

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá

1998



UNESP UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus de Guaratinguetá

ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS ENTRE SUPERFÍCIES OSCILANTES -
UMA ANÁLISE DO PONTO DE VISTA DA TRIBOLOGIA

ANA MARIA SILVEIRA DE AQUINO

TRABALHO DE GRADUAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
BACHAREL EM ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO DE TRANSMISSÃO E CONVERSÃO DE ENERGIA

APROVADA POR SUA COMISSÃO EXAMINADORA EM 10/05/2006

***"Escoamentos em Meios
Porosos entre Superfícies
Oscilantes - Uma Análise do
Ponto de Vista da Tribologia"***

ANA MARIA SILVEIRA DE AQUINO

85



“ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS ENTRE SUPERFÍCIES OSCILANTES -
UMA ANÁLISE DO PONTO DE VISTA DA TRIBOLOGIA”

ANA MARIA SILVEIRA DE AQUINO


ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA”

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: TRANSMISSÃO E CONVERSÃO DE ENERGIA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Maurício Araújo Zanardi
Coordenador


BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. LUIZ ROBERTO CARROCCI
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. LEON ROQUE SINAY
Co-Orientador / INPE


Prof. Dr. DEMÉTRIO BASTOS NETTO
INPE


Prof. Dr. JOÃO ANDRADE DE CARVALHO JÚNIOR
Unesp-Feg


Prof. Dr. JOSÉ LUZ SILVEIRA
Unesp/Feg

CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO

Março de 1998

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA

ANA MARIA SILVEIRA DE AQUINO

**ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS
ENTRE SUPERFÍCIES OSCILANTES -
UMA ANÁLISE DO PONTO DE VISTA
DA TRIBOLOGIA**

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá da UNESP, para
a obtenção do título de Doutor em Engenharia
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Luiz R. Carrocci

Co-orientador: Prof. Dr. Leon Sinay

360

360

GUARATINGUETÁ

1998



T.532.546(043)
A657e



DADOS CURRICULARES

ANA MARIA SILVEIRA DE AQUINO

NASCIMENTO 24.02.1951 - SÃO PAULO / SP

FILIAÇÃO Geraldo de Alencar Aquino

Eneida Silveira de Aquino

1971/1975 Curso de Graduação

Instituto de Física - UFRJ

1975/1979 Curso de Pós-Graduação em Física, nível de
Mestrado, no Centro Brasileiro de Pesquisas
Físicas.

1992/1998 Curso de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica, nível de Doutorado na Faculdade
de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
da UNESP.

AGRADECIMENTOS

Aos queridos Sérgio e Adriana, não me esqueço agradecido.

Aos meus amigos Prof. Luiz Roberto Carracci e Prof. Paulo Zingales pelo apoio e incentivo, especialmente a realização de seu trabalho.

Ao Diretor da Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais Marco Nogueira Barbosa e ao Chefe de Laboratório de Plasmas Roberto Alberto Vieira Dias, os quais tiveram paciência e compreensão com o período no Laboratório Associado de Plasmas, Foz de Iguaçu.

Ao Fianco do Departamento Física e Mecânica do Laboratório Associado de Combustão e Propulsão.

Ao Infância Maria Aparecida Martins e Maria Lygia Costa Santos Moura de Silva, que sempre me ajudaram com carinho e incentivo.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica e aos amigos de Foz de Iguaçu que permitiram minha permanência no Instituto Nacional de Pesquisas e estudos para realizar este trabalho.

Aos eternamente adorados

Geraldo e Eneida.

(*in memoriam*)

Aos colegas e funcionários da Faculdade de Engenharia de Foz de Iguaçu, que sempre me ajudaram com paciência e compreensão durante o período de trabalho.

AGRADECIMENTOS

Aos queridos Sergio e Adriana, não há como agradecer.

Aos meus orientadores Prof. Luiz Roberto Carrocci e Prof. Leon Sinay pela amizade e dedicação durante a realização deste trabalho.

Ao Diretor do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais Marcio Nogueira Barbosa e ao Coordenador do Sensoriamento Remoto Luiz Alberto Vieira Dias, os quais tornaram possível a minha vinda e estadia no Laboratório Associado de Combustão e Propulsão.

Ao Chefe de Departamento, colegas e funcionários do Laboratório Associado de Combustão e Propulsão.

Às bibliotecárias Maria Aparecida Marcos e Maria Ignês Costa Salles Moura da Silva que muito me ajudaram com eficiência e bom humor.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suchow da Fonseca que permitiu minha permanência no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais para realizar este trabalho.

Aos colegas e funcionários da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá.

A todos que diretamente e/ou indiretamente contribuíram na execução deste trabalho, meu muito obrigada.



SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	9
LISTA DE TABELAS	12
LISTA DE SÍMBOLOS	13
Resumo	16
Capítulo 1. INTRODUÇÃO	18
1.1 Objetivo	25
1.2 Origem e Fundamentos do Trabalho	26
1.3 Contribuição deste Trabalho	27
1.4 Estrutura do Trabalho	29
Capítulo 2. MODELAGEM MATEMÁTICA I	31
2.1 Modelo Físico	31
2.2 Escoamento entre Placas Paralelas sem Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor	33
2.3 Escoamento entre Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor	38
2.4 Escoamento entre Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e com Geração Interna de Calor	40
Capítulo 3. MODELAGEM MATEMÁTICA II	42
3.1 Modelo Físico	42



3.2 Distribuição de Velocidade e Pressão entre Discos Coaxiais.....	44
3.3 Distribuição de Temperatura entre Discos Coaxiais.....	48
Capítulo 4. RESULTADOS	52
4.1 Perfis de Velocidade e Temperatura para Placas Paralelas	52
4.1.1 Velocidade e Temperatura em Placas Paralelas sem Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor.....	52
4.1.2 Velocidade e Temperatura em Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor.....	57
4.1.3 Temperatura entre Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e com Geração Interna de Calor.....	61
4.2 Perfis de Velocidade, Pressão e Temperatura para Discos Coaxiais.....	63
4.2.1 Perfis de Velocidade e Pressão para Discos Coaxiais.....	63
4.2.2 Perfis de Temperatura para Discos Coaxiais.....	66
Capítulo 5. CONCLUSÕES	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72
APÊNDICES	77
Apêndice A	77
Apêndice B	83
Apêndice C	89
Abstract	120



LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Esquema de um mancal hidrodinâmico.	19
Figura 1.2 - Descrição geométrica de um mancal radial de deslizamento.	21
Figura 1.3 - Temperatura num mancal de deslizamento.	23
Figura 1.4 - Representação geométrica do eixo na bucha de material sinterizado de espessura H , à direita geometria do eixo e da bucha planificados.	24
Figura 2.1 - Modelo físico da configuração plana.	32
Figura 3.1 - Modelo físico da configuração cilíndrica.	43
Figura 4.1 - Representação da variação da velocidade no tempo e no espaço entre duas placas paralelas, $\omega = 10$ e $\beta = 12$.	53
Figura 4.2 - Variação da velocidade $u(y,t)$ no espaço y entre placas paralelas e isotérmicas, $\omega = 10$ e $\beta = 12$.	54
Figura 4.3 - Representação da variação da velocidade $u(y,t)$ com a permeabilidade para duas placas isotérmicas.	54
Figura 4.4 - Variação da temperatura θ em função do tempo e do espaço entre duas placa paralelas, caso i).	55
Figura 4.5 - Representação da variação temperatura θ no tempo e no espaço entre placas paralelas, caso ii).	56
Figura 4.6 - Variação da temperatura θ em função do tempo e do espaço entre placas paralelas, caso iii).	56



- Figura 4.7** - Velocidade u em função do tempo t e do espaço entre placas y com $\omega = 10$, $\beta = 12$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Escoamento sujeito a gradiente de pressão 57
- Figura 4.8** - Variação da velocidade $u(y,t)$ no tempo e no espaço entre as placas y , os parâmetros são $\omega = 10$, $\beta = 12$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. 58
- Figura 4.9** - Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso i). 59
- Figura 4.10** - Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso ii). 59
- Figura 4.11** - Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso iii). 60
- Figura 4.12** - Comportamento da temperatura θ no instante $t = 3T/2$ com a variação da razão entre os coeficientes de condutividade térmica caso i). 60
- Figura 4.13** - Temperatura θ em função do tempo e do espaço entre placas paralelas para o caso i). 61
- Figura 4.14** - Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso ii). 62
- Figura 4.15** - Variação da temperatura θ no tempo e no espaço entre placas paralelas caso iii). 62
- Figura 4.16** - Variação da velocidade $v(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais. 63
- Figura 4.17** - Variação da velocidade $v(r,z,t)$ em função do espaço z entre discos coaxiais. 64

Figura 4.18 - Variação da pressão $p(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais.	65
Figura 4.19 - Variação da pressão $p(r,z,t)$ no espaço z entre discos coaxiais.	66
Figura 4.20 - Variação da temperatura $\theta(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais caso i).	67
Figura 4.21 - Variação da temperatura $\theta(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais caso ii).	67
Figura 4.22 - Variação da temperatura $\theta(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais caso iii).	68
Figura B.1 - Fluxograma do programa que determina as distribuições de velocidade em escoamentos entre placas paralelas.	87
Figura B.2 - Fluxograma do programa que determina as distribuições de temperatura em escoamentos entre placas paralelas.	88

LISTA DE TABELAS

- Tabela A.1.1** - Coeficientes d_{ij} ($\times 10^{-3}$) das distribuições de velocidade. 77
- Tabela A.2.1.1** - Coeficientes c_{ij} ($\times 10^{-3}$) das distribuições de temperatura θ_{hj} . 79
- Tabela A.2.1.2** - Coeficientes b_{ij} ($\times 10^{-5}$) das distribuições de temperatura $\theta_j(y,t)$. 79
- Tabela A.2.2.1** - Coeficientes $d_{g sj}$ ($\times 10^{-3}$) das distribuições de temperatura $\theta_{gj}(y,t)$.
80
- Tabela A.2.2.2** - Coeficientes p_{ij} ($\times 10^{-3}$) das distribuições de temperatura $\theta_{p1j}(y,t)$
81
- Tabela A.2.2.3** - Coeficientes p_{i0j} , p_{i1j} , p_{i2j} , q_{i0j} , q_{i1j} e q_{i2j} das distribuições de
temperatura $\theta_{p2j}(y,t)$. 82



LISTA DE SÍMBOLOS

B	comprimento	<i>m</i>
c	calor específico	<i>J kg °C</i>
<i>Ec</i>	número de Eckert	[1]
h	espaço	<i>m</i>
H	espessura de material sinterizado	<i>m</i>
k	relação entre os coeficientes de condutividade térmica	[1]
p	parâmetro adimensional de pressão	[1]
p*	pressão	<i>N</i>
Pr	número de Prandtl	[1]
q	parâmetro adimensional de geração interna de calor	[1]
\dot{q}	geração interna de calor	<i>°C/s</i>
r	parâmetro adimensional de raio	[1]
r*	raio	<i>m</i>
R	número de Reynolds	[1]
t	parâmetro adimensional de tempo	[1]
t*	tempo	<i>s</i>
T*	temperatura	<i>°C</i>
T	temperatura adimensionalizada	[1]
u	velocidade adimensionalizada	[1]
u*	componente de velocidade	<i>m/s</i>



U	velocidade adimensionalizada da placa	[1]
U^*	velocidade da placa	m/s
v	componente de velocidade azimutal adimensionalizada	[1]
v^*	velocidade azimutal	m/s
x, y, z	variáveis espaciais adimensionalizadas	[1]
x^*, y^*, z^*	variáveis espaciais	m
w	componente de velocidade axial adimensionalizada	[1]
w^*	velocidade axial	m/s
W_0 e W_h	velocidades de deslocamento de colunas	m/s

SÍMBOLOS GREGOS

α	parâmetro adimensional de viscosidade cinemática	[1]
β	parâmetro adimensional de porosidade	[1]
ΔT	variação de temperatura	°C
ε	permeabilidade	m^2
Φ	função dissipação de energia	s^{-2}
γ	parâmetro adimensional de gradiente de pressão	[1]
κ	condutividade térmica	W/m °C
λ	frequência de oscilação adimensionalizada do disco	[1]
λ^*	frequência de oscilação do disco	rad/s
μ	viscosidade dinâmica	kg/m s

ν	viscosidade cinemática	m^2/s
θ	temperatura adimensionalizada	[1]
ρ	densidade volumétrica	kg/m^3
ω	frequência de oscilação adimensionalizada	[1]
ω^*	frequência de oscilação da placa	rad/s
Ω	velocidade angular	rad/s

SUBÍNDICES

$j = 1$	escoamento livre
$j = 2$	escoamento no meio poroso

NOTAÇÃO

i	unidade imaginária
Re	parte real de funções complexas



AQUINO, A. M. S. *Escoamentos em meios porosos entre superfícies oscilantes - uma análise do ponto de vista da tribologia.* Guaratinguetá, 1998. 121p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

RESUMO

Estudos da vibração de corpos em escoamentos estacionários ou não estacionários são de grande interesse nos problemas de controle de fluxo nas aplicações da Engenharia, principalmente quando estas encontram-se associadas à lubrificação, como é o caso do escoamento de filmes lubrificantes em meios porosos. Apesar deste fenômeno ser bem representado pela Lei de Darcy generalizada, casos específicos envolvendo as equações de Navier-Stokes são dificilmente resolvidos analiticamente. Focalizam-se nesta tese dois sistemas, o primeiro constituído de duas placas rígidas, de material não poroso, paralelas e infinitas dispostas horizontalmente, o segundo formado por dois discos coaxiais em condições semelhantes às descritas acima, e supõe-se o escoamento de Couette de um fluido viscoso e incompressível entre eles. Assume-se que parte dos espaços internos seja preenchido com um material poroso, e analisam-se os sistemas separadamente. No primeiro a placa superior oscila e a inferior é mantida em repouso, e no outro o disco superior executa a oscilação e o inferior encontra-se estacionário. Tem-se como objetivo determinar soluções exatas dos aspectos hidrodinâmico e térmico destes problemas. As expressões analíticas para a velocidade e temperatura,



derivadas das equações de Navier-Stokes e da energia, são determinadas supondo-se que o escoamento não estacionário encontre-se sobreposto a um escoamento estacionário médio. Analisam-se as dependências da temperatura e da velocidade não estacionária em relação à permeabilidade do meio e à frequência de oscilação, e determinam-se os perfis de velocidade e temperatura.

Palavras-chave: meio poroso, escoamento de Couette, tribologia, hidrodinâmica.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Em algumas operações industriais a fricção ou atrito torna-se indispensável, podendo alterar os rendimentos mecânicos de alguns equipamentos; entretanto, em outros casos é necessário mantê-la num mínimo, como nos mancais. Dá-se o nome de mancal (Cameron, 1981) ao dispositivo sobre o qual se apoia um eixo girante, deslizante ou oscilante e que lhe permite um movimento com um mínimo de atrito. Há várias formas destes, variando desde uma banda estreita ou bucha, de material que oferece uma pequena resistência ao movimento, até um conjunto complexo de cilindros, calhas e retentores (mancais planos, cilíndricos e de encosto).

Existem três classes gerais de mancais: hidrodinâmico ou mancal de deslizamento, hidroestático ou mancal pressurizado externamente e mancal de rolamento.

A utilidade de um mancal foi evidenciada, pela primeira vez, pelo homem pré-histórico ao tentar reduzir o esforço entre a roda e o eixo de um carro para movê-lo (Enciclopaedia Britannica, 1969), mas apesar deste princípio ser utilizado no dia a dia da era pré-histórica, as pesquisas científicas de cada um dos tipos de mancais iniciaram-se somente no século XIX.

Quando um filme fino de óleo é colocado entre duas superfícies paralelas, levemente inclinadas e em movimento relativo, verifica-se que devido à



velocidade e à viscosidade do filme, gera-se uma pressão interna na película de fluido. Se esta pressão for suficientemente elevada, haverá a separação completa entre as superfícies, garantindo-se assim a sustentação de uma carga aplicada. Um mancal que suporta uma carga desta maneira identifica-se como um mancal hidrodinâmico e encontra-se representado na Figura 1.1. A pressão é gerada pelo escoamento do fluido através da passagem cuneiforme. A fricção, uma função direta da viscosidade do lubrificante, é pequena pois não há contato metal-metal, existe um filme fino de óleo separando-os.

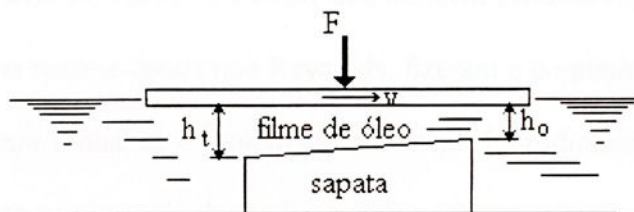


Figura 1.1 Esquema de um mancal hidrodinâmico

O estudo científico dos mancais hidrodinâmicos data do período da grande expansão das ferrovias. O Instituto dos Engenheiros Mecânicos na Inglaterra elegeu Beauchamp Tower para estudar a fricção em mancais ferroviários (Enciclopædia Britannica, 1969). Ao iniciar os experimentos Tower observou que os resultados apresentavam grandes irregularidades, e assim, resolveu submergir os mancais em um banho de óleo. Para realizar seu intento construiu um orifício na bronzina externa do mancal fazendo o óleo atingir o eixo, mas quando um novo teste começou, o óleo jorrou de volta pelo buraco. Tower colocou então um batoque de madeira no orifício verificando que quando o eixo girava, a madeira era

forçada para fora. Substituindo a madeira por um manômetro mapeou a pressão ao longo do comprimento e da largura do mancal. Observou que ao integrá-la, esta era equivalente à carga aplicada.

Tower reportou o ocorrido num encontro da instituição em 1883, e Osborne Reynolds, presente ao encontro, resolveu estudar o fenômeno analiticamente e mostrou suas deduções ao mesmo grupo em 1886. Devido aos resultados destas pesquisas Reynolds é reconhecido como o fundador da Teoria Hidrodinâmica da Lubrificação (Pinkus & Sternlicht, 1961), mas muitos outros pesquisadores, além do russo N. Petroff que também estudou o fenômeno da ação hidrodinâmica na mesma época que Reynolds, fizeram e continuam a fazer grandes contribuições para a análise e projetos dos mancais hidrodinâmicos. Estes podem ser analisados como mancais de deslizamento e são geralmente constituídos por duas superfícies planas. A superfície móvel translada enquanto o suporte permanece estacionário mas ligeiramente fora de paralelismo com a superfície em movimento. Óleo ou outro lubrificante (Jones & Scott, 1983) preenche o pequeno espaço entre as superfícies.

O *journal bearing*, ou mancal radial de deslizamento, representado na Figura 1.2 é o mancal hidrodinâmico mais simples em uso. Ele é formado por um eixo que gira no interior de uma bucha circular, cujo diâmetro interno é cerca de dois milésimos de milímetro maior que o do eixo. A arte de fazer este conjunto girar é inserir óleo suficiente de modo que o mancal permaneça sem aquecimento. A espessura e a localização da película de óleo, assim como a quantidade de fluido em escoamento, são fundamentais para o funcionamento do mancal.

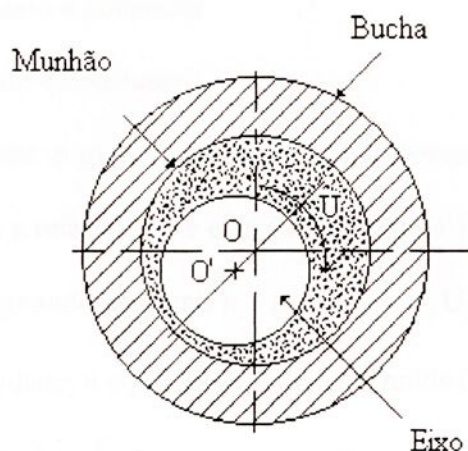


Figura 1.2 Descrição geométrica de um mancal radial de deslizamento.

A equação básica da lubrificação, ou Equação de Reynolds, traduz a continuidade do escoamento para filmes finos e viscosos entre superfícies. No estudo de mancais usa-se esta equação para determinar as pressões nos filmes lubrificantes. Do ponto de vista matemático ela é representada por uma equação diferencial parcial não homogênea, que tem como parâmetros a viscosidade ν , a densidade ρ e a espessura do filme h , e foi originariamente deduzida por Reynolds para fluidos incompressíveis, a partir das equações de Navier-Stokes sob as seguintes hipóteses (Pinkus & Sternlicht, 1961):

- 1) O escoamento é laminar.
- 2) O meio é contínuo; a equação não se aplica a regiões onde há ruptura do filme.
- 3) O fluido é newtoniano; a viscosidade não depende do grau de cisalhamento a que está submetido o fluido.
- 4) Desprezam-se as forças de campo e de inércia do fluido.
- 5) Não há deslizamento entre o fluido e a superfície de contato.

- 6) A viscosidade do fluido é constante.
- 7) A densidade do fluido é constante.
- 8) A espessura do filme é muito pequena quando comparada às dimensões das superfícies de contato; a relação entre elas é da ordem de 10^{-3} .

Designando-se como p a pressão, U_1, U_2, V_1, V_2, W_h e W_0 as componentes da velocidade, a equação geral de Reynolds (Cameron, 1981) é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{\nu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6 \left[\frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) h + \frac{\partial}{\partial y} (V_1 + V_2) h + 2(W_h - W_0) \right]. \quad (1.1)$$

Apesar das hipótese simplificadoras a equação (1.1) não tem solução analítica, exceto para alguns casos particulares (Pinkus & Sternlicht, 1961). Atualmente as soluções das equações de Reynolds são obtidas usando-se técnicas numéricas que envolvem os método de elementos finitos, ou diferenças finitas.

A transferência total de calor em mancais tem sido avaliada por métodos de aproximação que necessitam maiores verificações experimentais e há pouca coisa publicada a respeito (Cameron, 1981; Mouallem, 1996; Mouallem et al., 1996).

Suponha um sistema de lubrificação formado por um bloco plano, estacionário e paralelo a uma superfície em movimento, como mostra a Figura 1.3, onde h é a distância entre o bloco e a superfície em movimento com velocidade U , ΔT a variação de temperatura, B o comprimento do bloco. Para este caso simples de lubrificação a transferência total de calor é determinada pela relação entre o calor transferido por condução e o transferido por convecção (Bird

et al., 1960; Cameron, 1981). Quando o lubrificante é o óleo esta razão é igual à unidade e para a água, toma o valor 1.62 (Cameron, 1981). Para sistemas de lubrificação mais sofisticados os métodos utilizados na obtenção da transferência de calor são mais aproximados ainda.

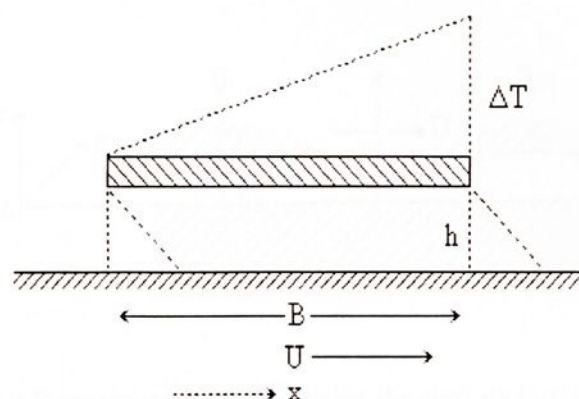


Figura 1.3 Temperatura num mancal de deslizamento.

As buchas dos mancais de aspiradores de pó, ventiladores, secadores de cabelo e bronzinas de motores de arranque de carros são feitas de pó metálico prensado e recozido, metal sinterizado, usualmente bronze ou ferro fundido embebido em óleo. Estes elementos denominam-se mancais porosos e sua lubrificação também é feita com fluido. A Figura 1.4 ilustra, à esquerda, a representação geométrica de um mancal poroso e, à direita, sua abertura, como se este fosse plano. O eixo move-se com uma velocidade U , o material sinterizado de espessura H estende-se até $z = -H$ e tem permeabilidade ϵ .

A velocidade de escoamento w do fluido através do metal sinterizado de permeabilidade ϵ é governada pela equação de Darcy (Houpeurt, 1975; Whitaker, 1986),

$$w = - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\varepsilon}{\nu} \quad (1.2)$$

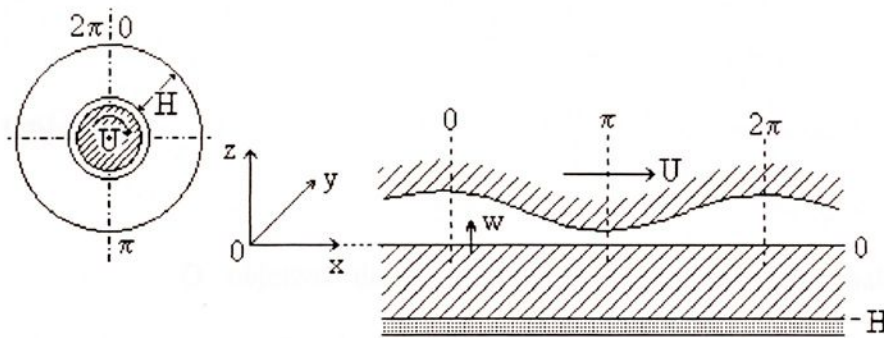


Figura 1.4 Representação geométrica do eixo na bucha de material sinterizado de espessura H , à direita geometria do eixo e da bucha planificados.

