



Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Contorno aparente, envoltórias e equações diferenciais implícitas

Pedro Benedini Riul

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

São José do Rio Preto
Março - 2015

Contorno aparente, envoltórias e equações diferenciais implícitas

Pedro Benedini Riul

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de Sistemas Dinâmicos e Singularidades.

São José do Rio Preto
Março - 2015

Riul, Pedro Benedini.

Contorno aparente, envoltórias e equações diferenciais implícitas / Pedro Benedini Riul. - - São José do Rio Preto, 2015

73 f. : il.

Orientador: Luciana de Fátima Martins

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Teoria das singularidades. 4. Envoltórias (Geometria) I. Martins, Luciana de Fátima. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Pedro Benedini Riul

Contorno aparente, envoltórias e equações diferenciais implícitas

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos e Singularidades, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora

Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa

UFPB - João Pessoa

Segundo Examinador

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

UNESP - São José do Rio Preto

SUPLENTES

Prof^a. Dr^a. Ana Claudia Nabarro

ICMC-USP - São Carlos

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 12 de Março de 2015.

*À todos que de alguma
forma colaboraram
dedico.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que puderam, de alguma forma, contribuir para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

À Luciana de Fátima Martins, pela orientação.

À minha família, pelo grande apoio.

A todos os meus amigos que estiveram comigo durante esta jornada.

À Capes, pelo suporte financeiro.

“Não é bolinho, não!”

Phoebe Buffay.

Resumo

Dada uma superfície regular suave M em \mathbb{R}^3 podemos considerá-la localmente como imagem inversa de um valor regular de uma função suave $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. O contorno aparente de M em uma dada direção coincide com a envoltória de uma família de curvas associadas à F . O estudo destes objetos é de bastante interesse na Teoria das Singularidades os quais podem ser relacionados com Equações Diferenciais Implícitas (EDI's). Uma EDI é uma equação da forma $F(x, y, p) = 0$, onde $p = \frac{dy}{dx}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Neste trabalho apresentamos um estudo sobre contorno aparente de uma superfície regular, sobre a envoltória (envelope) de uma família de curvas e sobre equações diferenciais implícitas, objetivando analisar qual a relação entre esses três conceitos.

Palavras Chave: Contorno aparente, Envoltórias, Equações diferenciais implícitas.

Abstract

Given a smooth regular surface M in \mathbb{R}^3 we can locally consider it as an inverse image of a regular value of a smooth function $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. The apparent contour of M in a given direction coincides with the envelope of a family of curves associated to F . The study of such objects is of great interest to the Singularity Theory and it can be related to Implicit Differential Equations (IDE's). An IDE is an equation of the form $F(x, y, p) = 0$ where $p = \frac{dy}{dx}$ and $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function. This work presents a study on apparent contour of a regular surface, envelope of family of curves, and implicit differential equations in order to analyze the relationship between them.

Key Words: Apparent contour, Envelopes, Implicit differential equations.

Lista de Figuras

1.1	Retas orientadas.	3
1.2	Curva Pedal.	3
1.3	Curvas pedal e dual do Exemplo 1.8, respectivamente.	6
1.4	Figura da Definição 1.10.	7
1.5	Figura do Exemplo 1.11.	8
1.6	Figura do Exemplo 1.13.	9
1.7	Figura do Exemplo 1.23.	13
1.8	Figura da Definição 1.31: retratos de fase	16
2.1	Exemplo de contorno aparente.	21
2.2	Contorno aparente do Exemplo 2.3.	21
2.3	Astróide do Exemplo 2.6.	23
2.4	$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$	25
2.5	Envoltória E_2	25
2.6	Figura do Exemplo 2.12.	26
2.7	Figura Exemplo 2.16.	28
2.8	Envoltória do Exemplo 2.38.	36
2.9	Envoltória do Exemplo 2.39.	36
2.10	Formas normais - projeção.	39
3.1	Superfície da equação, Exemplo 3.1.	42
3.2	Figura do Exemplo 3.2.	44
3.3	Figura do Teorema 3.4.	46
3.4	Figura do Exemplo 3.5.	47
3.5	Figura do Exemplo 3.6.	48
3.6	Singularidades: sela, nó e foco.	52
3.7	Superfície $M = F^{-1}(0)$ do Exemplo 3.23.	56
3.8	Curvas soluções do Exemplo 3.23.	57
3.9	Cuspidal edge e rabo de andorinha.	62

3.10	Figura do Exemplo 3.30.	68
3.11	Figura do Exemplo 3.31.	69

Sumário

Introdução	xiii
1 Preliminares	1
1.1 Curvas planas e duais	1
1.2 Superfícies regulares em \mathbb{R}^3	6
1.3 Campos de vetores	14
1.4 Formas diferenciais	17
2 Contorno aparente e envoltórias	20
2.1 Contorno aparente e envoltórias	20
2.2 Desdobramentos e aplicações	31
3 Equações Diferenciais Implícitas	40
3.1 Propriedades de EDI's	41
3.2 Duais, EDI's e o Método de Legendre	55
3.3 Equações diferenciais binárias	63
Referências Bibliográficas	70
Índice Remissivo	72

Introdução

A Teoria de Singularidades se aplica a várias áreas das ciências e interage com diversas áreas da matemática, entre as quais geometria algébrica, geometria diferencial e teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. Neste trabalho estamos interessados em aplicar ferramentas da Teoria de Singularidades para fazer um estudo sobre equações diferenciais implícitas (EDI's). Uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0,$$

onde $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, U é um conjunto aberto e $p = \frac{dy}{dx}$ é chamada de equação diferencial implícita. Dada uma superfície regular suave M em \mathbb{R}^3 podemos definir o seu contorno aparente em uma direção v como sendo a projeção no plano passando pela origem e ortogonal a v dos pontos da superfície em que o seu plano tangente é paralelo à direção de projeção (criminante). Temos também que a superfície M pode ser localmente dada como imagem inversa de uma função suave $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um conjunto aberto. A partir de F definimos uma família de funções, a saber, $F_t : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $F_t(x, y) = F(x, y, t)$ e V é um conjunto aberto. A envoltória (discriminante, envelope) da família F_t coincide com o contorno aparente de M na direção do vetor $(0, 0, 1)$. A partir desses conceitos iniciais podemos construir um estudo bastante rico em informações geométricas. Os resultados dessa parte cujas demonstrações apresentamos estão presentes em [6], sendo que muitas vezes na forma de exercícios que resolvemos de forma detalhada.

Neste contexto é natural relacionarmos as EDI's com o estudo mencionado acima da seguinte forma: se 0 é um valor regular da EDI F , então o conjunto $M = F^{-1}(0)$ é uma superfície regular suave em \mathbb{R}^3 e portanto, podemos transferir o estudo da EDI F para aquele feito para a geometria de M , através de resultados sobre seu contorno aparente, seu criminante ou de seus pontos de regressão, por exemplo.

Dado um ponto $q \in M = F^{-1}(0)$, com F nas condições acima, dizemos que q é um ponto singular da EDI se $F(q) = F_p(q) = 0$ (equivalentemente, q pertence ao criminante da EDI) e é dito regular caso contrário. Se q é um ponto regular da EDI, pelo Teorema da Função Implícita, temos $p = g(x, y)$ em uma vizinhança de q e assim, a EDI pode

ser resolvida explicitamente. Dessa forma, o caso de maior interesse se dá quando q é singular. Em uma vizinhança de um ponto singular regular da EDI (ver Definição 3.8) Cibrario mostrou, em [12], que a EDI pode ser escrita na forma $p^2 = x$. Dara em [13] mostrou que em pontos singulares não regulares existe um subconjunto aberto e denso no espaço de todas as funções F de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} com a C^3 -topologia de Whitney tais que os pontos singulares não regulares são de cinco tipos. Os três primeiros são do tipo dobra-sela, dobra-nó e dobra-foco e os dois últimos são do tipo cúspide elíptica e cúspide hiperbólica.

O trabalho que segue é organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 são apresentados os conceitos necessários para o desenvolvimento do texto: um breve estudo sobre duais de curvas planas, seções que tratam de superfícies regulares e suaves em \mathbb{R}^3 , campos de vetores e por fim, formas diferenciais.

No Capítulo 2 estudamos o contorno aparente em uma dada direção de uma superfície, seus pontos de dobra e de cúspide, a envoltória de uma família de funções e resultados relacionados. No Capítulo 3 estudamos EDI's relacionando-as com o que foi feito no capítulo anterior. É apresentado também um método de resolução de EDI's para determinados pontos, o Método de Legendre. Por fim, trazemos um tipo especial de EDI's: as Equações Diferenciais Binárias (EDB's). Estas últimas são de especial interesse na Geometria Diferencial de superfícies regulares suaves em \mathbb{R}^3 .

Preliminares

Neste capítulo são apresentadas noções que serão necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente fazemos um estudo sobre a geometria diferencial de curvas planas em \mathbb{R}^2 e de superfícies regulares suaves em \mathbb{R}^3 . Também são estudados campos de vetores e formas diferenciais. As principais referências são [10], [11] e [23].

1.1 Curvas planas e duais

Nesta seção temos por objetivo estudar alguns aspectos das curvas duais de uma curva em \mathbb{R}^2 . Posteriormente relacionaremos esse estudo com aquele que faremos sobre EDI's.

Uma **curva parametrizada diferenciável** do plano é uma aplicação diferenciável γ de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita **parâmetro da curva** e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\gamma(t)$, $t \in I$ é chamado **traço** da curva.

Exemplo 1.1 A aplicação $\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$, $t \in \mathbb{R}$ onde $a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma reta passando pelo ponto (x_0, y_0) , paralela ao vetor de coordenadas (a, b) . ■

Exemplo 1.2 A aplicação γ , que para cada $t \in \mathbb{R}$ associa $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ é uma curva diferenciável, cujo traço é a circunferência \mathbb{S}^1 de centro na origem e raio igual a 1. ■

O vetor

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$$

é chamado **vetor tangente** a γ em t . A curva γ é dita **regular** se para todo $t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$.

Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é curva regular, dizemos que está **parametrizada por comprimento de arco** (ppca), se para todo $t \in I$ temos $\|\gamma'(t)\| = 1$.

A propriedade de uma curva plana estar ppca é bastante forte, e portanto, parece ser bem restrita. No entanto, sabemos que toda curva plana regular admite uma reparametrização ppca.

trização, ou seja, uma mudança de coordenadas em seu domínio, de tal modo que neste novo sistema de coordenadas a curva está ppca.

Os vetores **tangente unitário** e **normal unitário** de γ ppca, em t , são, respectivamente,

$$\mathbf{t}(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \text{ e } \mathbf{n}(t) = (-\gamma'_2(t), \gamma'_1(t)).$$

A função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$k(t) = \langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle$$

é chamada de **curvatura** de γ em t . Por outro lado, se γ é uma curva regular qualquer, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= \frac{(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))}{\sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2}}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{(-\gamma'_2(t), \gamma'_1(t))}{\sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2}} \\ k(t) &= \frac{-\gamma''_1(t)\gamma'_2(t) + \gamma'_1(t)\gamma''_2(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2)^3}}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3 Considere a curva regular ppca

$$\gamma(t) = \left(r \cos \frac{t}{r} + a, r \sin \frac{t}{r} + b \right),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, cujo traço é o círculo de centro (a, b) e raio r . Então, os vetores tangente e normal unitários são dados por

$$\mathbf{t}(t) = \left(-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right) \text{ e } \mathbf{n}(t) = \left(-\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right).$$

Logo, $k(t) = \langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle = \frac{1}{r}$, uma vez que $\mathbf{t}'(t) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right)$. ■

Definição 1.4 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Dizemos que γ tem uma **inflexão ordinária** (resp. **de ordem maior**) em $t = t_0$ se $k(t_0) = 0$ e $k'(t_0) \neq 0$ (resp. $k(t_0) = k'(t_0) = 0$).

Exemplo 1.5 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Defina $\gamma(t) = (t, f(t))$. Claramente γ é uma curva suave e regular. A curva γ possui uma inflexão ordinária (resp. de ordem maior) em $t = t_0$ se, e somente se, $f''(t_0) = 0$ e $f'''(t_0) \neq 0$ (resp. $f''(t_0) = f'''(t_0) = 0$). De fato, temos

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } k'(t) = \frac{f'''(t)(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}f''(t)(2f'(t)f''(t))^{\frac{1}{2}}}{(1 + f'(t)^2)^3}.$$

Assim, $k(t_0) = 0$ e $k'(t_0) \neq 0$ se, e somente se, $f''(t_0) = 0$ e $f'''(t_0) \neq 0$. Da mesma forma, $k(t_0) = k'(t_0) = 0$ se, e somente se, $f''(t_0) = f'''(t_0) = 0$. ■

Seja \mathcal{L} o conjunto das retas orientadas no plano, identificado com o subconjunto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, onde a cada ponto $(a, \lambda) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ associamos a reta dada pela equação $\langle x, a \rangle = \lambda$, com orientação dada pelo vetor obtido da rotação de $\frac{\pi}{2}$ do vetor a , no sentido horário. Note que os pontos (a, λ) e $(-a, -\lambda)$ estão associados a mesma reta, no entanto essas retas possuem sentidos opostos (ver Figura 1.1).

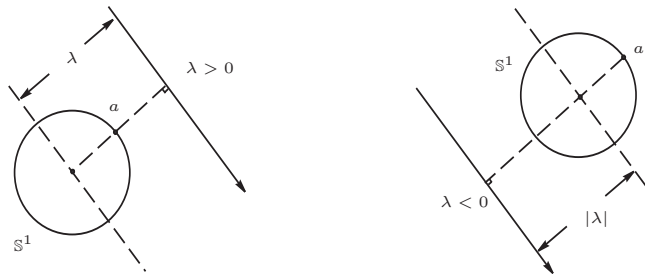


Figura 1.1: Retas orientadas.

Dada uma curva plana regular γ temos, para cada ponto $\gamma(t)$, uma reta tangente orientada dada pela equação $\langle x, \mathbf{n}(t) \rangle = \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle$. Através da associação feita acima, a esta reta tangente associamos o ponto $(\mathbf{n}(t), \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle)$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. À esse subconjunto de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dá-se o nome de **curva dual** de γ . A curva dual de γ está relacionada com a **curva pedal** de γ , definida por $\alpha(t) = \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{n}(t)$ (ver Figura 1.2).

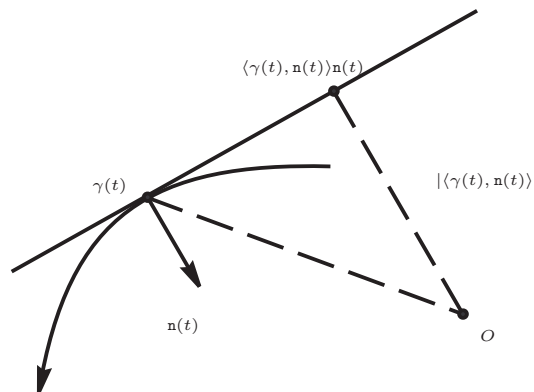


Figura 1.2: Curva Pedal.

Consideremos a aplicação $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $p(a, \lambda) = \lambda a$. Então p é um recobrimento duplo, isto é, p é contínua, $p(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ e, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de p tal que $p^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos abertos disjuntos de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e a restrição de p a cada V_i , $i = 1, 2$, é um homeomorfismo.

A imagem da curva dual de γ por essa aplicação é exatamente o traço da curva pedal. Logo, a aplicação p pode ser usada para analisar curvas duais localmente. No entanto,

devemos observar que essa associação não nos diz sobre a orientação das retas tangentes à curva γ .

Note que quando a curva γ passa pela origem de \mathbb{R}^2 em t , então o ponto da curva dual δ em t é $(\mathbf{n}(t), 0)$ e o da pedal é $\alpha(t) = (0, 0)$. Supondo que γ não passa pela origem, então a curva pedal α de γ é regular exceto nos pontos de inflexão de γ . De fato, como $\alpha(t) = \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{n}(t)$ e assumindo sem perda de generalidade que γ está ppca, temos:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle + \langle \gamma(t), \mathbf{n}'(t) \rangle) \mathbf{n}(t) + \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{n}'(t) \\ &= -k(t) (\langle \gamma(t), \mathbf{t}(t) \rangle \mathbf{n}(t) + \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{t}(t)).\end{aligned}$$

Suponha, por absurdo, que $k(t) \neq 0$. Dessa forma temos

$$\langle \gamma(t), \mathbf{t}(t) \rangle = \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow \gamma(t) = (0, 0),$$

o que é um absurdo. Portanto, se $\gamma(t) \neq (0, 0)$ temos que a pedal deixa de ser regular somente nos pontos em que $k(t) = 0$, ou seja, nos pontos de inflexão de γ .

Exemplo 1.6 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, ou seja, γ é uma parametrização por comprimento de arco de \mathbb{S}^1 em \mathbb{R}^2 , como no Exemplo 1.2. Calculemos a curva dual de γ . Os vetores tangente e normal unitários são, respectivamente,

$$\mathbf{t}'(t) = (-\sin t, \cos t) \text{ e } \mathbf{n}(t) = (-\cos t, -\sin t).$$

Dessa forma,

$$\langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle = -\cos^2 t - \sin^2 t = -1,$$

e assim, a curva dual δ de γ é dada por

$$\delta(t) = (-\cos t, -\sin t, -1),$$

cujos traço está contido no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 . Note que a curva pedal α de γ é dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ e que $\mathbf{p}(\delta(t)) = (\cos t, \sin t)$, ou seja, $\mathbf{p}(\delta(t)) = \alpha(t)$. Observe ainda que α é regular, uma vez que $k_\gamma(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 1.7 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = \left(a \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} + x_0, b \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} + y_0 \right)$$

a parametrização por comprimento de arco da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem como vetor diretor o vetor (a, b) . Os vetores tangente e normal unitários são, respectivamente,

$$\mathbf{t}'(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \text{ e } \mathbf{n}(t) = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Dessa forma, $\langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle = \frac{ay_0 - bx_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e a curva dual δ de γ é dada por

$$\delta(t) = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{ay_0 - bx_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

e a curva pedal α é dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{-b(ay_0 - bx_0)}{a^2 + b^2}, \frac{a(ay_0 - bx_0)}{a^2 + b^2} \right)$$

e portanto, $\mathbf{p}(\delta(t)) = \alpha(t)$. Observe também que α é uma curva não regular pois $k_\alpha(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ ($\gamma''(t) = (0, 0)$). ■

Pode ser mostrado (ver [6] p.166) que, a menos de um difeomorfismo, a curva pedal α e, portanto, a dual de γ é:

- (i) uma curva regular em \mathbb{R}^2 , nos pontos de γ que não são de inflexão;
- (ii) uma cúspide ordinária em \mathbb{R}^2 , ou seja, uma curva cujo traço é difeomorfo ao traço de $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (t^2, t^3)$, nos pontos de inflexão ordinária de γ .

Exemplo 1.8 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, t^3 + 1)$. Sabemos do Exemplo 1.5 que γ tem uma inflexão ordinária em $t_0 = 0$. O vetor normal unitário de γ em t é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \left(\frac{-3t^2}{\sqrt{1 + 9t^4}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^4}} \right),$$

e assim, as curvas pedal e dual de γ são dadas, respectivamente, por:

$$\alpha(t) = \left(\frac{6t^5 - 3t^2}{1 + 9t^4}, \frac{-2t^3 + 1}{1 + 9t^4} \right) \text{ e}$$

$$\delta(t) = \left(\frac{-3t^2}{\sqrt{1 + 9t^4}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^4}}, \frac{-2t^3 + 1}{\sqrt{1 + 9t^4}} \right).$$

Portanto, da figura abaixo (Figura 1.3), podemos observar que a curva pedal α e, consequentemente, a curva dual δ são, a menos de um difeomorfismo, uma cúspide ordinária, como esperado. ■

Observação 1.9 Seja $\gamma(t) = (t, f(t))$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e que não possui uma inflexão em t_0 . As curvas pedal e dual de γ são, respectivamente:

$$\alpha(t) = \left(\frac{tf'(t) - f(t)}{1 + f'(t)^2} \right) (f'(t), -1) \text{ e}$$

$$\delta(t) = \left(\frac{-f'(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}, \frac{-tf'(t) + f(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \right).$$

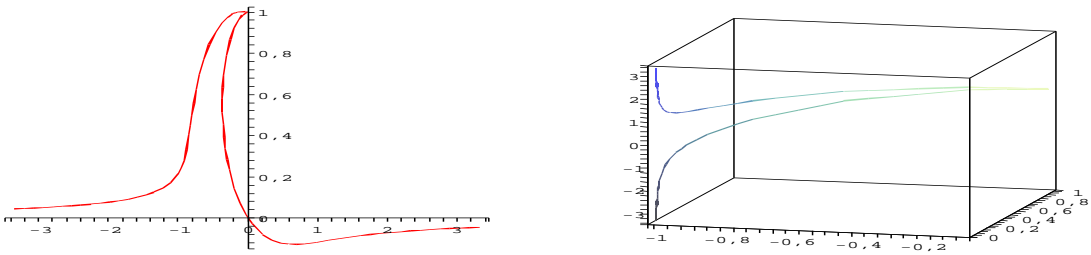


Figura 1.3: Curvas pedal e dual do Exemplo 1.8, respectivamente.

