

# Campos de Vetores Lineares Reversíveis

## Equivariantes

Michele de Oliveira Alves

**Orientador:** Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Fevereiro - 2006

# COMISSÃO JULGADORA

## Titulares

Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi (UNESP) - Orientador

Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel (USP)

Profa. Dra. Angela Maria Sitta (UNESP)

## Suplentes

Prof. Dr. Parham Salehyan (UNESP)

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio (UEM)

*Dedico à minha família  
Gentil, Neusa e Marcelo.*

# Agradecimentos

Ao término deste trabalho gostaria de agradecer a Deus por me dar a graça de concluir mais uma etapa de minha vida. Ele que esteve presente durante estes dois anos através da doce presença de minha querida mãe Nossa Senhora de Fátima.

A minha família pelo apoio, sacrifício, compreensão de minha ausência em muitos momentos e por ser o alicerce que me dá força, alegria, amor e perseverança.

Ao professor Cláudio por todos os ensinamentos, paciência, atenção e disponibilidade para me atender, esclarecer dúvidas etc...

As minhas amigas/irmãs de república Aline e Miriam, elas sim me aguentaram pacientemente, me ouviram (e como ouviram!) durante estes dois anos. Pela oportunidade de ampliar minha amizade com a Miriam (já são quase 6 anos) e de conhecer a Aline, vivendo em um ambiente de paz e amizade em nossa casa.

Agradeço também aos amigos dos grupos de oração São Pe Pio, São Sebastião e GOU-UNidos no ESPírito que proporcionaram para mim momentos de intensa intimidade com Deus, onde eu sempre recarreguei minhas forças. Se hoje recebo este título, eles fazem parte desta conquista também.

Aos meus amigos da pós-graduação pelo convívio e amizade. Em particular, aos grandes amigos Anderson e Júlio vocês com certeza estarão em meu coração mesmo que estejamos distantes.

Aos amigos de Prudente, Manduri e Cerqueira César que mesmo distantes fisicamente estavam juntos em oração e no coração.

Ao professor José Roberto Nogueira (FCT/UNESP) que me incentivou a seguir carreira acadêmica.

Aos professores do departamento e funcionários do IBILCE. Particularmente aos professores Parham Salehyan e Ângela Maria Sitta pelas correções e dicas na qualificação. Também a Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Miriam Garcia Manoel pela ajuda e as valiosas correções em meu trabalho.

E também a FAPESP que me ajudou financeiramente e me incetivou ainda mais a pesquisa.

*“Que fosse possível colocar a ciência ao serviço de Deus, só o compreendi claramente com Santo Tomás; e foi isso que me fez decidir dedicar-me inteiramente ao trabalho científico.”*

*Edith Stein.*

# Sumário

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| Lista de Símbolos                                                   | 9         |
| Introdução                                                          | 13        |
| <b>1 Resultados Importantes de Álgebra e Representação de Grupo</b> | <b>15</b> |
| 1.1 Álgebra Linear Real . . . . .                                   | 15        |
| 1.2 Automorfismos de Álgebras . . . . .                             | 23        |
| 1.3 Grupos de Lie, Álgebras de Lie e Ações Adjuntas . . . . .       | 30        |
| 1.4 Representações, Lema de Schur . . . . .                         | 42        |
| 1.5 Decomposição Isotípica . . . . .                                | 47        |
| <b>2 Classificação das Representações de <math>G</math></b>         | <b>54</b> |
| 2.1 Sistemas Lineares Reversíveis e Equivariantes . . . . .         | 54        |
| 2.2 Prova de alguns resultados importantes . . . . .                | 62        |
| 2.3 Representações Irredutíveis de $G$ . . . . .                    | 69        |
| <b>3 Dinâmica dos Sistemas Lineares Reversíveis Equivariantes</b>   | <b>92</b> |
| 3.1 Fluxos Topologicamente Conjugados . . . . .                     | 92        |
| 3.2 Estudo dos autovalores . . . . .                                | 111       |
| Referências Bibliográficas                                          | 120       |
| Índice Remissivo                                                    | 122       |

# Lista de Símbolos

| Símbolo                        | Descrição                                                                                       | Página |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $\mathcal{A}_+$                | $\{A \in \mathcal{A} \mid \Sigma(A) = A\}$                                                      | 24     |
| $\mathcal{A}_-$                | $\{A \in \mathcal{A} \mid \Sigma(A) = -A\}$                                                     | 24     |
| $\overline{A}$                 | Automorfismo $K_\Sigma(A)$ quando $\Sigma$ é a conjugação complexa                              | 23     |
| $A^\sharp$                     | Automorfismo $K_\Sigma(A)$ quando $\Sigma$ é a conjugação quaterniônica                         | 23     |
| $\mathbb{C}$                   | Álgebra dos Complexos                                                                           | 14     |
| $gl(m; \mathbb{K})$            | Álgebra das Matrizes $m \times m$ com entradas em $\mathbb{K}$                                  | 17     |
| $gl(m; \mathbb{H}^\sharp)$     | Conjunto das funções $\mathbb{H}^\alpha$ -lineares, onde $\alpha$ é a conjugação quaterniônica  | 28     |
| $gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ | Conjunto das funções $\mathbb{C}^\alpha$ -lineares, onde $\alpha$ é a conjugação complexa       | 28     |
| $gl(V; \mathbb{K})$            | $\{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ é } \mathbb{K} - \text{linear}\}$                      | 15     |
| $gl(V)$                        | $\{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ é } \mathbb{K} - \text{linear}\}$                      | 15     |
| $gl(V; \mathbb{K}^\alpha)$     | $\{f : V \longrightarrow V \mid f(xk) = f(x)\alpha(k), \forall x \in U, k \in \mathbb{K}\}$     | 26     |
| $gl(V_1, V_2)$                 | $\{f : V_1 \longrightarrow V_2 \mid f \text{ é } \mathbb{K} - \text{linear}\}$                  | 15     |
| $gl_G(V)$                      | $\{f : V \longrightarrow V \mid f(\rho(g)v) = \rho(g)f(v), \forall g \in G, v \in V\}$          | 42     |
| $gl_\sigma(V)$                 | $\{L : V \longrightarrow V \mid L(\rho(g)v) = \sigma(g)\rho(g)L(v), \forall g \in G, v \in V\}$ | 61     |

| <b>Símbolo</b>                      | <b>Descrição</b>                                                                                                    | <b>Página</b> |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $gl_\sigma(V, \rho)$                | $\{L : V \longrightarrow V \mid L(\rho(g)v) = \sigma(g)\rho(g)L(v), \\ \forall g \in G, v \in V\}$                  | 61            |
| $G$                                 | Grupo de Lie Compacto                                                                                               | 56            |
| $GL(V)$                             | $\{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ é } \mathbb{K} - \text{linear, invertível}\}$                              | 15            |
| $GL(V; \mathbb{K})$                 | $\{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ é } \mathbb{K} - \text{linear, invertível}\}$                              | 15            |
| $GL(m; \mathbb{K})$                 | Grupo das matrizes $m \times m$ , invertíveis com entradas em $\mathbb{K}$                                          | 29            |
| $GL_G(V)$                           | $\{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ é invertível e } \\ f(\rho(g)v) = \rho(g)f(v), \forall g \in G, v \in V\}$ | 50            |
| $G_+$                               | Conjunto dos pontos fixos da involução $\Sigma$ sobre $G$                                                           | 31            |
| $\mathbb{H}$                        | Álgebra dos Quatérnios                                                                                              | 14            |
| $I_G((V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2))$ | $\{f : V_1 \longrightarrow V_2 \mid f(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)f(v), \\ \forall g \in G, v \in V_1\}$                 | 42            |
| $I_G((V_1, V_2))$                   | $\{f : V_1 \longrightarrow V_2 \mid f(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)f(v), \\ \forall g \in G, v \in V_1\}$                 | 42            |
| $K_\Sigma(A)$                       | $\Sigma^{-1} \circ A\Sigma$ , onde $\Sigma$ é um automorfismo sobre $\mathbb{K}$                                    | 23            |
| $l(m, n; \mathbb{K})$               | Conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$                                                     | 33            |
| $NSD$                               | Representação irreduzível que não é $\sigma$ -auto dual                                                             | 77            |
| $SD$                                | Representação irreduzível que é $\sigma$ -auto dual                                                                 | 77            |
| $\mathbb{R}$                        | Álgebra dos Reais                                                                                                   | 14            |
| $(\mathbb{R}, \sigma)$              | Representação de um grupo $G$ sobre $\mathbb{Z}_2$                                                                  | 61            |
| $SO(n)$                             | $\{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid AA^t = Id_n \text{ e } \det(A) = 1\}$                                               | 29            |
| $(U, \tau_\sigma)$                  | Representação $\sigma$ -dual de $(U, \tau)$                                                                         | 68            |
| $U \otimes V$                       | Produto Tensorial de $U$ por $V$                                                                                    | 17            |
| $(V, \rho)$                         | Representação de um grupo $G$ sobre $V$                                                                             | 42            |
| $\Sigma_i$                          | Conjugação Quaterniônica                                                                                            | 23            |

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo dos campos de vetores lineares reversíveis e equivariantes. Tal estudo tem como base a Teoria de Representações de grupos de Lie compactos. Usaremos o fato de que a ação de um grupo de Lie compacto pode ser decomposta como soma direta de representações irredutíveis e de acordo com o Lema de Schur tais representações poderão ser de três tipos:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ . Daremos uma classificação das possíveis estruturas dos sistemas lineares reversíveis equivariantes baseado na teoria de representações citada acima e faremos um estudo dos autovalores para uma classe particular de funções  $\sigma$ —reversíveis. Dessa forma temos um cenário bem claro da dinâmica de tais sistemas em cada uma dessas classes.

**Palavras chave:** Sistemas Reversíveis, Sistemas Equivariantes, Teoria das Representações, Lema de Schur.

# Abstract

In this work we present a study of the linear equivariant reversible vector fields. This study is based on the Theory of Representation of compact Lie groups. We use the fact that an action of a compact Lie group can be decomposed as a direct sum of irreducible representations, and according to Schur's Lemma these representations can be only of three types:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ . We give a classification of the possible structures of the linear equivariant reversible systems based on the Theory of Representations mentioned above and we study of the eigenvalues for a particular classes of  $\sigma$ -reversible maps. In this way we have a very clear scenario about the dynamics of such systems in each one of these classes.

**Key words:** Reversible Systems, Equivariant Systems, Theory of Representations, Schur's Lemma.

# Introdução

Os sistemas lineares formam a base da maioria dos estudos sobre sistemas dinâmicos não-lineares. Em muitos casos, a dinâmica local na vizinhança de uma singularidade no espaço de fase é similar à dinâmica do sistema linear, como o próprio Teorema de Hartman garante, ver por exemplo [15]. Outro aspecto que mostra a importância do estudo de sistemas lineares é o seguinte: A Teoria das Bifurcações, que estuda como a dinâmica dos sistemas mudam quando parâmetros são variados, em geral usa a teoria dos sistemas lineares como uma de suas técnicas principais.

O principal objetivo do trabalho é fazer um estudo da estrutura dos sistemas lineares que são simultaneamente reversíveis equivariantes.

Como veremos adiante no trabalho, os sistemas lineares reversíveis equivariantes estão associados a um grupo de Lie compacto  $G$ . Utilizamos resultados da Teoria de representação de grupos [6] e [7].

Usamos o fato de que a ação de um grupo de Lie compacto pode ser decomposta como soma direta de representações irredutíveis e de acordo com o Lema de Schur tais representações poderão ser de três tipos:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ . Assim classificamos as representações irredutíveis do grupo  $G$  mencionado acima.

Após esta classificação fizemos um estudo dos autovalores de um sistema linear reversível equivariante para uma classe particular de aplicações  $\mathbb{R}$ –lineares  $\sigma$ –reversíveis. Esse estudo é importante pois, para sistemas lineares, a posição dos autovalores no plano complexo determinam completamente a dinâmica de um sistema linear.

A referência principal utilizada no desenvolvimento deste trabalho foi o artigo de Lamb e Roberts [13]. Outros textos que serviram de apoio para o estudo foram: Adams [1], Bröcker e Dieck [3], Golubitsky e Schaeffer [6], Golubitsky [7] e Buzzi e Lamb [4].

O trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 1 abordamos alguns resultados importantes de Álgebra e de Representação de Grupos, tais como Representações Irredutíveis, Lema de Schur e Decomposição Isotípica, que serão úteis nos capítulos seguintes para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2 apresentamos uma classificação das Representações Irredutíveis baseada no Lema de Schur.

No capítulo 3 fizemos uma análise de como podem ser os autovalores e suas respectivas multiplicidades para uma classe particular de funções  $\mathbb{R}$ –lineares  $\sigma$ –reversíveis. Vimos também condições para que dois sistemas lineares tenham a mesma dinâmica, ou seja, para que seus fluxos lineares sejam topologicamente conjugados.

# Capítulo 1

## Resultados Importantes de Álgebra e Representação de Grupo

### 1.1 Álgebra Linear Real

Nesta seção veremos alguns conceitos básicos de Álgebra Linear Real, Produtos Tensoriais, entre outros que nos serão útil na classificação dos sistemas lineares reversíveis equivariantes.

**Definição 1.1.1.** *Uma álgebra linear real é um espaço vetorial real  $\mathcal{A}$  junto com a operação produto, isto é, uma função bilinear de  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  em  $\mathcal{A}$ .*

Exemplos que tem um importante papel em teoria de representações de grupos incluem  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$ , as álgebras dos reais, complexos e quatérnios com seus produtos usuais.

**Observação 1.1.1.** *A operação produto na álgebra dos quatérnios é dada por*

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (a + bi + cj + dk) \cdot (x + yi + uj + wk) \\ &= (ax + by - cu - dw) + (ay + bx + cw - du)i + \\ &\quad (au - bw + cx + dy)j + (aw + bu - cy + dx)k, \end{aligned}$$

para qualquer  $m, n \in \mathbb{H}$ .

**Definição 1.1.2.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra linear real. Dizemos que  $\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$  é uma subálgebra se para qualquer  $A, B \in \mathcal{A}_+$  temos  $AB \in \mathcal{A}_+$ .*

Os números reais formam uma subálgebra de  $\mathbb{C}$  pois  $\mathbb{R} = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid b = 0\}$  e  $\mathbb{C}$  é uma subálgebra de  $\mathbb{H}$ , pois  $\mathbb{C} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid c = d = 0\}$ .

Temos que se  $\mathbb{K}$  denota  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , então  $\mathbb{K}^m$  denota a soma direta de  $m$  cópias de  $\mathbb{K}$ .

**Definição 1.1.3.** *Dizemos que  $V$  é um espaço vetorial à esquerda de dimensão  $m$  sobre  $\mathbb{K}$ , se existe uma função  $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$  dada por*

$$(k, v) = kv = k(v_1, \dots, v_m) = (kv_1, \dots, kv_m).$$

A estrutura de um espaço vetorial à direita é análoga a estrutura de espaço vetorial à esquerda, sendo que esta coincide para  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ , pois eles são comutativos, o que não acontece para  $\mathbb{H}$ . Sempre usaremos a estrutura de espaço vetorial à direita em  $\mathbb{H}^m$ , exceto onde é explícita a declaração que é requerida uma estrutura esquerda.

Note que as imersões de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{H}$  significa que qualquer espaço vetorial sobre  $\mathbb{H}$  é naturalmente também um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  e qualquer espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  é também um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

Temos também para estrutura de espaço vetorial  $\mathbb{K}^m$ , a estrutura de uma álgebra linear real com a operação produto dada por

$$u.v = (u_1, \dots, u_m)(v_1, \dots, v_m) = (u_1v_1, \dots, u_mv_m), \forall u, v \in \mathbb{K}^m.$$

Para qualquer espaço vetorial à direita  $V$  sobre  $\mathbb{K}$ , denotaremos por  $gl(V; \mathbb{K})$ , ou simplesmente  $gl(V)$ , o espaço das funções  $\mathbb{K}$ -lineares de  $V$  em  $V$ ,  $gl(V_1, V_2)$  o espaço das funções  $\mathbb{K}$ -lineares de  $V_1$  em  $V_2$  e por  $GL(V; \mathbb{K})$ , ou simplesmente  $GL(V)$ , o espaço das funções  $\mathbb{K}$ -lineares invertíveis de  $V$  em  $V$ .

**Proposição 1.1.1.** *Se  $V$  é um espaço vetorial à esquerda, então  $gl(V; \mathbb{K})$  é um espaço vetorial à direita.*

**Demonstração.**

Sejam  $T \in gl(V; \mathbb{K})$  tal que sua matriz é dada por  $\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mm} \end{pmatrix}$ ,

$v = (v_1, \dots, v_m) \in V$  e  $k \in \mathbb{K}$ .

Temos por definição que  $(kT)(v) = T(kv)$  e como por hipótese  $V$  é um espaço vetorial à esquerda segue que

$$(kT)(v) = kT(v) = T(kv) = T(kv_1, \dots, kv_m),$$

ou ainda

$$\begin{aligned} (kT)(v) &= \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kv_1 \\ \vdots \\ kv_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m t_{1j} kv_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m t_{mj} kv_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{11}k & \cdots & t_{1m}k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{m1}k & \cdots & t_{mm}k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \\ &= (Tk)(v). \end{aligned}$$

Portanto,  $gl(V; \mathbb{K})$  é um espaço vetorial à direita. ■

Analogamente, se  $V$  é um espaço vetorial à direita sobre  $\mathbb{K}$ , o espaço  $gl(V; \mathbb{K})$  é um espaço vetorial à esquerda sobre  $\mathbb{K}$ . Composição de funções

também definem um produto em  $gl(V; \mathbb{K})$  e assim temos a estrutura de uma álgebra linear real.

Se  $V = \mathbb{K}^m$  denotaremos esta álgebra por  $gl(m, \mathbb{K})$ , como sendo a álgebra das matrizes  $m \times m$  com entradas em  $\mathbb{K}$ .

Vejamos que espaços e funções lineares podem ser combinadas por produtos tensoriais. Para isto definiremos primeiro o centro de uma álgebra linear com o objetivo de utilizar produtos tensoriais quando  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ .

**Definição 1.1.4.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra linear real. Definimos o centro de  $\mathcal{A}$  como o conjunto dos elementos que comutam com todos os elementos de  $\mathcal{A}$ , isto é*

$$Z(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid xg = gx, \forall g \in \mathcal{A}\}.$$

**Exemplo 1.1.1.** *O centro da álgebra linear real  $\mathbb{H}$  é  $\mathbb{R}$ .*

**Definição 1.1.5.** *Sejam  $U, V, M, N$  espaços vetoriais e suponha que  $\varphi : U \times V \longrightarrow M$  é uma aplicação bilinear de  $U \times V$  em  $M$ . O par  $(M, \varphi)$  é chamado produto tensorial para  $U \times V$  se dada  $\psi : U \times V \longrightarrow N$  uma transformação bilinear, então existe uma única  $f : M \longrightarrow N$  linear tal que  $\psi = f \circ \varphi$ .*

Ou ainda, se o diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \varphi \uparrow & \searrow f & \\ U \times V & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

Denotaremos  $M$  por  $U \otimes V$  e o par  $(M, \varphi)$  é a aplicação  $\varphi : U \times V \longrightarrow U \otimes V$  dada por  $\varphi(x, y) = x \otimes y$ .

Assim, o fato de  $\varphi : U \times V \longrightarrow U \otimes V$  ser bilinear nos diz que para qualquer  $x, x_1, x_2 \in U$ ,  $y, y_1, y_2 \in V$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,

$$1. (\lambda x_1 + \mu x_2) \otimes y = \lambda(x_1 \otimes y) + \mu(x_2 \otimes y),$$

$$2. x \otimes (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x \otimes y_1) + \mu(x \otimes y_2).$$

**Observação 1.1.2.** A definição acima que estaremos usando de produto tensorial não é a definição mais geral, porém esta pode ser encontrada em [20], página 54.

**Observação 1.1.3.** Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  o produto tensorial  $U \otimes W$  de dois espaços vetoriais  $U$  e  $W$  sobre  $\mathbb{K}$  é também um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

**Definição 1.1.6.** Sejam  $U_1, U_2, V_1, V_2$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ ,  $S \in gl(V_1, V_2)$ ,  $T \in gl(U_1, U_2)$ . Então, o produto tensorial de  $S$  e  $T$  é dado pela função

$$\begin{aligned} S \otimes T : V_1 \otimes_{\mathbb{K}} U_1 &\longrightarrow V_2 \otimes_{\mathbb{K}} U_2 \\ (v \otimes u) &\longmapsto S(v) \otimes T(u). \end{aligned}$$

Em termos de matrizes temos,

$$[S \otimes T] = \begin{pmatrix} S_{11}[T] & \cdots & S_{1m}[T] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{m1}[T] & \cdots & S_{mm}[T] \end{pmatrix},$$

onde  $[T]$  é a matriz da função linear  $T$  e  $[S] = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{m1} & \cdots & S_{mm} \end{pmatrix}$  é a matriz de  $S$ .

Observe que sendo  $\dim S = m$  e  $\dim T = n$ , então  $\dim S \otimes T = mn$ .

**Proposição 1.1.2.** Sejam  $U$  e  $W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente. Se  $A : U \longrightarrow U$  e  $B : W \longrightarrow W$  são funções  $\mathbb{K}$ -lineares, então  $A \otimes B$  é uma função  $\mathbb{K}$ -linear de  $U \otimes_{\mathbb{K}} W$  em  $U \otimes_{\mathbb{K}} W$ .

**Demonstração**

Sejam  $u, w \in U \otimes_{\mathbb{K}} W$ , onde  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{pmatrix}$  e  $l = mn$ .

Queremos mostrar que

$$A \otimes_{\mathbb{K}} B(\alpha u + \beta w) = \alpha A \otimes_{\mathbb{K}} B(u) + \beta A \otimes_{\mathbb{K}} B(w),$$

para qualquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

Por hipótese, temos que  $A$  e  $B$  são funções lineares. Consideremos suas matrizes

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} \text{ e } [B] = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

Então,  $\alpha A \otimes_{\mathbb{K}} B(u) + \beta A \otimes_{\mathbb{K}} B(w)$  é dado por

$$\begin{aligned} & \alpha \begin{pmatrix} A_{11}[B] & \cdots & A_{1m}[B] \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}[B] & \cdots & A_{mm}[B] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_{11}[B] & \cdots & A_{1m}[B] \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}[B] & \cdots & A_{mm}[B] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \cdots & A_{11}B_{1n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ A_{11}B_{n1} & \cdots & A_{11}B_{nn} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \cdots & A_{11}B_{1n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ A_{11}B_{n1} & \cdots & A_{11}B_{nn} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}\alpha u_1 + \cdots + A_{11}B_{1n}\alpha u_n + \cdots + A_{11}B_{11}\beta w_1 + \cdots + A_{11}B_{1n}\beta w_n + \cdots \\ \vdots \\ A_{11}B_{n1}\alpha u_1 + \cdots + A_{11}B_{nn}\alpha u_n + \cdots + A_{11}B_{n1}\beta w_1 + \cdots + A_{11}B_{nn}\beta w_n + \cdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \alpha A \otimes_{\mathbb{K}} B(u) + \beta A \otimes_{\mathbb{K}} B(w) &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}(\alpha u_1 + \beta w_1) + \cdots + A_{11}B_{1n}(\alpha u_n + \beta w_n) + \cdots \\ \vdots \\ A_{11}B_{n1}(\alpha u_1 + \beta w_1) + \cdots + A_{11}B_{nn}(\alpha u_n + \beta w_n) + \cdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \cdots & A_{11}B_{1n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ A_{11}B_{n1} & \cdots & A_{11}B_{nn} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta w_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta w_n \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= A \otimes_{\mathbb{K}} B(\alpha u + \beta w).
 \end{aligned}$$

■

É preciso cuidado quando  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ , pois este não é comutativo. Contudo, se  $U$  é um espaço vetorial à direita sobre  $\mathbb{H}$  e  $W$  é um espaço vetorial à esquerda sobre  $\mathbb{H}$ , então  $U \otimes_{\mathbb{H}} W$  é ainda bem definido e naturalmente tem a estrutura de um espaço vetorial sobre o centro de  $\mathbb{H}$ , isto é, sobre  $\mathbb{R}$ .

Se  $A : U \longrightarrow U$  e  $B : W \longrightarrow W$  são funções  $\mathbb{H}$ -lineares, com estruturas direita e esquerda sobre  $\mathbb{H}$ , respectivamente, então  $A \otimes_{\mathbb{H}} B$  é uma função  $\mathbb{R}$ -linear de  $U \otimes_{\mathbb{H}} W$  sobre ele mesmo.

Vejamos algumas inclusões naturais de álgebra linear real que serão usadas de forma natural por todo este texto.

1.  $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}^m \subset gl(m; \mathbb{K})$ .

De fato, a primeira inclusão é dada pela função  $k \longmapsto (k, \dots, k)$  e a segunda por  $(k_1, \dots, k_m) \longmapsto diag(k_1, \dots, k_m)$ , isto é, na matriz diagonal com entradas  $k_1, \dots, k_m$ .

2.  $gl(m; \mathbb{K}) \subset gl(rm; \mathbb{K})$  para qualquer  $r \geq 1$ .

De fato, esta inclusão é dada em termos de matrizes pela função

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}I_r & \cdots & a_{1m}I_r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}I_r & \cdots & a_{mm}I_r \end{pmatrix},$$

onde  $I_r$  é a função identidade sobre  $\mathbb{K}^r$ . Isto ocorre usando 1), onde  $a_{ij} \mapsto \text{diag}(a_{ij})$  tal que  $i, j = 1, \dots, m$ .

3.  $gl(m; \mathbb{R}) \subset gl(m; \mathbb{C}) \subset gl(m; \mathbb{H})$ .

De fato, estas inclusões valem pelo fato das inclusões naturais  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ , isto é, qualquer matriz com entradas em  $\mathbb{R}$  pode ser considerada uma matriz com entradas em  $\mathbb{C}$  que por sua vez pode ser considerada uma matriz com entradas em  $\mathbb{H}$ .

4.  $gl(m; \mathbb{C}) \subset gl(2m; \mathbb{R})$ .

De fato, o isomorfismo entre os espaços vetoriais  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  dado por  $a + bi \mapsto (a, b)$  se estende naturalmente para um isomorfismo entre  $\mathbb{C}^m$  e  $\mathbb{R}^{2m}$ . A inclusão de  $gl(m; \mathbb{C})$  em  $gl(2m; \mathbb{R})$  é obtido por considerar funções lineares complexas sobre  $\mathbb{C}^m$  como funções lineares reais sobre  $\mathbb{R}^{2m}$ . Em termos de matrizes temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & \cdots & a_{1m} + ib_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + ib_{m1} & \cdots & a_{mm} + ib_{mm} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & -b_{11} & \cdots & a_{1m} & -b_{1m} \\ b_{11} & a_{11} & \cdots & b_{m1} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & -b_{m1} & \cdots & a_{mm} & -b_{mm} \\ b_{m1} & a_{m1} & \cdots & b_{mm} & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Isto decorre do isomorfismo

$$a_{ij} + ib_{ij} \mapsto \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{ij} & 0 \\ 0 & b_{ij} \end{pmatrix},$$

$$\text{tal que } i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.  $gl(m; \mathbb{H}) \subset gl(2m; \mathbb{C})$ .

De fato, o isomorfismo entre  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{C}^2$  é dado por  $q = \alpha + j\beta \mapsto (\alpha, \beta)$  que induz um isomorfismo dos espaços  $\mathbb{C}$ -vetoriais  $\mathbb{H}^m$  com  $\mathbb{C}^{2m}$ , onde a estrutura complexa sobre  $\mathbb{H}^m$  é aquela herdada da estrutura direita de  $\mathbb{H}$ . Sobre este isomorfismo toda função  $\mathbb{H}$ -linear é  $\mathbb{C}$ -linear.

