apresentaremos alguns resultados clássicos que determinam limites para a localização dos zeros de polinômios com coeficientes complexos de grau n .

No sétimo e último capítulo apresentamos uma conclusão do que foi estudado nos capítulos anteriores e o que pode ser abordado em estudos futuros. Ao longo do trabalho apresentamos vários exemplos que ajudam a esclarecer os conceitos teóricos estudados.

CAPÍTULO 2

Zeros de Polinômios: uma abordagem geral

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados clássicos a respeito da localização de zeros de polinômios. Iniciaremos com definições e resultados bem conhecidos, como o Teorema Fundamental da Álgebra e as relações de Viète ou Girard. As principais referências utilizadas para elaborar o texto que compõe esse capítulo são [12] e [13].

2.1 Introdução

Uma aplicação $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ denomina-se uma aplicação polinomial ou polinômio em $\mathbb{C}$ se existe uma sequência $a_0, a_1, \dots, a_n$, em $\mathbb{C}$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

com $a_n \neq 0$ e $n \geq 0$.

Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, são chamados de coeficientes e as parcelas $a_0, a_1z, a_2z^2, \dots, a_nz^n$, são chamadas de termos do polinômio $P(z)$.

Chamaremos a_n de coeficiente líder, $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes complexos, $gr(P)$ o grau do polinômio e z_0 de raiz da equação polinomial $P(z) = 0$, se z_0 pertencer ao conjunto solução da equação. Sendo assim denotaremos $z_0 \in \mathbb{C}$ um zero do polinômio $P(z)$, quando $P(z_0) = 0$. Observando que z_0 é um zero simples de $P(z)$ se z_0 tiver multiplicidade um.

Apresentaremos agora algumas considerações sobre o Teorema Fundamental da Álgebra.

O Teorema Fundamental da Álgebra é um teorema de Análise, sendo ele uma herança do tempo em que o desenvolvimento da Álgebra se encontrava estreitamente relacionado com o corpo dos números complexos. As principais referências utilizadas para o estudo deste teorema foram [6] e [13].

Muitos foram os matemáticos que tentaram demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, dentre eles Lagrange, Gauss, Euler e Laplace, porém a demonstração que apresentaremos neste texto é aquela feita por Jean d'Alembert e Jean-Robert Argand que é fundamentada em dois lemas dados a seguir.

Lema 1. *Dado um polinômio $P(z) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que*

$$|P(z_0)| \leq |P(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. A prova do resultado acima será feita para polinômios mônicos. Dado o polinômio $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, utilizando as desigualdades triangulares $|z + w| \leq |z| + |w|$ e $||z| - |w|| \leq |z \pm w|$ temos para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right), \end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty.$$

Assim, existe $R > 0$, tal que $|P(z)| > |P(0)|$ para todo z com $|z| > R$. Se $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$, pelo Teorema de Weierstrass (maiores detalhes na referência [10]), temos a existência de $z_0 \in D$, tal que $|P(z_0)| \leq |P(z)|$ para todo $z \in D$. Como $|P(z_0)| \leq |P(0)|$, temos que $|P(z_0)| \leq |P(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Lema 2. *Seja $P(z) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $P(z_0) \neq 0$, então existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z_1)| < |P(z_0)|$.*

Demonstração. Aqui também provaremos o resultado para polinômios mônicos. Dado o polinômio $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$, sejam z_0 e h números complexos tais que $P(z_0) \neq 0$ e h a ser determinado de modo que $|P(z_0 + h)| < |P(z_0)|$.

Utilizando o Binômio de Newton podemos escrever

$$P(z_0 + h) = (z_0 + h)^n + a_{n-1}(z_0 + h)^{n-1} + \cdots + a_1(z_0 + h) + a_0 = P(z_0) + q(h),$$

em que $q(z)$ é um polinômio não nulo, pois $P(z)$ é um polinômio não constante, de grau n e sem termos constantes. Seja bz^m o termo de menor grau em $q(z)$, vamos escrever $q(z) = bz^m + z^{m+1}r(z)$, onde $r(z)$ é outro polinômio.

Podemos escolher o argumento de h de modo que $\lambda = \frac{bh^m}{P(z_0)}$ tenha argumento igual a π com $P(z_0) \neq 0$. Portanto, λ é um número real negativo garantindo que a desigualdade $-1 \leq \lambda \leq 0$ se mantém para $|h|$ suficientemente pequeno. Tomando $|h|$ suficientemente pequeno para que $|h^{m+1}r(h)| < |bh^m|$, pela desigualdade triangular e para todo $h \in \mathbb{C}$,

nas condições citadas, temos que

$$\begin{aligned}
 |P(z_0 + h)| &= |P(z_0) + bh^m + h^{m+1}r(h)| \\
 &\leq |P(z_0) + bh^m| + |h^{m+1}r(h)| \\
 &= |P(z_0)| - |bh^m| + |h^{m+1}r(h)| \\
 &< |P(z_0)|.
 \end{aligned}$$

Portanto, existe $z_1 = z_0 + h$, com h como acima, tal que $|P(z_1)| < |P(z_0)|$. $\square$

Com base nestes dois lemas, podemos apresentar e demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 1. *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem uma raiz complexa.*

Demonstração. Seja $P(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$. Pelo Lema 1, temos a existência de $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z_0)| \leq |P(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que $P(z_0) = 0$. De fato, se $P(z_0) \neq 0$, então pelo Lema 2, existiria $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z_1)| < |P(z_0)|$, o que é um absurdo. $\square$

A seguir veremos o Teorema da Decomposição, que pode ser encontrado na referência [6].

Teorema 2. *(Teorema da Decomposição) Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n , $n \geq 1$, com coeficientes complexos a_i , $i = 0, 1, \dots, n$. O polinômio $P(z)$ pode ser unicamente representado por*

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

onde $z_1, z_2, \dots, z_n$ são zeros complexos do polinômio $P(z)$.

Demonstração. Podemos demonstrar por indução sobre o grau $P(z)$.

Tomando $gr(P(z)) = 1$, temos que $P(z) = az + b$ sendo $a \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{C}$. Logo teremos $z_1 = -\frac{1}{a}b$ e $P(z) = a(z + \frac{1}{a}b)$.

Seja $n > 1$ e suponhamos que o resultado é válido para polinômios de grau n . Se $P(z) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ com $gr(P(z)) = n + 1$, por hipótese temos que $P(z)$ tem um zero $z_k \in \mathbb{C}$ e, por Briot-Ruffini (maiores detalhes na referência [6]), $P(z) = Q(z) \cdot (z - z_k)$, para algum $Q(z) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ e $gr(Q(z)) = n$.

Pela hipótese de indução existem $a_n, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, em que a_n é coeficiente líder e diferente de zero, tais que:

$$Q(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Portanto,

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n) \cdot (z - z_k).$$

Tomando $z_{n+1} = z_k$, chegamos no resultado. □

2.2 Relações entre Coeficientes e Raízes da Equação

Nesta seção, deduzimos as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau n ($n \geq 1$). Essas relações são conhecidas como fórmulas de Viète ou relações de Girard, nomenclatura ligada a dois grandes matemáticos François Viète e Albert Girard. Mais detalhes podem ser encontrados na referência [6].

Seja o polinômio $P(z)$ com $a_n \neq 0$ escrito na seguinte forma:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

cujos zeros são $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Utilizando o Teorema da Decomposição, pode-se escrever $P(z)$ como:

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Assim, para todo z segue que:

$$\begin{aligned} P(z) = & a_n z^n - a_n \underbrace{(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n)}_{S_1} z^{n-1} \\ & + a_n \underbrace{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n)}_{S_2} z^{n-2} \\ & - a_n \underbrace{(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \cdots + z_{n-1} z_{n-1} z_n)}_{S_3} z^{n-3} \\ & + \cdots + (-1)^k a_n S_k z^{n-k} + \cdots + (-1)^n a_n \underbrace{(z_1 z_2 z_3 \cdots z_n)}_{S_n}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes da expansão acima com os coeficientes $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ segue que:

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 &= z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \\ S_k &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\ &\vdots \\ S_n &= z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

No que segue, analisaremos as relações entre coeficientes e raízes para a equação do segundo grau, para ilustrar como as relações acima podem ser úteis para determinar as raízes de uma equação do segundo grau.

Seja a equação

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Sendo z_1 e z_2 suas raízes, garantidas pelo Teorema Fundamental da Álgebra, e pelo Teorema da Decomposição essa equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$a(z - z_1) \cdot (z - z_2) = 0.$$

Então para todo $z \in \mathbb{C}$ temos:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1) \cdot (z - z_2),$$

ou seja,

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = z^2 - (z_1 + z_2)z + (z_1z_2),$$

para todo z . Portanto,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad z_1z_2 = \frac{c}{a}.$$

A seguir, analisamos as relações entre coeficientes e zeros de um polinômio para a equação polinomial do terceiro grau.

Seja a equação

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0.$$

Com raízes z_1 , z_2 e z_3 garantidas pelo Teorema Fundamental da Álgebra, essa equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$a(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) = 0.$$

Com isso temos:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = a(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Ou seja,

$$z^3 + \frac{b}{a}z^2 + \frac{c}{a}z + \frac{d}{a} = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - (z_1z_2z_3).$$

Portanto,

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a}, \quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad z_1z_2z_3 = -\frac{d}{a}.$$

Exemplo 1. Resolver a equação $z^3 - z^2 - 2z + 2 = 0$, sabendo que o produto de duas de suas raízes é igual a -2 .

Resolução: Sejam z_1, z_2 e z_3 as raízes da equação. Acrescentando a condição acima às relações entre coeficientes e raízes, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -2 \\ z_1z_2z_3 = -2 \\ z_1z_2 = -2 \end{cases}.$$

Da terceira e da quarta equações segue que $z_3 = 1$. Da primeira, temos $z_1 + z_2 = 0$, que juntamente com a quarta nos fornece $z_1 = \pm\sqrt{2}$. Como $z_2 = -z_1$, as raízes da equação são $1, \sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

CAPÍTULO 3

Zeros dos polinômios de graus 2, 3 e 4

A necessidade de resolver equações algébricas possibilitou a introdução dos números complexos. Essa dificuldade foi observada quando Cardano tentou resolver algumas equações do terceiro grau e percebeu que utilizando fórmulas resolventes não conseguia evitar alguns radicais quadráticos de números negativos. Essa dificuldade motivou Bombelli a criar novos números que posteriormente foram chamados por Gauss de números complexos. Mais detalhes pode ser encontrados na referência [6].

Finalmente com o estudo das funções de variáveis complexas realizada por Jacobi, Cauchy, Riemann e Weierstrass, os números complexos possibilitaram inúmeras aplicações na matemática e na tecnologia. Neste capítulo apresentamos um estudo sobre resoluções de equações do segundo, terceiro e quarto graus, analisando algumas abordagens clássicas da literatura e outra contemporâneas.

3.1 Equação do Segundo Grau

Nesta seção, fazemos um estudo sobre as equações polinomiais do segundo grau.

Apresentaremos alguns métodos para a resolução da equação quadrática: o primeiro se refere ao completamento de quadrado; o segundo foi apresentado na referência [13] e o terceiro, que é o método mais recente, foi abordado em [11].

Iniciaremos com o método de completar quadrados. A fórmula resolvente que apresentaremos a seguir, é devido ao matemático hindu Sridhara e leva o nome de fórmula de Bhaskara por ter sido publicado por outro matemático hindu alguns anos depois. É importante destacar que a nomenclatura "fórmula de Bhaskara" é exclusivamente utilizada no Brasil [15], sendo que em outros países esta é apenas conhecida como a fórmula para resolver a equação de segundo grau.

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Podemos deduzir a fórmula da equação do segundo grau completando quadrados:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 ax^2 + bx &= -c \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &= \frac{-c}{a} \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right) &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right) &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},
 \end{aligned}$$

em que $\delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação. Analisando o valor do discriminante podemos chegar em três situações:

- $\delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas;

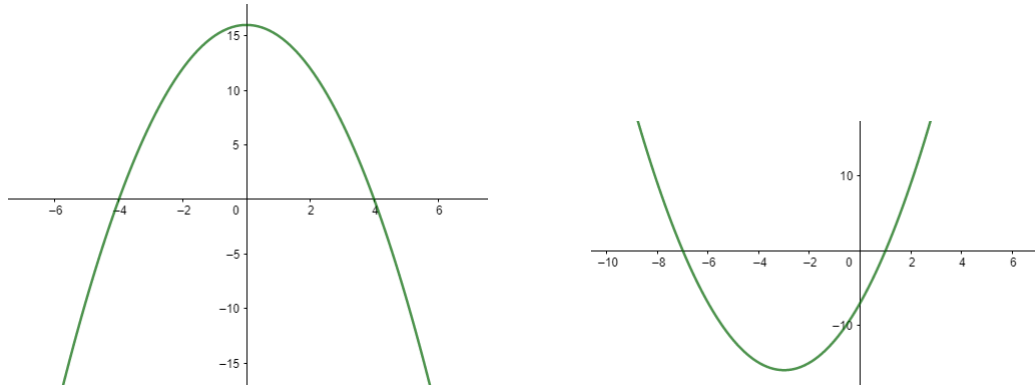


Figura 3.1: Gráficos dos polinômios $f(x) = -x^2 + 16$ e $f(x) = x^2 + 6x - 7$, respectivamente.

- $\delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais;

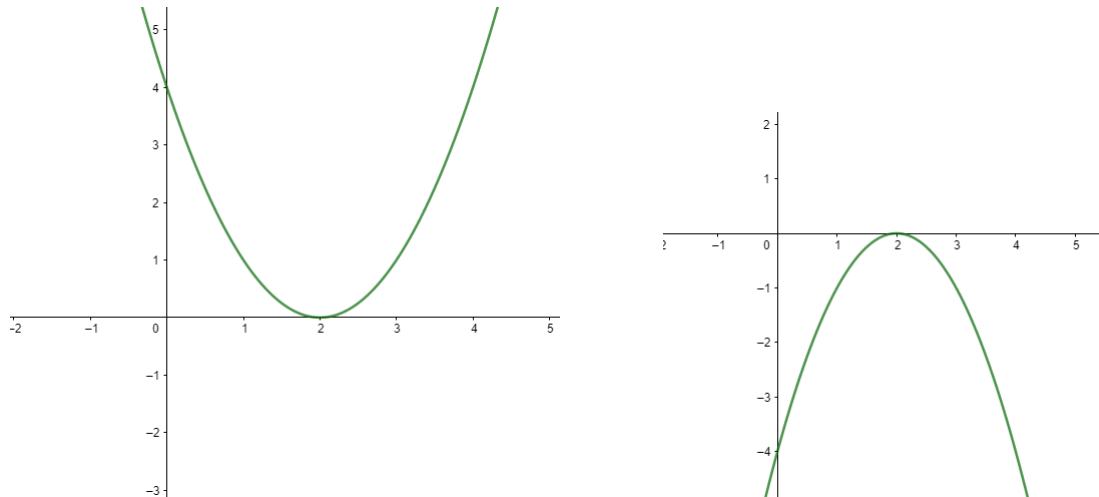


Figura 3.2: Gráficos dos polinômios $f(x) = x^2 - 4x + 4$ e $f(x) = -x^2 + 4x - 4$, respectivamente.

- $\delta < 0$, a equação tem duas raízes complexas distintas conjugadas;

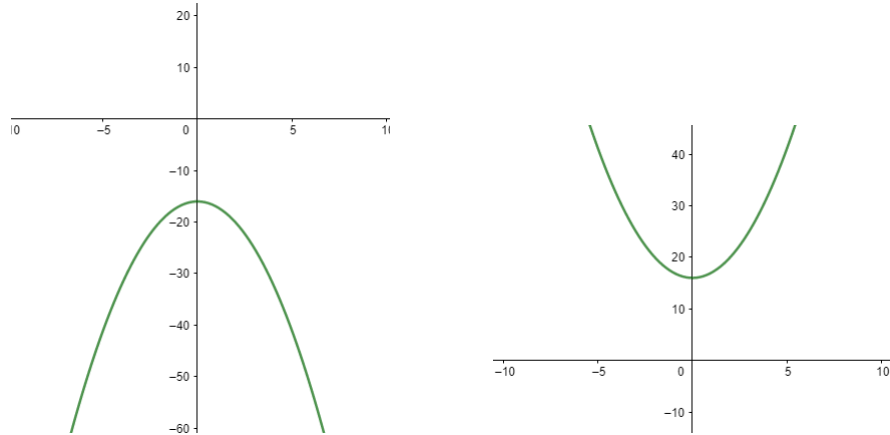


Figura 3.3: Gráficos dos polinômios $f(x) = -x^2 - 16$ e $f(x) = x^2 + 16$, respectivamente.

O método apresentado a seguir pode ser encontrado com mais detalhes na referência [13].

Sejam duas raízes complexas x_1 e x_2 da equação quadrática

$$x^2 + ax + b = 0, \quad (3.1)$$

representadas pelos números α e β sendo

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta, \\ x_2 = \alpha - \beta. \end{cases} \quad (3.2)$$

Então temos pela relação entre coeficientes e raízes as seguintes expressões:

$$\begin{cases} 2\alpha = -a \\ \alpha^2 - \beta^2 = b. \end{cases} \quad (3.3)$$

Da primeira equação de (3.3), obtemos $\alpha = \frac{-a}{2}$. Substituindo o valor de α , encontramos β e então podemos escrever as soluções da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \\ x_2 = \frac{-a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \end{cases} \quad (3.4)$$

chegando em um resultado bem conhecido.

A escolha do termo da raiz quadrada em (3.4), pode ser de forma arbitrária, sendo que a única mudança será na ordem da solução x_1 e x_2 .

A seguir apresentamos um estudo de um método recente e eficiente para resolver equações quadráticas. Tal método foi publicado pelo matemático Po-Shen Loh como pode ser visto na referência [11]. Vale ressaltar que as substituições, e todas as soluções para encontrar dois números dados pela soma e produto, já eram conhecidas por babilônios. Essa abordagem, portanto, representa uma fusão dessas técnicas antigas com a sofisticação da matemática na era renascentista. Mais detalhes podem ser vistos em [11].