Ao invés de estudarmos localmente a curva dual de γ usando a curva pedal, podemos também analisá-la da seguinte maneira: a reta tangente a γ em t satisfaz

$$\langle (x, y), (-f'(t), 1) \rangle = \langle (t, f(t)), (-f'(t), 1) \rangle,$$

ou seja, $-f'(t)x + y = -tf'(t) + f(t)$. Então, a curva

$$t \mapsto (-f'(t), tf'(t) - f(t))$$

pode ser considerada como a dual de γ em \mathbb{R}^2 . No lugar da aplicação \mathbf{p} definida anteriormente, tome a aplicação que associa a cada reta dada pela equação $a_1x + y = \lambda$ o ponto $(a_1, -\lambda) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, cada reta tangente à curva dual em t corresponde, via a associação acima, ao ponto $(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, a dual da dual é identificada com a curva original γ . De fato, do mesmo modo como procedemos para a curva γ , podemos encontrar, para cada t , a reta tangente a δ . A equação dessa reta é dada por $tx + y = -f(t)$, uma vez que $f''(t_0) \neq 0$ (essa condição é equivalente a dizer que γ não tem ponto de inflexão em t_0 , ver Exemplo 1.5). Novamente, aplicando a identificação, obtemos para cada t o ponto $(t, f(t))$, ou seja, de acordo com que t varia, esses pontos descrevem o traço da curva γ em \mathbb{R}^2 (Ver [6], seção 5.3 (7)).

1.2 Superfícies regulares em \mathbb{R}^3

Definição 1.10 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\chi : U \rightarrow V \cap S$, definida por

$$\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que χ é um homeomorfismo diferenciável e para todo $q \in U$, a diferencial $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, ou seja, para todo $q \in U$ a aplicação χ é uma imersão.

A aplicação χ é chamada de **parametrização** ou um **sistema de coordenadas lo-**

cais em uma vizinhança de p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada uma **vizinhança coordenada** (ver Figura 1.4).

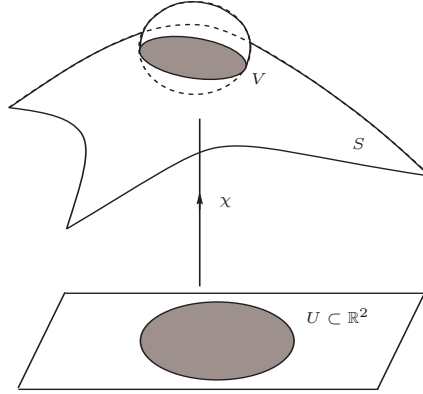


Figura 1.4: Figura da Definição 1.10.

O campo de vetores unitários definidos por

$$N(u, v) = \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|}(u, v)$$

é chamado **normal associado**.

Exemplo 1.11 A esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular. De fato, seja a aplicação $\chi_3^+ : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\chi_3^+(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}),$$

definida no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$. Então χ_3^+ satisfaz as condições da definição:

- $\chi_3^+(U) = \mathbb{S}^2 \cap \mathcal{H}_3^+$, onde $\mathcal{H}_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$ é um aberto de \mathbb{R}^3 .
- χ_3^+ é diferenciável, pois $1 - (u^2 + v^2) > 0$ para todo $(u, v) \in U$.
- $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para todo $q \in U$, ou seja, $d\chi_q$ é injetiva para todo $q \in U$.
- χ_3^+ é um homeomorfismo, pois χ_3^+ é uma bijeção contínua sobre $\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{H}_3^+$ e $(\chi_3^+)^{-1} = \pi|_{\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{H}_3^+}$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção sobre o plano (x, y) dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Podemos cobrir a esfera com seis parametrizações similares a esta. Para isso, considere as aplicações

$$\chi_1^+, \chi_1^-, \chi_2^+, \chi_2^-, \chi_3^+, \chi_3^- : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dadas por

$$\begin{aligned}\chi_1^\pm(u, v) &= (\pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v); \\ \chi_2^\pm(u, v) &= (u, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v); \\ \chi_3^\pm(u, v) &= (u, v, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).\end{aligned}$$

De modo análogo ao feito para χ_3^+ podemos provar que χ_1^\pm, χ_2^\pm e χ_3^- são parametrizações de \mathbb{S}^2 sobre $\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{H}_1^\pm, \mathbb{S}^2 \cap \mathcal{H}_2^\pm$ e $\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{H}_3^-$, respectivamente, onde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0\}; & \mathcal{H}_1^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x < 0\}; \\ \mathcal{H}_2^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 0\}; & \mathcal{H}_2^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y < 0\}; \\ \mathcal{H}_3^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}; & \mathcal{H}_3^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z < 0\},\end{aligned}$$

são abertos de \mathbb{R}^3 . Como

$$\begin{aligned}\chi_1^+(U) \cup \chi_1^-(U) &= \mathbb{S}^2 - \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x = 0\}; \\ \chi_2^+(U) \cup \chi_2^-(U) &= \mathbb{S}^2 - \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; x^2 + z^2 = 1 \text{ e } y = 0\}; \\ \chi_3^+(U) \cup \chi_3^-(U) &= \mathbb{S}^2 - \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\},\end{aligned}$$

temos

$$\mathbb{S}^2 = \chi_1^+(U) \cup \chi_2^+(U) \cup \chi_2^-(U) \cup \chi_3^+(U) \cup \chi_3^-(U).$$

Logo, \mathbb{S}^2 é uma superfície regular suave (ver Figura 1.5). ■

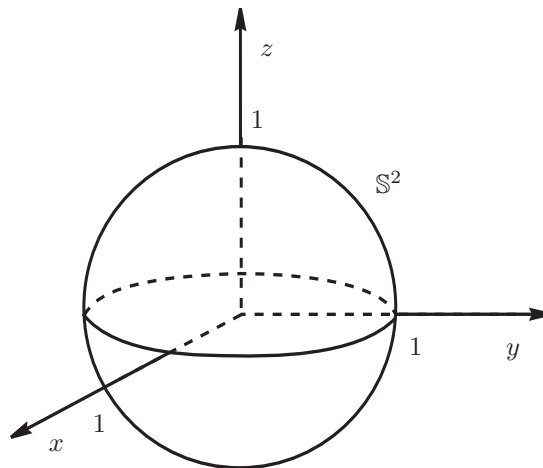


Figura 1.5: Figura do Exemplo 1.11.

Uma ferramenta para encontrarmos exemplos de superfícies regulares é a proposição

abaixo, que nos diz que o gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$ é uma superfície regular diferenciável.

Proposição 1.12 *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.*

Demonstração. Ver [10], p. 68. ■

Exemplo 1.13 O parabolóide hiperbólico

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = y^2 - x^2\}$$

é uma superfície regular. De fato, basta tomarmos a função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2 - x^2$. O parabolóide hiperbólico será o gráfico de f , e portanto, uma superfície regular (ver Figura 1.6). ■

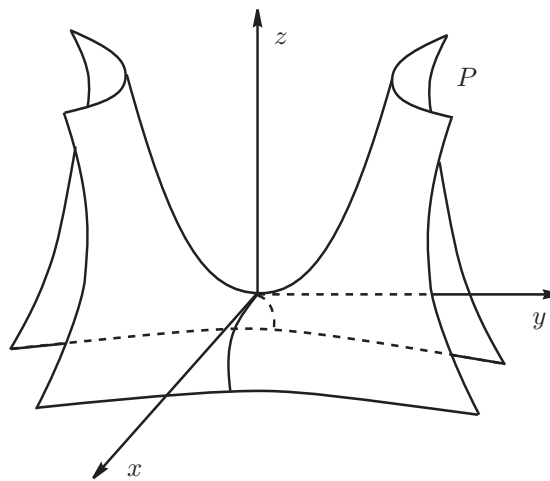


Figura 1.6: Figura do Exemplo 1.13.

O próximo resultado garante que se $a \in F(U)$ é um valor regular de uma função diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, se para todo $p \in U$ tal que $F(p) = a$, a aplicação $dF_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, o conjunto $F^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Proposição 1.14 *Se $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in F(U)$ é um valor regular de F , então $F^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. Ver [10], p. 69. ■

Exemplo 1.15 A proposição anterior nos permite mostrar de uma outra maneira que a esfera \mathbb{S}^2 é uma superfície regular. De fato, $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(0)$, onde

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

é uma função diferenciável e 0 é um valor regular de F , uma vez que $\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla F = 0$ se, e somente se, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ que não pertence à $F^{-1}(0)$. ■

Observação 1.16 É importante notar que $F^{-1}(a)$ pode ser uma superfície regular suave sem que $a \in \mathbb{R}$ seja um valor regular. Tome, por exemplo, a função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = y^2$. Neste caso, 0 não é um valor regular de F , no entanto o conjunto $F^{-1}(0)$ é o plano (x, z) , uma superfície regular suave em \mathbb{R}^3 .

O próximo resultado garante que, localmente, qualquer superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ regular e suave pode ser definida implicitamente, ou seja, pode ser dada como imagem inversa de uma função suave.

Teorema 1.17 Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular suave. Para cada ponto $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, contendo p , e uma aplicação $F : V \rightarrow \mathbb{R}$, suave, tal que 0 é um valor regular de F e $S \cap V = F^{-1}(0)$.

Demonstração. Ver [18], p. 51. ■

Seja $F : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida em um subconjunto aberto V de uma superfície regular S . Então F é **diferenciável** em $p \in V$ se, para alguma parametrização $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, com $p \in \chi(U) \subset V$, a composição $F \circ \chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $\chi^{-1}(p)$.

Dizemos que uma aplicação contínua $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$, de um conjunto aberto V_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2 , é **diferenciável** em $p \in V_1$ se, dadas parametrizações

$$\chi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \chi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com $p \in \chi_1(U_1)$ e $\varphi(\chi_1(U_1)) \subset \chi_2(U_2)$, a aplicação

$$\chi_2^{-1} \circ \varphi \circ \chi_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em $q = \chi_1^{-1}(p)$.

Exemplo 1.18 Seja S uma superfície regular suave e $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto tal que $S \subset V$. Seja $F : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A restrição de F a S é uma função diferenciável sobre S . De fato, para qualquer $p \in S$ e qualquer parametrização

$\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em p , a função $F \circ \chi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Podemos tomar, por exemplo, a *função altura* relativa a um vetor unitário $u \in \mathbb{R}^3$, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(p) = \langle p, v \rangle$, $p \in S$. O número $h(p)$ é a altura de $p \in S$ relativa ao plano normal a u e passando pela origem de \mathbb{R}^3 . ■

Exemplo 1.19 Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares suaves. Suponha que $S_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$, onde V é um conjunto aberto de \mathbb{R}^3 , e que $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma função diferenciável tal que $\varphi(S_1) \subset S_2$. Então a restrição $\varphi|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação diferenciável. De fato, dado $p \in S_1$ e parametrizações $\chi_1 : U_1 \rightarrow S_1$, $\chi_2 : U_2 \rightarrow S_2$, com $p \in \chi_1(U_1)$ e $\varphi(\chi_1(U_1)) \subset \chi_2(U_2)$, temos que a aplicação

$$\chi_2^{-1} \circ \varphi \circ \chi_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável. Considere, por exemplo, a aplicação diferenciável $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y, z) = (xa, yb, cz)$, onde a, b e c são números reais não nulos. Dessa forma, a restrição $\varphi|_{\mathbb{S}^2}$ é uma aplicação diferenciável da esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

sobre o elipsóide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

■

Entendemos por *vetor tangente* à S em p o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.

Proposição 1.20 *Seja $\chi : V \rightarrow S$ uma parametrização de S e seja $q \in V$. O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$d\chi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes à S em $\chi(q)$.

Demonstração. Ver [10], p. 98. ■

O plano $d\chi_q(\mathbb{R}^2)$ não depende da parametrização χ . O plano **plano tangente** à S em p , denotado por $T_p S$, é o plano passando por p e paralelo ao plano $d\chi_q(\mathbb{R}^2)$. A escolha de uma parametrização χ determina uma base $\{\chi_u, \chi_v\}$ de $T_p S$, chamada de *base associada* à χ .

Sabemos que se $a \in F(U)$ é um valor regular da função $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, então o conjunto $F^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Vamos agora enunciar um resultado que nos possibilita calcular o plano tangente à essa superfície dada implicitamente em um ponto pertencente à superfície.

Proposição 1.21 *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $a \in F(U)$ um valor regular e $S = F^{-1}(a)$. O plano tangente à S em $p \in S$ é paralelo ao plano dado pelo núcleo da transformação linear $dF_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja,*

$$T_p S = p + \ker dF_p = p + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; dF_p(x, y, z) = 0\}.$$

Demonstração. Ver [6], p. 80. ■

Exemplo 1.22 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular dada implicitamente por $S = F^{-1}(0)$, onde $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $0 \in F(U)$ é um valor regular de F . O plano tangente à S em $p = (x_0, y_0, z_0)$ é vertical, ou seja, $T_p S$ é paralelo ao vetor $(0, 0, 1)$ se, e somente se, $F_z(p) = 0$. De fato, como $\nabla F(p)$ é normal à S em p ,*

$$\nabla F(p) \perp (0, 0, 1) \Leftrightarrow \langle \nabla F(p), (0, 0, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow F_z(p) = 0.$$

Vamos mostrar que a condição para $T_p S$ ser vertical é equivalente à condição para a aplicação projeção no plano (x, y) deixar de ser um difeomorfismo local em p .

Considere a aplicação $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Vamos mostrar que se $p \in S$ é tal que $F_z(p) = 0$, ou seja, $T_p S$ é vertical, então π deixa de ser um difeomorfismo local em p . De fato, considere $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S e $(u_0, v_0) \in U$ tal que $\chi(u_0, v_0) = p$. Por definição, a aplicação π é um difeomorfismo local se a composta $\pi \circ \chi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ o é.

A matriz Jacobiana de $\pi \circ \chi$ no ponto (u_0, v_0) é dada pela matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

onde os termos dessa matriz são os termos das duas primeiras linhas da matriz Jacobiana de χ em (u_0, v_0) .

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, basta mostrarmos que B é invertível se, e somente se, $(0, 0, 1) \notin d\chi_{(u_0, v_0)}$. Mostrar a equivalência acima é o mesmo que mostrar que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(B) = 0.$$

Para a primeira implicação temos que o sistema tem solução não trivial, mas o sistema formado pelas duas primeiras linhas (em outras palavras, formado pela matriz B) só admite a solução trivial, logo $\det(B) = 0$. Para a recíproca, se $\det(B) = 0$ uma das linhas da matriz maior é combinação linear das outras. Retirando-a, o sistema que sobra

possui uma única solução, que também satisfaz a equação retirada, concluindo assim a equivalência. ■

Exemplo 1.23 Considere a superfície $S = F^{-1}(0)$ dada pela função diferenciável

$$F(x, y, z) = y - z^3 + xz.$$

O vetor gradiente de F é dado por $\nabla F(x, y, z) = (z, 1, x - 3z^2) \neq 0$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, o que nos garante que $F^{-1}(0)$ é de fato uma superfície regular. Os pontos $p \in S$ para os quais o plano tangente $T_p S$ é vertical são os pontos que satisfazem $F(p) = F_z(p) = 0$, ou seja, os pontos em que $x = 3z^2$ e $y = -2z^3$. Podemos parametrizar esses pontos por uma curva em \mathbb{R}^3 cujo traço está contido em S : $\gamma(t) = (3t^2, -2t^3, t)$. A imagem da projeção dessa curva no plano (x, y) é uma cúspide (ver Figura 1.7). ■

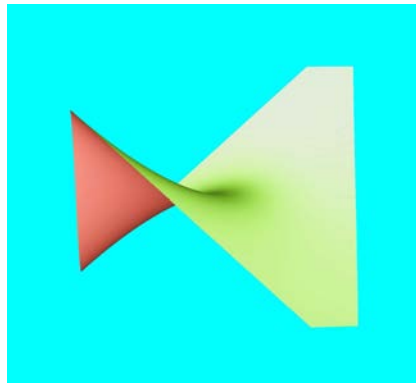


Figura 1.7: Figura do Exemplo 1.23.

Vamos enunciar um importante resultado, o Teorema de Sard. A notação \rightsquigarrow indica que o domínio é um conjunto aberto.

Teorema 1.24 (Teorema de Sard) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave. Então o conjunto de valores não regulares de f é um conjunto de medida nula em \mathbb{R}^p , isto é, tem medida zero no sentido da medida de Lebesgue.*

Demonstração. Ver [6], p. 73. ■

Uma aplicação do Teorema de Sard é o seguinte:

Corolário 1.25 *Genericamente, um sistema com q equações e p incógnitas tal que $p < q$ não tem solução.*

Demonstração. Considere o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_p) = a_1 \\ \vdots \\ f_q(x_1, \dots, x_p) = a_q, \end{cases}$$

onde cada $f_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Defina $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$. Pelo Teorema de Sard é de se esperar que $a = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^q$ seja valor regular de f . Mas neste caso, $x \in f^{-1}(a)$ implica que x é ponto regular de f , ou seja, df_x é sobrejetora, o que é absurdo, pois $p < q$ e dessa forma, $f^{-1}(a) = \emptyset$. Assim, é de se esperar que o sistema dado não tenha solução. ■

1.3 Campos de vetores

O objetivo dessa seção é apresentar algumas definições acerca de campos de vetores, definições estas de grande utilidade posterior no estudo das equações diferenciais implícitas, estas últimas apresentadas no Capítulo 3.

Definição 1.26 Um **campo de vetores** em um conjunto aberto V de uma superfície regular S é uma correspondência que associa a cada $p \in V$ um vetor $X(p) \in T_p S$. O campo de vetores é dito **diferenciável em p** se para alguma parametrização $\chi : U \rightarrow \chi(U)$ de S em p as funções $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$X(\chi(u, v)) = a(u, v)\chi_u(u, v) + b(u, v)\chi_v(u, v),$$

são diferenciáveis em q , onde $\chi(q) = p$.

Observação 1.27 A definição acima independe da escolha da parametrização $\chi : U \rightarrow \chi(U)$ de S em p .

Exemplo 1.28 Seja S o toro de revolução obtido girando o círculo

$$\begin{cases} (y - a)^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

em torno do eixo z . Então o campo de vetores X em S que associa a cada $p \in S$ o vetor unitário tangente ao meridiano, que passa por p , em p é diferenciável. De fato, seja $\chi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow S$ a parametrização de S dada por

$$\chi(u, v) = \left(\left(a + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, \left(a + r \cos \frac{u}{r} \right) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} \frac{u}{r} \right).$$

então, $X(\chi(u, v)) = \chi_u(u, v)$, pois $\chi_u(u, v)$ é o vetor tangente ao meridiano que passa por $\chi(u, v)$, em $\chi(u, v)$ e

$$\|\chi_u(u, v)\| = \left\| \left(-\operatorname{sen} \frac{u}{r} \cos v, -\operatorname{sen} \frac{u}{r} \operatorname{sen} v, \cos \frac{u}{r} \right) \right\| = 1.$$

Logo, X é diferenciável em $\chi((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$. De modo análogo, podemos provar que X é diferenciável nos outros pontos do toro. ■

Definição 1.29 Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow V$ é uma **trajetória de X** se $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$.

Definição 1.30 Um ponto $p \in V$ é um **ponto singular** do campo de vetores X se $X(p) = 0$.