Em termos de matrizes a inclusão é dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} + j\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1m} + j\beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} + j\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} + j\beta_{mm} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\bar{\beta}_{11} & \cdots & \alpha_{1m} & -\bar{\beta}_{1m} \\ \beta_{11} & \bar{\alpha}_{11} & \cdots & \beta_{1m} & \bar{\alpha}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & -\bar{\beta}_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} & -\bar{\beta}_{mm} \\ \beta_{m1} & \bar{\alpha}_{m1} & \cdots & \beta_{mm} & \bar{\alpha}_{mm} \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Automorfismos de Álgebras

**Definição 1.2.1.** *Um automorfismo sobre uma álgebra linear real  $\mathcal{A}$  é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear invertível  $\Sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  que preserva a operação produto, isto é,  $\Sigma(AB) = \Sigma(A)\Sigma(B)$ , para quaisquer  $A, B \in \mathcal{A}$ .*

O seguinte resultado descreve os automorfismos das álgebras  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$ .

**Proposição 1.2.1.** *1. O automorfismo da álgebra  $\mathbb{R}$  é somente a função identidade.*

*2. Os automorfismos da álgebra  $\mathbb{C}$  são a identidade e o conjugado complexo.*

*3. Os automorfismos da álgebra  $\mathbb{H}$  são precisamente as funções  $\Sigma_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dada por  $\Sigma_q(x) = q^{-1}xq$ , para algum quaternário invertível  $q$ .*

**Demonstração.**

Demonstraremos apenas os casos 1 e 2. O caso 3 se encontra em [16] páginas 230-231.

1. Seja  $\Sigma$  um automorfismo da álgebra de  $\mathbb{R}$ . Por definição de automorfismo  $\Sigma(m) = m\Sigma(1)$  para qualquer  $m \in \mathbb{R}$ . Mas temos que  $\mathbb{R}$  é um corpo, ou seja,  $\Sigma(1) = 1$ . Então,  $\Sigma(m) = m$ , para qualquer  $m \in \mathbb{R}$ .

Portanto, a identidade é o único automorfismo da álgebra de  $\mathbb{R}$ .

2. Seja  $x \in \mathbb{C}$  tal que  $x = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Por definição de automorfismo  $\Sigma(x) = a + b\Sigma(i)$ .

Observe que

$$\begin{aligned}\Sigma(i) = \Sigma(\sqrt{-1}) &\implies \Sigma^2(i) = \Sigma^2(\sqrt{-1}) = \Sigma((\sqrt{-1})^2) = \Sigma(-1) = -1 \\ &\implies \Sigma(i) = \pm\sqrt{-1} = \pm i.\end{aligned}$$

Então,  $\Sigma(x) = a + bi = x$  ou  $\Sigma(x) = a - bi = \bar{x}$ . Portanto, os automorfismos da álgebra de  $\mathbb{C}$  são a identidade e o conjugado complexo.

■

Será conveniente para os automorfismos  $\Sigma_i$  de  $\mathbb{H}$  um tratamento especial e os denotaremos por  $\Sigma_i(x) = x^\sharp$ , chamado conjugação quaterniônica.

Note que,  $\Sigma_i(a + ib + jc + kd) = (a + ib + jc + kd)^\sharp = a + ib - jc - kd$  e seu conjunto de pontos fixos é a subálgebra  $\mathbb{C}$  imersa em  $\mathbb{H}$ . Isto é análogo ao aspecto de  $\mathbb{R}$  como o conjunto de pontos fixos do automorfismo conjugado complexo sobre  $\mathbb{C}$ .

Um automorfismo  $\Sigma$  sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  estende-se de forma natural para um automorfismo de  $\mathbb{K}^m$  que continuaremos denotando por  $\Sigma$ ,

$$\Sigma(k_1, \dots, k_m) = (\Sigma(k_1), \dots, \Sigma(k_m)).$$

Um automorfismo de  $gl(m; \mathbb{K})$ , denotado por  $K_\Sigma$ , é dado por

$$K_\Sigma(A) = \Sigma^{-1} \circ A \circ \Sigma, \tag{1.1}$$

onde  $\Sigma$  é o automorfismo sobre  $\mathbb{K}$ .

Se  $A$  é uma matriz com entradas em  $\mathbb{K}$  a matriz  $K_\Sigma(A)$  é obtida aplicando  $\Sigma$  em cada uma de suas entradas. Se  $\Sigma$  é o automorfismo conjugado complexo ou quaterniônico, denotaremos  $K_\Sigma(A)$  por  $\bar{A}$  ou  $A^\sharp$ , respectivamente.

Relembraremos a definição de involução e de um módulo sobre uma álgebra, para utilizarmos na demonstração da próxima proposição.

**Definição 1.2.2.** *Uma involução sobre uma álgebra  $\mathcal{A}$  é o automorfismo invertível  $\Sigma$  sobre  $\mathcal{A}$  que é o seu próprio inverso, ou seja,  $\Sigma^2 = Id_{\mathbb{K}}$ .*

**Definição 1.2.3.** *Dizemos que um módulo  $V$  sobre uma álgebra  $\mathcal{A}$  é um espaço vetorial, juntamente com uma operação de multiplicação  $\mathcal{A} \times V \longrightarrow V$ , denotada por  $(X, v) \longmapsto Xv$ , que satisfaz as seguintes propriedades*

- i)  $(X + Y)v = Xv + Yv$ ,
  - ii)  $X(u + v) = Xu + Xv$ ,
  - iii)  $xXv = X(xv)$ ,
  - iv)  $[X, Y]v = XYv - YXv$ , onde  $[ \ , \ ]$  é o colchete de Lie,
- para qualquer  $X, Y \in \mathcal{A}$ ,  $v, u \in V$  e um escalar  $x$ .

Exemplos de involuções sobre uma álgebra são os automorfismos da conjugação complexa e quaterniônica.

Algumas propriedades elementares de involuções sobre uma álgebra são resumidas na seguinte proposição.

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra linear real com uma involução  $\Sigma$ .*

1. *A álgebra  $\mathcal{A}$  se decompõe com uma soma direta de espaços lineares  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ , onde*

$$\mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \mid \Sigma(A) = A\} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_- = \{A \in \mathcal{A} \mid \Sigma(A) = -A\}.$$

2. *O subespaço  $\mathcal{A}_+$  é uma subálgebra de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}$  é um módulo sobre  $\mathcal{A}_+$ .*
3. *O subespaço  $\mathcal{A}_-$  é um submódulo de  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{A}_+$ .*

**Demonstração.**

1. Mostraremos que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-$  e  $\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_- = \{0\}$ .

De fato

$$\begin{aligned}
 A \in \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_- &\implies A \in \mathcal{A}_+ \text{ e } A \in \mathcal{A}_- \\
 &\implies \Sigma(A) = A \text{ e } \Sigma(A) = -A \\
 &\implies A = -A \\
 &\implies A = 0 \\
 &\implies \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_- = \{0\}.
 \end{aligned}$$

Seja  $A \in \mathcal{A}$ . Temos que  $A = \frac{A + \Sigma(A)}{2} + \frac{A - \Sigma(A)}{2}$ .

Observe que

$$\frac{A + \Sigma(A)}{2} \in \mathcal{A}_+ \text{ e } \frac{A - \Sigma(A)}{2} \in \mathcal{A}_-.$$

Portanto,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ .

2. Mostremos primeiramente que  $\mathcal{A}_+$  é uma subálgebra de  $\mathcal{A}$ . De fato,

$$\Sigma(AB) = \Sigma(A)\Sigma(B) = AB \implies AB \in \mathcal{A}_+, \forall A, B \in \mathcal{A}_+.$$

Pela Definição (1.1.1),  $\mathcal{A}$  é um espaço vetorial real com a aplicação produto dada pela função bilinear de  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  em  $\mathcal{A}$ . Em particular, tem-se a operação  $f : \mathcal{A}_+ \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  dada por  $(A_+, A) \mapsto A_+A$ , que satisfaz, para qualquer  $A_+, B_+ \in \mathcal{A}_+$ ,  $A, B \in \mathcal{A}$  e um escalar  $x$

- i)  $(A_+ + B_+)A = f(A_+ + B_+, A) = f(A_+, A) + f(B_+, A)$   
 $= (A_+A) + (B_+A),$
- ii)  $A_+(A+B) = f(A_+, A+B) = f(A_+, A) + f(A_+, B) = (A_+A) + (A_+B),$
- iii)  $xA_+A = xf(A_+, A) = f(A_+, xA) = A_+(xA),$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad [A_+, B_+]A &= (A_+B_+ - B_+A_+)A = f(A_+B_+ - B_+A_+, A) \\ &= f(A_+B_+, A) - f(B_+A_+, A) = (A_+B_+A) - (B_+A_+A). \end{aligned}$$

Portanto de i), ii), iii) e iv) segue que  $\mathcal{A}$  é um módulo sobre  $\mathcal{A}_+$ .

3. Mostrar que  $\mathcal{A}_-$  é um submódulo de  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{A}_+$ , ou seja,

$$\forall A_+ \in \mathcal{A}_+, \forall A_- \in \mathcal{A}_-, A_+A_- \in \mathcal{A}_-.$$

De fato, sejam  $A_+ \in \mathcal{A}_+$  e  $A_- \in \mathcal{A}_-$

$$\Sigma(A_+A_-) = \Sigma(A_+)\Sigma(A_-) = A_+(-A_-) = -(A_+A_-) \implies A_+A_- \in \mathcal{A}_-.$$

■

**Definição 1.2.4.** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais à direita sobre  $\mathbb{K}$  e  $\alpha$  é um automorfismo de  $\mathbb{K}$ . Dizemos que uma função  $\mathbb{K}$ -linear  $f$  de  $U$  em  $V$  é  $\mathbb{K}^\alpha$ -linear ou  $\mathbb{K}$ -semilinear com relação a  $\alpha$  se*

$$f(xk) = f(x)\alpha(k), \forall x \in U, k \in \mathbb{K}.$$

Uma definição análoga pode ser feita para funções entre espaços vetoriais esquerdo. Denotaremos o espaço das funções  $\mathbb{K}^\alpha$ -lineares do espaço vetorial  $V$  em  $V$  por  $gl(V; \mathbb{K}^\alpha)$ .

**Observação 1.2.1.** *Se  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial à direita de dimensão  $n$ , então como  $gl(V; \mathbb{K})$  é um espaço vetorial esquerdo,  $gl(V; \mathbb{K}^\alpha)$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial esquerdo.*

De fato, sejam  $f \in gl(V; \mathbb{K}^\alpha)$ ,  $k \in \mathbb{K}$  e  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ .

$$(kf)(x) = kf(x) = k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Então,

$$(kf)(x) = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1ka_{11} + \cdots + x_nka_{1n} \\ \vdots \\ x_1ka_{n1} + \cdots + x_nka_{nn} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$(kf)(x) = (kf)(x).$$

**Observação 1.2.2.** *Como a composição de duas funções  $\mathbb{K}^\alpha$ -lineares é  $\mathbb{K}$ -linear, para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e não  $\mathbb{K}^\alpha$ -linear, se  $\alpha$  não é a identidade, então em geral  $gl(V; \mathbb{K}^\alpha)$  não é uma álgebra em relação a composição.*

De fato, sejam  $A, B \in gl(V; \mathbb{K}^\alpha)$ ,  $x \in V$  e  $k \in \mathbb{K}$ .

$$(A \circ B)(xk) = A(B(xk)) = A(B(x)\alpha(k)) = A \circ B(x)\alpha^2(k). \quad (1.2)$$

Por outro lado, para qualquer  $x \in V$  e  $k \in \mathbb{K}$

$$(A \circ B)(xk) = A \circ B(x)\alpha(k). \quad (1.3)$$

Portanto, de (1.2) e (1.3) temos que,

$$\alpha^2 = \alpha \implies \alpha = Id_{\mathbb{K}},$$

ou seja,  $(A \circ B)$  é  $\mathbb{K}^\alpha$ -linear se, e somente se, o automorfismo  $\alpha$  é a identidade.

Vejamos que  $A \circ B$  é  $\mathbb{K}$ -linear. De fato, sejam  $\beta \in \mathbb{K}$  e  $u, v \in V$ .

Como  $A$  e  $B$  são  $\mathbb{K}^\alpha$ -lineares, por definição, segue que  $A$  e  $B$  são  $\mathbb{R}$ -lineares.

Logo,

$$A \circ B(u + v) = A(B(u) + B(v)) = A \circ B(u) + A \circ B(v), \forall u, v \in V.$$

E ainda por (1.2)

$$A \circ B(w\beta) = A \circ B(w)\alpha^2(\beta), \forall w \in V, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pela Proposição (1.2.1) segue que,

i) Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , então  $\alpha = Id_{\mathbb{R}}$ . Logo  $A \circ B(w\beta) = A \circ B(w)\beta$ , para qualquer  $w \in V$  e  $\beta \in \mathbb{K}$ .

ii) Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , então  $\alpha = Id_{\mathbb{C}}$  ou conjugação complexa.

Se  $\alpha = Id_{\mathbb{C}}$ , então analogamente ao item 1.  $A \circ B(\beta w) = \beta A \circ B(w)$ , para qualquer  $w \in V$  e  $\beta \in \mathbb{K}$ .

Se  $\alpha =$  conjugação complexa, então

$$A \circ B(w\beta) = A \circ B(w)\alpha^2(\beta) = A \circ B(w)\overline{\beta} = A \circ B(w)\beta, \forall w \in V, \beta \in \mathbb{K}.$$

Portanto,  $A \circ B$  é  $\mathbb{K}$ -linear para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $\alpha$  é a conjugação complexa, substituímos a notação  $\mathbb{K}^\alpha$  por  $\overline{\mathbb{C}}$ , ou seja,  $gl(V; \mathbb{K}^\alpha) = gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ . Analogamente, para  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  e  $\alpha$  a conjugação quaterniônica, temos que  $gl(V; \mathbb{K}^\alpha) = gl(m; \mathbb{H}^\#)$ .

Funções semilineares podem ser combinadas por produtos tensoriais em muitos casos usando o mesmo caminho que as funções lineares. Em particular, se  $U$  e  $W$  são espaços  $\mathbb{K}$ -vetoriais à direita e à esquerda, respectivamente,  $A : U \rightarrow U$  e  $B : W \rightarrow W$  são funções  $\mathbb{K}^\alpha$ -lineares, então  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$  é bem definido como uma função  $\mathbb{K}^\alpha$ -linear de  $U \otimes_{\mathbb{K}} W$  em  $U \otimes_{\mathbb{K}} W$ , considerado como um espaço vetorial sobre o centro de  $\mathbb{K}$ .

De fato, sejam  $u \otimes w \in U \otimes_{\mathbb{K}} W$  e  $k \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} (A \otimes_{\mathbb{K}} B)((u \otimes w)k) &= (A \otimes_{\mathbb{K}} B)(u \otimes (wk)) \\ &= A(u) \otimes_{\mathbb{K}} B(wk) \\ &= A(u) \otimes_{\mathbb{K}} (B(w)\alpha(k)) \\ &= [A(u) \otimes_{\mathbb{K}} B(w)]\alpha(k) \\ &= (A \otimes_{\mathbb{K}} B)(u \otimes w)\alpha(k). \end{aligned}$$

Portanto  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$  é semilinear.

Observe que o produto tensorial  $U \otimes_{\mathbb{K}} W$  está bem definido sobre o centro de  $\mathbb{K}$ , pois  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  não é comutativo. Assim o automorfismo que torna  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$   $\mathbb{K}^\alpha$ -linear é o automorfismo  $\alpha$  restrito ao centro de  $\mathbb{K}$ .

Se  $\mathbb{K}^\alpha = \overline{\mathbb{C}}$ , então temos que  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$  é uma função  $\overline{\mathbb{C}}$ -linear bem definida, enquanto que se  $\mathbb{K}^\alpha = \mathbb{H}^\sharp$ ,  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$  é uma função  $\mathbb{R}$ -linear.

## 1.3 Grupos de Lie, Álgebras de Lie e Ações Adjuntas

**Definição 1.3.1.** *Seja  $G$  uma variedade diferenciável com estrutura de grupo. Dizemos que  $G$  é um grupo de Lie se a aplicação  $G \times G \longrightarrow G$  definida por  $(a, b) \longmapsto ab^{-1}$  for diferenciável. Em particular a aplicação  $G \longrightarrow G$  tal que  $b \longmapsto b^{-1}$  é diferenciável.*

**Exemplo 1.3.1.** *O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e o espaço  $\mathbb{C}^*$ , dos números complexos não nulos, com as operações de adição e multiplicação, respectivamente.*

**Exemplo 1.3.2.** *O conjunto  $GL(m; \mathbb{K})$  das matrizes invertíveis  $m \times m$  com entradas em  $\mathbb{K}$  e a operação de multiplicação de matrizes.*

**Exemplo 1.3.3.** *O conjunto das rotações  $n$ -dimensionais dado por  $SO(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid AA^t = Id_n \text{ e } \det(A) = 1\}$ .*

**Definição 1.3.2.** *Uma álgebra de Lie  $g$  sobre  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial real  $g$  junto com um operador  $[\ , \ ] : g \times g \longrightarrow g$  tal que para todo  $X, Y, Z \in g$  temos*

1.  $[X, X] = 0$ ,
2.  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ .

**Exemplo 1.3.4.** *O espaço  $gl(m; \mathbb{K})$  tem a estrutura de uma álgebra de Lie com a operação colchetes de Lie dada por*

$$[A, B] = AB - BA.$$

**Observação 1.3.1.** 1. A importância do conceito de álgebra de Lie é que existe uma álgebra de Lie especial, de dimensão finita, intimamente associada com o respectivo grupo de Lie, e que propriedades do grupo de Lie são refletidas em propriedades de sua álgebra de Lie associada.

2. A álgebra de Lie  $g$  também pode ser vista como o espaço tangente do Grupo de Lie  $G$  em seu elemento neutro.

3. O conjunto  $GL(n; \mathbb{K})$  é o grupo de Lie associado a álgebra de Lie  $gl(n; \mathbb{K})$ .

**Definição 1.3.3.** Sejam  $M$  um conjunto qualquer e  $G$  um grupo de Lie. Dizemos que uma ação de  $G$  sobre  $M$  é uma função  $C^\infty$ ,  $\mu : G \times M \longrightarrow M$  satisfazendo

1.  $\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m))$  para quaisquer  $\sigma, \tau \in G, m \in M$ ,
2.  $\mu(e, m) = m$ , para qualquer  $m \in M$  onde  $e$  é o elemento neutro de  $G$ ,
3. Para cada  $\tau \in G$ ,

$$\mu(\tau, v_1 + v_2) = \mu(\tau, v_1) + \mu(\tau, v_2),$$

$$\mu(\tau, \alpha v) = \alpha \mu(\tau, v),$$

para quaisquer  $v, v_1, v_2 \in M$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Exemplo 1.3.5.** A ação canônica ou natural do grupo de Lie  $GL(m; \mathbb{K})$  sobre sua álgebra  $gl(m; \mathbb{K})$  é dada por

$$GL(m; \mathbb{K}) \times gl(m; \mathbb{K}) \longrightarrow gl(m; \mathbb{K})$$

$$(\phi, A) \longmapsto \phi^{-1}A\phi.$$

Esta ação é chamada Ação Adjunta de  $GL(m; \mathbb{K})$  sobre  $gl(m; \mathbb{K})$ .

De maneira geral, para cada álgebra de Lie  $g$  existe um grupo de Lie  $G$  associado e uma ação natural adjunta de  $G$  sobre  $g$ .

**Definição 1.3.4.** *Uma involução  $\Sigma$  sobre uma álgebra de Lie  $g$  é uma involução de Lie sobre esta álgebra se preserva o colchete de Lie, isto é,  $[\Sigma(A), \Sigma(B)] = \Sigma([A, B])$ .*

Observe que se  $\Sigma$  é uma involução sobre a álgebra  $gl(m; \mathbb{K})$ , então claramente, também é uma involução de Lie sobre  $gl(m; \mathbb{K})$ . De fato,

$$[\Sigma(A), \Sigma(B)] = \Sigma(A)\Sigma(B) - \Sigma(B)\Sigma(A) = \Sigma(AB - BA) = \Sigma([A, B]).$$

Uma involução de Lie sobre uma álgebra de Lie  $g$  induz uma involução de Lie sobre seu grupo de Lie  $G$ , correspondente, que denotaremos também por  $\Sigma$ .

Como  $\mathcal{A}_+$  e  $\mathcal{A}_-$  denotam os  $\pm 1$  autoespaços de  $\Sigma$  sobre  $\mathcal{A}$ , pela Proposição (1.2.2),  $\mathcal{A}_+$  é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}_-$  um submódulo sobre  $\mathcal{A}_+$ . Se  $G_+$  denota o conjunto dos pontos fixos de  $\Sigma$  sobre  $G$ , os seguintes resultados são consequências imediatas das definições.

**Proposição 1.3.1.** *1. A subálgebra de Lie  $\mathcal{A}_+$  é a álgebra de Lie de  $G_+$ .  
2. A restrição da ação adjunta de  $G$  em  $\mathcal{A}$ , para  $G_+$ , preserva os subespaços  $\mathcal{A}_+$  e  $\mathcal{A}_-$ . A ação induzida de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_+$  é a ação adjunta de  $G_+$ .*

**Demonstração.**

1. Queremos mostrar que  $\mathcal{A}_+ = T_e G_+$ , isto é,  $\mathcal{A}_+$  é o plano tangente de  $G_+$  em seu elemento neutro  $e$ .

De fato,

$$a \in T_e G_+ \implies \exists \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G_+, \text{ onde } \lambda'(0) = a \text{ e } \lambda(0) = e. \quad (1.4)$$

Temos que  $\lambda$  é um caminho e para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\lambda(t) \in G_+$ . Logo como  $G_+$  denota o conjunto dos pontos fixos de  $\Sigma$ , segue que  $\Sigma(\lambda(t)) = \lambda(t)$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Observe, pela Regra da Cadeia, que  $\lambda'(t) = (\Sigma(\lambda(t)))' = D\Sigma_{\lambda(t)}(\lambda'(t))$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Em particular para  $t = 0$

$$\lambda'(0) = D\Sigma_{\lambda(0)}(\lambda'(0)) = D\Sigma_e(\lambda'(0)).$$

Então, por (1.4) segue que,  $\Sigma(a) = a$ , ou seja,  $a \in \mathcal{A}_+$ . Portanto,  $T_e G_+ \subset \mathcal{A}_+$ .

Analogamente seja  $b \in \mathcal{A}_+$ , assim  $\Sigma(b) = b$ .

Seja o caminho,

$$\begin{aligned} \lambda : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow G_+ \\ t &\longmapsto tb. \end{aligned}$$

Temos que  $\lambda(0) = 0$  e  $\lambda'(0) = b$ . Portanto,  $\mathcal{A}_+ \subset T_e G_+$ .

Finalmente, concluímos que  $\mathcal{A}_+ = T_e G_+$ , e pela observação (1.3.1), segue que  $\mathcal{A}_+$  é a álgebra de Lie associada à  $G_+$ .

2. Considere a ação adjunta de  $G$  sobre  $\mathcal{A}$  dada por

$$\begin{aligned} \varphi : G \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (T, t) &\longmapsto T \circ t. \end{aligned}$$

Restringindo  $\varphi$  para  $G_+$  devemos mostrar que as funções

$$\begin{aligned} \varphi' : G_+ \times \mathcal{A}_+ &\longrightarrow \mathcal{A}_+ \\ \varphi'' : G_+ \times \mathcal{A}_- &\longrightarrow \mathcal{A}_- \end{aligned}$$

estão bem definidas.

De fato, lembrando que

$$\mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \mid \Sigma(A) = A\} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_- = \{A \in \mathcal{A} \mid \Sigma(A) = -A\}.$$

sejam  $T \in G_+$ ,  $t_+ \in \mathcal{A}_+$  e  $t_- \in \mathcal{A}_-$ .

$$\text{i)} \quad \Sigma(T \circ t_+) = \Sigma(T) \circ \Sigma(t_+) = T \circ t_+ \implies T \circ t_+ \in \mathcal{A}_+.$$

$$\text{ii)} \quad \Sigma(T \circ t_-) = \Sigma(T) \circ \Sigma(t_-) = T \circ (-t_-) = -T \circ t_- \implies T \circ t_- \in \mathcal{A}_-.$$

Portanto, de i) e ii) segue que  $\varphi'$  e  $\varphi''$  estão bem definidas. Assim, concluímos que  $\mathcal{A}_+$  e  $\mathcal{A}_-$  são preservados pela ação adjunta de  $G$  sobre  $\mathcal{A}$  restrita à  $G_+$ .

■

Descreveremos alguns exemplos de álgebras de Lie  $\mathcal{A}$  e involuções  $\Sigma$  que serão usados posteriormente.

Para estes exemplos consideremos a involução  $R_{m,n}$  sobre  $\mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^n$  que fixa  $\mathbb{K}^m$  e atua por  $-I$  sobre  $\mathbb{K}^n$ , então sua matriz é dada por  $[R] = \begin{pmatrix} I_{m \times m} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & -I_{n \times n} \end{pmatrix}$ . E lembremos que  $l(m, n; \mathbb{K})$  é o conjunto das matrizes  $m \times n$  com entradas em  $\mathbb{K}$ .

**Exemplo 1.3.6.** *Seja a álgebra  $\mathcal{A} = gl(m + n; \mathbb{K})$  e a involução  $\Sigma(A) = R_{m,n}^{-1} A R_{m,n}$  sobre  $\mathcal{A}$ .*

Considere  $A \in \mathcal{A}_+$  dado pela matriz  $[A] = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$  tal que  $A_1 = [A_1]_{m \times m}$ ,  $A_2 = [A_2]_{m \times n}$ ,  $A_3 = [A_3]_{n \times m}$  e  $A_4 = [A_4]_{n \times n}$ .

Assim,

$$\Sigma(A) = A \implies R_{m,n}^{-1} A R_{m,n} = A \implies A R_{m,n} = R_{m,n} A.$$

Em termos de matrizes,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m \times m} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & -I_{n \times n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_{m \times m} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & -I_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \\ \implies A_2 &= A_3 = 0 \\ \implies [A] &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} = A_1 \oplus A_4, \end{aligned}$$

onde  $A_1 \in gl(m; \mathbb{K})$  e  $A_4 \in gl(n; \mathbb{K})$ .

Então,  $\mathcal{A}_+ \subset gl(m; \mathbb{K}) \oplus gl(n; \mathbb{K})$ . Portanto,  $\mathcal{A}_+ = gl(m; \mathbb{K}) \oplus gl(n; \mathbb{K})$  pois facilmente verificamos inclusão contrária.

Analogamente seja  $B \in \mathcal{A}_-$  formado pelos blocos  $B_i$  com as mesmas dimensões de  $A_i$  onde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Como neste caso  $\Sigma(B) = -B$ , em termos de matrizes temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m \times m} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & -I_{n \times n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -I_{m \times m} & O_{m \times n} \\ O_{n \times m} & I_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \\ \implies B_1 &= B_4 = 0 \\ \implies [B] &= \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $B_2 \in l(n, m; \mathbb{K})$  e  $B_3 \in l(m, n; \mathbb{K})$ .

$$\text{Portanto, } \mathcal{A}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \mid A \in l(m, n; \mathbb{K}), B \in l(n, m; \mathbb{K}) \right\}.$$

O grupo de Lie  $G_+$  é  $GL(m; \mathbb{K}) \times GL(n; \mathbb{K})$ , considerando como um subgrupo de  $GL(m+n; \mathbb{K})$ .

A ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_+$  é o produto da ação adjunta de  $GL(m; \mathbb{K})$  e  $GL(n; \mathbb{K})$ . Vejamos qual é a ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_-$ .

Da definição de ação segue que

$$(GL(m; \mathbb{K}) \times GL(n; \mathbb{K})) \times (l(m, n; \mathbb{K}) \oplus l(n, m; \mathbb{K})) \longrightarrow (l(m, n; \mathbb{K}) \oplus l(n, m; \mathbb{K}))$$

$$((\phi_1, \phi_2), (A, B)) \longmapsto (\phi_1, \phi_2)^{-1}(A, B)(\phi_1, \phi_2).$$

Observe que a matriz de  $(\phi_1, \phi_2)$  é dada por  $\begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}$  e sua inversa

$$\begin{pmatrix} \phi_1^{-1} & 0 \\ 0 & \phi_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2)^{-1}(A, B)(\phi_1, \phi_2) &= \begin{pmatrix} \phi_1^{-1} & 0 \\ 0 & \phi_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \phi_1^{-1}B\phi_2 \\ \phi_2^{-1}A\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\phi_2^{-1}A\phi_1, \phi_1^{-1}B\phi_2). \end{aligned}$$

Portanto a ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_-$  é dada por

$$((\phi_1, \phi_2), (A, B)) \longmapsto (\phi_2^{-1}A\phi_1, \phi_1^{-1}B\phi_2).$$

**Exemplo 1.3.7.** *Seja  $\mathcal{A} = gl(m; \mathbb{C})$  uma álgebra de Lie e sua involução dada por  $\Sigma(A) = \overline{A}$ .*

Observe que neste caso,

$$\mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \mid \overline{A} = A\} = gl(m; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_- = \{A \in \mathcal{A} \mid -\overline{A} = A\},$$

onde  $\mathcal{A}_-$  é identificado como o espaço das matrizes  $m \times m$  com entradas imaginárias.

Considere o isomorfismo,

$$\begin{aligned} gl(m; \mathbb{C}) &\longrightarrow gl(m; \mathbb{R}) \oplus gl(m; \mathbb{R}) \\ A + Bi &\longmapsto (A, B). \end{aligned}$$

Como  $gl(m; \mathbb{C}) = \mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ , então o isomorfismo acima restrito a  $\mathcal{A}_-$  mostra que  $\mathcal{A}_- \cong gl(m; \mathbb{R})$ .

O grupo de Lie  $G$  associado à álgebra  $\mathcal{A}$  é  $GL(m; \mathbb{C})$  e de  $G_+$  é  $GL(m; \mathbb{R})$ .

A ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_+$  e  $\mathcal{A}_-$  são ambas isomorfas a ação adjunta de  $GL(m; \mathbb{R})$  sobre  $gl(m; \mathbb{R})$ .

**Exemplo 1.3.8.** Considere  $\mathcal{A} = gl(2m; \mathbb{R})$  e a involução  $\Sigma(A) = -iAi$ , onde  $i$  é identificado como um escalar em  $gl(m; \mathbb{C})$  e desde já como um elemento de  $gl(2m; \mathbb{R})$ .

Seja  $A \in \mathcal{A}_+$  dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

onde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $n = 2m$ .

Considere  $i$  como um elemento de  $gl(2m; \mathbb{R})$  dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

isto é,  $i$  é dado por uma matriz  $2m \times 2m$  formada pelos blocos  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  em sua diagonal principal.

Assim como  $A = -iAi$ , fazendo as multiplicações das matrizes, obtemos que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{11} & \cdots & -a_{1n} & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ -a_{(n-1)2} & a_{(n-1)1} & \cdots & -a_{(n-1)n} & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \in gl(m; \mathbb{C}),$$

pois para cada bloco da matriz  $A$  temos  $\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ -a_{ik} & a_{ij} \end{pmatrix} \cong a_{ij} + a_{ik}i$ .

Então, segue que  $\mathcal{A}_+ \subset gl(m; \mathbb{C})$ .

Observe ainda que se  $B \in gl(m; \mathbb{C})$ , então  $-iBi = B$ , logo,  $B \in \mathcal{A}_+$  e assim  $gl(m; \mathbb{C}) \subset \mathcal{A}_+$ .

Portanto,  $\mathcal{A}_+ = gl(m; \mathbb{C})$ .

Seja  $D \in \mathcal{A}_-$  dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1(n-1)} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2(n-1)} & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{(n-1)1} & d_{(n-1)2} & \cdots & d_{(n-1)(n-1)} & d_{(n-1)n} \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{n(n-1)} & d_{nn} \end{pmatrix},$$

onde  $d_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $n = 2m$ .

Como  $-D = -iDi$ , fazendo os cálculos entre as matrizes, obtemos que,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1(n-1)} & d_{1n} \\ d_{12} & -d_{11} & \cdots & d_{1n} & -d_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{(n-1)1} & d_{(n-1)2} & \cdots & d_{(n-1)(n-1)} & d_{(n-1)n} \\ d_{(n-1)2} & -d_{(n-1)1} & \cdots & d_{(n-1)n} & -d_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Considere  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $k \in \mathbb{C}$ , dado pela matriz em  $gl(m; \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} c_{11} + if_{11} & \cdots & c_{1m} + if_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} + if_{m1} & \cdots & c_{mm} + if_{mm} \end{pmatrix},$$

ou ainda, como um elemento de  $gl(2m; \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & -f_{11} & \cdots & c_{1m} & -f_{1m} \\ f_{11} & c_{11} & \cdots & f_{1m} & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & -f_{m1} & \cdots & c_{mm} & -f_{mm} \\ f_{m1} & c_{m1} & \cdots & f_{mm} & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, através da multiplicação das matrizes, verificaremos que  $D(ku) = \bar{k}D(u)$ , onde a matriz de  $\bar{k}$  é dada por,

$$\begin{pmatrix} c_{11} & f_{11} & \cdots & c_{1m} & f_{1m} \\ -f_{11} & c_{11} & \cdots & -f_{1m} & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & f_{m1} & \cdots & c_{mm} & f_{mm} \\ -f_{m1} & c_{m1} & \cdots & -f_{mm} & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Então,  $D \in gl(m; \overline{\mathbb{C}})$  e assim  $\mathcal{A}_- \subset gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ .

Seja  $F \in gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ , logo  $-iFi = -i - iF = -F$ , ou seja,  $F \in \mathcal{A}_-$ , então  $gl(m; \overline{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{A}_-$ .

Portanto,  $\mathcal{A}_- = gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ .

Se  $K : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$  é uma função  $\overline{\mathbb{C}}$ -linear dada pela conjugação complexa, a função  $g : gl(m; \mathbb{C}) \longrightarrow gl(m; \overline{\mathbb{C}})$  dada por  $B \longmapsto B \circ K$  é um isomorfismo entre os espaços vetoriais  $gl(m; \mathbb{C})$  e  $gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ , logo  $\mathcal{A}_- \cong gl(m; \mathbb{C})$ .

O grupo de Lie  $G$  associado a  $\mathcal{A}$  é  $GL(2m; \mathbb{R})$  e de  $G_+$  é  $GL(m; \mathbb{C})$ .

A ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_+$  é a ação adjunta de  $GL(m; \mathbb{C})$  sobre  $gl(m; \mathbb{C})$  e sobre  $\mathcal{A}_-$  é dada por

$$\begin{aligned} \varphi : GL(m; \mathbb{C}) \times gl(m; \mathbb{C}) &\longrightarrow gl(m; \mathbb{C}) \\ (\phi, B) &\longmapsto \phi^{-1}B\phi. \end{aligned}$$

Ou ainda, pelo isomorfismo entre  $gl(m; \mathbb{C})$  e  $gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ , temos que  $\varphi$  pode ser vista como

$$\begin{aligned} \psi : GL(m; \mathbb{C}) \times gl(m; \overline{\mathbb{C}}) &\longrightarrow gl(m; \overline{\mathbb{C}}) \\ (\phi, B \circ k) &\longmapsto \phi^{-1}(B \circ k)\phi. \end{aligned}$$

Observe para  $\beta \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{C}^m$  que

$$\begin{aligned} (\phi^{-1}(B \circ k)\phi)(\beta u) &= \phi^{-1}(\beta u)(B \circ k)(\beta u)\phi(\beta u) \\ &= \beta \phi^{-1}(u)(B(k(u)\overline{\beta})\beta\phi(u) \\ &= \beta \phi^{-1}(u)(B \circ k)(u)\beta\overline{\beta}\phi(u) \\ &= \phi^{-1}(\beta u)(B \circ k)(u)\beta\overline{\phi}(\beta u) \\ &= \phi^{-1}(\beta u)B(u\beta)\overline{\phi}(\beta u) \\ &= \phi^{-1} \circ B \circ \overline{\phi}(\beta u). \end{aligned}$$

Assim a função  $\psi : GL(m; \mathbb{C}) \times gl(m; \overline{\mathbb{C}})$  dada por  $(\phi, B) \longmapsto \phi^{-1}B\overline{\phi}$  é ainda uma ação de  $GL(m; \mathbb{C})$  sobre  $gl(m; \overline{\mathbb{C}})$ .

**Exemplo 1.3.9.** Sejam  $\mathcal{A} = gl(m; \mathbb{H})$  uma álgebra de Lie e sua involução  $\Sigma(A) = A^\sharp$ .

Este exemplo é semelhante ao anterior. Os  $\pm 1$  autoespaços são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &= \{A \in \mathcal{A} \mid A^\sharp = A\}, \\ \mathcal{A}_- &= \{A \in \mathcal{A} \mid A^\sharp = -A\}, \end{aligned}$$

tal que  $\mathcal{A}_+ = gl(m; \mathbb{C})$  e  $\mathcal{A}_-$  pode ser identificado como as matrizes  $m \times m$  com entradas de quatérnios da forma  $cj + dk, c, d \in \mathbb{R}$ .

O grupo de Lie associado à álgebra  $\mathcal{A}$  é  $GL(m; \mathbb{H})$  e  $G_+ = GL(m; \mathbb{C})$ .

Considere o isomorfismo entre os espaços vetoriais  $gl(m; \mathbb{H})$  e

$gl(m; \mathbb{C}) \oplus gl(m; \mathbb{C})$  dado por

$$\begin{aligned}\theta : gl(m; \mathbb{C}) \oplus gl(m; \mathbb{C}) &\longrightarrow gl(m; \mathbb{H}) \\ (A, B) &\longmapsto A + j\overline{B}.\end{aligned}$$

Este isomorfismo restrito à  $\mathcal{A}_-$  mostra que  $\mathcal{A}_- \cong gl(m; \mathbb{C})$ .

Temos que a ação de  $G$  sobre  $\mathcal{A}$  é dada por

$$\begin{aligned}\varphi : GL(m; \mathbb{C}) \times gl(m; \mathbb{H}) &\longrightarrow gl(m; \mathbb{H}) \\ (\phi, A) &\longmapsto \phi^{-1}A\phi.\end{aligned}$$

Usando o isomorfismo  $\theta$  acima, segue que,  $\varphi$  pode ser vista como

$$\begin{aligned}\psi : GL(m; \mathbb{C}) \times (gl(m; \mathbb{C}) \oplus gl(m; \mathbb{C})) &\longrightarrow gl(m; \mathbb{C}) \oplus gl(m; \mathbb{C}) \\ (\phi, (A, B)) &\longmapsto \phi^{-1}(A, B)\phi.\end{aligned}$$

Mas,

$$\phi^{-1}(A, B)\phi = \phi^{-1}(A + j\overline{B})\phi = (\phi^{-1}A\phi) + (\phi^{-1}j\overline{B}\phi). \quad (1.5)$$

Observe para  $m = 4$  que,

$$\begin{aligned}\phi^{-1}j &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & a_2 + b_2i \\ a_3 + b_3i & a_4 + b_4i \end{pmatrix} j = \begin{pmatrix} a_1j - jb_1i & a_2j - jb_2i \\ a_3j - jb_3i & a_4j - jb_4i \end{pmatrix} \\ &= j \begin{pmatrix} a_1 - b_1i & a_2 - b_2i \\ a_3 - b_3i & a_4 - b_4i \end{pmatrix} \\ &= j\overline{\phi^{-1}}.\end{aligned}$$

Analogamente para qualquer  $m$  temos  $\phi^{-1}j = j\overline{\phi^{-1}}$ . Então, em (1.5),

$$\phi^{-1}(A, B)\phi = (\phi^{-1}A\phi) + (j\overline{\phi^{-1}B}\phi) = (\phi^{-1}A\phi) + \overline{j\phi^{-1}B\phi},$$

que é a ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}$ .

Assim a ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_+$  é a ação adjunta de  $GL(m; \mathbb{C})$  sobre  $gl(m; \mathbb{C})$ , enquanto que sobre  $\mathcal{A}_-$  é isomorfo a ação de  $G_+$  sobre o espaço das funções  $\overline{C}$ -lineares descritas no exemplo anterior.

**Exemplo 1.3.10.** *Sejam  $\mathcal{A} = gl(2m; \mathbb{C})$  e sua involução  $\Sigma(A) = -j\overline{A}j$ , onde  $j$  é identificado como a função linear de  $\mathbb{H}^m$  em  $\mathbb{H}^m$  obtida pela sua ação à direita de  $\mathbb{H}^m$ .*

Temos que,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_+ &= \{A \in \mathcal{A} \mid -j\overline{A}j = A\} = gl(m; \mathbb{H}) \quad \text{e} \\ \mathcal{A}_- &= \{A \in \mathcal{A} \mid -j\overline{A}j = -A\} = gl(m; \mathbb{H}^\sharp)\end{aligned}$$

Identificamos  $\mathbb{H}^m$  com  $\mathbb{C}^{2m}$  tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_+ = gl(m; \mathbb{H}) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid C = -\overline{B}, \quad D = \overline{A} \right\}, \\ \mathcal{A}_- = gl(m; \mathbb{H}^\sharp) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid C = \overline{B}, \quad D = -\overline{A} \right\}.\end{aligned}$$

A função  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}$  define um isomorfismo entre os espaços vetoriais  $gl(m; \mathbb{H})$  e  $gl(m; \mathbb{H}^\sharp)$ .

O grupo de Lie  $G$  associado a  $\mathcal{A}$  é  $GL(2m; \mathbb{C})$  e  $G_+$  é  $GL(m; \mathbb{H})$ .

A ação de  $G_+$  sobre  $\mathcal{A}_+$  é a ação adjunta de  $GL(m; \mathbb{H})$  sobre  $gl(m; \mathbb{H})$ . Sobre o isomorfismo que  $gl(m; \mathbb{H})$  descreve acima, a ação sobre  $\mathcal{A}_- = gl(m; \mathbb{H}^\sharp)$  é também um isomorfismo para esta ação adjunta.

## 1.4 Representações, Lema de Schur

Como nosso objetivo é classificar os sistemas lineares reversíveis e equivariantes usando a Teoria de Representação de Grupos, apresentaremos alguns

conceitos sobre Teoria de Representação de Grupos e também uma de suas principais ferramentas que é o Lema de Schur.

**Definição 1.4.1.** *Uma representação de um grupo  $G$  sobre um espaço vetorial  $V$  é um homomorfismo de grupos  $\rho : G \longrightarrow GL(V; \mathbb{K})$ . Denotamos a representação do grupo  $G$  sobre  $V$  por  $(V, \rho)$ .*

A dimensão de  $V$  é a dimensão da representação.

Como  $GL(V; \mathbb{K})$  é isomorfo a  $GL(m; \mathbb{K})$  temos que é uma representação o homomorfismo  $\rho : G \longrightarrow GL(m; \mathbb{K})$ .

**Definição 1.4.2.** *Sejam  $(V_1, \rho_1)$  e  $(V_2, \rho_2)$  duas representações do grupo  $G$ . Dizemos que uma função  $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$  é equivariante se esta comutar com as representações  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , isto é,*

$$\phi(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)\phi(v_1), \forall g \in G, v_1 \in V_1.$$

O espaço de todas as funções lineares equivariantes de uma representação  $(V_1, \rho_1)$  para outra  $(V_2, \rho_2)$  será denotado por  $I_G((V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2))$ , ou simplesmente,  $I_G(V_1, V_2)$ . Quando duas representações são iguais, denotamos  $I_G(V, V)$  por  $gl_G(V)$ . Neste caso as funções lineares equivariantes podem também ser compostas, logo  $gl_G(V)$  obtém estrutura de uma álgebra e não somente de um espaço vetorial real.

**Definição 1.4.3.** *Dizemos que duas representações  $(V_1, \rho_1)$  e  $(V_2, \rho_2)$  de  $G$ , são isomorfas se existe uma função  $f : V_1 \longrightarrow V_2$  linear, equivariante e invertível.*

**Observação 1.4.1.** *Dizemos que uma representação  $\rho$  é trivial se  $\rho(g) = Id$ , para qualquer  $g \in G$ .*

**Observação 1.4.2.** *Dizemos que uma representação  $\rho : G \longrightarrow GL(V; \mathbb{K})$  é fiel quando  $\ker(\rho) = \{0\}$ .*

**Definição 1.4.4.** *Sejam  $(V, \rho)$  uma representação de  $G$  e  $W$  um subespaço de  $V$ . Dizemos que  $W$  é um subespaço  $G$ -invariante de  $V$  se  $\rho(g)W \subseteq W$  para qualquer  $g \in G$ .*

**Definição 1.4.5.** *Uma representação  $(V, \rho)$  de  $G$  é chamada de irredutível se  $V$  não contém nenhum subespaço linear  $G$ -invariante não trivial.*

O seguinte resultado descreve os espaços lineares das funções lineares entre representações irredutíveis que é o centro da Teoria de Representação.

**Proposição 1.4.1** (Lema de Schur). *Sejam  $(V_1, \rho_1)$  e  $(V_2, \rho_2)$  representações irredutíveis do grupo  $G$  sobre  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente. Considere a função  $f : V_1 \longrightarrow V_2$  linear tal que  $f(\rho_1(g)u) = \rho_2(g)f(u)$ , para qualquer  $g \in G$ ,  $u \in V_1$ .*

1. *Se  $(V_1, \rho_1)$  e  $(V_2, \rho_2)$  não são isomorfas, então  $I_G(V_1, V_2) = \{0\}$ .*
2. *Se  $(V_1, \rho_1) = (V_2, \rho_2) = (V, \rho)$ , então  $gl_G(V)$  é isomorfo (como uma álgebra real) a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ .*

**Demonstração.**

1. Seja  $f \in I_G(V_1, V_2)$ , isto é,  $f : V_1 \longrightarrow V_2$  é uma função linear tal que

$$f(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)f(v_1), \forall g \in G, v_1 \in V_1.$$

- i) Se  $f \equiv 0$ , então  $I_G(V_1, V_2) = \{0\}$ , como queríamos demonstrar.
- ii) Suponhamos  $f \neq 0$ . Considere  $W_1 = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\} \subseteq V_1$ , núcleo de  $f$ .

Dado  $x \in W_1$  e  $g \in G$ , como  $f$  é equivariante, segue que,

$$\begin{aligned} f(\rho_1(g)x) &= \rho_2(g)(f(x)) = \rho_2(g)(0) = 0 \\ \implies f(\rho_1(g)x) &= 0 \\ \implies \rho_1(g)(x) &\in W_1. \end{aligned}$$

Então, para qualquer  $g \in G$ ,  $\rho_1(g)(W_1) \subset W_1$ . Como  $\rho_1$  é irredutível,  $W_1 = \{0\}$  ou  $W_1 = V_1$ .

Mas se  $W_1 = V_1$ , então para todo  $x \in V_1$ ,  $f(x) = 0$  logo  $f \equiv 0$  o que é absurdo.

Então,  $W_1 = \{0\}$  e temos assim que  $f$  é injetora.

Analogamente, considere  $W_2 = \text{Im}(f) = \{f(x) \in V_2 \mid x \in V_1\} \subseteq V_2$ .

Tomando  $y = f(x) \in W_2$ , pela equivariância de  $f$  segue que

$$\begin{aligned} \rho_2(g)f(x) &= f(\rho_1(g)x) \in W_2 \\ \implies \rho_2(g)f(x) &\in W_2, \forall y = f(x) \in W_2, g \in G \\ \implies \rho_2(g)W_2 &\subset W_2, \forall g \in G \\ \implies W_2 &= \{0\} \text{ ou } W_2 = V_2. \end{aligned}$$

Se  $W_2 = \{0\}$ , então  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in V_1$  logo  $f \equiv 0$  o que é absurdo.

Logo  $W_2 = V_2$  e assim  $f$  é sobrejetora.

Finalmente, concluímos que  $f$  é uma função linear, equivariante e invertível, então  $(V_1, \rho_1)$  e  $(V_2, \rho_2)$  são representações isomorfas, absurdo, pois contraria a hipótese.

Portanto, de i) e ii) segue que  $I_G(V_1, V_2) = \{0\}$ .

2. Mostraremos para o caso em que  $V$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Os casos em que  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{H}$  foram provados por Frobenius and Peirce em 1878 e 1880.

Seja  $f \in gl_G(V)$ . Como  $\mathbb{C}$  é um corpo algebricamente fechado, ou seja, qualquer polinômio de grau  $m$  tem exatamente  $m$  raízes, temos que  $f$  tem um autovalor complexo.

Consideremos  $\lambda$  este autovalor associado ao autovetor não nulo  $x_1$ , isto é,  $f(x_1) = \lambda x_1$ .

Tomemos  $F = f - \lambda I$  e observamos que

$$F(x_1) = (f - \lambda I)(x_1) = f(x_1) - \lambda x_1 = \lambda x_1 - \lambda x_1 = 0.$$

Logo,  $\ker F \neq 0$  e  $F$  não é injetora.

Temos ainda que

$$\begin{aligned} F(\rho(g)u) &= (f - \lambda I)(\rho(g)u) \\ &= f(\rho(g)u) - (\lambda I)(\rho(g)u) \\ &= \rho(g)f(u) - \rho(g)\lambda u \\ &= \rho(g)(f - \lambda I)(u) \\ &= \rho(g)F(u), \forall g \in G, u \in V. \end{aligned}$$

Então,  $F \in gl_G(V)$ . Analogamente a demonstração do item anterior segue que  $\ker F = \{0\}$  ou  $\ker F = V$ .

Se  $\ker F = \{0\}$ , então  $F$  é injetora o que é absurdo, logo  $\ker F = V$ , ou seja,  $F(x) = 0$  para qualquer  $x \in V$ , portanto  $F = 0$ . Então,  $f - \lambda I = 0$  e assim  $f = \lambda I$ .

Utilizando do isomorfismo  $\lambda I \mapsto \lambda$  temos para o caso em que  $V$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial que

$$(a) \quad gl_G(V) \cong \mathbb{C} \text{ quando } \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0.$$

$$(b) \quad gl_G(V) \cong \mathbb{R} \text{ quando } \operatorname{Im}(\lambda) = 0.$$

Portanto concluímos que  $gl_G(V)$  é isomorfo, como uma álgebra real, a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  no caso em que  $V$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

■

**Definição 1.4.6.** Dizemos que uma representação irredutível  $(V, \rho)$  de  $G$  é do tipo  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  segundo a classe do isomorfismo de  $gl_G(V)$ , ou seja, o tipo da

representação depende de  $gl_G(V)$  ser isomorfo, como uma álgebra linear real, a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ .

A ação natural de  $gl_G(V)$  sobre uma representação irredutível  $(V, \rho)$  do tipo  $\mathbb{K}$  dá a  $V$  a estrutura de um espaço vetorial à esquerda sobre  $\mathbb{K}$ . Com esta estrutura os elementos de  $G$  atuam por funções  $\mathbb{K}$ -lineares sobre  $V$ .

## 1.5 Decomposição Isotípica

Nesta seção utilizaremos a Decomposição Isotípica para descrever a estrutura do espaço  $gl_G(V)$  de uma representação qualquer de  $G$  sobre  $V$ , sem ser necessariamente irredutível.

Primeiramente, relembremos como é a matriz de uma transformação linear de  $V$  em  $V$ , quando  $V$  é soma direta de subespaços vetoriais.

Sejam  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$  e  $T : V \longrightarrow V$  uma transformação linear tal que  $T$  deixa invariante cada subespaço  $V_i$ .

Considere  $B_i = \{v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{k_i i}\}$ , com  $i = 1, \dots, m$ , bases para os subespaços vetoriais  $V_i$ , onde  $\dim V_i = k_i$ .

Assim uma base para  $V$  é dada por

$$B = \{v_{11}, v_{21}, \dots, v_{k_1 1}, \dots, v_{1m}, v_{2m}, \dots, v_{k_m m}\},$$

tal que  $\dim V = k_1 + \cdots + k_m$ .

Então,

$$\begin{aligned} T(v_{11}) &= \alpha_{11}v_{11} + \cdots + \alpha_{k_1 1}v_{k_1 1} + 0v_{12} + \cdots + 0v_{k_2 2} + \cdots + 0v_{1m} + \cdots + 0v_{k_m m} \\ &\vdots \\ T(v_{k_1 1}) &= \alpha_{1k_1}v_{11} + \cdots + \alpha_{k_1 k_1}v_{k_1 1} + 0v_{12} + \cdots + 0v_{k_2 2} + \cdots + 0v_{1m} + \cdots + 0v_{k_m m} \\ &\vdots \\ T(v_{1m}) &= 0v_{11} + \cdots + 0v_{k_1 1} + 0v_{12} + \cdots + 0v_{k_2 2} + \cdots + \gamma_{11}v_{1m} + \cdots + \gamma_{k_m 1}v_{k_m m} \\ &\vdots \\ T(v_{k_m m}) &= 0v_{11} + \cdots + 0v_{k_1 1} + 0v_{12} + \cdots + 0v_{k_2 2} + \cdots + \gamma_{1k_m}v_{1m} + \cdots + \gamma_{k_m k_m}v_{k_m m}. \end{aligned}$$

Logo,

$$[T] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k_1} & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k_1 1} & \cdots & \alpha_{k_1 k_1} & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k_2} & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{k_2 1} & \cdots & \beta_{k_2 k_2} & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1k_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \gamma_{k_m 1} & \cdots & \gamma_{k_m k_m} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ou ainda } [T] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_m \end{pmatrix} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m, \text{ onde } A_i, \text{ com}$$

$i = 1, \dots, m$ , é a matriz de  $T|_{V_i}$ .

Assim observamos que a matriz de uma transformação linear definida em um espaço vetorial que é soma direta de subespaços vetoriais, é dada em forma de blocos.

Com isso veremos que um espaço vetorial pode ser decomposto como soma direta de subespaços através da decomposição isotípica.

**Teorema 1.5.1** (Teorema da Redutibilidade Completa). *Seja  $(V, \rho)$  uma representação do grupo de Lie compacto  $G$  sobre o espaço vetorial  $V$ . Então, existem subespaços  $U_i$  onde a representação  $(U_i, \tau_i)$  de  $G$  sobre  $U_i$  é irredutível tais que*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m. \quad (1.6)$$

**Demonstração.** Ver [7], páginas 33-34.

A decomposição dada pelo teorema acima não é única.