O estado da arte mostra que as pressões dos filmes lubrificantes de mancais porosos são determinadas utilizando-se a equação de Reynolds, mas pouco se sabe a respeito da transferência de calor. No presente trabalho analisam-se perfis de velocidade e temperatura em escoamentos de fluidos entre superfícies planas, onde parte da distância entre elas contém um meio poroso. Este estudo é de grande importância pois, a visão mais ampla do comportamento dos lubrificantes em função da velocidade e da temperatura, contribui efetivamente nos projetos de mancais e lubrificação. Por exemplo, um perfil de velocidade informa quais os valores mais adequados de permeabilidade para retenção do lubrificante, a ordem de grandeza do gradiente de pressão para lubrificação forçada e a velocidade limite para os deslocamentos relativos de mancais. Um perfil de

temperatura indica os pontos de super-aquecimento, as condições de troca de calor e de isolamento de mancais. Estas informações possibilitam projetos visando menor aquecimento, minimizando o atrito, permitindo maior vida útil dos equipamentos mecânicos.

1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é obter soluções analíticas das equações de conservação de momento e energia para escoamentos entre superfícies planas (Aziz & Na, 1976; Kevorkian & Cole, 1981; Sinay, 1982). Estuda-se especificamente o escoamento não estacionário de fluidos newtonianos com propriedades constantes, entre placas paralelas infinitas e discos coaxiais. Nas duas análises, parte do espaçamento entre as superfícies é preenchido por um material poroso, uma das superfícies oscila e a outra é mantida estacionária.

O estudo das equações de Navier-Stokes e da energia para escoamentos de fluidos viscosos e incompressíveis entre superfícies planas é realizado em três etapas. Na primeira analisam-se as equações de conservação quando o escoamento não sofre a ação de um gradiente de pressão externo e não há geração interna de calor. Na segunda etapa, avaliam-se as distribuições de velocidade e temperatura para o escoamento sob a ação de gradiente de pressão e sem geração interna de calor. Na última etapa estudam-se as respectivas distribuições quando o escoamento está sujeito a gradiente de pressão externo e há geração interna de calor.



Desenvolve-se a análise dos problemas descritos para os casos:

i) as duas superfícies têm temperaturas constantes, ii) a superfície superior é adiabática e a inferior isotérmica e iii) a superfície superior é isotérmica e a inferior adiabática.

Avalia-se numericamente a influência dos parâmetros frequência de oscilação, permeabilidade e condutividade térmica nos perfis de velocidade e temperatura. Estas análises são semelhantes a simulações de mecanismos e muito utilizadas em máquinas operatrizes e motores de combustão interna.

As soluções analíticas apresentadas neste trabalho são determinadas utilizando-se programas escritos na linguagem de manipulação simbólica Mathematica (Wolfram, 1988; Maeder, 1990; Sinay, 1991).

1.2 Origem e Fundamentos do Trabalho

A análise do escoamento entre placas paralelas espelha-se na dissertação de mestrado de Carrocci (1982) e no trabalho de Soundalgekar et al. (1985).

Carrocci estuda os perfis de velocidade e temperatura em escoamentos entre placas paralelas com parte do espaçamento entre estas preenchido por um meio poroso homogêneo, quando uma das placas translada em relação a seu plano e a outra é mantida estacionária. O presente trabalho amplia este estudo analisando os efeitos das oscilações em escoamentos de Couette.



O trabalho de Soundalgekar utiliza o método de solução das equações de Navier-Stokes proposto por Ishigaki (1971), no estudo da distribuição de velocidade num escoamento não estacionário entre placas paralelas em movimento relativo, quando entre estas há um meio poroso.

Ishigaki considera o escoamento bi-dimensional de um fluido incompressível de propriedades constantes entre duas paredes planas, uma em repouso e a outra movendo-se em relação a seu próprio plano com velocidade não estacionária. As equações de momento são escritas num sistema fixo de coordenadas considerando-se a velocidade de movimento da parede uma função somente do tempo. Neste trabalho as distribuições de velocidade de escoamento nas regiões livre e porosa entre as placas paralelas são analisadas usando-se um equacionamento análogo ao adotado por Ishigaki.

Para a análise do escoamento entre discos coaxiais parte-se da premissa que o disco superior oscila torcionalmente e o inferior permanece estacionário. As soluções das equações de Navier-Stokes e da energia são desenvolvidas em função do número de Reynolds, de acordo com o estudo de Rosenblat (1960). Entretanto, no desenvolvimento do presente trabalho, supõe-se que só há gradiente de pressão atuando na direção radial.

1.3 Contribuição deste Trabalho

Além das soluções clássicas das equações de Navier-Stokes propostas por Bird et al. (1960), Basset (1961), Batchelor (1967), Schlichting



(1968), Houpeurt (1975) e Aziz e Na (1976), casos específicos de Engenharia de Lubrificação - mancais de deslizamento - ou casos de escoamentos não estacionários na Dinâmica dos Fluidos, são pouco abordados na literatura (Rosenblat, 1960; Jones & Rosenblat, 1969; Ishigaki, 1971; Mochizuki & Yang, 1985; Philip, 1990; Cox, 1991; Borne, 1992).

Os métodos de elementos finitos tem sido amplamente utilizados na obtenção das soluções destas equações no estudo de escoamentos de fluidos viscosos e incompressíveis, estacionários ou não, sendo os mais referenciados os da penalidade, da separação e de Galerkin. Por exemplo o método dos resíduos ponderados de Galerkin usado pelo *Sistema Computacional para Desenvolvimento de Programas Baseados no Método de Elementos Finitos (SDP)* (LNCC, 1987), apesar de ser um aplicativo voltado para a análise de estruturas, foi utilizado com sucesso no estudo de escoamentos laminares e estacionários por Ramos et al. (1991).

Entretanto, o tratamento analítico dos problemas de escoamento é de suma importância pois fornece informações mais gerais que as obtidas em casos específicos tratados numericamente (Ramos et al., 1991; Mouallem et al. 1996).

Mostra-se neste trabalho como as equações de conservação de momento e energia podem ser escritas na linguagem de manipulação simbólica Mathematica (Wolfram, 1988) e resolvidas analiticamente usando-se o método de separação de variáveis.



1.4 Estrutura do Trabalho

Neste capítulo faz-se uma apresentação preliminar dos mancais de deslizamento, que é a motivação deste trabalho.

No capítulo 2 estuda-se o escoamento não estacionário entre placas paralelas. Na seção 2.1 define-se o modelo físico adotado para a configuração plana e na 2.2 apresentam-se as equações gerais de conservação de momento e energia. A seguir são determinadas as distribuições de velocidade e temperatura para os casos: i) as placas superior e inferior têm temperaturas constantes, ii) a placa superior é adiabática e a inferior isotérmica e iii) a placa superior é isotérmica e a inferior adiabática.

No capítulo 3 analisa-se o escoamento não estacionário entre discos coaxiais, determinando-se as distribuições de velocidade, pressão e temperatura a partir das equações de Navier-Stokes e da energia em coordenadas cilíndricas.

No capítulo 4 exibem-se os resultados obtidos avaliando-se numericamente as soluções analíticas das equações de conservação de momento e energia, e finalmente no capítulo 5 as conclusões.

Após as referências bibliográficas têm-se três apêndices. No Apêndice A encontram-se as expressões da velocidade e da temperatura, soluções das equações de conservação de momento e energia, obtidas no estudo do escoamento entre placas paralelas. O Apêndice B apresenta algumas informações sobre o software Mathematica e os fluxogramas dos programas utilizados na



determinação das distribuições de velocidade e temperatura. No Apêndice C são apresentados os programas escritos na linguagem simbólica Mathematica.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresenta-se a análise dos efeitos da convecção natural de energia e massa para escoamentos não estacionários em geometrias planas e placas paralelas. O espaço entre duas placas paralelas é preenchido por um meio poroso (Francis, 1960) utilizado a metodologia de análise matemática das distribuições de velocidade e temperatura. A análise matemática é realizada através da linguagem simbólica Mathematica (Wolfram, 1988).

Este trabalho é uma generalização de segundo ordem de um trabalho realizado por Schlichting (1965) e complementado a análise realizada por Francis et al (1961, 1962), analisando os efeitos da convecção em escoamentos de fluidos.

3.1 Modelo Físico

O modelo físico de análise de segunda ordem para convecção natural de energia e massa em geometrias planas e placas paralelas é representado por uma distribuição de temperatura e concentração entre duas placas paralelas. A análise matemática é realizada através da linguagem simbólica Mathematica (Wolfram, 1988).

Capítulo 2

MODELAGEM MATEMÁTICA I

Neste capítulo apresenta-se a análise das equações de conservação de momento e energia para escoamentos não estacionários de fluidos incompressíveis entre duas placas paralelas. O espaço entre elas é parcialmente preenchido por um meio poroso (Francis, 1980) isotrópico e homogêneo. As soluções analíticas das distribuições de velocidade e temperatura são obtidas utilizando-se programas escritos na linguagem simbólica Mathematica (Wolfram, 1988).

Este trabalho é uma generalização do segundo problema de Stokes estudado por Schlichting (1968) e complementa o estudo realizado por Carrocci et al. (1981, 1982), analisando os efeitos das oscilações em escoamentos de Couette.

2.1 Modelo Físico

O modelo utilizado na definição da configuração plana consiste de duas placas planas, horizontais, paralelas e infinitas separadas por uma distância $2h$. A metade inferior do espaçamento entre elas é preenchido por um meio poroso homogêneo e isotrópico de permeabilidade ε . A placa superior oscila



longitudinalmente, enquanto a inferior permanece estacionária, como mostra a Figura 2.1.

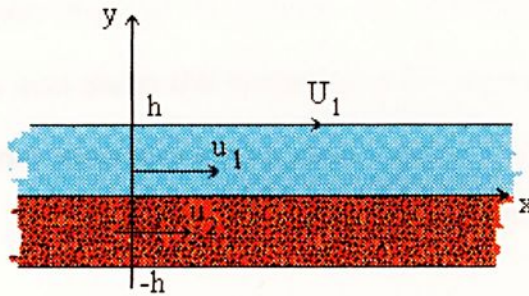


Figura 2.1 Modelo físico da configuração plana.

Neste capítulo estuda-se o escoamento bi-dimensional de um fluido viscoso e incompressível entre as duas placas paralelas, supondo-o independente de x . A análise deste problema é dividida em duas, uma para o escoamento do fluido livre e outra para o escoamento através do meio poroso.

Para facilitar a notação adota-se um índice j para indicar as variáveis em cada meio. Nas equações que descrevem o problema, $j = 1$ corresponde às variáveis do escoamento livre e $j = 2$ indica as variáveis do escoamento na região porosa.

A análise completa do escoamento é feita estudando-se três problemas distintos. No primeiro problema avaliam-se as distribuições de velocidade e temperatura supondo-se o escoamento na ausência de gradiente de pressão e sem geração interna de calor. O segundo estuda o escoamento do fluido incompressível sujeito a um gradiente de pressão externo, mas sem geração interna de calor. Finalmente obtêm-se as soluções analíticas das equações de conservação

para escoamentos sob a ação de gradiente de pressão e com geração interna de calor.

Desenvolvem-se os estudos dos problemas descritos para os seguintes casos: i) as duas placas têm temperaturas constantes, ii) a placa superior é adiabática e a inferior isotérmica e iii) a placa superior é isotérmica e a inferior adiabática.

2.2 Escoamento entre Placas Paralelas sem Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor

Sejam ε a permeabilidade do meio poroso, u_j^* as velocidades de escoamento e ν_j as viscosidades cinemáticas. Se o movimento da placa superior é dado por $U^*(t^*) = U_0 \cos \omega^* t^*$, onde U_0 e ω^* são constantes, como o escoamento do fluido independe de x e não há gradiente de pressão atuando, as equações de Navier-Stokes (Schlichting, 1968), para os escoamentos nas regiões livre (Ishigaki, 1971) e porosa (Carrocci et al., 1981; Soundalgekar et al., 1985) tornam-se:

escoamento livre:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*(t^*)}{\partial t^*} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial y^{*2}}, \quad (2.1)$$

escoamento no meio poroso:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*(t^*)}{\partial t^*} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\nu_2}{\varepsilon} [U^*(t^*) - u_2^*], \quad (2.2)$$

estando sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 u_1^*(h, t^*) &= U^*(t^*) \quad , \quad u_2^*(-h, t^*) = 0 \quad , \\
 u_1^*(0, t^*) &= u_2^*(0, t^*) \quad e \quad \left. \frac{\partial u_1^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} .
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Considerando-se nulo o calor transferido por convecção e denotando-se por T_j^* as temperaturas, κ_j e c_j as condutividades térmicas e os calores específicos para os escoamentos na região livre e no meio poroso, as equações para as distribuições de temperatura (Bird et al., 1960) no caso isotérmico tornam-se:

$$\frac{\partial T_j^*}{\partial t^*} = \kappa_j \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial y^2} + \frac{v_j}{c_j} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial y^*} \right)^2 ,
 \tag{2.4}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$T_1^*(h, t^*) = T_1 \quad , \quad T_2^*(-h, t^*) = T_2 \quad ,
 \tag{2.5}$$

$$T_1^*(0, t^*) = T_2^*(0, t^*) \quad , \quad \kappa_1 \left. \frac{\partial T_1^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \kappa_2 \left. \frac{\partial T_2^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} .$$

As equações de Navier-Stokes e da energia, escritas na forma adimensional, são analisadas em função dos números de Prandtl e Eckert para as duas regiões de escoamento,

$$\text{Pr}_j = \frac{v_j}{\alpha_j} = \frac{\mu_j c_{p_j}}{k_j} \quad e \quad \text{Ec}_j = \frac{U_{0_j}^2}{c_{p_j} \Delta T_j} ,$$

quando os parâmetros adimensionais de tempo t , frequência ω , posição y , velocidades u_j e U , e temperatura θ_j são definidos de acordo com os trabalhos de

Carrocci (1982) e Ishigaki (1971). Os parâmetros adimensionais de viscosidade e de porosidade são representados por α_j e β_j respectivamente,

$$\begin{aligned}
 t &= t^* \frac{v_1}{h^2}, & \omega &= \omega^* \frac{h^2}{v_1}, \\
 y &= \frac{y^*}{h}, \\
 u_j &= \frac{u_j^*}{U_0}, & U &= \frac{U^*}{U_0}, \\
 \alpha_j &= \frac{v_j}{v_1}, & & (2.6) \\
 \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= \frac{v_2 h^2}{v_1 \varepsilon} \\
 e & \quad \theta_j = \frac{T_j^* - T_1}{T_2 - T_1}.
 \end{aligned}$$

Utilizando-se (2.6) em (2.1), (2.2) e (2.4) obtêm-se as equações de conservação de momento e energia adimensionalizadas:

equações de momento:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial U(t)}{\partial t} + \alpha_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \beta_j [U(t) - u_j], \quad (2.7)$$

equações de energia:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \frac{\alpha_j}{Pr_j} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial y^2} + \alpha_j Ec_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2, \quad (2.8)$$

válidas para $j = 1, 2$. Como β_1 é nulo as equações (2.1) e (2.2) podem ser escritas como (2.7).

Observando-se as equações de conservação de momento (2.7) e energia (2.8), verifica-se que elas formam um sistema não linear, pois (2.8)

encontra-se acoplada à (2.7) pelo termo quadrático $\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)^2$. A obtenção das soluções das equações de Navier-Stokes e da energia, realiza-se abordando-se o conjunto de equações definidos por (2.7) e (2.8) como um sistema de equações lineares. Para que isto ocorra, determina-se inicialmente a solução de (2.7) e posteriormente utiliza-se este resultado como uma não homogeneidade em (2.8).

As expressões das distribuições de velocidade e temperatura, exibidas no Apêndice A, são avaliadas usando-se dois programas escritos na linguagem de manipulação simbólica Mathematica (Wolfram, 1988). Os fluxogramas e os programas encontram-se apresentados nos Apêndices B e C respectivamente.

A equação (2.7) é resolvida utilizando-se o primeiro programa apresentado no Apêndice C. Este baseia-se no método de separação de variáveis, assumindo uma solução geral do tipo:

$$u_j(y,t) = \cos \omega t + \cos \omega t [c_{1j} \cos \sigma_j y + \cosh \sigma_j y + c_{2j} \sin \sigma_j y + \cosh \sigma_j y + c_{3j} \cos \sigma_j y + \sinh \sigma_j y + c_{4j} \sin \sigma_j y + \sinh \sigma_j y] + \sin \omega t [c_{5j} \cos \sigma_j y + \cosh \sigma_j y + c_{6j} \sin \sigma_j y + \cosh \sigma_j y + c_{7j} \cos \sigma_j y + \sinh \sigma_j y + c_{8j} \sin \sigma_j y + \sinh \sigma_j y] \quad , \quad (2.9)$$

onde

$$\sigma_1 = \text{Re}(\sqrt{i\omega}) \quad , \quad \sigma_2 = \text{Re}\left(\sqrt{\frac{\beta_2 + i\omega}{\alpha_2}}\right) \quad ,$$

com as seguintes condições de contorno:

$$u_1(1,t) = \cos \omega t, \quad u_2(-1,t) = 0, \\ u_1(0,t) = u_2(0,t) \quad e \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.10)$$

A solução de (2.8) é obtida usando-se o segundo programa apresentado no Apêndice C. Utilizando-se os resultados de (2.7) em (2.8), e resolvendo-se a equação (2.8) de modo análogo ao adotado na determinação das expressões da velocidade, avaliam-se as distribuições de temperatura para os casos i), ii) e iii) com as respectivas condições de contorno:

i)

$$\theta_1(1,t) = 0, \quad \theta_2(-1,t) = 1,$$

$$\theta_1(0,t) = \theta_2(0,t), \quad \kappa_1 \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \kappa_2 \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right|_{y=0}$$

ii)

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad \theta_2(-1,t) = 1,$$

$$\theta_1(0,t) = \theta_2(0,t), \quad \kappa_1 \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \kappa_2 \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right|_{y=0}$$

iii)

$$\theta_1(1,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right|_{y=-1} = 0,$$

$$\theta_1(0,t) = \theta_2(0,t), \quad \kappa_1 \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \kappa_2 \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right|_{y=0}$$

As soluções analíticas das equações (2.7) e (2.8) são apresentadas no Apêndice A e suas avaliações numéricas para os casos i), ii) e iii) encontram-se ilustradas na seção 4.1.1.

2.3 Escoamento entre Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor

A análise do escoamento não estacionário entre placas paralelas quando existe um gradiente de pressão externo $\frac{\partial p^*}{\partial x^*}$ atuando é feita usando-se um equacionamento análogo ao adotado na seção 2.2.

Definindo-se a densidade do fluido nos meios como ρ_j , as equações dos escoamentos nas regiões livre e porosa são as seguintes:

escoamento livre:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*(t^*)}{\partial t^*} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial y^{*2}} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad (2.11)$$

escoamento no meio poroso:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*(t^*)}{\partial t^*} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\nu_2}{\varepsilon} [U^*(t^*) - u_2^*] - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad (2.12)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_1^*(h, t^*) &= U^*(t^*), \quad u_2^*(-h, t^*) = 0, \\ u_1^*(0, t^*) &= u_2^*(0, t^*) \quad e \quad \left. \frac{\partial u_1^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

As equações utilizadas na determinação das distribuições de temperatura em escoamentos sujeitos a gradiente de pressão externo e sem geração interna de calor, no caso isotérmico, encontram-se definidas em (2.4) e (2.5).

Obtem-se as equações (2.11), (2.12) e (2.13) na forma adimensionalizada, aplicando-se a estas as definições em (2.6) e os parâmetros gradiente de pressão γ_1 e γ_2 definidos como:

$$\gamma_1 = \frac{U_0 h}{\nu_1} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad e \quad \gamma_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{U_0 h}{\nu_1} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad (2.14)$$

Assim as equações para a velocidade e temperatura são:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial U(t)}{\partial t} + \alpha_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \beta_j [U(t) - u_j] - \gamma_j, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \frac{\alpha_j}{Pr_j} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial y^2} + \alpha_j Ec_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2. \quad (2.16)$$

As distribuições de velocidade para o escoamento sujeito a gradiente de pressão, soluções de (2.15) são:

$$u_1 = u_{1a} + \frac{\gamma_1}{2\alpha_1} y^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right) y - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right), \quad (2.17)$$

$$u_2 = u_{2a} + \frac{\gamma_2}{2\alpha_2} y^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right) y - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right).$$

Na equação (2.17) u_{1a} e u_{2a} representam as soluções u_j , $j = 1, 2$ descritas em (2.11).

As distribuições de temperatura são obtidas utilizando-se os resultados de (2.17) em (2.16) e definindo-se

$$\theta_j = \theta_{1j} + \theta_{2j} + \theta_{3j} + \theta_{4j}, \quad (2.18)$$

sendo θ_{1j} , θ_{2j} , θ_{3j} e θ_{4j} as soluções das seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial \theta_{1j}}{\partial t} = \frac{\alpha_j}{Pr_j} \frac{\partial^2 \theta_{1j}}{\partial y^2} + \beta_{1j} \left[\frac{\partial u_{ja}}{\partial y} \right]^2, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \theta_{2j}}{\partial t} = \frac{\alpha_j}{Pr_j} \frac{\partial^2 \theta_{2j}}{\partial y^2} + \beta_{2j} y \frac{\partial u_{ja}}{\partial y}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \theta_{3j}}{\partial t} = \frac{\alpha_j}{Pr_j} \frac{\partial^2 \theta_{3j}}{\partial y^2} + \beta_{3j} \frac{\partial u_{ja}}{\partial y}, \quad (2.21)$$

$$e \quad \frac{\partial \theta_{4j}}{\partial t} = \frac{\alpha_j}{Pr_j} \frac{\partial^2 \theta_{4j}}{\partial y^2} + \beta_{4j} [a_j y^2 + b_j y + c_j]. \quad (2.22)$$

Determinam-se as soluções de (2.19) a (2.22) utilizando-se o programa apresentado no Apêndice C. Os resultados obtidos numericamente nas avaliações das soluções de (2.17) e (2.18) encontram-se ilustrados na seção 4.1.2.

2.4 Escoamento entre Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e com Geração Interna de Calor

No caso de escoamentos sob a ação de um gradiente de pressão externo e com geração interna de calor as distribuições de velocidade são dadas por (2.17), e as equações de conservação de energia na forma adimensionalizada são:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \frac{\alpha_j}{Pr_j} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial y^2} + \alpha_j Ec_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 + q_j. \quad (2.23)$$

Na equação (2.23) q_j representa o parâmetro geração interna de calor definido como:

$$q_j = \frac{\dot{q} h^2}{\nu_j (T_2 - T_1)} \quad (2.24)$$

A solução geral de (2.23) é do tipo:

$$\theta_j = -\frac{q_j y^2}{2 \alpha_j / \text{Pr}_j} + a_j y + b_j + \theta_{j,a} \quad (2.25)$$

onde a_j e b_j são constantes e $\theta_{j,a}$ é a solução θ_j descrita em (2.18).

Sabendo-se que $\theta_{j,a}$ é determinado para os casos i), ii) e iii) utilizando-se as condições de contorno definidas na seção 2.2, obtêm-se as constantes a_j e b_j usando-se as seguintes condições:

$$\begin{aligned} -\frac{q_j y^2}{2 \alpha_j / \text{Pr}_j} + a_j y + b_j \Big|_{y=\pm 1} &= 0 \quad , \\ \theta_1(0,t) = \theta_2(0,t) \quad , \quad \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{aligned} \quad (2.26)$$

As distribuições de temperatura para escoamentos sujeitos a gradiente de pressão externo e com geração interna de calor são:

$$\theta_j = -\frac{q_j y^2}{2 \alpha_j / \text{Pr}_j} + \frac{1}{4} \left(\frac{q_1}{\alpha_1 / \text{Pr}_1} - \frac{q_2}{\alpha_2 / \text{Pr}_2} \right) y + \frac{1}{4} \left(\frac{q_1}{\alpha_1 / \text{Pr}_1} + \frac{q_2}{\alpha_2 / \text{Pr}_2} \right) + \theta_{j,a} \quad (2.27)$$

As soluções analíticas das equações (2.15) e (2.16) e suas avaliações numéricas encontram-se apresentadas no Apêndice A e na seção 4.1.3 respectivamente.



Capítulo 3

MODELAGEM MATEMÁTICA II

Apresenta-se a seguir a análise das equações de conservação de momento e energia para escoamentos não estacionários de fluidos incompressíveis entre dois discos coaxiais, supondo-se que o espaço entre eles esteja preenchido em parte com um material poroso isotrópico e homogêneo. Determinam-se as distribuições de velocidade (Mochizuki & Yang, 1985), temperatura e pressão para o caso em que o disco superior oscila torcionalmente e o inferior permanece estacionário.