Podemos classificar pontos singulares de um campo X a partir de sua parte linear, ou seja, se $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo de vetores dado por $X(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$, a matriz de sua parte linear é dada por

$$JX(p) = \begin{pmatrix} a_x(p) & a_y(p) \\ b_x(p) & b_y(p) \end{pmatrix},$$

onde a_x , a_y e b_x , b_y são as derivadas parciais de a e b com respeito a x e y , respectivamente.

O determinante de $JX(p)$ é dado por $\det JX(p) = a_x(p)b_y(p) - a_y(p)b_x(p)$, o traço por $T(p) = a_x(p) + b_y(p)$ e definimos o número Δ_p por $\Delta_p = T^2 - 4 \det JX(p)$.

Definição 1.31 Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores diferenciável. Um ponto singular p de X é dito ser **não degenerado** se $\det JX(p) \neq 0$. Caso contrário, p é dito um **ponto singular degenerado**. Se p é um ponto singular não degenerado, temos a seguinte classificação:

- O ponto p é uma **sela** se $\det JX(p) < 0$, $\Delta_p > 0$ e $T(p) \in \mathbb{R}$.
- O ponto p é um **nó** se $\det JX(p) > 0$, $\Delta_p > 0$ e $T(p) \neq 0$.
- O ponto p é um **foco** se $\det JX(p) > 0$, $\Delta_p < 0$ e $T(p) \neq 0$.
- O ponto p é um **centro** se $\det JX(p) > 0$, $\Delta_p < 0$ e $T(p) = 0$.
- O ponto p é um **nó impróprio** se $\det JX(p) > 0$, $\Delta_p = 0$ e $T(p) \neq 0$.

Dois campos de vetores $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde U e V são abertos, são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$

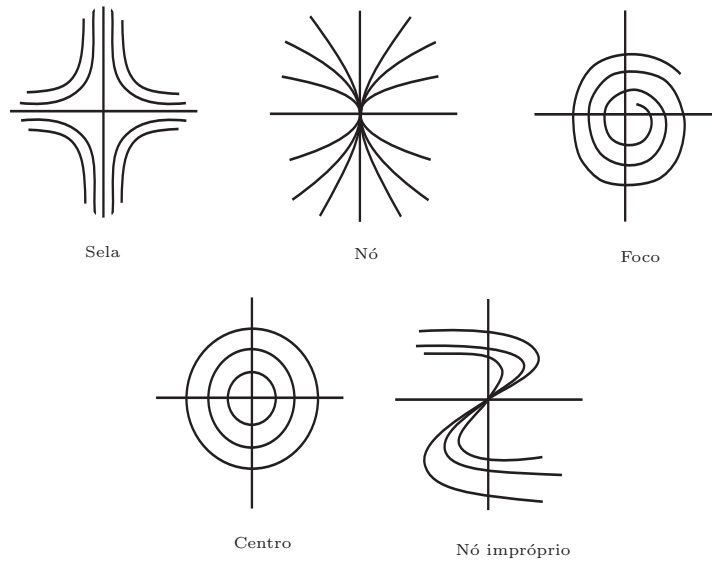


Figura 1.8: Figura da Definição 1.31: retratos de fase

que leva as trajetórias de um nas trajetórias do outro. Se além disso, tivermos satisfeita a igualdade

$$h \circ \varphi_t(p) = \psi_s(h(p)),$$

onde $\varphi_t(p)$ (resp. $\psi_s(h(p))$) é a trajetória do campo X (resp. Y) que passa por p em $t = 0$ (resp. $h(p)$ em $s = 0$), então eles são ditos **topologicamente conjugados**.

Sabemos do Teorema de Grobman-Hartman (ver [20]) que se p é uma singularidade não degenerada que não é centro de um campo $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde U é um aberto, então, em uma vizinhança deste ponto, o campo não linear X é topologicamente conjugado ao campo dado pela sua parte linear numa vizinhança de 0. Sabemos também que no espaço de campos de vetores de classe C^r , munido da topologia C^r , o conjunto de campos de vetores cujas singularidades são não degeneradas e não são centros é aberto e denso (ver [20]).

Exemplo 1.32 Considere o campo $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$X(x, y) = (x^2 + y^2 - 2, x^2 - y).$$

Os pontos singulares de X são $p_1 = (1, 1)$ e $p_2 = (-1, 1)$. Vamos classificar essas singularidades.

(i) Para o ponto $p_1 = (1, 1)$, ao calcularmos a parte linear do campo obtemos

$$JX(p_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, concluímos que $\det JX(p_1) = -6$, $T(p_1) = 1$ e $\Delta_{p_1} = 25$. Portanto, p_1 é uma sela.

(ii) Para o ponto $p_2 = (-1, 1)$, ao calcularmos a parte linear do campo obtemos

$$JX(p_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, concluímos que $\det JX(p_2) = 6$, $T(p_2) = -3$ e $\Delta_{p_2} = -15$. Portanto, p_2 é um foco. ■

1.4 Formas diferenciais

Vamos fazer nessa seção uma introdução sobre formas diferenciais, apresentando o que será necessário para o prosseguimento do trabalho.

Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão finita n . Denota-se por $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ o espaço vetorial dos funcionais lineares $F : E \rightarrow \mathbb{R}$, o qual chamamos de **espaço dual** de E o qual satisfaz $\dim E^* = \dim E$.

Dada uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de E , existe uma base $\mathcal{B}^* = \{F_1, \dots, F_n\}$ de E^* chamada **base dual** de \mathcal{B} satisfazendo:

$$F_i(u_j) = \delta_{ij}, \quad \text{onde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Logo, dado $u \in E$ com $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, segue da forma como foi contruída a base dual que $F_i(u) = \alpha_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Consequentemente:

$$u = F_1(u)u_1 + \dots + F_n(u)u_n.$$

Dessa forma, dado um funcional linear $F \in E^*$, $F = \sum_{i=1}^n \beta_i F_i$, segue que $F(u_i) = \beta_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim,

$$F = F(u_1)F_1 + \dots + F(u_n)F_n.$$

Exemplo 1.33 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em U . Sua diferencial em $x \in U$ é o funcional linear $df(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ dado da seguinte maneira:

Fixada a base canônica $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n e dado $v \in \mathbb{R}^n$, com $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$,

temos:

$$df(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \alpha_i.$$

Denotemos por $\mathcal{B}^* = \{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ a base dual de \mathcal{B} . Como

$$df(x) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

então a expressão de $df(x)$ em termos da base \mathcal{B}^* é

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

■

Definição 1.34 *Uma forma diferencial de grau 1, ou uma 1-forma diferencial, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que a cada $x \in U$ associa um funcional linear $\omega(x)$ (ou simplesmente ω_x) em $(\mathbb{R}^n)^*$.*

Assim, dada ω uma 1-forma diferencial em U , existem funções $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que

$$\omega(x) = \omega_x = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i, \quad (1.1)$$

onde $\{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ é a base dual da base canônica de \mathbb{R}^n . Consequentemente, para $i = 1, \dots, n$, temos:

$$a_i(x) = \omega(x) \cdot e_i = \omega_x(e_i).$$

A classe de diferenciabilidade de ω é C^r quando as funções a_i acima forem de classe C^r .

Exemplo 1.35 Considere a 1-forma $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 dada por $\omega(x_1, x_2) = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2$. A classe de diferenciabilidade de ω é C^∞ , uma vez que as funções $a_1(x_1, x_2) = -x_2$ e $a_2(x_1, x_2) = x_1$ são funções de classe C^∞ . ■

Sejam $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ uma 1-forma definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$ dado por $u = (u_1, \dots, u_n)$. Temos

$$\begin{aligned} \omega_x(u) &= \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i(u) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(x) u_i \\ &= \langle (a_1(x), \dots, a_n(x)), (u_1, \dots, u_n) \rangle. \end{aligned}$$

Para cada $x \in U$, o núcleo de ω_x é o conjunto

$$\ker \omega_x = \{u \in \mathbb{R}^n ; \omega_x(u) = 0\}.$$

Exemplo 1.36 Seja $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ a 1-forma dada no Exemplo 1.35. O núcleo de ω_x é dado por

$$\ker \omega_x = \{u \in \mathbb{R}^2; \langle u, (-x_1, x_2) \rangle = 0\}.$$

■

Dada uma 1-forma $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, ela associa a cada $x \in U$ o funcional linear ω_x . Se este funcional é não nulo, o seu núcleo $\ker \omega_x$ é um subespaço de dimensão $(n - 1)$ em \mathbb{R}^n . Em particular, se $n = 3$ o conjunto $\ker \omega_x$ é um plano passando pela origem. Dessa forma, dada uma 1-forma ω como acima, quando $n = 3$ temos um campo de planos associado, a saber os planos $\ker \omega_x$.

Exemplo 1.37 Considere em \mathbb{R}^3 as coordenadas x, y e p e a 1-forma $\omega = dy - p dx$. Seja $q = (x_0, y_0, p_0) \in \mathbb{R}^3$. O conjunto $\ker \omega_q$ é um plano do campo de planos dado por $\omega = 0$ em \mathbb{R}^3 . Dessa forma, um ponto (a, b, c) pertence ao plano $\ker \omega_q$ se, e somente se,

$$0 = \omega_q(a, b, c) = b - p_0 a \Leftrightarrow p_0 a = b.$$

Consequentemente, $(a, b, c) \in \ker \omega_q$, se e somente se,

$$(a, b, c) = (a, p_0 a, c) = a(1, p_0, 0) + c(0, 0, 1).$$

Portanto, o plano $\ker \omega_q$ é gerado pelos vetores $(1, p_0, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

■

Contorno aparente e envoltórias

Estudaremos neste capítulo o contorno aparente de uma superfície, a envoltória de uma família de funções e os duais, conceitos estes que serão posteriormente relacionados com equações diferenciais implícitas. As referências usadas neste estudo são [6] e [16], onde podemos encontrar os resultados que aqui detalharemos.

Observamos que, neste capítulo, sempre que formos nos referir à derivada parcial de uma função com relação à uma variável, por exemplo t , usaremos a notação $\frac{\partial F}{\partial t}$, reservando assim a notação F_t para outro objetivo, a menos de menção contrária.

2.1 Contorno aparente e envoltórias

Definição 2.1 *Sejam M uma superfície regular suave em \mathbb{R}^3 e $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor fixado. O conjunto*

$$\mathcal{C}_v = \{q \in M ; T_q M \text{ é paralelo a } v\}$$

*é chamado de **conjunto criminante de M na direção v** . Seja Γ o plano perpendicular a v pela origem. O conjunto dos pontos de Γ que são imagem da projeção ortogonal do criminante de M em Γ é chamado de **contorno aparente de M na direção v** (ver Figura 2.1).*

Observação 2.2 *Neste trabalho tomaremos $v = (0, 0, 1)$. No entanto se tomarmos uma direção u qualquer, basta aplicarmos uma rotação (a qual preserva a geometria da superfície estudada) de modo que o vetor u seja levado no vetor v . Dessa forma o criminante e o contorno aparente de uma superfície na direção u terão a mesma geometria (em particular, serão difeomorfos) àqueles na direção v .*

Exemplo 2.3 *Seja M a superfície dada como imagem inversa do valor regular 0 da função diferenciável $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, t) = t^3 + xt + y$. Note que, de fato, 0 é valor regular de F , uma vez que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \neq 0$, para todo $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. Calculemos*

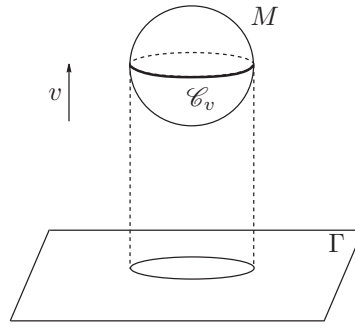


Figura 2.1: Exemplo de contorno aparente.

o criminante e o contorno aparente na direção $v = (0, 0, 1)$ de M . Os pontos $q \in M$ tais que T_qM é paralelo ao vetor v são aqueles em que $\langle \nabla F(q), v \rangle = 0$, onde $\nabla F(q)$ é o vetor gradiente de F em q , ou seja, $\frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0$. Portanto, $q = (x, y, t)$ deve satisfazer $x = -3t^2$ e $y = 2t^3$. Assim obtemos:

$$\mathcal{C}_v = \{(-3t^2, 2t^3, t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}.$$

Consequentemente, o contorno aparente de M na direção v é o conjunto

$$\{(-3t^2, 2t^3) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}.$$

Note que o conjunto acima é uma cúspide. ■

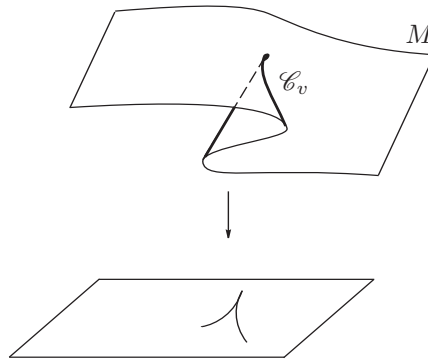


Figura 2.2: Contorno aparente do Exemplo 2.3.

Fixemos o sistema canônico de coordenadas ortogonais (x, y, t) em \mathbb{R}^3 . Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, 0 um valor regular de F e $M = F^{-1}(0)$ uma superfície regular suave. Considere a aplicação $\mathcal{C}_F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de **aplicação criminante**, definida por

$$\mathcal{C}_F(x, y, t) = \left(F(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) \right). \tag{2.1}$$

A proposição a seguir nos dá condições que garantem que o criminante e o contorno aparente de uma superfície regular M na direção $v = (0, 0, 1)$ são, localmente, curvas suaves e regulares.

Proposição 2.4 *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suave e 0 um valor regular de F . Considere a superfície regular $M = F^{-1}(0)$ e $v = (0, 0, 1)$. Suponha que $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \neq 0$, para todo $q \in \mathcal{C}_v$. Então o criminante e o contorno aparente de M na direção v são, localmente, curvas regulares suaves.*

Demonstração. O criminante \mathcal{C}_v de M é dado como $\mathcal{C}_F^{-1}(0, 0)$, onde \mathcal{C}_F é a aplicação criminante dada em (2.1). De fato, $q \in \mathcal{C}_F^{-1}(0, 0)$ se, e somente se, $F(q) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0$. Essas condições são equivalentes à dizer que $q \in M$ e que o plano tangente à M em q é paralelo ao vetor $v = (0, 0, 1)$, respectivamente. Seja $q \in \mathcal{C}_v$. Logo, como 0 é valor regular de F , então $\frac{\partial F}{\partial x}(q) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(q) \neq 0$. Assim, como a matriz Jacobiana de \mathcal{C}_F em q é

$$J\mathcal{C}_F(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(q) & \frac{\partial F}{\partial y}(q) & \frac{\partial F}{\partial t}(q) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(q) & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y}(q) & \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

e $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \neq 0$ por hipótese, então $J\mathcal{C}_F(q)$ tem posto máximo e, conseqüentemente, $(0, 0)$ é valor regular de \mathcal{C}_F . Portanto, \mathcal{C}_v é uma curva regular suave. Consideremos a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, t) = (x, y)$. Pelo o Teorema da Aplicação Implícita aplicado à \mathcal{C}_F existe um aberto U de \mathbb{R}^3 contendo q tal que podemos escrever as variáveis t e y em função de x em $\mathcal{C}_v \cap U$ (assumindo, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial F}{\partial y}(q) \neq 0$). Assim, em $\pi(\mathcal{C}_v \cap U)$, y é uma função suave de x , ou seja, $\pi(\mathcal{C}_v \cap U)$ é localmente uma curva suave regular em \mathbb{R}^2 . ■

Seja $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere a função $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F_t(x, y) = F(x, y, t).$$

Assim, a partir de F obtemos uma família de funções F_t . Suponhamos que 0 é valor regular de cada F_t . Obtemos assim uma família de curvas regulares em \mathbb{R}^2 (pois, se $F(q) = 0$, então $\frac{\partial F}{\partial x}(q) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(q) \neq 0$). Ainda mais, 0 é um valor regular de F e $M = F^{-1}(0)$ é uma superfície regular suave em \mathbb{R}^3 . Nosso intuito neste momento é definir e estudar a envoltória da família F_t . Veremos que a envoltória dessa família coincide com o contorno aparente na direção do vetor $v = (0, 0, 1)$ da superfície suave $M = F^{-1}(0)$, cujo plano tangente em q é vertical, isto é, paralelo ao eixo t se, e somente se, $\langle \nabla F(q), v \rangle = 0$ ($\frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0$). Com as considerações acima, temos:

Definição 2.5 A *envoltória* ou *discriminante* da família de funções F_t definida por F é o conjunto:

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \exists t \in \mathbb{R} \text{ com } F(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \right\}.$$

Exemplo 2.6 Considere a função $F(x, y, t) = x \cos t + y \sin t - \cos t \sin t$. Como $\nabla F(x, y, t) = (\cos t, \sin t, -x \sin t + y \cos t + \sin^2 t - \cos^2 t)$ então 0 é um valor regular de F_t , para cada $t \in \mathbb{R}$. Assim, F define implicitamente uma superfície em \mathbb{R}^3 chamada helicóide. Para encontrarmos a envoltória da família F_t basta resolvermos o sistema:

$$\begin{cases} x \cos t + y \sin t - \cos t \sin t = 0 \\ -x \sin t + y \cos t + \sin^2 t - \cos^2 t = 0 \end{cases}.$$

Aplicando a regra de Cramer, podemos mostrar que a envoltória de F é dada pelo conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\},$$

que no plano (x, y) é o traço da curva plana conhecida como astróide (ver Figura 2.3). ■

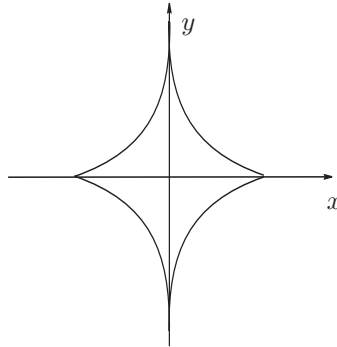


Figura 2.3: Astróide do Exemplo 2.6.

Exemplo 2.7 Considere a curva $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ppca. Defina a seguinte família de curvas em \mathbb{R}^2 : para cada ponto $\gamma(t)$ tome o círculo centrado em $\gamma(t)$ e que passa pela origem $(0, 0)$.

Assumindo que a origem não pertence ao traço de γ , ou seja, $\gamma(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in I$, então cada círculo da família acima pode ser dado como o conjunto $C_t = F_t^{-1}(0)$, onde $F(x, y, t) = \|(\gamma_1(t) - x, \gamma_2(t) - y)\|^2 - \|(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\|^2$ e 0 é um valor regular de cada função $F_t(x, y) = F(x, y, t)$.

A envoltória \mathcal{D} da família F_t é dada pelo conjunto

$$\mathcal{D} = \{(0, 0)\} \cup \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2; v = 2\langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{n}(t), t \in I\},$$

onde $\mathbf{n}(t)$ é o vetor normal unitário de γ em t . De fato,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) - X \rangle - 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = -2\langle \gamma'(t), X \rangle,$$

onde $X = (x, y)$. Assim, $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$ se, e somente se, $X = \lambda \mathbf{n}(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. De $F(x, y, t) = 0$ obtemos $-2\langle \gamma'(t), X \rangle + \|X\|^2 = 0$ e como $\|X\|^2 = \lambda^2$ temos $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2\langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle$. É importante ressaltar que a envoltória não depende da parametrização, ou seja, se γ é uma curva que não está parametrizada por comprimento de arco, basta tomarmos uma reparametrização $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta = \gamma \circ h^{-1}$, onde $h : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo e de modo que β esteja parametrizada por comprimento de arco. Dessa forma $\mathcal{D}_\beta = \{(0, 0)\} \cup \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2; v = 2\langle \beta(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle \mathbf{n}_\beta(s), s \in J\}$. Calculando a envoltória \mathcal{D}_γ para $F(x, y, t) = \|(\beta \circ h)(t) - (x, y)\|^2 - \|(\beta \circ h)(t)\|^2$ obtemos $\mathcal{D}_\gamma = \mathcal{D}_\beta$. Os cálculos são omitidos pois são análogos aos feitos anteriormente.