Seja a equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com $a \neq 0$, $B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$.

A ideia inicial é que se pudermos encontrar uma fatoração na forma

$$x^2 + Bx + C = (x - x_1)(x - x_2), \quad (3.5)$$

chegaremos na solução da equação, tendo em vista que um valor de x torna o produto igual a zero exatamente quando pelo menos um dos fatores tornam-se nulo, o que acontece quando $x = x_1$ ou $x = x_2$. Pela lei distributiva é suficiente encontrar dois números x_1 e x_2 com soma igual a $-B$ e produto igual a C . Então $\{x_1, x_2\}$ será o conjunto solução das raízes. Logo,

$$x^2 + Bx + C = 0$$

$$x^2 + Bx + C = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

observe que $x_1 + x_2 = -B$ e $x_1x_2 = C$. Considerando $x_1 = \frac{-B}{2} - z$ e $x_2 = \frac{-B}{2} + z$ temos

$x_1 x_2 = \frac{B^2}{4} - z^2$. Assim,

$$\begin{aligned} C &= \frac{B^2}{4} - z^2 \\ z^2 &= \frac{B^2}{4} - C = \frac{B^2}{4} - \frac{4C}{4} \\ z &= \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4C}{4}} = \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2}. \end{aligned}$$

De $x_1 = \frac{-B}{2} - z$ e $x_2 = \frac{-B}{2} + z$ segue que

$$x = \frac{-B}{2} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2}.$$

Como $B = \frac{-b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$ temos,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que são as raízes da equação quadrática inicial.

A seguir apresentamos alguns exemplos para comparar os métodos para a resolução da equação do segundo grau.

Exemplo 2. *Considerando a equação quadrática $x^2 - 7x + 6 = 0$, podemos encontrar as raízes utilizando o método de completar quadrados.*

Resolução: Considere a equação

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

resolvendo aplicando a fórmula resolutive da equação do segundo grau temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 6 &= 0 \\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\ x - \frac{7}{2} &= \pm \frac{5}{2} \\ x &= \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 6.$$

Logo temos como raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 6$ para a equação quadrática acima citada.

Exemplo 3. Dada a equação $x^2 - 2x - 3 = 0$. Encontrar as raízes utilizando o método estudado na referência [13].

Resolução: Considere a equação

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Aplicando a fórmula do método temos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3)} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3 \\ x_2 = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3)} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 = -1. \end{cases}$$

Logo $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$ são soluções da equação quadrática.

Exemplo 4. Seja a equação quadrática $\frac{x^2}{2} - x - 4 = 0$, iremos resolvê-la utilizando o método apresentado na referência [11].

Resolução: Considere a equação

$$\frac{x^2}{2} - x - 4 = 0,$$

multiplicando ambos os lados por 2 para tornar a equação quadrática com coeficiente mônico, obtemos a seguinte equação

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Se encontrarmos dois números com soma igual a 2 e produto -8 , teremos encontrado a solução da equação.

Podemos encontrar z de modo que dois números na forma $\frac{-B}{2} \pm z$ tem produto igual a C . Então temos:

$$1 - z^2 = -8$$

$$z^2 = 9$$

$$z = \pm 3.$$

Escolhendo $z = 3$ e voltando em $x = \frac{-B}{2} \pm z$, temos que $x = 1 \pm 3$. Portanto a solução da equação quadrática é $S = \{-2, 4\}$.

Comparando os métodos estudados acima podemos perceber que, ao aprender sobre fórmula quadrática, normalmente inicia-se com multiplicações binomiais e expressões do tipo $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$. A primeira destas expressões é muito útil na prova tradicional da fórmula quadrática ao completar quadrado. A segunda expressão é muito utilizada para racionalizar o denominador em expressões com $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ onde multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

A abordagem do método de Poh-Shen Loh mostra que o método de fatoração é eficiente, pois sempre produz raízes (levando em conta a multiplicidade) cuja soma e produto correspondem aos coeficientes da equação quadrática.

A prova mais comum da fórmula quadrática é através do método de completar quadrado, em comparação com o de Poh-Shen Loh é um método menos direto, pois a etapa de completar o quadrado para a situação de $x^2 + Bx + C = 0$ combina três ideias.

- Reduzir x^2 e Bx em um quadrado na forma $(x + D)^2$ usando apenas parte da expressão $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, para tentar fatorar uma expressão que começa com $x^2 + 2xy$.
- Este quadrado perfeito pode ser criado ao adicionar ou subtrair a constante $(\frac{B}{2})^2$.

- Após essas manipulações teremos a equação $(x + \frac{B}{2})^2$ e algumas constantes, o que pode ser resolvido de forma simples movendo as constantes e obtendo a raiz quadrada.

A combinação dessas três ideias é necessária para entender a motivação de se escrever as quantidades de compensação $\frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4}$ na primeira linha para completar o quadrado.

$$x^2 + Bx + \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} + C = 0.$$

Apesar da segunda abordagem iniciar com ideias simples como a relação entre coeficientes, é na terceira abordagem que percebemos a partida de experiências mais simples que é buscar um par de números com determinada soma e produto. Em seguida mostra que o processo de "adivinhar" esses números pode ser substituído pela parametrização, não precisando ser decorada nenhuma fórmula, podemos apenas introduzir uma variável z e utilizar a expressão $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ para encontrar o valor de z^2 chegando de forma simples ao par de números.

3.2 Equação do Terceiro Grau

A história da resolução da equação do terceiro grau tem alguns fatos bem inusitados. Conta-se que foi Scipio del Ferro quem primeiro resolveu estas equações sem nunca publicar o seu resultado. Porém alguns anos depois, Tartaglia redescobriu a resolução, mas manteve seu método em segredo para publicar em um tratado que pretendia escrever, revelando seu segredo a Jerônimo Cardano, que publicou o método antes de Tartaglia recebendo todo o crédito pela resolução. As principais referências utilizadas para elaborar o texto sobre a equação cúbica são [2], [3], [4] e [17].

Iremos apresentar neste trabalho três métodos para a resolução das raízes cúbicas. Iniciaremos com o método de Cardano, encontrado na referência [3], a seguir iremos analisar a abordagem encontrada na referência [13] e depois apresentaremos o método de Viète encontrado na referência [17].

Seja a equação geral do terceiro grau com coeficientes $a, b, c, \in \mathbb{C}$ na forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (3.6)$$

Vamos analisar o método de Cardano fazendo uma mudança de variável, de modo que o coeficiente do segundo grau seja nulo. Substituindo x por $y + \lambda$ na equação (3.6) temos:

$$\begin{aligned} & (y + \lambda)^3 + a(y + \lambda)^2 + b(y + \lambda) + c = \\ &= (y^3 + 3\lambda y^2 + 3\lambda^2 y + \lambda^3) + (ay^2 + 2a\lambda y + a\lambda^2) + (by + b\lambda) + c \\ &= y^3 + (3\lambda + a)y^2 + (3\lambda^2 + 2a\lambda + b)y + (\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c). \end{aligned}$$

Atribuindo $\lambda = -\frac{a}{3}$ na expressão acima, temos que:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + py + q,$$

onde:

$$x = y - \frac{a}{3}, \quad p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c. \quad (3.7)$$

Portanto, para encontrar as raízes da equação (3.6), basta encontrar as raízes da equação

$$y^3 + py + q = 0,$$

com p e q são como em (3.7) e subtrair das raízes $\frac{a}{3}$.

Agora voltaremos nossa atenção a resolução da equação

$$y^3 + py + q = 0. \quad (3.8)$$

Sendo u e v duas novas variáveis indeterminadas, façamos uma nova mudança de variável na equação (3.8): $y = u + v$. Assim obtemos:

$$\begin{aligned}
 0 &= (u + v)^3 + p(u + v) + q \\
 &= (u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + (pu + pv) + q \\
 &= (u^3 + v^3 + q) + (3u^2v + pu + 3uv^2 + pv) \\
 &= (u^3 + v^3 + q) + u(p + 3v) + v(p + 3u) \\
 &= (u^3 + v^3 + q) + (u + v)(p + 3uv).
 \end{aligned}$$

Temos então que cada solução (u, v) do sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u.v = -\frac{p}{3}, \end{cases} \quad (3.9)$$

nos fornece uma solução (u, v) de (3.9), sendo então uma solução da forma $y = u + v$ de (3.8). Elevando ao cubo a segunda equação do sistema (3.9), segue-se que (u, v) é uma solução do sistema e u^3 e v^3 são soluções da equação do segundo grau abaixo,

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Utilizando o método para encontrar raízes da equação do segundo grau chegaremos em:

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Pela simetria, podemos supor que $u^3 = z_1$ e $v^3 = z_2$. Escolhendo uma das raízes cúbicas de z_1 e denotando por $\sqrt[3]{z_1}$, segue que as soluções de $u^3 = z_1$ são $\sqrt[3]{z_1}$, $w\sqrt[3]{z_1}$ e $w^2\sqrt[3]{z_1}$ em que $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes cúbicas da unidade.

Denotando agora por $\sqrt[3]{z_2}$ a raiz cúbica de z_2 tal que $\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2} = -\frac{p}{3}$, observamos que na segunda equação do sistema (3.9), admite as seguintes soluções:

$$u_1 = \sqrt[3]{z_1}, v_1 = \sqrt[3]{z_2};$$

$$u_2 = w\sqrt[3]{z_1}, v_1 = w^2\sqrt[3]{z_2};$$

$$u_3 = w^2\sqrt[3]{z_1}, v_1 = w\sqrt[3]{z_2}.$$

Segue então que a equação (3.8) têm como soluções:

- $y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$
- $y_2 = u_2 + v_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ e}$
- $y_3 = u_3 + v_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

em que $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $w^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, que são chamadas de Fórmulas de Cardano.

Por fim para encontrar a solução da equação (3.6) apenas substituiremos os resultados obtidos pelas fórmulas de Cardano na equação $x = y - \frac{a}{3}$.

Exemplo 5. *Seja a equação do terceiro grau $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, iremos resolvê-la utilizando o método de Cardano.*

Resolução: Inicialmente fazendo a mudança de variável e em seguida calculando o valor de p e q na equação,

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

temos que $a = -9, b = 26$ e $c = -24$. Aplicando na relação (3.7) chegaremos que $p = -1$ e $q = 0$, logo teremos:

$$y^3 - y = 0.$$

Com isso iremos utilizar as fórmulas de Cardano para chegar na solução. Substituindo na equação abaixo podemos chegar na primeira solução.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
 &= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{(-1)^3}{27}}} \\
 &= \frac{i\sqrt{3}}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{3} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Logo, $y_1 = 0$ e substituindo em $x = y + 3$ temos que a primeira raiz da equação vale $x_1 = 3$. Fazendo um procedimento análogo para encontrar as outras duas raízes, chegaremos que $y_2 = -1$ e $y_3 = 1$ e substituindo na equação (3.7) que mudamos a variável $x = y + 3$ chegaremos respectivamente nos resultados $x_2 = 2$ e $x_3 = 4$. Portanto encontramos as três raízes da equação proposta. Desta forma a solução da equação do terceiro grau é $S = \{2, 3, 4\}$. Graficamente podemos observar a solução.

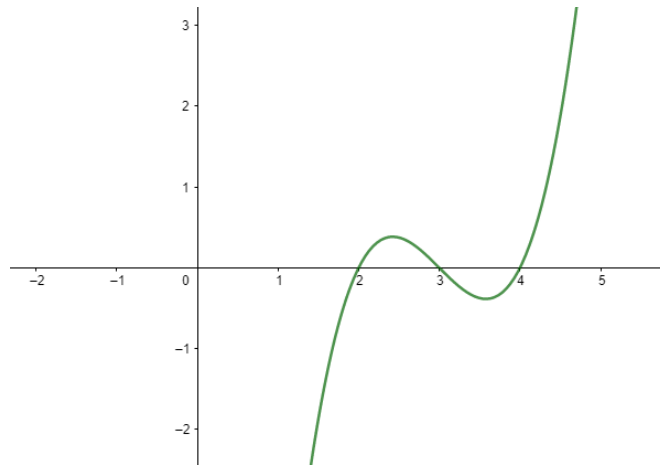


Figura 3.4: Gráfico do polinômio $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$.

A seguir veremos uma abordagem um pouco semelhante, dada por um método que utiliza a relação entre as raízes e coeficientes que pode ser encontrado com mais detalhes

na referência [13].

Sejam três raízes complexas x_1 , x_2 e x_3 da equação cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (3.10)$$

tais que

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + q_0\beta + q_0\gamma, \\ x_2 = \alpha + q_1\beta + q_2\gamma, \\ x_3 = \alpha + q_2\beta + q_1\gamma, \end{cases} \quad (3.11)$$

em que α , β e γ são números complexos e $q_k, k = 0, 1, 2$ são raízes cúbicas da unidade.

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad q_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Então temos pela relação entre coeficientes e raízes as seguintes expressões:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c, \end{cases} \quad (3.12)$$

que são equivalentes a

$$\begin{cases} 3\alpha = -a, \\ 3\alpha^2 - 3\beta\gamma = b, \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = -c. \end{cases} \quad (3.13)$$

Da equação (3.13) podemos encontrar a soma $3^3(\beta^3 + \gamma^3)$ e o produto $3^6(\beta^3\gamma^3)$, que são coeficientes da equação quadrática abaixo, em que as soluções são $(3\beta)^3$ e $(3\gamma)^3$,

$$(3v)^6 + (2a^3 - 9ab + 27c)(3v)^3 + (a^2 - 3b)^3 = 0. \quad (3.14)$$

Definindo

$$Q = a^2 - 3b \quad \text{e} \quad R = -2a^3 + 9ab - 27c, \quad (3.15)$$

da equação quadrática (3.14) temos

$$(3\beta)^3 = \frac{R + \sqrt{R^2 - Q^3}}{2} \quad \text{e} \quad (3\gamma)^3 = \frac{R - \sqrt{R^2 - Q^3}}{2}. \quad (3.16)$$

Então

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{3}, \\ \beta = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{R + \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}, \\ \gamma = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{R - \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}. \end{cases} \quad (3.17)$$

A raiz cúbica na segunda equação em (3.17) pode ser escolhida de forma arbitrária enquanto que a raiz cúbica na terceira equação em (3.17), é tal que $\beta\gamma = \frac{Q}{9}$, seguindo a segunda equação em (3.13). Podemos perceber que este método muito se assemelha ao utilizado por Cardano. Sendo assim iremos analisar apenas o discriminante do primeiro método.

A seguir iremos analisar o discriminante da equação do terceiro grau.

Ao utilizar o método de Cardano, podemos chegar em alguns casos mais complicados de serem resolvidos. Cardano em "Ars Magna" classificou soluções deste tipo como "inúteis", os chamados casos irredutíveis que posteriormente deram origem aos números complexos. Podemos encontrar mais detalhes sobre esta parte histórica e análise do discriminante em [13] e [14].

Dada a equação cúbica reduzida $x^3 + px + q = 0$ vamos analisar o discriminante $\delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Como vimos na equação quadrática, o discriminante também está diretamente ligado ao número de raízes na equação cúbica. A seguir veremos os casos.

- A equação tem três raízes reais e distintas ($\delta < 0$);

Sejam a, b e c três números reais distintos que são solução da equação cúbica reduzida

$x^3 + px + q = 0$. Utilizando as relações entre os coeficientes e raízes da equação temos

$$a + b + c = 0, \quad (3.18)$$

$$ab + ac + bc = p, \quad (3.19)$$

$$abc = -q. \quad (3.20)$$

Isolando e substituindo o valor de c na equação (3.19) e na equação (3.20) tem-se que $p = ab - (a + b)^2$ e $q = ab(a + b)$. Substituindo em δ temos

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{[ab \cdot (a + b)]^2}{4} + \frac{[ab - (a + b)^2]^3}{27} \\ &= -\frac{(a - b)^2(2a + b)^2(a + 2b)^2}{108} \\ &\Rightarrow \delta < 0. \end{aligned}$$

- A equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas ($\delta > 0$);

Sejam $a + bi$, $a - bi$ e c , com a, b e c números reais não nulos, soluções da equação cúbica $x^3 + px + q = 0$, utilizando as relações entre coeficientes e raízes da equação temos:

$$2a + c = 0, \quad (3.21)$$

$$a^2 + b^2 + 2ac = p, \quad (3.22)$$

$$c(a^2 + b^2) = -q. \quad (3.23)$$

Fazendo procedimento análogo e substituindo o valor de c nas equações (3.22) e (3.23), temos $p = b^2 - 3a^2$ e $q = 2a(a^2 + b^2)$. Substituindo em δ temos

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{[2a \cdot (a^2 + b^2)]^2}{4} + \frac{[b^2 - 3a^2]^3}{27} \\ &= -\frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{108} \\ &= \frac{(b^3 + 9a^2b)^2}{27} \\ &\Rightarrow \delta > 0. \end{aligned}$$

- A equação tem três raízes reais sendo duas ou três iguais ($\delta = 0$);

Fazendo procedimento análogo ao caso anterior em que $\delta > 0$ e, chegando em

$$\delta = \frac{(b^3 + 9a^2b)^2}{27},$$

podemos notar que quando $b = 0$ temos $\delta = 0$.

A seguir vamos analisar o método abordado por Viète para resolver equações do terceiro grau.

François Viète foi um grande algebrista, obtendo importantes resultados no campo das equações algébricas. Neste campo fazia substituições de incógnitas para cair em problemas mais fáceis de resolver. Com seus estudos Viète conseguiu transformar a equação cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ em outra sem o termo do segundo grau fazendo uma mudança de variável, muito parecido com a descoberta feita por Tartaglia. Podemos encontrar mais detalhe sobre Viète em [14] e [17].