3.1 Modelo Físico

O modelo utilizado na análise deste capítulo é formado por dois discos coaxiais separados por uma distância $2h$, como ilustra a Figura 3.1. A metade inferior do espaçamento entre eles contém um material poroso homogêneo e isotrópico, e estuda-se o escoamento não estacionário de um fluido newtoniano com propriedades constantes no espaço entre estes, quando o disco superior oscila torcionalmente na direção da componente azimutal, e o inferior permanece estacionário.



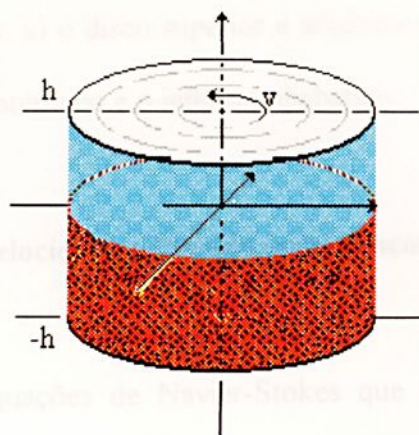


Figura 3.1 Modelo físico da configuração cilíndrica.

Devido à semelhança entre as configurações, a análise deste problema é feita de modo análogo ao usado no caso de escoamento entre placas paralelas, onde o estudo do escoamento é dividido em duas partes, uma para o escoamento do fluido livre e outra para o escoamento no meio poroso. Deste modo, o índice $j = 1$ é usado para indicar as variáveis do escoamento livre e $j = 2$ corresponde às variáveis do meio poroso.

O estudo completo do escoamento é realizado resolvendo-se dois sistemas de equações definidos pelas equações de momento e energia em coordenadas cilíndricas. As soluções do primeiro sistema determinam as distribuições de velocidade e pressão, e as do segundo fornecem as distribuições de temperatura.

Ainda analogamente ao capítulo 2, desenvolve-se o estudo dos perfis de temperatura para os casos: i) os discos superior e inferior têm

temperaturas constantes, ii) o disco superior é adiabático e o inferior isotérmico e
 iii) o disco superior é isotérmico e o inferior adiabático.

3.2 Distribuições de Velocidade e Pressão entre Discos Coaxiais

As equações de Navier-Stokes que descrevem o escoamento representado na Figura 3.1, escritas em coordenadas cilíndricas (Bird et al., 1960), são analisadas nos dois meios supondo-se que só há gradiente de pressão atuando na direção radial.

Definindo-se como ϵ , ν , ρ e $j = 1,2$ a permeabilidade, a viscosidade, a densidade e os índices que representam as variáveis nos escoamentos na região livre e no meio poroso respectivamente, e como u_j , v_j e w_j as componentes radial, azimutal e axial da velocidade em ambos os meios, as equações de Navier-Stokes quando o movimento do disco superior é dado por $v = r^* \Omega e^{j \lambda^* t^*}$, onde Ω e λ^* são constantes, são:

escoamento livre

$$v_1 \left[\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u_1^*}{\partial r^*} - \frac{u_1^*}{r^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^{*2}} \right] - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial r^*} + w_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial z^*} - \frac{v_1^{*2}}{r^*},$$

$$v_1 \left[\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_1^*}{\partial r^*} - \frac{v_1^*}{r^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial z^{*2}} \right] = \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial r^*} + w_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial z^*} - \frac{u_1^* v_1^{*2}}{r^*},$$

$$v_1 \left[\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial z^{*2}} \right] = \frac{\partial w_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial r^*} + w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial z^*}, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
 v_2 \left[\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u_2^*}{\partial r^*} - \frac{u_2^*}{r^{*2}} - \frac{u_2^*}{\varepsilon} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial z^{*2}} \right] - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} &= \frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial r^*} + w_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial z^*} - \frac{v_2^{*2}}{r^*} , \\
 v_2 \left[\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_2^*}{\partial r^*} - \frac{v_2^*}{r^{*2}} - \frac{v_2^*}{\varepsilon} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial z^{*2}} \right] &= \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + u_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial r^*} + w_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial z^*} - \frac{u_2^* v_2^{*2}}{r^*} , \\
 v_2 \left[\frac{\partial^2 w_2^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w_2^*}{\partial r^*} - \frac{w_2^*}{\varepsilon} + \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial z^{*2}} \right] &= \frac{\partial w_2^*}{\partial t^*} + u_2^* \frac{\partial w_2^*}{\partial r^*} + w_2^* \frac{\partial w_2^*}{\partial z^*} . \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

As equações definidas em (3.1) e (3.2) estão sujeitas às condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 u_1^*(r^*, h, t^*) = w_1^*(r^*, h, t^*) = 0 \quad , \quad v_1^*(r^*, h, t^*) = r^* \Omega e^{i \lambda^* t^*} \quad , \\
 u_1^*(r^*, 0, t^*) = u_2^*(r^*, 0, t^*) \quad , \quad \left. \frac{\partial u_1^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} = \left. \frac{\partial u_2^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} \quad , \\
 v_1^*(r^*, 0, t^*) = v_2^*(r^*, 0, t^*) \quad , \quad \left. \frac{\partial v_1^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} = \left. \frac{\partial v_2^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} \quad , \\
 w_1^*(r^*, 0, t^*) = w_2^*(r^*, 0, t^*) \quad , \quad \left. \frac{\partial w_1^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} = \left. \frac{\partial w_2^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} \quad , \\
 u_2^*(r^*, -h, t^*) = w_2^*(r^*, -h, t^*) = v_2^*(r^*, -h, t^*) = 0 .
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sendo Ω e λ^* a velocidade angular e a frequência de oscilação do disco, e R o número de Reynolds,

$$R = \frac{\rho \Omega h}{\mu} \quad ,$$

definem-se os parâmetros adimensionais de tempo, frequência, espaços, viscosidade, permeabilidade, velocidades e pressão, de acordo com os trabalhos de Bird et al. (1960), Schlichting (1968), Aziz e Na (1976) e Carrocci et al. (1981), respectivamente como:

de Bird et al. (1960), Schlichting (1968), Aziz e Na (1976) e Carrocci et al. (1981), respectivamente como:

$$\begin{aligned}
 t &= t^* \frac{v_1}{h^2}; & \lambda &= \lambda^* \frac{h^2}{v_1}; \\
 r &= \frac{r^*}{h}; & z &= \frac{z^*}{h}; \\
 \alpha_j &= \frac{v_j}{v_1}; & \beta_1 &= 0; & \beta_2 &= \frac{v_2 h^2}{v_1 \varepsilon}; \\
 u_j &= \frac{u_j^*}{h \Omega}; & v_j &= \frac{v_j^*}{h \Omega}; & w_j &= \frac{w_j^*}{h \Omega}; \\
 p &= \frac{p^*}{\rho_j h^2 \Omega^2} \quad e \quad j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando-se os parâmetros definidos em (3.4) nos sistemas de equações (3.1) e (3.2) obtêm-se as equações de movimento em função do número de Reynolds R:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} - u_j \left[\frac{1}{r} + \beta_j \right] + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - \alpha_j \frac{\partial u_j}{\partial t} = \\
 \alpha_j R \left[\frac{\partial p}{\partial r} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial r} + w_j \frac{\partial u_j}{\partial z} - \frac{v_j^2}{r} \right], \\
 \\
 \frac{\partial^2 v_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_j}{\partial r} - v_j \left[\frac{1}{r} + \beta_j \right] + \frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} - \alpha_j \frac{\partial v_j}{\partial t} = \\
 \alpha_j R \left[u_j \frac{\partial v_j}{\partial r} + w_j \frac{\partial v_j}{\partial z} - \frac{u_j v_j^2}{r} \right], \\
 \\
 \frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} - \beta_j w_j + \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} - \alpha_j \frac{\partial w_j}{\partial t} = \\
 \alpha_j R \left[u_j \frac{\partial w_j}{\partial r} + w_j \frac{\partial w_j}{\partial z} \right], \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

sujeitas às condições de contorno.

$$u_1(r, 1, t) = w_1(r, 1, t) = 0, \quad v_1(r, 1, t) = r e^{i\lambda t},$$

$$u_1(r, 0, t) = u_2(r, 0, t), \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|_{z=0},$$

$$v_1(r, 0, t) = v_2(r, 0, t), \quad \left. \frac{\partial v_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial v_2}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (3.6)$$

$$w_1(r, 0, t) = w_2(r, 0, t), \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial w_2}{\partial z} \right|_{z=0},$$

$$u_2(r, -1, t) = w_2(r, -1, t) = v_2(r, -1, t) = 0.$$

As soluções (McLachlan, 1934; Stoker, 1950; Watson, 1966; Churchill, 1969; Aziz & Na, 1976; Kevorkian & Cole, 1981; Sinay, 1982; Beyer, 1984; Philip, 1990; Sinay & Gotaç, 1991) que satisfazem os sistemas de equações em (3.5) são:

$$\begin{aligned} u_j(r, z, t) &= \omega_j(r, z, t) = 0, \\ v_j(r, z, t) &= A_j r \cos(\sigma_j z + \delta_j) e^{i\lambda t}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_j &= -\alpha_j \lambda i - \beta_j, \\ A_1 &= \frac{1}{\cos(\sigma_1 + \delta_1)}, \\ A_2 &= \frac{A_1 \cos \delta_1}{\cos \delta_2}, \\ \delta_1 &= \arctg\left(-\frac{\delta_2}{\delta_1} \cot g \delta_2\right), \\ \delta_2 &= \frac{(2n+1)\pi}{2} + \sigma_2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial r} = \frac{v_j^2}{r} \quad (3.9)$$

Integrando-se (3.9), as distribuições radiais de pressão são:

$$p_j(r, z, t) = A_j^2 r^2 \cos^2(\sigma_j z + \delta_j) e^{2i\lambda t} \quad (3.10)$$

Apresentam-se as ilustrações das avaliações numéricas de (3.7) e (3.10) na seção 4.2.1.

3.3 Distribuições de Temperatura entre Discos Coaxiais

Considerando-se T_j^* as temperaturas, κ_j , c_j e μ_j as condutividades térmicas, os calores específicos e as viscosidades cinemáticas nos respectivos meios, as equações de conservação de energia em coordenadas cilíndricas nas duas regiões de escoamento são:

$$\rho_j c_j \left[\frac{\partial T_j^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial T_j^*}{\partial r^*} + w_j^* \frac{\partial T_j^*}{\partial z^*} \right] = \kappa \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial T_j^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial z^{*2}} \right] + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_j^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{u_j^*}{r^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial w_j^*}{\partial r^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial z^*} \right)^2 \right], \quad (3.11)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$T_1^*(r^*, h, t^*) = T_1, \quad T_2^*(r^*, -h, t^*) = T_2, \quad (3.12)$$

$$T_1^*(r^*, 0, t^*) = T_2^*(r^*, 0, t^*), \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = \kappa_2 \frac{\partial T_2^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$$

Usando-se as definições em (3.4) e o parâmetro de temperatura,

definido como $T_j = \frac{T_j^* - T_1}{T_2 - T_1}$, no sistema de equações (3.11) tem-se:

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} - \alpha_j \text{Pr}_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = \alpha_j \text{Pr}_j R \left[u_j \frac{\partial T_j}{\partial r} + w_j \frac{\partial T_j}{\partial z} \right] + \text{Pr}_j \text{Ec}_j \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_j}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{\partial u_j}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial r} + \frac{\partial v_j}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.13)$$

No caso isotérmico as soluções de (3.13) estão sujeitas às condições de contorno:

$$T_1(r, 1, t) = 0, \quad T_2(r, -1, t) = 1, \quad (3.14)$$

$$T_1(r, 0, t) = T_2(r, 0, t), \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Substituindo-se as velocidades em (3.13) pelas expressões em (3.7), as equações para a determinação das distribuições de temperatura são:

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} - \alpha_j \text{Pr}_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = -\text{Pr}_j \text{Ec}_j A_j^2 \left[r^2 \text{sen}^2(\sigma_j z + \delta_j) e^{2t\lambda t} \right]. \quad (3.15)$$

Definindo-se $T_j = T_{1j} + T_{2j} + T_{3j}$, de modo que

$$\frac{\partial^2 T_{1j}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{1j}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{1j}}{\partial z^2} - \alpha_j \text{Pr}_j \frac{\partial T_{1j}}{\partial t} = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 T_{2j}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{2j}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{2j}}{\partial z^2} - \alpha_j \text{Pr}_j \frac{\partial T_{2j}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \text{Pr}_j \text{Ec}_j A_j^2 \sigma_j^2 r^2 e^{2i\lambda t}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 T_{3j}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{3j}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{3j}}{\partial z^2} - \alpha_j \text{Pr}_j \frac{\partial T_{3j}}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{Pr}_j \text{Ec}_j A_j^2 \sigma_j^2 r^2 \cos^2(\sigma_j z + \delta_j) e^{2i\lambda t}, \quad (3.18)$$

as temperaturas no escoamento livre e no meio poroso são:

$$T_1 = 1 - z + \left[(A \cos \xi z + B \sin \xi z) r^2 + 4z(A \sin \xi z - B \cos \xi z) \right] e^{2i\lambda t} + (A_1 \cos \xi z + B_1 \sin \xi z) e^{2i\lambda t} + \left[a r^2 + c + (a_1 r^2 + c_1) \cos 2(\sigma_1 z + \delta_1) \right] e^{2i\lambda t}, \quad (3.19)$$

$$T_2 = 1 + \left[(A^* \cos \xi_1 z + B^* \sin \xi_1 z) r^2 + 4z(A^* \sin \xi_1 z - B^* \cos \xi_1 z) \right] e^{2i\lambda t} + (A_1^* \cos \xi_1 z + B_1^* \sin \xi_1 z) e^{2i\lambda t} + \left[a^* r^2 + c^* + (a_1^* r^2 + c_1^*) \cos 2(\sigma_2 z + \delta_2) \right] e^{2i\lambda t}.$$

onde

$$\xi_j = -2 \alpha_j \text{Pr}_j i \lambda,$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\text{Ec}_1 A_1^2 \sigma_1^2}{4 i \lambda \alpha_1}, & a^* &= \frac{\text{Ec}_2 A_2^2 \sigma_2^2}{4 i \lambda \alpha_2}, \\ c &= -\frac{\text{Ec}_1 A_1^2 \sigma_1^2}{2 \lambda \alpha_1^2 \text{Pr}_1}, & c^* &= -\frac{\text{Ec}_2 A_2^2 \sigma_2^2}{2 \lambda \alpha_2^2 \text{Pr}_2}, \\ a_1 &= -\frac{\text{Ec}_1 A_1^2 \sigma_1^2 \text{Pr}_1}{2(4 \sigma_1^2 + 2 i \lambda)}, & a_1^* &= -\frac{\text{Ec}_2 A_2^2 \sigma_2^2 \text{Pr}_2}{2(4 \sigma_2^2 + 2 i \lambda)}, \\ c_1 &= -\frac{2 \text{Ec}_1 A_1^2 \sigma_1^2 \text{Pr}_1}{(4 \sigma_1^2 + 2 i \lambda)^2} e & c_1^* &= -\frac{2 \text{Ec}_2 A_2^2 \sigma_2^2 \text{Pr}_2}{(4 \sigma_2^2 + 2 i \lambda)^2}. \end{aligned}$$

As distribuições de temperatura entre discos coaxiais são estudadas nos três casos citados, e as condições de contorno para o estudo dos casos ii) e iii) são as seguintes:

ii)

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=1} = 0, \quad T_2(r, -1, t) = 1,$$

$$T_1(r, 0, t) = T_2(r, 0, t), \quad \kappa_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \kappa_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

iii)

$$T_1(r, 1, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=-1} = 0,$$

$$T_1(r, 0, t) = T_2(r, 0, t), \quad \kappa_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \kappa_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

As avaliações numéricas de (3.19) são realizadas para os três casos usando-se um programa escrito na linguagem simbólica Mathematica, os resultados encontram-se ilustrados na seção 4.2.2.

Capítulo 4

RESULTADOS

4.1. Perfis de Velocidade e Temperatura para Placas Paralelas

Apresentam-se nesta seção os resultados obtidos avaliando-se numericamente as soluções das equações diferenciais estudadas no capítulo 2.

4.1.1. Velocidade e Temperatura em Placas Paralelas sem Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor

Ilustram-se a seguir exemplos numéricos das distribuições de velocidade e temperatura, determinados a partir das soluções analíticas das equações (2.7) e (2.8).

A Figura 4.1 mostra o desenvolvimento no tempo dos perfis de velocidade para o escoamento na configuração plana, quando os parâmetros adimensionais de frequência e porosidade tomam os valores $\omega = 10$ e $\beta = 12$. Estes parâmetros foram escolhidos por exemplificarem casos reais da Engenharia e fornecerem representações gráficas em escalas mais adequadas. Observa-se, na Figura 4.1, que devido à condição de não deslizamento as partículas próximas à placa superior apresentam a mesma velocidade da placa. Essa velocidade que é transmitida para as partículas vizinhas graças à viscosidade do fluido, deforma os

perfis planos característicos nos escoamentos uniformes, transformando-os em superfícies curvas.

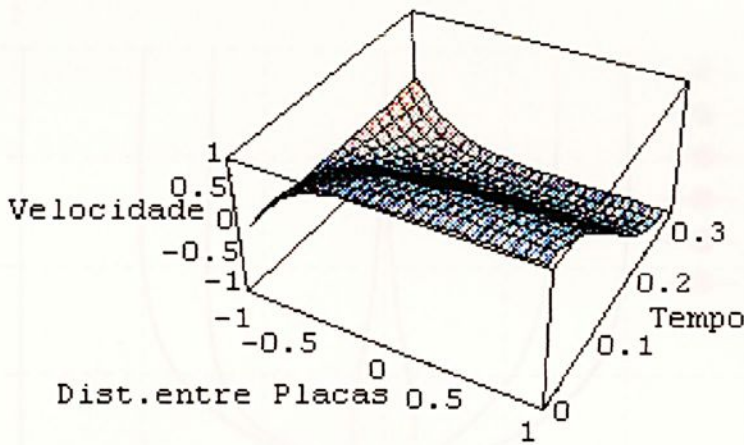


Figura 4.1 Representação da variação da velocidade no tempo e no espaço entre duas placas paralelas, $\omega = 10$ e $\beta = 12$.

A análise do comportamento da velocidade do escoamento de fluido lubrificante entre placas paralelas, num intervalo de tempo igual a um período de oscilação, $T=2\pi/\omega$, quando a placa superior oscila com uma frequência adimensionalizada $\omega = 10$, encontra-se esquematizada na Figura 4.2. Observa-se que mesmo na ausência de gradiente externo de pressão, há inversões no sentido do movimento em vários instantes de tempo, como por exemplo em $t = T/4$.

O estudo da variação da velocidade de escoamento em função da permeabilidade do meio no instante de tempo $t = 1s$, ou seja, $t \cong 4T/5$, quando os

parâmetros adimensionais de frequência $\omega = 5$, e de porosidade β , varia entre 1,33 e 12, é apresentado na Figura 4.3.

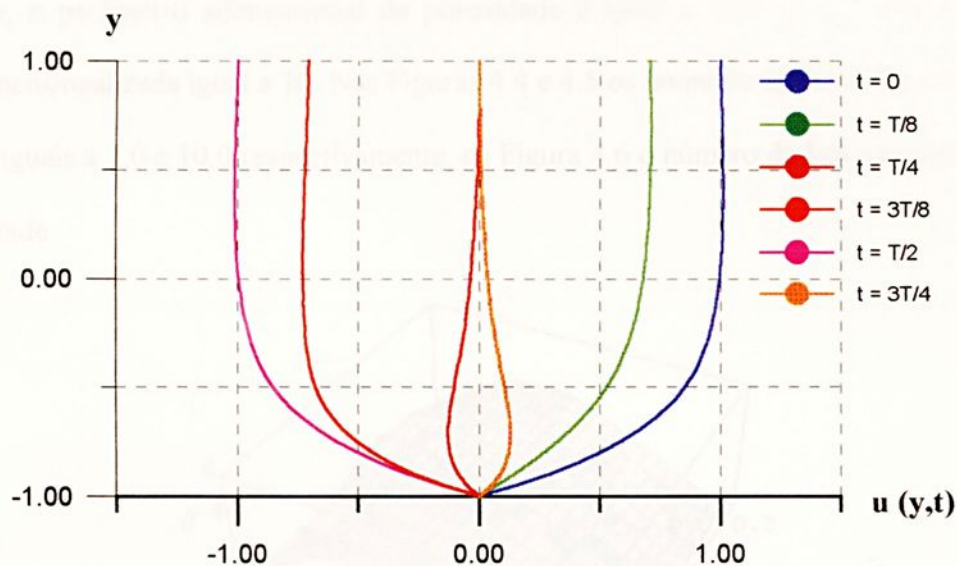


Figura 4.2 Variação da velocidade $u(y,t)$ no espaço y entre placas paralelas e isotérmicas com $\omega = 10$ e $\beta = 12$.

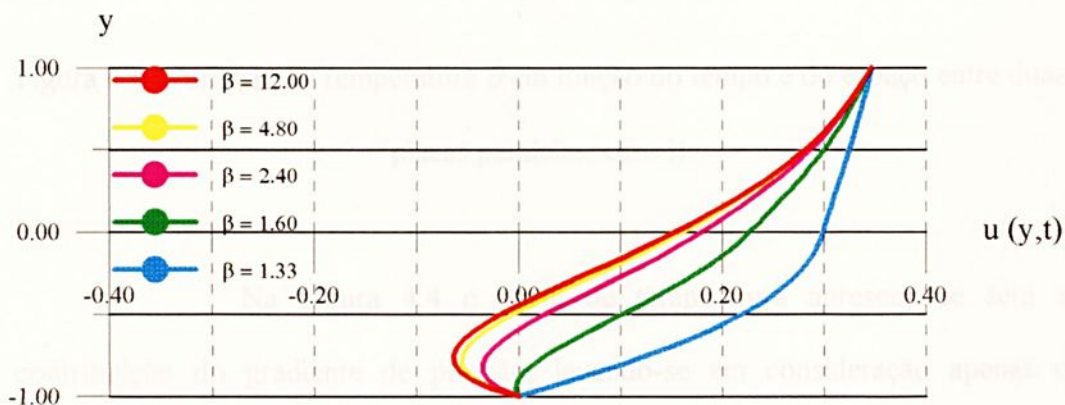


Figura 4.3 Representação da variação da velocidade $u(y,t)$ com a permeabilidade para duas placas isotérmicas.

As Figuras 4.4 a 4.6 ilustram as variações da temperatura em função do tempo e do espaço entre placas paralelas para os três casos estudados, quando a condutividade térmica do meio poroso é dez vezes maior que a da região livre, o parâmetro adimensional de porosidade é igual a 0,0012, e a frequência adimensionalizada igual a 10. Nas Figuras 4.4 e 4.5 os números de Prandtl e Eckert são iguais a 1,0 e 10,0 respectivamente, na Figura 4.6 o número de Eckert é igual à unidade.

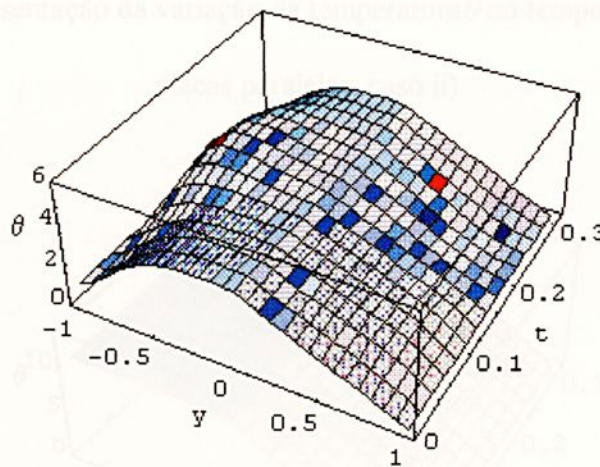


Figura 4.4 Variação da temperatura θ em função do tempo e do espaço entre duas placas paralelas, caso i).

Na Figura 4.4 o perfil de temperatura apresenta-se sem a contribuição do gradiente de pressão, levando-se em consideração apenas o movimento da placa superior. Observa-se que as oscilações são perceptíveis nas proximidades da placas inferior para tempos adimensionais entre 0,15 e 0,25, mostrando que a temperatura matem-se praticamente invariável no tempo.

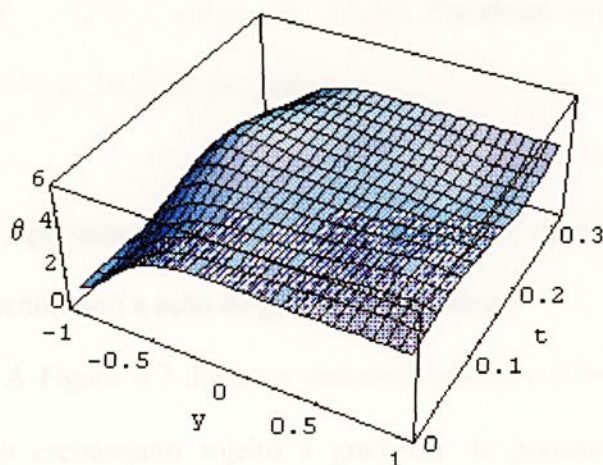


Figura 4.5 Representação da variação da temperatura θ no tempo e no espaço entre placas paralelas, caso ii).