Agora note que $\langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{n}(t)$ é o pé da perpendicular baixada da origem na reta tangente à curva γ em t . Consequentemente, a envoltória da família F_t é o conjunto dos pontos obtidos pela reflexão de $(0, 0)$ em relação a reta tangente à γ em t , para cada t . O lugar geométrico desses pontos é a curva chamada de **ortotômica** de γ relativa a $(0, 0)$. Logo, a ortotômica é obtida por uma expansão radial de fator 2 da curva **pedal**, definida por $\alpha(t) = \langle \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{n}(t)$. ■

É bastante pertinente questionar sobre a relação entre cada curva $C_t = F_t^{-1}(0)$ e a envoltória \mathcal{D} . Esta informação será obtida posteriormente.

Observação 2.8 *Segue das Definições 2.1 e 2.5 que a envoltória da família F_t é o contorno aparente na direção $v = (0, 0, 1)$ da superfície regular $M = F^{-1}(0)$. Portanto, a envoltória é localmente uma curva regular suave em \mathbb{R}^2 nos pontos $\pi(q)$, onde $q \in \mathcal{C}_v$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \neq 0$ e π é a projeção ortogonal nas duas primeiras coordenadas.*

Exemplo 2.9 Dada a função $F(x, y, t) = x \cos t + y \operatorname{sent} - \cos t \operatorname{sent}$, como no Exemplo 2.6, vimos que $M = F^{-1}(0)$ é um helicóide em \mathbb{R}^3 e a envoltória de F é dada pelo astróide no plano (x, y) . A partir da observação anterior concluímos que o astróide é o contorno aparente na direção do vetor $v = (0, 0, 1)$ do helicóide M . ■

Exemplo 2.10 Considere a função $F(x, y, t) = t^2 + x^2 + y^2 - 1$. Como $\nabla F(x, y, t) = (2x, 2y, 2t)$, então $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular de F_t se, e somente se, $F_t(0, 0) \neq 0$, isto é, $t \neq \pm 1$. Neste caso, a superfície $F^{-1}(0)$ é a esfera unitária \mathbb{S}^2 . A envoltória da família $F_t = 0$, para $t \neq \pm 1$ (portanto, o contorno aparente na direção do vetor $v = (0, 0, 1)$ de \mathbb{S}^2) é o círculo unitário \mathbb{S}^1 no plano (x, y) (ver Figura 2.4). ■

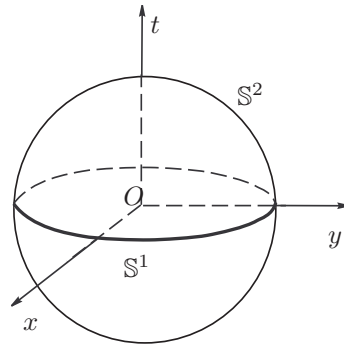


Figura 2.4: $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

Observação 2.11 (A envoltória E_2) Seja $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Na Definição 2.5 estudamos a envoltória \mathcal{D} da família F_t . Vamos agora definir a envoltória E_2 , definição esta com um maior apelo geométrico. Veremos que $E_2 \subset \mathcal{D}$.

A **envoltória** E_2 é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais existe uma curva regular $\gamma : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (essa notação é usada para denotar que o domínio é uma vizinhança de t_0) com $\gamma(t_0) = (x, y)$ e, para todo t no domínio de γ , são válidas as seguintes condições:

- (i) $\gamma(t) \in C_t$, onde $C_t = F_t^{-1}(0)$, portanto $\text{Im}(\gamma) \subset C_t$;
- (ii) As retas tangentes à C_t e à γ em $\gamma(t)$ coincidem.

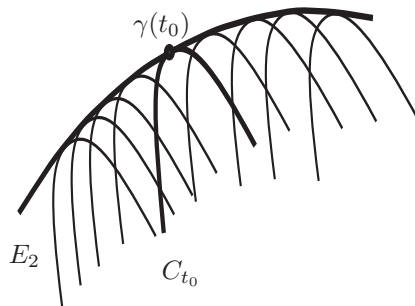


Figura 2.5: Envoltória E_2 .

Note que a primeira condição é equivalente à $F(\gamma(t), t) = 0$ e que a segunda é equivalente à $\text{Im}(d\gamma(t)) = \ker dF_t(\gamma(t))$, ou ainda,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t), t)\gamma'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t), t)\gamma'_2(t) = 0,$$

onde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Seja $\gamma(t) \in E_2$. Derivando $F(\gamma(t), t) = 0$ em t , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t), t)\gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t), t)\gamma_2'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$$

e, portanto, $\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$, ou seja, $\gamma(t) \in \mathcal{D}$. Mostramos assim que $E_2 \subset \mathcal{D}$.

Exemplo 2.12 Seja $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1$. As curvas $C_t = F_t^{-1}(0)$ são, para cada $t \in \mathbb{R}$, um círculo no plano (x, y) de raio 1 centrado em $(t, 0)$. Como $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -2(x - t)$, então

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \pm 1\},$$

ou seja, a envoltória da família F_t é um par de retas paralelas ao eixo x . Vamos calcular agora a envoltória E_2 para este exemplo. Podemos tomar a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, 1)$ ou por $\gamma(t) = (t, -1)$. Claramente γ satisfaz as duas condições da definição da envoltória E_2 , garantindo assim que

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \pm 1\}.$$

■

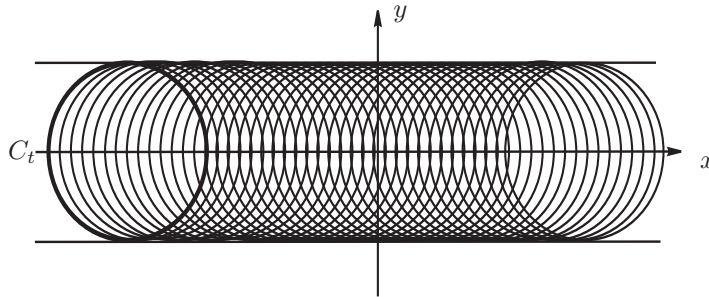


Figura 2.6: Figura do Exemplo 2.12.

Exemplo 2.13 Seja $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, t) = x - t^k$. Note que 0 é valor regular de F_t para todo $t \in \mathbb{R}$ pois $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t) = 1$ para todo (x, y, t) . Vamos mostrar que $E_2 = \emptyset$. Suponha que $(x_0, y_0) \in E_2$, ou seja, existe uma curva $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e que satisfaz as duas condições da definição. Da segunda condição obtemos que $\gamma_1(t) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$, uma vez que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) = 0$ para todo (x, y, t) . Agora, da primeira condição temos

$$F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = F(c, \gamma_2(t), t) = c - t^k = 0,$$

e portanto, t também é constante, o que é um absurdo. Neste exemplo mostramos que $E_2 = \emptyset$, mas $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\} \neq \emptyset$. ■

O próximo resultado nos diz que se aplicarmos um difeomorfismo h na coordenada t de uma função F , onde 0 é um valor regular da família F_t , 0 também será valor regular de $G(x, y, t) = F(x, y, h(t))$, e além disso, a envoltória da nova família de funções $G_t(x, y) = G(x, y, t)$ permanecerá a mesma.

Proposição 2.14 *Sejam $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave e 0 um valor regular de F_t , para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um difeomorfismo e defina $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, t) = F(x, y, h(t))$. Nessas condições, 0 é valor regular de cada função G_t e $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_G$.*

Demonstração. Considere a aplicação $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $H(x, y, t) = (x, y, h(t))$. Dessa forma, a função G fica definida como $G = F \circ H$. Derivando a expressão anterior obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, h(t))h'(t) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, h(t)) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, h(t)) \end{cases} .$$

Como 0 é valor regular de cada função F_t , $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, h(t)) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, h(t)) \neq 0$ e, portanto, 0 é valor regular de cada G_t . Temos também $\frac{\partial G}{\partial t}(x, y, t) = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, h(t)) = 0$, pois h é difeomorfismo, ou seja, $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, se existe t_1 tal que $G = \frac{\partial G}{\partial t} = 0$ em (x, y, t_1) , então existe $t_2 = h(t_1)$ tal que $F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ em (x, y, t_2) . A recíproca é válida pois, como h é difeomorfismo, $t_1 = h^{-1}(t_2)$ e, portanto $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_G$. ■

Sejam $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave e 0 valor regular de F_t , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.15 *A projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, t) = (x, y)$, onde $M = F^{-1}(0)$ é chamada de **aplicação dobra**. O conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ de pontos singulares da aplicação dobra (os pontos $q \in M$ tais que $F(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0$) é chamado de **conjunto dobra** de F .*

Exemplo 2.16 Considere a função

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + (y - t^2)^2 - \left(t^2 + \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^2 \right).$$

A família de curvas C_t obtida a partir de F é a família de círculos no plano (x, y) passando por $(0, \frac{1}{4})$ e centrados na parábola $y = x^2$. Vamos encontrar o seu conjunto dobra.

Reescrevendo a função F e calculando a derivada $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t)$, obtemos:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = x^2 - 2xt + y^2 - 2yt^2 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{16} \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -2x - 4yt + t \end{cases} .$$

Igualando as expressões a zero, podemos isolar x na segunda, ou seja, $x = \frac{1}{2}(t - 4yt)$. Substituindo na primeira temos $-4t^2 + 64y^2t^2 + 16y^2 - 1 = 0$, e assim, $(16y^2 - 1)(4t^2 + 1) = 0$. Consequentemente $y = \pm \frac{1}{4}$. A partir dos valores de y encontrados, pode-se concluir que o conjunto dobra é dado por

$$\Sigma = \left\{ \left(0, \frac{1}{4}, t \right); t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \left(t, -\frac{1}{4}, t \right); t \in \mathbb{R} \right\}$$

Nesse exemplo Σ é uma curva regular suave (desconexa) mesmo nos pontos onde $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -4y + 1 = 0$, mas a projeção em \mathbb{R}^2 da parte que anula a segunda derivada é um ponto isolado da envoltória. Portanto, a parte suave da envoltória é a projeção dos pontos de Σ onde $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \neq 0$ (ver Figura 2.7). ■

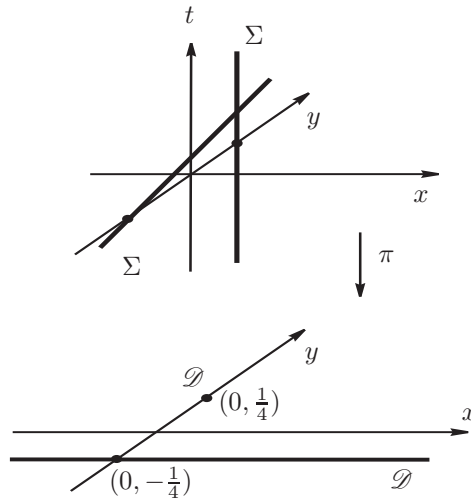


Figura 2.7: Figura Exemplo 2.16.

Observação 2.17 Note que o conjunto dobra de F coincide com o discriminante na direção $v = (0, 0, 1)$ da superfície $M = F^{-1}(0)$ e, conseqüentemente, a envoltória \mathcal{D} da família F_t é dada pela projeção por π do conjunto dobra em \mathbb{R}^2 , ou seja, $\mathcal{D} = \pi(\Sigma)$. Além disso, segue da Proposição 2.4 que, se $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \neq 0$, então $\Sigma = \mathcal{C}_F^{-1}(0, 0)$ é uma curva regular suave contida em M , onde \mathcal{C}_F é aplicação discriminante definida como em (2.1).

No próximo resultado respondemos à questão que deixamos em aberto anteriormente: a relação entre cada curva C_t e a envoltória \mathcal{D} de uma família de funções F_t .

Proposição 2.18 *Sejam F e F_t tomadas como acima. Então a reta tangente à $\pi(\Sigma)$ coincide com a reta tangente da curva C_t .*

Demonstração. Seja $q = (x_0, y_0, t_0) \in \Sigma$. A reta tangente à $\pi(\Sigma)$ em (x_0, y_0) é a projeção da reta tangente à Σ em q que, por sua vez, é paralela ao núcleo de $d\mathcal{C}_F(q)$, com \mathcal{C}_F dada como em (2.1). Logo, um vetor diretor (ζ_1, ζ_2, τ) da reta tangente à Σ em q satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(q)\zeta_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(q)\zeta_2 = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(q)\zeta_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}(q)\zeta_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q)\tau = 0 \end{cases}.$$

Se (ζ_1, ζ_2, τ) é diretor da reta tangente à Σ em q , então (ζ_1, ζ_2) é vetor diretor de $\pi(\Sigma)$ pois satisfaz a primeira equação. Por outro lado, se (ζ_1, ζ_2) é diretor da reta tangente à $\pi(\Sigma)$, basta tomarmos

$$\tau = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(q)\zeta_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}(q)\zeta_2\right)}{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q)}$$

e as duas equações serão satisfeitas, concluindo a demonstração. ■

Concluimos assim que a parte da envoltória correspondendo à $(x, y, t) \in \Sigma$, próxima de (x_0, y_0, t_0) , onde $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x_0, y_0, t_0) \neq 0$ é curva regular na vizinhança de todo ponto onde \mathcal{C}_F tem posto máximo, em particular, onde a derivada segunda é não nula. O mesmo ocorre para a curva discriminante. Na proposição que faremos logo a seguir, ainda temos que o discriminante é, sob uma condição, localmente uma curva regular, mesmo nos pontos onde a segunda derivada se anula. Queremos saber sobre a curva discriminante.

Definição 2.19 *Um ponto $(x, y) \in \mathcal{D}$ é chamado **ponto de regressão** se existe t tal que $(x, y, t) \in \Sigma$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, y, t) = 0$. Os pontos de \mathcal{D} que não são pontos de regressão são chamados de **regulares**.*

Exemplo 2.20 No Exemplo 2.6, os pontos de regressão são os pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$. De fato, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, y, t) = -x \cos t - y \sin t + 4 \cos t \sin t$. Substituindo as equações $F(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$ na equação acima, obtemos os pontos mencionados. ■

Exemplo 2.21 No Exemplo 2.16, onde calculamos a envoltória da família de círculos centrados na parábola $y = x^2$ e passando por $(0, \frac{1}{4})$, vimos que $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, y, t) = 1 - 4y$. Portanto, o único ponto de regressão é $(0, \frac{1}{4})$. ■

Proposição 2.22 *Considere a função F suave e a família F_t onde 0 é um valor regular de F_t , como nos resultados anteriores. Suponha que $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) = 0$ e que a aplicação \mathcal{C}_F definida como em (2.1) é uma submersão em $q = (x_0, y_0, t_0) \in \Sigma$. Nessas condições, a reta tangente à Σ em q tem como vetor diretor o vetor $v = (0, 0, 1)$. Além disso, os pontos de regressão são aqueles em que a envoltória deixa de ser regular.*

Demonstração. Note que mesmo tendo $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) = 0$ o conjunto dobra Σ ainda é, em uma vizinhança de q , uma curva regular suave, uma vez que $\Sigma = \mathcal{C}_F^{-1}(0, 0)$ e \mathcal{C}_F é uma submersão em q , por hipótese. Sabemos que a reta tangente à Σ em q é paralela ao núcleo de $d\mathcal{C}_F(q)$. Seja $v = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor diretor da reta. Temos então:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(q) & \frac{\partial F}{\partial y}(q) & \frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(q) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}(q) & \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) = 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como por hipótese \mathcal{C}_F é uma submersão em q e a terceira coluna da matriz é nula, a submatriz que resta possui determinante diferente de zero. O sistema linear obtido para calcular o núcleo da diferencial é homogêneo o que garante, pelo observado acima, que $v_1 = v_2 = 0$ e $v_3 \in \mathbb{R}$. Portanto a solução é dada pelos pontos $(0, 0, v_3)$, $v_3 \in \mathbb{R}$ e consequentemente a reta tangente à Σ em q é paralela ao vetor $v = (0, 0, 1)$.

Além disso, pelo Teorema da Aplicação Implícita, em uma vizinhança de $\pi(q)$, a envoltória \mathcal{D} pode ser parametrizada em função de t de forma suave. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ essa parametrização. Mostremos que ela é regular em t_0 se, e somente se, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \neq 0$. Ainda pelo teorema sabemos que $\mathcal{C}_F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = (0, 0)$, ou seja, $(F(\gamma(t), t), \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t)) = (0, 0)$. Diferenciando cada coordenada dessa expressão, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t), t)\gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t), t)\gamma_2'(t) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(\gamma(t), t)\gamma_1'(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}(\gamma(t), t)\gamma_2'(t) = -\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\gamma(t), t) \end{cases}.$$

Se $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\gamma(t), t) = 0$ então temos que $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t) = 0$ pois o sistema possui solução única e como ele é homogêneo essa a solução é a trivial e, portanto γ não é regular, o que é um absurdo. Reciprocamente, se γ não é regular em t , $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\gamma(t), t) = 0$, o que novamente nos leva a um absurdo. Portanto concluímos que os pontos de regressão são aqueles em que a parametrização deixa de ser regular. ■

Exemplo 2.23 (Envoltória da família de normais) Seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana regular ppca com curvatura $k(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos calcular

a envoltória da família de retas normais dessa curva. A equação da reta normal à γ em t é dada pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$\langle (x, y) - (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \rangle = 0.$$

Podemos definir a função $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, t) = \langle (x, y) - (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \rangle = \langle X - \gamma(t), \gamma'(t) \rangle,$$

onde $X = (x, y)$. O vetor gradiente de F em (x, y, t) é dado por:

$$\nabla F(x, y, t) = \left(\begin{array}{ccc} \gamma'_1(t) & \gamma'_2(t) & \langle X - \gamma(t), \gamma''(t) \rangle - 1 \end{array} \right).$$

Como γ é regular, então 0 é valor regular de cada função F . Ainda mais, também é valor regular de F_t . A superfície regular suave $M = F^{-1}(0)$ é tal que as curvas $C_t = F_t^{-1}(0)$ coincidem com as retas normais à γ em t . Vamos calcular a envoltória da família F_t . Como $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = k(t)\langle X - \gamma(t), \mathbf{n}'(t) \rangle - 1$, onde $\mathbf{n}(t)$ é vetor normal unitário de γ em t , temos:

$$k(t)\langle X - \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t), \quad k(t) \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Portanto, para cada $t \in I$, $X = (x, y)$ é o centro de curvatura de γ em t . Então, (x, y) pertence à envoltória precisamente quando é um centro de curvatura: a envoltória das normais é o lugar geométrico dos centros de curvatura, a **evoluta** da curva.

Vamos calcular agora os pontos de regressão de F . Pode-se mostrar que $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, y, t) = 0$ se, e somente se, $k'(t) = 0$, os quais são os parâmetros em que a evoluta de γ deixa de ser regular. De fato, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, y, t) = k'(t)\langle X - \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle$ e como $\langle X - \gamma(t), \mathbf{n}(t) \rangle \neq 0$, segue a afirmação. Fora dos pontos de regressão a evoluta é uma curva regular. ■

2.2 Desdobramentos e aplicações

A partir de agora vamos definir e apresentar alguns resultados sobre desdobramentos versais com o objetivo de estudar a geometria do contorno aparente de uma superfície na direção do vetor $v = (0, 0, 1)$. Além disso, vamos obter formas normais para a projeção $\pi : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Observamos que alguns autores definem como deformação o que aqui chamamos de desdobramento. Isto se dá ao fato de seguirmos a nomenclatura adotada em [6]. Para mais detalhes e demonstrações ver [16].

Considere A e B dois subconjuntos de \mathbb{R}^n contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que A é equivalente à B se existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo p tal que $A \cap U = B \cap U$.

Isso define uma relação de equivalência entre subconjuntos de \mathbb{R}^n contendo p . A classe de equivalência de um conjunto A é chamada de **germe de A em p** e é denotada por (A, p) .

Sejam U e V abertos de \mathbb{R}^n contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, e considere $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves. Dizemos que f é *equivalente* à g se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p tal que $f|_W = g|_W$. Esta relação é claramente uma relação de equivalência no conjunto de aplicações suaves definidas em subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n contendo p . A classe de equivalência de uma aplicação suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com U um aberto de \mathbb{R}^n contendo p , é chamada de **germe de f em p** e é denotada por

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Em algumas situações queremos que todos os elementos das classes de equivalência tenham o mesmo valor de p , digamos $q \in \mathbb{R}^m$. Neste caso usamos a seguinte notação

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q).$$

Vamos adotar a seguinte notação: se $t_0 \in \mathbb{R}$, então $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ denotará uma função definida em alguma vizinhança de t_0 .