**Teorema 1.5.2.** *Seja a representação  $(V, \rho)$  uma representação do grupo de Lie compacto  $G$  sobre o espaço vetorial  $V$ .*

1. *A menos de isomorfismo existe um número finito de subespaços  $U_i$  tais que  $(U_i, \tau_i)$  é uma representação irredutível de  $G$ . Ou seja,  $(U_1, \tau_1), \dots, (U_m, \tau_m)$ .*
2. *Defina  $V_j$  para ser a soma de todos os subespaços  $U_i$  tais que as representações  $(U_i, \tau_i)$  de  $G$  são irredutíveis e  $(U_i, \tau_i)$  é isomorfo a  $(U_j, \tau_j)$  com  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Então,*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k, \quad (1.7)$$

**Demonstração.** Ver [7], páginas 35-36.

A decomposição (1.7) é única a menos de uma reordenação das somas. Referimos a  $V_i$  com  $i \in \{1, \dots, k\}$  como os **Blocos Isotípicos** de  $V$  e a decomposição (1.7) como **Decomposição Isotípica de  $V$** .

Analogamente,  $\rho$  pode ser decomposta da seguinte maneira

$$\rho \cong \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k, \quad (1.8)$$

onde a representação  $\rho_i$  com  $i = 1, \dots, k$  é isomorfa à uma soma direta de  $m_i$  cópias de uma representação irredutível  $(U_i, \tau_i)$ .

Observe que  $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$  é uma representação.

De fato, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k : G &\longrightarrow GL(V_1 \oplus \dots \oplus V_k) \\ g &\longmapsto \rho_1(g) \oplus \dots \oplus \rho_k(g), \end{aligned}$$

onde  $\rho_i$  são representações do grupo  $G$  sobre o espaço vetorial  $V_i$  tal que para  $v = v_1 \oplus \dots \oplus v_k \in V$ ,  $(\rho_1(g) \oplus \dots \oplus \rho_k(g))(v) = \rho_1(g)(v_1) + \dots + \rho_k(g)(v_k)$ .

Sejam  $g, h \in G$ .

$$\begin{aligned}
 (\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k)(gh) &= \rho_1(gh) \oplus \cdots \oplus \rho_k(gh) \\
 &= \rho_1(g)\rho_1(h) \oplus \cdots \oplus \rho_k(g)\rho_k(h) \\
 &= (\rho_1(g) \oplus \cdots \oplus \rho_k(g))(\rho_1(h) \oplus \cdots \oplus \rho_k(h)) \\
 &= (\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k)(g)(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k)(h).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$  é um homomorfismo e assim uma representação.

Em forma de matriz,  $\rho$  se escreve em blocos como

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_k \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

onde  $\rho_i$  é a representação de  $G$  em  $V_i$  dada pela matriz da transformação linear  $\rho_i(g) : V_i \longrightarrow V_i$  na base de  $V_i$ .

**Teorema 1.5.3.** *Sejam  $(V, \rho)$  uma representação do grupo compacto de Lie  $G$  sobre o espaço vetorial  $V$  e a Decomposição Isotípica de  $V$  dada por*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

*Considere  $L : V \longrightarrow V$  é uma aplicação  $G$ -equivariante. Então,*

$$L(V_i) \subset V_i, \quad (1.10)$$

*para  $i = 1, \dots, k$ .*

**Demonstração.** Ver [7], página 41.

Pelo Teorema (1.5.3) temos que  $gl_G(V)$  decompõe-se como a soma direta

dos subespaços que são isomorfos a  $gl_G(V_i)$ , isto é,

$$gl_G(V) \cong gl_G(V_1) \oplus \cdots \oplus gl_G(V_k). \quad (1.11)$$

Restringindo para funções  $G$ -equivariantes invertíveis obteremos uma decomposição correspondente,

$$GL_G(V) \cong GL_G(V_1) \times \cdots \times GL_G(V_k). \quad (1.12)$$

O espaço  $gl_G(V)$  é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie  $GL_G(V)$  e a ação adjunta de  $GL(V)$  sobre  $gl(V)$ , restrita as transformações lineares equivariantes, é a ação adjunta de  $GL_G(V)$  sobre  $gl_G(V)$ .

Esta ação decompõe-se como a soma direta de ações adjuntas dos grupos  $GL_G(V_i)$  sobre os espaços  $gl_G(V_i)$ , ou seja,

$$\phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_k, \quad (1.13)$$

onde  $\phi_i$  é a ação de  $GL_G(V_i)$  sobre  $gl_G(V_i)$  tal que  $i = 1, \dots, k$ .

Como vimos  $V_i = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{m_i}$  onde cada  $(U_j, \tau_j)$  para  $j \in \{1, \dots, m_i\}$  é isomorfo a  $(U_i, \tau_i)$ .

Seja  $\{u_{j1}^i, \dots, u_{jl}^i\}$  uma base para  $U_j$  tal que  $i \in \{1, \dots, k\}$  se refere ao bloco isotípico  $V_i$  ao qual  $U_j$  pertence e  $j \in \{1, \dots, m_i\}$ .

Assim  $\{u_{11}^i, \dots, u_{1l}^i, \dots, u_{m_i1}^i, \dots, u_{m_i l}^i\}$  é uma base para  $V_i$ . Logo como  $L(V_i) \subset V_i$  segue que

$$\begin{aligned} L(u_{11}^i) &= \alpha_{11}u_{11}^i + \cdots + \alpha_{l1}u_{1l}^i + \cdots + \alpha_{((m_i-1)l+1)1}u_{m_i1}^i + \cdots + \alpha_{(m_i l)1}u_{m_i l}^i \\ &\vdots \\ L(u_{1l}^i) &= \alpha_{1l}u_{11}^i + \cdots + \alpha_{ll}u_{1l}^i + \cdots + \alpha_{((m_i-1)l+1)l}u_{m_i1}^i + \cdots + \alpha_{(m_i l)l}u_{m_i l}^i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, sua matriz é dada por

$$[L] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1l} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \alpha_{l1} & \cdots & \alpha_{ll} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \alpha_{((m_i-1)l+1)1} & \cdots & \alpha_{((m_i-1)l+1)l} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \alpha_{(m_i l)1} & \cdots & \alpha_{(m_i l)l} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1m_i} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m_i 1} & \cdots & L_{m_i m_i} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

onde cada  $L_{jt}$  é a matriz da transformação linear  $L_{jt} : U_t \longrightarrow U_j$  que é equivariante com relação as representações  $(U_t, \tau_t)$  e  $(U_j, \tau_j)$  tal que  $j, t \in \{1, \dots, m_i\}$ .

Como  $V_i$  é isomorfo a soma direta das  $m_i$  cópias de  $U_i$  pelo mesmo processo feito acima obteremos uma matriz na base dos  $U_i$ 's que é isomorfa a matriz (1.14).

Através deste isomorfismo se  $(U_i, \tau_i)$  é do tipo  $\mathbb{K}_i$ , então podemos tomar  $L_{jt} = l_{jt}$ , onde  $l_{jt} \in \mathbb{K}_i$ . Se considerarmos o isomorfismo  $l_{jt} \longmapsto l_{jt}I$ , onde  $I$  é a identidade sobre  $U_i$ , então  $L_{jt} = l_{rs}$  é isomorfo a  $l_{jt}I$ . Portanto, a transformação linear  $L : V_i \longrightarrow V_i$  é dada pela matriz  $m_i \times m_i$  com elementos em  $\mathbb{K}_i$ , logo  $gl_G(V_i) \cong gl(m_i; \mathbb{K}_i)$ , onde concluímos a estrutura do espaço  $gl_G(V_i)$ .

Analogamente  $GL_G(V_i) \cong GL(m_i; \mathbb{K}_i)$  e também a ação adjunta de  $GL_G(V)$  sobre  $gl_G(V)$  é isomorfa à soma direta de ações adjuntas dos grupos de Lie  $GL(m_i; \mathbb{K}_i)$  sobre suas álgebras de Lie  $gl(m_i; \mathbb{K}_i)$ .

Este resultado pode ser expresso naturalmente usando produto tensorial.

Primeiramente observemos que se  $U$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , então  $U = \mathbb{K} \otimes U$ .

De fato, seja a aplicação  $\varphi : \mathbb{K} \times U \longrightarrow U$  dada por  $\varphi(k, u) = ku$ . Considere o espaço vetorial  $N$  e a aplicação bilinear  $\psi : \mathbb{K} \times U \longrightarrow N$ . Tome a aplicação linear  $f : U \longrightarrow N$  tal que  $f(u) = \psi(1, u)$ , logo para qualquer  $u \in U$  e  $k \in \mathbb{K}$  segue que

$$f \circ \varphi(k, u) = f(ku) = kf(u) = k\psi(1, u) = \psi(k, u) \implies f \circ \varphi = \psi.$$

Portanto, pela Definição (1.1.5) segue que  $U = \mathbb{K} \otimes U$ .

Sendo assim, como  $V_i$  é soma direta de  $m_i$  cópias de  $U_i$  e  $U_i$  é do tipo  $\mathbb{K}_i$ , temos que

$$V_i \cong U_i \oplus \cdots \oplus U_i = (\mathbb{K}_i \otimes U_i) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{K}_i \otimes U_i) = (\mathbb{K}_i \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}_i) \otimes U_i = \mathbb{K}_i^{m_i} \otimes U_i.$$

Portanto,  $V_i \cong \mathbb{K}_i^{m_i} \otimes_{\mathbb{K}_i} U_i$ . Ou ainda, as representações  $(V_i, \rho_i)$  e  $(\mathbb{K}_i^{m_i} \otimes_{\mathbb{K}_i} U_i, 1^{m_i} \otimes_{\mathbb{K}_i} \tau_i)$  são isomorfas.

Temos ainda pela matriz (1.14) que

$$\begin{aligned} [L] &= \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1m_i} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m_i1} & \cdots & L_{m_im_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}I & \cdots & l_{1m_i}I \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m_i1}I & \cdots & l_{m_im_i}I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1m_i} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m_i1} & \cdots & l_{m_im_i} \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{K}_i} I = l \otimes_{\mathbb{K}_i} I, \end{aligned}$$

onde  $l : \mathbb{K}^{m_i} \longrightarrow \mathbb{K}^{m_i}$  e  $[l] = [l_{rs}]_{m_i \times m_i}$ .

Portanto, o isomorfismo de  $gl(m_i; \mathbb{K}_i)$  para  $gl_G(V_i)$  é dado por  $l \longmapsto L = l \otimes_{\mathbb{K}_i} I$ .

Analogamente, restringindo para funções invertíveis teremos o isomorfismo entre  $GL(m_i; \mathbb{K}_i)$  e  $GL_G(V_i)$  através do produto tensorial.

Finalmente, generalizamos a classificação de representações irredutíveis em tipos  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$  e assim podemos definir o tipo de uma representação geral  $V$  (definida sobre  $\mathbb{R}$ ) para ser isomorfa à classe de  $gl_G(V)$  como uma álgebra linear real.

## Capítulo 2

# Classificação das Representações de $G$

### 2.1 Sistemas Lineares Reversíveis e Equivariantes

Neste Capítulo classificaremos as possíveis classes de isomorfismos da álgebra  $gl_H(U)$  e as formas que os automorfismos  $\Sigma$  podem tomar sobre  $gl_H(U)$  como na Seção (1.2). Com isso poderemos classificar as representações irredutíveis através da Teoria de Representação de Grupos.

Consideremos um sistema linear da forma

$$\frac{dx}{dt} = Lx, \tag{2.1}$$

onde  $L : V \rightarrow V$  é uma aplicação linear do espaço vetorial  $V$  em  $V$ .

**Definição 2.1.1.** Dizemos que o sistema (2.1) é reversível com relação a uma aplicação linear invertível  $R : V \rightarrow V$  se

$$RL = -LR. \tag{2.2}$$

Em outras palavras, se  $x(t)$  é uma solução do sistema (2.1), então  $R(x(-t))$  também o é.

A função  $R$  acima é chamada uma *simetria reversível* de  $L$ . Devemos notar que não exigimos que  $R$  seja uma involução, isto é,  $R^2 = R \circ R$  não precisa ser a identidade  $I$ .

**Exemplo 2.1.1.** *Sejam o sistema linear  $\dot{x} = Lx$  e uma simetria reversível dada por  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .*

Considere  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Temos pela reversibilidade do sistema que

$$\begin{aligned} LR = -RL &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} c = b \\ a = -d \end{cases} \\ &\implies L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que  $R$  não é uma involução, pois  $R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  não é a identidade.

**Definição 2.1.2.** *Dizemos que o sistema (2.1) é equivariante com relação a uma aplicação linear invertível  $S : V \rightarrow V$  do espaço vetorial  $V$  em  $V$  se*

$$SL = LS. \quad (2.3)$$

Equivalentemente, se  $x(t)$  é solução de (2.1), então  $S(x(t))$  também é solução.

Assim quando (2.1) é  $S$ -equivariante dizemos que  $S$  é uma simetria de (2.1).

**Exemplo 2.1.2.** Seja o sistema linear  $\dot{x} = Lx$  tal que  $S = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$  é uma simetria para o sistema.

Considere  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Da equivariância do sistema, segue que

$$LS = SL \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} LS = SL &\implies \begin{pmatrix} -b - \frac{a}{2} & a - \frac{b}{2} \\ -d - \frac{c}{2} & c - \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - \frac{a}{2} & d - \frac{b}{2} \\ -a - \frac{c}{2} & -b - \frac{d}{2} \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases} \\ &\implies L = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, para que o sistema linear  $\dot{x} = Lx$  seja equivariante com relação à aplicação  $S$  é necessário e suficiente que  $L = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix}$ .

A composição de duas simetrias de (2.1) ainda é uma simetria de (2.1), a composição de duas simetrias reversíveis de (2.1) é uma simetria de (2.1) e a composição de uma simetria com uma simetria reversível de (2.1) é uma simetria reversível de (2.1). Portanto, o conjunto das simetrias e simetrias

reversíveis de  $L$  é fechado sobre a composição e formam um grupo que denotaremos por  $G$ .

Em nosso estudo estaremos considerando  $G$  como um Grupo de Lie Compacto.

Seja  $G$  um grupo. Se  $G$  contém simetrias reversíveis o subgrupo  $H$  das simetrias é um subgrupo de índice 2, ou seja,

$$\frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_2. \quad (2.4)$$

Devemos notar que (2.4) não implica que  $G$  contém uma simetria reversível que seja uma involução.

Por exemplo, seja o grupo  $G = \{-1, 1, -i, i\} = \langle i \rangle \cong \mathbb{Z}_4$  com a operação de multiplicação de números complexos e  $H = \mathbb{Z}_2$ . O conjunto  $G$  não contém nenhuma simetria reversível que é uma involução.

De fato, primeiramente observemos que

$$O\left(\frac{G}{H}\right) = [G : H] = \frac{O(G)}{O(H)} = \frac{4}{2} = 2 \implies \frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Logo,  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ .

Por definição a identidade é sempre uma simetria. Suponhamos que  $i$  seja uma simetria reversível, logo  $-1$  é uma simetria e  $-i$  é uma simetria reversível.

Assim as simetrias reversíveis de  $G$  são  $i$  e  $-i$ , onde  $i^2 = -1 \neq 1$  e  $(-i)^2 = -1 \neq 1$ , o que nos mostra que  $G$  contém simetrias reversíveis que não são involuções.

Vejamos que a reversibilidade tem uma implicação similar com a estrutura Hamiltoniana.

**Lema 2.1.1.** *Sejam  $L \in GL(n; \mathbb{R})$  reversível e  $\lambda$  um autovalor de  $L$ . Então,  $-\lambda$  também é autovalor de  $L$ .*

### Demonstração

Por hipótese  $L$  é reversível, logo existe  $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $LR = -RL$ . Considere  $\lambda$  o autovalor de  $L$ , ou seja,  $L(x) = \lambda x$ , para algum  $x$ .

Logo,

$$L(R(x)) = -R(L(x)) = -R(\lambda x) = -\lambda R(x),$$

ou seja,  $-\lambda$  é um autovalor de  $L$  associado ao autovetor  $R(x)$ .

Portanto,  $-\lambda$  é autovalor de  $L$ .

■

**Observação 2.1.1.** *Como consequência do lema anterior, os autovalores dos sistemas lineares reversíveis aparecem como  $\lambda = 0$ , duplas reais ou puramente imaginárias,  $(\lambda, -\lambda)$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\lambda \in i\mathbb{R}$ .*

Vejamos alguns exemplos onde esta observação se verifica.

**Exemplo 2.1.3.** *Considere o caso puramente reversível, com  $G = \mathbb{Z}_2$  agindo sobre  $\mathbb{R}^2$ , por  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $R(x, y) = (x, -y)$  e  $H = \{I\}$ .*

Seja  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Pela reversibilidade de  $L$

$$\begin{aligned} LR = -RL &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a = d = 0. \end{aligned}$$

Portanto, os sistemas lineares reversíveis em relação a  $R$  dada são aqueles tal que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ com } b, c \in \mathbb{R}.$$

Considere  $\lambda$  tal que o polinômio característico de  $L$  é dado por

$$\det(L - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & b \\ c & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - bc.$$

Assim  $\lambda_1 = \sqrt{bc}$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{bc}$  são os autovalores de  $L$ , isto é, um par no eixo real para  $b > 0$  e  $c > 0$  ou um par no eixo imaginário para  $b < 0$  ou  $c < 0$ .

**Exemplo 2.1.4.** Seja  $G = \mathbb{Z}_4$  agindo em  $\mathbb{R}^2$  por  $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Então,  $H \cong \mathbb{Z}_2$  pois como  $\frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_2$  e a ordem de  $G$  é 4, segue que ordem de  $H$  é 2.

Para reversibilidade de  $L$  considere sua matriz dada por  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} LR = -RL &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \\ &\implies L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observe que neste caso  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , é reversível e equivariante, pois  $H = \{-1, 1\}$ , ou seja,  $L$  comuta sempre com os elementos de  $H$ .

Considere  $p(\lambda) = -(a - \lambda)(a + \lambda) - b^2$  o polinômio característico de  $L$ . Então,  $\lambda_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{a^2 + b^2}$  são os autovalores de  $L$ , isto é, sempre um par de valores reais.

**Exemplo 2.1.5.** Seja  $G = \mathbb{D}_4 = \langle \alpha, \beta \rangle$  agindo com a simetria do quadrado em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $\alpha$  tem ordem 4,  $\beta$  tem ordem 2 e  $\alpha\beta = \beta\alpha^3 = \beta\alpha^{-1}$ .

Usando a Teoria de Representação, considere a representação tal que  $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Como  $O(G) = 8$  temos, por (2.4), que  $O(H) = 4$ .

Neste caso temos duas possibilidades para  $H$ , ou  $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  ou  $H \cong \mathbb{Z}_4$ .

Contudo, a dinâmica conseqüente dos dois casos são diferentes.

De fato,

1. Para  $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Neste caso consideraremos que  $\alpha$  e  $\beta$  são simetrias reversíveis. E assim,  $H = \langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle$ .

Seja  $L$  dado pela matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Para  $L$  ser equivariante basta verificarmos que  $L(\alpha\beta) = (\alpha\beta)L$ , tendo em vista que  $L\alpha^2 = \alpha^2L$  sempre vale pois  $\alpha^2 = -Id$ . Logo

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) = (\alpha\beta)L &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\implies L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observe que as simetrias reversíveis de  $G$  são  $G \setminus H = \{\alpha, \alpha^3, \beta, \alpha^2\beta\}$ , assim para  $L$  ser reversível é necessário que  $a = -b$ . Portanto,  $L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$  onde  $a \in \mathbb{R}$  é um sistema linear reversível e equivariante.

O polinômio característico de  $L$  é dado por  $p(\lambda) = \lambda^2 - a^2$ , então  $\lambda_1 = a$  e  $\lambda_2 = -a$  são os autovalores de  $L$ .

O retrato de fase deste sistema linear é dado pela seguinte figura.

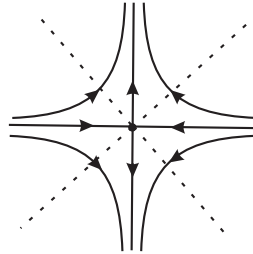


Figura 2.1: Retrato de fase de um fluxo linear sobre  $\mathbb{R}^2$  com o grupo simetria reversível  $G = \mathbb{D}_4$  e  $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

2. Para  $H \cong \mathbb{Z}_4$ .

Neste caso consideraremos que  $\alpha$  é uma simetria e  $\beta$  é uma simetria reversível. Assim,  $H = \langle \alpha \rangle$ .

Seja  $L$  tal que sua matriz é dada por  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Da equivariância de  $L$ , segue que

$$\begin{aligned} L\alpha = \alpha L &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\implies L = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

As simetrias reversíveis de  $G$  são  $\{\beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta\}$ , assim da reversibilidade de  $L$  temos que  $a = 0$ .

Portanto, o sistema linear reversível e equivariante é dado pela matriz  $L = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$  com  $b \in \mathbb{R}$  e seu polinômio característico é dado por  $p(\lambda) = \lambda^2 + b^2$ , o que concluímos que  $\lambda_1 = bi$  e  $\lambda_2 = -bi$  são seus autovalores.

O retrato de fase deste sistema é dado na figura abaixo.

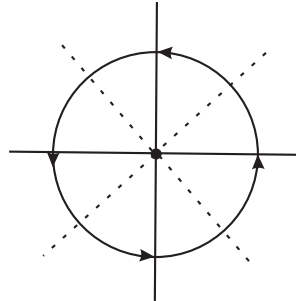


Figura 2.2: Retrato de fase de um fluxo linear sobre  $\mathbb{R}^2$  com o grupo simetria reversível  $G = \mathbb{D}_4$  e  $H = \mathbb{Z}_4$ .

Considere o homomorfismo  $\sigma : G \rightarrow \{1, -1\}$  que identifica precisamente como o grupo  $G$  divide-se em simetrias e simetrias reversíveis, isto é, se  $g$  é uma simetria, então  $\sigma(g) = 1$  e se  $g$  é uma simetria reversível, então  $\sigma(g) = -1$ . Temos que  $H = \sigma^{-1}(\{1\})$  é um subgrupo normal de  $G$ .

**Definição 2.1.3.** *Seja  $(V, \rho)$  uma representação de  $G$  sobre  $V$ . Dizemos que  $L : V \rightarrow V$  é uma função  $(G, \sigma)$ -reversível, ou simplesmente  $\sigma$ -reversível, se*

$$L(\rho(g)v) = \sigma(g)\rho(g)L(v), \forall g \in G, v \in V. \quad (2.5)$$

Denotaremos por  $gl_\sigma(V, \rho)$ , ou simplesmente  $gl_\sigma(V)$ , o espaço das aplicações lineares  $\sigma$ -reversíveis de  $V$  em  $V$ .

Como nosso objetivo é usar a Teoria de Representação para classificar os sistemas lineares reversíveis e equivariantes, combinaremos as duas condições (2.2) e (2.3) em uma única condição dada por

$$L\rho(g) = \sigma(g)\rho(g)L, \quad (2.6)$$

onde  $\rho$  é a representação do grupo  $G$  com a operação de multiplicação de números reais e  $\sigma : G \rightarrow \{1, -1\}$  é um homomorfismo de grupos entre o grupo  $G$  e  $\{-1, 1\} \subset GL(1, \mathbb{R})$  considerado acima.

Observe que  $L$  satisfazendo (2.6), pela Definição (2.1.3),  $L$  é uma transformação linear  $\sigma$ -reversível.

## 2.2 Prova de alguns resultados importantes

Seja  $H$  um subgrupo, de índice 2 de um grupo  $G$  e  $\sigma : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o homomorfismo tal que  $\ker \sigma = H$ .

Identifique  $\mathbb{Z}_2$  como o subgrupo de  $GL(1; \mathbb{R})$  é isomorfo a  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\mathbb{Z}_2$  é isomorfo a  $\{-1, 1\}$  e portanto  $\sigma : G \rightarrow GL(1; \mathbb{R})$  como uma representação unidimensional  $(\mathbb{R}, \sigma)$ , que chamaremos de representação sinal do

par  $(G, H)$ .

Sejam  $\phi \in GL_G(V)$  e  $L \in gl_\sigma(V)$ . Para  $g \in G$  e  $v \in V$  temos que

$$\begin{aligned}
 (\phi^{-1} \circ L \circ \phi)(\rho(g)v) &= \phi^{-1}(L(\rho(g)\phi(v))) \\
 &= \phi^{-1}(\sigma(g)\rho(g)L\phi(v)) \\
 &= \sigma(g)\phi^{-1}(\rho(g)L\phi(v)) \\
 &= \sigma(g)\rho(g)\phi^{-1}(L\phi(v)) \\
 &= \sigma(g)\rho(g)\phi^{-1} \circ L \circ \phi(v),
 \end{aligned}$$

pois como  $\phi$  é equivariante temos que  $\phi^{-1}$  também o é.

Então,  $\phi^{-1} \circ L \circ \phi \in gl_\sigma(V)$ .

Portanto, a aplicação

$$\begin{aligned}
 \mu : GL_G(V) \times gl_\sigma(V) &\longrightarrow gl_\sigma(V) \\
 \mu(\phi, L) &\longmapsto \phi^{-1} \circ L \circ \phi,
 \end{aligned}$$

é uma ação de  $GL_G(V)$  sobre  $gl_\sigma(V)$ .

**Observação 2.2.1.** *Seja  $g \in G \setminus H$ . Durante o trabalho consideraremos a involução sobre o grupo  $GL_H(V)$  dada por*

$$\begin{aligned}
 \Sigma : GL_H(V) &\longrightarrow GL_H(V) \\
 \phi &\longmapsto \rho(g)^{-1}\phi\rho(g).
 \end{aligned}$$

Note que  $\Sigma$  independe da escolha de  $g \in G \setminus H$  e ainda  $\Sigma^2$  é a identidade,

$$\begin{aligned}
 \Sigma^2(\phi) &= \Sigma(\Sigma(\phi)) = \Sigma(\rho(g)^{-1}\phi\rho(g)) = \rho(g)^{-1}\rho(g)^{-1}\phi\rho(g)\rho(g) \\
 &= \rho(gg)^{-1}\phi\rho(gg) = \rho(gg)^{-1}\rho(gg)\phi = \phi, \text{ pois } gg \in H.
 \end{aligned}$$

Também denotaremos por  $\Sigma$  a involução sobre a álgebra  $gl_H(V)$ , dada por

$$\begin{aligned}\Sigma : gl_H(V) &\longrightarrow gl_H(V) \\ A &\longmapsto \rho(g)^{-1} A \rho(g).\end{aligned}$$

Algumas propriedades elementares desta involução estão resumidas na seguinte proposição.

**Proposição 2.2.1.** *1. O grupo  $GL_G(V)$  é o conjunto dos pontos fixos da ação  $\Sigma$  sobre  $GL_H(V)$ .*

*2. A restrição da ação adjunta de  $GL_H(V)$  sobre  $gl_H(V)$  para  $GL_G(V)$  preserva os subespaços*

$$\begin{aligned}gl_G(V) &= \{A \in gl_H(V) \mid \Sigma(A) = A\}, \\ gl_\sigma(V) &= \{A \in gl_H(V) \mid \Sigma(A) = -A\}.\end{aligned}$$

*3. A ação induzida de  $GL_G(V)$  sobre  $gl_G(V)$  é a ação adjunta.*

*4. O subespaço  $gl_\sigma(V)$  é um  $gl_G(V)$ -submódulo de  $gl_H(V)$ , ambos com respectiva estrutura de álgebra induzida pela composição e o produto dado pelo colchete de Lie.*

*5. Se existe uma função  $\sigma$ -reversível invertível  $T : V \longrightarrow V$ , então  $gl_\sigma(V)$  é gerado por  $T$  como um  $gl_G(V)$ -submódulo de  $gl_H(V)$  com a operação de composição.*

**Demonstração.**

1. Primeiramente observemos que a involução  $\Sigma : GL_H(V) \longrightarrow GL_H(V)$ , dada pela Observação (2.2.1), é uma ação de  $G$  sobre  $GL_H(V)$ .