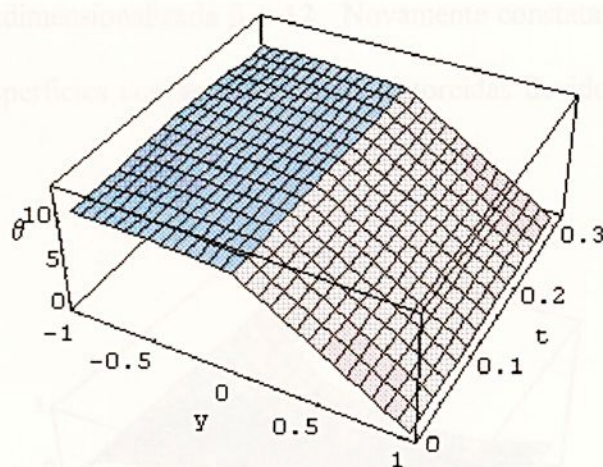


Figura 4.6 Variação da temperatura θ em função do tempo e no espaço entre placas paralelas, caso iii).

A Figura 4.6 exhibe o efeito da brusca variação das condições de condutividade térmica entre os meios, observe a interface representada por $y = 0$.

4.1.2. Velocidade e Temperatura em Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor

Apresentam-se a seguir os resultados numéricos obtidos no estudo de escoamentos sob a ação de gradiente de pressão.

A Figura 4.7 ilustra o desenvolvimento no tempo dos perfis de velocidade para o escoamento sujeito a gradiente de pressão na configuração plana, quando a frequência adimensionalizada $\omega = 10$, os parâmetros adimensionais de gradiente de pressão nas regiões livre e porosa são iguais à unidade e a permeabilidade adimensionalizada $\beta = 12$. Novamente constata-se a presença das oscilações nas superfícies curvas, agora mais distorcidas devido ao fenômeno da pressão.

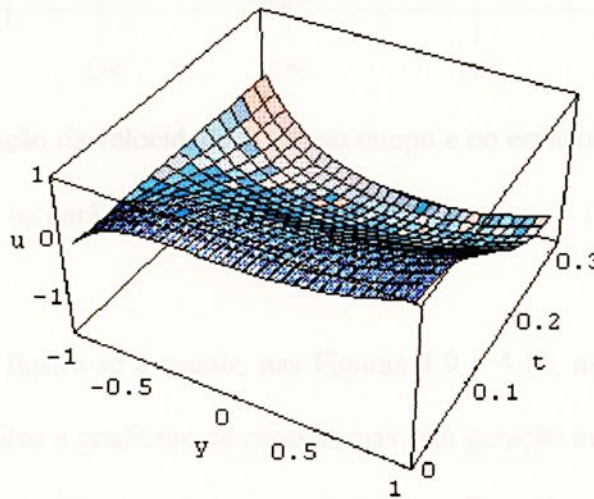


Figura 4.7 Velocidade u em função do tempo t e do espaço entre placas y com

$\omega=10$, $\beta = 12$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Escoamento sujeito a gradiente de pressão.

A influência da pressão no comportamento da velocidade de escoamento, num intervalo de tempo igual a um período de oscilação, encontra-se ilustrado na Figura 4.8. Verifica-se que nos perfis de velocidade as inversões originadas pelas forças viscosa e de inércia do fluido mantêm-se, apresentando-se novas distorções devido à presença do gradiente de pressão.

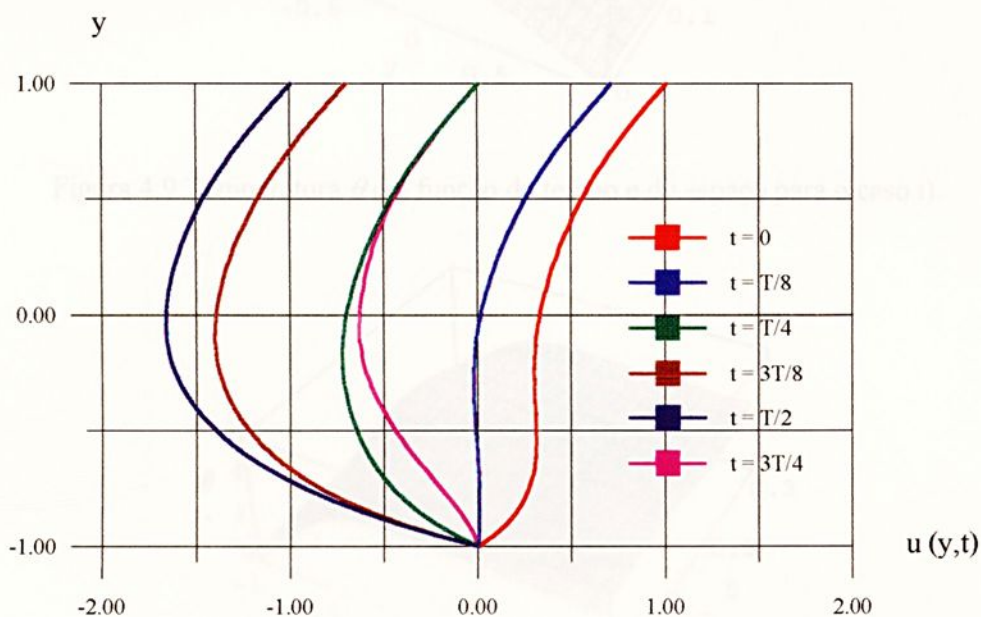


Figura 4.8 Variação da velocidade $u(y,t)$ no tempo e no espaço entre as placas y , os parâmetros são $\omega = 10$, $\beta = 12$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Ilustra-se a seguir, nas Figuras 4.9 a 4.11, as temperaturas nos escoamentos sujeitos a gradiente de pressão mas sem geração interna de calor para os casos i), ii) e iii) quando os parâmetros adimensionais de frequência, permeabilidade, gradiente de pressão e condutividade térmica são respectivamente iguais a $\omega = 10$, $\beta = 0,0012$, $\gamma_1 = 0,1$, $\gamma_2 = 0,5$ e $k = 10$. Os números de Prandtl e Eckert utilizados são $Pr = 1,0$ e $Ec=10$.

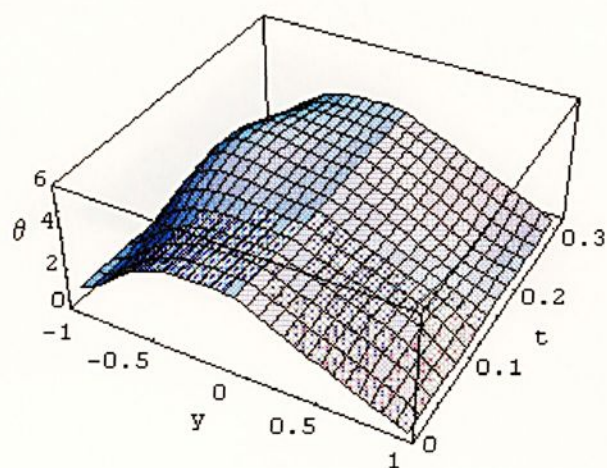


Figura 4.9 Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso i).

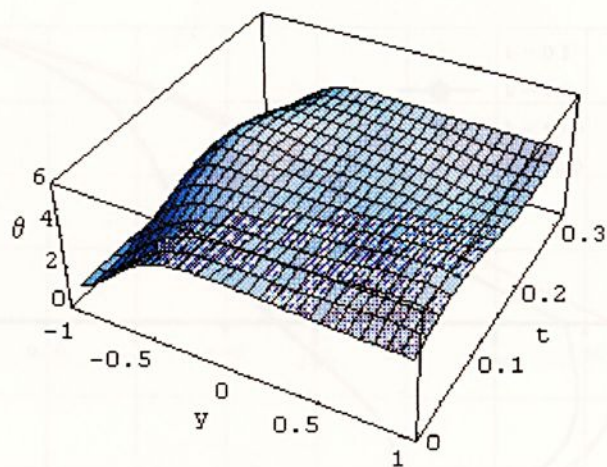


Figura 4.10 Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso ii).

Observa-se uma grande semelhança entre as distribuições de temperatura apresentadas nas Figuras 4.9 e 4.10, porém pode-se notar que os perfis apresentam alterações na região do escoamento livre devido às condições de contorno na placa superior.

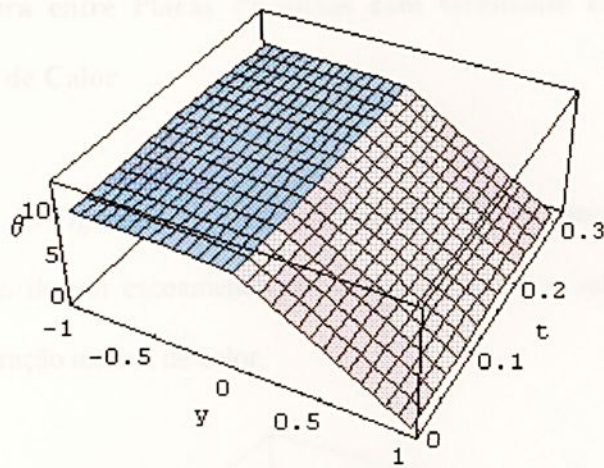


Figura 4.11 Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso iii).

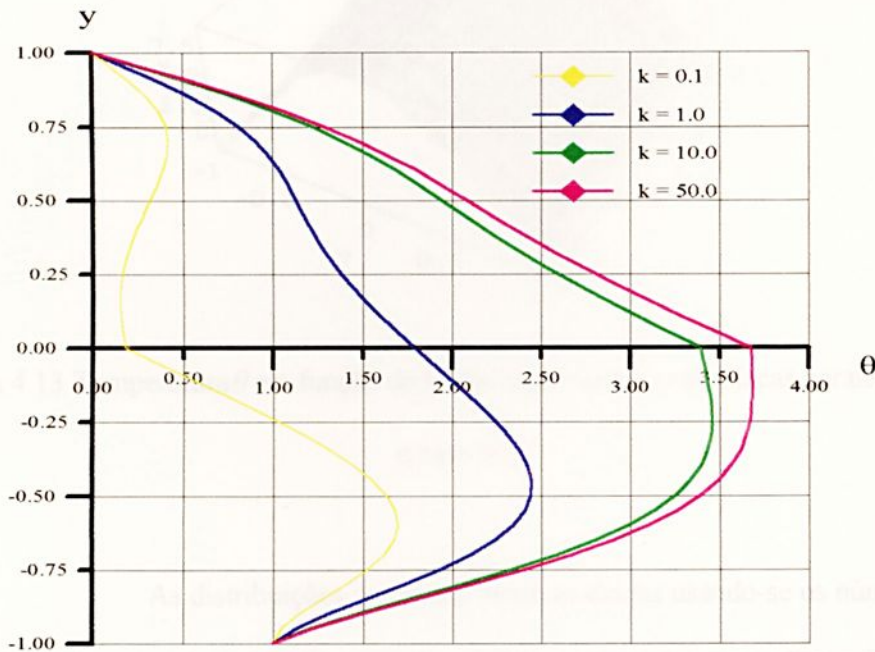


Figura 4.12 Comportamento da temperatura θ no instante $t \cong 3T/2$ com a variação da razão entre os coeficientes de condutividade térmica, caso i).

A Figura 4.12 apresenta a análise do comportamento da temperatura no instante de tempo $t = 1s$ ($t \cong 3T/2$) quando a razão entre os coeficientes de condutividade térmica do meio poroso e do meio livre varia entre 0,1 e 50.

4.1.3 Temperatura entre Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e com Geração Interna de Calor

As Figuras 4.13 a 4.15 exibem os perfis de temperatura obtidos nas análises numéricas de um escoamento não estacionário sob a ação de gradiente de pressão, e com geração interna de calor.

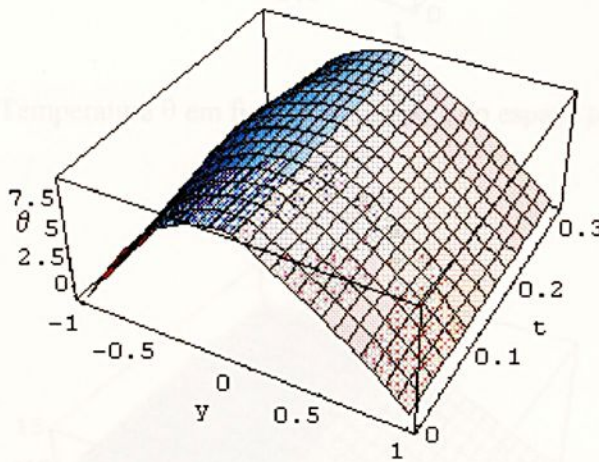


Figura 4.13 Temperatura θ em função do tempo e do espaço entre placas paralelas para o caso i).

As distribuições ilustradas foram avaliadas usando-se os números de Prandtl e Eckert iguais a 1 e 10 respectivamente, e os parâmetros adimensionais de frequência, permeabilidade, condutividade térmica, gradiente de pressão e geração interna de calor iguais a $\omega = 10$, $\beta = 0,0012$, $k = 10$, $\gamma_1 = 0,1$, $\gamma_2 = 0,5$, $q_1 = 5$ e $q_2 = 20$.

Quando há geração interna de calor as variações de temperatura são maiores que as verificadas nas Figuras 9, 10 e 11. Devido a estas variações os efeitos de oscilação são quase imperceptíveis.

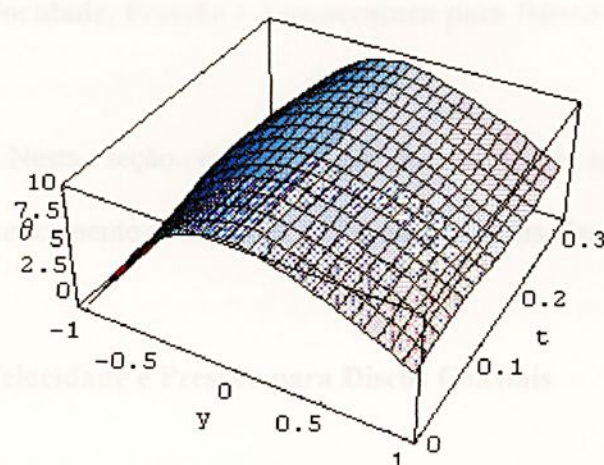


Figura 4.14 Temperatura θ em função do tempo e do espaço para o caso ii).

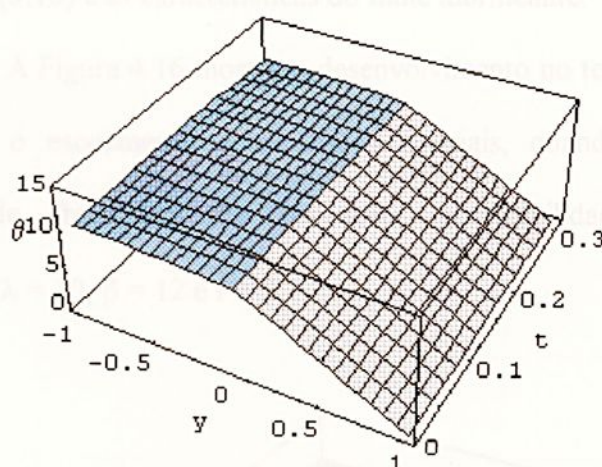


Figura 4.15 Variação da temperatura θ no tempo e no espaço entre placas paralelas,
caso iii)

4.2 Perfis de Velocidade, Pressão e Temperatura para Discos Coaxiais

Nesta seção encontram-se ilustrados os resultados obtidos avaliando-se numericamente as soluções das equações analisadas no capítulo 3.

4.2.1 Perfis de Velocidade e Pressão para Discos Coaxiais

Apresentam-se a seguir exemplos numéricos das distribuições de velocidade e pressão determinados utilizando-se as soluções analíticas das equações (3.7) e (3.10) e as características do filme lubrificante.

A Figura 4.16 mostra o desenvolvimento no tempo dos perfis de velocidade para o escoamento entre discos coaxiais, quando os parâmetros adimensionais de frequência de oscilação, permeabilidade e raio são respectivamente $\lambda = 10$, $\beta = 12$ e $r = 2$.

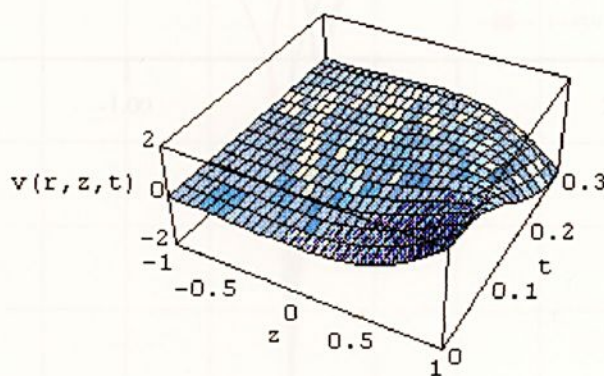


Figura 4.16 Variação da velocidade $v(r, z, t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais.

Verifica-se que a oscilação torcional do disco superior deforma os perfis inicialmente planos transformando-os em superfícies curvas, este efeito é mais evidente na região de escoamento livre porque nesta, a intensidade das forças viscosas é menor que no meio poroso.

A análise do comportamento da velocidade de escoamento num intervalo de tempo igual a um período de oscilação $T = 2\pi/\lambda$, para a frequência adimensionalizada $\lambda = 10$ e raio $r = 2$ encontra-se esquematizada na Figura 4.17. As inversões no sentido do movimento observadas em vários instantes de tempo, como por exemplo em $t=T/4$, são devidas às forças viscosas, de inércia e de pressão do fluido.

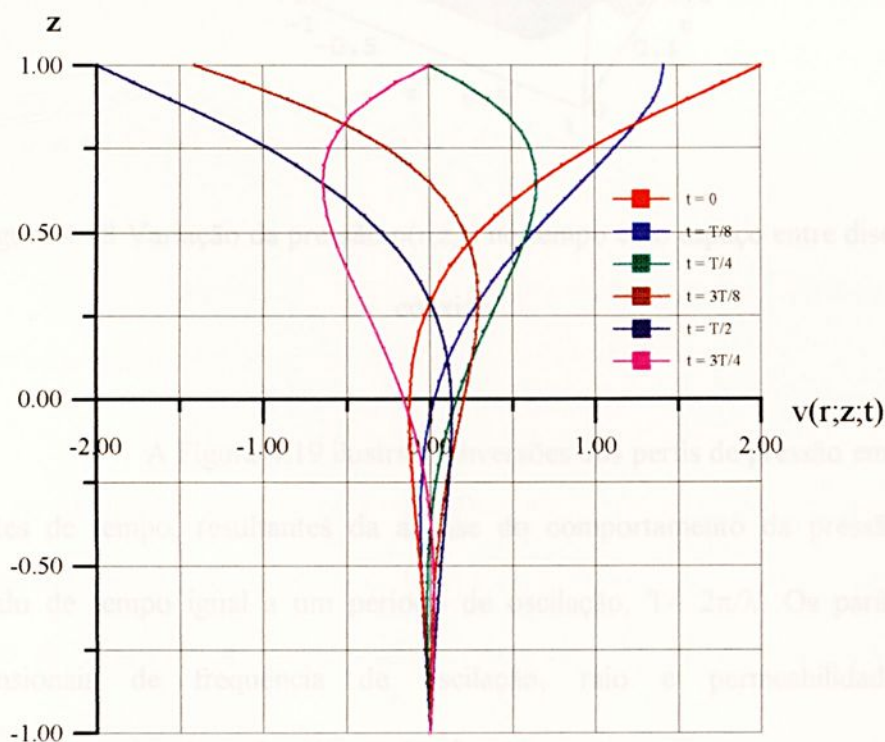


Figura 4.17 Variação da velocidade $v(r,z,t)$ em função do espaço z entre discos coaxiais.

O desenvolvimento no tempo dos perfis de pressão para o escoamento entre discos coaxiais quando os parâmetros adimensionais de frequência, raio e permeabilidade são respectivamente $\lambda = 10$, $r = 2$ e $\beta = 12$, encontra-se ilustrado na Figura 4.18. No intervalo de tempo adimensional de 0 a 0,3 pode-se observar um ciclo aproximadamente completo da oscilação da pressão, o que reflete a sua dependência com o dobro do tempo.

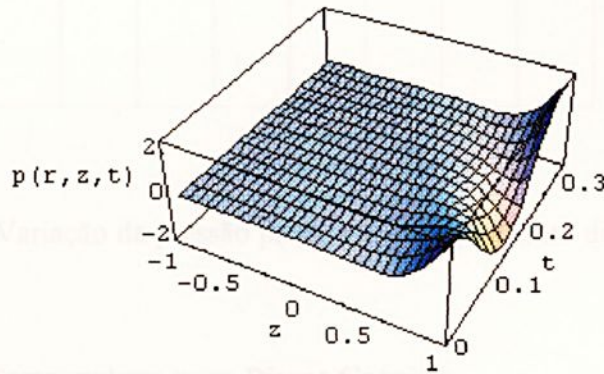


Figura 4.18 Variação da pressão $p(r, z, t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais.

A Figura 4.19 ilustra as inversões dos perfis de pressão em vários instantes de tempo, resultantes da análise do comportamento da pressão num intervalo de tempo igual a um período de oscilação, $T = 2\pi/\lambda$. Os parâmetros adimensionais de frequência de oscilação, raio e permeabilidade são respectivamente iguais a: $\lambda = 10$, $r = 2$ e $\beta = 12$.

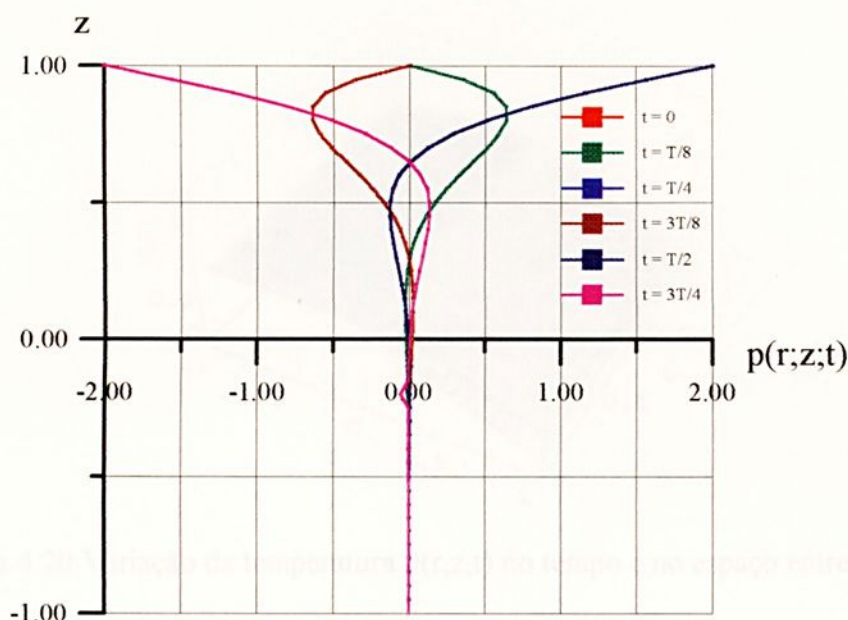


Figura 4.19 Variação da pressão $p(r,z,t)$ no espaço z entre discos coaxiais.

4.2.2 Perfis de Temperatura para Discos Coaxiais

Ilustram-se a seguir, exemplos numéricos das distribuições de temperatura determinados usando-se as equações (3.19).

As Figuras 4.20 a 4.22 exibem o desenvolvimento no tempo dos perfis de temperatura para o escoamento entre discos coaxiais, quando a condutividade térmica do meio poroso é dez vezes maior que a da região porosa, o número de Prandtl e a permeabilidade adimensionalizada são respectivamente $Pr=1$ e $\beta = 0,0012$.

Os perfis de temperatura apresentados nas Figuras 4.20 a 4.22 foram obtidos usando-se $\lambda = 10$ e $\beta = 0,001$, e ilustram o desenvolvimento das

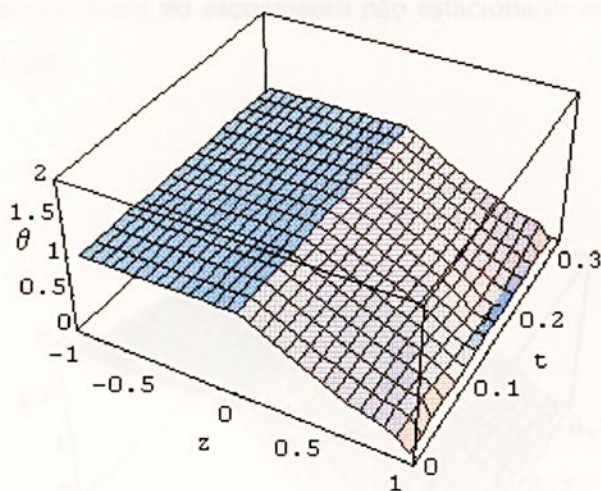


Figura 4.20 Variação da temperatura $\theta(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais caso i).