Definição 2.24 *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função tal que $f^{(p)}(t_0) = 0$ para todo p tal que $1 \leq p \leq k$ e $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Dizemos que f é do **tipo A_k** em t_0 ou tem uma **singularidade do tipo A_k** em t_0 . Dizer que f é do tipo A_0 significa que $f'(t_0) \neq 0$. Dizer que f é do tipo $A_{\geq k}$ significa que $f^p(t_0) = 0$ para $1 \leq p \leq k$.*

Se tomarmos funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, com U um aberto de \mathbb{R} contendo t_0 , ao invés de seu germe (ou seja, tomando representantes do germe) dizemos que a função f tem uma singularidade A_k em $t_0 \in U$ se o germe de f em t_0 tem uma singularidade A_k em t_0 .

Exemplo 2.25 O germe $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^k$, $k \geq 1$ é do tipo A_k em $t = 0$. De fato, note que

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0 \text{ e } f^{(k+1)}(0) = (k+1)! \neq 0.$$

■

Definição 2.26 *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função. Definimos o **k -jato de f em t_0** ($k \geq 1$ inteiro) como sendo o polinômio em uma variável real de grau menor ou igual a k dado por:*

$$j^k f(t_0) = f'(t_0)t + \frac{1}{2}f''(t_0)t^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)t^k.$$

Note que o k -jato de f em t_0 não é o polinômio de Taylor de f em t_0 , mas sim o de $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(t + t_0) - f(t_0)$ em 0. Além disso, se f tem uma singularidade A_k , então $j^p f(t_0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$.

Definição 2.27 Dado um germe $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que F é uma **família de funções de n variáveis e r parâmetros**. Considere o germe de função $f : (\mathbb{R}^n, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(t) = F(t, x_0) = F_{x_0}(t)$ (aqui a notação F_x não indica derivada parcial como usual, mas sim que $x \in \mathbb{R}^r$ está fixado, obtendo assim um germe de função $F_x : (\mathbb{R}^n, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$). Dizemos que F é um **desdobramento a r -parâmetros** de f e que f é o **germe desdobrado**.

Exemplo 2.28 Um desdobramento a 3-parâmetros para o germe $f(t) = t^5$ é a família de funções $F : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0, 0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c, t) = t^5 + at^3 + bt^2 + ct$. ■

Definição 2.29 Seja $G : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}, (y_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros do germe de função $g = G_{y_0}$. Considere

$$\begin{cases} a : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0), \\ b : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } b(x_0, t) = t \end{cases}$$

em que a e b são germes de aplicações suaves. O desdobramento $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de g dado por

$$F(x, t) = G(a(x), b(x, t))$$

é dito **induzido de G** . Se todo desdobramento de g é induzido de G , dizemos que G é um **desdobramento versal de g em t_0** .

Teorema 2.30 Seja $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $g(t) = \pm t^{k+1}$. Então o desdobramento $G : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de g em 0 dado por

$$G(x, t) = \pm t^{k+1} + x_k t^{k-1} + \dots + x_2 t + x_1$$

é versal.

Demonstração. Ver [6] ou [16]. ■

No que segue, consideramos $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$, onde f tem singularidade A_k ($k \geq 1$) em t_0 .

Os próximos dois resultados são critérios de versalidade que serão utilizados no decorrer do trabalho. Existe outro critério, este mais algébrico, que pode ser encontrado em [16]. Pode-se mostrar que esses três critérios são equivalentes.

Teorema 2.31 *O desdobramento F é versal se, e somente se, todo polinômio real $p(t)$ de grau menor ou igual a $k - 1$ pode ser escrito na forma:*

$$p(t) = \sum_{i=1}^r c_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, t_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, t) \right) (t_0) \right),$$

onde c_i é uma constante real.

Demonstração. Ver [6] ou [16]. ■

Teorema 2.32 *Seja*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, t_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, t) \right) (t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1},$$

para $i = 1, \dots, r$. Então F é versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{k \times r}$ tem posto k (isso requer que $k \leq r$).

Demonstração. Ver [6] ou [16]. ■

Exemplo 2.33 Consideremos o desdobramento a 4-parâmetros de $f(t) = t^4$ em 0 dado por $F(x, t) = t^4 + x_1t^3 + x_2t^2 + x_3t + x_4$. Como f tem singularidade do tipo A_3 em 0, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(0, 0) + j^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(0, t) \right) (0) &= 0 & ; & & \frac{\partial F}{\partial x_2}(0, 0) + j^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(0, t) \right) (0) &= t^2; \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(0, 0) + j^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(0, t) \right) (0) &= t & ; & & \frac{\partial F}{\partial x_4}(0, 0) + j^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_4}(0, t) \right) (0) &= 1. \end{aligned}$$

Logo, escrevendo $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0, 0) + j^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(0, t) \right) (0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2$, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, então a matriz (α_{ji}) dada no Teorema 2.32 é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a qual possui posto 3. Portanto, F é um desdobramento versal de f em 0. ■

Definição 2.34 *Seja $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f = F_{x_0}$. O conjunto zero de F é o germe de conjunto*

$$(Z_F, (x_0, t_0)) = \{(x, t) \in (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)); F(x, t) = 0\}$$

e o **conjunto discriminante** de F é o germe de conjunto

$$(\mathcal{D}_F, x_0) = \left\{ x \in (\mathbb{R}^r, x_0); \exists t \in (\mathbb{R}, t_0), \text{ onde } F(x, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0 \right\}.$$

Exemplo 2.35 Considere $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (0, 0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $F(x, y, t) = t^2 + x$ um desdobramento a dois parâmetros de $f(t) = t^2$. O conjunto zero de F é:

$$(Z_F, (0, 0, 0)) = \{(x, y, t) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (0, 0, 0)); x = -t^2\},$$

que localmente é uma superfície regular suave em \mathbb{R}^3 . ■

Proposição 2.36 Se $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ é um desdobramento versal de $f = F_{x_0}$ em t_0 . Se $f(t_0) = 0$, então o conjunto zero de F é um germe de variedade suave de dimensão r , ou seja, para todo representante de F , existe uma vizinhança U de (x_0, t_0) em $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$ tal que $Z_F \cap U$ é uma variedade suave de dimensão r .

Demonstração. Ver [6] ou [16]. ■

Considere F e f como na proposição anterior e G um desdobramento versal a r -parâmetros de $g = G_{x_1}$ em t_1 . Suponhamos que g também tem singularidade A_k , $k \geq 1$, em t_1 . Se $(x_0, t_0) \in (Z_F, (x_0, t_0))$ e $(x_1, t_1) \in (Z_G, (x_1, t_1))$ então, pela proposição anterior, existem vizinhanças U de (x_0, t_0) e V de (x_1, t_1) em $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$ tais que $Z_F \cap U$ e $Z_G \cap V$ são variedades suaves de dimensão r .

Teorema 2.37 Com as notações acima, para todo representante de F e de G , as vizinhanças U e V podem ser escolhidas tais que exista um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ dado por $\phi(x, t) = (a(x), b(x, t))$, para aplicações $a : \pi(U) \rightarrow \pi(V)$ e $b : U \rightarrow \mathbb{R}$, com $a(x_0) = x_1$, $b(x_0, t_0) = t_1$ e

- (i) $\phi(Z_F \cap U) = Z_G \cap V$;
- (ii) a é um difeomorfismo entre $\pi(U)$ e $\pi(V)$, onde π é a projeção no espaço dos parâmetros e $a(\mathcal{D}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{D}_G \cap \pi(V)$, onde \mathcal{D}_F e \mathcal{D}_G são as envoltórias de F e G , respectivamente.

Demonstração. Ver [6] ou [16]. ■

Exemplo 2.38 (Desdobramentos versais de uma singularidade A_1) Seja $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^2$ em $t_0 = 0$ dado por

$$F(x, t) = t^2 + x_1.$$

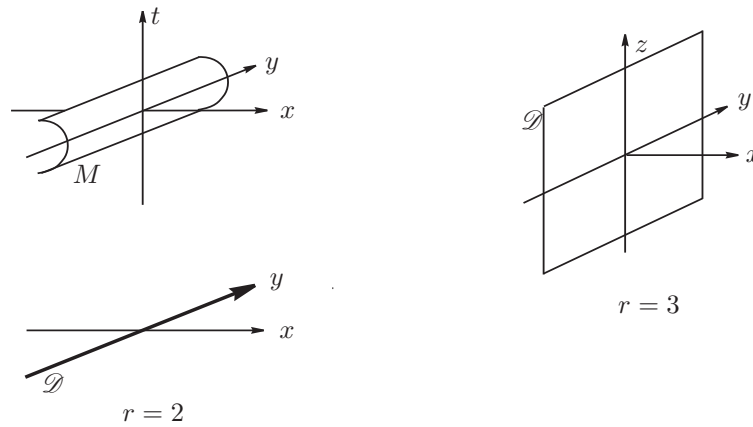


Figura 2.8: Envolvória do Exemplo 2.38.

Então, o conjunto $(\mathcal{D}_F, 0)$ é uma reta em \mathbb{R}^2 , quando $r = 2$, e um plano em \mathbb{R}^3 quando $r = 3$ (ver Figura 2.8). ■

Exemplo 2.39 (Desdobramentos versais de uma singularidade A_2) Seja $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^4$ em $t_0 = 0$ dado por

$$F(x, t) = t^4 + x_1 + x_2 t + x_3 t^2.$$

Então, o conjunto $(\mathcal{D}_F, 0)$ é uma cúspide em \mathbb{R}^2 , quando $r = 2$, e uma cuspidal edge em \mathbb{R}^3 quando $r = 3$ (ver Figura 2.9). ■

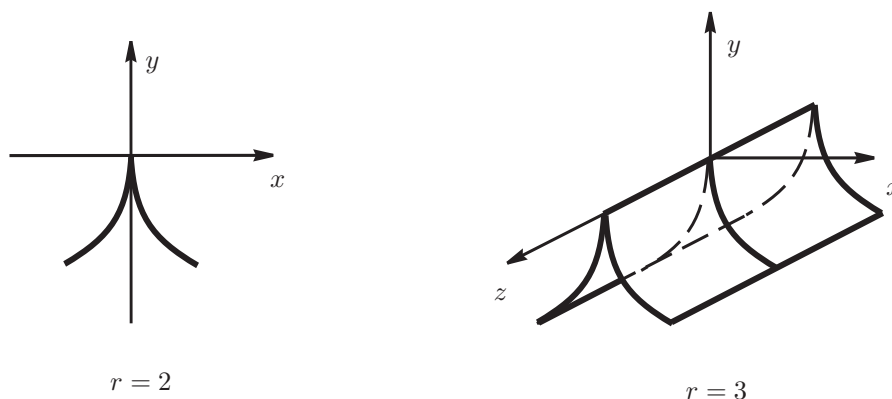


Figura 2.9: Envolvória do Exemplo 2.39.

A partir de agora vamos aplicar os resultados enunciados acima para estudar a geometria do contorno aparente de $M = F^{-1}(0)$ na direção do vetor $v = (0, 0, 1)$ e formas

normais para a projeção $\pi : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde 0 é um valor regular de uma função suave $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, em pontos de dobra e cúspide, que definiremos a seguir.

Definição 2.40 Um ponto $q = (x_0, y_0, t_0) \in M$ tal que $F(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \neq 0$ é chamado de **ponto de dobra** (ou ponto de dobra ordinária) da projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, t) = (x, y)$. Um ponto $q \in M$ satisfazendo $F(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) = 0$ e $\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(q) \neq 0$ é chamado de **ponto de cúspide** de π

Tomando o vetor $v = (0, 0, 1)$, segue da definição acima que o conjunto dos pontos de dobra e de cúspide da projeção π está contido no discriminante \mathcal{C}_v de M . A projeção no plano (x, y) via π do conjunto de pontos de dobra é conjunto de pontos regulares da envoltória de F . Por outro lado, a imagem via π dos pontos de cúspide está contida no conjunto dos pontos de regressão de F .

Defina $F_x : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $x = (x_0, y_0)$, por $F_x(t) = F(x_0, y_0, t)$. Observamos que F_x possui uma singularidade do tipo A_1 em $t = t_0$ se $q = (x_0, y_0, t_0)$ é um ponto de dobra de F e uma singularidade do tipo A_2 em $t = t_0$ se q é um ponto de cúspide de F . De fato,

(i) Se q é um ponto de dobra temos $F(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \neq 0$. Note que

$$\frac{dF_x}{dt}(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = 0 \text{ e } \frac{d^2 F_x}{dt^2}(q) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) \neq 0.$$

Portanto, F_x possui uma singularidade do tipo A_1 em $t = t_0$.

(ii) Para o caso em que q é um ponto de cúspide a demonstração é análoga.

O critério apresentado no Teorema 2.32 garante que F sempre é um desdobramento versal de F_x em um ponto de dobra, uma vez que $\frac{\partial F}{\partial x}(q) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(q) \neq 0$. Se q é um ponto de cúspide, então F desdobra versalmente F_x se a condição

$$\frac{\partial F}{\partial x}(q) \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}(q) \neq \frac{\partial F}{\partial y}(q) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(q)$$

é satisfeita, pois a matriz dos coeficientes dada pelo Teorema 2.32 é a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(q) & \frac{\partial F}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(q) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}(q) \end{pmatrix}.$$

Seja $G : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$, 0 um desdobramento versal de $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$G(u, t) = t^2 + u_2,$$

se $g(t) = t^2$ e dado por

$$G(u, t) = t^3 + tu_1 + u_2$$

se $g(t) = t^3$. Pelo Teorema 2.37 existe um difeomorfismo local

$$\phi = (a, b) : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (0, 0)), \quad \phi(x, t) = (a(x), b(x, t)),$$

tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} M = F^{-1}(0) & \xrightarrow{\phi} & G^{-1}(0) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{a} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (2.3)$$

O diagrama acima fornece, a menos de difeomorfismo, informações sobre o contorno aparente (envoltória) de M na direção do vetor $v = (0, 0, 1)$ em pontos de dobra (quando $g(t) = t^2$) e de cúspide (quando $g(t) = t^3$) de M . Dessa forma, em uma vizinhança de um ponto de dobra, o contorno aparente de M na direção v é, a menos de um difeomorfismo, o contorno aparente de $G^{-1}(0)$ na direção v , a saber, uma reta. Para o caso de um ponto de cúspide, temos que o contorno aparente de M na direção do vetor v é difeomorfo à uma cúspide.

Também do diagrama concluímos que a aplicação $\pi : F^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é levada difeomorficamente na aplicação $\pi : G^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, ou seja, elas são \mathcal{A} -equivalentes (duas aplicações $\bar{f}, \bar{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são \mathcal{A} -equivalentes se existem difeomorfismos $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $\bar{f} = k \circ \bar{g} \circ h^{-1}$). A partir da aplicação $\pi : G^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ podemos obter formas normais para a projeção π em uma vizinhança de pontos de dobra e cúspide. De fato, tomando parametrizações para a superfície $G^{-1}(0)$ dadas por

$$\chi(u_1, t) = (u_1, -t^2, t) \quad e \quad \chi(u_1, t) = (u_1, -t^3 - u_1 t, t),$$

para os casos de dobra e cúspide, respectivamente, a projeção π assume as seguintes formas normais, como aplicações $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$:

$$(u_1, t) \mapsto (u_1, -t^2) \quad e \quad (u_1, t) \mapsto (u_1, -t^3 - u_1 t)$$

para o caso de dobra e cúspide, respectivamente.

Intuitivamente, podemos esperar que dado um ponto $q = (x_0, y_0, t_0) \in M$, este seja um ponto de dobra, de cúspide ou que nele a aplicação π seja um difeomorfismo local. De fato, se q não satisfizer alguma das condições:

(i) $F(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = \frac{\partial F}{\partial x}(q) = \frac{\partial F}{\partial y}(q) = 0;$

$$(ii) F(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(q);$$

$$(iii) F(q) = \frac{\partial F}{\partial t}(q) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(q) = \frac{\partial F}{\partial x}(q) \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}(q) - \frac{\partial F}{\partial y}(q) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(q) = 0,$$

não será um ponto como queremos. No entanto, pelo Corolário 1.25, podemos esperar que as igualdades acima não tenham solução, uma vez que cada uma das três corresponde à um sistema com quatro equações e três incógnitas que, genericamente, não tem solução.

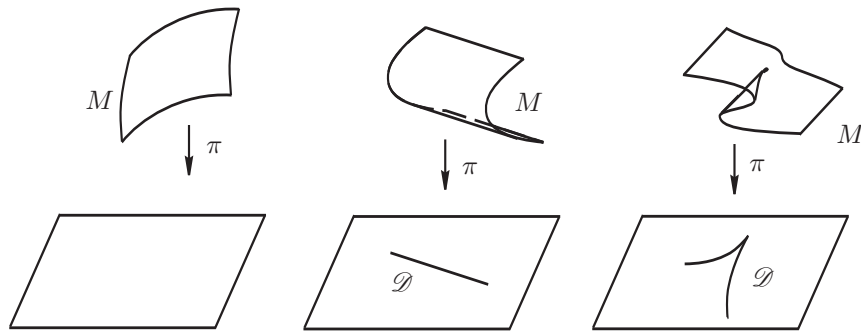


Figura 2.10: Formas normais - projeção.

Equações Diferenciais Implícitas

Uma *equação diferencial implícita* (EDI) é uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0 \quad (3.1)$$

em que $p = \frac{dy}{dx}$ e $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação de classe C^∞ (suave), sendo U um aberto. A denominação *implícita* é usada em contraposição a uma equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \quad (3.2)$$

onde a derivada é dada explicitamente como uma função das variáveis x e y , sendo $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num aberto Ω do plano (x, y) . Este tipo de equação é chamada de *equação diferencial ordinária* (EDO) e é estudada usando os métodos da teoria de equações diferenciais ordinárias. Uma forma conveniente de escrever a equação acima é

$$a(x, y)dy + b(x, y)dx = 0.$$

Esta equação determina um campo de linhas no plano (x, y) , isto é, a cada ponto do plano associa uma reta com uma específica inclinação e uma solução de (3.2) é uma curva suave com a propriedade que, em cada um de seus pontos, ela é tangente à reta determinada pelo campo de linhas e que passa pelo ponto considerado. Os pontos do plano onde as funções a e b se anulam simultaneamente são chamados de **pontos singulares** da EDO.

Assim, uma solução de (3.2) é uma função diferenciável $y = \phi(x)$ definida em um intervalo aberto I e tal que

$$(x, \phi(x)) \in \Omega, \quad \text{para todo } x \in I,$$

e

$$\phi'(x) = g(x, \phi(x)), \quad \text{para todo } x \in I.$$

A função g atribue a cada ponto de Ω um número, $g(x, y)$. Geometricamente, a equação diferencial (3.2) diz que a solução que passar pelo ponto (x, y) de Ω deve ter reta tangente com inclinação dada por:

$$\operatorname{tg} \theta = g(x, y)$$

(θ é o ângulo que a reta tangente à solução faz com o eixo x). Em outras palavras, em cada ponto de Ω temos um vetor $\vec{v}(x, y) = (1, g(x, y))$ que determina a reta tangente à curva solução no ponto (x, y) . Logo, as soluções de (3.2) são as curvas cujos vetores tangentes em cada ponto (x, y) são $\vec{v}(x, y)$, as quais são chamadas também de **curvas integrais**.

A obtenção de soluções de (3.2) numa forma explícita em termos de funções elementares é um problema impossível de resolução para o caso geral. Porém, em muitos problemas de aplicação, basta apenas saber propriedades das soluções, não necessitando, portanto, o conhecimento da expressão algébrica das soluções. Assim, é importante estudar as propriedades geométricas da família das soluções das equações diferenciais. Tal estudo é conhecido como *estudo qualitativo da equação diferencial*.

Voltando para a EDI (3.1), podemos escrevê-la na forma

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ p dx - dy = 0. \end{cases}$$

Uma solução $y = \phi(x)$ da EDI satisfaz

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0,$$

para todo $x \in I$. Geralmente, uma EDI determina várias curvas soluções por um dado ponto (x, y) do plano. Neste capítulo, exceto menção contrária, subscritos denotam derivação parcial. As principais referências utilizadas neste capítulo são: [1], [4], [5], [6], [7], [9], [15] e [22].