De fato, pela Definição (1.3.3), temos que,

$$\begin{aligned}\psi : G \times GL_H(V) &\longrightarrow GL_H(V) \\ (g, \phi) &\longmapsto \rho(g)^{-1}\phi\rho(g),\end{aligned}$$

é uma ação de  $G$  sobre  $GL_H(V)$ . Como a restrição de uma ação é ainda uma ação e para cada  $g \in G \setminus H$  a aplicação  $\Sigma : GL_H(V) \longrightarrow GL_H(V)$  é uma restrição da aplicação  $\psi$  de  $G$  para  $G \setminus H$ , temos que  $\Sigma$  é uma ação.

Considere  $A = \{\phi \in GL_H(V) \mid \Sigma(\phi) = \phi\}$  o conjunto dos pontos fixos de  $\Sigma$ .

Seja  $\phi \in A$ , logo

$$\begin{aligned}\Sigma(\phi) = \phi &\iff \rho(g)^{-1}\phi\rho(g) = \phi \\ &\iff \phi\rho(g) = \rho(g)\phi, \forall g \in G \setminus H.\end{aligned}$$

Se  $g \in H$  então  $\phi\rho(g) = \rho(g)\phi$ , pois  $\phi \in GL_H(V)$ .

Então, para qualquer  $g \in G$  temos que  $\phi\rho(g) = \rho(g)\phi$ , isto é,  $\phi \in GL_G(V)$  e portanto  $A \subset GL_G(V)$ .

Seja  $\theta \in GL_G(V)$ , logo

$$\theta\rho(g) = \rho(g)\theta, \forall g \in G.$$

Em particular para  $g \in G \setminus H$ ,

$$\begin{aligned}\theta\rho(g) = \rho(g)\theta &\implies \theta = \rho(g)^{-1}\theta\rho(g) = \Sigma(\theta) \\ &\implies \Sigma(\theta) = \theta \\ &\implies GL_G(V) \subset A.\end{aligned}$$

Portanto,  $GL_G(V)$  é o conjunto dos pontos fixos da ação  $\Sigma$  sobre  $GL_H(V)$ .

2. Observe que  $\mathcal{A} = gl_H(V)$ ,  $\mathcal{A}_+ = gl_G(V)$  e  $\mathcal{A}_- = gl_\sigma(V)$ .

De fato, temos que  $gl_H(V)$  é um espaço vetorial com a operação produto dada pela composição, onde para qualquer  $T_1, T_2 \in gl_H(V)$ ,  $g \in H$ ,  $v \in V$  temos

$$T_1 \circ T_2(\rho(g)v) = T_1(\rho(g)T_2(v)) = \rho(g)T_1 \circ T_2(v),$$

ou seja,  $T_1 \circ T_2 \in gl_H(V)$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} T \in gl_G(V) \subset gl_H(V) &\implies T(\rho(g)v) = \rho(g)T(v), \forall g \in G, v \in V \\ &\implies T(v) = \rho^{-1}(g)T(v)\rho(g), \forall g \in G, v \in V \\ &\implies T(v) = \Sigma(T(v)), \forall g \in G \setminus H, v \in V \\ &\implies T \in \mathcal{A}_+. \end{aligned}$$

Logo,  $gl_G(V) \subset \mathcal{A}_+$ .

Seja  $A \in \mathcal{A}_+$ , então  $\Sigma(A) = A$  e  $A \in gl_H(V)$ .

Por definição para todo  $g \in G \setminus H$ ,  $\Sigma(A) = \rho^{-1}(g)A\rho(g)$ , assim

$$\begin{aligned} A = \rho^{-1}(g)A\rho(g) &\implies A\rho(g) = \rho(g)A, \forall g \in G \setminus H \\ &\implies A \in gl_G(V), \forall g \in G \setminus H. \end{aligned}$$

Se  $g \in H$ , como  $A \in gl_H(V)$ , então  $A\rho(g) = \rho(g)A$ .

Então, para todo  $g \in G$  temos que  $A \in gl_G(V)$  e assim  $\mathcal{A}_+ \subset gl_G(V)$ .

Portanto,  $\mathcal{A}_+ = gl_G(V)$ .

Temos também

$$\begin{aligned}
T \in gl_\sigma(V) \subset gl_H(V) &\implies T(\rho(g)v) = \sigma(g)\rho(g)T(v), \forall g \in G, v \in V \\
&\implies \sigma(g)T(v) = \rho^{-1}(g)T(v)\rho(g), \forall g \in G, v \in V \\
&\implies -T(v) = \rho^{-1}(g)T(v)\rho(g), \forall g \in G \setminus H, v \in V \\
&\implies \Sigma(T(v)) = -T(v), \forall g \in G \setminus H, v \in V \\
&\implies T \in \mathcal{A}_- \\
&\implies gl_\sigma(V) \subset \mathcal{A}_-.
\end{aligned}$$

Seja  $B \in \mathcal{A}_-$ , então  $\Sigma(B) = -B$  e  $B \in gl_H(V)$ .

Se  $g \in G \setminus H$ , por definição

$$\begin{aligned}
\Sigma(B) = \rho^{-1}(g)B\rho(g) &\implies -B = \rho^{-1}(g)B\rho(g) \\
&\implies B\rho(g) = -\rho(g)B.
\end{aligned}$$

Se  $g \in H$ , como  $B \in gl_H(V)$ , então  $B\rho(g) = \rho(g)B$  para qualquer  $g \in H$ .

Assim,  $B\rho(g) = \sigma(g)\rho(g)B$  para qualquer  $g \in G$ , logo,  $A \in gl_\sigma(V)$ , ou seja,  $\mathcal{A}_- \subset gl_\sigma(V)$ .

Portanto,  $\mathcal{A}_- = gl_\sigma(V)$ .

Considerando  $G = GL_H(V)$ , pelo item 1.,  $G_+ = GL_G(V)$ .

Portanto, a demonstração deste item, segue imediatamente da Proposição (1.3.1).

3. Segue diretamente do item 2. da Proposição (1.3.1), considerando  $G_+ = GL_G(V)$  e  $\mathcal{A}_+ = gl_G(V)$ .
4. Segue do item 4. da Proposição (1.2.2).
5. Devemos mostrar que  $gl_\sigma(V) = \langle T \rangle$ , pela operação de composição, isto é, dado  $T \in gl_\sigma(V)$ , invertível e qualquer  $S \in gl_\sigma(V)$  temos que

$S = A \circ T$ , onde  $A \in gl_G(V)$ .

De fato, observe que como  $S$  e  $T$  são funções  $\sigma$ -reversíveis e  $T$  é invertível, então para  $g \in G, v \in V$  temos que

$$T(\rho(g)v) = \sigma(g)\rho(g)T(v) \implies \rho(g)v = \sigma(g)T^{-1}(\rho(g)T(v)),$$

ou ainda

$$T^{-1}(\rho(g)T(v)) = \sigma(g)\rho(g)v = \sigma(g)\rho(g)T^{-1}(T(v)).$$

Portanto,  $T^{-1}$  é  $\sigma$ -reversível. Assim,

$$\begin{aligned} S \circ T^{-1}(\rho(g)v) &= S(\sigma(g)\rho(g)T^{-1}(v)) = \sigma(g)S(\rho(g)T^{-1}(v)) \\ &= \sigma(g)\sigma(g)\rho(g)S \circ T^{-1}(v) = \rho(g)S \circ T^{-1}(v). \end{aligned}$$

Portanto,  $S \circ T^{-1}$  é  $G$ -equivariante.

Então,

$$S = (S \circ T^{-1}) \circ T \implies S \in \langle T \rangle \implies gl_\sigma(V) \subset \langle T \rangle.$$

Mas se  $A \in \langle T \rangle$ , então  $A = B \circ T$ , onde  $B \in gl_G(V)$ .

$$\begin{aligned} A(\rho(g)v) &= B \circ T(\rho(g)v) = B(\sigma(g)\rho(g)T(v)) = \sigma(g)B(\rho(g)T(v)) \\ &= \sigma(g)\rho(g)B \circ T(v) = \sigma(g)\rho(g)A(v). \end{aligned}$$

Então,  $A \in gl_\sigma(V)$  e assim segue que  $\langle T \rangle \subset gl_\sigma(V)$ .

Portanto,  $gl_\sigma(V) = \langle T \rangle$ .

■

**Observação 2.2.2.** Pelas Proposições (1.2.2) e (2.2.1) temos que  $gl_H(V) = gl_G(V) \oplus gl_\sigma(V)$ .

## 2.3 Representações Irredutíveis de $G$

**Definição 2.3.1.** *Seja  $(U, \tau)$  uma representação do grupo  $G$  sobre  $U$ . Definimos a sua representação  $\sigma$ -dual, denotada por  $(U, \tau_\sigma)$ , como o homomorfismo  $\tau_\sigma : G \longrightarrow GL(U)$  dado por*

$$\tau_\sigma(g) = \sigma(g)\tau(g).$$

Equivalentemente  $(U, \tau_\sigma)$  é o produto tensorial (sobre  $\mathbb{R}$ ) de  $(U, \tau)$  com a representação sinal  $(\mathbb{R}, \sigma)$ , ou seja, as representações  $(U, \tau_\sigma)$  e  $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} U, \sigma \otimes_{\mathbb{R}} \tau)$  são isomorfas.

De fato, seja a aplicação linear invertível

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} U \\ u &\longmapsto 1 \otimes_{\mathbb{R}} u. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(\tau_\sigma(g)u) &= f(\sigma(g)\tau(g)u) = \sigma(g)f(\tau(g)u) \\ &= \sigma(g)(1 \otimes_{\mathbb{R}} \tau(g)u) \end{aligned} \tag{2.7}$$

e

$$\begin{aligned} (\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \tau)(g)f(u) &= (\sigma(g) \otimes_{\mathbb{R}} \tau(g))f(u) = (\sigma(g) \otimes_{\mathbb{R}} \tau(g))(1 \otimes_{\mathbb{R}} u) \\ &= (\sigma(g)1) \otimes_{\mathbb{R}} (\tau(g)u) = \sigma(g)(1 \otimes_{\mathbb{R}} \tau(g)u). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Portanto, de (2.7) e (2.8) segue que  $(U, \tau_\sigma)$  é o produto tensorial (sobre  $\mathbb{R}$ ) de  $(U, \tau)$  com a representação sinal  $(\mathbb{R}, \sigma)$ .

Observe que uma função  $\sigma$ -reversível  $T : U \longrightarrow U$  pode ser considerada também uma função  $G$ -equivariante em relação às representações  $(U, \tau)$  e sua

$\sigma$ -dual, pois

$$\begin{aligned} T \in gl_\sigma(U) &\implies T(\rho(g)u) = \sigma(g)\rho(g)T(u), \forall g \in G, u \in U \\ &\implies T(\rho(g)u) = \rho_\sigma(g)T(u), \forall g \in G, u \in U \\ &\implies T \text{ é } G\text{-equivariante.} \end{aligned}$$

**Proposição 2.3.1.** *Se duas representações são isomorfas, então suas  $\sigma$ -duais também o são.*

**Demonstração.**

Sejam  $(V_1, \rho_1)$  e  $(V_2, \rho_2)$  duas representações de  $G$  isomorfas, então existe  $f : V_1 \longrightarrow V_2$  linear, invertível tal que  $f(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)f(v)$ , para todo  $g \in G, v \in V_1$ . Assim

$$\begin{aligned} f((\rho_1)_\sigma(g)v) &= f(\sigma(g)\rho_1(g)v) = \sigma(g)f(\rho_1(g)v) = \sigma(g)\rho_2(g)f(v) \\ &= (\rho_2)_\sigma(g)f(v) \implies (V_1, (\rho_1)_\sigma) \cong (V_2, (\rho_2)_\sigma). \end{aligned}$$

■

Considere a representação  $(U, \tau_\sigma)$ . Temos pela Definição (2.3.1) que o homomorfismo  $(\tau_\sigma)_\sigma : G \longrightarrow GL(U)$  dado por

$$\begin{aligned} (\tau_\sigma)_\sigma(g) &= \sigma(g)(\tau_\sigma)(g) = \sigma(g)\sigma(g)\tau(g) \\ &= \sigma(gg)\tau(g) = \tau(g), \end{aligned}$$

é a representação  $\sigma$ -dual de  $(U, \tau_\sigma)$ , logo, a  $\sigma$ -dual de  $(U, \tau_\sigma)$  é  $(U, \tau)$ . Temos, então que o operador  $(U, \tau) \longmapsto (U, \tau_\sigma)$ , que leva uma representação à sua  $\sigma$ -dual define uma involução sobre o conjunto de todas as classes de isomorfismos de representações de  $G$ .

**Definição 2.3.2.** *Seja  $(U, \tau)$  uma representação de um grupo  $G$ . Dizemos  $(U, \tau)$  é uma representação  $\sigma$ -auto dual se  $(U, \tau_\sigma)$  é isomorfo a  $(U, \tau)$ .*

Considere o automorfismo sobre a álgebra  $gl_H(U)$ , dado por

$$\begin{aligned}\alpha : gl_H(U) &\longrightarrow gl_H(U) \\ A &\longmapsto SAS^{-1},\end{aligned}$$

onde  $S : U \longrightarrow U$  é a função invertível que torna a representação  $(U, \tau)$   $\sigma$ -auto dual.

Observe que  $\alpha(S) = SSS^{-1} = S$ , para qualquer  $S \in gl_H(U)$  e  $\alpha$  restrito à uma álgebra  $gl_G(U)$  que é isomorfo a  $\mathbb{K}$ , é ainda um automorfismo. Este automorfismo induzido de  $\mathbb{K}$  será denotado também por  $\alpha$ .

**Lema 2.3.1.** *Seja  $(U, \tau)$  uma representação de  $G$  do tipo  $\mathbb{K}$ ,  $\sigma$ -auto dual. Considere  $S : U \longrightarrow U$  a transformação linear que torna  $(U, \tau)$  isomorfo a  $(U, \tau_\sigma)$ . Então,*

1.  $S : U \longrightarrow U$  é semilinear com respectivo automorfismo  $\alpha$ .
2.  $S^2 = kI$  para algum  $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  com  $\alpha(k) = k$ .

**Demonstração.**

1. Segue imediatamente da definição de  $\alpha$ , pois

$$\alpha(k)S \circ I = (SkS^{-1})(S \circ I) = (Sk) \circ I = S \circ (kI).$$

Portanto,  $S(ku) = \alpha(k)S(u)$  para qualquer  $u \in U, k \in \mathbb{K}$ .

2. Observemos, primeiramente, que  $S^2 \in GL_G(U)$ , com relação a representação  $(U, \tau)$  e sua  $\sigma$ -dual.

De fato, seja  $g \in G, v \in U$ , da hipótese temos

$$S(\tau(g)v) = \tau_\sigma(g)S(v) = \sigma(g)\tau(g)S(v).$$

Aplicando  $S$  na igualdade segue que

$$\begin{aligned} S^2(\tau(g)v) &= S(\sigma(g)\tau(g)S(v)) = \sigma(g)S(\tau(g)S(v)) \\ &= \sigma(g)\tau_\sigma(g)S^2(v) = \sigma(g)\sigma(g)\tau(g)S^2(v) \\ &= \tau(g)S^2(v) \implies S^2(\tau(g)v) = \tau(g)S^2(v), \forall g \in G, v \in U. \end{aligned}$$

Mas

$$S^2 \in GL_G(U) \subset gl_G(U) \cong \mathbb{K} \cong \mathbb{K}I,$$

logo,  $S^2 = kI$ , para algum  $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

Aplicando  $\alpha$  na igualdade  $S^2 = kI$  obtemos que  $\alpha(k) = k$ , como queríamos.

■

**Proposição 2.3.2.** *Uma representação  $(U, \tau)$  de  $G$  é irredutível do tipo  $\mathbb{K}$  se, e somente se, sua representação  $\sigma$ -dual  $(U, (\tau)_\sigma)$  é irredutível do tipo  $\mathbb{K}$ .*

**Demonstração.**

Afirmamos que,  $I_G((U, \tau), (U, \tau)) = I_G((U, \tau_\sigma), (U, \tau_\sigma))$ . De fato,

$$\begin{aligned} f \in I_G((U, \tau), (U, \tau)) &\iff f(\tau(g)v) = \tau(g)f(v), \forall g \in G, v \in U \\ &\iff \sigma(g)f(\tau(g)v) = \sigma(g)\tau(g)f(v), \forall g \in G, v \in U \\ &\iff f(\sigma(g)\tau(g)v) = \sigma(g)\tau(g)f(v), \forall g \in G, v \in U \\ &\iff f(\tau_\sigma(g)v) = \tau_\sigma(g)f(v), \forall g \in G, v \in U \\ &\iff f \in I_G((U, \tau_\sigma), (U, \tau_\sigma)). \end{aligned}$$

Portanto, desta igualdade temos  $(U, \tau)$  do tipo  $\mathbb{K}$  se, e somente se, sua representação  $\sigma$ -dual  $(U, \tau_\sigma)$  é do tipo  $\mathbb{K}$ .

Suponhamos que  $(U, \tau_\sigma)$  é irredutível do tipo  $\mathbb{K}$ .

Sejam  $V$  um subespaço vetorial de  $U$  e  $g \in G$  tal que  $\tau(g)V \subset V$ , para todo  $g \in G$ .

Em particular,  $\tau(g)V \subset V$  para qualquer  $g \notin H$ , então  $-\tau(g)V \subset V$  para qualquer  $g \notin H$  e como  $\tau(g)V \subset V$  para qualquer  $g \in H$ , segue que

$$\begin{aligned} \sigma(g)\tau(g)V \subset V, \forall g \in G &\implies \tau_\sigma(g)V \subset V, \forall g \in G \\ &\implies V = \{0\} \quad \text{ou} \quad V = U, \end{aligned}$$

pois  $(U, \tau_\sigma)$  é irredutível. Portanto,  $(U, \tau)$  é irredutível.

É trivial verificar que se  $(U, \tau)$  é irredutível, então  $(U, \tau_\sigma)$  também é irredutível.

■

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $(U, \tau)$  uma representação irredutível de  $G$  do tipo  $\mathbb{K}$ . Então, as seguintes propriedades são equivalentes*

1. *A representação  $(U, \tau)$  é  $\sigma$ -auto dual.*
2. *Existe uma função linear  $T : U \longrightarrow U$   $\sigma$ -reversível não nula.*
3. *Existe uma função linear  $T : U \longrightarrow U$   $\sigma$ -reversível, invertível satisfazendo um dos seguintes conjuntos de condições,*

- (a)  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é  $\mathbb{R}$ -linear e  $T^2 = I$ .
- (b)  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é  $\mathbb{R}$ -linear e  $T^2 = -I$ .
- (c)  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $T$  é  $\mathbb{C}$ -linear e  $T^2 = I$ .
- (d)  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $T$  é  $\bar{\mathbb{C}}$ -linear e  $T^2 = I$ .
- (e)  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $T$  é  $\bar{\mathbb{C}}$ -linear e  $T^2 = -I$ .
- (f)  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ,  $T$  é  $\mathbb{H}$ -linear e  $T^2 = I$ .
- (g)  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ,  $T$  é  $\mathbb{H}$ -linear e  $T^2 = -I$ .

*E ainda, se  $(U, \tau)$  é  $\sigma$ -auto dual e  $T : U \longrightarrow U$   $\sigma$ -reversível, invertível, então  $gl_\sigma(U)$  é gerado como um módulo sobre  $gl_G(U)$  por  $T$ .*

**Demonstração.**

3)  $\implies$  2) É imediato, tendo em vista que  $T^2 = \pm I$  por hipótese, segue que  $T$  é não nula.

2)  $\implies$  1) Suponhamos que a representação  $(U, \tau)$  não seja  $\sigma$ -auto dual.

Então, como  $(U, \tau)$  e  $(U, \tau_\sigma)$  são irredutíveis, pelo Lema de Schur, temos que

$$I_G((U, \tau), (U, \tau_\sigma)) = \{0\},$$

ou seja, para qualquer  $f : U \longrightarrow U$  linear, tal que

$$f(\tau(g)u) = \tau_\sigma(g)f(u), \forall g \in G, u \in U, \quad (2.9)$$

segue que  $f \equiv 0$ .

Mas observe que  $f$  satisfazendo (2.9) teremos que  $f$  é  $\sigma$ -reversível.

Então, concluímos que qualquer função  $f : U \longrightarrow U$   $\sigma$ -reversível é nula, absurdo, pois contraria a hipótese.

Potanto,  $(U, \tau)$  é  $\sigma$ -auto dual.

1)  $\implies$  3) Por hipótese,  $(U, \tau)$  é isomorfo a  $(U, \tau_\sigma)$ , então existe  $S : U \longrightarrow U$  linear, invertível tal que  $S(\tau(g)u) = \tau_\sigma(g)S(u)$ , para qualquer  $g \in G, u \in U$ .

Assim segue que  $S$  é  $\sigma$ -reversível. Tome  $T = \phi \circ S$ , para algum  $\phi \in GL_G(U)$ .

Afirmamos que  $T : U \longrightarrow U$  é  $\sigma$ -reversível e invertível.

De fato,  $T$  é invertível pois  $\phi$  e  $S$  são invertíveis. Sejam  $g \in G, u \in U$

$$\begin{aligned} T(\tau(g)u) &= \phi \circ S(\tau(g)u) = \phi(S(\tau(g)u)) \\ &= \phi(\sigma(g)\tau(g)S(u)) = \sigma(g)\phi(\tau(g)S(u)) \\ &= \sigma(g)\tau(g)\phi(S(u)) = \sigma(g)\tau(g)\phi \circ S(u), \text{ pois } \phi \in GL_G(U). \end{aligned}$$

Portanto,  $T$  é  $\sigma$ -reversível e invertível, assim provamos a existência da  $T$ .

Mostremos agora que  $\phi$  pode ser escolhido de modo que  $T$  satisfaça um dos conjuntos de condições do item 3. do teorema.

Usando a estrutura de espaço  $\mathbb{K}$ -vetorial sobre  $U$  induzido do isomorfismo de  $gl_G(U)$  com  $\mathbb{K}$ , as funções  $\phi$  podem ser dadas por  $\phi = k'I$ , para  $k' \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , pois

$$\phi \in GL_G(U) \subset gl_G(U) \cong \mathbb{K} \cong \mathbb{K}I.$$

Logo

- i) Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , pela Proposição (1.2.1) e o lema anterior,  $\alpha$  deve ser o automorfismo identidade. Observe que

$$\begin{aligned} T^2 = \pm I &\implies \pm I = (\phi \circ S)^2 = ((k'I) \circ S)^2, k' \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \\ &\implies \pm I = (k')^2(I \circ S)^2 = (k')^2(I \circ S)(I \circ S) = (k')^2(I \circ S^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mas  $S^2 = kI$ , para algum  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\alpha(k) = k$  e isto já ocorre pois  $\alpha = Id_{\mathbb{R}}$ . Então, em (2.10) segue que

$$\begin{aligned} \pm I = (k')^2(I \circ S^2) &= (k')^2(I \circ kI) = (k')^2kI \implies (k')^2k = \pm 1 \\ &\implies k' = |k|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $T = \phi \circ S$  com  $\phi = |k|^{-\frac{1}{2}}I$  para algum  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , onde  $T$  é  $\mathbb{R}$ -linear e  $T^2 = \pm I$ .

- ii) Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , pela Proposição (1.2.1),  $\alpha$  pode ser o automorfismo identidade ou a conjugação complexa.

No caso de  $\alpha$  ser a identidade, pelo mesmo processo do item i), temos que  $T = \phi \circ S$  onde  $\phi = k^{-\frac{1}{2}}I$ , para algum  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . E ainda  $T$  é  $\mathbb{C}$ -linear e  $T^2 = I$ .

Quando  $\alpha$  é a conjugação complexa, pelo lema anterior,  $S^2 = kI$ , para algum  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e

$$\alpha(k) = k \implies \bar{k} = k \implies k \in \mathbb{R},$$

e assim nos restringimos ao caso i) novamente.

Observe que  $T$  é  $\overline{\mathbb{C}}$ -linear, pois seja  $u \in U, \beta \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} T(\beta u) &= (\phi \circ S)(\beta u) = \phi(S(\beta u)) = \phi(\overline{\beta}S(u)) = \overline{\beta}(\phi \circ S)(u) \\ &= \overline{\beta}T(u) = \alpha(\beta)T(u) \implies T(\beta u) = \alpha(\beta)T(u). \end{aligned}$$

iii) Se  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ , então pela Proposição (1.2.1), existe  $q \in \mathbb{H}$  invertível tal que para qualquer  $r \in \mathbb{H}$  temos  $\alpha(r) = q^{-1}rq$ , onde  $\alpha$  é o automorfismo sobre  $\mathbb{H}$ . Ou ainda,  $\alpha(r) = qrq^{-1}$ .

Tome  $T' = q^{-1}I \circ S$ .

Observe que para todo  $r \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} T' \circ rI &= (q^{-1}I \circ S) \circ (rI) = q^{-1}I \circ S(rI) \\ &= q^{-1}I \circ (\alpha(r)S \circ I) = q^{-1}I \circ (\alpha(r)I \circ S) \\ &= q^{-1}I(qrq^{-1})I \circ S = q^{-1}qIrq^{-1}I \circ S \\ &= Irq^{-1}I \circ S = rI \circ T'. \end{aligned}$$

Logo,  $T'$  é  $\mathbb{H}$ -linear. A composição  $(T')^2$  é também  $\mathbb{H}$ -linear e ainda

$$\begin{aligned} (T')^2 &= (q^{-1}I \circ S)^2 = (q^{-1}I \circ S) \circ (q^{-1}I \circ S) \\ &= q^{-1}I \circ S(q^{-1}I \circ S) = q^{-1}I(\alpha(q^{-1})S \circ I \circ S) \\ &= q^{-1}I((qq^{-1}q^{-1})S \circ I \circ S) = q^{-1}Iq^{-1}S \circ I \circ S. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T')^2 &= q^{-2}(I \circ S) \circ (I \circ S) = q^{-2}(I \circ S)^2 \\ &= q^{-2}(I \circ S^2) \in GL_G(U) \subset gl_G(U),\end{aligned}$$

pois como vimos na demonstração do Lema (2.3.1),  $S^2 \in GL_G(U)$ .

Então, como  $gl_G(U)$  é isomorfo a  $\mathbb{H}$  que por sua vez é isomorfo a  $\mathbb{H}I$ , segue que  $(T')^2 = cI$ , para algum  $c \in \mathbb{H}$ .