Seja a equação geral do terceiro grau com coeficientes $a, b, c, \in \mathbb{C}$ na forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

podemos desenvolver como no método anterior e chegar na equação reduzida abaixo

$$x^3 + px + q = 0, \tag{3.24}$$

com $p, q \in \mathbb{C}$. Fazendo a mudança de variável em x com

$$x = \frac{p}{3w} - w,$$

e substituindo em (3.24) temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{3w} - w\right)^3 + p\left(\frac{p}{3w} - w\right) + q &= 0 \\ w^6 - bw^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Podemos perceber que a equação (3.25) é quadrática em w^3 , ou seja

$$w^6 - qw^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (w^3)^2 - qw^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

então temos que

$$w^3 = \frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{4} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}.$$

Escolhendo $w_1^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$ ou $w_2^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$ chegaremos ao mesmo resultado para x , pois

$$(w_1 w_2)^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

ou

$$w_1 w_2 = -\frac{p}{3}$$

e

$$\frac{p}{3w_1} - w_1 = \frac{p}{3w_2} - w_2 = -\frac{p}{3w_2} - \frac{p}{\frac{-p}{w_1}}.$$

Sendo assim, podemos obter a fórmula de Cardano pelo método de Viète utilizando $x = w_1 - \frac{p}{3w_1} = x_1 + x_2$, ou seja,

$$z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Viète percebeu que para os casos que a equação cúbica apresenta discriminante $\delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ negativo, a fórmula de Cardano fica mais complicada de resolver. Com isso para fugir dos números complexos, utilizando a trigonometria, desenvolveu um método para calcular as três raízes reais cúbicas.

Dada a equação

$$x^3 + px + q = 0, \tag{3.26}$$

em que p, q são números reais não nulos. Fazendo a substituição $x = k \cos \theta$, com $k > 0$, segue que

$$(k \cos \theta)^3 + p(k \cos \theta) + q = 0.$$

Observe que se $q = 0$ teremos que uma solução é zero e as outras podem ser encontradas facilmente sendo soluções da equação $x^2 = -p$. Utilizando a relação trigonométrica $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$, temos

$$4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \cos 3\theta = 0, \quad (3.27)$$

substituindo $x = k \cos \theta$ na equação (3.26) temos

$$k^3 \cos^3 \theta + pk \cos \theta + q = 0,$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{4}{k^3}$ obtemos

$$4 \cos^3 \theta + \frac{4p}{k^2} \cos \theta + \frac{4q}{k^3} = 0. \quad (3.28)$$

Comparando (3.28) com (3.27), Viète observou que $x = k \cos \theta$ será solução da equação (3.26) desde que

$$\frac{4p}{k^2} = -3 \quad \text{e} \quad -\cos 3\theta = \frac{4q}{k^3}.$$

Estas equações acima só terão solução se tivermos $p < 0$ e $|\frac{4q}{k^3}| \leq 1$ ou $p < 0$ e $\frac{16q^2}{k^6} \leq 1$. Como $k^2 = -\frac{4p}{3}$ temos que o $\delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 \leq 0$. Sendo $q \neq 0$, então $\delta \leq 0$ implica em $p < 0$.

Como $\delta \leq 0$ o método de Viète fornece as três soluções reais da equação cúbica. Inicialmente calculamos $k = \sqrt{\frac{-4p}{3}}$ e em seguida encontrar os três valores de θ , em que $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ satisfazendo $\cos 3\theta = \frac{-4q}{k^3}$. Por fim teremos as três soluções para a

equação dada por,

$$x_1 = k \cos \theta_1,$$

$$x_2 = k \cos \theta_2,$$

$$x_3 = k \cos \theta_3.$$

Para os cálculos dos três valores de θ podemos tomar θ_1, θ_2 e θ_3 sendo

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos(3\theta),$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 120^\circ,$$

$$\theta_3 = \theta_1 + 240^\circ.$$

Exemplo 6. *Seja a equação do terceiro grau $x^3 - 15x - 4 = 0$, vamos resolvê-la utilizando o método de Viète.*

Resolução: Temos que $p = -15$ e $q = -4$. Utilizando $k = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$ e $\cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3}$ temos

$$k = \sqrt{\frac{60}{3}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$\cos 3\theta = \frac{16}{(2\sqrt{5})^3} = \frac{2\sqrt{5}}{25}.$$

Logo,

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right) \approx 26.565^\circ,$$

$$\theta_2 = 26.565^\circ + 120^\circ \approx 146.565^\circ,$$

$$\theta_3 = 26.565^\circ + 240^\circ \approx 266.565^\circ.$$

E por fim

$$x_1 = 2\sqrt{5} \cdot \cos(26.565^\circ) = 4,$$

$$x_2 = 2\sqrt{5} \cdot \cos(146.565^\circ) \approx -3.73,$$

$$x_3 = 2\sqrt{5} \cdot \cos(266.565^\circ) \approx -0.26.$$

Desta forma encontramos as três soluções reais da equação cúbica utilizando o método de Viète.

Graficamente podemos observar a solução.

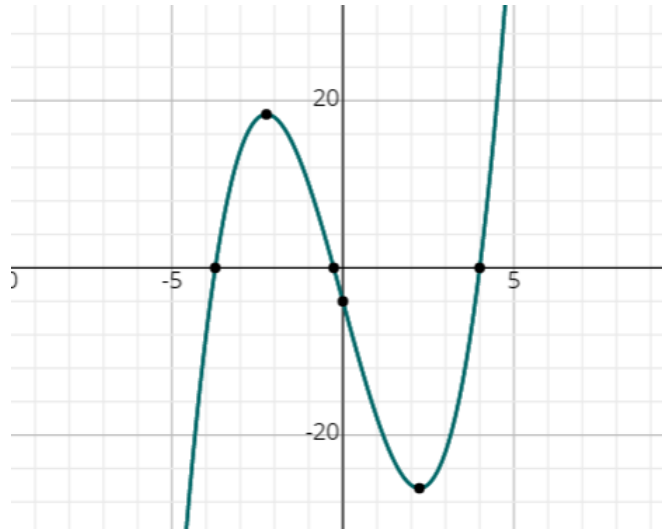


Figura 3.5: Gráfico do polinômio $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

Analisando os métodos estudados sobre as equações cúbicas, e observando os exemplos numéricos, podemos perceber que dada uma equação $x^3 + px + q = 0$, a resolução desta equação cúbica está diretamente ligada ao valor do discriminante. Sendo assim:

- se $\delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$, o melhor método para resolver é o de Cardano.
- se $\delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, então $p < 0$, logo aplicamos o método de Viète para resolver a equação cúbica.

3.3 Equação do Quarto Grau

Dando continuidade ao estudos das resoluções das equações, nesta seção iremos estudar métodos para encontrar as raízes das equações quárticas. Inicialmente analisaremos o método de Ferrari com o qual podemos transformar uma equação do quarto grau em um do segundo grau e outra do terceiro, e depois o método encontrado na referência [13], que utiliza a relação entre os coeficientes e as raízes da equação. Mais detalhes podem ser encontrados em [4], [13] e [14].

Começaremos estudando um método para a resolução da equação do quarto grau conhecido como método de Ferrari. Descoberto por Ludovico Ferrari e publicado por Cardano na *Ars Magna* dando continuidade à resolução das equações do terceiro grau estudadas na seção anterior.

Seja uma equação do quarto grau na forma:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (3.29)$$

com a, b, c e d coeficientes da equação. Temos que:

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 &= -(bx^2 + cx + d) \\ \left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 - \left(\frac{ax}{2}\right)^2 &= -(bx^2 + cx + d). \end{aligned}$$

Fazendo alguns ajustes na equação temos:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 - cx - d. \quad (3.30)$$

Como no primeiro membro da equação (3.30) temos um quadrado perfeito, iremos fazer modificações no segundo membro para transformá-lo em um quadrado perfeito, para resolver apenas duas equações do segundo grau.

Para isso somamos a expressão $y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)$ a ambos os membros da equação

(3.30), obtendo:

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 + y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right) &= \left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 - cx - d + y^2 + \\ &+ 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right) \end{aligned}$$

ficando na seguinte forma:

$$\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right) + y\right]^2 = \left(2y + \frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 + (ya - c)x + (y^2 - d). \quad (3.31)$$

Dessa forma podemos determinar os valores de y que transformam o segundo membro da equação (3.31) em um quadrado perfeito. Para que isso ocorra, o discriminante do segundo membro de (3.31), na variável x tem que ser nulo. Então temos:

$$(ya - c)^2 - 4\left(2y + \frac{1}{4}a^2 - b\right)(y^2 - d) = 0,$$

daí segue que:

$$8y^3 - 4by^2 + (2ac - 8d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0. \quad (3.32)$$

Escolhendo y como sendo uma das raízes da equação (3.32), a equação (3.31) fica na seguinte forma:

$$\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right) + y\right]^2 = (\alpha x + \beta)^2, \quad (3.33)$$

com α e β valores que sejam convenientes. Podemos resolver esta equação resolvendo duas equações do segundo grau, como veremos a seguir:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right) + y = (\alpha x + \beta) \quad \text{e} \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right) + y = -(\alpha x + \beta).$$

Como a equação (3.29) é equivalente à equação (3.33), para resolver uma equação do quarto grau podemos reduzir, resolvendo uma equação do segundo e outra do terceiro grau para chegar na solução.

Exemplo 7. Resolva a equação $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$.

Resolução:

Inicialmente fazendo alguns ajustes na equação temos:

$$x^4 - 2x^3 = x^2 + 2x + 2$$

$$(x^2 - x)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 2$$

$$(x^2 - x)^2 = 2x^2 + 2x + 2.$$

Somando a expressão $y^2 + 2y(x^2 - x)$ a ambos membros obtemos:

$$[(x^2 - x) + y]^2 = 2x^2 + 2x + 2 + 2y(x^2 - x) + y^2$$

$$[(x^2 - x) + y]^2 = (2y + 2)x^2 + (2 - 2y)x + (y^2 + 2).$$

Calculando o discriminante no segundo membro na variável x , e igualando a zero temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - 2y)^2 - 4(2y + 2)(y^2 + 2) \\ &= (4 - 8y + 4y^2) + (-8y + 8)(y^2 + 2) \\ &= (4 - 8y + 4y^2) + (-8y^3 - 16y - 8y^2 - 16) \\ &= y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 3y + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Agora teremos que resolver uma equação de grau 3 na variável y , para isso utilizaremos as fórmulas de Cardano estudada neste capítulo. Fazendo uma nova mudança de variável, utilizando os coeficiente $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ e $c = \frac{3}{2}$ e substituindo na equação (3.7), podemos encontrar os valores de p , q e a equação do terceiro grau que teremos que resolver. Logo temos:

$$y = z - \frac{1}{6}, \quad p = \frac{35}{12} \quad \text{e} \quad q = \frac{109}{108}.$$

E teremos que resolver a equação:

$$z^3 + \frac{35}{12}z + \frac{109}{108} = 0.$$

Utilizaremos o valor de p e q na fórmula de Cardano para encontrar a raiz real da equação de grau três, como podemos ver a seguir:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
 &= \sqrt[3]{-\frac{\frac{109}{108}}{2} + \sqrt{\frac{(\frac{109}{108})^2}{4} + \frac{(\frac{35}{12})^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\frac{109}{108}}{2} - \sqrt{\frac{(\frac{109}{108})^2}{4} + \frac{(\frac{35}{12})^3}{27}}} \\
 &= \sqrt[3]{-\frac{109}{216} + \frac{234}{216}} + \sqrt[3]{-\frac{109}{216} - \frac{234}{216}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{125}{216}} + \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} \\
 &= -\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado de z , temos que $y = -\frac{1}{2}$. Com esse valor de y o trinômio quadrado perfeito passa a ser:

$$\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x^2 + 3x - \frac{9}{4}\right) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2.$$

Obtemos, assim as seguintes equações do segundo grau:

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = x + \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x^2 - x - \frac{1}{2} = -\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Resolvendo as duas equações do segundo grau utilizando a fórmula de Bhaskara chegamos aos valores de $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$, i e $-i$, que são as raízes da equação proposta. Graficamente podemos observar a solução.

Veremos a seguir um outro método para resolver uma equação quártica, conforme apresentado na referência [13].

Sejam quatro raízes complexas x_1 , x_2 , x_3 e x_4 da equação quártica

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{3.34}$$

tais que,

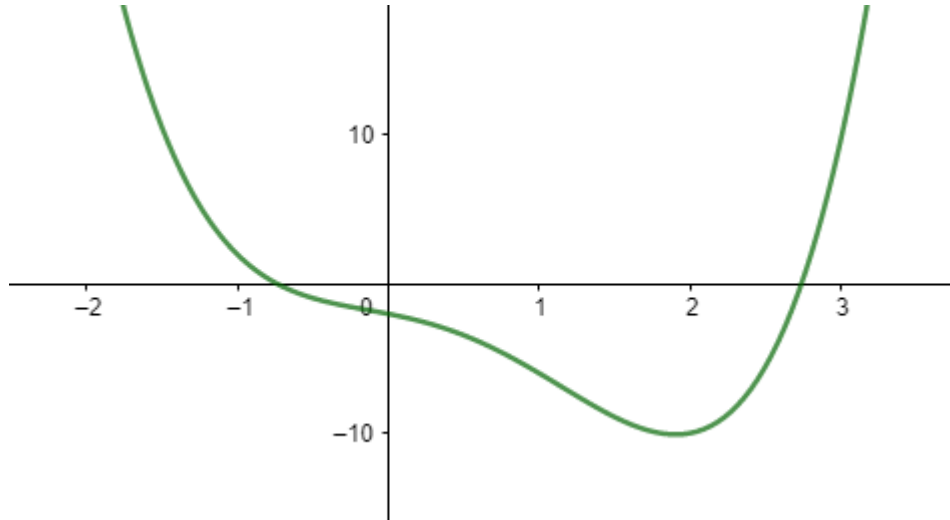


Figura 3.6: Gráfico do polinômio $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$.

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ x_2 = \alpha + \beta - \gamma - \delta, \\ x_3 = \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ x_4 = \alpha - \beta - \gamma + \delta, \end{cases} \quad (3.35)$$

em que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são números complexos. Então temos pela relação entre coeficientes e raízes as seguintes expressões:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c, \\ x_1x_2x_3x_4 = d, \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} 4\alpha = -a, \\ 6\alpha^2 - 2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = b, \\ 4\alpha^3 - 4\alpha(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 8\beta\gamma\delta = -c, \\ \alpha^4 + (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 2\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 8\alpha\beta\gamma\delta = d. \end{cases} \quad (3.36)$$

Da equação (3.36) obtemos

- $4^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$: substituindo $\alpha = -\frac{a}{4}$ em $6\alpha^2 - 2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = b$, chegando em $4^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 3a^2 - 8b$.
- $4^3\beta\gamma\delta$: substituindo α e $(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$ em $4\alpha^3 - 4\alpha(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 8\beta\gamma\delta = -c$ chegando em $4^3\beta\gamma\delta = -a^3 + 4ab - 8c$ ou $4^6\beta^2\gamma^2\delta^2 = -(a^3 - 4ab + 8c)^2$.
- $4^4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2)$: substituindo α , $(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$ e $\beta\gamma\delta$ em $\alpha^4 + (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 2\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 8\alpha\beta\gamma\delta = d$ chegando em $4^4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) = 3a^4 - 16a^2b + 16ac + 16b^2 - 64d$.

Sendo assim $4^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$, $4^4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2)$ e $4^6\beta^2\gamma^2\delta^2$ são coeficientes da equação cúbica (3.37) abaixo em que as três soluções são $(4\beta)^2$, $(4\gamma)^2$ e $(4\delta)^2$,

$$(16v^2)^3 - (3a^2 - 8b)(16v^2)^2 + (3a^4 - 16a^2b + 16ac + 16b^2 - 64d)(16v^2) - (a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0. \quad (3.37)$$

Portanto as equações (3.36) determinam o valor de α , $\alpha = -\frac{a}{4}$, e implicam uma equação do terceiro grau em (3.37) para β^2 , γ^2 e δ^2 .

Definindo

$$\begin{aligned} P &= a^3 - 4ab + 8c, \\ Q &= 12d + b^2 - 3ac, \\ R &= 27a^2d - 9abc + 2b^3 - 72bd + 27c^2 \end{aligned} \tag{3.38}$$

e

$$\begin{cases} \alpha_0 = a^3 - \frac{8b}{3}, \\ \beta_0 = \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{R + \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}, \\ \gamma_0 = \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{R - \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}, \end{cases} \tag{3.39}$$

então

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-a}{4}, \\ \beta = \frac{1}{4} \sqrt{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}, \\ \gamma = \frac{1}{4} \sqrt{\alpha_0 + q_1\beta_0 + q_2\gamma_0}, \\ \delta = \frac{1}{4} \sqrt{\alpha_0 + q_2\beta_0 + q_1\gamma_0}, \end{cases} \tag{3.40}$$

em que q_1 e q_2 são as duas raízes complexas da unidade.

Pode ser feita qualquer escolha da raiz cúbica em (3.39) desde que $\beta_0\gamma_0 = \frac{16Q}{9}$. De maneira semelhante pode escolher os sinais das raízes quadradas em (3.40) tal que $\beta\gamma\delta = \frac{-P}{64}$. A restrição para a escolha dos sinais de β, γ e δ em (3.40) segue das três primeiras equações em (3.36).

Iremos analisar o discriminante da equação quártica. Como vimos nas seções anteriores o discriminante está diretamente ligado ao número de raízes. Mais informações podem ser encontradas na referência [13].

Seja a equação

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{3.41}$$

uma equação quártica real e

$$Q = 12d + b^2 - 3ac,$$

$$R = 27a^2d - 9abc + 2b^3 - 72bd + 27c^2$$

e

$$\lambda = 3a^2 - 8b + 8\operatorname{Re} \left(\sqrt[3]{\frac{R + \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}} \right). \quad (3.42)$$

Considerando as multiplicidades das raízes:

- Se $R^2 - 4Q^3 > 0$ então duas e apenas duas raízes da equação quártica são reais.
- Se $R^2 - 4Q^3 = 0$ então duas raízes da equação quártica são reais e as outras duas raízes restantes são reais se $\lambda \geq 0$ para todas as três raízes cúbicas possíveis em (3.42).