3.1 Propriedades de EDI's

Seja $F(x, y, p) = 0$ uma EDI como em (3.1). Identificamos o conjunto das equações diferenciais implícitas com o espaço das funções suaves com a topologia C^k de Whitney, para algum k . Neste espaço, duas funções são próximas quando suas derivadas até ordem k são próximas, em todos os pontos do espaço nas variáveis x, y, p . A EDI $F(x, y, p) = 0$ é dita **genérica** se pertence a um subconjunto aberto denso do espaço com a topologia dada. Pode ser mostrado que para uma equação diferencial implícita genérica, o gradiente de F , $\nabla F = (F_x, F_y, F_p)$, é não nulo no pontos em que F se anula. Nessas condições 0 é

uma valor regular de F e, conseqüentemente, uma EDI genérica determina uma superfície suave $M = F^{-1}(0)$ em \mathbb{R}^3 , chamada de **superfície da equação** (ver Figura 3.1). De agora em diante neste trabalho supomos a EDI $F(x, y, p) = 0$ como em (3.1) sempre genérica.

Recordemos que a **aplicação dobra** da função F é a projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ no plano (x, y) , ao longo do eixo p (Definição 2.15). Dizemos que π é a aplicação dobra da EDI (3.1). Um ponto $q \in M$ é dito **ponto regular da EDI** se ele não é ponto crítico da aplicação dobra. Os outros pontos da superfície da equação são ditos **pontos singulares da EDI** e, portanto, pertencem ao conjunto dobra Σ de F (são os pontos em que $F(q) = \frac{\partial F}{\partial p}(q) = 0$, ver Definição 2.15). O conjunto dos pontos singulares da EDI é o **criminante de M** na direção $v = (0, 0, 1)$. Logo, chamamos este conjunto de **criminante da EDI**. A **aplicação criminante da EDI** é a aplicação dada em (2.1),

$$\mathcal{C}_F(x, y, p) = \left(F(x, y, p), \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) \right).$$

A imagem do criminante via a projeção π é a **envoltória** ou **discriminante** da EDI (3.1) ou ainda, é o contorno aparente de M na direção $v = (0, 0, 1)$ (ver Observação 2.8).

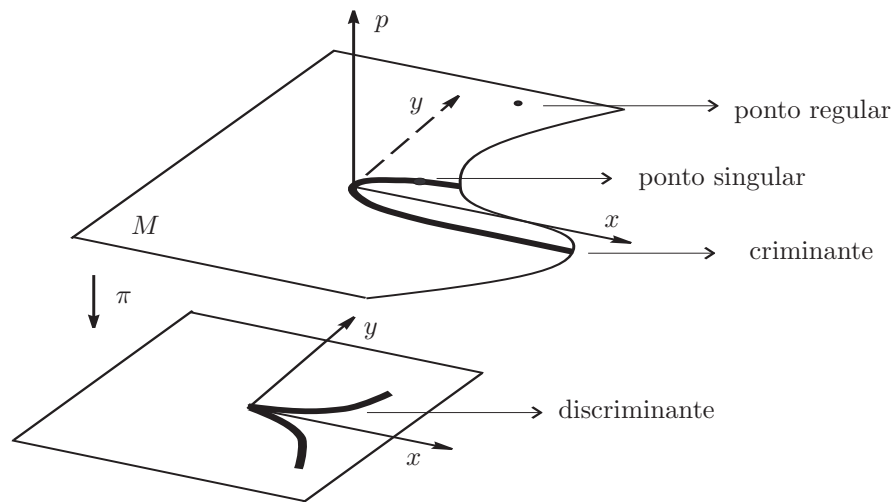


Figura 3.1: Superfície da equação, Exemplo 3.1.

Quando $(0, 0)$ é um valor regular da aplicação \mathcal{C}_F , o criminante $\Sigma = \mathcal{C}_F^{-1}(0, 0)$ é, localmente, uma curva regular suave em \mathbb{R}^3 . Além disso, se $q \in \Sigma$ é tal que $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(q) \neq 0$, então o discriminante $\pi(\Sigma)$ é, em uma vizinhança de $\pi(q)$, uma curva suave regular (ver Proposição 2.4).

Portanto, geometricamente, os pontos singulares da EDI (3.1) são aqueles pontos de M em que o plano tangente à M é vertical, ou seja, aqueles em que o plano tangente é paralelo ao eixo p . Por outro lado, um ponto é regular se o plano tangente de M

neste ponto não é vertical. Assim, para uma EDI, genericamente, todo ponto q de seu criminante ou é um ponto de dobra de F (isto é, $F(q) = \frac{\partial F}{\partial p}(q) = 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(q) \neq 0$), ou um ponto de cúspide de F (isto é, $F(q) = \frac{\partial F}{\partial p}(q) = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(q) = 0$ e $\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}(q) \neq 0$).

Exemplo 3.1 Seja $F_1(x, y, p) = p^3 - 3xp - y$. Assim,

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow p^3 - 3xp - y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow 3p^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Logo, o criminante é o conjunto

$$\{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3; x = p^2 \text{ e } y = -2p^3\}$$

e sua projeção no plano (x, y) é a curva dada pela equação $y^2 = 4x^3$ (o discriminante). A origem $(0, 0, 0)$ é o único ponto de cúspide da superfície, os outros pontos do criminante são pontos de dobra. Os pontos da superfície que não estão no criminante são pontos regulares da equação (ver Figura 3.1). ■

Exemplo 3.2 Sejam $F_1(x, y, p) = p^2 - x$ e $F_2(x, y, p) = p^2 - y$. Temos:

$$\begin{cases} F_1(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow p^2 = x \\ \frac{\partial F_1}{\partial p}(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} F_2(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow p^2 = y \\ \frac{\partial F_2}{\partial p}(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow p = 0. \end{cases}$$

Logo, o discriminante de F_1 é o eixo y e o discriminante de F_2 é o eixo x . Neste exemplo, em ambos os casos, o conjunto dos pontos de dobra é todo o criminante e em nenhum deles há pontos de cúspide (ver Figura 3.2). ■

Observação 3.3 Seja $q \in \Sigma$ um ponto de dobra da EDI genérica F . Supondo \mathcal{C}_F uma submersão em q , $\Sigma = \mathcal{C}_F$ é, numa vizinhança de q , uma curva regular. Encontremos o vetor tangente à Σ em q , o qual é obtido encontrando o núcleo de $d\mathcal{C}_F(q)$. Temos:

$$(a, b, c) \in \ker d\mathcal{C}_F(q) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_x(q) & F_y(q) & F_p(q) \\ F_{px} & F_{py} & F_{pp}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde subscritos denotam derivação parcial. Como $F_p(q) = 0$, então $F_x(q) \neq 0$ ou $F_y(q) \neq 0$. Vamos supor $F_y(q) \neq 0$. Dessa forma,

$$b = -a \frac{F_x(q)}{F_y(q)} \text{ e } c = a \left(\frac{F_x(q)F_{py}(q)}{F_y(q)F_{pp}(q)} - \frac{F_{px}(q)}{F_{pp}(q)} \right).$$

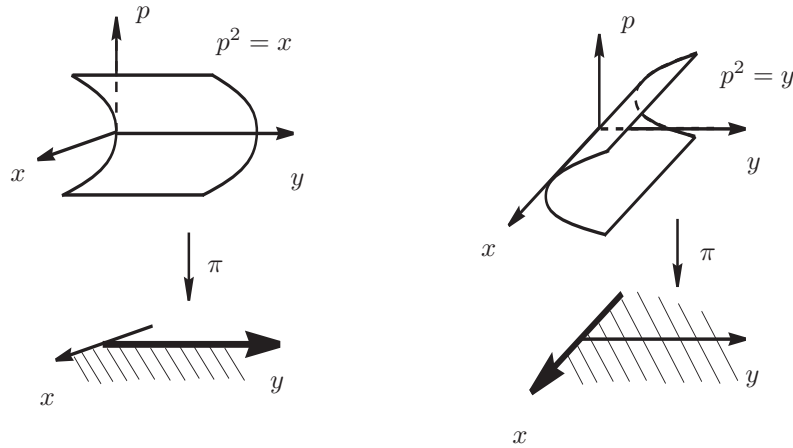


Figura 3.2: Figura do Exemplo 3.2.

Portanto,

$$(a, b, c) = a \left(1, -\frac{F_x(q)}{F_y(q)}, \left(\frac{F_x(q)F_{py}(q)}{F_y(q)F_{pp}(q)} - \frac{F_{px}(q)}{F_{pp}(q)} \right) \right).$$

Assim, o vetor $u = \left(F_y(q), -F_x(q), \frac{1}{F_{pp}(q)}(F_x(q)F_{py}(q) - F_y(q)F_{px}(q)) \right)$ é diretor da reta tangente à Σ em q . No caso em que $F_y(q) = 0$, então $F_x(q) \neq 0$ e obtemos o vetor $u = \left(-F_y(q), F_x(q), \frac{1}{F_{pp}(q)}(F_y(q)F_{px}(q) - F_x(q)F_{py}(q)) \right)$. Recorde que se $q \in \Sigma$ não é de dobra, então $(0, 0, 1)$ é o vetor diretor procurado.

Muitas vezes é conveniente estudar o campo de direções de uma EDI na superfície da equação ao invés de sobre o plano (x, y) , como passamos a detalhar. Isto consiste em desdobrar a EDI (3.1) em uma EDO, levando o campo de direções da EDI na superfície da equação. Consideremos a 1-forma

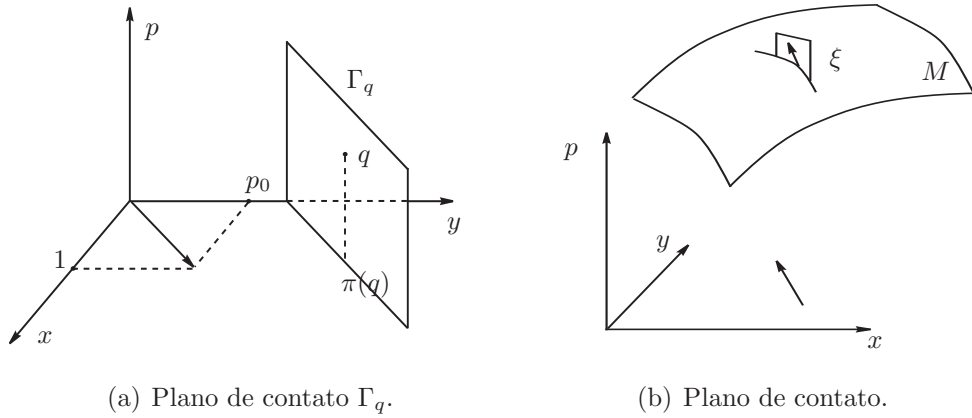
$$\omega = dy - p dx \quad (3.3)$$

em \mathbb{R}^3 , a qual chamamos de **1-forma de contato** da EDI. Dado $q = (x_0, y_0, p_0) \in M$, definimos o **plano de contato** em q como sendo o plano Γ_q passando por q e paralelo à $\ker \omega_q$. Logo, os vetores $(0, 0, 1)$ e $(1, p_0, 0)$ geram Γ_q , ou seja,

$$\Gamma_q = \{q + \lambda(0, 0, 1) + \mu(1, p_0, 0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

(ver Exemplo 1.37). Note que o plano de contato sempre contém a direção do eixo p , ou seja, é vertical. Assim, um vetor em Γ_q é um vetor tal que sua projeção no plano (x, y) forma um ângulo com o eixo x cuja tangente vale p (ver Figura 3.3(a)).

Consequentemente, se $q \in M$ é um ponto singular da EDI, então $T_q M$ e Γ_q são ambos

(a) Plano de contato Γ_q .

(b) Plano de contato.

paralelos ao eixo p , podendo ser coincidentes ou não. Quando T_qM e Γ_q não coincidem (por exemplo, todos os pontos regulares da EDI satisfazem essa condição, uma vez que nestes pontos o plano tangente à M é sempre não vertical), eles se intersectam em uma reta passando por q e, mais ainda, também se intersectam em retas em uma vizinhança de q . Obtemos assim um campo de direções sobre M na vizinhança do ponto q . Dizemos que as curvas integrais deste campo de direções sobre M são as **curvas integrais da EDI (3.1)**.

Um campo de direções como o descrito acima pode ser obtido tomando o campo de vetores

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (3.4)$$

Este campo é tangente à M , uma vez que dado um vetor $\xi(q) = (F_p(q), p_0 F_p(q), -(F_x(q) + p_0 F_y(q)))$, onde $q = (x_0, y_0, p_0)$ temos

$$\langle \xi(q), \nabla F(q) \rangle = F_p(q) F_x(q) + p_0 F_p(q) F_y(q) - (F_x(q) + p_0 F_y(q)) F_p(q) = 0.$$

Além disso, $\xi(q) \in \ker \omega_q$ pois $\omega_q(\xi(q)) = p_0 F_p(q) - p_0 F_p(q) = 0$.

O resultado a seguir nos fornece uma relação entre as curvas integrais da EDI sobre M e suas soluções sobre o plano (x, y) na vizinhança de um *ponto regular* da EDI. Lembramos que, se $q \in M$ é um ponto regular da EDI, então $\frac{\partial F}{\partial p}(q) \neq 0$. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, M é, em uma vizinhança de q , o gráfico de uma função suave $p = g(x, y)$ (Ver Figura 3.3(b)).

Teorema 3.4 ([1], p.16) *Na vizinhança de um ponto regular da EDI (3.1), a projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre o plano (x, y) aplica as curvas integrais sobre M da EDI nas curvas integrais da equação*

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y).$$

Demonstração. Da forma como construímos o campo de linhas sobre M , sabemos que as retas tangentes às curvas integrais deste campo são tais que, projetadas sobre o plano

(x, y) constituem retas com inclinação igual a $g(x, y)$, de onde segue o resultado (ver Figura 3.3). ■

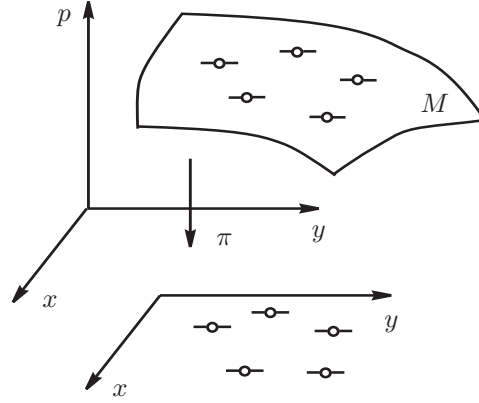


Figura 3.3: Figura do Teorema 3.4.

Assim, a imagem pela aplicação π das curvas integrais do campo ξ em M na vizinhança de pontos regulares, correspondem a curvas integrais da EDI (3.1). Note que ξ não possui singularidades nos pontos regulares da EDI.

Exemplo 3.5 (Figura 3.4) Considere $F(x, y, p) = p^2 - x$ dada no Exemplo 3.2. Sabemos que o discriminante dessa EDI é o eixo y . Vamos encontrar as curvas integrais desta EDI. Como $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, p) = -1$, então M é o gráfico de uma função suave nas variáveis y e p . Dessa forma, é conveniente escolher as coordenadas p e y e não as coordenadas x e y , por se tratar de um sistema global de coordenadas. Dado $q = (x_0, y_0, p_0)$, temos

$$\langle (x, y, p), \nabla F(q) \rangle = \langle (x, y, p), (-1, 0, 2p_0) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2p_0p = x.$$

Logo $T_q M = \{(2p_0p, y, p); y, p \in \mathbb{R}\}$. Note que

$$(x, y, p) \in T_q M \Leftrightarrow (x, y, p) \in \ker \bar{\omega}_q,$$

onde $\bar{\omega}_q = 2p_0 dp - dx$. De fato,

$$\bar{\omega}_q(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow 2p_0p - x = 0 \Leftrightarrow 2p_0p = x.$$

Assim, temos as seguintes condições

$$\begin{cases} p^2 = x \\ 2p dp = dx \\ dy = p dx \end{cases}$$

para que um vetor (x, y, p) pertença ao campo de direções da EDI sobre M , pois elas garantem que o ponto considerado pertence à M (primeira condição), que o vetor é tangente à M e pertence ao plano de contato (segunda e terceira condições, respectivamente). Portanto, nas coordenadas y e p , as curvas integrais da EDI sobre M são determinadas pela equação $dy = 2p^2 dp$ e, conseqüentemente, são dadas pela relação $y + C = \frac{2}{3}p^3$, $x = p^2$, onde $C \in \mathbb{R}$. A projeção das curvas integrais no plano (x, y) são parábolas semicúbicas, obtidas da equação $x^3 = \frac{9}{4}y^2$. ■

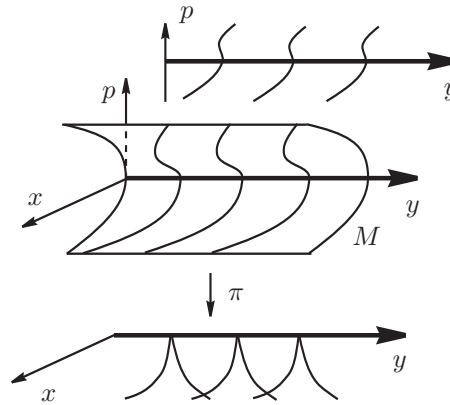


Figura 3.4: Figura do Exemplo 3.5.

Exemplo 3.6 (Figura 3.5) Seja $F(x, y, p) = p^2 - y$. Procedendo da mesma forma como no exemplo anterior, mas agora tomando a 1-forma $\bar{\omega} = 2pdp - dy$ cujo núcleo do funcional linear $\bar{\omega}_q$ é o plano passando pela origem e paralelo ao plano tangente à M em q e agora escolhendo as coordenadas p e x , uma vez que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, p) = -1$ para todo (x, y, p) , temos as condições:

$$\begin{cases} p^2 = y \\ 2pdp = dy \\ dy = p dx \end{cases}$$

Portanto obtemos $2pdp = p dx$, ou seja, $p(2dp - dx) = 0$ e, conseqüentemente, as curvas integrais da EDI sobre M são dadas por $p = 0$, $y = 0$ (eixo x) ou $x = 2p + C$, $y = p^2$, onde $C \in \mathbb{R}$. As projeções dessas curvas no plano (x, y) são parábolas tangentes ao discriminante, que sabemos ser o eixo x . ■

Suponhamos agora que $q \in M$ é um ponto singular da EDI dada em (3.1), ou seja, q é um ponto pertencente ao criminante da EDI.

Observação 3.7 Se q é um ponto no criminante da EDI, então

$$\xi(q) = -(F_x(q) + pF_y(q)) \frac{\partial}{\partial p}$$

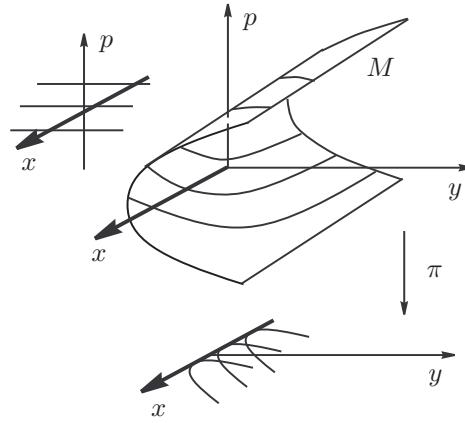


Figura 3.5: Figura do Exemplo 3.6.

e, assim, q é singularidade de ξ se, e somente se

$$F_x(q) + pF_y(q) = 0.$$

Vamos agora ainda estudar a EDI em pontos em que o plano $T_q M$ e o plano de contato Γ_q não coincidem. Para tanto, consideremos a seguinte definição.

Definição 3.8 Um ponto singular $q \in M$ da EDI (3.1) é chamado de **ponto singular regular da EDI** se a aplicação criminante \mathcal{C}_F é uma submersão em q e se o criminante não é tangente ao plano de contato Γ_q em q .