Mas  $(T')^2$  é  $\mathbb{H}$ -linear, ou seja,

$$\begin{aligned}(T')^2 \circ rI &= rI \circ (T')^2 \implies (cI) \circ (rI) = (rI) \circ (cI) \\ &\implies crI = rcI \\ &\implies cr = rc, \forall r \in \mathbb{H} \text{ e para algum } c \in \mathbb{H} \\ &\implies c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Portanto, tomemos  $\phi = |c|^{\frac{-1}{2}} q^{-1} \circ I$  e assim

$$\begin{aligned}T &= \phi \circ S = |c|^{\frac{-1}{2}} q^{-1} \circ I \circ S \\ &= |c|^{\frac{-1}{2}} \circ I q^{-1} \circ I \circ S \\ &= |c|^{\frac{-1}{2}} I \circ T',\end{aligned}$$

onde  $T$  é  $\mathbb{H}$ -linear e

$$\begin{aligned}T^2 &= (|c|^{\frac{-1}{2}} I \circ T')^2 = (|c|^{\frac{-1}{2}} I \circ T')(|c|^{\frac{-1}{2}} I \circ T') \\ &= |c|^{\frac{-1}{2}} I (\alpha(|c|^{\frac{-1}{2}}) T' \circ I \circ T') = |c|^{\frac{-1}{2}} q |c|^{\frac{-1}{2}} q^{-1} T' \circ I \circ T' \\ &= |c|^{-1} I \circ (T')^2 = |c|^{-1} IcI = \pm I.\end{aligned}$$

■

Os resultados do Teorema (2.3.1) e do próximo corolário são resumidos

na seguinte tabela, onde as siglas NSD e SD significam que a representação irredutível dada é não  $\sigma$ -auto dual ou  $\sigma$ -auto dual, respectivamente.

|       | $gl_G(U)$    | $gl_H(U)$                      | $T$                                             | $T^2$ | $\alpha$           | $\Sigma(L)$   |
|-------|--------------|--------------------------------|-------------------------------------------------|-------|--------------------|---------------|
| NSD-R | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$                   | —                                               | —     | —                  | $L$           |
| NSD-C | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$                   | —                                               | —     | —                  | $L$           |
| NSD-H | $\mathbb{H}$ | $\mathbb{H}$                   | —                                               | —     | —                  | $L$           |
| SD-RR | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ | (1,-1)                                          | I     | $\mathbb{R}$       | $(L_1, -L_2)$ |
| SD-CC | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ | (1,-1)                                          | I     | $\mathbb{C}$       | $(L_1, -L_2)$ |
| SD-HH | $\mathbb{H}$ | $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ | (1,-1)                                          | I     | $\mathbb{H}$       | $(L_1, -L_2)$ |
| SD-RC | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{C}$                   | $i$                                             | -I    | $\mathbb{R}$       | $\bar{L}$     |
| SD-CR | $\mathbb{C}$ | $gl(2; \mathbb{R})$            | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | I     | $\bar{\mathbb{C}}$ | $-iLi$        |
| SD-CH | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{H}$                   | $j$                                             | -I    | $\bar{\mathbb{C}}$ | $L^\sharp$    |
| SD-HC | $\mathbb{H}$ | $gl(2; \mathbb{C})$            | $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  | -I    | $\mathbb{H}$       | $-j\bar{L}j$  |

Tabela 2.1: Classificação das Representações Irredutíveis de um Grupo de Lie Compacto  $G$  e suas restrições para um subgrupo  $H$  de índice 2.

**Corolário 2.3.1.** *Seja  $(U, \tau)$  uma representação irredutível de  $G$  do tipo  $\mathbb{K}$ . Então,*

1. *A álgebra  $gl_H(U)$  é isomorfa a uma das 10 álgebras listadas na coluna 3 da Tabela (2.1).*
2. *Sobre este isomorfismo, nos casos  $\sigma$ -auto dual, o subespaço  $gl_\sigma(U)$  é gerado como um módulo sobre  $gl_G(U)$  pela função  $T$  mostrada na coluna 4 da Tabela (2.1).*
3. *Sobre o isomorfismo de 1., o automorfismo  $\Sigma : gl_H(U) \longrightarrow gl_H(U)$  é isomorfo à aqueles listados na coluna 7 da Tabela (2.1).*

**Demonstração.**

Temos que  $gl_H(U) = gl_G(U) \oplus gl_\sigma(U)$  pela Observação (2.2.2), considerando  $gl_H(U) = \mathcal{A}$ ,  $gl_G(U) = \mathcal{A}_+$  e  $gl_\sigma(U) = \mathcal{A}_-$ .

Se  $(U, \tau)$  não é  $\sigma$ -auto dual, então pelo Teorema (2.3.1)  $gl_\sigma(U) = \{0\}$ . Logo,  $gl_H(U) = gl_G(U)$ . Neste caso o item 1 está provado.

Se  $(U, \tau)$  é  $\sigma$ -auto dual, então pelo Teorema (2.3.1)  $gl_H(U)$  é gerado por  $gl_G(U)$  e alguma função invertível,  $\sigma$ -reversível  $T : U \longrightarrow U$ .

Escolhemos  $T$  para ter as propriedades especificadas no item 3. do Teorema (2.3.1). Para cada um dos sete casos  $\sigma$ -auto dual define um isomorfismo da álgebra  $gl_H(U)$  para a álgebra mostrada na coluna 3 da Tabela (2.1), usando o isomorfismo dado por hipótese e  $T$  como o elemento na coluna 4.

Por exemplo, no caso SD-CR temos o isomorfismo entre as álgebras  $gl_H(U)$  e  $gl(2; \mathbb{R})$ .

De fato, consideremos  $S \in gl_H(U)$ . Como  $gl_H(U) = gl_G(U) \oplus gl_\sigma(U)$ , temos que  $S = L_1 \oplus L_2 T$  tal que  $L_1, L_2 \in gl_G(U)$ .

Mas  $gl_G(U)$  é isomorfo a  $\mathbb{C}$ , logo  $L_1$  e  $L_2$  são dados pelas matrizes

$$L_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

onde  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ .

Então, para  $T = (1, -1)$ , da coluna 4 da Tabela (2.1), segue que

$$\begin{aligned} S = L_1 \oplus L_2 T &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 - b_2 \\ -b_1 - b_2 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} \in gl(2, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que  $gl_H(U)$  é isomorfo a  $gl(2; \mathbb{R})$ .

Facilmente verifica-se que este é um isomorfismo. Procedendo desta forma, obtemos os demais isomorfismo da coluna 3 da Tabela (2.1). Assim provamos o item 1. do corolário. O item 2. segue diretamente do Teorema (2.3.1).

Note que o automorfismo  $\Sigma : gl_H(U) \longrightarrow gl_H(U)$  é unicamente determinado pelas condições que ele é identidade sobre  $gl_G(U)$  e satisfaz  $\Sigma(T) = -T$ . Facilmente verificamos que os automorfismos listados na coluna 7 da Tabela (2.1) têm estas propriedades.

■

**Observação 2.3.1.** *Em alguns dos casos é possível escolher o gerador  $T$  de  $gl_\sigma(U)$  para ter diferentes propriedades daquelas dadas no Teorema (2.3.1) e na Tabela (2.1).*

Em geral, sejam  $(U, \tau)$  uma representação  $\sigma$ -auto dual irredutível de  $G$  do tipo  $\mathbb{K}$  e  $T$  um gerador de  $gl_\sigma(U)$ . Então  $T' = kI \circ T$ , para algum  $k \in \mathbb{K}$  onde  $\mathbb{K}$  é isomorfo a  $gl_G(U)$  também é gerador de  $gl_\sigma(U)$ .

Se  $T$  é semilinear com um respectivo automorfismo  $\alpha$  de  $\mathbb{K}$ , então

$$(T')^2 = (kI \circ T)^2 = (kI \circ T)(kI \circ T) = (kI \circ \alpha(k)T \circ I \circ T) = k\alpha(k)T^2.$$

$$\text{Assim, } (T')^2 = k\alpha(k)T^2.$$

E ainda  $T'$  é semilinear com relação ao automorfismo  $\gamma : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\gamma = \varphi \circ \alpha$ , onde  $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$  é dada por  $\varphi(a) = ak$ , para o mesmo  $k \in \mathbb{K}$  que se define  $T'$ .

De fato

$$\begin{aligned} T'(\beta u) &= (kI \circ T)(\beta u) = kI(\alpha(\beta)T(u)) \\ &= k\alpha(\beta)I \circ T(u) = k\alpha(\beta)T(u) \\ &= \gamma(\beta)T(u), \forall u \in U, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Consideramos as possíveis formas alternativas para  $T$  obtidas por tomar  $k$  com  $k\alpha(k) = -1$ .

1. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , segue que  $k\alpha(k) = k^2 = -1$  o que é absurdo, pois  $k \in \mathbb{R}$ , assim não existem alternativas para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
2. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sempre temos  $\alpha$  como a identidade e  $k = i$ , pois suponhamos que  $\alpha$  é a conjugação complexa. Logo para  $k = a + bi \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} k\alpha(k) = k\bar{k} = -1 &\implies (a + bi)(a - bi) = -1 \\ &\implies a^2 + b^2 = -1, \text{ absurdo.} \end{aligned}$$

Portanto,  $\alpha$  é a identidade e como  $k^2 = -1$  temos que  $k = i$ .

Logo pela Tabela (2.1) segue que  $(U, \tau)$  é uma representação  $\sigma$ -auto dual de  $G$  do tipo SD-CC e, então pelo Teorema (2.3.1) o gerador  $T$  satisfaz  $T^2 = I$ . Assim,  $T$  pode ser substituído por um gerador  $\mathbb{C}$ -linear  $T'$ , satisfazendo

$$(T')^2 = k\alpha(k)T^2 = i^2T^2 = -T^2 = -I.$$

3. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  a condição  $k\alpha(k) = -1$  pode ser satisfeita em um número de caminhos. Por exemplo, se  $\alpha$  é a identidade, então  $k$  pode ser algum elemento de  $\mathbb{H}$  satisfazendo  $k^2 = -1$ . Em particular, tomando  $k = i$ , nos casos SD-HH e SD-HC, os geradores  $\mathbb{H}$ -lineares  $T$  satisfazendo  $T^2 = \pm I$  podem ser substituídos pelos geradores  $\mathbb{H}^\sharp$ -lineares  $T'$  satisfazendo  $(T')^2 = -T^2 = \mp I$ .

Pelo Teorema (2.3.1), Corolário (2.3.1) e a Tabela (2.1) classificamos as representações irredutíveis  $(U, \tau)$ , e assim o subespaço  $gl_\sigma(U)$  das transformações  $\sigma$ -reversíveis, que é gerado pela função  $T$  da coluna 4 da Tabela (2.1).

Veremos alguns exemplos que ilustram cada caso do Corolário (2.3.1).

**Exemplo 2.3.1.** *Seja  $G = \mathbb{D}_n = \{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}, R, R\theta, \dots, R\theta^{n-1}\}$  um grupo diedral de ordem  $2n$  gerado por  $\theta$  e  $R$ , com  $n \geq 3$ . Observe que as ordens de  $\theta$  e de  $R$  são  $n$  e  $2$ , respectivamente e  $\theta R = R\theta^{n-1}$ .*

Tome  $\theta$  como sendo uma simetria e  $R$  uma simetria reversível. Logo o subgrupo  $H$  de  $G$ , com índice 2, é o grupo cíclico de ordem  $n$  dado por  $H = \{e, \theta, \dots, \theta^{n-1}\} = \langle \theta \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ .

Seja a ação de  $G$  sobre  $U = \mathbb{R}^2$  dada como a rotação e reflexão simétrica de um polinômio regular de dimensão  $n$ , logo a representação dos geradores de

$D_n$  é dada por

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\operatorname{sen} \theta_n \\ \operatorname{sen} \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix},$$

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde  $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$  tal que  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $A \in gl_G(\mathbb{R}^2)$  dada por  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Assim como  $A\rho(g) = \rho(g)A$  para qualquer  $g \in G$ , segue

1. para  $g = \theta$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\operatorname{sen} \theta_n \\ \operatorname{sen} \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\operatorname{sen} \theta_n \\ \operatorname{sen} \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\text{ou seja, } b = c = 0 \text{ e assim } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

2. para  $g = R$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \implies a = d.$$

Então, segue que para  $A\rho(g) = \rho(g)A$ , para qualquer  $g \in D_n$ , temos que  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  tal que  $a \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $gl_G(\mathbb{R}^2)$  é isomorfo a  $\mathbb{R}$  e finalmente concluímos pelo Lema de Schur que  $\rho$  é uma representação do tipo  $\mathbb{R}$ .

Considere a restrição da representação de  $G$  sobre  $U$  para  $H$ , dada por  $\rho_H : H \longrightarrow GL(\mathbb{R}^2)$ .

Seja  $B \in gl_H(\mathbb{R}^2)$  dado por  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  onde  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ .

Analogamente, como  $B\rho_H(\theta) = \rho_H(\theta)B$  para qualquer  $h \in H$  segue que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

ou seja,  $y = -z$  e  $x = w$ .

Logo

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cong x + yi.$$

Portanto,  $gl_H(\mathbb{R}^2)$  é isomorfo a  $\mathbb{C}$  e assim  $(\mathbb{R}^2, \rho_H)$  é do tipo  $\mathbb{C}$ .

Vejamos que  $\rho$  é  $\sigma$ -auto dual.

De fato, sejam  $(\mathbb{R}^2, \rho_\sigma)$  sua representação  $\sigma$ -dual e  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  dada pela matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

i) se  $g \notin H$ , então  $\sigma(g) = -1$ .

$$\begin{aligned} f\rho(g) = \rho_\sigma(g)f &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\implies f = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) se  $g \in H$ , então  $\sigma(g) = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin(\theta_n) \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies b \sin \theta_n = -c \sin \theta_n \\ &\implies b = -c, \end{aligned}$$

pois se  $\sin\theta_n = 0$ , então  $\theta_n = k\pi$  como  $k \in \mathbb{Z}$  e neste caso  
 $\rho(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $\rho(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , ou seja,  $\mathbb{Z}_n \cong \langle I \rangle$  ou  
 $\mathbb{Z}_n \cong \langle -I \rangle$  o que é absurdo, pois  $n \geq 3$ .

Então, basta tomar  $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  para a representação  $(\mathbb{R}^2, \rho)$  ser  $\sigma$ -auto dual.

Portanto, este é um exemplo de uma representação SD-RC, no Teorema (2.3.1). O caso  $G = \mathbb{D}_4$  e  $H = \mathbb{Z}_4$ , no Exemplo (3.2), é o caso com  $n = 4$ .

**Exemplo 2.3.2.** Como no Exemplo (2.1.4), seja  $G = \mathbb{Z}_4$  que é isomorfo a  $\{1, -1, i, -i\} = \langle i \rangle$ , o grupo cíclico de ordem 4 agindo sobre  $\mathbb{R}^2$  pela rotações através de múltiplos de  $\frac{\pi}{2}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z}_4 &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ i &\longmapsto \rho(i), \end{aligned}$$

onde  $\rho(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Considere  $i$  uma simetria reversível. Então,  $H = \{-1, 1\}$  denota o subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

Temos, pela Álgebra Linear, que os únicos subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^2$  são os triviais e  $W_{ab} = \{(x, y) = (at, bt) \mid t \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ , ou seja, as retas que passam pela origem.

Suponhamos que  $\rho(g)W_{ab} \subset W_{ab}$ , para todo  $g \in \mathbb{Z}_4$ , logo como  $\mathbb{Z}_4 \cong \langle i \rangle$ , em particular para  $g = i$  temos que

$$\rho(i)W_{ab} \subset W_{ab} \implies \rho(i)w = \alpha w, \forall w \in W_{ab}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim para  $w = (at, bt), t \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned} \rho(i)w = \alpha w &\implies \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha at \\ \alpha bt \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha at \\ \alpha bt \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} (\alpha a + b)t = 0 \\ (\alpha b - a)t = 0 \end{cases} \\ &\implies t = 0 \text{ ou } (\alpha^2 + 1)a = 0. \end{aligned}$$

Mas  $t = 0$  é absurdo, pois  $\rho(i)w = \alpha w$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Então,  $(\alpha^2 + 1)a = 0$ , ou seja,  $a = 0$  pois  $\alpha^2 = -1$  é absurdo. Logo,

$$W = \{(0, bt) \mid t \in \mathbb{R}, b \neq 0\}.$$

Neste caso,  $\rho(g)W \not\subset W$  para qualquer  $g \in \mathbb{Z}_4$ , por exemplo,

$$\rho(i)W \subset \{(ct, 0) \mid t \in \mathbb{R} \text{ e } c \neq 0\} \not\subset W.$$

Portanto,  $\rho$  não admite subespaço  $G$ -invariante não trivial, ou seja,  $\rho$  é irredutível.

Sejam  $A \in gl(\mathbb{R}^2)$  dada pela matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} A\rho(i) = \rho(i)A &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cong a + ib \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Logo  $gl_G(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}$ , e portanto,  $\rho$  é do tipo  $\mathbb{C}$ .

Considere a restrição,  $(\mathbb{R}^2, \rho_H)$ , da representação  $(\mathbb{R}^2, \rho)$  ao subgrupo  $H$  de  $G$ .

Tome  $W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  um subespaço do  $\mathbb{R}^2$ . Observe que  $\rho(h)W \subset W$ , para qualquer  $h \in H$ , isto é,  $\mathbb{R}$  admite um subespaço  $H$ -invariante não trivial, então  $\rho_H$  não é irredutível.

Sejam  $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  $B = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  subespaços  $G$ -invariantes e as seguintes representações de  $H$

$$\begin{aligned} \rho_1 : H &\longrightarrow GL(A) & \text{e} & & \rho_2 : H &\longrightarrow GL(B) \\ -1 &\longmapsto [-1] & & & -1 &\longmapsto [-1] \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{R}^2 = A \oplus B$  segue que  $\rho_H = \rho_1 \oplus \rho_2$ , onde  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são representações irredutíveis isomorfas do tipo  $\mathbb{R}$ , logo  $\rho_H$  é do tipo  $\mathbb{R}$ .

Seja  $f \in gl_G(\mathbb{R}^2)$  dada pela matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f\rho(i) = \rho_\sigma(i) &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff f = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, tome  $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e teremos que  $(U, \rho)$  é  $\sigma$ -auto dual.

Portanto, este é um exemplo SD-CR, do Teorema (2.3.1).

**Exemplo 2.3.3.** *Sejam  $G = H \times \mathbb{Z}_2$  e  $(U, \tau_H)$  uma representação irredutível de  $H$  do tipo  $\mathbb{K}$ .*

Estenda esta, para duas representações não isomorfas de  $G$ , denotadas  $(U, \tau^+)$  e  $(U, \tau^-)$ , onde  $\mathbb{Z}_2$  age trivialmente sobre  $U$  e como  $-I$ , respectivamente. Isto é, para cada  $g = (h, z) \in G$

$$\begin{aligned} \tau_+(h, 1) &= \tau_H(h) & \text{e} & & \tau_+(h, -1) &= \tau_H(h), \\ \tau_-(h, 1) &= -\tau_H(h) & \text{e} & & \tau_-(h, -1) &= -\tau_H(h). \end{aligned}$$

Observe que se  $W$  é um subespaço vetorial de  $U$  tal que  $\tau_+(g)W \subset W$  para todo  $g \in G$ , segue que  $\tau_H(h)W \subset W$  para todo  $h \in H$ . Como por hipótese,  $\tau_H$  é irredutível temos que  $W = \{0\}$  ou  $W = U$ , logo  $\tau_+$ , analogamente  $\tau_-$ , é irredutível.

Seja  $g \in G$  e  $x \in U$ .

$$\begin{aligned} f\tau_+(g)(x) = \tau_+(g)f(x) &\implies f\tau_H(h)(x) = \tau_H(h)f(x), \forall h \in H \\ &\implies f \in \mathfrak{gl}_H(U) \cong \mathbb{K} \\ &\implies (U, \tau_+) \text{ é do tipo } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Suponha que exista  $f : U \longrightarrow U$  linear tal que  $f\tau_+(g)(u) = \tau_-(g)f(u)$ , para qualquer  $g \in G, u \in U$ .

Tome  $g = (e, -1) \in G$ . Assim

$$\begin{aligned} f(\tau_+(e, -1)u) = \tau_-(e, -1)f(u) &\iff f(\tau_H(e)u) = -\tau_H(e)f(u) \\ &\iff f(u) = -f(u) \\ &\iff f \equiv 0, \end{aligned}$$

logo  $f$  não é invertível e assim segue que  $\tau_+$  não é isomorfa a  $\tau_-$ .

Considere a representação  $(\tau_+)_{\sigma} : G \longrightarrow GL(U)$ . Logo para  $g = (h, z) \in G$  temos que

1. se  $g \in H$ , então

$$(\tau_+)_{\sigma}(g) = \tau_+(g) = \tau_H(h) = \tau_-(g),$$

ou seja,  $(\tau_+)_{\sigma}$  e  $\tau_-$  se coincidem pois ambas são extensão de  $\tau_H$ .

2. se  $g \notin H$ , então

$$(\tau_+)_{\sigma}(g) = -\tau_+(g) = -\tau_H(h) = \tau_-(g).$$

Portanto, a representação  $\sigma$ -dual de  $\tau_+$  é  $\tau_-$  e vice-versa. Como  $\tau_+$  e  $\tau_-$  não são isomorfas, temos que também não  $\sigma$ -auto dual.

**Exemplo 2.3.4.** *Seja  $(W, \pi)$  uma representação irredutível do tipo  $\mathbb{K}$  do grupo compacto de Lie  $\Gamma$ . Seja  $H = \Gamma \times \Gamma$  e  $U = W \oplus W$ .*

Defina uma representação  $\tau_H$  de  $H$  sobre  $U$  por  $\tau_H(\gamma_1, \gamma_2) = \pi(\gamma_1) \oplus \pi(\gamma_2)$ . Olhando para  $\pi(\gamma_1)$  e  $\pi(\gamma_2)$  como restrições da representação de  $H$  temos que  $\tau_H$  é a soma direta de duas representações não isomorfas de  $H$  do tipo  $\mathbb{K}$ .

Se  $G$  denota o produto semi-direto  $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\Gamma \times \Gamma)$ , onde a ação de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $H = \Gamma \times \Gamma$  é gerada pela função  $r : (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto (\gamma_2, \gamma_1)$ .

Estenda a representação  $\tau_H$  de  $H$  sobre  $U = W \oplus W$  para uma representação  $\tau$  de  $G$  por requerendo  $\tau(r)(w_1, w_2) = (w_2, w_1)$ .

Esta é uma representação de  $G$  do tipo  $\mathbb{K}$  e também fornece exemplos de SD-RR, SD-CC e SD-HH no Teorema (2.3.1).

Vejamos que o caso com  $G = \mathbb{D}_4$  e  $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  do Exemplo (2.1.5) é para este tipo com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

De fato, primeiramente observe que neste caso  $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ ,  $W = \mathbb{R}$  e  $U = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ .

Seja  $(\mathbb{R}, \pi)$  uma representação irredutível do tipo  $\mathbb{R}$  do grupo compacto de Lie  $\mathbb{Z}_2$  dada por

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow GL(\mathbb{R}) \\ 1 &\longmapsto [1] \\ -1 &\longmapsto [-1], \end{aligned}$$

Defina uma representação  $\tau_H$  de  $H$  sobre  $\mathbb{R}^2$  por

$$\begin{aligned} \tau_H : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\longmapsto \pi(\gamma_1) \oplus \pi(\gamma_2) = \begin{pmatrix} \pi(\gamma_1) & 0 \\ 0 & \pi(\gamma_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que a representação  $\pi(\gamma_1)$  não é isomorfa a representação  $\pi(\gamma_2)$ .

De fato, suponha que exista  $f$  tal que para qualquer  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$  e  $x \in \mathbb{R}$

$$f(\pi(\gamma_1)x) = \pi(\gamma_2)f(x).$$

Em particular para  $\gamma_1 = 1$  e  $\gamma_2 = -1$  temos que

$$f(\pi(1)x) = \pi(-1)f(x) \implies f(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \implies f \equiv 0,$$

ou seja,  $f$  não é invertível. Portanto,  $\pi(\gamma_1)$  não é isomorfa a representação  $\pi(\gamma_2)$ .

Temos que  $G = \mathbb{D}_4 = \mathbb{Z}_2 \times H$ . Assim a representação  $\tau_H$  de  $H$  sobre  $U = W \oplus W$  estendida para uma representação  $\tau$  de  $G$  é dada por

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{D}_4 &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ (1, h) &\longmapsto \tau_H(h) \\ (-1, h) &\longmapsto -\tau_H(h), \end{aligned}$$

tal que para  $h = (\gamma_1, \gamma_2)$  segue que

$$\begin{aligned} \tau_H(\gamma_1, \gamma_2) &= \begin{pmatrix} \pi(\gamma_1) & 0 \\ 0 & \pi(\gamma_2) \end{pmatrix}, \\ -\tau_H(\gamma_1, \gamma_2) &= \begin{pmatrix} 0 & \pi(\gamma_1) \\ \pi(\gamma_2) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $G = \langle \alpha, \beta \rangle$  e  $H = \langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle$  usando a representação acima temos que

$$\alpha \longmapsto \tau(-1, (-1, 1)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta \longmapsto \tau(-1, (1, 1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considere a aplicação  $f$  dada pela matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tal que

$$f\tau(g) = \sigma(g)\tau(g)f, \forall g \in G.$$

1. Se  $g = \alpha \notin H$ , então  $\sigma(g) = -1$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \implies f &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Se  $g = \beta \notin H$ , então  $\sigma(g) = -1$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \\ \implies f &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \text{ tal que } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, basta tomar a matriz invertível  $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  que teremos o isomorfismo entre as representações  $\tau$  e  $\tau_\sigma$ , ou seja, a representação  $\tau$  é  $\sigma$ -auto dual.

Vejamos que  $gl_G(\mathbb{R}^2)$  é isomorfo a  $\mathbb{R}$ .

De fato, considere a aplicação  $F$  dada pela matriz  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  com  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ . Logo

1. Se  $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  segue que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ \implies F = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Se  $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , então

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \\ \implies F = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cong x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $gl_G(\mathbb{R}^2)$  é isomorfo a  $\mathbb{R}$  e pelo Lema (1.4.1) segue que  $\tau$  é uma representação do tipo  $\mathbb{R}$ .

Assim concluímos que este é um exemplo SD-RR.

## Capítulo 3

# Dinâmica dos Sistemas Lineares Reversíveis Equivariantes

Nesse capítulo estudaremos a dinâmica dos sistemas lineares reversíveis equivariantes. Da teoria clássica dos sistemas dinâmicos sabemos que a dinâmica de um sistema linear fica completamente determinada por seus autovalores. Faremos uma análise dos possíveis autovalores em uma classe particular de funções  $\mathbb{R}$ –lineares  $\sigma$ –reversíveis.

Inicialmente veremos as condições para que dois sistemas lineares tenham a mesma dinâmica, ou seja, condições para que seus fluxos lineares sejam topologicamente conjugados.

### 3.1 Fluxos Topologicamente Conjugados

Nesta seção estaremos estudando um pouco sobre teoria de estabilidade, noções de fluxo de um sistema linear e também quando dois fluxos são topologicamente conjugados e semelhantes. Para isto apresentaremos alguns teoremas e definições necessárias para se obter o teorema que mostra quando dois fluxos são topologicamente conjugados.

Consideremos uma equação diferencial linear da forma

$$\dot{x} = Ax. \quad (3.1)$$

Temos que a solução de (3.1) é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (3.2)$$

**Definição 3.1.1.** A aplicação  $e^{At} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  pode ser considerada como descrevendo o movimento dos pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ao longo das trajetórias de (3.1). Esta aplicação é chamada de *fluxo* do sistema linear (3.1).

**Definição 3.1.2.** Se todos os autovalores da matriz  $A$ ,  $n \times n$  tem parte real não nula, então o fluxo  $e^{At} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é chamado uma *fluxo hiperbólico* e (3.1) é chamado *sistema linear hiperbólico*.

**Teorema 3.1.1.** Seja  $A$  uma matriz real  $n \times n$  e considere a equação  $\dot{x} = Ax$ . Os seguintes resultados são equivalentes.