– A equação quártica tem duas raízes iguais se e somente se, $R^2 - 4Q^3 = 0$ e terá três raízes iguais se e somente se $R = Q = 0$, em que:

$$R = 27a^2d - 9abc + 2b^3 - 72bd + 27c^2$$

$$Q = 12d + b^2 - 3ac.$$

– A equação quártica tem dois pares de raízes iguais se e somente se, $R^2 - 4Q^3 = 0$ e $32R = 27d^3$.

– A equação quártica tem quatro raízes iguais se e somente se, $R = Q = d = 0$.

- Se $R^2 - 4Q^3 < 0$ então
 - As quatro raízes da equação quártica são reais se, e somente se, $\lambda \geq 0$ para todas as três possíveis raízes cúbicas em (3.42);

- As quatro raízes da equação quártica não são reais se e somente se, $\lambda \leq 0$ para pelos menos uma das três raízes cúbicas em (3.42).

CAPÍTULO 4

Zeros dos polinômios de graus 5 e 6

Neste capítulo apresentaremos métodos para a resolução de equações do quinto grau conforme apresentado nas referências [7] e [16], e o método para a resolução de equações do sexto grau que pode ser encontrado com mais detalhes na referência [8].

4.1 Introdução

Após terem sido encontrados os métodos para a resolução das equações gerais cúbicas e quárticas, foi natural aparecer a motivação para resolver a equação geral quártica.

A primeira tentativa de provar que uma equação de grau cinco não pode ser resolvida por meios algébricos veio do italiano Paolo Ruffini, que não teve êxito em mostrar que as raízes das equações de grau maior ou igual a cinco não podem ser expressas por radicais em termos de seus coeficientes.

Euler e Lagrange tentaram reduzir uma equação quártica a uma quártica porém ambos falharam. A resolução da equação quártica em termos de seus radicais era um grande problema na álgebra no séc. *XVI*, equações cúbicas e biquadráticas eram resolvidas até a metade do século. Em 1799 Paolo Ruffini provou que as soluções por radicais para equações de grau cinco ou superiores são impossíveis e em 1826, Abel provou a mesma coisa pelo Teorema de Abel-Ruffini utilizando uma abordagem mais rigorosa, num artigo que mostrava que uma equação geral do quinto grau não é solúvel por radicais, porém algumas equações do quinto grau eram solúveis por radicais. Évariste Galois em 1832, inventou a teoria de grupos e usou para provar a mesma impossibilidade de Abel. Mais detalhes podem ser encontrado nas referências [7] e [16].

4.2 Equação Polinomial do Quinto Grau

Existem as equações quárticas redutíveis e irredutíveis, neste primeiro momento apresentaremos um estudo para resolver equações quárticas redutíveis. Uma equação quártica é redutível em x se conseguimos fatorá-la em um produto de fatores que envolvem equações lineares e quárticas ou em um produto envolvendo equações quadráticas e cúbicas, ou seja, $(ax+b)(cx^4+dx^3+ex^2+fx+g)$, em que a e c são coeficientes não nulos no primeiro caso e $(ax^2+bx+c)(dx^3+ex^2+fx+g)$, com a e d não nulos no segundo caso.

Iremos estudar a seguir uma extensão do método de Ferrari para resolver equações quárticas redutíveis. Uma leitura complementar sobre este método pode ser encontrado na referência [16].

Seja uma função na forma:

$$F(x) = A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0. \quad (4.1)$$

Quando $A_5 \neq 0$, temos uma função polinomial do quinto grau, e tomando $F(x) = 0$ teremos uma equação de grau cinco na forma

$$A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0, \quad (4.2)$$

em que os A_i 's são números racionais. Como $A_5 \neq 0$ podemos reduzir (4.2) na forma:

$$f(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (4.3)$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$. Se a equação (4.2) é redutível sobre os racionais, então a equação (4.3) também será redutível. A equação (4.3) será redutível na forma de produto de equação linear por equação quártica ou forma de produto de equação quadrática por equação cúbica. Estudaremos esses dois casos a seguir.

Caso 1: $f(x) = (x + \alpha)(x^4 + b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo membro da equação acima, temos:

$$f(x) = x^5 + (b_0 + \alpha)x^4 + (\alpha b_0 + b_1)x^3 + (\alpha b_1 + b_2)x^2 + (\alpha b_2 + b_3)x + \alpha b_3.$$

Igualando os coeficientes acima, com os coeficientes da $f(x)$ da equação (4.3), segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 + \alpha = a_4 \\ \alpha b_0 + b_1 = a_3 \\ \alpha b_1 + b_2 = a_2 \\ \alpha b_2 + b_3 = a_1 \\ \alpha b_3 = a_0. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Observe que, caso seja possível determinar $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que a decomposição acima seja efetuada, então $x = -\alpha$ será raiz da equação quártica, se não existir tal número, então a equação quártica não poderá ser reduzida para esse caso.

Além disso, conhecendo α e os $a_{i's}$, resolvendo o sistema (4.4) encontraremos os coeficientes $b_{i's}$ da equação quártica, cuja solução já estudamos no capítulo anterior.

Exemplo 8. Encontre as raízes da equação $2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 12x - 6 = 0$.

Resolução: Seja a equação quártica

$$2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 12x - 6 = 0. \quad (4.5)$$

Através da mudança de variável $y = 2x$, para tornar o coeficiente líder mônico, temos que a equação (4.5) pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{y}{2}\right)^5 - \left(\frac{y}{2}\right)^4 - 10 \left(\frac{y}{2}\right)^3 + 5 \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 12 \left(\frac{y}{2}\right) - 6 &= 0, \\ y^5 - y^4 - 20y^3 + 20y^2 + 6y - 6 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Podemos notar que $y = 1$ é raiz da equação (4.6). Consequentemente, $x = \frac{1}{2}$ é raiz de (4.5). Com essa informação podemos reduzir a equação (4.6) na seguinte forma:

$$(y - 1) \cdot (y^4 - 20y^2 + 96) = 0.$$

Além disso, observe que

$$(y - 1) \cdot (y^4 - 20y^2 + 96) = (y - 1) \cdot (y^2 - 8) \cdot (y^2 - 12) = 0.$$

Logo substituindo em $y = 2x$ encontramos as raízes $\{\frac{1}{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$ da equação (4.5).

Graficamente podemos observar a solução deste exemplo.

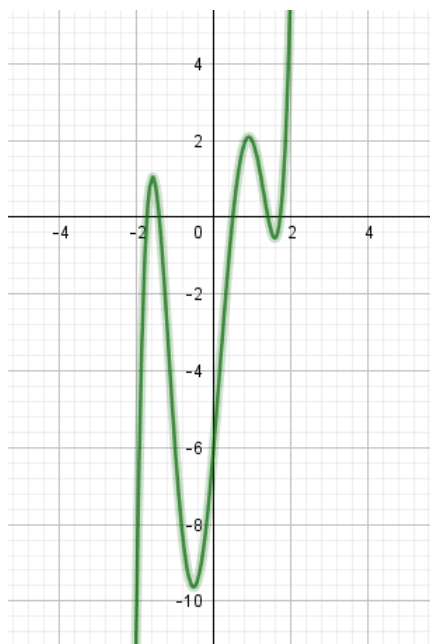


Figura 4.1: Gráfico do polinômio $f(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 12x - 6$.

Caso 2: $f(x) = (x^2 + b_0x + b_1)(x^3 + c_0x^2 + c_1x + c_2)$

Multiplicando x em ambos os membros da equação acima, temos

$$\begin{aligned} xf(x) &= x(x^2 + b_0x + b_1)(x^3 + c_0x^2 + c_1x + c_2) \\ &= (x^3 + b_0x^2 + b_1x)(x^3 + c_0x^2 + c_1x + c_2) \end{aligned}$$

ou seja, $xf(x)$ pode ser reduzido em um produto de dois fatores cúbicos.

Agora vamos tentar reduzir $xf(x)$ em dois fatores cúbicos. Observe que

$$\begin{aligned} xf(x) = 0 &\Rightarrow x(x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 0 \\ &\Rightarrow x^6 + a_4x^5 + a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Isolando os termos à sexta e à quinta potência em x , temos:

$$x^6 + a_4x^5 = -a_3x^4 - a_2x^3 - a_1x^2 - a_0x.$$

Adicionando em ambos os lados $\frac{(a_4^2 x^4)}{4}$:

$$\begin{aligned} x^6 + a_4 x^5 + \frac{(a_4^2 x^4)}{4} &= \frac{(a_4^2 x^4)}{4} - a_3 x^4 - a_2 x^3 - a_1 x^2 - a_0 x \\ \Rightarrow \left(x^3 + \frac{a_4 x^2}{2} \right)^2 &= \frac{(a_4^2 - 4a_3)}{4} x^4 - a_2 x^3 - a_1 x^2 - a_0 x. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Agora vamos introduzir o termo $\lambda_1 x + \lambda_2$ com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ na equação (4.8):

$$\left(x^3 + \frac{a_4 x^2}{2} + \lambda_1 x + \lambda_2 \right)^2 = \left(x^3 + \frac{a_4 x^2}{2} \right)^2 + 2 \cdot \left(x^3 + \frac{a_4 x^2}{2} \right) \cdot (\lambda_1 x + \lambda_2) + (\lambda_1 x + \lambda_2)^2. \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.8) na equação (4.9) temos:

$$\begin{aligned} \left(x^3 + \frac{a_4 x^2}{2} + \lambda_1 x + \lambda_2 \right)^2 &= \frac{(a_4^2 - 4a_3)}{4} x^4 - a_2 x^3 - a_1 x^2 - a_0 x + \\ &\quad + 2 \cdot \left(x^3 + \frac{a_4 x^2}{2} \right) \cdot (\lambda_1 x + \lambda_2) + (\lambda_1 x + \lambda_2)^2 \\ &= \left(2\lambda_1 - \frac{a_4^2 - 4a_3}{4} \right) x^4 + (a_4 \lambda_1 + 2\lambda_2 - a_2) x^3 + \\ &\quad + (a_4 \lambda_2 + \lambda_1^2 - a_1) x^2 + (2\lambda_1 \lambda_2 - a_0) x + \lambda_2^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

O lado direito em (4.10) pode ser representado por:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad (4.11)$$

com $a = 2\lambda_1 - \frac{a_4^2 - 4a_3}{4}$, $b = a_4 \lambda_1 + 2\lambda_2 - a_2$, $c = a_4 \lambda_2 + \lambda_1^2 - a_1$, $d = (2\lambda_1 \lambda_2 - a_0)$ e $e = \lambda_2^2$.

Observe que esta expressão será um quadrado perfeito na forma $(Ax^2 + Bx + C)^2$ se

$$ad^2 = b^2 e, \quad (4.12)$$

$$(b^2 - 4ac)^2 = 64a^3 e. \quad (4.13)$$

Substituindo os valores de a, b, c, d e e nas igualdades (4.12) e (4.13) teremos:

$$\left(2\lambda_1 - \frac{a_4^2 - 4a_3}{4} \right) \cdot (2\lambda_1 \lambda_2 - a_0)^2 = (a_4 \lambda_1 + 2\lambda_2 - a_2)^2 \cdot \lambda_2^2 \quad (4.14)$$

e

$$\left[(a_4\lambda_1 + 2\lambda_2 - a_2)^2 - 4 \left(2\lambda_1 - \frac{a_4^2 - 4a_3}{4} \right) (a_4\lambda_2 + \lambda_1^2 - a_1) \right]^2 = 64 (a_4\lambda_1 + 2\lambda_2 - a_2)^3 \lambda_2^2. \quad (4.15)$$

Vamos tomar $f_1(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ sendo a equação (4.14) e $f_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ sendo a equação (4.15) e encontrar uma solução comum. Se a equação (4.7) for redutível na forma de um produto de dois fatores cúbicos, as equações (4.14) e (4.15) têm uma solução racional comum. Para encontrar essa solução basta escolher λ_1 para que $2\lambda_1 - \frac{a_4^2 - 4a_3}{4} = \alpha^2$ em que α é racional.

Depois encontre o valor de λ_2 da equação (4.14), ele deve ser racional. Se esses valores racionais de λ_1 e λ_2 satisfazerem a equação (4.15), a equação (4.3) será redutível na forma de um produto de um fator quadrático por um fator cúbico. Como o lado direito da equação (4.10) tornou-se um quadrado perfeito do tipo $(Ax^2 + Bx + C)^2$, então teremos:

$$\left(x^3 + \frac{a_4x^2}{2} + \lambda_1x + \lambda_2 \right) = \pm(Ax^2 + Bx + C).$$

Sendo assim, teremos duas equações cúbicas, como podemos ver abaixo:

$$\begin{aligned} \left(x^3 + \frac{a_4x^2}{2} + \lambda_1x + \lambda_2 \right) - (Ax^2 + Bx + C) &= 0 \\ \left(x^3 + \frac{a_4x^2}{2} + \lambda_1x + \lambda_2 \right) + (Ax^2 + Bx + C) &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo essas duas equações cúbicas, obteremos 6 raízes da equação (4.7), sendo uma delas $x = 0$; as cinco raízes restantes são as raízes da equação quártica (4.3).

Exemplo 9. Encontre as raízes da equação $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

Resolução: Seja a equação

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0. \quad (4.16)$$

Multiplicando por x em ambos os membros e isolando o termo à sexta e à quinta temos:

$$\begin{aligned}x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 &= 0 \\x(x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1) &= 0 \\x^6 + x^5 &= 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x.\end{aligned}$$

Adicionando $\frac{1}{4}x^4$ em ambos os membros e fazendo alguns ajustes, segue que:

$$\begin{aligned}x^6 + x^5 + \frac{1}{4}x^4 &= \left(\frac{1}{4} + 2\right)x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x \\ \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)^2 &= \frac{9}{4}x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Introduzindo $\lambda_1 x + \lambda_2$ temos:

$$\begin{aligned}\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2\right)^2 &= \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)^2 + 2\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)(\lambda_1 x + \lambda_2) + (\lambda_1 x + \lambda_2)^2 = \\ &= \left(\frac{9}{4} + 2\lambda_1\right)x^4 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2)x^3 + (\lambda_1^2 + \lambda_2 + 2)x^2 + (2\lambda_1\lambda_2 - 1)x + \lambda_2^2.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Comparando com a equação (4.11), temos que $a = \frac{9}{4} + 2\lambda_1$, $b = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2$, $c = \lambda_1^2 + \lambda_2 + 2$, $d = 2\lambda_1\lambda_2 - 1$ e $e = \lambda_2^2$. Substituindo esses valores na equação (4.12)

$$\left(\frac{9}{4} + 2\lambda_1\right) \cdot (2\lambda_1\lambda_2 - 1)^2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2)^2 \cdot \lambda_2^2\tag{4.19}$$

e na equação (4.13)

$$\left[(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2)^2 - 4 \cdot \left(\frac{9}{4} + 2\lambda_1\right) \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2 + 2)\right]^2 = 64 \left(\frac{9}{4} + 2\lambda_1\right)^3 \cdot \lambda_2^2.\tag{4.20}$$

Escolhendo $\lambda_1 = -1$ na equação (4.19) temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(-1 - 2\lambda_2)^2 &= (1 + 2\lambda_2)^2 \cdot \lambda_2^2 \\ (1 + 2\lambda_2)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \lambda_2^2\right) &= 0,\end{aligned}$$

que nos dá $\lambda_2 = \pm \frac{1}{2}$. Logo temos que $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, \pm \frac{1}{2})$. Iremos verificar se essa solução satisfaz a equação (4.20).

Utilizando $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -\frac{1}{2})$, temos $a = \frac{1}{4}, b = 0, c = \frac{5}{2}, d = 0$ e $e = \frac{1}{4}$. Substituindo na equação (4.20):

$$\begin{aligned} \left(0^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}\right)^2 &\neq 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{25}{4} &\neq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Utilizando $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, \frac{1}{2})$, temos $a = \frac{1}{4}, b = 2, c = \frac{7}{2}, d = -2$ e $e = \frac{1}{4}$. Substituindo na equação (4.20) novamente:

$$\begin{aligned} \left(4 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{2}\right)^2 &= 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Substituindo $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, \frac{1}{2})$ na equação (4.18):

$$\begin{aligned} \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{4} \\ \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) &= \pm \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

e

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0.$$

Portanto teremos que resolver as duas equações cúbicas,

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^3 + x^2 + x = 0.$$

A segunda equação podemos resolver isolando x e resolvendo a equação do segundo grau chegando na solução $\{0, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$. Já a primeira equação podemos resolver utilizando as fórmulas de Cardan chegando na solução $\{2 \cos \frac{2\pi}{9}, 2 \cos \frac{8\pi}{9}, 2 \cos \frac{14\pi}{9}\}$.

Sendo assim temos que $\{2 \cos \frac{2\pi}{9}, 2 \cos \frac{8\pi}{9}, 2 \cos \frac{14\pi}{9}, 0, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$ é solução da equação (4.17). Consequentemente, podemos observar que a solução da equação (4.16) é $\{2 \cos \frac{2\pi}{9}, 2 \cos \frac{8\pi}{9}, 2 \cos \frac{14\pi}{9}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$.

Portanto, podemos concluir que para resolver uma equação quártica através desse método, temos que convertê-la em uma equação sêxtica adicionando uma raiz, e dessa equação resultante dividir em dois fatores cúbicos, cuja solução pode ser encontrada utilizando um dos métodos que estudamos anteriormente.

Graficamente podemos observar a solução desse exemplo.

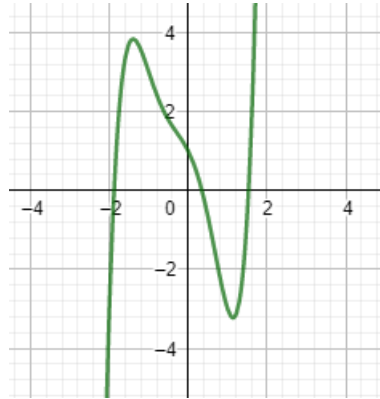


Figura 4.2: Gráfico do polinômio $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$.