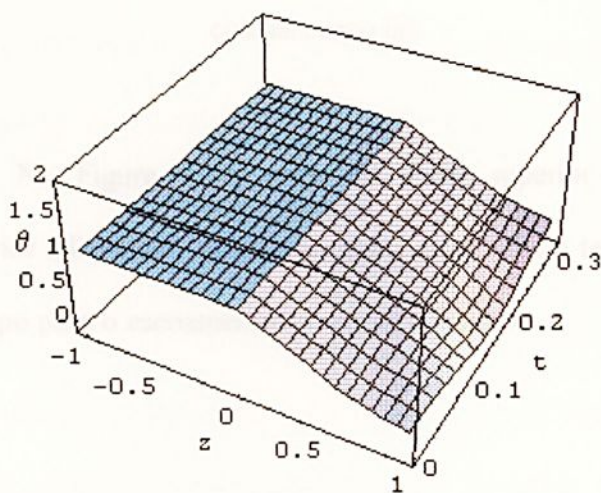


Figura 4.21 Variação da temperatura $\theta(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais caso ii).

Os perfis de temperatura apresentados nas Figuras 4.21 e 4.22 foram obtidos usando-se $\lambda = 10$ e $Ec = 0,001$, e ilustram o comportamento das

distribuições de temperatura no escoamento não estacionário entre discos coaxiais para os casos ii) e iii).

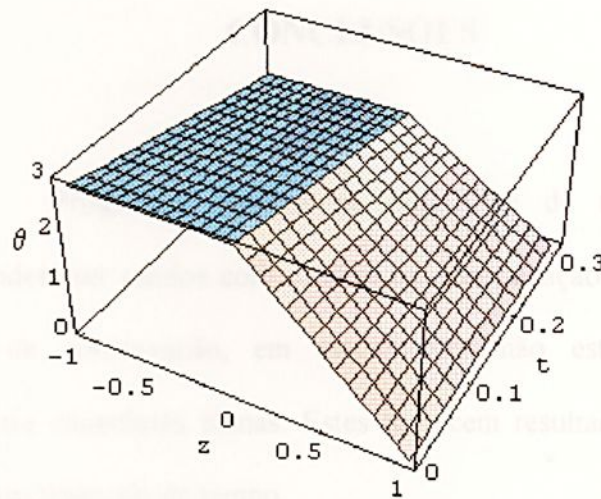


Figura 4.22 Variação da temperatura $\theta(r,z,t)$ no tempo e no espaço entre discos coaxiais caso iii).

Na Figura 4.22, caso iii) disco superior com temperatura constante e inferior adiabático, observa-se que a temperatura tende a ser uniforme ao longo do tempo para o escoamento na região porosa.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Programas escritos na linguagem de manipulação simbólica Mathematica podem ser usados com sucesso na determinação das soluções analíticas das equações de conservação, em escoamentos não estacionários de fluidos newtonianos entre superfícies planas. Estes fornecem resultados confiáveis que são obtidos num curto intervalo de tempo.

Usando-se um Pentium com 16 MB de RAM, o tempo médio de CPU dispendido na avaliação das distribuições de velocidade e temperatura, para o escoamento entre placas paralelas é da ordem de 80s.

Os resultados apresentados neste trabalho são específicos para o escoamento de fluido lubrificante entre superfícies. Estabelecendo-se através de experimentos numéricos a variação da frequência, entre 100 e 1200 rpm, o espaçamento entre as superfícies varia entre 10^{-3} e 10^{-2} m, observa-se que a ordem de grandeza destes parâmetros estão próximos das situações reais dos equipamentos mecânicos.

Escolheram-se valores do parâmetro adimensional de permeabilidade β que representassem, com grande fidelidade, casos reais de aplicações na Engenharia.

Neste intervalo, $1,33 \leq \beta \leq 12$, a intensidade da velocidade de escoamento cresce com a permeabilidade enquanto a tensão de cisalhamento decresce, como mostra a Figura 4.3. Altas permeabilidades, além de diminuir a retenção do fluido lubrificante, diminuem a propriedade amortecedora do meio poroso nos choques mecânicos dos mancais.

A análise de velocidades e temperaturas com valores próximos aos utilizados no funcionamento de máquinas motrizes, mostra que o fenômeno predominante na transferência de calor é a condução de calor. Este efeito pode ser controlado variando-se a condutividade térmica e as condições de isolamento e troca de calor nas superfícies.

Para o escoamento não estacionário entre placas paralelas a temperatura nas duas regiões de escoamento aumenta com a razão entre os coeficientes de condutividade térmica, como ilustra a Figura 4.12

A avaliação mais precisa dos perfis de velocidade e temperatura, realizada neste trabalho possibilita determinar melhores lubrificantes e materiais porosos (bronzinas) para equipamentos mecânicos e podem ser utilizados na obtenção de parâmetros de projetos.

Uma análise mais profunda das distribuições de velocidade e temperatura em escoamentos entre superfícies planas ou não, pode contribuir para o estudo das distribuições de vazios em materiais sinterizados.

Sugerem-se os seguintes trabalhos futuros:

1. Estudo estatístico das distribuições de vazios em meios porosos. Esta análise tem como objetivo principal verificar como as distribuições de vazios influenciam os perfis de velocidade.
2. Escoamentos em meios porosos anisotrópicos. Pesquisar as contribuições das componentes, paralela $\beta_{//}$ e transversal β_{\perp} , do tensor permeabilidade nos escoamentos.
3. Simulação de um filme lubrificante, entre a placa oscilante e o meio poroso. Neste estudo pretende-se analisar uma situação mais próxima ao caso real de mancais de deslizamento.
4. Escoamentos em configurações cilíndricas e esféricas. Extender o estudo de escoamentos entre superfícies paralelas, para escoamentos entre cilindros e esferas concêntricas com espaçamentos, entre eles, preenchidos em parte com meios porosos.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AZIZ, A., NA, T. Y. *Perturbation methods in heat transfer*. Washington D.C.: Hemisphere Publishing, 1976. 199p.
- BASSET, A. B. *A treatise on hydrodynamics*. New York: Dover Publication, 1961. v. 2, 328p.
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluids dynamics*. London: Cambridge University Press, 1967. p. 223 - 224.
- BEYER, W. H. *CRC Standart mathematical tables*. 27 ed. Boca Raton FL: CRC Press, 1984. p. 333 - 339.
- BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, E. N. *Transport phenomena*. New York: John Wiley & Sons, 1960. 780p.
- BORNE, L. Harmonic Stokes flow through periodic porous media: a 3D boundary element method. *J. Computational Physics*, v. 99, p. 214 -232, 1992.
- CAMERON, A. *Basic lubrication theory*. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1981. 256p.
- CARROCCI, L. R. et al. Escoamento de Couette com parte do espaçamento preenchido por meio poroso. in: ENCONTRO SOBRE ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS, 9, 1981, Salvador, BA.
- CARROCCI, L. R. *Escoamento de Couette entre duas placas paralelas com parte do espaçamento preenchido com meio poroso*. Campinas, 1982, 54p.



- Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Campinas, Universidade Estadual de Campinas.
- CARROCCI, L. R., LIU, C. Y., ISMAIL, K. A. R. Transferência de calor no escoamento de Couette com parte do espaçamento entre as placas preenchida com meio poroso. in: ENCONTRO SOBRE ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS, 10, 1982, São Carlos, SP.
- CHURCHILL, R. V. *Fourier series and boundary value problems*. 2 ed. New York: McGraw-Hill, 1969. 248p.
- COX, S. M. Analysis of steady flow in a channel with one porous wall, or with accelerating walls. *SIAM J. Appl. Math.* v. 51 (2), p. 429 - 438, 1991.
- ENCICLOPAEDIA BRITANNICA. *Bearing*. Chicago, 1969. v.3, p. 329 - 334.
- FRANCIS, F. O. *Hidráulica de meios permeáveis: escoamentos em meios porosos*. Rio de Janeiro: Interciência, 1980. 169p.
- HINZE, J. O. *Turbulence*. 2 ed. New York: McGraw-Hill, 1987. p. 601-5.
- HOUPEURT, A. *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*. 2 ed. Paris: Éditions Techniq, 1975.
- ISHIGAKI, H. An exact periodic solution of the energy equations. *J. Fluid Mechanics*, v. 50, p. 657 - 668, 1971.
- JONES, A.F., ROSENBLAT, S. The flow induced by torsional oscillations of infinite planes. *J. Fluid Mechanics*, v. 37, p. 337 -347, 1969.



- JONES, M. H., SCOTT, D. *Industrial tribology: the practical aspects of friction, lubrication and wear*. New York: Elsevier Scientific Publishing, 1983. 516p.
- KEVORKION, J., COLE, J. D. *Perturbation methods in applied mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1981. p. 105 - 450.
- KLINE, S. J. *Similitude and approximation theory*. New York: McGraw-Hill, 1965. 229p.
- LNCC, O sistema SDP. Relatório de pesquisa e desenvolvimento. Rio de Janeiro: LNCC, 1987.
- MAEDER, R. E. *Programing in mathematica*. New York: Addison Wesley Publishing, 1990. 267p.
- McLACHLAN, N. W. *Bessel functions for engineers*. London: Oxford University Press, 1934. 191p.
- MOCHIZUKI, S., YANG, W. Self - sustained radial oscillating flows between parallel disks. *J. Fluid Mechanics*, v. 154, p. 377 - 397, 1985.
- MOUALLEM, G. E. *Aplicação do método de diferenças finitas à análise de mancais axiais hidrodinâmicos de sapatas setoriais*. Itajubá, 1996, 121p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Mecânica, Escola Federal de Engenharia de Itajubá.
- MOUALLEM, G. E., FILHO, M. N., SCHWARZ, V. A. Solução numérica da equação de Reynolds para mancais axiais de sapatas setoriais. in: ENCIT/LATCYM, 6, 1996, Florianópolis. *Anais... snt*. p. 1185 - 1190.



- PHILIP, K. H. M. A. Similarity solution of the two - dimensional unsteady boundary-layer equations. *J. Fluid Mechanics*, v. 216, p. 537 - 559, 1990.
- PINKUS, O. M. M. E., STERNLICHT, B. *Theory of hydrodynamic lubrication*. New York: McGraw-Hill, 1961. 465p.
- RAMOS, A. M. G., AMARANTE, J. C. A., GOUVÊA, J. P. Solução transiente das equações de Navier-Stokes via elementos finitos para análise de escoamentos incompressíveis. in : CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 11, 1991, São Paulo.
- ROSENBLAT, S. Flow between torsionally oscillating disks. *J. Fluid Mechanics*, v. 8, p. 388 - 399, 1960.
- SCHLICHTING, H. *Boundary layer theory*. 6 ed. New York: McGraw-Hill, 1968.
- SINAY, L. *Teoria e aplicações de alguns métodos de perturbações*. Rio de Janeiro: LNCC - CNPq, 1982. 112p.
- SINAY, L. Mathematica™ packages, a user's aid. *Applied Mechanics and Engineering Sciences*. San Diego, CA. 1991.
- SINAY, L., GOTAC, P. R. *Apostila de matemática I*. Curso de combustão e propulsão do INPE. Cachoeira Paulista, 1991.
- SOUNDALGEKAR, H., TAKHAR, H. S., SINGH, M. Unsteady flow in a porous medium between two infinite parallel plates in relative motion. *J. Fluids Engineering*, v. 107, p. 534 - 535, 1985.



STOKER, J. J. *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. New York: Interscience, 1950. v. 2, p. 208 - 235.

WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2 ed. London: Cambridge University Press, 1966.

WHITAKER, S. Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law. *Transport in Porous Media*. v. 1, (1). p. 3 - 25, 1986.

WOLFRAM, S. *Mathematic: a system for doing mathematics by computer*. 2 ed. Reading MA: Addison-Wesley Publishing, 1988. 561p.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu = 1$	0.7	0.3	0.5	-0.6	-0.5	0.5	0.3	0.7
$\mu = 2$	-0.7	0.3	0.5	-0.6	-0.5	0.5	0.3	0.7

Apêndice A

Soluções Analíticas

A.1. Distribuições de Velocidade para Escoamento entre Placas Paralelas

As soluções analíticas das equações diferenciais definidas em (2.7), obtidas utilizando-se o programa apresentado no Apêndice C são:

$$u_j(y,t) = \cos \omega t \left[1 + \sum_{i=1}^4 d_{ij} \varphi_{ij}(y) \right] + \sin \omega t \left[\sum_{i=5}^8 d_{ij} \varphi_{ij}(y) \right]. \quad (\text{A.1.1})$$

Recordando que ω representa a frequência de oscilação da placa superior, $j = 1, 2$ os índices que indicam as variáveis do escoamento nas regiões livre e porosa respectivamente e $\varphi_{ij}(y)$ as combinações entre as funções trigonométricas e hiperbólicas possíveis que compõe as expressões das velocidades, apresenta-se na Tabela A.1.1 os coeficientes constantes d_{ij} em (A.1.1).

Tabela A.1.1 Coeficientes d_{ij} ($\times 10^{-3}$) das distribuições de velocidade.

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
$j = 1$	- 4.7	36.3	5.5	- 36.6	- 36.6	- 5.5	36.3	4.7
$j = 2$	- 4.7	17.9	26.8	-36.6	- 36.6	26.8	- 17.9	4.7

A.2. Distribuições de Temperatura para Escoamento entre Placas Paralelas

A.2.1 Temperatura entre Placas Paralelas sem Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor

No caso em que o escoamento entre placas paralelas não está sujeito a gradiente de pressão externo nem a geração interna de calor, as distribuições de temperatura, representadas pelas soluções analíticas das equações diferenciais definidas em (2.8), são:

$$\theta_j(y,t) = \theta_{hj} + \sum_{i=1}^{27} b_{ij} \phi_{ij}(y,t) \quad (\text{A.2.1.1})$$

O primeiro termo do segundo membro em (A.2.1.1), as constantes b_{ij} são os coeficientes apresentados na Tabela A.2.1.2, $\phi_{ij}(y,t)$ representa as vinte e sete funções possíveis utilizadas na composição das soluções das equações diferenciais não homogêneas.

$$\theta_{hj}(y,t) = \cos 2\omega t (c_{1j} \cosh k_j y + c_{3j} \sinh k_j y) + \sin 2\omega t (c_{2j} \cosh k_j y + c_{4j} \sinh k_j y) + c_{5j} + c_{6j} y, \quad (\text{A.2.1.2})$$

os argumentos k_j são definidos em função da frequência de oscilação, da relação entre as viscosidades cinemáticas e do número de Prandtl, e os valores dos coeficientes c_{ij} em (A.2.1.2) são apresentados na Tabela A.2.1.1.



Tabela A.2.1.1 Coeficientes c_{ij} ($\times 10^{-3}$) das distribuições de temperatura θ_{hj} .

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
$j = 1$	0.7	- 2.3	- 0.7	5.9	337.8	- 337.8
$j = 2$	0.6	- 2.2	0.6	0.5	281.5	- 10.2

Tabela A.2.1.2 Coeficientes b_{ij} ($\times 10^{-5}$) das distribuições de temperatura $\theta_j(y,t)$.

	$j = 1$	$j = 2$
b_1	- 5.7	- 24.0
b_2	6.7	- 19.7
b_3	- 2.1	30.1
b_4	0.0	0.0
b_5	0.0	0.0
b_6	- 8.5	- 7.8
b_7	0.0	0.0
b_8	0.0	0.0
b_9	- 389.7	- 351.5
b_{10}	0.0	.00
b_{11}	0.0	0.0
b_{12}	0.0	.00
b_{13}	225.9	207.7
b_{14}	310.0	283.6
b_{15}	0.0	0.0
b_{16}	- 310.0	- 283.0
b_{17}	226.1	206.4
b_{18}	383.6	350.2
b_{19}	0.0	0.0
b_{20}	0.0	0.0
b_{21}	0.0	0.0
b_{22}	- 226.1	- 206.4
b_{23}	- 310.0	- 283.0
b_{24}	0.0	0.0
b_{25}	310.0	283.6
b_{26}	- 226.0	- 207.7
b_{27}	0.0	0.0

A.2.2 Temperatura entre Placas Paralelas com Gradiente de Pressão e sem Geração Interna de Calor

Sejam $\theta_j(y,t)$, $\theta_{p1j}(y,t)$ e $\theta_{p2j}(y,t)$ as distribuições de temperatura definidas nas equações (A.1.1), (A.2.2.2) e (A.2.2.3) respectivamente, γ_j e α_j os parâmetros gradiente de pressão e viscosidade cinemática, J uma constante definida em função do gradiente de pressão e da viscosidade cinemática e d_{g5j} e d_{g6j} são os coeficientes constantes apresentados na Tabela (A.2.2.1).

As distribuições de temperatura quando o escoamento entre placas paralelas está sujeito a um gradiente de pressão externo, mas não há geração interna de calor são:

$$\theta_{g_j}(y,t) = \theta_j(y,t) + \theta_{p1j}(y,t) + \theta_{p2j}(y,t) + \frac{\gamma_j}{12\alpha_j^2}y^4 + \frac{J}{6}y^3 - \frac{J}{2}y^2 + d_{g5j} + d_{g6j} \quad (\text{A.2.2.1})$$

Na equação (A.2.2.1), $\theta_j(y,t)$, $\theta_{p1j}(y,t)$ e $\theta_{p2j}(y,t)$ representam as distribuições de temperatura definidas nas equações (A.1.1), (A.2.2.2) e (A.2.2.3) respectivamente, γ_j e α_j são os parâmetros gradiente de pressão e viscosidade cinemática, J é uma constante definida em função do gradiente de pressão e da viscosidade cinemática e d_{g5j} e d_{g6j} são os coeficientes constantes apresentados na Tabela (A.2.2.1)

Tabela A.2.2.1 Coeficientes d_{g5j} ($\times 10^{-3}$) das distribuições de temperatura $\theta_{g_j}(y,t)$.

	d_{g5}	d_{g6}
$j = 1$	- 7.8	1.2
$j = 2$	- 6.5	0.1

As distribuições de temperatura, soluções das equações diferenciais apresentadas em (2.20) são:

$$\theta_{p1j}(y,t) = y \left[\cos \omega t \sum_{i=1}^4 p_{ij} \varphi_{ij}(y) + \operatorname{sen} \omega t \sum_{i=5}^8 p_{ij} \varphi_{ij}(y) \right], \quad (\text{A.2.2.2})$$

e os valores dos coeficientes p_{ij} encontram-se tabelados na Tabela A.2.2.2.

Tabela A.2.2.2 Coeficientes p_{ij} ($\times 10^{-3}$) das distribuições de temperatura $\theta_{p1j}(y,t)$.

	p ₁	p ₂	p ₃	p ₄	p ₅	p ₆	p ₇	p ₈
j = 1	18.5	5.9	- 18.7	- 6.3	- 6.3	18.7	5.9	- 18.5
j = 2	18.5	5.4	- 17.1	- 6.3	- 6.3	17.1	5.4	- 18.5

As expressões das distribuições de temperatura que representam as soluções analíticas das equações diferenciais definidas em (2.21) são:

$$\theta_{p2j}(y,t) = \cos \omega t \sum_{i=1}^4 (p_{i0j} + p_{i1j} + p_{i2j}) \varphi_{ij}(y) + \operatorname{sen} \omega t \sum_{i=5}^8 (q_{i0j} + q_{i1j} + q_{i2j}) \varphi_{ij}(y). \quad (\text{A.2.2.2})$$

Os valores dos coeficientes p_{i0j} , p_{i1j} , p_{i2j} , q_{i0j} , q_{i1j} e q_{i2j} definidos em (A.2.2.2) são apresentados na Tabela A.2.2.3.

Tabela A.2.2.3 Coeficientes p_{i0j} , p_{i1j} , p_{i2j} , q_{i0j} , q_{i1j} e q_{i2j} das distribuições de temperatura $\theta_{p2j}(y,t)$.

	$j = 1, (x 10^{-5})$	$j = 2$
$p_{1.0}$	2.0	- 99773.0
$p_{2.0}$	16.2	- 659727.0
$p_{3.0}$	0.8	- 89399.7
$p_{4.0}$	5.9	308412.0
$p_{1.1}$	- 1064.1	- 69.8
$p_{2.1}$	- 30.7	- 25.6
$p_{3.1}$	1006.6	50.0
$p_{4.1}$	- 52.2	91.8
$p_{1.2}$	0.7	0.0
$p_{2.2}$	- 13.7	0.0
$p_{3.2}$	- 0.7	0.0
$p_{4.2}$	44.4	0.0
$q_{1.0}$	- 474.8	308412.0
$q_{2.0}$	8963.2	89399.7
$q_{3.0}$	449.9	- 659727.0
$q_{4.0}$	- 9473.7	99773.0
$q_{1.1}$	- 1062.5	91.8
$q_{2.1}$	49.6	- 50.0
$q_{3.1}$	1004.5	- 25.6
$q_{4.1}$	45.6	69.8
$q_{1.2}$	0.7	0.0
$q_{2.2}$	41.9	0.0
$q_{3.2}$	- 0.7	0.0
$q_{4.2}$	- 14.5	0.0

Apêndice B

MATHEMATICA

Mathematica é um sistema geral de programação para computação técnica, desenvolvido por Stephen Wolfram e publicado oficialmente em 1988. A partir desta data tem sido amplamente usado por pesquisadores, engenheiros, analistas e alunos de graduação e pós-graduação. Este software pode ser utilizado em vários tipos de computadores desde PCs, até estações de trabalho.

A maneira mais simples de operar o Mathematica é como uma calculadora, porém seu alcance de cálculo é muito maior que o realizado com calculadoras eletrônicas. Além disto, enquanto os sistemas tradicionais manipulam somente computação numérica, o Mathematica manipula computação numérica, simbólica e gráfica.

Quando o Mathematica é usado na elaboração de programas, devido o alto nível deste software, os gastos de CPU são bem menores que os dispendidos ao executar-se programas escritos nas linguagens como Fortran ou BASIC.

Na realização deste trabalho usou-se a versão 2.2.1 deste software e um Pentium com 16 MB de memória RAM na elaboração e execução de programas, cálculos numéricos e simbólicos e na geração dos gráficos tridimensionais.



No apêndice C encontram-se apresentados dois programas escritos usando-se linguagem simbólica Mathematica. Ambos são utilizados na obtenção das distribuições de velocidade e temperatura no escoamento entre placas paralelas.

O fluxograma do programa que determina as distribuições de velocidade para escoamento entre placas paralelas encontra-se ilustrado na Figura B.1. De acordo com ela, observa-se que para obter-se as soluções das equações definidas em (2.7) parte-se da solução geral apresentada em (2.9), e a equação diferencial em linguagem simbólica Mathematica é representada por:

$$D[u[j, y, t], \{t, 1\}] + \omega \text{Sin}[\omega t] - \alpha[j] D[u[j, y, t], \{y, 2\}] - \beta[j] (\text{Cos}[\omega t] - u[j, y, t]).$$

No desenvolvimento do programa executa-se a separação de variáveis utilizando-se o comando *Collect*. Sua função é agrupar termos iguais. Assim obtém-se a matriz de coeficientes que é representada por um sistema algébrico linear e homogêneo 8 x 8 da forma:

$$M(\sigma) \cdot C = 0, \quad (B.1)$$

onde o vetor C representa os coeficientes desconhecidos c_{ij} , $i = 1, \dots, 8$.

Sendo σ_j a solução de $\text{Det} [M(\sigma)] = 0$, o núcleo da matriz $M(\sigma)$ tem dimensão quatro e o vetor C , que satisfaz (B.1), é uma combinação linear da sua base. No Mathematica o comando utilizado na determinação do núcleo de uma matriz é denominado *NullSpace*. Neste ponto do problema existem oito coeficientes indeterminados, quatro para o escoamento livre e quatro para o escoamento no meio poroso.

Estes coeficientes são obtidos usando-se as condições de continuidade na interface $y = 0$ e as duas condições de contorno nas placas, em ambos os meios, estas fornecem o número necessário de equações como segue-se:

$$u [1, 1, t], \quad u [2, -1, t],$$

$$u [1, 0, t] - u [2, 0, t],$$

$$(D [u[1, y, t], \{y, t\}] - D [u [2, y, t], \{y, 1\}]) / .y - > 0. \quad (\text{B.2})$$

Em (B.2) entende-se que todos os valores correspondentes ao lado direito da equação são nulos. O sistema resultante, ainda função de coeficientes indeterminados é obtido usando-se novamente o comando *Collect*, gerando um sistema não singular e não homogêneo. Para sua solução utiliza-se o comando *Inverse*.