Seja q um ponto singular regular da EDI. Observamos que de fato os planos $T_q M$ e Γ_q não coincidem, uma vez que a reta tangente ao criminante em q sempre está contida em $T_q M$. Além disso, $\pi(q)$ não é um ponto de regressão de M pois, em tais pontos, o vetor $(0, 0, 1)$ é diretor da reta tangente ao criminante (ver Proposição 2.22) e, portanto, a reta tangente naquele ponto está contida no plano de contato uma vez que este é vertical. Note ainda que, como a aplicação criminante \mathcal{C}_F é uma submersão em q , então o criminante da EDI é uma curva regular suave na vizinhança de q . Pontos de dobra da EDI são pontos singulares que podem ser regulares ou não, como mostram os exemplos abaixo. Por outro lado, pontos singulares da EDI que não são de dobra certamente não são regulares já que originam pontos de regressão no plano (x, y) .

Exemplo 3.9 Considere novamente a equação $F(x, y, p) = p^2 - x$. Sabemos que o seu criminante é o eixo y . Todo ponto singular dessa equação é regular. De fato, seja $q = (x_0, y_0, p_0) \in M$ um ponto do criminante. A matriz Jacobiana da aplicação criminante \mathcal{C}_F em q é dada por

$$J\mathcal{C}_F(q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2p_0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que possui posto 2. O vetor tangente ao criminante em q é o vetor $(0, 1, 0)$ que não pertence ao plano de contato em q , o qual é gerado pelos vetores $(0, 0, 1)$ e $(1, p_0, 0)$. ■

Exemplo 3.10 Seja $F(x, y, p) = p^2 - y$ e $q = (0, 0, 0) \in M$. Mostremos que q é um ponto singular mas não é singular regular. Sabemos que o criminante dessa EDI é o eixo x , logo q é um ponto singular pois pertence ao criminante. No entanto o vetor diretor da reta tangente ao criminante em q é o vetor $u = (1, 0, 0)$, que é um dos vetores diretores do plano de contato em q . Portanto, q é um ponto singular que não é regular. ■

Genericamente, todos os pontos singulares da EDI são regulares, ou seja, para uma EDI genérica podemos esperar que quase todos os pontos singulares sejam regulares, pelo Teorema de Sard. No entanto, se dada uma EDI genérica isso não acontecer, basta fazermos uma pequena perturbação na equação.

Na definição anterior, a condição do criminante não ser tangente ao plano de contato pode ser expressa como $\omega_q(u) \neq 0$, onde ω é a 1-forma de contato dada em (3.3) e u é um vetor diretor da reta tangente ao criminante em q . De fato, se $q \in M$ é tal que a reta tangente ao criminante em q não está contida no plano de contato neste ponto, então u não pertence ao núcleo da 1-forma de contato ω em q .

Sintetizando as observações feitas acima, obtemos:

Proposição 3.11 *Seja $q \in M$ um ponto singular da EDI (3.1) genérica. Então q é não regular se, e somente se, $\omega_q(u) = 0$ ou $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(q) = 0$, onde u é um vetor diretor da reta tangente ao criminante em q .*

Demonstração. Suponha que q é não regular. Considerando a aplicação criminante \mathcal{C}_F , temos duas possibilidades:

- \mathcal{C}_F não é submersão em q , ou seja, o posto da matriz Jacobiana de \mathcal{C}_F em q é menor que 2. Neste caso temos $\frac{\partial F}{\partial x}(q) \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(q) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(q) \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(q) = 0$. Como já temos $\frac{\partial F}{\partial p}(q) = 0$ e 0 é um valor regular de F , segue que $\frac{\partial F}{\partial x}(q) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(q) \neq 0$ garantindo assim que $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(q) = 0$.
- \mathcal{C}_F é submersão em q e, assim, da definição de ponto singular regular, segue que $\omega_q(u) = 0$.

A recíproca é imediata das considerações feitas anteriormente. ■

Observação 3.12 *Quando q é um ponto singular regular da EDI, então q é um ponto regular do campo de vetores ξ . De fato, o vetor diretor da reta tangente ao criminante em q é o vetor u dado na Observação 3.3, o qual satisfaz*

$$0 \neq \omega_q(u) = -F_x(q) - pF_y(q),$$

onde ω é a 1-forma de contato e por q ser ponto singular regular da EDI, a afirmação segue da Observação 3.7.

Fizemos um estudo sobre as curvas integrais da EDI (3.1) quando o ponto $q \in M$ é um ponto regular da EDI. Resta então estudar as curvas integrais no caso em que $q \in M$ é um ponto singular. No entanto, pelo que observamos acima, quase todos os pontos singulares da EDI são pontos singulares regulares. O próximo resultado garante que, se $q \in M$ é um ponto singular regular, então é possível obter uma forma normal para a EDI e, a partir desta é possível encontrar, a menos de um difeomorfismo, as curvas integrais da EDI. A forma normal obtida é a partir da relação de equivalência entre EDI's que passamos a definir:

Definição 3.13 Dizemos que o germe de EDI (F, q_0) (a notação (F, q_0) é usada para um germe de F em q_0 tal que $F(q_0) = 0$) é equivalente a (G, q_1) , se existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, q_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, q_1)$ que leva curvas integrais de F em curvas integrais de G .

Teorema 3.14 Seja $q = (x_0, y_0, p_0) \in M$ um ponto singular regular da EDI (3.1). Existe um difeomorfismo de uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) no plano (x, y) em uma vizinhança do ponto $(0, 0)$ no plano (X, Y) reduzindo a EDI à forma $P^2 = X$, onde $P = \frac{dY}{dX}$.

Para a demonstração do Teorema 3.14, ver [1], p.27 ou [12].

Um difeomorfismo no plano transforma toda reta em uma nova reta. O teorema afirma que a parte da superfície M próxima de um ponto singular regular é levada na parte da superfície $P^2 = X$ próxima do ponto $(0, 0, 0)$. Assim, considerando o Exemplo 3.5 e uma vez que o difeomorfismo dado no teorema acima aplica curvas integrais da EDI (3.1) no plano (x, y) , nas curvas integrais da equação $P^2 = X$ no plano (X, Y) , obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.15 Em uma vizinhança de um ponto singular regular, a família de curvas integrais da EDI dada em (3.1) é difeomorfa à família de parábolas semi-cuspidais $Y = \frac{2}{3}X^{3/2} + C$.

Vimos até agora EDI's em pontos $q \in M$ tais que T_qM e o plano de contato em q não coincidem. Uma EDI genérica pode possuir pontos onde o discriminante é localmente uma curva suave (logo são pontos de dobra da EDI), mas o plano de contato nestes pontos é tangente à M , ou seja, o plano de contato e o tangente coincidem nestes pontos. Em uma vizinhança destes pontos, a EDI pode ser reduzida através de um difeomorfismo no plano (x, y) à forma normal

$$y = (p + kx)^2.$$

Para a demonstração deste fato ver [14].

Suponhamos então que $q \in M$ seja um ponto de dobra da EDI tal que $T_qM = \Gamma_q$. Segue da Observação 3.12 que o ponto q é ponto singular do campo ξ . Escolha um sistema de coordenadas no plano (x, y) com origem na imagem de q pela aplicação dobra $(\pi(q))$ tal que o criminante, numa vizinhança suficientemente pequena de $\pi(q)$, esteja contido no eixo x . Assim, $q = (0, 0, 0)$ e $T_qM = \text{plano}(x, p)$. Logo, segue que $F(x, 0, 0) = F_p(x, 0, 0) = 0$ nestas novas coordenadas e, conseqüentemente, $F_x(x, 0, 0) = 0$. Como para uma EDI genérica temos $\nabla F(q) \neq (0, 0, 0)$, então $F_y(q) = 0$. Portanto, segue do Teorema da Função Implícita que, em uma vizinhança da origem, x e p podem ser tomados como coordenadas locais da superfície da equação M , ou seja, M é dada por

$$y = f(x, p),$$

onde f é uma função suave e

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_p(0, 0) = 0,$$

uma vez que T_qM é o plano $y = 0$ e o vetor $(-f_x(q), 1, -f_p(q))$ é ortogonal a T_qM . Os subscritos denotam derivação parcial. Note que $T_qM = \ker \eta_q$ onde

$$\eta = dy - f_x dx - f_p dp$$

e, como $\Gamma_q = \ker \omega_q$, obtemos

$$pdx = f_x(x, p)dx + f_p(x, p)dp,$$

ou ainda

$$(f_x(x, p) - p)dx + f_p(x, p)dp = 0,$$

a qual tem um ponto singular em q . Portanto, em um ponto genérico de tangência do plano de contato com a superfície M , o campo de direções em M definido pela EDI tem uma singularidade do mesmo tipo que o campo de direções dado pelo campo de vetores $(f_p(x, p), p - f_x(x, p))$ em seus pontos singulares, ou seja, uma sela, um foco ou um nó, o qual, por sua vez, é do mesmo tipo que a do campo $\xi|_{y=0}$, pois $f_x = -\frac{F_x}{F_y}$ e $f_p = -\frac{F_p}{F_y}$ em (x, y, p) . Conseqüentemente, os pontos genéricos de dobra de M em que o plano de contato e o plano tangente coincidem podem ser classificados como **selas**, **nós** ou **focos**, os quais estão esboçados na Figura 3.6, respectivamente.

Na Figura 3.6, temos representadas na parte superior as famílias das curvas integrais do campo de direções de uma EDI genérica em M . Na parte inferior temos representadas as projeções (via aplicação dobra π) das famílias citadas. O criminante e o discriminante

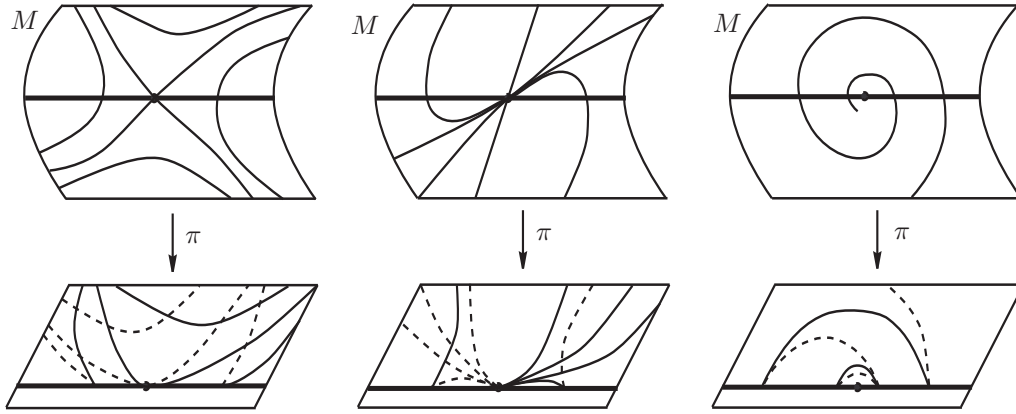


Figura 3.6: Singularidades: sela, nó e foco.

da EDI são as curvas em destaque.

Definição 3.16 Um ponto $q \in M$ é chamado de **singularidade dobra-sela** da EDI (3.1) se q é um ponto de dobra da EDI e um ponto de sela do campo ξ dado em (3.4). Analogamente, $q \in M$ é uma **singularidade dobra-nó** (resp. **dobra-foco**) se é um ponto de dobra da EDI e um ponto de nó (resp. foco) do campo ξ . Um ponto $q \in M$ satisfazendo uma das três condições dadas é chamado de **boa dobra**.

Exemplo 3.17 Considere a EDI dada por $F(x, y, p) = p^2 - y + x^2 = 0$ e $q = (0, 0, 0)$. Temos:

$$F_x(x, y, p) = 2x, \quad F_y(x, y, p) = -1, \quad F_p(x, y, p) = 2p, \quad F_{pp}(x, y, p) = 2.$$

Dessa forma, q é um ponto de dobra da EDI, uma vez que $F(q) = F_p(q) = 0$ e $F_{pp}(q) \neq 0$. O campo ξ é dado por

$$\xi(x, y, p) = 2p \frac{\partial}{\partial x} + 2p^2 \frac{\partial}{\partial y} - (2x - p) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Considerando a projeção do campo no plano (x, p) e a matriz de sua parte linear,

$$J\xi(q) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

obtemos, $\det J\xi(q) = 4$, $T(q) = 1$ e $\Delta_q = -15$, que nos garante que q é um ponto de singularidade dobra-foco da EDI. ■

Exemplo 3.18 Seja $F(x, y, p) = y - p^2 - \frac{1}{3}xp$. O ponto $q = (0, 0, 0)$ é uma singularidade

dobra-nó do campo ξ . De fato

$$F_x(x, y, p) = -\frac{1}{3}xp, \quad F_y(x, y, p) = 1, \quad F_p(x, y, p) = -2p - \frac{1}{3}x, \quad F_{pp}(x, y, p) = -2.$$

Note que q é um ponto de dobra, uma vez que $F(q) = F_p(q) = 0$ e $F_{pp}(q) \neq 0$. O campo ξ é dado por:

$$\xi(x, y, p) = \left(-2p - \frac{1}{3}x\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-2p^2 - \frac{1}{3}xp\right) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2}{3}p \frac{\partial}{\partial p},$$

e a matriz de sua parte linear no plano (x, p) é:

$$J\xi(q) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

e portanto, $T(q) = -1$, $\det J\xi(q) = \frac{2}{9}$ e $\Delta_q = \frac{1}{9}$, ou seja, q é uma singularidade dobra-nó da EDI. ■

Exemplo 3.19 Seja $F(x, y, p) = y + p^2 + 2xp$. O ponto $q = (0, 0, 0)$ é uma singularidade dobra-sela do campo ξ . De fato,

$$F_x(x, y, p) = 2p, \quad F_y(x, y, p) = 1, \quad F_p(x, y, p) = 2p + 2x, \quad F_{pp}(x, y, p) = 2.$$

O ponto q é um ponto de dobra de F , uma vez que $F(q) = F_p(q) = 0$ e $F_{pp}(q) \neq 0$. O campo ξ é dado por

$$\xi(x, y, p) = (2x + 2p) \frac{\partial}{\partial x} + (2p^2 + 2xp) \frac{\partial}{\partial y} - 3p \frac{\partial}{\partial p}.$$

A matriz da parte linear de ξ no plano (x, p) é

$$J\xi(q) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Assim, $T(q) = -1$, $\det J\xi(q) = -6$ e $\Delta_q = 25$. Consequentemente, q é uma singularidade dobra-sela da EDI. ■

O resultado apresentado a seguir vai fornecer condições para um ponto ser uma boa dobra de uma EDI. Para tanto, vamos considerar o 2-jato de F em $q = (0, 0, 0)$, dado por

$$j^2 F(q) = F_x(q)x + F_y(q)y + F_p(q)p + \frac{1}{2}(F_{xx}(q)x^2 + F_{xy}(q)xy + F_{xp}(q)xp + F_{yy}(q)y^2 + F_{yp}(q)yp + F_{pp}(q)p^2).$$

Reescrevendo o polinômio obtemos:

$$j^2F(q) = a_0p^2 + (b_0 + b_1x + b_2y)p + (c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2).$$

Proposição 3.20 ([8], p. 794) *Seja $F(x, y, p) = 0$ uma EDI como em (3.1) genérica e $q = (0, 0, 0) \in M$. Com as notações acima, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) *O ponto q é um ponto de dobra se, e somente se, $a_0 \neq 0$ e $b_0 = 0$.*
- (ii) *O ponto q é um zero do campo ξ dado em (3.4) se, e somente se, $b_0 = c_1 = 0$.*
- (iii) *O ponto q é uma boa dobra se, e somente se, $a_0, c_3 \neq 0$, $b_0 = c_1 = 0$ e $\lambda \neq 0, \frac{1}{16}$, onde*

$$\lambda = \frac{4a_0c_3 - b_1^2 - b_1c_2}{4c_2^2}.$$

Demonstração.

- (i) O ponto q é um ponto de dobra se, e somente se, $F_p(q) = 0$ e $F_{pp}(q) \neq 0$. Dessa forma, analisando o 2-jato de F dado acima, como $F_p(x, y, p) = 2a_0p + b_0 + b_1x + b_2y$ segue que q é um ponto de dobra se, e somente se, $b_0 = 0$ e $a_0 \neq 0$.
- (ii) Sabemos que q é um zero do campo ξ se e somente se $F_p(q) = (F_x + pF_y)(q) = 0$. Como

$$(F_x + pF_y)(x, y, p) = b_2p^2 + p(c_4x + 2c_5y + b_1 + c_2) + 2c_3x + c_4y + c_1,$$

então $F_p(q) = b_0$ e $(F_x + pF_y)(q) = c_1$, de onde segue o resultado.

- (iii) Já sabemos dos itens anteriores que q é um ponto de dobra de F e um zero do campo ξ se, e somente se, $a_0 \neq 0$ e $b_0 = c_1 = 0$. A matriz da parte linear de ξ no plano (x, p) é dada por:

$$J\xi(q) = \begin{pmatrix} b_1 & 2a_0 \\ -2c_3 & -b_1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

Note que $\det J\xi(q) = 4a_0c_3 - b_1^2 - b_1c_2$, $T(q) = -c_2$ e $\Delta_q = c_2^2 - 16a_0c_3 + 4b_1^2 + 4b_1c_2$. Mais ainda, $T(q) = -c_2 \neq 0$, uma vez que $F_y(q) \neq 0$. Defina

$$\lambda = \frac{\det J\xi(q)}{4T(q)^2} = \frac{4a_0c_3 - b_1^2 - b_1c_2}{4c_2^2}.$$

Temos que excluir a possibilidade de q ser uma singularidade degenerada, um foco ou um nó impróprio. Teremos uma singularidade degenerada se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $c_3 = 0$ (se $c_3 = 0$, $\det J\xi(q) = -b_1(b_1 + c_2) = 0$ pra todo valor de b_1). Um nó impróprio acontece se, e somente se, $\det J\xi(q) > 0$, $\Delta_q = 0$ e $T(q) \neq 0$, ou de forma equivalente, $c_2^2 = 4(4a_0c_3 - b_1^2 - b_1c_2)$. Em outras palavras, um nó impróprio

ocorre se, e somente se, $\lambda = \frac{1}{16}$. Um centro nunca ocorre pois $T = -c_2 \neq 0$. Das considerações feitas, segue o resultado. ■

Resta agora considerar o caso em que q é um ponto singular de cúspide da EDI. Em [13], Dara classifica estes pontos em duas categorias: os pontos de **cúspide elíptica** e os pontos de **cúspide hiperbólica**. Naquele trabalho é conjecturado que em uma vizinhança de um ponto de cúspide elíptica, uma EDI genérica é topologicamente equivalente a $x = p^3 - yp$ e a $x = p^3 - yp$ na vizinhança de um ponto de cúspide hiperbólica. No entanto, a conjectura de Dara não é verdadeira. Davydov mostrou, neste caso, que as formas normais da EDI apresentam parâmetros e funções arbitrárias.

3.2 Duais, EDI's e o Método de Legendre

O objetivo dessa seção é relacionar as curvas duais apresentadas no primeiro capítulo com as curvas soluções de EDI's e usando uma aplicação chamada *Transformação de Legendre*, “investigar” o comportamento local das curvas integrais da EDI em uma vizinhança do discriminante (contorno aparente na direção $v = (0, 0, 1)$) da superfície $M = F^{-1}(0)$.

Seja a EDI $F(x, y, p) = 0$ como em (3.1) genérica e $M = F^{-1}(0)$. Considere o difeomorfismo global $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$L(x, y, p) = (p, xp - y, x) = (X, Y, P)$$

o qual satisfaz a condição $L \circ L = id$, ou seja, L é uma **involução**. Essa aplicação é conhecida como **Transformação de Legendre**. Através de L obtemos uma nova EDI, definida por $G = F \circ L$.

Observação 3.21 *Uma vez que a Transformação de Legendre é um difeomorfismo global, o conjunto $N = G^{-1}(0)$ também é uma superfície regular além de ser difeomorficamente levada em $M = F^{-1}(0)$.*

Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana regular dada por $\gamma(X) = (X, Y(X))$, onde Y é uma função suave de X . Por uma questão de conveniência o parâmetro X será omitido. Pela Observação 1.9, a curva $\delta(X) = (Y', XY' - Y)$ pode ser considerada como a curva dual de γ . Notemos que a inclinação da reta tangente à δ é X nos pontos em que $Y'' \neq 0$, pois $\delta'(X) = (Y'', XY'')$.

Com as notações anteriores, o próximo resultado relaciona as soluções das EDI's dadas por F e G .