A seguir veremos um outro método para resolver uma equação quártica, que é uma técnica muito útil para resolver diferentes tipos de equação do quinto grau. Com esta técnica podemos transformar uma equação quártica em uma equação sêxtica adicionando uma raiz e em seguida decompor em dois polinômios cúbicos. Após resolver as equações cúbicas teremos as cinco raízes da equação do quinto grau e a raiz que foi adicionada. Mais detalhes sobre este método podem ser encontrados na referência [7].

Considere a seguinte equação quártica abaixo

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (4.21)$$

em que a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 são coeficientes reais.

Na técnica que iremos utilizar vamos transformar a equação quártica em uma equação sêxtica multiplicando por um fator $(x + k)$. Este processo é equivalente a adicionar uma raiz, $x = -k$ na equação quártica dada. A equação sêxtica resultante é dada por

$$x^6 + (a_4 + k)x^5 + (a_3 + a_4k)x^4 + (a_2 + a_3k)x^3 + (a_1 + a_2k)x^2 + (a_0 + a_1k)x + a_0k = 0. \quad (4.22)$$

Observe que k é um valor desconhecido no momento e só será determinado posteriormente. Iremos decompor a equação (4.22) em dois fatores de equações polinomiais cúbicas. Sendo assim, considere outra equação sêxtica formada por dois polinômios cúbicos $x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, conforme podemos ver abaixo:

$$\frac{(x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)^2 - p^2(x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)^2}{1 - p^2} = 0, \quad (4.23)$$

em que b_0, b_1, b_2 e c_0, c_1, c_2 são coeficientes desconhecidos dos respectivos polinômios cúbicos assim como o parâmetro p .

A equação (4.23) pode ser decomposta em dois polinômios cúbicos em fatores como mostrado abaixo

$$\left[\frac{(x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) - p(x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)}{(1 - p)} \right] \cdot \left[\frac{(x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + p(x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)}{(1 + p)} \right] = 0. \quad (4.24)$$

Assim, se conseguirmos representar a equação sêxtica (4.22) na forma da equação (4.23), iremos conseguir decompor a equação (4.22) em duas equações cúbicas como fatores polinomiais como mostra na equação (4.24). Para que as equações (4.22) e (4.23) sejam idênticas, os coeficientes correspondentes delas têm que ser iguais. Para

facilitar esta condição, vamos primeiro expandir e reorganizar a equação (4.23) em potências decrescentes em x , da mesma maneira que a equação (4.22) foi escrita.

$$x^6 + \frac{2(b_2 - c_2 p^2)}{1 - p^2} x^5 + \frac{b_2^2 + 2b_1 - (c_2^2 + 2c_1)p^2}{1 - p^2} x^4 + \frac{2[b_1 b_2 + b_0 - (c_1 c_2 + c_0)p^2]}{1 - p^2} x^3 + \\ + \frac{2b_0 b_2 + b_1^2 - (2c_0 c_2 + c_1^2)p^2}{1 - p^2} x^2 + \frac{2(b_0 b_1 - c_0 c_1 p^2)}{1 - p^2} x + \frac{(b_0^2 - c_0^2 p^2)}{1 - p^2} = 0. \quad (4.25)$$

A condição de que os coeficientes correspondentes na equação (4.22) e na equação (4.25) sejam iguais, nos fornece seis equações, como podemos ver abaixo.

$$\frac{2(b_2 - c_2 p^2)}{1 - p^2} = a_4 + k \quad (4.26)$$

$$\frac{b_2^2 + 2b_1 - (c_2^2 + 2c_1)p^2}{1 - p^2} = a_3 + a_4 k \quad (4.27)$$

$$\frac{2[b_1 b_2 + b_0 - (c_1 c_2 + c_0)p^2]}{1 - p^2} = a_2 + a_3 k \quad (4.28)$$

$$\frac{2b_0 b_2 + b_1^2 - (2c_0 c_2 + c_1^2)p^2}{1 - p^2} = a_1 + a_2 k \quad (4.29)$$

$$\frac{2(b_0 b_1 - c_0 c_1 p^2)}{1 - p^2} = a_0 + a_1 k \quad (4.30)$$

$$\frac{(b_0^2 - c_0^2 p^2)}{1 - p^2} = a_0 k. \quad (4.31)$$

Obtemos então um sistema com seis equações e oito incógnitas, $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, p$ e k . Assim precisamos adicionar mais duas equações para determinar as oito incógnitas. As equações que iremos adicionar chamaremos de equações suplementares, e são elas quem irão decidir qual o tipo de equação quártica solúvel que pode ser resolvida utilizando esta técnica.

Devemos escolher as duas equações suplementares com

$$b_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 = 0. \quad (4.32)$$

Usando os valores acima de b_2 e c_2 na equação (4.26), conseguimos determinar o valor de k sendo

$$k = -a_4. \quad (4.33)$$

Das equações (4.32) e (4.33) os valores de b_2, c_2 e k são substituídos nas equações de (4.27) à (4.31), e depois de algumas manipulações algébricas, obtemos as seguintes equações abaixo:

$$b_1 = c_1 p^2 + F_1(1 - p^2), \quad (4.34)$$

$$\text{em que } F_1 = \frac{(a_3 - a_4^2)}{2},$$

$$b_0 = c_0 p^2 + F_0(1 - p^2), \quad (4.35)$$

$$\text{em que } F_0 = \frac{(a_2 - a_3 a_4)}{2},$$

$$b_1^2 = c_1^2 p^2 + (a_1 - a_2 a_4)(1 - p^2), \quad (4.36)$$

$$b_0 b_1 = c_0 c_1 p^2 + (a_1 - a_2 a_4)(1 - p^2), \quad (4.37)$$

$$b_0^2 = c_0^2 p^2 - a_0 a_4(1 - p^2). \quad (4.38)$$

Agora temos cinco incógnitas b_0, b_1, c_0, c_1 e p . Como temos cinco equações (equação (4.34) à equação (4.38)) para resolver, podemos determinar o valor das incógnitas no método da eliminação. Observe que as equações (4.34) e (4.35) fornecem expressões para b_1 e b_0 e substituindo essas expressões nas equações (4.36), (4.37) e (4.38), então b_1 e b_0 são eliminados. Assim, a eliminação de b_1 da equação (4.36), e na simplificação resulta na seguinte expressão com c_1 e p valores desconhecidos.

$$(1 - p^2)[p^2(c_1 - F_1)^2 - (F_1^2 + a_2 a_4 - a_1)] = 0.$$

Observe que o termo $(1 - p^2)$ surge como um fator na expressão acima, no entanto não pode ser igualado a zero, uma vez que este termo aparece no denominador da equação (4.23). Portanto, o outro fator da expressão é igualado a zero, para obter a seguinte expressão:

$$p(c_1 - F_1) = \pm \sqrt{F_1^2 + a_2 a_4 - a_1}. \quad (4.39)$$

Da mesma forma, eliminamos b_0 e b_1 da equação (4.37) e simplificamos para formar a seguinte expressão com c_0, c_1 e p termos desconhecidos.

$$(1 - p^2)[c_0 c_1 p^2 + \frac{(a_0 - a_1 a_4)}{2} - F_1 c_0 p^2 - F_0 c_1 p^2 - F_0 F_1 (1 - p^2)] = 0.$$

Mais uma vez, o termo $(1 - p^2)$ aparece como fator, fazendo da mesma forma da expressão anterior, igualamos o outro fator a zero e simplificamos para obter a seguinte expressão:

$$p^2(c_0 - F_0)(c_1 - F_1) = F_0 F_1 - \frac{(a_0 - a_1 a_4)}{2}. \quad (4.40)$$

Agora eliminamos b_0 da equação (4.38) e obtemos a expressão em c_0 e p como podemos ver abaixo.

$$(1 - p^2)[c_0^2 p^2 - a_0 a_4 - F_0^2 (1 - p^2) - 2F_0 c_0 p^2] = 0.$$

Como feito nas expressões anteriores, igualando o fator diferente de $(1 - p^2)$ a zero na expressão acima e, simplificando obtemos:

$$p(c_0 - F_0) = \pm \sqrt{F_0^2 + a_0 a_4}. \quad (4.41)$$

Observe que podemos eliminar $p(c_1 - F_1)$ da equação (4.40), dividindo-o pela equação (4.39), resultando na seguinte expressão:

$$p(c_0 - F_0) = \pm \frac{\left[F_0 F_1 - \frac{a_0 - a_1 a_4}{2} \right]}{\sqrt{F_1^2 + a_2 a_4 - a_1}}. \quad (4.42)$$

Observando as equações (4.41) e (4.42), ambas fornecem expressão para $p(c_0 - F_0)$, e então notamos que não é possível eliminar p ou c_0 separadamente. Em vez disso, p e c_0 são eliminados simultaneamente, quando a equação (4.42) é dividido por (4.41) resultando em uma expressão contendo apenas os coeficientes da equação quártica dada, como podemos ver a seguir:

$$(F_0^2 + a_0 a_4)(F_1^2 + a_2 a_4 - a_1) = \left[F_0 F_1 - \frac{(a_0 - a_1 a_4)}{2} \right]^2. \quad (4.43)$$

Sendo assim, iniciamos o processo de eliminação para determinar as cinco incógnitas restantes, porém no final da equação (4.43), apenas resultou os coeficientes da equação quártica.

Como todas as equações com as incógnitas já foram utilizadas, chegamos num determinado ponto de como determinar as incógnitas restantes. Veremos a seguir como determinar o valor de p^2 e das incógnitas restantes. Para sair desta situação que surgiu vamos analisar as expressões em que o termo $(1 - p^2)$ surge como um fator, entretanto, não podemos igualar ele a zero, pois este termo aparece no denominador da equação (4.23).

Portanto, ao invés de atribuir um zero ao termo $(1 - p^2)$, podemos avaliar expressões contendo p no limite quando $(1 - p^2)$ se aproxima de zero. Em outras palavras, podemos avaliar essas expressões aplicando um processo de limitação, com p^2 tendendo à unidade. Para começar, devemos reescrever a equação (4.41) para avaliar c_0 no limite com p^2 tendendo à unidade

$$c_0 = \lim_{p^2 \rightarrow 1} \left\{ F_0 \pm \sqrt{(F_0^2 + a_0 a_4)/p^2} \right\}$$

e c_0 é avaliado como:

$$c_0 = F_0 \pm \sqrt{(F_0^2 + a_0 a_4)/p^2}. \quad (4.44)$$

Da mesma maneira, utilizando a equação (4.39), c_1 é avaliada no limite com p^2 tendendo a uma unidade, conforme dado abaixo:

$$c_1 = F_1 \pm \sqrt{F_1^2 + a_2 a_4 - a_1}. \quad (4.45)$$

Da mesma forma, aplicando o limite conforme p^2 tende à unidade das equações (4.34) e (4.35), obtemos expressões para b_1 e b_0 respectivamente, conforme mostrado abaixo:

$$b_1 = \lim_{p^2 \rightarrow 1} \{ c_1 p^2 + F_1 (1 - p^2) \}$$

$$b_0 = \lim_{p^2 \rightarrow 1} \{ c_0 p^2 + F_0 (1 - p^2) \}.$$

Simplificando as expressões acima, obtemos valores de b_1 e b_0 como:

$$b_1 = c_1 \quad \text{e} \quad b_0 = c_0. \quad (4.46)$$

Determinamos b_0, b_1, c_0 e c_1 quando p^2 se aproxima à unidade. Como o termo $(1 - p^2)$ aparece no denominador da equação (4.23), estudaremos o comportamento desta equação no limite quando p^2 tende à unidade como mostrado abaixo:

$$\lim_{p^2 \rightarrow 1} \{[(x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)^2 - p^2(x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)^2]/(1 - p^2) = 0.\}$$

Observando que $b_2 = 0, c_2 = 0$, e usando resultados da equação (4.46), simplificamos a expressão acima para obter:

$$(x^3 + c_1x + c_0)^2 = 0. \quad (4.47)$$

Nosso objetivo era decompor a equação sêxtica (4.22) em dois polinômios cúbicos, no entanto, o que surgiu após várias etapas de manipulações algébricas, é uma equação sêxtica mais fácil de manipular com repetidas raízes.

Isso significa que esta técnica pode ser aplicada apenas para os casos de dois pares de raízes repetidas de quártica? Não necessariamente, pois até mesmo as equações de sexto grau formadas a partir das equações de quinto grau com cinco raízes distintas, podem ser resolvidas por meio desta técnica, conforme veremos a seguir.

Mesmo que, à primeira vista, a equação sêxtica (4.47) apareça como o produto de dois polinômios cúbicos idênticos, uma observação a se fazer é que as equações (4.44) e (4.45) nos revelam que c_0 e c_1 tem dois valores cada, assim, a equação sêxtica (4.47) pode ser expressa como um produto de dois polinômios cúbicos distintos. De (4.44), os dois valores de c_0 são dados por:

$$c_{01} = F_0 + \sqrt{F_0^2 + a_0a_4} \quad \text{e} \quad c_{02} = F_0 - \sqrt{F_0^2 + a_0a_4}. \quad (4.48)$$

Da equação (4.45) obtemos dois valores de c_1 como mostrado abaixo

$$c_{11} = F_1 + \sqrt{F_1^2 + a_2a_4 - a_1} \quad \text{e} \quad c_{12} = F_1 - \sqrt{F_1^2 + a_2a_4 - a_1}. \quad (4.49)$$

Entretanto, notamos da equação (4.40) que c_0 e c_1 são independentes, o que significa que c_1 assume um certo valor, digamos c_{11} , quando c_0 assume o valor de c_{01} , o que significa ainda que a equação sêxtica pode ser decomposta como veremos a seguir:

$$(x^3 + c_{11}x + c_{01})(x^3 + c_{12}x + c_{02}) = 0. \quad (4.50)$$

Quando cada um dos fatores polinômios cúbicos em (4.50) é igualado a zero, obtemos as seguintes equações cúbicas

$$(x^3 + c_{11}x + c_{01}) = 0 \quad (4.51)$$

$$(x^3 + c_{12}x + c_{02}) = 0. \quad (4.52)$$

O par acima de equações cúbicas nos fornecerá seis raízes no total, incluindo as cinco raízes da equação quártica dada na equação (4.21) e a raiz adicionada. As raízes cúbicas poderão ser resolvidas utilizando o método de Cardano como já estudamos anteriormente.

A seguir, discutimos o comportamento das raízes de tais equações quárticas solúveis. Mais informações poderão ser encontradas em [7].

Sabemos que as equações cúbicas (4.51) e (4.52), que são fatores da equação sêxtica (4.50), nos fornece seis raízes no total, incluindo cinco raízes da equação quártica (4.21) e a raiz adicionada. Iremos deixar que as raízes da primeira equação cúbica (4.51) sejam x_1, x_2 e x_3 , e as raízes da segunda equação cúbica (4.52) sejam x_4, x_5 e a_4 , sendo que a raiz $x_6 = a_4$.

Ao observar essas equações cúbicas, notamos que o termo x^2 em cada uma dessas equações estão faltando, o que significa que a soma das raízes de cada equação cúbica é zero, conforme podemos ver abaixo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (4.53)$$

$$x_4 + x_5 + a_4 = 0. \quad (4.54)$$

A equação (4.53) revela a característica importante da quántica solucionável resolvida através desta técnica usando as equações suplementares dadas em (4.32): que a equação quántica terá a soma de suas três raízes igual a zero. Em outras palavras a equação quántica citada tem uma raíz dependente, ou seja,

$$x_3 = -(x_1 + x_2).$$

Sendo assim, veremos abaixo qual a condição para os coeficientes da equação quántica.

Para uma equação quántica solúvel, cuja raízes satisfazem as condições (4.53) e (4.54), os coeficientes satisfazem a condição estipulada por (4.43); por outro lado, se os coeficientes da equação quántica satisfazem (4.43), então a equação quántica é solucionável por meio desta técnica, e suas raízes satisfazem as condições dadas em (4.53) e (4.54).

Sabemos que nesta técnica, a equação quántica (4.21) é convertida em uma equação sêxtica adicionando uma raíz real a_4 , e a sêxtica resultante (4.22) é decomposta com sucesso em dois fatores polinomiais cúbicos distintos. As equações (4.48) e (4.49) revelam que os fatores polinomiais cúbicos em geral podem ter coeficientes complexos. No entanto, como (4.22) tem apenas coeficientes reais, os coeficientes complexos do primeiro fator polinomial cúbico (c_{01}) e (c_{11}) ocorrem junto com os coeficientes conjugados correspondentes $((c_{02})$ e $(c_{12}))$ no segundo fator polinomial cúbico.

O exemplo numérico dado no final retrata tal cenário, em que a equação quántica dada tem coeficientes reais, a equação sêxtica formada também tem coeficientes reais, porém após a decomposição da equação sêxtica em dois polinômios cúbicos, esses polinômios têm coeficientes complexos, mas conjugados.

Na escolha de equações suplementares, optamos por um conjunto (4.32), que resultou em uma equação quántica solúvel que tem a soma de suas três raízes sendo igual a zero. Existem várias maneiras de escolher equações suplementares, no entanto, o con-

junto de suplementares escolhida irá decidir o tipo de quántica solúvel. Por exemplo, pode-se escolher o conjunto de suplementares no lugar de (4.32) como $b_1 = 0$ e $c_1 = 0$, e aplicar a técnica que acabamos de apresentar para resolver a equação quántica. A equação quántica que pode ser resolvida com o conjunto de equações suplementares acima, tem suas três raízes relacionadas da seguinte maneira:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0.$$

Escolhendo o conjunto de equações suplementares com $b_0 = 1$ e $c_0 = 1$, então a equação quántica tem suas três raízes x_1, x_2 e x_3 relacionadas da seguinte maneira

$$x_1x_2x_3 = -1.$$

Iremos ver a seguir um exemplo da aplicação do método que acabamos de analisar.

Exemplo 10. *Seja a equação*

$$x^5 - x^4 + 13x^3 + x^2 + 116x + 130 = 0,$$

vamos encontrar as raízes desta equação, aplicando a técnica estudada.