Na Figura B.2 ilustra-se o fluxograma do programa utilizado na determinação das distribuições de temperatura para o escoamento entre placas paralelas, soluções das equações definidas em (2.8). Estas equações são resolvidas de modo análogo à solução de (2.7), estando a diferença no termo de não homogeneidade $\left[\frac{\partial u_j}{\partial y} \right]^2$, que fornece um sistema algébrico linear e não homogêneo 29×29 .

Os programas são editados no DOS, e para executá-los, no Mathematica, deve-se chamar o programa principal por <<"NOME.M".

O programa é auto explicativo e solicita na tela as variáveis frequência, relação entre viscosidades cinemáticas e parâmetro de permeabilidade, necessárias para a sua execução. Estas devem ser digitadas com ponto no final do

número inteiro para ser compatível com as definições do programa. Após o fornecimento dos dados o operador não precisa fazer mais nada além de decidir se inicia novamente o programa. Todos os dados de saída são armazenados num mesmo arquivo chamado NOME.OUT. Ao término da execução encontra-se na tela o tempo gasto de CPU.

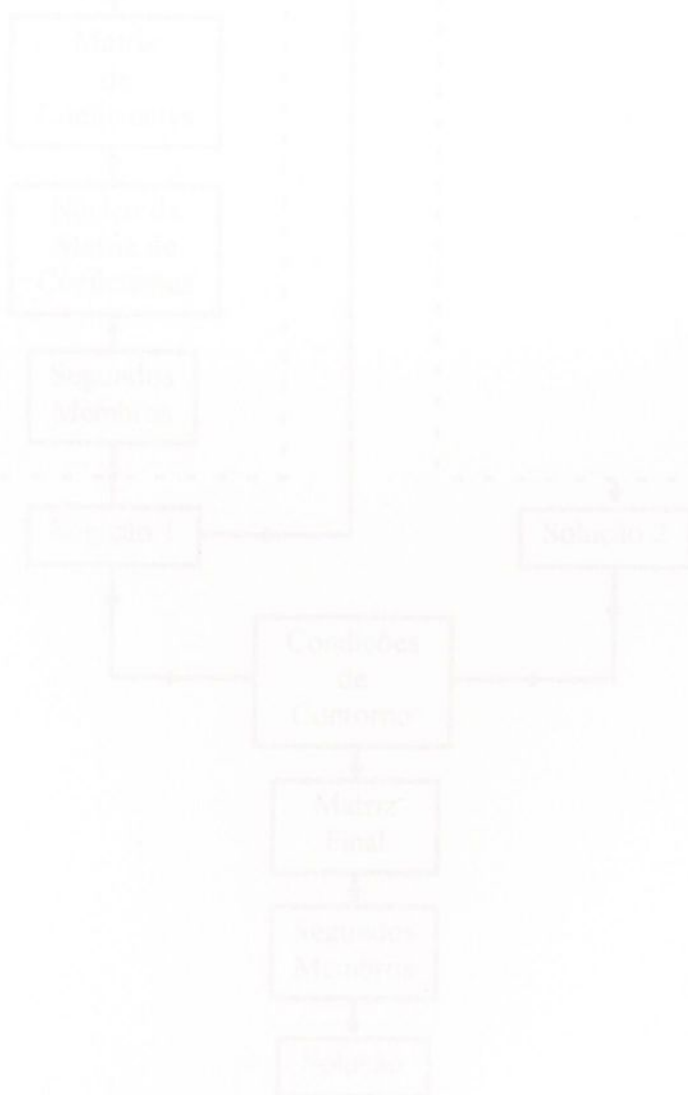


Figura 2.1 Fluxograma do programa que trabalha as condições de cessarar

unesp

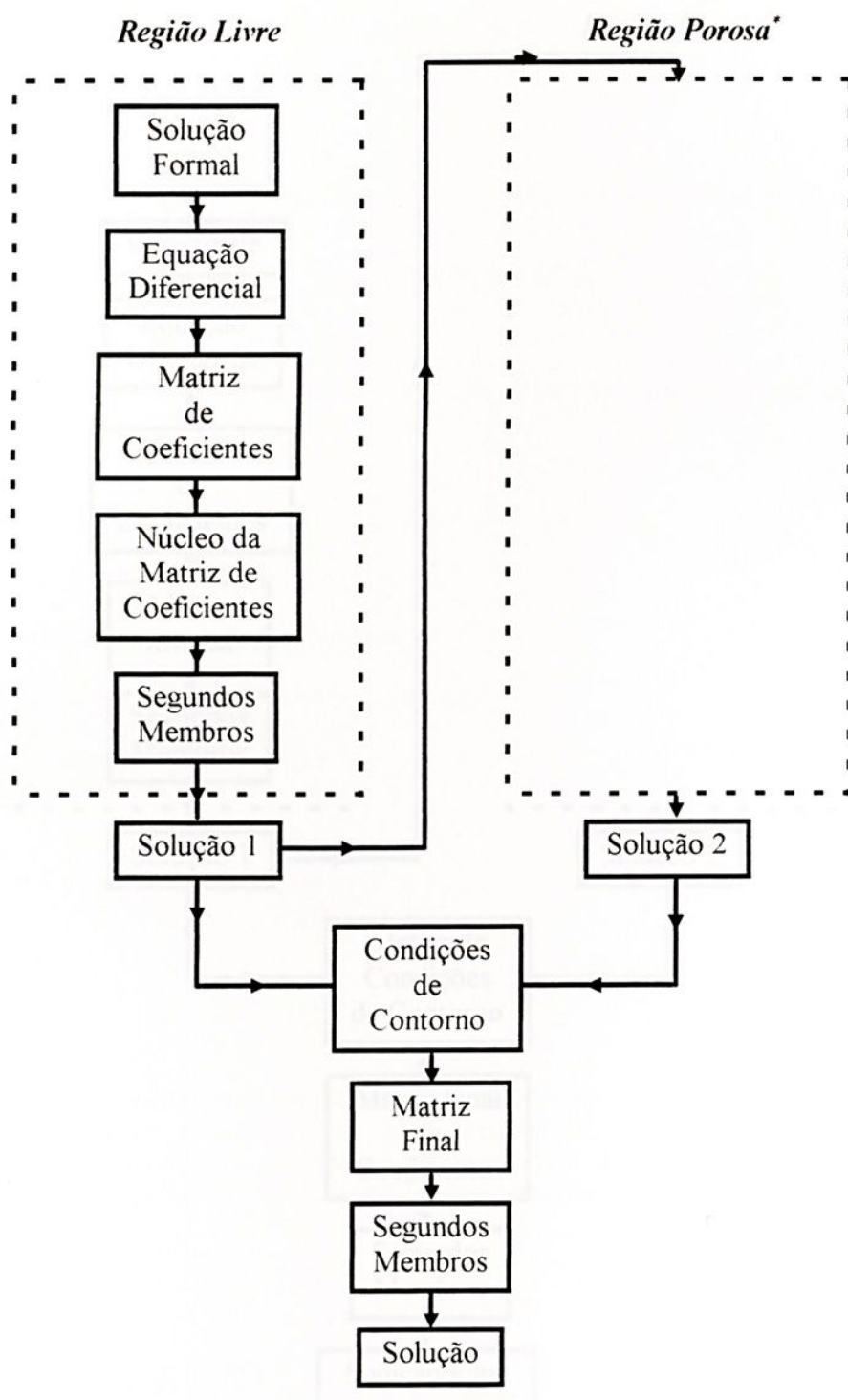


Figura B.1 Fluxograma do programa que determina as distribuições de velocidade em escoamentos entre placas paralelas.

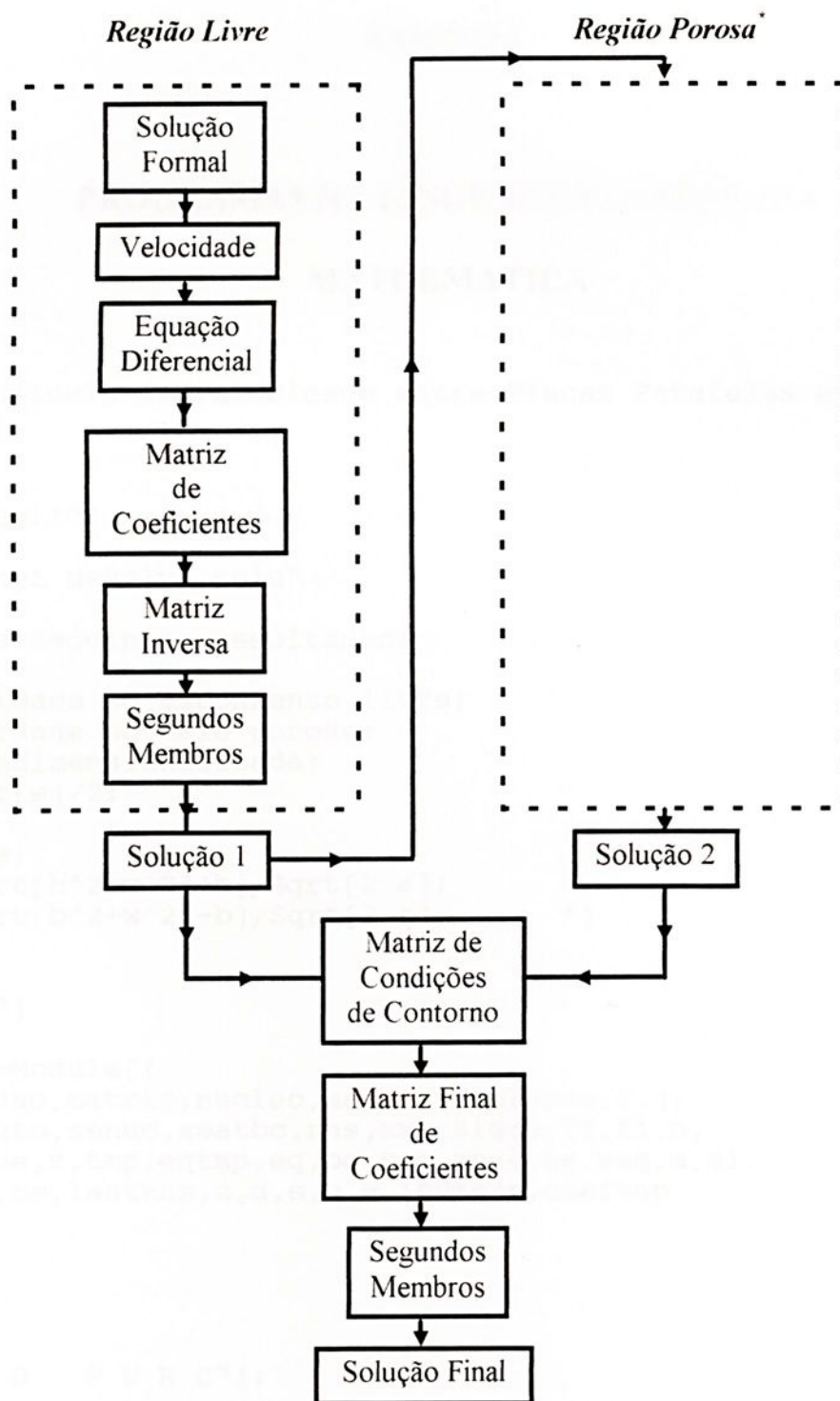


Figura B.2 Fluxograma do programa que determina as distribuições de temperatura em escoamentos entre placas paralelas.

* As linhas tracejadas nas figuras B.1 e B.2 representam as partes semelhantes do programa

Apêndice C

PROGRAMAS NA LINGUAGEM SIMBÓLICA

MATHEMATICA

(* Pacote para Calculo de Velocidade entre Placas Paralelas sem Gradiente de Pressao.*)

```
BeginPackage["progl`"]
```

```
progl::usage="progl devolve solu"
```

```
(* solu contem os seguintes resultados;
```

```
u[y,t], velocidade no escoamento livre;
```

```
g[y,t], velocidade no meio poroso;
```

```
w,frequencia adimensionalizada;
```

```
s=Sqrt[2] Sqrt[w]/2;
```

```
a=v1/v;
```

```
b=a/porosidade;
```

```
argul=Sqrt[Sqrt[b^2+w^2]+b]/Sqrt[2 a];
```

```
argu2=Sqrt[Sqrt[b^2+w^2]-b]/Sqrt[2 a]; *)
```

```
Begin["`Private`"]
```

```
progl[w_,a_,b_]:=Module[{  
argul,argu2,equacao,matriz,nucleo,matbc,v,solucao,i,j,  
funcao,smat,de,auto,senuc,smatbc,rhs,xxx,sigma,fi,fl,n,  
f,x,termat,lastcoe,z,tmp,eqtmp,eq,bc,coe,coef,us,seq,m,m1,  
ftmp,srhs,soltmp,cc,lastrhs,c,d,s,u,g,invterm,coeftmp  
},
```

```
y=Global`y;
```

```
t=Global`t;
```

```
Print["F L U I D O P U R O"];
```

```
s=Sqrt[2] Sqrt[w]/2;
```

```
u[y_,t_]=Cos[w t]+ (c[1] Cos[s y] Cosh[s y] +  
c[2] Sin[s y] Cosh[s y]+  
c[3] Cos[s y] Sinh[s y]+  
c[4] Sin[s y] Sinh[s y]) Cos[w t]+  
(c[5] Cos[s y] Cosh[s y] +  
c[6] Sin[s y] Cosh[s y]+
```

```

c[7] Cos[s y] Sinh[s y]+
c[8] Sin[s y] Sinh[s y])Sin[w t];

```

```

equacao=D[u[y,t],{t,1}]+w Sin[w t] - D[u[y,t],{y,2}];
equacao=ExpandAll[equacao];
equacao=Collect[equacao,Cos[w t]];
tmp[1]=Coefficient[equacao,Cos[w t],1];
equacao=Collect[equacao,Sin[w t]];
tmp[2]=Coefficient[equacao,Sin[w t],1];

eqtmp[1]=Coefficient[Collect[tmp[1],Cos[s y]],Cos[s y],1];
eqtmp[2]=Coefficient[Collect[tmp[1],Sin[s y]],Sin[s y],1];
eqtmp[3]=Coefficient[Collect[tmp[2],Cos[s y]],Cos[s y],1];
eqtmp[4]=Coefficient[Collect[tmp[2],Sin[s y]],Sin[s y],1];

eq[1]=Coefficient[Collect[eqtmp[1],Cosh[s y]],Cosh[s y],1];
eq[2]=Coefficient[Collect[eqtmp[1],Sinh[s y]],Sinh[s y],1];
eq[3]=Coefficient[Collect[eqtmp[2],Cosh[s y]],Cosh[s y],1];
eq[4]=Coefficient[Collect[eqtmp[2],Sinh[s y]],Sinh[s y],1];
eq[5]=Coefficient[Collect[eqtmp[3],Cosh[s y]],Cosh[s y],1];
eq[6]=Coefficient[Collect[eqtmp[3],Sinh[s y]],Sinh[s y],1];
eq[7]=Coefficient[Collect[eqtmp[4],Cosh[s y]],Cosh[s y],1];
eq[8]=Coefficient[Collect[eqtmp[4],Sinh[s y]],Sinh[s y],1];

```

```
Print["sistema de equacoes pronto"];

```

```

matriz=Table[Coefficient[Collect[eq[i],c[j]],c[j],1],
,{i,1,8},{j,1,8}];
Print["matriz=",matriz];
nucleo=NullSpace[matriz];

```

```

Do[
  c[j]=0;
  Do[
    c[j]=c[j]+coe[i] nucleo[[i]][[j]]
    ,{i,1,4}
  ],{j,1,8}];

```

```
Print["c[j] pronto"];

```

```
(* Primeira Condicao de Contorno*)

```

```

v[y_,t_]=u[y,t]-Cos[w t];
v[y_,t_]=ExpandAll[v[y,t]];
Print["v pronta"];
xxx=ExpandAll[v[y,t]/.y->1.];
bc[1]=Coefficient[Collect[xxx,Cos[w t]],Cos[w t],1];
bc[2]=Coefficient[Collect[xxx,Sin[w t]],Sin[w t],1];
xxx=.;
Print["primeira bc pronta"];
matbc={{Coefficient[Collect[bc[1],coe[3]],coe[3],1],
  Coefficient[Collect[bc[1],coe[4]],coe[4],1]},
{Coefficient[Collect[bc[2],coe[3]],coe[3],1],
  Coefficient[Collect[bc[2],coe[4]],coe[4],1]}};

```

```

xxx=bc[1];
xxx=xxx/.coe[3]->0;
xxx=xxx/.coe[4]->0;
yyy=bc[2];
yyy=yyy/.coe[3]->0;

```

```

yyy=yyy/.coe[4]->0;
rhs=Expand[-{xxx,yyy}];
xxx=.;
yyy=.;
Print["rhs prontas"];

solucao=Inverse[matbc].rhs;

coe[3]=ExpandAll[solucao[[1]]];
coe[4]=ExpandAll[solucao[[2]]];
Print["fim do problema puro"];

Print["F L U I D O   N O   M E I O   P O R O S O"];

(* Equacao em funcao das raizes *)

argu1=Sqrt[Sqrt[b^2+w^2]+b]/Sqrt[2 a];
argu2=Sqrt[Sqrt[b^2+w^2]-b]/Sqrt[2 a];

f1[1,1]=Cos[y argu2];
f1[1,2]=Sin[y argu2];
f1[2,1]=Cosh[y argu1];
f1[2,2]=Sinh[y argu1];

fi[1,y_]=f1[1,1] f1[2,1];
fi[2,y_]=f1[1,1] f1[2,2];
fi[3,y_]=f1[1,2] f1[2,1];
fi[4,y_]=f1[1,2] f1[2,2];
Print["autofuncoes definidas"];

g[y_,t_]=Cos[w t]+Cos[w t] (Sum[d[j] fi[j,y],{j,1,4}])+
          Sin[w t] (Sum[d[j+4] fi[j,y],{j,1,4}]);
funcao=D[g[y,t],{t,1}]+w Sin[w t] -a D[g[y,t],{y,2}]-b (Cos[w t]-g[y,t]);
funcao=ExpandAll[funcao];

funcao=Collect[funcao,Cos[w t]];
coef[1]=ExpandAll[Coefficient[funcao,Cos[w t],1]];
funcao=Collect[funcao,Sin[w t]];
coef[2]=ExpandAll[Coefficient[funcao,Sin[w t],1]];

xxx=Coefficient[Collect[coef[1],f1[1,1]],f1[1,1],1];
seq[1]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,1]],f1[2,1],1];
seq[2]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,2]],f1[2,2],1];
xxx=Coefficient[Collect[coef[1],f1[1,2]],f1[1,2],1];
seq[3]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,1]],f1[2,1],1];
seq[4]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,2]],f1[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[coef[2],f1[1,1]],f1[1,1],1];
seq[5]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,1]],f1[2,1],1];
seq[6]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,2]],f1[2,2],1];
xxx=Coefficient[Collect[coef[2],f1[1,2]],f1[1,2],1];
seq[7]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,1]],f1[2,1],1];
seq[8]=Coefficient[Collect[xxx,f1[2,2]],f1[2,2],1];

xxx=.;
Print["sistema pronto"];

Do[

```

```

Do[
  m[i,j]=Coefficient[Collect[seq[i],d[j]],d[j],1]
  ,{j,1,8}]
,{i,1,8}];

smat=Table[m[i,j],{i,1,8},{j,1,8}];
Print["smat=",smat];
Print["matriz pronta"];
xxx=Det[smat];
xxx=Expand[xxx];
xxx=.;
senuc=NullSpace[smat];
Print["nucleo pronto"];

Do[
  d[j]=0;
  Do[
    d[j]=d[j]+coeftmp[i] senuc[[i]][[j]]
    ,{i,1,4}]
  ,{j,1,8}];
Do[Print["d=",d[j]],{j,1,8}];

Print["coeficientes prontos"];

(* Segunda Condicao de Contorno*)

xxx=ExpandAll[g[y,t]/.y->-1.];
bc[3]=Coefficient[Collect[xxx,Cos[w t]],Cos[w t],1];
bc[4]=Coefficient[Collect[xxx,Sin[w t]],Sin[w t],1];
bc[3]=ExpandAll[bc[3]];
bc[4]=ExpandAll[bc[4]];
xxx=.;
Print["condicoes de contorno prontas"];
Print["bc=",bc[3]];

Do[
  Do[
    bc[i]=Expand[bc[i]];
    bc[i]=Collect[bc[i],coeftmp[j]];
    m1[i-2,j]=Coefficient[bc[i],coeftmp[j],1]
    ,{j,1,4}]
  ,{i,3,4}];

smatbc={{m1[1,3],m1[1,4]},{m1[2,3],m1[2,4]}};

srhs[1]=bc[3]/.coeftmp[3]->0;
srhs[1]=srhs[1]/.coeftmp[4]->0;
srhs[2]=bc[4]/.coeftmp[3]->0;
srhs[2]=srhs[2]/.coeftmp[4]->0;

soltmp=-Inverse[smatbc].{srhs[1],srhs[2]};

coeftmp[3]=ExpandAll[soltmp[[1]]];
coeftmp[4]=ExpandAll[soltmp[[2]]];
Print["ultimos coeficientes determinados"];

Print["Terceira Condicao de Contorno"];

xxx=Expand[u[y,t]/.y->0];
yyy=Expand[g[y,t]/.y->0];

```

```

f[t_]=Expand[xxx-yyy];
xxx=.;
yyy=.;
cc[1]=Expand[Coefficient[Collect[f[t],Cos[w t]],Cos[w t],1]];
cc[2]=Expand[Coefficient[Collect[f[t],Sin[w t]],Sin[w t],1]];

Print["Quarta Condicao de Contorno"];

xxx=D[u[y,t],{y,1}]/.y->0;
yyy=D[g[y,t],{y,1}]/.y->0;
x[t_]=Expand[xxx-yyy];
xxx=.;
yyy=.;
cc[3]=Expand[Coefficient[Collect[x[t],Cos[w t]],Cos[w t],1]];
cc[4]=Expand[Coefficient[Collect[x[t],Sin[w t]],Sin[w t],1]];

coe[1]=z[1];
coe[2]=z[2];
coeftmp[1]=z[3];
coeftmp[2]=z[4];

Do[
  Do[
    n[i,j]=Coefficient[Collect[cc[i],z[j]],z[j],1]
    ,{j,1,4}]
  ,{i,1,4}];

Do[
  xxx=cc[i];
  Do[
    xxx=xxx/. z[j]->0
    ,{j,1,4}];
  lastrhs[i]=-xxx
  ,{i,1,4}];
xxx=.;

termat=Table[N[n[i,j],10],{i,1,4},{j,1,4}];
Print["ultima matriz pronta"];
Print["calculo dos ultimos coeficientes - aguarde"];

invterm=Inverse[termat];
lastcoe=invterm.{lastrhs[1],lastrhs[2],
  lastrhs[3],lastrhs[4]};

z[1]=lastcoe[[1]];
z[2]=lastcoe[[2]];
z[3]=lastcoe[[3]];
z[4]=lastcoe[[4]];

Do[
  c[i]=N[Expand[c[i]],10]
  ,{i,1,8}];

Do[
  d[i]=N[Expand[d[i]],10]
  ,{i,1,8}];

```

```

u[y,t]=N[u[y,t],10];
g[y,t]=N[g[y,t],10];
s=N[s,10];
argu1=N[argu1,10];
argu2=N[argu2,10];
Print["T H E   E N D"];

solu={u[y,t],g[y,t],w,s,a,b,argu1,argu2};
Return[solu]
]

End[]      (* progl`Private`*)
Protect[progl]

EndPackage[] (* progl`*)

```

(* Este Programa Determina as Temperaturas no Escoamento entre Placas Paralelas para os casos a) quando nao ha gradiente de pressao e b) quando existe gradiente de pressao atuando. Sua validade e quando $Pr=1.0$.

O programa e dividido em tres partes

1. usa-se o pacote ANAVC.M para calcular as velocidades $u[y,t]$ e $v[y,t]$ no escoamento livre e no meio poroso;
2. na segunda parte calcula-se $teta[y,t]$ e $tempo[y,t]$ que sao as temperaturas no escoamento livre e no meio poroso respectivamente quando nao ha gradiente de pressao externo atuando;
3. finalmente determina-se as temperaturas no caso em que existe gradiente de pressao atuando $tetag[y,t]$ e $tempog[y,t]$.