1. Existe uma norma  $\| \cdot \|_*$  sobre  $\mathbb{R}^n$  e uma constante  $a > 0$  tal que para toda condição inicial  $x \in \mathbb{R}^n$  a solução satisfaz

$$\| e^{At}x \|_* \leq e^{-at} \| x \|_*, \forall t \geq 0$$

2. Para qualquer norma  $\| \cdot \|'$  existe constantes  $a > 0$  e  $C \geq 1$  tal que para toda condição inicial  $x \in \mathbb{R}^n$  a solução satisfaz

$$\| e^{At}x \|' \leq Ce^{-at} \| x \|', \forall t \geq 0$$

3. A parte real de todos os autovalores  $\lambda$  de  $A$  são negativas, ou seja,  $Re(\lambda) < 0$ .

**Demonstração.** Ver [17], página 129-130.

Introduziremos o conceito de autovetor generalizado, com o objetivo de definir os subespaços estáveis, instáveis e central.

**Definição 3.1.3.** *Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz  $A$ ,  $n \times n$  com multiplicidade  $m \leq n$ . Então, para algum  $k = 1, \dots, m$ , toda solução não nula  $v$  de*

$$(A - \lambda I)^k v = 0, \quad (3.3)$$

*é chamada um autovetor generalizado de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ .*

**Definição 3.1.4.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Definimos o autoespaço estável, instável e central, como segue respectivamente.*

$$E^s = \{v \mid v \text{ é um autovetor generalizado para um autovalor } \lambda \text{ com } Re(\lambda) < 0\}$$

$$E^u = \{v \mid v \text{ é um autovetor generalizado para um autovalor } \lambda \text{ com } Re(\lambda) > 0\}$$

$$E^c = \{v \mid v \text{ é um autovetor generalizado para um autovalor } \lambda \text{ com } Re(\lambda) = 0\}.$$

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $A$  uma matriz real  $n \times n$ . Então,*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

*onde  $E^s, E^u$  e  $E^c$  são os subespaços estáveis, instáveis e central de (3.1), respectivamente. Além disso  $E^s, E^u$  e  $E^c$  são invariantes com o respectivo fluxo  $e^{At}$  de (3.1).*

**Demonstração.**

Como  $E^s \oplus E^u \oplus E^c$  é o espaço gerado pelos autovetores generalizados segue a igualdade

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c.$$

Mostraremos que  $E^s$  é invariante pelo fluxo  $e^{At}$ . Os casos dos subespaços  $E^u$  e  $E^c$  serem invariantes por  $e^{At}$  seguem analogamente.

De fato, seja  $v \in E_A^s$ , ou seja, existe  $\lambda$  com parte real negativa e  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$(A - \lambda I)^k v = 0.$$

Temos por definição que

$$e^{At} = I + At + \frac{At^2}{2!} + \cdots.$$

Assim,

$$Ae^{At} = e^{At}A.$$

Logo,

$$(A - \lambda I)^k e^{At} v = e^{At} (A - \lambda I)^k v = 0 \implies e^{At} v \in E_A^s.$$

Portanto,  $E_A^s$  é invariante pelo fluxo  $e^{At}$ .

■

O próximo lema e proposição relacionam a dimensão dos subespaços generalizados referente a um autovalor com a soma das multiplicidades algébricas deste mesmo autovalor. Para isto para cada  $x \in V$  denotaremos por  $n = \text{nil}(x, N)$  o menor inteiro positivo tal que  $N^n x = 0$ , onde  $N : V \longrightarrow V$  é um operador nilpotente.

**Lema 3.1.1.** *Seja  $n = \text{nil}(x, N)$ . Se  $p(t)$  é um polinômio tal que  $p(N)x = 0$ , então  $t^n$  divide  $p(t)$ , isto é, existe um polinômio  $p_1(t)$  tal que  $p(t) = t^n p_1(t)$ .*

**Demonstração.** Ver [9], página 334-335.

**Proposição 3.1.1.** *Seja  $A : V \longrightarrow V$  uma transformação linear tal que  $V = N_1 \oplus \cdots \oplus N_q$ , onde  $N_k = \bigcup_{j \geq 0} \text{Ker}(A - \lambda_k I)^j$  para cada autovalor  $\lambda_k$*

de  $A$ . Se  $\lambda_k$  é um autovalor de  $A$  com multiplicidade  $n_k$ , então  $\dim E_K = n_k$ , onde  $E_k = \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{n_k}$  é o espaço generalizado de  $A$  referente ao autovalor  $\lambda_k$ .

**Demonstração.**

Considere a restrição da aplicação  $A$  sobre  $N_k$ , ou seja, a aplicação

$$A_k : N_k \longrightarrow N_k.$$

Vejamos algumas afirmações.

1.  $\lambda_k$  é autovalor de  $A_k$ .

De fato, tome  $v \in \text{Ker}(A - \lambda_k I) \subset N_k$  e assim

$$(A - \lambda_k I)v = 0 \implies Av = \lambda_k v \implies A_k v = \lambda_k v,$$

pois como  $v \in N_k$  temos que  $A = A_k$ .

2.  $\lambda_k$  é o único autovalor de  $A_k$ .

De fato, suponha que  $\gamma$  é um autovalor de  $A_k$  diferente de  $\lambda_k$ , assim

$$A_k(v) = \gamma v,$$

para algum  $v \in N_k$  não nulo.

Assim para qualquer  $j$  maior ou igual a zero temos que,

$$\begin{aligned} (A_k - \lambda_k I)^j v &= \underbrace{(A_k - \lambda_k I) \cdots (A_k - \lambda_k I)}_{j \text{ vezes}} v \\ &= \underbrace{(A_k - \lambda_k I) \cdots (A_k - \lambda_k I)}_{j-1 \text{ vezes}} (A_k - \lambda_k I)v \\ &= \underbrace{(A_k - \lambda_k I) \cdots (A_k - \lambda_k I)}_{j-1 \text{ vezes}} (\gamma - \lambda_k)v \\ &= (\gamma - \lambda_k)^j v \neq 0, \end{aligned}$$

pois  $\gamma \neq \lambda$  e  $v \neq 0$ .

Assim temos que  $v$  não pertence a  $N_k$  o que é absurdo. Portanto,  $\lambda_k$  é o único autovalor de  $A_k$ .

3.  $\lambda_k$  tem multiplicidade  $n_k$  como autovalor de  $A_k$ .

De fato, pois como  $V = N_1 \oplus \cdots \oplus N_q$ , então o polinômio característico de  $A$  é igual ao produto dos polinômios característicos dos  $A_i = A|_{N_i}$ , com  $i = 1, \dots, q$  e para blocos diferentes temos autovalores diferentes, ou seja, as  $n_k$  cópias de  $\lambda_k$  são todas autovalores de  $A_k$ .

Temos que a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores de  $A_k$  é igual a dimensão de  $N_k$ , logo das afirmações acima, temos que a dimensão de  $N_k$  é igual a  $n_k$ .

Observe que

$$\text{Ker}(A - \lambda_k I) \subset \text{Ker}(A - \lambda_k I)^2 \subset \cdots \subset V. \quad (3.4)$$

Assim,

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda_k I) \leq \dim \text{Ker}(A - \lambda_k I)^2 \leq \cdots \leq \dim V < \infty.$$

Portanto, existe  $\tilde{n}_k$  pertencente aos naturais tal que

$$\begin{cases} \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{\tilde{n}_k} &= \text{Ker}(A - \lambda_k I)^n, \quad \forall n \geq \tilde{n}_k \\ \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{\tilde{n}_k-1} &\neq \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{\tilde{n}_k} \end{cases}.$$

Então,  $N_k = \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{\tilde{n}_k}$ .

Tome  $v_0$  tal que,

$$v_0 \in \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{\tilde{n}_k} \quad \text{e} \quad (3.5)$$

$$v_0 \notin \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{\tilde{n}_k-1}.$$

Daí temos que,

1.  $v_0 \in N_k$ ,
2. o polinômio característico de  $A_k$  é dado por  $p_k(t) = (t - \lambda_k)^{n_k}$ .

Pela Álgebra Linear temos que,

$$p(A)v = 0, \quad \forall v,$$

onde  $p$  é o polinômio característico de  $A$ . Então, em particular para  $v_0$

$$p_k(A_k)v_0 = 0 \implies (A_k - \lambda_k)^{n_k}v_0 = 0.$$

Seja  $p(t) = t^{n_k}$ . Por (3.5) temos que  $\tilde{n}_k = \text{nil}(v_0, A - \lambda_k I)$ , isto é,  $\tilde{n}_k$  é o menor inteiro positivo tal que  $(A - \lambda_k I)^{\tilde{n}_k}v_0 = 0$ .

Então, pelo Lema (3.1.1) segue que  $t^{\tilde{n}_k}$  divide  $p(t) = t^{n_k}$ , ou seja,  $\tilde{n}_k$  é menor ou igual a  $n_k$ .

Logo, por construção

$$\text{Ker}(A - \lambda_k)^{\tilde{n}_k} = \text{Ker}(A - \lambda_k)^{n_k} \implies N_k = E_k \implies \dim N_k = \dim E_k.$$

Portanto, a dimensão do espaço  $E_k$  é igual a  $n_k$ .

■

**Observação 3.1.1.** *Observe que o espaço generalizado  $E_k = \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{n_k}$  de  $A$  referente ao autovalor  $\lambda_k$ , quando  $\lambda_k$  tem parte real negativa, positiva ou nula, coincide com os espaços estáveis, instáveis ou central, respectivamente.*

De fato, suponha que  $\lambda_k$  tem parte real negativa. Então,

$$\begin{aligned} E^s &= \{v \mid v \text{ é um autovetor generalizado para um autovalor } \lambda_k \text{ com } \text{Re}(\lambda_k) < 0\} \\ &= \{v \mid (A - \lambda_k I)^j v = 0 \text{ para algum } j = 1, \dots, n_k \text{ e } \text{Re}(\lambda) < 0\} \\ &= \text{Ker}(A - \lambda_k I)^j, \end{aligned}$$

onde a parte real de  $\lambda_k$  é negativa.

Claramente  $E_k \subset E^s$ , basta tomar  $j = n_k$ .

Seja  $v \in E^s$ , então existe  $j_0 < n_k$  tal que  $v \in \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{j_0}$ . Assim  $n_k = m + j_0$ , onde  $m$  é um inteiro positivo menor que  $n_k$ . Logo,

$$(A - \lambda_k I)^{n_k} v = (A - \lambda_k I)^m (A - \lambda_k I)^{j_0} v = (A - \lambda_k I)^m 0 = 0.$$

Portanto,  $E^s \subset E_k$  e assim concluímos a igualdade entre esses dois sub-espacos.

**Teorema 3.1.3.** *Seja  $A$  uma matriz. Assuma que  $A$  induz um fluxo hiperbólico para a equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  onde  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $B$  é uma matriz  $n \times n$  com entradas suficientemente próximas de  $A$ , então  $\dot{x} = Bx$  induz um fluxo linear hiperbólico tal que a dimensão das partições de  $A$  e  $B$  são as mesmas.*

**Demonstração.**

Como por hipótese  $B$  está suficientemente próximo de  $A$ , então o polinômio característico de  $B$ ,  $p_B$ , está suficientemente próximo do polinômio característico de  $A$ ,  $p_A$ .

Sendo assim as raízes dos polinômios  $p_A$  e  $p_B$  (autovalores de  $A$  e de  $B$ , respectivamente) também estão suficientemente próximas umas das outras.

Daí concluímos que o número de autovalores contados com sua multiplicidade com parte real positiva de  $A$  e  $B$  são os mesmos. Analogamente,  $A$  e  $B$  tem o mesmo número de autovalores com parte real negativa.

Portanto, as dimensões das partições  $E_A^s$ ,  $E_A^u$  de  $A$  são as mesmas dimensões das partições  $E_B^s$ ,  $E_B^u$  de  $B$ , respectivamente.

■

Consideraremos que dois fluxos tem as mesmas propriedades qualitativas e assim topologicamente semelhante, se pudermos transformar continuamente as trajetórias de um nas trajetórias do outro.

**Definição 3.1.5.** Dizemos que dois fluxos  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  sobre um espaço  $M$  ( $M$  pode ser  $\mathbb{R}^n$  ou alguma variedade) são topologicamente conjugados, se existe um homeomorfismo  $h : M \longrightarrow M$  tal que

$$h \circ \varphi^t(x) = \psi^t \circ h(x), \forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Definição 3.1.6.** Dizemos que dois fluxos  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  sobre um espaço  $M$  são topologicamente equivalentes, se existe um homeomorfismo  $h : M \longrightarrow M$  e uma (reparametrização) função  $\alpha : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$h \circ \varphi^{\alpha(t,x)}(x) = \psi^t \circ h(x), \forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R},$$

onde assumiremos para cada  $x$  fixado que  $\alpha(t, x)$  é monotonamente decrescente em  $t$  e é sobrejetora em todo  $\mathbb{R}$ .

**Observação 3.1.2.** Geometricamente dois fluxos  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  sobre um espaço  $M$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : M \longrightarrow M$  que leva as trajetórias de  $\varphi^t$  nas trajetórias de  $\psi^t$  preservando sua orientação. Já no caso de serem topologicamente conjugados este homeomorfismo também preservará o tempo.

O seguinte teorema prova que dois fluxos lineares hiperbólicos com a mesma dimensão dos espaços estáveis e instáveis são topologicamente conjugados, ou seja, é possível preservar a parametrização.

**Teorema 3.1.4.** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes reais  $n \times n$ .

- a) Assuma que todos os autovalores de  $A$  e  $B$  tem parte real negativa. Então, os dois fluxos lineares  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.
- b) Assuma que todos os autovalores de  $A$  e  $B$  tem parte real não nula e a dimensão da soma direta de todos os autoespaços com parte real negativa é a mesma de  $A$  e  $B$ . (Assim a dimensão da soma direta de todos os

autoespaços com parte real positiva é a mesma de  $A$  e  $B$ ). Então, os dois fluxos lineares  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.

c) Em particular, se todos os autovalores de  $A$  tem parte real não nula e  $B$  é suficientemente próximo de  $A$ , então os dois fluxos lineares  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.

### Demonstração.

Por hipótese, no item a), todos os autovalores de  $A$  e  $B$  tem parte real negativa, logo pelo Teorema (3.1.1) existem normas  $\| \cdot \|_A$ ,  $\| \cdot \|_B$  e constantes  $a, b > 0$  tais que temos as estimativas

$$\begin{cases} \| e^{At}x \|_A \leq e^{-at} \| x \|_A \\ \| e^{Bt}x \|_B \leq e^{-bt} \| x \|_B \end{cases}, \forall t > 0. \quad (3.6)$$

Considerando  $t \leq 0$  temos as estimativas

$$\begin{cases} \| e^{At}x \|_A \geq e^{-a|t|} \| x \|_A \\ \| e^{Bt}x \|_B \geq e^{-b|t|} \| x \|_B \end{cases}. \quad (3.7)$$

Consideremos duas esferas

$$S_A = \{x \mid \| x \|_A = 1\} \text{ e}$$

$$S_B = \{x \mid \| x \|_B = 1\}.$$

Afirmamos que para cada  $x \neq 0$  a trajetória  $e^{At}x$  cruzará, em algum tempo, a esfera  $S_A$  uma única vez.

De fato, temos três possibilidades para  $x$  com relação a esfera  $S_A$ .

1. Se  $\| x \|_A = 1$ , então temos que para  $t = 0$  a trajetória  $e^{At}x$  cruza a esfera  $S_A$ .
2. Se  $\| x \|_A > 1$  temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| e^{At}x \|_A \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \| e^{At}x \|_A \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} \| x \|_A = \| x \|_A \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At}x = 0,$$

ou seja, a medida que o tempo aumenta a trajetória  $e^{At}x$  se aproxima da origem da esfera  $S_A$ , logo em algum momento a trajetória cruzará a esfera  $S_A$ .

3. Se  $\|x\|_A < 1$  temos que

$$+\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} \|x\|_A \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{-At}x\|_A \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{-At}x\|_A = +\infty.$$

Então, a medida que o tempo aumenta a trajetória  $e^{At}x$  sai da esfera, e como  $\|x\|_A < 1$  segue que necessariamente a trajetória  $e^{At}x$  cruzará a esfera  $S_A$ .

Suponha que exista  $x_0$  não nulo e os tempos  $t_1, t_2$  distintos, tais que

$$\begin{aligned} \|e^{At_1}x_0\|_A &= 1 \quad \text{e} \\ \|e^{At_2}x_0\|_A &= 1, \end{aligned}$$

ou seja, a trajetória  $e^{At}x$  cruza a esfera  $S_A$  duas vezes.

Sem perda de generalidade, consideremos  $t_1 < t_2$ .

Tome  $t = t_1 - t_2$  e  $x = e^{At_2}x_0$ .

Como  $t$  é negativo, pela Estimativa (3.7)

$$\begin{aligned} \|e^{At}x\|_A &\geq e^{-a|t|} \|x\|_A \implies \|e^{At_1}e^{-At_2}e^{At_2}x_0\|_A \geq e^{a(t_2-t_1)} \\ &\implies e^{a(t_2-t_1)} \leq 1. \end{aligned}$$

Mas  $t_2 - t_1 > 0$ , logo  $e^{a(t_2-t_1)} > 1$ . Então,

$$e^{a(t_2-t_1)} = 1 \implies t_1 = t_2, \text{ absurdo.}$$

Portanto, para cada  $x \neq 0$  a trajetória  $e^{At}x$  cruzará a esfera  $S_A$  uma única vez.

Analogamente, para cada  $y \neq 0$  trajetória  $e^{Bt}y$  cruzará a esfera  $S_B$  também uma única vez.

Observe que o tempo onde  $\|e^{At}x\|_A = 1$  depende continuamente de  $x$ . Assim definiremos como  $\tau(x)$  o tempo onde a trajetória  $e^{At}x$  cruzará a esfera  $S_A$  para cada  $x \neq 0$ .

Sendo assim segue que  $\tau(e^{At}x)$  é o tempo tal que  $\|e^{A\tau(e^{At}x)}e^{At}x\|_A = 1$  e é dado por  $\tau(e^{At}x) = \tau(x) - t$ .

De fato,

$$\|e^{A(\tau(x)-t)}e^{At}x\|_A = \|e^{A\tau(x)}e^{-At}e^{At}x\|_A = \|e^{A\tau(x)}x\|_A = 1.$$

Considere o homeomorfismo entre as esferas  $S_A$  e  $S_B$  dado por

$$\begin{aligned} h_0 : S_A &\longrightarrow S_B \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|_B}. \end{aligned}$$

Observe que a inversa de  $h_0$  existe e é dada por  $h_0^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|_A}$ .

De fato,

$$h_0 \circ h_0^{-1}(y) = h_0\left(\frac{y}{\|y\|_A}\right) = \frac{y}{\|y\|_A} \frac{\|y\|_A}{\|y\|_B} = y.$$

E ainda,  $h_0$  e  $h_0^{-1}$  são contínuas pois são compostas de funções contínuas.

Agora podemos junto com o tempo  $\tau(x)$ , estender o homeomorfismo  $h_0$  para todo o  $\mathbb{R}^n$ .

Considere a função  $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$h(x) = \begin{cases} e^{-B\tau(x)}h_0(e^{A\tau(x)}x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Geometricamente temos

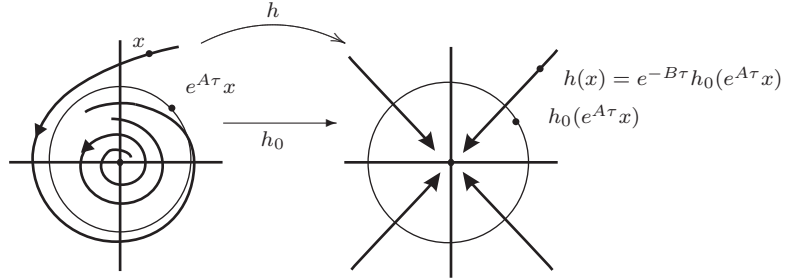


Figura 3.1: Representação geométrica para se obter o homeomorfismo  $h$  que torna topologicamente conjugado os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$ , referente aos sistemas lineares  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{x} = Bx$ , respectivamente.

Observe que

1. Se  $x = 0$ , então  $h(x) = 0$  e assim

$$h(e^{At}x) = 0 = e^{Bt}h(x) \implies h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x).$$

2. Se  $x \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} h(e^{At}x) &= e^{-Bt\tau(e^{At}x)}h_0(e^{A\tau(e^{At}x)}e^{At}x) \\ &= e^{-B(\tau(x)-t)}h_0(e^{A(\tau(x)-t)}e^{At}x) \\ &= e^{-B\tau(x)}e^{Bt}h_0(e^{A\tau(x)}e^{-At}e^{At}x) \\ &= e^{-B\tau(x)}e^{Bt}h_0(e^{A\tau(x)}x) \\ &= e^{Bt}e^{-B\tau(x)}h_0(e^{A\tau(x)}x) \\ &= e^{Bt}h(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x)$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Como  $\tau$  e os fluxos  $e^{Bt}$  e  $e^{At}$  são contínuas, segue que  $h$  é uma função contínua nos pontos  $x \neq 0$ .

Mostremos que para  $x = 0$  a função  $h$  é contínua, ou seja, mostremos que

$$x_j \longrightarrow 0 \implies h(x_j) \longrightarrow h(0) = 0.$$

De fato, temos que  $\tau(x_j) = \tau_j$  é o tempo para que  $\|e^{A\tau_j}x_j\|_A = 1$ . Pelas estimativas (3.6) e (3.7) temos que

$$1 = \|e^{A\tau_j}x_j\|_A \leq e^{-a\tau_j} \|x_j\|_A \longrightarrow 0 \text{ para } \tau_j \geq 0, \text{ absurdo.}$$

Então, consideremos  $\tau_1 \leq 0$ . Como vimos para cada  $x \neq 0$  a trajetória  $e^{At}x$  cruza exatamente uma vez a esfera  $S_A$ , então para cada  $j$  existe um único  $\tau_j \in \mathbb{R}_-$  e um único  $y_j \in S_A$  tal que  $e^{A\tau_j}x_j = y_j$ .

Suponhamos que  $|\tau_j| < M$  para qualquer  $j$  e  $M \in \mathbb{R}$ . Pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, existe uma subsequência  $\tau_{j_i}$  convergindo para  $t \in \mathbb{R}$ .

A sequência  $\tau_{j_i}$  está no compacto  $S_A$ , logo existe uma subsequência  $y_{j_{i_m}}$  tal que

$$y_{j_{i_m}} \longrightarrow y_0, \quad y_0 \in S_A.$$

Portanto,

$$e^{A\tau_{j_{i_m}}}x_{j_{i_m}} = y_{j_{i_m}}. \tag{3.8}$$

Assim quando  $m$  tende ao infinito, temos,

$$\tau_{j_{i_m}} \longrightarrow t, \quad x_{j_{i_m}} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad y_{j_{i_m}} \longrightarrow y_0.$$

Logo, em (3.8)

$$e^{At}0 = y_0 \implies y_0 = 0, \text{ absurdo.}$$

Portanto,  $\tau_j$  tende a menos infinito quando  $x_j$  tende a zero.

Fazendo,  $y_j = h_0(e^{A\tau_j}x_j)$  temos que

$$\|y_j\|_B = \|h_0 e^{A\tau_j}x_j\|_B = \frac{\|e^{A\tau_j}x_j\|_B}{\|e^{A\tau_j}x_j\|_B} = 1.$$

Então, usando a estimativa (3.6) segue que

$$\begin{aligned} \| h(x_j) \|_B &= \| e^{-B\tau_j} h_0(e^{A\tau_j} x_j) \|_B \leq \| e^{-B\tau_j} \|_B \| h_0(e^{A\tau_j} x_j) \|_B \\ &= \| e^{-B\tau_j} \|_B \leq e^{-b|\tau_j|} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\| h(x_j) \|_B$  converge para zero, ou seja,  $h(x_j)$  converge para zero quanto  $x_j$  converge para zero. Portanto,  $h$  é contínua em zero.

Sejam  $x, y$  tais que  $h(x) = h(y)$ .

Se  $x = 0$ , então  $0 = h(x) = h(y)$ , ou seja,  $y = 0$ . Portanto,  $h$  é injetora para  $x = 0$ .

Suponha que  $x \neq 0$ . Então,

$$h(y) = h(x) \neq 0 \implies y \neq 0.$$

Considere  $\tau(x) = \tau$  e observe que

$$h(e^{a\tau} x) = e^{b\tau} h(x) = e^{b\tau} h(y) = h(e^{a\tau} y) \implies h(e^{a\tau} x) = h(e^{a\tau} y). \quad (3.9)$$

Como vimos  $\tau(e^{At} x) = \tau - t$ , logo  $\tau(e^{A\tau} x) = \tau - \tau = 0$ , então

$$\begin{aligned} \| h(e^{A\tau} x) \|_B &= \| e^{-B\tau(e^{A\tau} x)} h_0(e^{A\tau(e^{A\tau} x)} e^{A\tau} x) \|_B \\ &= \| h_0(e^{A\tau} x) \|_B \\ &= 1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

logo,  $h(e^{A\tau} x) \in S_B$  e por (3.9) segue que  $h(e^{A\tau} y) \in S_B$ .

Observe que para qualquer  $x$  que não pertence a  $S_A$  sua imagem,  $h(x)$ , não pertence a  $S_B$ .

De fato, suponha que exista  $x_1$  não pertencente a  $S_A$  tal que sua imagem,  $h(x_1)$ , pertença a esfera  $S_B$ .

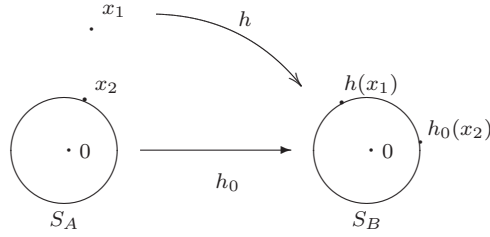


Figura 3.2: Representação geométrica, onde  $x_2 = e^{A\tau(x_1)}x_1$ .

Pela definição de  $h$  segue que

$$h(x_1) = e^{-B\tau(x_1)}h_0(e^{A\tau(x_1)}x_1) \implies h_0(e^{A\tau(x_1)}x_1) = e^{B\tau(x_1)}h(x_1) \in S_B.$$

Mas  $h(x_1)$  pertence a  $S_B$  e como  $\tau(x_1)$  é o tempo quando a trajetória  $e^{B\tau(x_1)}h(x_1)$  cruza a esfera  $S_B$ , segue que  $\tau(x_1) = 0$ . Absurdo, pois como  $x_1$  não pertence a  $S_A$  temos que  $\tau(x_1)$  é não nulo.

Portanto,

$$h(e^{A\tau}y) \in S_B \implies e^{A\tau}y \in S_A \implies \tau = \tau(y).$$

Como em (3.10) temos que  $h(e^{A\tau}x) = h_0(e^{A\tau}x)$ , segue que

$$h_0(e^{A\tau}x) = h(e^{A\tau}x) = h(e^{A\tau}y) = h_0(e^{A\tau}y) \implies e^{A\tau}x = e^{A\tau}y \implies x = y.$$

Portanto,  $h$  é injetora.

Seja  $z \in \mathbb{R}^n$ . Temos que existe um único  $\tau(z)$  tal que  $e^{B\tau(z)}z \in S_B$ .

Como  $h_0$  é sobrejetora, existe um único  $w \in S_A$  tal que  $h_0(w) = e^{B\tau(z)}z$ .

Tome  $x = e^{-A\tau}w$ , logo,  $w = e^{A\tau}x$ . Assim

$$h(x) = e^{-B\tau}h_0(e^{A\tau}x) = e^{-B\tau}h_0(e^{A\tau}e^{-A\tau}w) = e^{-B\tau}h_0(w) = e^{-B\tau}e^{B\tau(z)}z = z$$

Portanto,  $h$  é sobrejetora.