Resolução: Iremos formar a equação sêxtica adicionando uma raíz, digamos que $x_6 = a_4$, em que $a_4 = -1$, então teremos a equação:

$$x^6 + 12x^4 + 14x^3 + 117x^2 + 246x + 130 = 0.$$

Os valores de F_0 e F_1 são respectivamente $F_0 = 7, F_1 = 6$. Os valores de c_{01} e c_{02} são calculadas utilizando a equação (4.48) chegando em $c_{01} = 7 + 9i$ e $c_{02} = 7 - 9i$.

A partir da equação (4.49), c_{11} e c_{12} são avaliados como: $c_{11} = 6 + 9i$ e $c_{12} = 6 - 9i$. A equação sêxtica obtida utilizando a equação (4.50) é:

$$[x^3 + (6 + 9i)x + 7 + 9i][x^3 + (6 - 9i)x + 7 - 9i] = 0.$$

Ao expandir e organizar a equação sêxtica acima, observamos que os coeficientes desta equação correspondem ao da sêxtica formada pela adição de uma raiz à equação quártica. Isso garante que tenhamos decomposto a sêxtica em dois polinômios cúbicos corretamente. Assim, as equações cúbicas que devemos resolver são:

$$x^3 + (6 + 9i)x + (7 + 9i) = 0$$

$$x^3 + (6 - 9i)x + (7 - 9i) = 0.$$

As raízes da primeira equação cúbica são $x_1 = -1, x_2 = 2 - 3i, x_3 = -1 + 3i$, e as raízes da segunda equação cúbica são: $x_4 = 2 + 3i, x_5 = -1 - 3i, x_6 = -1$. Observe que, $x_6 = -1$, é a raiz adicionada. Assim as cinco raízes quárticas são $x_1 = -1, x_2 = 2 - 3i, x_3 = -1 + 3i, x_4 = 2 + 3i$ e $x_5 = -1 - 3i$.

Como observação podemos perceber que os métodos apresentados nesta seção são bem parecidos: no primeiro método tentamos escrever a equação quártica na forma de um produto de uma equação linear por uma quártica ou forma de um produto de uma equação quadrática por uma cúbica e para conseguir escrever nessa forma introduzimos uma nova raiz e através de algumas manipulações algébricas foi possível chegar em um destes produtos. No segundo método também modificamos a equação do quinto grau transformando-a em uma equação do sexto grau adicionando uma raiz, em seguida a equação foi manipulada de uma forma diferente analisando outros fatores.

4.3 Equação Polinomial do Sexto Grau

As obras de Abel (1826) e Galois (1832) mostraram que as equações polinomiais gerais de grau superior ao quarto grau não podem ser resolvidas por radicais. Enquanto Abel publicou a prova da impossibilidade de resolver estas equações (Teorema da impossibilidade de Abel), Galois deu uma prova mais rigorosa utilizando a teoria

de grupos. No método que veremos a seguir iremos decompor uma equação sêxtica solucionável como fatores de dois polinômios cúbicos. Uma característica deste método é que a soma de suas três raízes é igual a soma de suas outras três raízes. Para um estudo complementar pode ser consultada a referência [8].

Seja a equação sêxtica

$$x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (4.55)$$

em que a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são os coeficientes reais da equação acima.

Considere outra equação sêxtica como mostrada abaixo:

$$(x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)^2 - (c_2x^2 + c_1x + c_0)^2 = 0 \quad (4.56)$$

em que b_0, b_1, b_2 e c_0, c_1, c_2 , são os coeficientes desconhecidos da equação acima. Observe que a equação sêxtica (4.56) pode ser decomposta em dois fatores, conforme mostrado abaixo.

$$[x^3 + (b_2 - c_2)x^2 + (b_1 - c_1)x + (b_0 - c_0)] [x^3 + (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)] = 0. \quad (4.57)$$

Portanto, se a equação sêxtica (4.55) pode ser representada na forma da equação (4.56), então ela pode ser fatorada em um produto de polinômios cúbicos, como mostrado na equação (4.57), levando para sua solução. Cada fator é igualado a zero para obter as seguintes equações cúbicas.

$$\begin{aligned} x^3 + (b_2 - c_2)x^2 + (b_1 - c_1)x + b_0 - c_0 &= 0 \\ x^3 + (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + b_0 + c_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

As seis raízes da equação sêxtica (4.55) são obtidas resolvendo as duas equações cúbicas acima. Assim, para representar a equação sêxtica (4.55) na forma da equação (4.56), os coeficientes da equação (4.55) devem ser iguais aos coeficientes da equação

(4.56). No entanto, os coeficientes da equação (4.56) não estão escritos de forma muito clara, sendo assim iremos expandi-la e reorganizá-la para facilitar o equacionamento de seus coeficientes, como podemos ver abaixo.

$$x^6 + 2b_2x^5 + (b_2^2 + 2b_1 - c_2^2)x^4 + 2(b_0 + b_1b_2 - c_1c_2)x^3 + \\ + [b_1^2 + 2b_0b_2 - (c_1^2 + 2c_0c_2)]x^2 + 2(b_0b_1 - c_0c_1)x + b_0^2 - c_0^2 = 0. \quad (4.59)$$

Igualando os coeficientes da equação (4.59) com os coeficientes da equação (4.55), resulta nas seguintes seis equações.

$$2b_2 = a_5 \quad (4.60)$$

$$b_2^2 + 2b_1 - c_2^2 = a_4 \quad (4.61)$$

$$2(b_0 + b_1b_2 - c_1c_2) = a_3 \quad (4.62)$$

$$b_1^2 + 2b_0b_2 - (c_1^2 + 2c_0c_2) = a_2 \quad (4.63)$$

$$2(b_0b_1 - c_0c_1) = a_1 \quad (4.64)$$

$$b_0^2 - c_0^2 = a_0. \quad (4.65)$$

Observe que apesar de ter seis equações para determinar as seis incógnitas $(b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2)$, elas não podem ser determinadas, uma vez que a solução para a equação sêxtica geral não pode ser resolvida por radicais.

Como nosso objetivo é resolver a equação sêxtica por radicais, iremos introduzir uma nova equação, que chamaremos de equação suplementar para determinar todas as seis incógnitas. Seja a equação suplementar abaixo

$$c_2 = 0. \quad (4.66)$$

Da equação (4.60), temos b_2 como:

$$b_2 = \frac{a_5}{2}. \quad (4.67)$$

Usando as equações (4.66) e (4.67) na equação (4.61), b_1 é encontrado como

$$b_1 = \frac{a_4}{2} - \frac{a_5^2}{8}. \quad (4.68)$$

Das equações (4.66),(4.67) e (4.68), os valores de c_2, b_2, b_1 são substituídos na equação (4.62) chegando em

$$b_0 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_5^3}{16} - \frac{a_4 a_5}{4}. \quad (4.69)$$

Utilizando as equações (4.66),(4.67),(4.68) e (4.69), substituindo os valores encontrados de b_0, b_1, b_2 e c_2 na equação (4.63), obtemos o valor de c_1^2 como:

$$c_1^2 = \left(\frac{5a_5^4}{64} - \frac{3a_4 a_5^2}{8} + \frac{a_4^2}{4} + \frac{a_3 a_5}{2} - a_2 \right). \quad (4.70)$$

Da equação (4.70), notamos que c_1 tem dois valores, iremos indicar por c_{11} e c_{12} , como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_6 \\ c_{12} &= -a_6, \end{aligned} \quad (4.71)$$

em que a_6 é dado por

$$a_6 = \sqrt{\frac{5a_5^4}{64} - \frac{3a_4 a_5^2}{8} + \frac{a_4^2}{4} + \frac{a_3 a_5}{2} - a_2}. \quad (4.72)$$

Considere a equação (4.64). Substitua os valores de c_2, b_2, b_1, b_0 e c_1 utilizando as equações (4.66),(4.67),(4.68),(4.69) e (4.71) na equação (4.64), para determinar c_0 . Como c_1 tem dois valores, c_{11} e c_{12} , c_0 também irá ter dois valores correspondentes como mostrado abaixo (para $a_6 \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{a_7}{a_6} \\ c_{02} &= -\frac{a_7}{a_6}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

em que a_7 é dado por:

$$a_7 = \frac{a_3 a_4}{4} + \frac{a_4 a_5^3}{16} - \frac{a_4^2 a_5}{8} - \frac{a_3 a_5^2}{16} - \frac{a_5^5}{128} - \frac{a_1}{2}. \quad (4.74)$$

Determinamos todas as incógnitas, e substituindo seus valores nas equações cúbicas da equação (4.58), temos o seguinte par de equações cúbicas.

$$\begin{aligned} x^3 + b_2 x^2 + (b_1 - a_6)x + b_0 - \left(\frac{a_7}{a_6}\right) &= 0 \\ x^3 + b_2 x^2 + (b_1 + a_6)x + b_0 + \left(\frac{a_7}{a_6}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Note que, embora existam dois valores para c_0 e c_1 ambos produzirão o mesmo par de equações cúbicas. Resolvendo as equações (4.75), encontramos as seis raízes da equação sêxtica inicial.

Analisando o comportamento das raízes podemos perceber que, sendo x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 as raízes da equação sêxtica, onde x_1, x_2, x_3 são as raízes da primeira equação cúbica e x_4, x_5, x_6 são as raízes da segunda equação cúbica, podemos observar que o termo x^2 é o mesmo em ambas as equações cúbicas, o que significa que a soma das raízes x_1, x_2, x_3 é igual a soma das raízes x_4, x_5, x_6 . Então temos que a soma é $\left(\frac{-a_5}{2}\right)$ como podemos ver abaixo.

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \quad (4.76)$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = -\frac{a_5}{2}. \quad (4.77)$$

Podemos notar que a equação sêxtica tem uma raiz dependente, e é determinada a partir das cinco raízes restantes através da relação na equação (4.76). Uma vez que uma das raízes da equação sêxtica é uma raiz dependente, um dos coeficientes também será um coeficiente dependente, e será determinado pelos coeficientes restantes.

Para derivar essa relação entre os coeficientes, considere a equação (4.65), e substitua os valores de b_0 e c_0 nela, utilizando as equações (4.69) e (4.73) respectivamente.

Obtemos a seguinte expressão contendo apenas os coeficientes da equação (4.55).

$$a_0 = \left(\frac{a_3}{2} + \frac{a_5^3}{16} - \frac{a_4 a_5}{4} \right)^2 - \left(\frac{a_7}{a_6} \right)^2. \quad (4.78)$$

A equação (4.78) é a condição para que os coeficientes satisfaçam, de modo que a equação sêxtica inicial possa ser resolvida pela técnica proposta. Observe que o coeficiente, a_0 , pode ser determinado a partir dos coeficientes utilizando a equação (4.78).

Exemplo 11. *Vamos resolver a equação sêxtica abaixo usando o método proposto.*

$$x^6 - 8x^5 + 32x^4 - 78x^3 + 121x^2 - 110x + 50 = 0.$$

Resolução:

O primeiro passo é verificar se os coeficientes na equação sêxtica acima satisfazem a condição estipulada pela equação (4.78).

Analisando a_0 a partir da equação (4.78), obtemos $a_0 = 50$, notando que a condição é atendida.

Utilizando as equações (4.67), (4.68), (4.69), (4.72) e (4.74), temos que b_2, b_1, b_0, c_1 e c_0 são avaliados como: $b_2 = -4$, $b_1 = 8$, $b_0 = -7$, $c_1 = i$ e $c_0 = i$.

Usando esses valores na equação (4.58), o par de equações obtidas é:

$$x^3 - 4x^2 + (8 + i)x - 7 + i = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + (8 - i)x - 7 - i = 0.$$

As raízes das equações cúbicas acima são determinadas utilizando métodos já estudados, chegando nas raízes $1 + i, 2 + i, 1 - 2i$ e $1 - i, 2 - i, 1 + 2i$ respectivamente. Assim, todas as seis raízes da equação sêxtica são encontradas.

CAPÍTULO 5

Método Único

Observando as equações polinomiais de grau menor do que cinco, notamos que a equação cúbica é resolvida pelo método de Cardano, enquanto que a equação quártica é resolvida usando o método de Ferrari. Podemos perceber que, esses dois métodos adotam abordagens totalmente diferentes. Robert Underwood utiliza um método mais simples do que o método de Cardano para resolver a equação cúbica geral com coeficientes reais, onde o polinômio cúbico é fatorado em um produto de três fatores, e todas as três raízes são calculadas de uma maneira mais simples. Assim como também existem métodos alternativos ao método de Ferrari para resolver a equação quártica.

Iremos apresentar um método único, que podemos utilizar para resolver equações quadráticas, cúbicas e quárticas. O método consiste em decompor a equação geral, em dois polinômios com grau menor, de uma outra forma como veremos abaixo. Mais detalhes sobre o método pode ser encontrado na referência [9].

Seja a equação polinomial geral de grau, n , expressa como

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_jx^j + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (5.1)$$

onde a_j , $j = 0, \dots, 4$, são coeficientes reais da equação (5.1). Nosso objetivo é decompor a equação (5.1) em dois fatores por meio de um método comum ou de uma forma única, sem levar em consideração o grau da equação (5.1).

Dessa forma iremos transformar a equação (5.1) em outra equação polinomial de mesmo grau colocando em uma forma conveniente para ela ser decomposta. Então temos a equação (5.2) na seguinte forma

$$\frac{[V_m(x)]^k - p^k [W_m(x)]^k}{1 - p^k} = 0, \quad (5.2)$$

em que $V_m(x)$ e $W_m(x)$ são polinômios de grau m , sendo que $m < n$, e p é uma incógnita a ser determinada. O inteiro k tem que satisfazer a seguinte relação:

$$k \cdot m = n, \quad (5.3)$$

de modo que a equação (5.2) é de grau n . Observe que o inteiro deve ser sempre maior do que a unidade, para facilitar a decomposição da equação (5.2). Os polinômios $V_m(x)$ e $W_m(x)$ são dados por:

$$\begin{aligned} V_m(x) &= x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_jx^j + \dots + b_1x + b_0 \\ W_m(x) &= x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_jx^j + \dots + c_1x + c_0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que b_j e c_j , $j = 0, \dots, m-1$ são os coeficientes desconhecidos dos polinômios, $V_m(x)$ e $W_m(x)$ respectivamente.

A equação (5.2) pode ser facilmente decomposta em dois fatores, e um dos fatores é dado por:

$$Y_m(x) = \frac{V_m(x) - pW_m(x)}{1 - p}. \quad (5.5)$$

Assim, se conseguirmos escrever a equação (5.2), então podemos decompor a equação (5.1) em dois fatores, e um dos fatores é dado pela equação (5.5).

Para conseguirmos representar a equação (5.2), os n coeficientes correspondentes em ambas as equações devem ser iguais. Porém os coeficientes na equação (5.2) não está escrito de forma explícita, logo temos que expandir e reorganizá-la, conforme mostrado abaixo:

$$x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \dots + d_jx^j + \dots + d_1x + d_0 = 0, \quad (5.6)$$

em que d_j , com $j = 0, \dots, n-1$ são coeficientes obtidos após a expansão da equação (5.2). Agora iremos comparar os coeficientes correspondentes da equação (5.1) e da equação (5.6).

Este processo resulta em n equações e $2m+1$ coeficientes desconhecidos, ou seja, $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ e p como mostrado abaixo:

$$d_j = a_j, \quad (5.7)$$

para $j = 0, \dots, n-1$.

Se o número de termos desconhecidos $2m+1$, não for o número de equações, n , então algum dos coeficientes da equação (5.1) se relacionam entre si, levando para uma solução diferente da solução geral.

Para garantir que o método chegue na solução geral, o número de termos desconhecidos $2m+1$ deve ser igual ao número de equações n se n for ímpar, e igual a $n+1$ quando n for par, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} 2m+1 &= n, & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 2m+1 &= n+1 & \text{para } n \text{ par.} \end{aligned} \quad (5.8)$$

O inteiro m é determinado primeiro usando a equação (5.8), e então k é determinado a partir da equação (5.3), usando os valores de n e m . Observe que quando n é par, o

número de incógnitas é uma a mais do que o número de equações, nesse caso, deverá ser atribuída um valor conveniente para essa incógnita, de modo que todas elas possam ser determinadas pela resolução das n equações dadas em (5.7).

Determinando todas essas incógnitas, podemos representar a equação (5.1) como uma equação escrita na forma da equação (5.2). Assim, a equação pode ser decomposta em dois fatores, com um dos fatores sendo $Y_m(x)$ como mostrado na equação (5.5). Este fator, $Y_m(x)$ quando é igualado a zero resulta em uma equação de grau m , conforme mostrado abaixo:

$$x^m + \dots + \frac{b_j - pc_j}{1 - p} x^j + \dots + \frac{b_1 - pc_1}{1 - p} x + \frac{b_0 - pc_0}{1 - p} = 0. \quad (5.9)$$

Resolvendo essa equação de grau m , obtemos m raízes da equação dada (5.1). Da mesma forma, o fator restante da equação (5.2) é igualado a zero para obter uma equação de grau $n - m$. Resolvendo, obtemos as raízes restantes $n - m$. Assim todas as n raízes são determinadas pela fatoração da equação em fatores lineares n , o que significa que o polinômio possa ser avaliado no plano complexo $\mathbb{C}$. Então vimos que o método estudado acima pode ser usado para resolver equações quadráticas, cúbicas e quárticas.

5.1 A Equação Quadrática

Iremos aplicar o método único para obter as raízes da equação quadrática.

Seja a equação quadrática

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (5.10)$$

em que a_0, a_1 são coeficientes reais da equação e são diferentes de zero. Aplicando o método único na equação quadrática acima, tal que $n = 2$, obtemos os valores de

$m = 1$ e $k = 2$. A equação quadrática é construída conforme mostrado na equação (5.2), ficando na seguinte forma:

$$\frac{[V_1(x)]^2 - p^2 [W_1(x)]^2}{1 - p^2} = 0, \quad (5.11)$$

onde $V_1(x)$ e W_1 são escritos da seguinte forma usando a equação (5.4)

$$\begin{aligned} V_1(x) &= x + b_0 \\ W_1(x) &= x + c_0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

com b_0, c_0 , coeficientes com valores desconhecidos.