O programa determina ainda as temperaturas $tetaq[y,t]$, $tempoq[y,t]$, $tetagq[y,t]$ e $tempogq[y,t]$ para o caso em que ha geracao interna de calor. *)

```

<<"anavc.m";
w=Input["valor da frequencia"];
a=Input["valor de a=v2/v1"];
b=Input["valor de b=a/permeabilidade"];
solu=progl[w,a,b];
u[y_,t_]=solu[[1]];
v[y_,t_]=solu[[2]];
w=solu[[3]];
s=solu[[4]];
a=solu[[5]];
b=solu[[6]];
argu1=solu[[7]];
argu2=solu[[8]];

```

(* DEFINICAO DAS CONSTANTES

$k1=\text{Sqrt}[2wPr]$ argumento da homogenea;



```

a1=1./Pr;
s=Sqrt[w/2] argumento das expressoes no escoamento livre;
pr=numero de Prandlt no escoamento livre;
ec= numero de Eckert no escoamento livre;
gamal= gradiente de pressao no escoamento livre;
gama2= gradiente de pressao no meio poroso;
q1=geracao de calor no escoamento livre;
q2= geracao de calor no meio poroso;      *)

```

```

kk=10.;
pr=1.0;
ec=10.0;
k1=Sqrt[2*w*pr];
a1=1./pr;
gamal=0.1;
gama2=0.5;
q1=5.;
q2=20.;
(*
Unprotect[Cos,Sin,Power,Times,Cosh,Sinh];
Sin/: Sin[x_]^n_Integer?Positive := Expand[Sin[x] Sin[x]^(n-1)]
Sin/: Sin[x_]^2:=1/2 - Cos[2 x]/2
Cos/: Cos[x_]^n_Integer?Positive := Expand[Cos[x] Cos[x]^(n-1)]
Cos/: Cos[x_]^2 := 1/2 + Cos[2 x]/2
Sin[x_]Cos[x_] :=Sin[2 x]/2
Sinh[x_]Cosh[x_] :=Sinh[2 x]/2
Sinh/: Sinh[x_]^n_Integer?Positive := Expand[Sinh[x] Sinh[x]^(n-1)]
Sinh/: Sinh[x_]^2:=Cosh[2 x]/2 - 1/2
Cosh/: Cosh[x_]^n_Integer?Positive := Expand[Cosh[x] Cosh[x]^(n-1)]
Cosh/: Cosh[x_]^2 := Cosh[2 x]/2 + 1/2

```

(* TEMPERATURA NO ESCOAMENTO LIVRE

DETERMINACAO DA SOLUCAO PARTICULAR TETA[Y,T]*)

```

f[1,1]=1;
f[1,2]=Cos[2 w t];
f[1,3]=Sin[2 w t];
f[2,1]=1;
f[2,2]=Cos[2 s y];
f[2,3]=Sin[2 s y];
f[3,1]=1;
f[3,2]=Cosh[2 s y];
f[3,3]=Sinh[2 s y];
n=0;
Do[
  Do[
    Do[n=n+1;fi[n,y_,t_]=f[1,i] f[2,j] f[3,k],
      {i,1,3}],
    {j,1,3}],
  {k,1,3}];
fi[28,y_,t_]=t;
fi[29,y_,t_]=y^2;
teta[y_,t_]=0;
Do[teta[y_,t_]=teta[y,t]+b1[n] fi[n,y,t],
{n,2,29}];
equacaol=D[teta[y,t],{t,1}]-a1 D[teta[y,t],{y,2}];
equacaol=Expand[equacaol];

```

```

xxx=equacaol;
xxx=Collect[xxx,f[3,2]];
tmp[1]=Coefficient[xxx,f[3,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[3,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[3,3]];
tmp[2]=Coefficient[xxx,f[3,3],1];
tmp[3]=Coefficient[xxx,f[3,3],0];

xxx=tmp[1];
xxx=Collect[xxx,f[2,2]];
tmp[4]=Coefficient[xxx,f[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[2,3]];
tmp[5]=Coefficient[xxx,f[2,3],1];
tmp[6]=Coefficient[xxx,f[2,3],0];

xxx=tmp[2];
xxx=Collect[xxx,f[2,2]];
tmp[7]=Coefficient[xxx,f[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[2,3]];
tmp[8]=Coefficient[xxx,f[2,3],1];
tmp[9]=Coefficient[xxx,f[2,3],0];

xxx=tmp[3];
xxx=Collect[xxx,f[2,2]];
tmp[10]=Coefficient[xxx,f[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[2,3]];
tmp[11]=Coefficient[xxx,f[2,3],1];
tmp[12]=Coefficient[xxx,f[2,3],0];

(* COEFICIENTES QUE GERAM MATRIZ1 *)
xxx=tmp[4];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[13]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[14]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[15]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[5];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[16]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[17]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[18]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[6];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[19]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[20]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[21]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[7];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];

```



```

tmp[22]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[23]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[24]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[8];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[25]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[26]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[27]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[9];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[28]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[29]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[30]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[10];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[31]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[32]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[33]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[11];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[34]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
tmp[35]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[36]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=tmp[12];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
tmp[37]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
tmp[38]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
tmp[39]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=.;

(* FIM DOS COEFICIENTES*)

Do[
  xxx=tmp[i];
  Do[
    xxx=Collect[xxx,b1[j]];
    m[i-12,j-1]=Coefficient[xxx,b1[j],1];
    xxx=xxx/.b1[j]->0
  ,{j,2,28}]
  ,{i,13,39}];
xxx=.;
matriz1=Table[m[i,j],{i,1,27},{j,1,27}];

```



```

de=Factor[Det[matriz]];

invmat1=Inverse[matriz1];
Print["Matriz1 Inversa Pronta"];
Remove[m,matriz1,tmp,de];

(* CALCULO DO VECTOR *)

vel=D[u[y,t],{y,1}];
vell=vel^2;
vell=ExpandAll[vell];

xxx=vell;
xxx=Collect[vell,f[3,2]];
vetmp[1]=Coefficient[xxx,f[3,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[3,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[3,3]];
vetmp[2]=Coefficient[xxx,f[3,3],1];
vetmp[3]=Coefficient[xxx,f[3,3],0];

xxx=vetmp[1];
xxx=Collect[xxx,f[2,2]];
vetmp[4]=Coefficient[xxx,f[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[2,3]];
vetmp[5]=Coefficient[xxx,f[2,3],1];
vetmp[6]=Coefficient[xxx,f[2,3],0];

xxx=vetmp[2];
xxx=Collect[xxx,f[2,2]];
vetmp[7]=Coefficient[xxx,f[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[2,3]];
vetmp[8]=Coefficient[xxx,f[2,3],1];
vetmp[9]=Coefficient[xxx,f[2,3],0];

xxx=vetmp[3];
xxx=Collect[xxx,f[2,2]];
vetmp[10]=Coefficient[xxx,f[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[2,3]];
vetmp[11]=Coefficient[xxx,f[2,3],1];
vetmp[12]=Coefficient[xxx,f[2,3],0];

(* COEFICIENTES QUE GERAM VECTOR *)
xxx=vetmp[4];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[13]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[14]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[15]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];

xxx=vetmp[5];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[16]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[17]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];

```



```
vetmp[18]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
•xxx=vetmp[6];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[19]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[20]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[21]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
•xxx=vetmp[7];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[22]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[23]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[24]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
xxx=vetmp[8];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[25]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[26]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[27]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
•xxx=vetmp[9];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[28]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[29]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[30]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
•xxx=vetmp[10];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[31]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[32]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[33]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
xxx=vetmp[11];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[34]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
vetmp[35]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[36]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
•xxx=vetmp[12];
xxx=Collect[xxx,f[1,2]];
vetmp[37]=Coefficient[xxx,f[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,f[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,f[1,3]];
vetmp[38]=Coefficient[xxx,f[1,3],1];
vetmp[39]=Coefficient[xxx,f[1,3],0];
```

```
•xxx=.;
```

(* FIM DOS COEFICIENTES QUE GERAM VECTOR *)



```

Do[cet[n-12]=vetmp[n],{n,13,39}];
vector1=Table[cet[n],{n,1,27}];
Print["Vector1 Pronto"];
solp1=invmat1.vector1;
Print["solp1=",solp1];

Print["Solucao da Particular Pronta"];

(* SOLUCAO DA HOMOGENEA TETA[Y,T] *)
teta[y_,t_]=cc[1] Cosh[k1 y] Cos[2 w t]+cc[2] Cosh[k1 y] Sin[2 w t]+
cc[3] Sinh[k1 y] Cos[2 w t]+cc[4] Sinh[k1 y] Sin[2 w t]+
cc[5]+cc[6] y;

(* SOLUCAO FINAL PARA O ESCOAMENTO LIVRE SEM GRADIENTE DE PRESSAO *)
Do[
teta[y_,t_]=teta[y,t]+solp1[[n]] fi[n,y,t],{n,1,27}];
teta[y_,t_]= ExpandAll[ec teta[y,t]];

Remove[invmat1,vector1,vetmp,matriz1,cet,fi,f];
Print["Temperatura para o escoamento livre sem grad. de pressao pronta"];

(* TEMPERATURA NO MEIO POROSO
DEFINICAO DAS CONSTANTES;

pec=numero de Eckert no meio poroso;
prp=numero de Prandlt no meio poroso;
uk=argumento da homogenea no meio poroso;
aal=1.2/prp;
kk=relacao entre os coeficientes de condutividade termica;

SOLUCAO DA PARTICULAR TEMPO[Y,T] *)

pec=ec;
prp=pr;
aal=1.2/prp;
uk= Sqrt[2*w*prp/1.2];

g[1,1]=1;
g[1,2]=Cos[2 w t];
g[1,3]=Sin[2 w t];
g[2,1]=1;
g[2,2]=Cos[2 argu2 y];
g[2,3]=Sin[2 argu2 y];
g[3,1]=1;
g[3,2]=Cosh[2 argu1 y];
g[3,3]=Sinh[2 argu1 y];
n=0;
Do[
Do[
Do[n=n+1;gi[n,y_,t_]=g[1,i] g[2,j] g[3,k],
{i,1,3}],
{j,1,3}],
{k,1,3}];
gi[28,y_,t_]=t;
gi[29,y_,t_]=y^2;

```

360



```

tempo[y_,t_]=0;
Do[tempo[y_,t_]=tempo[y,t]+p1[n] gi[n,y,t],
{n,2,29}];

funcaol=D[tempo[y,t],{t,1}]-aa1 D[tempo[y,t],{y,2}];
funcaol=Expand[funcaol];

xxx=funcaol;
xxx=Collect[xxx,g[3,2]];
eqtmp[1]=Coefficient[xxx,g[3,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[3,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[3,3]];
eqtmp[2]=Coefficient[xxx,g[3,3],1];
eqtmp[3]=Coefficient[xxx,g[3,3],0];

xxx=eqtmp[1];
xxx=Collect[xxx,g[2,2]];
eqtmp[4]=Coefficient[xxx,g[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[2,3]];
eqtmp[5]=Coefficient[xxx,g[2,3],1];
eqtmp[6]=Coefficient[xxx,g[2,3],0];

xxx=eqtmp[2];
xxx=Collect[xxx,g[2,2]];
eqtmp[7]=Coefficient[xxx,g[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[2,3]];
eqtmp[8]=Coefficient[xxx,g[2,3],1];
eqtmp[9]=Coefficient[xxx,g[2,3],0];

xxx=eqtmp[3];
xxx=Collect[xxx,g[2,2]];
eqtmp[10]=Coefficient[xxx,g[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[2,3]];
eqtmp[11]=Coefficient[xxx,g[2,3],1];
eqtmp[12]=Coefficient[xxx,g[2,3],0];

(* COEFICIENTES QUE GERAM SEMAT *)
xxx=eqtmp[4];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[13]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
eqtmp[14]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
eqtmp[15]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[5];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[16]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
eqtmp[17]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
eqtmp[18]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[6];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[19]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];

```



```

xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
eqtmp[20]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
●eqtmp[21]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[7];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[22]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
eqtmp[23]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
●eqtmp[24]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[8];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[25]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
eqtmp[26]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
eqtmp[27]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[9];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[28]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
eqtmp[29]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
●eqtmp[30]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[10];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[31]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
eqtmp[32]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
●eqtmp[33]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[11];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[34]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
eqtmp[35]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
eqtmp[36]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=eqtmp[12];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
eqtmp[37]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
●eqtmp[38]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
eqtmp[39]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

xxx=.;

(* FIM DOS COEFICIENTES DO MEIO POROSO *)

Do[
● xxx=eqtmp[i];
  Do[
    xxx=Collect[xxx,p1[j]];
    l[i-12,j-1]=Coefficient[xxx,p1[j],1];
  ]
];

```

```

xxx=xxx/.p1[j]->0
,{j,2,28}]
• ,(i,13,39)];

xxx=.;
semat=Table[l[i,j],{i,1,27},{j,1,27}];
pde=Factor[Det[semat]];

insemat=Inverse[semat];
Print["Segunda matrizl Inversa Pronta"];
•
(* CALCULO DO SEVEC MEIO POROSO *)

povel=D[v[y,t],{y,1}];
povell=povel^2;
povell=ExpandAll[povell];
Print["velocidade1 do Meio Poroso Pronta"];

xxx=povell;
xxx=Collect[povell,g[3,2]];
pve[1]=Coefficient[xxx,g[3,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[3,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[3,3]];
pve[2]=Coefficient[xxx,g[3,3],1];
pve[3]=Coefficient[xxx,g[3,3],0];

• xxx=pve[1];
xxx=Collect[xxx,g[2,2]];
pve[4]=Coefficient[xxx,g[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[2,3]];
pve[5]=Coefficient[xxx,g[2,3],1];
pve[6]=Coefficient[xxx,g[2,3],0];

• xxx=pve[2];
xxx=Collect[xxx,g[2,2]];
pve[7]=Coefficient[xxx,g[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[2,3]];
pve[8]=Coefficient[xxx,g[2,3],1];
pve[9]=Coefficient[xxx,g[2,3],0];

xxx=pve[3];
xxx=Collect[xxx,g[2,2]];
pve[10]=Coefficient[xxx,g[2,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[2,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[2,3]];
pve[11]=Coefficient[xxx,g[2,3],1];
• pve[12]=Coefficient[xxx,g[2,3],0];

(* COEFICIENTES QUE GERAM SEVEC *)
xxx=pve[4];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[13]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
• pve[14]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[15]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];

```



```
xxx=pve[5];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[16]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
pve[17]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[18]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=pve[6];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[19]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
pve[20]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[21]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=pve[7];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[22]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
pve[23]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[24]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=pve[8];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[25]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
pve[26]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[27]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=pve[9];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[28]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
pve[29]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[30]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=pve[10];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[31]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
pve[32]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[33]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=pve[11];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[34]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
pve[35]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[36]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=pve[12];
xxx=Collect[xxx,g[1,2]];
pve[37]=Coefficient[xxx,g[1,2],1];
xxx=Coefficient[xxx,g[1,2],0];
xxx=Collect[xxx,g[1,3]];
```

```
pve[38]=Coefficient[xxx,g[1,3],1];
pve[39]=Coefficient[xxx,g[1,3],0];
```

```
xxx=.;
```

```
(* FIM DOS COEFICIENTES MEIO POROSO *)
```

```
Do[pet[n-12]=pve[n],{n,13,39}];
sevec=Table[pet[n],{n,1,27}];
Print["Segundo Vetor Pronto"];
sesol=insemaat.sevec;
```

```
Print[" Solucao Particular Pronta"];
```

```
(* SOLUCAO DA HOMOGENEA TEMPO[Y,T] SEM GRADIENTE DE PRESSAO *)
```

```
tempo[y_,t_]=dd1[1] Cosh[uk y] Cos[2 w t]+dd1[2] Cosh[uk y] Sin[2 w t]+
dd1[3] Sinh[uk y] Cos[2 w t]+dd1[4] Sinh[uk y] Sin[2 w t]+
dd1[5]+dd1[6] y;
```

```
(* SOLUCAO GERAL TEMPO[Y,T] SEM GRADIENTE DE PRESSAO *)
```

```
Do[
tempo[y_,t_]=tempo[y,t]+sesol[[n]] gi[n,y,t],{n,1,27}];

tempo[y_,t_]=ExpandAll[a pec tempo[y,t]];
Remove[pte,pve,insemaat,sevec,g,gi,semaat,l,pde,eqtmp,funcao1];
```

```
Print["Temperatura Sem Gradiente de Pressao do Meio Poroso Pronta"];
```

```
(* CONDICAOES DE CONTORNO PARA TEMPERATURA SEM GRADIENTE DE PRESSAO
```

```
CONDICAOES NA INTERFACE *)
```

```
bc[1]=ExpandAll[tempo[0,t]-teta[0,t]];
bc[2]=(kk D[tempo[y,t],{y,1}]-D[teta[y,t],{y,1}])/y->0;
bc[2]=ExpandAll[bc[2]];
xxx=Collect[bc[1],Cos[2 w t]];
bctmp[1]=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[2 w t]];
bctmp[2]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],1];
bctmp[3]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],0];
```

```
xxx=Collect[bc[2],Cos[2 w t]];
bctmp[4]=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[2 w t]];
bctmp[5]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],1];
bctmp[6]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],0];
xxx=.;
```

```
Do[xxx=bctmp[i];
```

```
Do[
```

```
xxx=Collect[xxx,dd1[j]];

```

```
ddtmp[i,j]=Coefficient[xxx,dd1[j],1];

```

```
xxx=xxx/.dd1[j]->0,
```

```
{j,1,6}],
```

```
{i,1,6}];
```

```

matbc=Table[ddtmp[i,j],{i,1,6},{j,1,6}];
Print["matbc pronta"];
Do[
  terhs[i]=bctmp[i];
  Do[
    terhs[i]=terhs[i]/.dd1[j]->0,
    {j,1,6}];
  terhs[i]=-terhs[i],
  {i,1,6}];
terhstmp=Table[terhs[i],{i,1,6}];
solucao=Inverse[matbc].terhstmp;
Print["Solucao Condicoes de Contorno Interface Pronta"];

Do[
  dd1[i]=solucao[[i]]
  ,{i,1,6}];
xxx=.;

(* CONDICAOES DE CONTORNO DA TEMPERATURA SEM GRADIENTE DE PRESSAO NAS PLACAS *)

bc[3]=ExpandAll[teta[1.,t]];
(*bc[3]=D[teta[y,t],{y,1}]/.y->1;
bc[3]=ExpandAll[bc[3]]; *)
bc[4]=ExpandAll[1.-(tempo[-1.,t])];
(*bc[4]=D[tempo[y,t],{y,1}]/.y->-1;
bc[4]=ExpandAll[bc[4]]; *)
xxx=Collect[bc[3],Cos[2 w t]];
sebct[1]=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[2 w t]];
sebct[2]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],1];
sebct[3]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],0];

xxx=Collect[bc[4],Cos[2 w t]];
sebct[4]=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[2 w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[2 w t]];
sebct[5]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],1];
sebct[6]=Coefficient[xxx,Sin[2 w t],0];
xxx=.;

Do[xxx=sebct[i];
  Do[
    xxx=Collect[xxx,cc[j]];
    cctmp[i,j]=Coefficient[xxx,cc[j],1];
    xxx=xxx/.cc[j]->0,
    {j,1,6}],
  {i,1,6}];
sematbc=Table[cctmp[i,j],{i,1,6},{j,1,6}];
Print["sematbc pronta"];

Do[
  qrhs[i]=sebct[i];
  Do[
    qrhs[i]=qrhs[i]/.cc[j]->0,
    {j,1,6}];
  qrhs[i]=-qrhs[i]
  ,{i,1,6}];

```

```

Print[" acabou"];
qrhstmp=Table[qrhs[i],{i,1,6}];
bcsol=Inverse[sematbc].qrhstmp;

Print["Solucao Topo Pronta"];

Do[
  cc[i]=bcsol[[i]]
  ,{i,1,6}];

Remove[bc,bctmp,matbc,ddtmp,terhs,terhstmp,sebct,sematbc,qrhs,qrhstmp];
Remove[bcsol,solucao,cctmp];

teta[y_,t_]=N[teta[y,t],10];

tempo[y_,t_]=N[tempo[y,t],10];

Print["FIM DA TEMPERATURA SEM GRADIENTE DE PRESSAO"];

(*      SEGUNDA PARTE DO PROBLEMA

      DETERMINACAO DA SOLUCAO PARTICULAR TETAG1[Y,T]      *)

f2[1,1]=Cosh[s y];
f2[1,2]=Sinh[s y];
f2[2,1]=Cos[s y];
f2[2,2]=Sin[s y];
fi1[1,y_]=f2[1,1] f2[2,1];
fi1[2,y_]=f2[1,1] f2[2,2];
fi1[3,y_]=f2[1,2] f2[2,1];
fi1[4,y_]=f2[1,2] f2[2,2];

tetag1[y_,t_]=y(Cos[w t] Sum[c[j] fi1[j,y],{j,1,4}]+
  Sin[w t] Sum[c[j+4] fi1[j,y],{j,1,4}]);

equacao2=D[tetag1[y,t],{t,1}] -a1 D[tetag1[y,t],{y,2}];

equacao2=Expand[equacao2];

equacao2=Collect[equacao2,Cos[w t]];
Print["Equacao2 Pronta"];

coef2[1]=Coefficient[equacao2,Cos[w t]];
equacao2=Collect[equacao2,Sin[w t]];
coef2[2]=Coefficient[equacao2,Sin[w t]];

xxx=Coefficient[Collect[coef2[1],f2[1,1]],f2[1,1],1];
peq[1]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
peq[2]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[coef2[1],f2[1,2]],f2[1,2],1];
peq[3]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
peq[4]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[coef2[2],f2[1,1]],f2[1,1],1];
peq[5]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
peq[6]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];

```

```

xxx=Coefficient[Collect[coef2[2],f2[1,2]],f2[1,2],1];
peq[7]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
peq[8]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];
xxx=.;
Do[peq1[j]=Coefficient[Collect[peq[j],y],y,1],
  {j,1,8}];
Do[peq1[j+8]=Coefficient[Collect[peq[j],y],y,0],
  {j,1,8}];

Print["sistema pronto"];
Do[m2tmp[i,j]=Collect[peq1[i],c[j]],{j,1,8},{i,1,16}];
Do[m2[i,j]=Coefficient[m2tmp[i,j],c[j],1],{j,1,8},{i,1,16}];

matriz2=Table[m2[i,j],{i,9,16},{j,1,8}];
Print["Matriz2 Pronta"];
xxx=Det[matriz2];
Print["detmat=",xxx];
xxx=.;

(* CALCULO DO VETOR *)

vel=u[y,t];
vel2=vel;

vel2=Collect[vel2,Cos[w t]];
secoe2[1]=Coefficient[vel2,Cos[w t]];
vel2=Collect[vel2,Sin[w t]];
secoe2[2]=Coefficient[vel2,Sin[w t]];

xxx=Coefficient[Collect[secoe2[1],f2[1,1]],f2[1,1],1];
seq[1]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
seq[2]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[secoe2[1],f2[1,2]],f2[1,2],1];
seq[3]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
seq[4]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[secoe2[2],f2[1,1]],f2[1,1],1];
seq[5]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
seq[6]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[secoe2[2],f2[1,2]],f2[1,2],1];
seq[7]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
seq[8]=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];
xxx=.;

Do[seq1[j]=Coefficient[Collect[seq[j],y],y,1],
  {j,1,8}];
Do[seq1[j+8]=Coefficient[Collect[seq[j],y],y,0],
  {j,1,8}];

Do[cet2[n]=seq1[n],{n,1,16}];

vector2=Table[cet2[n],{n,9,16}];
Print["vector2 pronto"];

invmat2=Inverse[matriz2];
solp2=invmat2.vector2;
Print["solp2"];

```



```
tetag1[y_,t_]=ExpandAll[y(Cos[w t] Sum[solp2[[j]] fil[j,y],{j,1,4}]+
Sin[w t] Sum[solp2[[j+4]] fil[j,y],{j,1,4}]]];
```

```
jota=(1/4)((gama2/a)-gama1);
```

```
tetag1[y_,t_]=Expand[2 jota tetag1[y,t]];
Print["tetag1 pronta"];
Remove[invmat2,matriz2,vector2,peq,peq1,seq,seq1,coef1,coef2,secoe1,secoe2];
Remove[c,cet2,equacao2];
Print["tetag1[y,t] para escoamento livre pronta"];
(* DETERMINACAO DA PARTICULAR TETAG2[Y,T] NO ESCOAMENTO LIVRE *)
(* INV1.M FORNECE INVERSA DA MATRIZ DE ANA1R.M GERADA ATRAVES DE GAUSS.M *)
d[1]=s(fi2[3]-fi2[2]);
d[2]=s(fi2[4]+fi2[1]);
d[3]=s(fi2[1]-fi2[4]);
d[4]=s(fi2[2]+fi2[3]);
dd[1]=s(d[3]-d[2]);
dd[1]=Factor[Expand[dd[1]]];
dd[3]=Factor[Expand[s(d[1]-d[4])]];
dd[2]=Factor[Expand[s(d[4]+d[1])]];
dd[4]=Factor[Expand[s(d[2]+d[3])]];
eq[1]=0;
Do[
eq[1]=eq[1]+w q[i,0] fi2[i]-2 p[i,2] fi2[i]-2 p[i,1] d[i] - p[i,0] dd[i],
{i,1,4}];
eq[1]=Factor[Expand[eq[1]]];
Do[eq[1]=Collect[eq[1],fi2[i]],{i,1,4}];
eq[2]=0;
Do[
eq[2]=eq[2]-w p[i,0] fi2[i]-2 q[i,2] fi2[i]-2 q[i,1] d[i] - q[i,0] dd[i],
{i,1,4}];
eq[2]=Expand[eq[2]];
Do[eq[2]=Collect[eq[2],fi2[i]],{i,1,4}];
eq[3]=0;
Do[
eq[3]=eq[3]+w q[i,1] fi2[i]-4 p[i,2] d[i]-p[i,1] dd[i],
{i,1,4}];
eq[3]=Expand[eq[3]];
Do[eq[3]=Collect[eq[3],fi2[i]],{i,1,4}];
eq[4]=0;
Do[
```

```

eq[4]=eq[4]-w p[i,1] fi2[i]-4 q[i,2] d[i]- q[i,1] dd[i]
, {i,1,4}];
eq[4]=Expand[eq[4]];
Do[eq[4]=Collect[eq[4],fi2[i]],{i,1,4}];
eq[5]=0;
Do[eq[5]=eq[5]+w q[i,2] fi2[i]-p[i,2] dd[i]
, {i,1,4}];
eq[5]=Expand[eq[5]];
Do[eq[5]=Collect[eq[5],fi2[i]],{i,1,4}];
eq[6]=0;
Do[eq[6]=eq[6]-w p[i,2] fi2[i]- q[i,2] dd[i]
, {i,1,4}];
eq[6]=Expand[eq[6]];
Do[eq[6]=Collect[eq[6],fi2[i]],{i,1,4}];
Do[
Do[
m3[i,j]=Coefficient[eq[i],fi2[j],1]
, {j,1,4}]
, {i,1,6}];
Print["m3[i,j] coeficientes prontos"];
Do[
Do[
equat[i,j]=m3[i,j]
, {j,1,4}]
, {i,1,6}];
Do[
Do[
Do[
equat[i,j]=equat[i,j]/.p[k,0]->x[k]
, {k,1,4}]
, {j,1,4}]
, {i,1,6}];
Do[
Do[
Do[
equat[i,j]=equat[i,j]/.q[k,0]->x[k+4]
, {k,1,4}]
, {j,1,4}]
, {i,1,6}];
Do[
Do[
Do[
equat[i,j]=equat[i,j]/.p[k,1]->x[k+8]
, {k,1,4}]