Finalmente temos que a inversa de  $h$  é contínua e é dada por

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} e^{-A\tau(y)} h_0^{-1}(e^{B\tau(y)} y) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

Portanto, concluímos que  $h$  é um homeomorfismo que torna os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  topologicamente conjugados.

No item b), pelo Teorema (3.1.2) temos que  $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$ , pois  $E^c = \emptyset$ .

Vejamos que b) segue diretamente do item a).

De fato, também pelo Teorema (3.1.2) temos que os subespaços  $E_A^s$  e  $E_A^u$  são invariantes pelo fluxo  $e^{At}$  e os subespaços  $E_B^u$  e  $E_B^s$  são invariantes pelo fluxo  $e^{Bt}$ .

Assim pelo item a) os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  restritos aos subespaços  $E_A^s$  e  $E_B^s$ , respectivamente, são topologicamente conjugados, isto é, existe um homeomorfismo  $h_s : E_A^s \longrightarrow E_B^s$  tal que

$$h_s(e^{At}x) = e^{Bt}h_s(x),$$

para qualquer  $x \in E_A^s$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

Observe que se os autovalores de  $A$  e  $B$  tem parte real negativa, então os autovalores de  $-A$  e  $-B$  tem parte real positiva e neste caso os fluxos  $e^{-At}$  e  $e^{-Bt}$  são topologicamente conjugados.

De fato, basta tomar o homeomorfismo que torna os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  topologicamente conjugados, só que agora definido do subespaço  $E_A^u$  sobre o sub-espaço  $E_B^u$ , ou seja, tome  $h_u : E_A^u \longrightarrow E_B^u$  e  $w = -t$ ,

$$h_u(e^{-At}x) = h_s(e^{Aw}x) = e^{Bw}h_s(x) = e^{-Bt}h_u(x).$$

Assim considere o homeomorfismo  $h_\sigma : E_A^\sigma \longrightarrow E_B^\sigma$  tal que

$$h_\sigma(e^{At}x) = e^{Bt}h_\sigma(x),$$

para qualquer  $x \in E_A^\sigma$  e  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $\sigma = s, u$ .

Tome as projeções

$$\begin{aligned}\pi_\sigma^A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow E_A^\sigma \\ x = x_u \oplus x_s &\longmapsto x_\sigma,\end{aligned}$$

assim qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$  pode ser escrito como  $x = \pi_u^A(x) \oplus \pi_s^A(x)$ .

Utilizando as conjugações  $h_u$ ,  $h_s$  e as projeções podemos obter uma conjugação sobre o espaço todo.

Considere a função

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto h_u(\pi_u^A(x)) + h_s^A(\pi_s(x)).\end{aligned}$$

Geometricamente temos

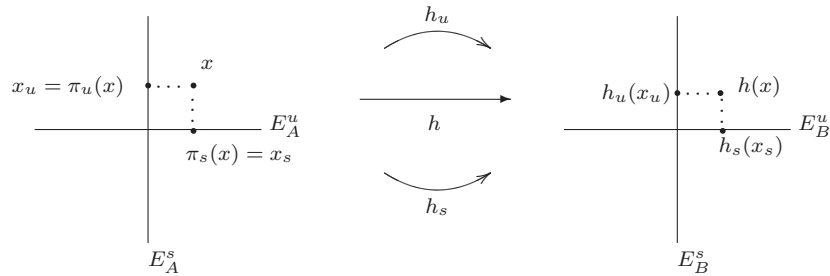


Figura 3.3: Representação geométrica para se obter o homeomorfismo  $h$  que torna topologicamente conjugado os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$ , referente aos sistemas lineares  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{x} = Bx$ , respectivamente.

Como  $h$  é soma de funções contínuas segue que  $h$  também é contínua.

A função inversa de  $h$  é dada pela seguinte função contínua

$$\begin{aligned}h^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\longmapsto h_u^{-1}(\pi_u^B(y)) + h_s^{-1}(\pi_s^B(y)),\end{aligned}$$

onde  $\pi_\sigma^B$  é a projeção do  $\mathbb{R}^n$  sobre  $E_B^\sigma$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
 h \circ h^{-1}(y) &= h(h_u^{-1}(\pi_u^B(y)) + h_s^{-1}(\pi_s^B(y))) \\
 &= h(h_u^{-1}(y_u) + h_s^{-1}(y_s)) \\
 &= h_u(\pi_u^A(h_u^{-1}(y_u) + h_s^{-1}(y_s))) + h_s(\pi_s^A(h_u^{-1}(y_u) + h_s^{-1}(y_s))) \\
 &= h_u(\pi_u^A(h_u^{-1}(y_u)) + \pi_u^A(h_s^{-1}(y_s))) + h_s(\pi_s^A(h_u^{-1}(y_u)) + \pi_s^A(h_s^{-1}(y_s))) \\
 &= h_u(\pi_u^A(h_u^{-1}(y_u))) + h_s(\pi_s^A(h_s^{-1}(y_s))) \\
 &= h_u(h_u^{-1}(y_u)) + h_s(h_s^{-1}(y_s)) \\
 &= y_u + y_s \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $h \circ h^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$ .

Seja  $x = x_u \oplus x_s \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , como  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são lineares, segue que

$$\begin{aligned}
 h(e^{At}x) &= h_u(\pi_u^A(e^{At}x)) + h_s(\pi_s^A(e^{At}x)) \\
 &= h_u(\pi_u^A(e^{At}(x_u) \oplus e^{At}(x_s))) + h_s(\pi_s^A(e^{At}(x_u) \oplus e^{At}(x_s))) \\
 &= h_u(e^{At}(x_u)) + h_s(e^{At}(x_s)) \\
 &= e^{Bt}h_u(x_u) + e^{Bt}h_s(x_s) \\
 &= e^{Bt}(h_u(x_u) + h_s(x_s)) \\
 &= e^{Bt}(h_u(\pi_u^A(x)) + h_s(\pi_s^A(x))) \\
 &= e^{Bt}h(x).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $h$  comuta com os fluxos lineares  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  e assim concluimos que estes são topologicamente conjugados.

Sejam  $A$  e  $B$  satisfazendo a hipótese do item c). Assim pelo Teorema (3.1.3)

as dimensões das partições de  $A$  e  $B$  são as mesmas, ou seja,

$$\begin{aligned}\dim E_A^s &= \dim E_B^s \quad \text{e} \\ \dim E_A^u &= \dim E_B^u.\end{aligned}$$

Portanto, este caso segue diretamente do item b).

■

**Observação 3.1.3.** *Pela Proposição (3.1.1) e o Teorema (3.1.4) temos que dadas duas matrizes  $A$  e  $B$  onde o número de autovalores (contados com suas multiplicidades) com parte real negativa (ou parte real positiva) é igual em ambas, segue que os dois fluxos lineares  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.*

## 3.2 Estudo dos autovalores

Nesta seção faremos uma análise de como podem ser os autovalores e suas respectivas multiplicidades para uma certa classe de funções  $\mathbb{R}$ –lineares  $\sigma$ –reversíveis.

Focalizaremos sobre as situações em que temos uma representação  $\sigma$ –auto dual de  $G$  e o automorfismo  $\alpha$  é trivial. Sobre estas circunstâncias mostraremos que o estudo dos autovalores nesta classe de funções  $\mathbb{R}$ –lineares  $\sigma$ –reversíveis está intimamente ligado com o estudo dos autovalores das matrizes em  $gl(m; \mathbb{K})$ .

**Observação 3.2.1.** *Os autovalores de uma matriz em  $gl(m; \mathbb{R})$  são por definição aqueles de sua complexificação. Existem  $m$  autovalores e se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz em  $gl(m; \mathbb{R})$ , então  $\bar{\lambda}$  é também um autovalor com a mesma multiplicidade de  $\lambda$ .*

**Observação 3.2.2.** *Uma matriz em  $gl(m; \mathbb{C})$  tem precisamente  $m$  autovalores se cada um é contado de acordo com sua multiplicidade algébrica.*

**Observação 3.2.3.** *No caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  notamos que toda matriz em  $gl(m; \mathbb{C})$  pode ser representada como uma matriz  $\mathbb{R}$ -linear em  $gl(2m; \mathbb{R})$ . Se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz complexa com multiplicidade algébrica  $a$ , então  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  são ambos autovalores da correspondente matriz em  $gl(2m; \mathbb{R})$ , cada um com multiplicidade algébrica igual a  $a$ .*

De fato, considere o exemplo.

**Exemplo 3.2.1.** *Seja uma função  $\mathbb{C}$ -linear tal que*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (iz_1, iz_2). \end{aligned}$$

Tome  $\xi = \{(0, 1), (1, 0)\}$  uma base para  $\mathbb{C}^2$ . Então, a matriz da aplicação  $f$  na base  $\xi$  é dada por,

$$[f] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Assim temos que  $i$  é o único autovalor de  $f$  com multiplicidade 2.

Consideremos a mesma função  $f$ , agora com uma função  $\mathbb{R}$ -linear. Nesse caso considere a base  $\bar{\xi} = \{(0, 1), (0, i), (1, 0), (i, 0)\}$  e a matriz de  $f$  nesta base é tal que

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso os autovalores de  $f$  formam o par conjugado  $(i, -i)$  ambos com multiplicidade 2. Assim concluímos esta observação.

Observe ainda que se uma função  $\mathbb{C}$ -linear tiver um autovalor real, então esta mesma função, vista como uma função  $\mathbb{R}$ -linear, terá este mesmo autovalor mas agora com multiplicidade dupla, pois o conjugado de um número real é ele mesmo. Veja um exemplo.

**Exemplo 3.2.2.** *Considere a função  $g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$  tal que  $g(z_1, z_2) = (iz_1, z_2)$ .*

Analogamente ao exemplo anterior verificamos que  $g$ , como uma função  $\mathbb{C}$ -linear, tem 1 e  $i$  como seus autovalores, ambos com multiplicidade simples. Porém como uma função  $\mathbb{R}$ -linear, seus autovalores são  $(i, -i)$  ambos com multiplicidade simples e 1 com multiplicidade 2.

**Observação 3.2.4.** *Os autovalores de uma matriz em  $gl(m; \mathbb{H})$  são por definição aqueles obtidos por esquecendo a estrutura de  $\mathbb{H}$  e olhando uma matriz em  $gl(m; \mathbb{H})$  como uma função  $\mathbb{C}$ -linear, isto é, como uma matriz em  $gl(2m; \mathbb{C})$ . Existem portanto  $2m$  autovalores. Quando consideramos uma matriz de  $gl(m; \mathbb{H})$  como uma função  $\mathbb{R}$ -linear, esta terá o mesmo par conjugado como autovalor, porém com multiplicidade dupla.*

De fato, veja o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.2.3.** *Seja  $f : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$  uma função tal que  $f(g_1, g_2) = (g_1 i, g_2 i)$ .*

Pela definição para obter os autovalores de  $f$  devemos olhá-la como uma função  $\mathbb{C}$ -linear. Sendo assim, considere uma  $\mathbb{C}$ -base para  $\mathbb{H}^2$  dada por  $\beta = \{(1, 0), (j, 0), (0, 1), (0, j)\}$ , logo sua matriz em relação a essa base é

$$[f] = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

O par conjugado complexo  $(i, -i)$  é formado por autovalores de multiplicidade dupla da aplicação  $f$ .

Olhando  $f$  agora como uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear, uma  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{H}^2$  é  $\{(1, 0), (i, 0), (j, 0), (k, 0), (0, 1), (0, i), (0, j), (0, k)\}$  e a matriz de  $f$  nessa base é a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso os autovalores  $i$  e  $-i$  tem multiplicidade 4 cada um.

Destas observações acima, temos que quando uma função linear  $L$  de um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial é obtida de uma função linear de um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial com autovalores  $\mu_i$  com multiplicidade  $a_i$ , ela terá pares de autovalores conjugados complexos  $(\mu_i, \overline{\mu_i})$  ambos com a mesma multiplicidade  $a_i$ . Se a função linear  $L$  de um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial vêm de uma função linear de um  $\mathbb{H}$ -espaço vetorial, que tem pares de autovalores complexos  $(\mu_i, \overline{\mu_i})$  ambos com multiplicidade  $a_i$ , ela terá esses mesmos pares de autovalores conjugados complexos mas agora ocorrendo com multiplicidade dupla.

**Observação 3.2.5.** *Sejam as aplicações  $A : U \longrightarrow U$  e  $B : V \longrightarrow V$ . Se  $\lambda$  e  $\gamma$  são autovalores de  $A$  e  $B$  respectivamente, então  $\lambda\gamma$  será autovalor da aplicação  $A \otimes_{\mathbb{K}} B : U \otimes_{\mathbb{K}} V \longrightarrow U \otimes_{\mathbb{K}} V$ .*

De fato, como  $\lambda$  e  $\gamma$  são autovalores de  $A$  e  $B$  respectivamente segue que existem  $u \in U$  e  $v \in V$  não nulos tais que

$$A(u) = \lambda u \quad \text{e} \quad B(v) = \gamma v.$$

Tome o vetor não nulo  $x = u \otimes_{\mathbb{K}} v \in U \otimes_{\mathbb{K}} V$ . Temos que

$$\begin{aligned} A \otimes_{\mathbb{K}} B(x) &= A \otimes_{\mathbb{K}} B(u \otimes_{\mathbb{K}} v) = A(u) \otimes_{\mathbb{K}} B(v) \\ &= (\lambda u) \otimes_{\mathbb{K}} (\gamma v) = (\lambda \gamma)(u \otimes_{\mathbb{K}} v) = (\lambda \gamma)x. \end{aligned}$$

Portanto,  $\lambda \gamma$  é autovalor de  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ .

**Observação 3.2.6.** *Seja  $(V, \rho)$  uma representação de  $G$  sobre  $V$  tal que  $(V, \rho)$  é isomorfo a  $m$  cópias de uma representação irredutível  $(W, \rho_W)$  do tipo  $\mathbb{K}$ , onde  $\rho_W$  é a representação  $\rho$  restrita ao subespaço  $W$ . Considerando os casos  $\sigma$ -auto duais da Tabela (2.1) onde o automorfismo  $\alpha$  é trivial temos que se  $A \in gl(m, \mathbb{K})$ , então  $L = A \otimes_{\mathbb{K}} T$  é uma aplicação  $\sigma$ -reversível tal que  $T : W \longrightarrow W$  é dada pela Tabela (2.1).*

De fato, como vimos no Capítulo 1 temos que as representações  $(V, \rho)$  e  $(\mathbb{K}^m \otimes_{\mathbb{K}} W, 1^m \otimes_{\mathbb{K}} \rho_W)$  são isomorfas. Então, mostraremos que  $L$  é uma aplicação  $\sigma$ -reversível com relação a representação  $(\mathbb{K}^m \otimes_{\mathbb{K}} W, 1^m \otimes_{\mathbb{K}} \rho_W)$  e assim a menos de isomorfismo  $L$  também será  $\sigma$ -reversível com relação a representação  $(V, \rho)$ .

Seja  $g \in G$  como  $T$  é uma aplicação  $\sigma$ -reversível segue que

$$\begin{aligned} L((1^m \otimes_{\mathbb{K}} \rho_W)(g)) &= (A \otimes_{\mathbb{K}} T)(1^m(g) \otimes_{\mathbb{K}} \rho_W(g)) \\ &= (A 1^m(g)) \otimes_{\mathbb{K}} (T \rho_W(g)) \\ &= (1^m(g) A) \otimes_{\mathbb{K}} (\sigma(g) \rho_W(g) T) \\ &= \sigma(g)[(1^m(g) A) \otimes_{\mathbb{K}} (\rho_W(g) T)] \\ &= \sigma(g)[(1^m(g) \otimes_{\mathbb{K}} \rho_W(g))(A \otimes T)] \\ &= \sigma(g)(1^m \otimes_{\mathbb{K}} \rho_W)(g) L \end{aligned}$$

Com isso podemos estudar os autovalores de uma classe particular de funções  $\mathbb{R}$ -lineares  $\sigma$ -reversíveis para cada um dos casos  $\sigma$ -auto duais tal que o automorfismo  $\alpha$  é trivial obtido na classificação dada no Teorema (2.3.1).

**Teorema 3.2.1** (Autovalores). *Seja  $(V, \rho)$  uma representação de  $G$  sobre  $V$  tal que a decomposição isotópica de  $V$  possui um único bloco isotópico e a representação  $(V, \rho)$  é isomorfa a soma direta de  $m$  cópias de uma representação  $\sigma$ -auto dual irredutível  $(W, \rho_W)$  do tipo  $\mathbb{K}$  tal que o automorfismo  $\alpha$  é trivial. Denote a dimensão de  $W$  como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  por  $r$ . Seja ainda  $L : V \longrightarrow V$  uma função  $\mathbb{R}$ -linear  $\sigma$ -reversível dada por  $L = A \otimes_{\mathbb{K}} T$  onde  $A \in gl(m, \mathbb{K})$  e  $T$  é dada na Tabela (2.1). Então, os autovalores de  $L$  podem ser determinados dos autovalores de  $A$  como segue.*

(SD-RR) *Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  com multiplicidade algébrica  $a$ , então  $(\lambda, -\lambda)$  é um par de autovalores de  $L$  com multiplicidade algébrica  $\frac{ar}{2}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  este dá um par real de autovalores. Caso contrário  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  dão um autovalor quádruplo que degenera em um par imaginário quando  $\lambda$  é imaginário.*

(SD-CC) *Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  (como uma função  $\mathbb{C}$ -linear) com multiplicidade algébrica  $a$ , então  $(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$  é uma quádrupla de autovalores de  $L$  com multiplicidade algébrica  $\frac{ar}{2}$ .*

(SD-HH) *Se  $(\lambda, \bar{\lambda})$  é um par conjugado de autovalores de  $A$  (como uma função  $\mathbb{C}$ -linear) com multiplicidade algébrica  $a$ , então  $(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$  é uma quádrupla de autovalores de  $L$  com multiplicidade algébrica  $ar$ .*

(SD-RC) *Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  com multiplicidade algébrica  $a$ , então  $(i\lambda, -i\lambda)$  é um par de autovalores de  $L$  com multiplicidade algébrica  $ar$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  este dá um par de autovalores imaginários. Caso contrário  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  dão um autovalor quádruplo que degenera em um par real quando  $\lambda$  é imaginário.*

(SD-HC) *Se  $(\lambda, \bar{\lambda})$  é um par conjugado de autovalores de  $A$  (como uma função  $\mathbb{C}$ -linear) com multiplicidade algébrica  $a$ , então  $(i\lambda, -i\lambda, i\bar{\lambda}, -i\bar{\lambda})$  é uma quádrupla de autovalores de  $L$  com multiplicidade algébrica  $ar$ . A*

*quádrupla degenera de um par imaginário onde  $\lambda$  é real e de um par real onde  $\lambda$  é imaginário.*

**Demonstração.**

Por hipótese temos que  $L = A \otimes_{\mathbb{K}} T$  onde  $A \in gl(m; \mathbb{K})$  e a aplicação  $T : W \longrightarrow W$  é dada pela Tabela (2.1).

A demonstração será feita por casos.

1. Caso SD-RR.

Neste caso como  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  temos que  $L = A \otimes_{\mathbb{R}} T$  com  $A \in gl(m; \mathbb{R})$  e  $T = I_+ \oplus -I_-$ . Assim os únicos autovalores de  $T$  são 1 e -1 ambos com multiplicidade  $\frac{r}{2}$ , pois a dimensão de  $W$  é  $r$ .

Se  $\lambda$  é autovalor de  $A$  com multiplicidade  $a$ , então os autovalores de  $L$  são  $\lambda$  e  $-\lambda$  ambos com multiplicidade  $\frac{ar}{2}$ .

Temos ainda que se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $(\lambda, -\lambda)$  é um par real de autovalores de  $L$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}$ , como  $A$  é uma matriz com entradas em  $\mathbb{R}$ , segue que  $\bar{\lambda}$  também é um autovalor de  $A$  e assim  $\bar{\lambda}$  e  $-\bar{\lambda}$  também são autovalores de  $L$ , ou seja,  $(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$  é uma quádrupla de autovalores para  $L$  que degenera de um par imaginário  $(\lambda, -\lambda)$ , quando  $\lambda$  é imaginário.

2. Caso SD-CC.

Para o caso SD-CC temos que  $L = A \otimes_{\mathbb{C}} T$  com  $A \in gl(m; \mathbb{C})$  e  $T = I_+ \oplus -I_-$ , já que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  com multiplicidade  $a$ , então  $\lambda$  e  $-\lambda$  são autovalores de  $L$  ambos com multiplicidade  $\frac{ar}{2}$ .

Observe que neste caso  $L$  é uma função  $\mathbb{C}$ -linear, pois por hipótese  $A$  e  $T$  são funções  $\mathbb{C}$ -lineares. Então, pelas observações vistas anteriormente,  $(\lambda, -\lambda)$  e os seus conjugados serão autovalores de  $L$ , agora vista como uma função  $\mathbb{R}$ -linear, ambos com a mesma multiplicidade  $\frac{ar}{2}$ .

Portanto,  $(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$  é uma quádrupla de autovalores da função  $\mathbb{R}$ -linear  $L$  com multiplicidade  $\frac{ar}{2}$ .

### 3. Caso SD-HH.

Temos que  $L = A \otimes_{\mathbb{H}} T$  com  $A \in gl(m; \mathbb{H})$  e  $T = I_+ \oplus -I_-$ .

Se  $(\lambda, \bar{\lambda})$  é um par de autovalores conjugados de  $A$  com multiplicidade  $a$ , então  $(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$  é uma quádrupla de autovalores de  $L$  com multiplicidade  $\frac{ar}{2}$ .

Por hipótese  $A$  é uma função  $\mathbb{C}$ -linear, logo  $L$  é uma função  $\mathbb{C}$ -linear. Então, pelas observações vistas anteriormente, como o conjugado da quádrupla é ela mesmo, segue que  $(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$  são autovalores de  $L$  agora com multiplicidade dupla, isto é,  $ar$ .

### 4. Caso SD-RC.

Neste caso  $L = A \otimes_{\mathbb{R}} T$  com  $A \in gl(m, \mathbb{R})$  e  $T = i$ . Observe que o único autovalor da função  $\mathbb{C}$ -linear  $T$  é  $i$  com multiplicidade  $r$ .

Olhando para  $T$  como uma função  $\mathbb{R}$ -linear temos pelas observações vistas anteriormente que  $-i$  também é um autovalor de  $T$  com multiplicidade  $r$ . Então, a função  $\mathbb{R}$ -linear  $T$  tem o par conjugado complexo  $(i, -i)$  de autovalores ambos com multiplicidades  $r$ .

Suponha que  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  com multiplicidade algébrica  $a$ , então  $(i\lambda, -i\lambda)$  são autovalores de  $L$  com multiplicidade  $ar$ .

Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $(\lambda i, -\lambda i)$  é um par imaginário puro de autovalores de  $L$ .

Se  $\lambda \in \mathbb{C}$ , então como  $A$  é uma matriz real,  $\bar{\lambda}$  também é um autovalor de  $A$  e assim analogamente ao que foi feito anteriormente temos que  $\bar{\lambda}i$  e  $-\bar{\lambda}i$  também são autovalores de  $L$ . Portanto, os autovalores de  $L$   $(\lambda i, -\lambda i, \bar{\lambda}i, -\bar{\lambda}i)$  formam um autovalor quádruplo que se degenera em um par real quando  $\lambda$  é imaginário.

## 5. SD-HC.

Neste caso temos que  $L = A \otimes_{\mathbb{H}} T$ , com  $T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  e da hipótese  $A$  é uma função  $\mathbb{C}$ -linear. Analogamente ao caso anterior,  $i$  o único autovalor de  $T$  com multiplicidade  $r$ .

Suponha que  $(\lambda, \bar{\lambda})$  é um par de autovalores de  $A$  com multiplicidade  $a$ . Então, o par  $(\lambda i, \bar{\lambda} i)$  é autovalor de  $L$  com multiplicidade  $ar$ .

Por hipótese  $A$  é uma função  $\mathbb{C}$ -linear, logo  $L$  também é uma matriz  $\mathbb{C}$ -linear. Assim,  $(\lambda i, -\lambda i, \bar{\lambda} i, -\bar{\lambda} i)$  formam uma quádrupla de autovalores de  $L$  ambos com multiplicidade  $ar$ .

Esta quádrupla degenera em  $(\lambda i, -\lambda i)$ , isto é, um par imaginário quando  $\lambda$  é real e em um par real quando  $\lambda$  é imaginário.

■

## Conclusão.

Para se determinar a dinâmica de uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $\sigma$ -reversível da forma  $L = A \otimes_{\mathbb{K}} T$  nas condições da Proposição (3.2.1) basta fazer uma análise dos autovalores de  $A$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, J. F., *Lectures on Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [2] Arnold, V. I., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Benjamin, New York, 1969.
- [3] Bröcker, T. e Dieck, T., *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [4] Buzzi, C. A. e Lamb, J. S. W., Reversible equivariant Hopf bifurcation. To appear in *Arch. Rat. Mech. Anal.*
- [5] Galin, D. M., *On real matrices depending on parameters*, *Uspekhi Mat. Nauk* **27**, 241-242, 1972.
- [6] Golubitsky, M. e Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, **51**, Vol.I, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [7] Golubitsky, M. & Stewart, I. & Schaeffer, D. G. *Singularities and groups in bifurcation theory*, Vol. II, Applied Mathematics and Sciences, **69**, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [8] Gonçalves, A., *Tópicos em Representação de Grupos*, 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, Poços de Caldas, 1973.
- [9] Hirsch, M.W., Smale S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1970.

- [10] Hoveijn, I., *Versal deformations and normal forms for reversible and Hamiltonian linear systems*, *Journal of Diff. Equations*, **126**, 408-442, 1996.
- [11] Hoveijn, I., Lamb, J. S. W. e Roberts, M., *Normal forms and unfoldings of reversible equivariant linear systems*, em preparação.
- [12] Jacobson, N., *Pseudo-linear transformations*, *Ann. Math*, **38**, 484-507, 1937.
- [13] Lamb, J. S. W. e Roberts, M., *Reversible Equivariant Linear Systems*, *Journal of Diff. Equations*, **159**, 239-279, 1999.
- [14] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie*, Unicamp, Campinas, 1999.
- [15] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [16] Pierce, R. S. *Associative Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [17] Robinson, C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Boca Raton: CRC Press, 1998. (Studies in Advanced Mathematics)
- [18] Serre, J. P., *Linear Representations of Finite Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [19] Simon, B., *Linear Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 10, Amer.Math.Soc., Providence, 1996.
- [20] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

# Índice Remissivo

- Álgebra
  - Linear Real, 15
  - de Lie, 30
- Ação, 31
  - adjunta, 31
- Automorfismo, 23
- Blocos Isotípicos, 49
- Centro, 18
- Conjugação quaterniônica, 24
- Decomposição
  - isotípica, 49
- Funções
  - $\mathbb{K}^\alpha$ -lineares, 27
  - equivariantes, 43
  - semilineares, 27
- Grupo de Lie, 30
- Involução, 25
  - de Lie, 32
- Lema de Schur, 44
- Produto Tensorial
  - entre espaços vetoriais, 18
  - entre funções  $\mathbb{K}$ -lineares, 19
- Representações, 43
  - $\sigma$ -auto duais, 71
  - $\sigma$ -duais, 69
  - $\sigma$ -reversíveis, 62
  - do tipo  $\mathbb{K}$ , 47
  - fiel, 43
  - irredutíveis, 44
  - isomorfias, 43
  - triviais, 43
- Sistema Linear
  - equivariante, 56
  - reversível, 54
- Subálgebra, 16
- Subespaço  $G$ -Invariante, 44