Substituindo as expressões por $V_1(x)$ e $W_1(x)$, conforme as equações (5.12) e (5.11), obtemos a equação quadrática construída na seguinte forma:

$$\frac{(x + b_0)^2 - p^2(x + c_0)^2}{1 - p^2} = 0. \quad (5.13)$$

Expandindo e reorganizando a equação (5.13) em potências decrescentes em x , temos:

$$x^2 + \frac{2(b_0 - c_0 p^2)}{1 - p^2}x + \frac{b_0^2 - c_0^2 p^2}{1 - p^2} = 0. \quad (5.14)$$

Igualando os coeficientes da equação quadrática (5.10) com os da equação quadrática (5.14), temos as duas equações a seguir,

$$\frac{2(b_0 - c_0 p^2)}{1 - p^2} = a_1 \quad (5.15)$$

$$\frac{b_0^2 - c_0^2 p^2}{1 - p^2} = a_0. \quad (5.16)$$

Note que existem três incógnitas (b_0, c_0, p) , enquanto que há apenas duas equações para resolver. Portanto, iremos atribuir um valor conveniente para um das incógnitas. Vamos tornar $c_0 = 0$, e resolver as equações (5.15) e (5.16), para descobrir o valor de

b_0 e p em função de a_0 e a_1 . Os valores de b_0 e p são obtidos como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{2a_0}{a_1} \\ p &= \frac{(a_1^2 - 4a_0)^{\frac{1}{2}}}{a_1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Determinado b_0 e p , a equação quadrática (5.10) pode ser representado na forma da equação (5.13), e, portanto pode ser fatorada em dois fatores como mostrado abaixo:

$$\left(\frac{x + b_0 - px}{1 - p} \right) \cdot \left(\frac{x + b_0 + px}{1 + p} \right) = 0. \quad (5.18)$$

Igualando cada um dos fatores a zero da equação acima, obtemos duas equações lineares em x , como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} x + \frac{b_0}{1 - p} &= 0 \\ x + \frac{b_0}{1 + p} &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de b_0 e p da equação (5.17) nas duas equações acima e reorganizando temos as duas raízes x_1 e x_2 da equação quadrática

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-a_1 - (a_1^2 - 4a_0)^{\frac{1}{2}}}{2} \\ x_2 &= \frac{-a_1 + (a_1^2 - 4a_0)^{\frac{1}{2}}}{2}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

que são expressões bem conhecidas para determinar as raízes da equação quadrática geral.

5.2 Equação Cúbica

Iremos analisar o método único para a equação cúbica.

Seja a equação

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (5.20)$$

em que a_0, a_1 e a_2 são coeficientes reais e independentes. Sem perda de generalidade iremos assumir que $a_2 \neq 0$, caso contrário, se $a_2 = 0$, substituiremos x por $x + r$ na equação (5.20) com $r \neq 0$, para ter uma equação cúbica cujo termo $a_2 \neq 0$.

Então, utilizando o método para o caso da equação cúbica, temos $n = 3$, e os inteiros m e k são encontrados utilizando as expressões (5.8) e (5.3) respectivamente, chegando em $m = 1$ e $k = 3$.

A equação cúbica é expressa então na forma da equação (5.2),

$$\frac{[V_1(x)]^3 - p^3 [W_1(x)]^3}{1 - p^3} = 0, \quad (5.21)$$

onde os polinômios $V_1(x)$ e $W_1(x)$, são dados por:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= x + b_0 \\ W_1(x) &= x + c_0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde b_0, c_0 e p são termos desconhecidos a serem encontrados.

Utilizando as equações (5.21) e (5.22), conseguimos expressar a equação cúbica como

$$\frac{(x + b_0)^3 - p^3(x + c_0)^3}{1 - p^3} = 0. \quad (5.23)$$

Expandindo e reorganizando a equação acima em potências decrescentes de x , temos:

$$x^3 + \frac{3(b_0 - c_0 p^3)}{1 - p^3} x^2 + \frac{3(b_0^2 - c_0^2 p^3)}{1 - p^3} x + \frac{(b_0^3 - c_0^3 p^3)}{1 - p^3} = 0. \quad (5.24)$$

Como foi escrito no método único, a equação cúbica (5.20) deve ser representada na forma da equação (5.23) para que ela seja decomposta. Para isso, igualamos os coe-

ficientes correspondentes das equações (5.20) e (5.24), resultando nas equações abaixo:

$$\frac{3(b_0 - c_0 p^3)}{1 - p^3} = a_2 \quad (5.25)$$

$$\frac{3(b_0^2 - c_0^2 p^3)}{1 - p^3} = a_1 \quad (5.26)$$

$$\frac{(b_0^3 - c_0^3 p^3)}{1 - p^3} = a_0. \quad (5.27)$$

Para determinar o valor das incógnitas iremos dividir as equações (5.26) e (5.27) pela equação (5.25) para obter as seguintes expressões:

$$\frac{b_0^2 - c_0^2 p^3}{b_0 - c_0 p^3} = \frac{a_1}{a_2} \quad (5.28)$$

$$\frac{b_0^3 - c_0^3 p^3}{b_0 - c_0 p^3} = \frac{3a_0}{a_2}. \quad (5.29)$$

A equação (5.25) é reorganizada para obter uma expressão para p^3 como mostrado abaixo:

$$p^3 = \frac{a_2 - 3b_0}{a_2 - 3c_0}. \quad (5.30)$$

Utilizando a equação (5.30) eliminamos p^3 de (5.28), e depois de algumas manipulações algébricas temos a expressão

$$(b_0 - c_0) [a_1 + 3b_0 c_0 - a_2(b_0 + c_0)] = 0. \quad (5.31)$$

Podemos perceber que a equação acima tem dois fatores. Quando o fator $(b_0 - c_0)$ é igualado a zero, temos $b_0 = c_0$, e esta condição transforma a equação (5.23) em uma equação polinomial cúbica na seguinte forma:

$$(x + c_0)^3 = 0.$$

Quando a equação cúbica acima é igualada com a equação cúbica (5.20), os coeficientes, a_0, a_1 e a_2 , tornam-se independentes entre si, sendo então um caso especial, que é o

cubo de uma equação polinomial linear. Porém como estamos buscando a solução geral da equação cúbica, iremos considerar o segundo fator em (5.31); e depois de igualar esse fator a zero, temos a seguinte relação entre b_0 e c_0 como abaixo:

$$a_1 + 3b_0c_0 - a_2(b_0 + c_0) = 0. \quad (5.32)$$

Utilizamos (5.30) para eliminar p^3 da equação (5.29), e da mesma forma utilizando algumas manipulações algébricas temos a seguinte expressão com dois fatores:

$$(b_0 - c_0) [3a_0 + 3b_0c_0(b_0 + c_0) - a_2(b_0^2 + b_0c_0 + c_0^2)] = 0. \quad (5.33)$$

Como no caso anterior iremos igualar a zero o segundo fator e com algumas manipulações convenientes obtemos

$$3a_0 + a_2b_0c_0 + 3b_0c_0(b_0 + c_0) - a_2(b_0 + c_0)^2 = 0. \quad (5.34)$$

Como as incógnitas b_0 e c_0 aparecem juntas como soma e produto nas equações (5.32) e (5.34), iremos definir f_1 e f_2 da seguinte forma:

$$f_1 = b_0 + c_0 \quad (5.35)$$

$$f_2 = b_0c_0. \quad (5.36)$$

Reescrevendo as equações (5.32) e (5.34) em função de f_1 e f_2 , temos

$$a_1 + 3f_2 - a_2f_1 = 0 \quad (5.37)$$

$$3a_0 + a_2f_2 + 3f_1f_2 - a_2f_1^2 = 0. \quad (5.38)$$

Ao resolver as equações (5.37) e (5.38), f_1 e f_2 são determinados como:

$$f_1 = \frac{a_1a_2 - 9a_0}{a_2^2 - 3a_1} \quad (5.39)$$

$$f_2 = \frac{a_1^2 - 3a_0a_2}{a_2^2 - 3a_1}. \quad (5.40)$$

Caso o termo $(a_2^2 - 3a_1)$ em (5.39) e (5.40) for zero, então a equação cúbica (5.20) é reduzida ao caso especial como mostrado abaixo:

$$\left(x + \frac{a_2}{3}\right) = \left(\frac{a_2}{3}\right)^3 - a_0,$$

cujas soluções podem ser facilmente encontradas.

Observe que das equações (5.39) e (5.40), que a soma f_1 e o produto f_2 de b_0 e c_0 são determinados, portanto, temos que b_0 e c_0 são raízes da equação quadrática abaixo:

$$y^2 - f_1 y + f_2 = 0.$$

Então temos b_0 e c_0 determinados como

$$b_0 = \frac{f_1 + (f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (5.41)$$

$$c_0 = \frac{f_1 - (f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2}. \quad (5.42)$$

Assim conseguimos determinar o único valor ainda desconhecido o valor de p conforme vemos abaixo:

$$p = \left[\frac{2a_2 - 3f_1 - 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2a_2 - 3f_1 + 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (5.43)$$

Observe que a equação cúbica construída (5.23) pode ser fatorada como mostrado abaixo:

$$\frac{(x + b_0) - p(x + c_0)}{1 - p} \cdot \frac{(x + b_0)^2 + p(x + b_0) + p^2(x + c_0)^2}{1 + p + p^2} = 0. \quad (5.44)$$

Uma vez que somos capazes de representar a equação cúbica (5.20) na forma de (5.23) determinando todas as incógnitas, decompondo como mostrado em (5.44). Igualando cada um dos fatores da equação (5.44) a zero, temos duas equações como vemos abaixo:

$$(x + b_0) - p(x + c_0) = 0 \quad (5.45)$$

$$(x + b_0)^2 + p(x + b_0)(x + c_0) + p^2(x + c_0)^2 = 0. \quad (5.46)$$

A equação (5.45) é uma equação linear em x , da qual temos uma raiz da equação cúbica dada; enquanto que a equação (5.46) é uma equação quadrática, que fornece as outras duas raízes. Assim, na resolução (5.45), obtemos a raiz x_1 como vemos abaixo:

$$x_1 = \frac{pc_0 - b_0}{1 - p}. \quad (5.47)$$

As duas raízes restantes, x_2 e x_3 da equação cúbica são obtidas resolvendo a equação quadrática (5.46) como mostrado:

$$x_2 = \frac{-(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1) + \sqrt{(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1)^2 - 4(1 + p + p^2)(b_0^2 + p^2c_0^2 + pf_2)}}{2 + 2p + 2p^2} \quad (5.48)$$

$$x_3 = \frac{-(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1) - \sqrt{(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1)^2 - 4(1 + p + p^2)(b_0^2 + p^2c_0^2 + pf_2)}}{2 + 2p + 2p^2}. \quad (5.49)$$

Dessa forma determinamos todas as três raízes da equação cúbica geral como vemos nas equações (5.48) e (5.49) utilizando o método único.

5.3 A Equação Quártica

Considere a seguinte equação polinomial de grau quatro em x , conforme abaixo:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (5.50)$$

em que a_0, a_1, a_2 e a_3 são coeficientes reais e independentes da equação.

Iremos decompor a equação acima, utilizando o método único, começando determinando os valores de m e k utilizando as equações (5.8) e (5.3) chegamos em $m = 2$ e $k = 2$ respectivamente. A seguir iremos construir a equação na forma colocada em (5.2), para o caso de $n = 4, m = 2$ e $k = 2$, conforme podemos ver abaixo:

$$\frac{[V_2(x)]^2 - p^2 [W_2(x)]^2}{1 - p^2} = 0, \quad (5.51)$$

em que os polinômios $V_2(x)$ e $W_2(x)$, são dados por:

$$\begin{aligned} V_2(x) &= x^2 + b_1x + b_0 \\ W_2(x) &= x^2 + c_1x + c_0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

em que b_0, b_1, c_0 e c_1 são os coeficientes dos polinômios $V_2(x)$ e $W_2(x)$, respectivamente.

Substituindo as expressões de $V_2(x)$ e $W_2(x)$ em (5.51), temos:

$$\frac{(x^2 + b_1x + b_0)^2 - p^2(x^2 + c_1x + c_0)^2}{1 - p^2} = 0. \quad (5.53)$$

Expandindo e reorganizando a equação acima temos:

$$x^4 + \frac{2(b_1 - c_1p^2)}{1 - p^2}x^3 + \frac{b_1^2 + 2b_0 - (c_1^2 + 2c_0)p^2}{1 - p^2}x^2 + \frac{2(b_0b_1 - c_0c_1p^2)}{1 - p^2}x + \frac{(b_0^2 - c_0^2p^2)}{1 - p^2} = 0. \quad (5.54)$$

Igualando os coeficientes correspondentes da equação (5.50) com os coeficientes da equação construída (5.54) resulta nas quatro equações abaixo:

$$\frac{2(b_1 - c_1p^2)}{1 - p^2} = a_3 \quad (5.55)$$

$$\frac{b_1^2 + 2b_0 - (c_1^2 + 2c_0)p^2}{1 - p^2} = a_2 \quad (5.56)$$

$$\frac{2(b_0b_1 - c_0c_1p^2)}{1 - p^2} = a_1 \quad (5.57)$$

$$\frac{(b_0^2 - c_0^2p^2)}{1 - p^2} = a_0. \quad (5.58)$$

Podemos perceber que temos cinco incógnitas b_0, b_1, c_0, c_1 e p mas apenas quatro equações para resolver, iremos então atribuir um valor conveniente para uma das incógnitas, para que todas as outras possam ser resolvidas. Vamos então colocar $c_1 = 0$, e utilizar para modificar as equações (5.55), (5.56) e (5.57), como podemos ver abaixo:

$$\frac{2b_1}{1 - p^2} = a_3 \quad (5.59)$$

$$\frac{b_1^2 + 2b_0 - 2c_0p^2}{1 - p^2} = a_2 \quad (5.60)$$

$$\frac{2b_0b_1}{1 - p^2} = a_1. \quad (5.61)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_3 \neq 0$. Caso contrário $b_1 = 0$ e, conseqüentemente $a_1 = 0$. Neste caso, a equação (5.50) é um quadrático em x^2 e pode ser resolvida utilizando o método utilizado na equação do segundo grau. Agora vamos determinar o valor das quatro incógnitas, b_0, b_1, c_0 e p , usando as quatro equações, (5.58), (5.59), (5.60) e (5.61). Dividindo as equações, (5.61), (5.58) e (5.60) pela equação (5.59), obtemos respectivamente as seguintes expressões:

$$b_0 = \frac{a_1}{a_3} \quad (5.62)$$

$$\frac{b_0^2 - c_0^2 p^2}{2b_1} = \frac{a_0}{a_3} \quad (5.63)$$

$$\frac{b_1^2 + 2b_0 - 2c_0 p^2}{2b_1} = \frac{a_2}{a_3}. \quad (5.64)$$

Reorganizando a equação (5.59), obtemos a seguinte expressão para p^2 :

$$p^2 = \frac{a_3 - 2b_1}{a_3}. \quad (5.65)$$

Da equação (5.62), notamos que b_0 é avaliado, e de (5.65) notamos que p^2 é expresso em termos de b_1 . Eliminando p^2 das equações (5.63) e (5.64) e utilizando a equação (5.65), obtemos as seguintes expressões em b_1 e c_0 :

$$a_3 c_0^2 (2b_1 - a_3) = 2a_0 a_3 b_1 - a_1^2 \quad (5.66)$$

$$2c_0 (2b_1 - a_3) = 2a_2 b_1 - 2a_1 - a_3 b_1^2. \quad (5.67)$$

Observe que ambas as equações, (5.66) e (5.67), contêm o fator $c_0(2b_1 - a_3)$ no lado esquerdo. Portanto, dividindo a equação (5.66) pela equação (5.67) resulta na eliminação deste fator, e após algumas reorganizações podemos chegar em:

$$c_0 = \frac{2(2a_0 a_3 b_1 - a_1^2)}{a_3(2a_2 b_1 - 2a_1 - a_3 b_1^2)}. \quad (5.68)$$

Note que estamos admitindo que $c_0(2b_1 - a_3) \neq 0$. Se $c_0(2b_1 - a_3) = 0$ então $c_0 = 0$ e nesse caso $W_2(x)$ poderia ser fatorado mais facilmente em (5.52), ou $(2b_1 - a_3) = 0$

nesse caso $p = 0$ na equação (5.59), e, portanto, a equação (5.50) poderia ser reescrita como $[V_2(x)]^2 = 0$ em (5.51) e resolver usando o método para a equação quadrática.

Eliminando c_0 das equações, (5.67) e (5.68), para obter a seguinte expressão em termos de b_1 :

$$a_3^3 b_1^4 - 4a_2 a_3^2 b_1^3 + 4(a_1 a_3^2 + a_2^2 a_3 - 4a_0 a_3) b_1^2 + 8(a_0 a_3^2 + a_1^2 - a_1 a_2 a_3) b_1 = 0. \quad (5.69)$$

Note que na equação acima, b_1 surge como um fator, no entanto, $b_1 = 0$ não faz parte da solução para o método que estamos utilizando, uma vez que esse valor torna $p^2 = 1$ como podemos ver na equação (5.65), e impossibilitando de resolver as equações de (5.53) à (5.58). Portanto, fatorando b_1 da equação (5.69) resulta em uma equação cúbica em b_1 , como mostrado abaixo:

$$b_1^3 - \frac{4a_2}{a_3} b_1^2 + \frac{4(a_1 a_3 + a_2^2 - 4a_0)}{a_3^2} b_1 + \frac{8(a_0 a_3^2 + a_1^2 - a_1 a_2 a_3)}{a_3^3} = 0. \quad (5.70)$$

Resolvendo a equação cúbica acima, seja pelo método de Cardano ou pelo método único, conseguimos determinar b_1 . As demais incógnitas, p^2 e c_0 são determinadas a partir da resolução das equações (5.65) e (5.68) respectivamente.