```

```

    ,(j,1,4)]
  ,(i,1,6)];
Do[
  Do[
    Do[
      equat[i,j]=equat[i,j]/.q[k,1]->x[k+12]
      ,(k,1,4)]
    ,(j,1,4)]
  ,(i,1,6)];
Do[
  Do[
    Do[
      equat[i,j]=equat[i,j]/.p[k,2]->x[k+16]
      ,(k,1,4)]
    ,(j,1,4)]
  ,(i,1,6)];
Do[
  Do[
    Do[
      equat[i,j]=equat[i,j]/.q[k,2]->x[k+20]
      ,(k,1,4)]
    ,(j,1,4)]
  ,(i,1,6)];
Do[
  Do[
    n3[i,j]=Coefficient[equat[1,i],x[j]]
    ,(j,1,24)]
  ,(i,1,4)];
Do[
  Do[
    n3[i+4,j]=Coefficient[equat[2,i],x[j]]
    ,(j,1,24)]
  ,(i,1,4)];
Do[
  Do[
    n3[i+8,j]=Coefficient[equat[3,i],x[j]]
    ,(j,1,24)]
  ,(i,1,4)];
Do[
  Do[
    n3[i+12,j]=Coefficient[equat[4,i],x[j]]
    ,(j,1,24)]
  ,(i,1,4)];
Do[
  Do[
    n3[i+16,j]=Coefficient[equat[5,i],x[j]]
    ,(j,1,24)]
  ,(i,1,4)];
Do[
  Do[
    n3[i+20,j]=Coefficient[equat[6,i],x[j]]

```

```

      ,{j,1,24}]
    ,{i,1,4}];
matriz3=Table[n3[i,j],{i,1,24},{j,1,24}];

mat={};

Do[
  tmp3={};
  Do[AppendTo[tmp3,matriz3[[i,j]]],
    {j,1,4}];
  Do[AppendTo[tmp3,matriz3[[i,j]]],
    {j,9,24}];
  AppendTo[mat,tmp3],
  {i,1,20}];

Print["mat=",mat];

<<"inv.m";

fi2[1]=fi1[1,y];
fi2[2]=fi1[2,y];
fi2[3]=fi1[3,y];
fi2[4]=fi1[4,y];

coef3[1]=Coefficient[Collect[vel,Cos[w t]],Cos[w t]];
coef3[2]=Coefficient[Collect[vel,Sin[w t]],Sin[w t]];

xxx=Coefficient[Collect[coef3[1],f2[1,1]],f2[1,1],1];
xxx1=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
xxx2=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];
xxx=Coefficient[Collect[coef3[1],f2[1,2]],f2[1,2],1];
xxx3=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
xxx4=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[coef3[2],f2[1,1]],f2[1,1],1];
yyy1=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
yyy2=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];
xxx=Coefficient[Collect[coef3[1],f2[1,2]],f2[1,2],1];
yyy3=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,1]],f2[2,1],1];
yyy4=Coefficient[Collect[xxx,f2[2,2]],f2[2,2],1];
xxx=.;
vect1={0,0,0,0,0,0,0,0,xxx1,xxx2,xxx3,xxx4,
      yyy1,yyy2,yyy3,yyy4,0,0,0,0};

matriz4=Table[n3[i,j],{i,1,20},{j,5,8}];
vect2=Map#[[1]]&,matriz4];
vect3=Map#[[2]]&,matriz4];
vect4=Map#[[3]]&,matriz4];
vect5=Map#[[4]]&,matriz4];

Print["inversa pronta"];

sol1=invmat.vect1;
sol2=invmat.vect2;
sol3=invmat.vect3;
sol4=invmat.vect4;
sol5=invmat.vect5;

```

```

Do[
  p[j,0]=ccg[j](sol1[[j]]-sol2[[j]]-sol3[[j]]-sol4[[j]]-sol5[[j]]);
  p[j,1]=ccg[j](sol1[[j+4]]-sol2[[j+4]]-sol3[[j+4]]-sol4[[j+4]]-
    sol5[[j+4]]);
  q[j,1]=ccg[j](sol1[[j+8]]-sol2[[j+8]]-sol3[[j+8]]-sol4[[j+8]]-
    sol5[[j+8]]);
  p[j,2]=ccg[j](sol1[[j+12]]-sol2[[j+12]]-sol3[[j+12]]-sol4[[j+12]]-
    sol5[[j+12]]);
  q[j,2]=ccg[j](sol1[[j+16]]-sol2[[j+16]]-sol3[[j+16]]-sol4[[j+16]]-
    sol5[[j+16]]);

```

```

  {j,1,4}];

```

```

tetag2a[y_,t_]=Expand[Sum[(p[i,0]+p[i,1] y+p[i,2] y^2) fil[i,y],
  {i,1,4}]];

```

```

tetag2b[y_,t_]=Expand[Sum[(ccg[i]+q[i,1] y+q[i,2] y^2) fil[i,y],
  {i,1,4}]];

```

```

tetag2[y_,t_]=Expand[Cos[w t] tetag2a[y,t]+Sin[w t] tetag2b[y,t]];
tetag2[y_,t_]=Expand[2 gamal tetag2[y,t]];

```

```

Print["tetag2 pronta"];

```

```

Print["tetag2 pronta"];

```

```

Remove[invmat,vect1,coef3,sol1,xxx1];
Remove[xxx2,xxx3,yyy1,yyy2,yyy3,yyy4,tetag2a,tetag2b];

```

```

(* SOLUCAO GERAL TETAG[Y,T] NO ESCOAMENTO LIVRE *)

```

```

tetag[y_,t_]=Expand[(tetag1[y,t]+tetag2[y,t])+
  (((gamal^2)/12.) y^4)+
  ((gamal jota/3) y^3)+
  ((jota^2 y^2)/2)+ccg[5]+ccg[6] y];

```

```

tetag[y_,t_]=Expand[ec tetag[y,t]];
Print["tetag pronta"];

```

```

(* SOLUCAO DA PARTICULAR TEMPOG1[Y,T] NO MEIO POROSO *)

```

```

pf2[1,1]=Cosh[argu1 y];
pf2[1,2]=Sinh[argu1 y];
pf2[2,1]=Cos[argu2 y];
pf2[2,2]=Sin[argu2 y];
pfil[1,y_]=pf2[1,1] pf2[2,1];
pfil[2,y_]=pf2[1,1] pf2[2,2];
pfil[3,y_]=pf2[1,2] pf2[2,1];
pfil[4,y_]=pf2[1,2] pf2[2,2];

```

```

tempog1[y_,t_]=y(Cos[w t] Sum[pc[j] pfil[j,y],{j,1,4}]+
  Sin[w t] Sum[pc[j+4] pfil[j,y],{j,1,4}]);

```

```

funcao2=D[tempog1[y,t],{t,1}] -aa1 D[tempog1[y,t],{y,2}];

```

```

funcao2=Expand[funcao2];

```

```

funcao2=Collect[funcao2,Cos[w t]];
Print["Funcao2 Pronta"];

```

```

pcoef2[1]=Coefficient[funcao2,Cos[w t]];
funcao2=Collect[funcao2,Sin[w t]];
pcoef2[2]=Coefficient[funcao2,Sin[w t]];

xxx=Coefficient[Collect[pcoef2[1],pf2[1,1]],pf2[1,1],1];
ppeq[1]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
ppeq[2]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[pcoef2[1],pf2[1,2]],pf2[1,2],1];
ppeq[3]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
ppeq[4]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[pcoef2[2],pf2[1,1]],pf2[1,1],1];
ppeq[5]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
ppeq[6]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[pcoef2[2],pf2[1,2]],pf2[1,2],1];
ppeq[7]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
ppeq[8]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];
xxx=.;
Do[ppeq1[j]=Coefficient[Collect[ppeq[j],y],y,1],
  {j,1,8}];
Do[ppeq1[j+8]=Coefficient[Collect[ppeq[j],y],y,0],
  {j,1,8}];

Print["sistema pronto"];
Do[pm2tmp[i,j]=Collect[ppeq1[i],pc[j]],{j,1,8},{i,1,16}];
Do[pm2[i,j]=Coefficient[pm2tmp[i,j],pc[j],1],{j,1,8},{i,1,16}];

pmatriz2=Table[pm2[i,j],{i,9,16},{j,1,8}];
Print["Matriz2 Pronta"];
xxx=Det[pmatriz2];
Print["determinante de pmatriz2 pronto=",xxx];
xxx=.;

(* CALCULO DO VETOR *)
povel=v[y,t];
povel2=povel;
Print["povel2"];
povel2=Collect[povel2,Cos[w t]];
psecoe2[1]=Coefficient[povel2,Cos[w t]];
povel2=Collect[povel2,Sin[w t]];
psecoe2[2]=Coefficient[povel2,Sin[w t]];

xxx=Coefficient[Collect[psecoe2[1],pf2[1,1]],pf2[1,1],1];
pseq[1]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
pseq[2]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[psecoe2[1],pf2[1,2]],pf2[1,2],1];
pseq[3]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
pseq[4]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[psecoe2[2],pf2[1,1]],pf2[1,1],1];
pseq[5]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
pseq[6]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[psecoe2[2],pf2[1,2]],pf2[1,2],1];
pseq[7]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
pseq[8]=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];
xxx=.;

```

```

Do[pseq1[j]=Coefficient[Collect[pseq[j],y],y,1],
  {j,1,8}];
Do[pseq1[j+8]=Coefficient[Collect[pseq[j],y],y,0],
  {j,1,8}];
(*
Do[pcet2[n]=pseq1[n],{n,1,16}];
*)
pvec2=Table[pseq1[n],{n,9,16}];
Print["vector2 pronto"];
●
pinvmat2=Inverse[pmatriz2];
psolp2=pinvmat2.pvec2;
Print["psolp2 pronta"];

tempogl[y_,t_]=Expand[y(Cos[w t] ddg1[1] Sum[psolp2[[j]] pfil[j,y],{j,1,4}]+
  Sin[w t] ddg1[2] Sum[psolp2[[j+4]] pfil[j,y],{j,1,4}])];
tempogl[y_,t_]=ExpandAll[2 jota tempogl[y,t]];
Print["tempogl pronta"];
Remove[pinvmat2,pmatriz2,pvector2,ppeq,ppeq1,pseq,pseq1,pcoef1];
Remove[pcoef2,psecoe1,psecoe2,pvec2,povel2,funcao2,pm2,pm2tmp];

Print["Tempogl[y,t] do Meio Poroso Pronta"];

(* DETERMINACAO DA SOLUCAO PARTICULAR TEMPOG2[Y,T] NO MEIO POROSO y(du/dy) *
● (* INVP1.M FORNECE A INVERSA DA MATRIZ DE ANAP1.M OBTIDA USANDO GAUSS.M *)

<<"inv1p.m";

fi3[1]=pfil[1,y];
fi3[2]=pfil[2,y];
fi3[3]=pfil[3,y];
●fi3[4]=pfil[4,y];

povel=Expand[povel];
pcoef3[1]=Coefficient[Collect[povel,Cos[w t]],Cos[w t]];
pcoef3[2]=Coefficient[Collect[povel,Sin[w t]],Sin[w t]];

xxx=Coefficient[Collect[pcoef3[1],pf2[1,1]],pf2[1,1],1];
pxx1=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
pxx2=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];
xxx=Coefficient[Collect[pcoef3[1],pf2[1,2]],pf2[1,2],1];
pxx3=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
pxx4=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];

xxx=Coefficient[Collect[pcoef3[2],pf2[1,1]],pf2[1,1],1];
●p yy1=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
p yy2=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];
xxx=Coefficient[Collect[pcoef3[1],pf2[1,2]],pf2[1,2],1];
p yy3=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,1]],pf2[2,1],1];
p yy4=Coefficient[Collect[xxx,pf2[2,2]],pf2[2,2],1];
xxx=.;
pvect1={0,0,0,0,0,0,0,0,pxx1,pxx2,pxx3,pxx4,
  p yy1,p yy2,p yy3,p yy4};
●
psol1=invpmat.pvect1;

Do[

```

```

pp[j,0]=psol1[[j]];
qp[j,0]=psol1[[j+4]];
pp[j,1]=psol1[[j+8]];
qp[j,1]=psol1[[j+12]]
,{j,1,4}];

tempog2a[y_,t_]=Expand[Sum[(pp[i,0]+pp[i,1] y) pfi1[i,y],
{i,1,4}]];
tempog2b[y_,t_]=Expand[Sum[(qp[i,0]+qp[i,1] y) pfi1[i,y],
{i,1,4}]];
tempog2[y_,t_]=Expand[Cos[w t] ddg1[3] tempog2a[y,t]+
Sin[w t] ddg1[4] tempog2b[y,t]];
tempog2[y_,t_]=ExpandAll[(2 gama2/1.2) tempog2[y,t]];
Print["tempog2"];

(* SOLUCAO GERAL TEMPOG[Y,T] PARA O MEIO POROSO *)

tempog[y_,t_]=ExpandAll[tempog1[y,t]+tempog2[y,t]+
((gama2^2 y^4)/(12. a^2))+
((gama2 jota)/(3. a) y^3)+
((jota^2 y^2)/2.)+ddg1[5]+ddg1[6] y];

tempog[y_,t_]=Expand[a pec tempog[y,t]];
Remove[tempog2a,tempog2b,pvect1,pxx1,pxx2,pxx3,pxx4,pyy1,pyy2,pyy3]
Remove[pyy4,pcoef3,invpmat];

(* CONDICAOES DE CONTORNO PARA TEMPERATURA COM GRADIENTE DE PRESSAO
CONDICAOES NA INTERFACE*)

bcg[1]=ExpandAll[tempog[0,t]-tetag[0,t]];
bcg[2]=(kk D[tempog[y,t],{y,1}]-D[tetag[y,t],{y,1}])/y->0;
bcg[2]=ExpandAll[bcg[2]];
xxx=Collect[bcg[1],Cos[w t]];
bcgtmp[1]=Coefficient[xxx,Cos[w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[w t]];
bcgtmp[2]=Coefficient[xxx,Sin[w t],1];
bcgtmp[3]=Coefficient[xxx,Sin[w t],0];

xxx=Collect[bcg[2],Cos[w t]];
bcgtmp[4]=Coefficient[xxx,Cos[w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[w t]];
bcgtmp[5]=Coefficient[xxx,Sin[w t],1];
bcgtmp[6]=Coefficient[xxx,Sin[w t],0];
xxx=.;
Do[xxx=bcgtmp[i];
Do[
xxx=Collect[xxx,ddg1[j]];
ddgtmp[i,j]=Coefficient[xxx,ddg1[j],1];
xxx=xxx/.dd1[j]->0,
{j,1,6}],
{i,1,6}];
matbcg=Table[ddgtmp[i,j],{i,1,6},{j,1,6}];
Print["matbcg pronta"];
Do[
tgrhs[i]=bcgtmp[i];
Do[
tgrhs[i]=tgrhs[i]/.ddg1[j]->0,

```

```

    {j,1,6}];
    tgrhs[i]=-tgrhs[i],
    {i,1,6}];
    tgrhstmp=Table[tgrhs[i],{i,1,6}];
    solucg=Inverse[matbcg].tgrhstmp;
    Print["Solucao Condicoes de Contorno Interface Pronta"];

```

```

Do[
    ddg1[i]=solucg[[i]]
    ,{i,1,6}];
xxx=.;

```

(* CONDIÇÕES DE CONTORNO DA TEMPERATURA COM GRADIENTE DE PRESSÃO NAS PLACAS *)

```

bcg[3]=ExpandAll[tetag[1.,t]];
(*bcg[3]=D[tetag[y,t],{y,1}]/.y->1;
bcg[3]=ExpandAll[bcg[3]];*)
bcg[4]=ExpandAll[tempog[-1.,t]];
(*bcg[4]=D[tempog[y,t],{y,1}]/.y->-1;
bcg[4]=ExpandAll[bcg[4]];*)
xxx=Collect[bcg[3],Cos[w t]];
segct[1]=Coefficient[xxx,Cos[w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[w t]];
segct[2]=Coefficient[xxx,Sin[w t],1];
segct[3]=Coefficient[xxx,Sin[w t],0];

```

```

xxx=Collect[bcg[4],Cos[w t]];
segct[4]=Coefficient[xxx,Cos[w t],1];
xxx=Coefficient[xxx,Cos[w t],0];
xxx=Collect[xxx,Sin[w t]];
segct[5]=Coefficient[xxx,Sin[w t],1];
segct[6]=Coefficient[xxx,Sin[w t],0];
xxx=.;

```

```

Do[xxx=segct[i];
    Do[
        xxx=Collect[xxx,ccg[j]];
        ccgtmp[i,j]=Coefficient[xxx,ccg[j],1];
        xxx=xxx/.ccg[j]->0,
        {j,1,6}],
    {i,1,6}];

```

```

sgmatbc=Table[ccgtmp[i,j],{i,1,6},{j,1,6}];
Print["sgmatbc pronta"];

```

```

Do[
    qgrhs[i]=segct[i];
    Do[
        qgrhs[i]=qgrhs[i]/.ccg[j]->0,
        {j,1,6}];
    qgrhs[i]=-qgrhs[i]
    ,{i,1,6}];

```

```

Print[" acabou"];
grhstmp=Table[qgrhs[i],{i,1,6}];

```

```

bcgsol=Inverse[sgmatbc].grhstmp;

```

```

Print["Solucao Topo Pronta"];

```

```

Do[
  ccg[i]=N[bcgsol[[i]],10]
  ,(i,1,6)];

Remove[bcg,bcgtmp,matbcg,ddgtmp,tgrhs,tgrhstmp,segct,sgmatbc,qgrhs,grhstmp];
Remove[solucg,bcgsol];

tetag[y_,t_]=Expand[teta[y,t]+tetag[y,t]];
tempog[y_,t_]=Expand[tempo[y,t]+tempog[y,t]];
tetag[y_,t_]=N[tetag[y,t],10];
tetag[y_,t_]=Chop[tetag[y,t]];
tempog[y_,t_]=N[tempog[y,t],10];
tempog[y_,t_]=Chop[tempog[y,t]];
*)
(* DEFINICAO DAS VELOCIDADES COM GRADIENTE DE PRESSAO *)

ug[y_,t_]=Expand[u[y,t]+(gama1/2) y^2+(y/4) ((gama2/a)-gama1)-
  (1/4) ((gama2/1.2)+gama1)];
vg[y_,t_]=Expand[v[y,t]+(gama2/(2 a)) y^2+(y/4) ((gama2/a)-gama1)-
  (1/4) ((gama2/a)+gama1)];
ug[y_,t_]=N[ug[y,t],10];
ug[y_,t_]=Chop[ug[y,t]];
vg[y_,t_]=N[vg[y,t],10];
vg[y_,t_]=Chop[vg[y,t]];
*)
(* TEMPERATURAS SEM GRADIENTE DE PRESSAO E COM GERACAO DE CALOR *)

(* EQUACOES FINAIS *)

tetaq[y_,t_]=Expand[teta[y,t]- (q1/(2 a1)) y^2+(y/4) (q1/a1-q2/aa1)+
  (1/4)(q1/a1+q2/aa1)];
tempoq[y_,t_]=Expand[tempo[y,t]- (q2/(2 aa1)) y^2+(y/(4 kk)) (q1/a1-q2/aa1)+
  (1/4) (q1/a1+q2/aa1)];
tetaq[y_,t_]=N[tetaq[y,t],10];
tetaq[y_,t_]=Chop[tetaq[y,t]];
tempoq[y_,t_]=N[tempoq[y,t],10];
tempoq[y_,t_]=Chop[tempoq[y,t]];

(* TEMPERATURAS COM GRADIENTE DE PRESSAO E COM GERACAO DE CALOR *)

tetagq[y_,t_]=Expand[tetag[y,t]- (q1/(2 a1)) y^2+(y/4) (q1/a1-q2/aa1)+
  (1/4)(q1/a1+q2/aa1)];
tempogq[y_,t_]=Expand[tempog[y,t]- (q2/(2 aa1)) y^2+(y/(4 kk)) (q1/a1-q2/aa1)+
  (1/4) (q1/a1+q2/aa1)];
tetagq[y_,t_]=N[tetagq[y,t],10];
tetagq[y_,t_]=Chop[tetagq[y,t]];
tempogq[y_,t_]=N[tempogq[y,t],10];
tempogq[y_,t_]=Chop[tempogq[y,t]];
*)
OpenWrite["c:/aquina/anawork/temgrad2.out",FormatType->InputForm];

Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out","frequencia=",w,"condutividade=",kk];
Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out","Pr=",pr,"Prp=",prp,"Ec=",ec,
  "Ecp=",pec,"grad1=",gama1,"grad2=",gama2,"b=",b,"PLACAS ISOTERMICAS"];

Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out","u[y_,t_]=",u[y,t],";"];
Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out","v[y_,t_]=",v[y,t],";"];

Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out","ug[y_,t_]=",ug[y,t],";"];

```

```
Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out", "vg[y_,t_]=",vg[y,t],";"]; 119
    (*
Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out", "teta2[y_,t_]=",teta[y,t],";"];
Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out", "tempo2[y_,t_]=",tempo[y,t],";"];

Write["c:/aquina/anawork/temgrad4.out", "tetag4[y_,t_]=",tetag[y,t],";"];
Write["c:/aquina/anawork/temgrad4.out", "tempog4[y_,t_]=",tempog[y,t],";"];

Write["c:/aquina/anawork/temgrad1.out", "tetaq1[y_,t_]=",tetaq[y,t],";"];
Write["c:/aquina/anawork/temgrad1.out", "tempoq1[y_,t_]=",tempoq[y,t],";"];
Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out", "tetagq2[y_,t_]=",tetagq[y,t],";"];
Write["c:/aquina/anawork/temgrad2.out", "tempogq2[y_,t_]=",tempogq[y,t],";"];
    *)
Close["c:/aquina/anawork/temgrad2.out"];

Print["FIM DA TEMPERATURA COM GRADIENTE DE PRESSAO"];
```

AQUINO, A. M. S. *Porous media flows between oscillating surfaces - an analysis from the tribology view point.* Guaratinguetá, 1998. 121p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

ABSTRACT

The study of vibrating bodies in unsteady and steady flows constitutes a subject of great interest in the field of flow control in engineering applications, particularly when these vibrations are associated with a lubrication problem, it is the case of a lubrication film flowing through a porous medium. Although this phenomenon is well described by the generalized Darcy Law, others involving the full Navier-Stokes equations are hardly solved exactly. Two systems were considered, the first constituted by two, infinitely long, non-porous, rigid parallel plates in a horizontal position, and the other formed by two coaxial disks disposed just like described before, and a Couette flow of a viscous fluid between them in each system. Part of the inner spaces, were also assumed to be filled with a porous material. The systems are analyzed separately. In the first one the upper plate oscillates with a given frequency while the lower one remains at rest, in the second the upper disk oscillates and the lower one remains stationary. The purpose of the present work is to show exact solutions of the hydrodynamical and thermal aspects of these problems. Analytical expressions for the velocity and temperature, derived from



the Navier-Stokes equation and the energy equation, were found assuming that the unsteady flow is superimposed to the steady mean flow. The dependence of the temperature and unsteady velocity on the medium permeability and the angular frequency are also analyzed and velocity and temperature profiles determined.

Keywords: porous medium, Couette flow, tribology, hydrodynamic.