Após determinar todas as incógnitas, podemos representar a equação quártica (5.50) na forma da equação construída (5.53). Portanto, podemos decompor a equação quártica dada em dois fatores como:

$$\frac{(x^2 + b_1 x + b_0) - p(x^2 + c_0)}{1 - p} \cdot \frac{(x^2 + b_1 x + b_0) + p(x^2 + c_0)}{1 + p} = 0. \quad (5.71)$$

Igualando cada fator em (5.71) a zero, obtemos duas equações quadráticas como podemos ver abaixo:

$$x^2 + \frac{b_1}{1 - p} x + \frac{b_0 - c_0 p}{1 - p} = 0 \quad (5.72)$$

$$x^2 + \frac{b_1}{1 + p} x + \frac{b_0 + c_0 p}{1 + p} = 0. \quad (5.73)$$

Resolvendo as equações quadráticas (5.72) e (5.73), podemos chegar nas quatro raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 da equação quártica (5.50). A equação quadrática (5.72) fornece duas raízes x_1 e x_2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4(b_0 - c_0p)(1 - p)}}{2(1 - p)} \\ x_2 &= \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4(b_0 - c_0p)(1 - p)}}{2(1 - p)}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

As outras duas raízes, x_3 e x_4 , são obtidas pela resolução da equação quadrática (5.73) como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4(b_0 + c_0p)(1 + p)}}{2(1 + p)} \\ x_4 &= \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4(b_0 + c_0p)(1 + p)}}{2(1 + p)}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Sendo assim resolvemos a equação quártica geral, utilizando o método único.

CAPÍTULO 6

Limitantes para os zeros de um polinômio

Como é de conhecimento de todos, à medida que o grau de um polinômio aumenta, fica mais difícil determinar algebricamente os seus zeros, como já mencionamos na introdução deste trabalho. Portanto, considerando um polinômio de grau n qualquer, resultados que limitam as regiões do plano complexo onde os seus zeros estão localizados são de grande importância na Matemática. Assim, a seguir apresentaremos alguns resultados que visam determinar um refinamento da região do plano complexo onde os zeros de um polinômio estão localizados, levando em consideração os seus coeficientes. Convém destacar que existem inúmeros resultados a respeito desse assunto, porém aqui apresentaremos apenas quatro, com o objetivo de ilustrar a utilidade e eficiência no que se refere ao refinamento da região do plano complexo. As principais referências utilizadas para elaborar o texto que compõe esse capítulo são [12] e [13].

Teorema 3. *Sejam $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$, um polinômio com coeficientes complexos tal que $a_0, a_n \neq 0$ e $M = \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$ e $M' = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$. Então, todos os zeros de $P(z)$ satisfazem*

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}.$$

Demonstração. Considere $|z| > 1$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| \\ &= |a_nz^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \cdots - a_1z - a_0)| \\ &\geq |a_nz^n| - |-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \cdots - a_1z - a_0| \\ &= |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1z + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + |a_{n-2}||z|^{n-2} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \\ &\geq |a_n||z|^n - M(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1) \\ &= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^n |z|^{-k} \right) \\ &> |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{-k} \right). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Observe que a série acima é parecida com a série geométrica, com a diferença apenas no índice inicial em que k varia de 0 até ∞ , e como $\frac{1}{|z|} < 1$, a série converge, ou seja:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|z|} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} = \frac{|z|}{|z| - 1}.$$

Voltando em (6.1), tem-se:

$$\begin{aligned} |P(z)| &> |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{|z|}{|z| - 1} - 1 \right) \right] \\ &= |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{1}{|z| - 1} \right) \right] \\ &= |a_n||z|^n \left[\frac{|z| - \left(1 + \frac{M}{|a_n|} \right)}{|z| - 1} \right]. \end{aligned}$$

Perceba que se $|z| \geq 1 + \frac{M}{|a_n|}$ segue que $P(z) > 0$, isto é, $P(z) \neq 0$ e portanto os zeros de $P(z)$ estão na região $|z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}$.

Para mostrar que $\frac{|a_0|}{|a_0|+M'} < |z|$, considere

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \cdots + a_0z^n.$$

Ao utilizar o resultado obtido anteriormente observa-se que os zeros do polinômio $Q(z)$ localizam-se em $|z| < 1 + \frac{M'}{|a_n|}$. Seja z_k um zero de $Q(z)$. Então $\frac{1}{z_k}$ é zero de $P(z)$. Temos que $\frac{1}{|z_k|} < 1 + \frac{M'}{|a_0|} \Rightarrow |z_k| > \frac{|a_0|}{|a_0|+M'}$.

Portanto, todos os zeros do polinômio $P(z)$ estão localizados na região anelar

$$R_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|a_0|}{|a_0|+M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|} \right\}.$$

□

Exemplo 12. Seja $P(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z - 2$. Pelo Teorema 3 segue que a região R_1 é dada por $R_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 3\}$. Note que todos os zeros de $P(z)$ encontram-se nesta região, sendo eles $z_0 = 1 - \sqrt{3}$ (representado pelo ponto B), $z_1 = 1 + \sqrt{3}$ (representado pelo ponto A), $z_2 = i$ (representado pelo ponto C) e $z_3 = -i$ (representado pelo ponto D).

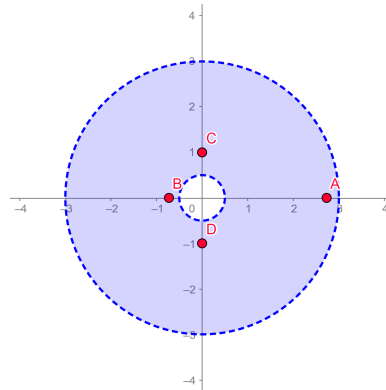


Figura 6.1: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

Teorema 4. *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ um polinômio de grau n tal que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$ e $a_0, a_n \neq 0$. Então, todos os zeros de $P(z)$ estão na região determinada por*

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Demonstração. Seja $R(z) = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)$, onde

$$\begin{aligned} Q(z) &= a_n z^{n+1} + (1-z)P(z) \\ &= a_n z^{n+1} + (1-z)(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^k. \end{aligned}$$

Então, para $|z| \leq 1$,

$$|R(z)| = \left| z^n Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \left| a_0 z^n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^{n-k} \right| \leq |a_0||z|^n + \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^{n-k} \right|.$$

Como $|z| \leq 1$, temos que

$$|R(z)| \leq |a_0| + \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \right|.$$

Utilizando o fato de $a_{i-1} \leq a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, segue que

$$|R(z)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = |a_0| + a_n - a_0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |z^n| \left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| &\leq |a_0| + a_n - a_0 \\ \left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| &\leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|z|^n}. \end{aligned}$$

Substituindo z por $\frac{1}{z}$, obtemos

$$|Q(z)| \leq (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n, \quad |z| \geq 1.$$

Para $|z| \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
 |(z-1)P(z)| &= |a_n z^{n+1} - Q(z)| \\
 &\geq |a_n||z^{n+1}| - |Q(z)| \\
 &\geq |a_n||z^{n+1}| - (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n \\
 &= |z|^n[|a_n||z| - |a_0| - a_n + a_0] \\
 &= |z|^n|a_n| \left[|z| - \left(\frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Como $a_{i-1} \leq a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, então

$$a_n - a_0 = |a_n - a_0| \geq |a_n| - |a_0|,$$

e assim

$$r = \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \geq 1.$$

Observe que se $|z| > r$, então $|(z-1)P(z)| > 0$. Portanto, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > r$. Ou seja, todos os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq r$. $\square$

Exemplo 13. Seja $P(z) = 9z^5 + 7z^4 - 6z^3 + 2z^2 + z - 1$. Pelo Teorema 4 temos que os zeros de $P(z)$ estão localizados no círculo $|z| \leq \frac{11}{9}$.

Os zeros de $P(z)$ são $z_0 = -0.59 - 0.49i$ (representado pelo ponto A), $z_1 = -0.59 + 0.49i$ (representado pelo ponto B), $z_2 = 0.02 - 0.72i$ (representado pelo ponto C), $z_3 = 0.02 + 0.72i$ (representado pelo ponto D) e $z_4 = 0.34$ (representado pelo ponto E).

Podemos verificar na figura (6.2):

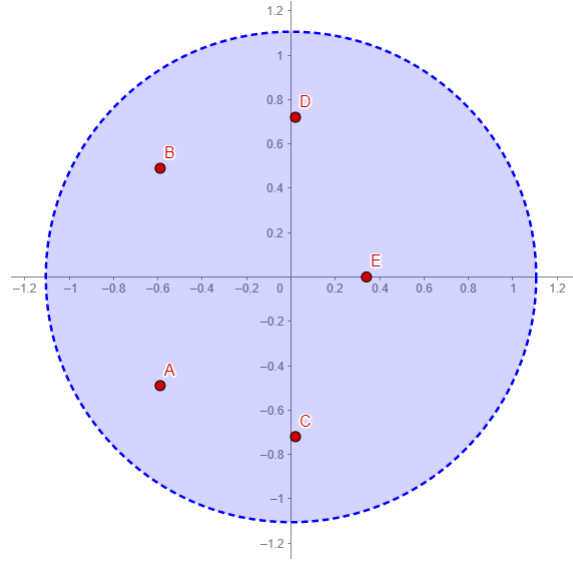


Figura 6.2: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 9z^5 + 7z^4 - 6z^3 + 2z^2 + z - 1$.

Iremos apresentar a seguir o Teorema de Eneström-Kakeya, que apresenta o estudo de um resultado clássico sobre a distribuição de zeros de polinômios num determinado círculo.

Teorema 5. *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ um polinômio cujo coeficientes reais $a_i, i = 0, \dots, n$, satisfazem $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0 \geq 0$. Então $P(z)$ não possui zeros em $|z| > 1$, ou seja, os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.*

Demonstração. Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ um polinômio de grau n , onde $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0 \geq 0$. Temos pelo teorema anterior, que todos os zeros de $P(z)$ estão localizados no disco

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Como $a_0 > 0$ temos que

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + a_0}{a_n} \Rightarrow |z| \leq 1.$$

□

Exemplo 14. Seja $P(z) = z^5 + 0.8z^4 + 0.6z^3 + 0.4z^2 + 0.2z + 0.1$. Pelo Teorema 5 temos que os zeros de $P(z)$ estão localizados no círculo $|z| \leq 1$. Os zeros de $P(z)$ são $z_0 = -0.65$ (representado pelo ponto A), $z_1 = -0.30 - 0.53i$ (representado pelo ponto B), $z_2 = -0.30 + 0.53i$ (representado pelo ponto C), $z_3 = 0.23 + 0.59i$ (representado pelo ponto D) e $z_4 = 0.23 - 0.59i$ (representado pelo ponto E). Podemos verificar na figura (6.3):

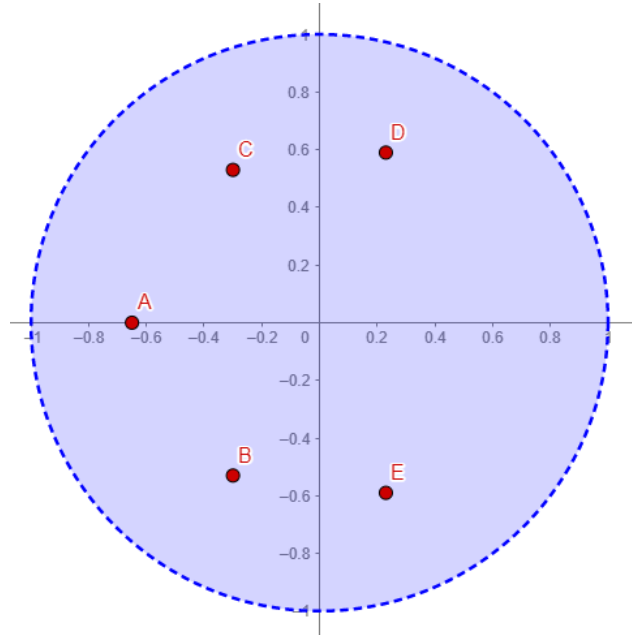


Figura 6.3: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + 0.8z^4 + 0.6z^3 + 0.4z^2 + 0.2z + 0.1$.

A seguir será apresentado mais um resultado que exhibe uma região anelar, contendo todos os zeros de um determinado polinômio. A prova deste Teorema pode ser encontrado em [1].

Teorema 6. Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n tal que $n \geq 1$ e $a_k > 0$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Considere $\alpha = \min_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\}$ e $\beta = \max_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\}$. Todos os zeros de

$P(z)$ estão na região anelar

$$R_2 = \{z \in \mathbb{C} | \alpha \leq |z| \leq \beta\}.$$

Exemplo 15. Seja $P(z) = 9z^5 + 7z^4 - 6z^3 + 2z^2 + z - 1$. Pelo Teorema 6 temos que

$$\frac{a_0}{a_1} = 1, \quad \frac{a_1}{a_2} = 0.5, \quad \frac{a_2}{a_3} = 0.33, \quad \frac{a_3}{a_4} = 0.85, \quad \frac{a_4}{a_5} = 0.77.$$

Logo, $\alpha = \min_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} = 0.33$ e $\beta = \max_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} = 1$. Segue pelo Teorema 6, que os zeros de $P(z)$ encontram-se na região anelar $R_2 = \{z \in \mathbb{C} | 0.33 \leq |z| \leq 1\}$.

De fato, os zeros de $P(z)$ são $z_0 = -0.59 - 0.49i$ (representado pelo ponto A), $z_1 = -0.59 + 0.49i$ (representado pelo ponto B), $z_2 = 0.02 - 0.72i$ (representado pelo ponto C), $z_3 = 0.02 + 0.72i$ (representado pelo ponto D) e $z_4 = 0.34$ (representado pelo ponto E). Podemos observar a figura (6.4) para compreender melhor.

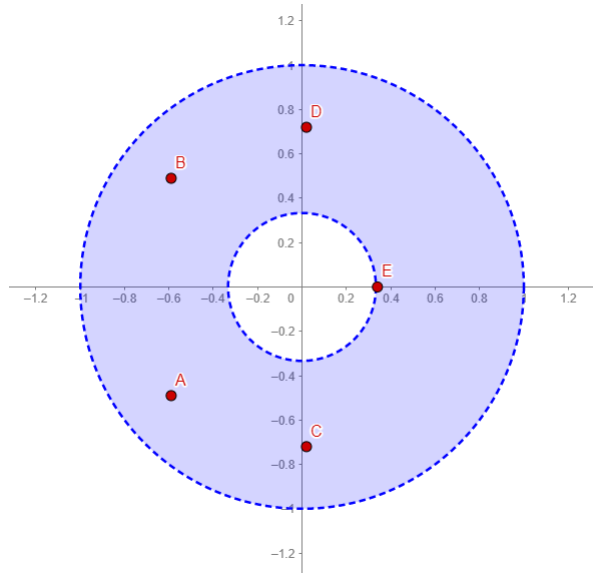


Figura 6.4: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 9z^5 + 7z^4 - 6z^3 + 2z^2 + z - 1$.

CAPÍTULO 7

Considerações Finais

Neste trabalho realizamos um estudo sobre polinômios, com foco em resultados para determinar os zeros de polinômios de graus dois, três, quatro, cinco e seis. Além disso, o fato da insolubilidade, para o caso geral, em termos de radicais no caso das equações polinomiais de grau maior ou igual a cinco, nos motivou a estudar resultados clássicos que determinam regiões do plano complexo onde os zeros de polinômio de grau n estão localizados. Como já mencionamos anteriormente, à medida que o grau de um polinômio aumenta, determinar algebricamente seus zeros é uma tarefa difícil (e impossível para polinômios de grau maior ou igual a cinco) e então os resultados apresentados no capítulo anterior tornam-se úteis para o refinamento da região onde os zeros estão localizados.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Anderson, E.B. Saff, R.S. Varga. On the Eneström-Kekeya theorem and its sharpness. *Linear Algebra and Its Applications*. Elsevier, vol.28, 5–16, 1979.
- [2] G.G. Bastos. *Resolução de Equações Algébricas por Radicais*. UFC, 2013.
- [3] J.E. Carraschi. *Equações Polinomiais*. Universidade de São Paulo, 2014.
- [4] K.M. Carvalho. *A Álgebra das Equações Polinomiais e sua Solubilidade*. [sn], 2015.
- [5] M.C. Emory. Further Researches in the Theory of Quintic Equations. *Americal Journal of mathematics*, vol-20, No.2, 157-192, 1898.
- [6] A. Hefez, M.L.T Villela. *Polinômios e Equações Algébricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [7] R.G. Kulkarni. A Versatile Technique for Solving Quintic Equations. *Mathematics and Computer Education*, vol.40-3, 205, 2006.
- [8] R.G. Kulkarni. Solving Sextic Equations. *Atlantic Electronic Journal of Mathematics*, vol.3-1, 56–60, 2008.
- [9] R.G. Kulkarni. Unified Method for Solving General Polynomial Equations of Degree Less Than Five. *Alabama Journal of Mathematics*, vol.30-1, 1–18, 2006.

- [10] E.L. Lima. *Análise Real*. Impa, 2004.
- [11] P.S. Loh. A Simple Proof of the Quadratic Formula. Arxiv Preprint ArXiv:1910.06709, 2019.
- [12] M. Marden. *Geometry of Polynomials*. American Mathematical Soc., 1949.
- [13] G.V. Milovanovic, D.S.Mitrinovic, Th.M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific, 1994.
- [14] R.S. Pontes. *Equações Polinomiais: Soluções Algébricas, Geométricas e com o Auxílio de Derivadas*. Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [15] L.R. Refatti, B. Eleni. Aspectos Históricos e Geométricos da Equação Quadrática. *Disciplinarum Scientia | Naturais e Tecnológicas*, vol.6-1, 79–95, 2005.
- [16] R. Rulda. *Explanation of Method to Particular Quintic Equation*, 2016.
- [17] J.L. Schuvaab. *Resolução de Equações Algébricas até Quarto Grau: Uma Abordagem Histórica*, 2013.