Lema 3.22 ([6], p. 202) *Nas notações anteriores, se a curva γ é uma curva integral da EDI G , então a curva δ é uma curva integral de F nos pontos onde $Y'' \neq 0$.*

Demonstração. Como $\gamma(X) = (X, Y)$ é uma curva integral de G e $L = L^{-1}$, temos:

$$G(X, Y, Y') = (F \circ L^{-1})(X, Y, Y') = F(Y', XY' - Y, X).$$

Como a inclinação da reta tangente à δ nos pontos em que $Y'' \neq 0$ é X , concluímos que a curva δ é uma curva integral de F . ■

Recorde que $Y'' \neq 0$ é a condição para a curva solução γ de G não ter uma inflexão em X (ver Exemplo 1.5), o que corresponde a curva dual δ não ter uma cúspide ordinária, no caso em que a inflexão for ordinária.

O resultado acima é uma ferramenta muito útil na resolução de EDI's. O **Método de Legendre** consiste em aplicar esse resultado, ou seja, dada uma EDI satisfazendo uma certa condição aplicamos a Transformação de Legendre, obtendo uma nova EDI mais tratável. Dado um ponto q pertencente ao criminante de M , sabemos que $F_p(q) = 0$ e assim não podemos escrever a equação diferencial em uma forma explícita, como em (3.2). No entanto, o ponto correspondente à q em G , a saber Q , pode ser tal que nesse ponto $G_p(Q) \neq 0$ e assim G pode ser escrita explicitamente, resolvida e suas curvas integrais dualizadas (ou seja, se γ é uma curva integral de G , dualizar γ nada mais é do que calcular a sua curva dual δ , coma na Observação 1.9) de modo que as novas curvas obtidas são, como vistas no resultado acima, as curvas integrais de F .

Exemplo 3.23 Considere a EDI dada por $F(x, y, p) = p^3 + yp + x$. Nos pontos (x, y, p) em que $F = F_p = 3p^2 + y = 0$, ou seja, nos pontos pertencentes à superfície $M = F^{-1}(0)$ e que satisfazem $27x^2 + 4y^3 = 0$, (criminante de F) a equação não pode ser escrita explicitamente. No entanto, aplicando a Transformação de Legendre obtemos

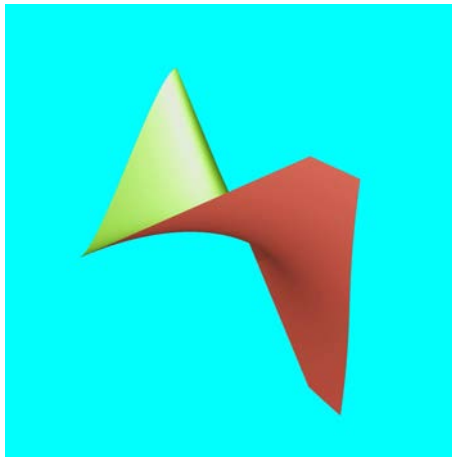


Figura 3.7: Superfície $M = F^{-1}(0)$ do Exemplo 3.23.

$G(X, Y, P) = P(X^2 + 1) + X^3 - XY$. A nova equação obtida pode ser reescrita, uma vez

que $G_P(X, Y, P) = X^2 + 1 \neq 0$. Obtemos assim,

$$\frac{dY}{dX} - \frac{XY}{X^2 + 1} = -\frac{X^3}{X^2 + 1},$$

que pode ser resolvida pelo método do fator integrante para EDO's lineares de primeira ordem, de modo que obtemos a solução $Y = -(2 + X^2) + C(1 + X^2)^{\frac{1}{2}}$ que depois de dualizada fornece a solução da equação original:

$$x = -2X + CX(1 + X^2)^{-\frac{1}{2}} \quad y = 2 - X^2 - C(1 + X^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Na Figura 3.8 são apresentadas, para alguns valores de C , as curvas soluções de F para $C = 1$ e $C = 2.35$ (figuras superiores) e $C = 4$ e $C = 7$ (figuras inferiores) ■

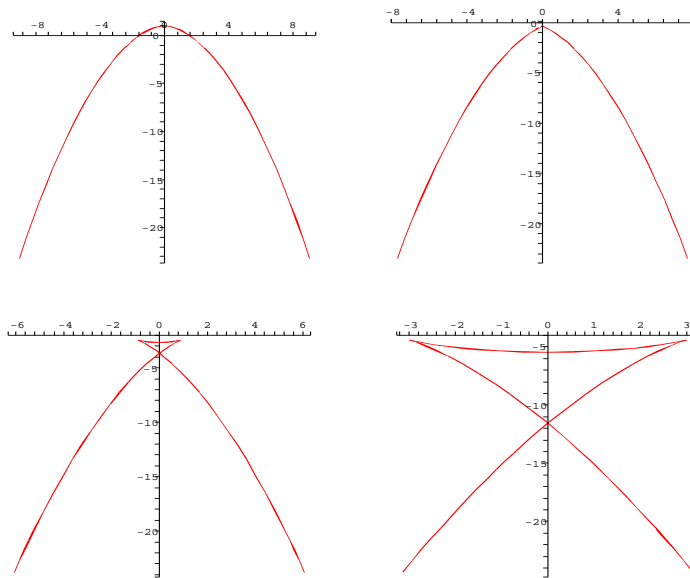


Figura 3.8: Curvas soluções do Exemplo 3.23.

Uma maneira para identificar equações em que aplicar o método de Legendre em um ponto (x, y, p) é interessante, é verificarmos se para esse ponto temos $F_x + pF_y \neq 0$. De fato, como $G = F \circ L$, então $G_P = F_x + pF_y$. A partir de agora vamos assumir a condição $G_P \neq 0$, de modo que podemos escrever $G(X, Y, P) = 0$ na forma $Y' = g(X, Y)$. Note que os pontos em que aplicaremos o método de Legendre, muito embora sejam pontos pertencentes ao criminante de F , são pontos regulares do campo ξ dado em (3.4), uma vez que nestes pontos temos $F_x + pF_y \neq 0$.

O resultado a seguir nos diz sobre a curvatura das curvas integrais da EDI G .

Proposição 3.24 ([6], p. 203) *Seja $\gamma(X) = (X, Y(X))$ uma curva integral de $G = F \circ L$ como anteriormente e suponha que $F_x + pF_y \neq 0$. A curva γ tem uma inflexão em X se, e somente se, $(x, y, p) = (Y', XY' - Y, X)$ está no criminante de F . Além disso, a inflexão*

é ordinária se, e somente se, $F_{pp} \neq 0$ em (x, y, p) , ou seja, neste ponto o discriminante possui tangente não vertical.

Demonstração. Sabemos que a curvatura k da curva plana γ é dada por $k = \frac{Y''}{\sqrt{(1+Y'^2)^3}}$ (ver Exemplo 1.5) e assim, γ tem uma inflexão em X se, e somente se, $Y'' = 0$. Derivando $F(Y', XY' - Y, X) = 0$ em X , obtemos $Y''(F_x + pF_y) + F_p = 0$. Dessa forma, se γ tem uma inflexão em X , $F_p(x, y, p) = 0$. Reciprocamente, se $F_p(x, y, p) = 0$, como $F_x + pF_y \neq 0$ temos $Y'' = 0$. Para a demonstração da segunda equivalência, basta lembrarmos que a inflexão é ordinária se, e somente se, $k = k' = 0$ (ou $Y'' = 0$ e $Y''' \neq 0$). Dito isso, a demonstração se resume a derivar a expressão da curvatura e derivar novamente $Y''(F_x + pF_y) + F_p = 0$ em relação à X , obtendo $Y'''(F_x + pF_y) + A(Y', XY' - Y, X)Y'' + F_{pp} = 0$, onde $A(Y', XY' - Y, X)$ é o agrupamento dos termos que possui Y'' como um fator. Dessa forma, se $F_{pp}(x, y, p) \neq 0$, então $Y''' \neq 0$. Reciprocamente X é um ponto de inflexão ordinária ($Y''' \neq 0$), temos $F_{pp}(x, y, p) \neq 0$. ■

A última condição dada na proposição anterior diz que (x, y, p) é um ponto de dobra da EDI F . Quando isto acontece, a curva dual δ terá uma cúspide ordinária em (x, y) e, portanto, a curva solução de F terá uma cúspide ordinária em (x, y) . Isto acontece no Exemplo 3.23 em todos os pontos do discriminante de F , exceto quando $x = y = 0$.

É de interesse obtermos mais informações sobre esses duais, que são soluções de EDI's, na vizinhança de pontos que pertencem ao contorno aparente de $M = F^{-1}(0)$ na direção do eixo p . Para tanto considere a família a 1-parâmetro de curvas integrais de G dada por $\gamma_t = (X, Y(X, t))$ em uma vizinhança de um ponto (X_0, Y_0) tal que $Y_0 = Y(X_0, 0)$ e $\frac{\partial Y}{\partial t}(X_0, 0) \neq 0$.

Os duais dessas curvas podem ser estudados através da família de funções altura:

$$\tilde{H} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{H}(u, v, t, X) = \langle (X, Y(X, t)), u \rangle - v.$$

A envoltória da função acima é dada por

$$\mathcal{D}_{\tilde{H}} = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3; \exists X \in \mathbb{R}; u = \mathbf{n}_t(X), v = \langle \gamma_t(X), \mathbf{n}_t(X) \rangle, t \in \mathbb{R}\},$$

onde $\mathbf{n}_t(X)$ é um vetor normal à γ_t em X . Portanto, as seções $t = \text{constante}$ são os duais das curvas γ_t . Em outras palavras, essa família de duais é formada pelas curvas integrais de F levantadas ao nível t .

Tome agora a família de funções em uma vizinhança de $(X_0, 0)$ dada pelo germe

$$H : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (X_0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$$

definido como

$$H(X, \lambda, t) = \langle (X, Y(X, t)), (\lambda - Y'(X_0, 0), 1) \rangle,$$

onde a variável λ é o ângulo θ compreendido entre o vetor $u \in \mathbb{S}^1$ e o eixo X .

A função $H_0 = H(X, 0) = -\frac{dY}{dX}(X_0, 0)X + Y(X, 0)$ tem singularidade do tipo $A_{\geq 1}$ em $X = X_0$, uma vez que $H'_0(X_0, 0) = 0$. Sabendo que $H_0^{(k)}(X, 0) = Y^{(k)}(X, 0)$ concluímos que H_0 tem singularidade do tipo A_k em $X = X_0$ se, e somente se,

$$Y''(X_0, 0) = \dots = Y^{(k)}(X_0, 0) = 0 \text{ e } Y^{(k+1)}(X_0, 0) \neq 0.$$

Vamos definir desdobramento p -versal. Essa definição difere ligeiramente da definição de desdobramento versal. A definição que faremos para o caso p -versal apresenta a adição de uma aplicação $c(x)$ (para cada x , $c(x)$ é apenas a adição de uma constante), o que não ocorria no caso versal (ou seja, apenas omitíamos $c(x)$).

Definição 3.25 *Seja $G : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}, (y_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros do germe de função $g = G_{y_0}$. Considere*

$$\begin{cases} a : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0) \\ b : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } b(x_0, t) = t \\ c : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

em que a, b e c são germes de aplicações suaves. O desdobramento $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, (x_0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ do germe de função $f(t) = g(t) + c(x_0)$ dado por

$$F(x, t) = G(a(x), b(x, t)) + c(x)$$

é dito **p -induzido de G** . Se todo desdobramento de g é p -induzido de G , dizemos que G é um **desdobramento p -versal de g em t_0**

Vamos apresentar somente um critério de p -versalidade. No entanto, como no caso versal, temos mais critérios equivalentes (para mais detalhes, ver [6] ou [16]).

Teorema 3.26 ([6], p. 140) *Seja*

$$j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, t) \right) (t_0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \dots + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1},$$

para $i = 1, \dots, r$. Então F é p -versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{(k-1) \times r}$ tem posto $k-1$ (isso requer que $k-1 \leq r$).

É de interesse verificar as condições para que H desdobre versalmente H_0 quando esta última tem singularidade do tipo A_2 e A_3 em $X = X_0$. Essa investigação terá um forte apelo geométrico, como veremos nos próximos resultados.

- (i) Singularidade do tipo A_2 : Para este caso, H sempre desdobra p -versalmente H_0 . Essa verificação é feita usando o critério dado acima, observando que $\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial X}(X_0, 0, 0) = 1$ e $\frac{\partial H}{\partial t}(X_0, 0, 0) = \frac{\partial Y}{\partial t}(X_0, 0) \neq 0$.
- (ii) Singularidade do tipo A_3 : Novamente utilizando o critério acima, temos que H desdobra p -versalmente H_0 se, e somente se, $\frac{\partial^3 H}{\partial X^2 \partial t}(X_0, 0, 0) = \frac{\partial^3 Y}{\partial X^2 \partial t}(X_0, 0) \neq 0$, uma vez que a matriz dos coeficientes dada no critério é:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial t}(X_0, 0, 0) \\ 0 & \frac{\partial^3 H}{\partial X^2 \partial t}(X_0, 0, 0) \end{pmatrix}.$$

Temos as seguintes interpretações das condições acima discutidas em termos da EDI F .

Proposição 3.27 ([4], p.141)

- (i) A função H_0 definida acima tem singularidade do tipo A_k se, e somente se,

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \dots = \frac{\partial^{k-1} F}{\partial p^{k-1}} = 0, \quad \frac{\partial^k F}{\partial p^k} \neq 0 \text{ em } q = (x_0, y_0, p_0).$$

- (ii) Se a função H_0 tem singularidade do tipo A_2 (resp. A_3), então ela é sempre desdobrada p -versalmente por H (resp. é desdobrada p -versalmente por H se $(F_x F_{yp} - F_y F_{xp})(q) \neq 0$).

Demonstração.

- (i) Sabemos que H_0 é do tipo A_k se, e somente se, $Y''(X_0, 0) = \dots = Y^{(k)}(X_0, 0) = 0$ e $Y^{(k+1)}(X_0, 0) \neq 0$. Derivando a igualdade $F(Y', XY' - Y, X) = 0$ em relação a X obtemos $(F_x Y' + p F_y Y' + F_p)(x_0, y_0, p_0) = 0$. Repetindo esse processo r vezes obtemos a identidade

$$\left((F_x + p F_y) Y^{(r+1)} + \frac{\partial^r F}{\partial p^r} \right) (x_0, y_0, p_0) = 0.$$

Recordemos que $(F_x + p F_y)(q) \neq 0$. Dessa forma, a demonstração segue imediatamente da observação das expressões obtidas acima.

- (ii) Para o caso A_2 não há nada o que provar. Para o caso A_3 , vimos na demonstração do item anterior que $Y'(F_x + F_y) + F_p = 0$. Derivando esta expressão em t e aplicando em $t = 0$ e $(x, y, p) = q$ obtemos

$$\frac{\partial Y''}{\partial t} F_{xx} + \left(F_{xx} \frac{\partial Y'}{\partial t} + F_{xy} \left(\frac{\partial Y'}{\partial t} X - \frac{\partial Y}{\partial t} \right) \right) Y'' + X \frac{\partial Y''}{\partial t} F_y +$$

$$\left(F_{xy} \frac{\partial Y'}{\partial t} + F_{yy} \left(\frac{\partial Y'}{\partial t} X - \frac{\partial Y}{\partial t} \right) \right) XY'' + F_{xp} \frac{\partial Y'}{\partial t} + F_{yp} \left(X \frac{\partial Y'}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial t} \right) = 0,$$

e lembrando que $Y''(X_0, 0) = 0$, uma vez que H_0 é do tipo A_3 , segue que

$$(F_x + pF_y) \frac{\partial Y''}{\partial t} + F_{xp} \frac{\partial Y'}{\partial t} + F_{yp} \left(X \frac{\partial Y'}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial t} \right) = 0.$$

Por outro lado, derivando a expressão $F(Y', XY' - Y, X) = 0$ diretamente em relação a t obtemos:

$$F_x \frac{\partial Y'}{\partial t} + F_y \left(X \frac{\partial Y'}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial t} \right) = 0.$$

Recorde que a condição necessária e suficiente para que H_0 seja desdobrada p -versalmente por H é $\frac{\partial^3 Y}{\partial X^2 \partial t}(X_0, 0) \neq 0$. Suponha por absurdo que $\frac{\partial Y''}{\partial t}(X_0, 0) = \frac{\partial^3 Y}{\partial X^2 \partial t}(X_0, 0) = 0$ e considere o sistema formado pelas duas últimas equações obtidas acima. Este sistema é homogêneo e possui solução não nula pois $\frac{\partial Y'}{\partial t}(X_0, 0) \neq 0$. Dessa forma, esse sistema possui infinitas soluções, e portanto o determinante da matriz dos seus coeficientes é nulo, ou seja, $(F_{yp}F_x - F_{xp}F_y)(q) = 0$, o que é absurdo. Portanto segue o resultado. ■

A partir do resultado acima podemos extrair informações geométricas para a superfície $M = F^{-1}(0)$. Lembramos que dada a superfície M podemos classificar os pontos da projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ através das derivadas da função F em relação à p .

Um ponto de $q \in M$ é um ponto dobra se satisfaz $F_p(q) = 0$ e $F_{pp}(q) \neq 0$, ou seja, se e somente se, a função H_0 tem singularidade do tipo A_2 no ponto correspondente. Um ponto de M é um ponto de cúspide se $F_p(q) = F_{pp}(q) = 0$ e $F_{ppp}(q) \neq 0$, ou seja, se e somente se, H_0 é do tipo A_3 . Note também que H_0 tem singularidade do tipo A_3 e é desdobrada p -versalmente por H se a projeção de M no plano (x, y) tem uma cúspide no ponto correspondente (ver capítulo anterior).

Considere a superfície em \mathbb{R}^3 obtida levantando-se as curvas integrais de F através do parâmetro t , $(Y'(X, t), XY'(X, t) - Y(X, t), t)$. Essa superfície é difeomorfa ao conjunto discriminante de H , que sabemos ser uma *cuspidal edge* ou uma superfície *rabo de andorinha* (se H_0 é do tipo A_2 ou A_3 , respectivamente).

Usando as conclusões obtidas acima obtemos o próximo resultado.

Teorema 3.28 ([4], p. 142) *Sejam F uma EDI e $q = (x_0, y_0, p_0) \in M = F^{-1}(0)$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $F_p(q) = 0$, $F_{pp}(q) \neq 0$, então as curvas integrais de F próximas a (x_0, y_0) são difeomorfas à cúspides.*

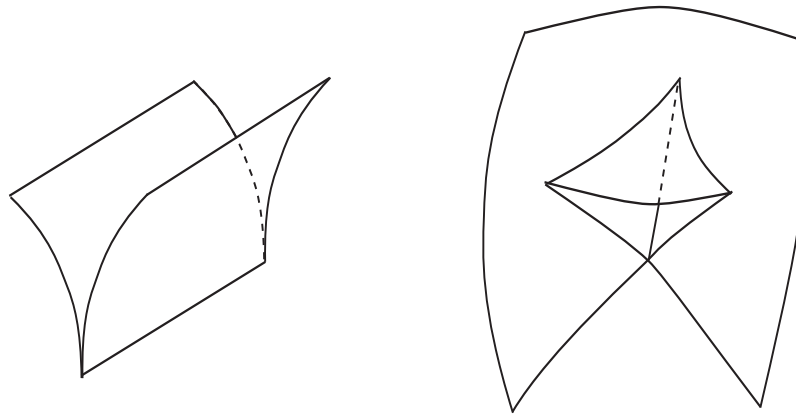


Figura 3.9: Cuspidal edge e rabo de andorinha.

- (ii) Se $F_p(q) = F_{pp}(q) = 0$, $F_{ppp}(q) \neq 0$, $(F_x F_{yp} - F_y F_{xp})(q) \neq 0$, então a família de curvas integrais próximas a (x_0, y_0) é obtida com a projeção das seções da superfície rabo de andorinha, de modo que as cúspides varrem o contorno aparente de $M = F^{-1}(0)$.

Demonstração. A demonstração segue imediatamente das interpretações geométricas feitas anteriormente. ■

Nesta seção, até o momento, nos ocupamos do estudo da EDI F em pontos que pertencem ao discriminante da equação mas que não são singularidades do campo ξ , como em (3.4). No entanto, no próximo resultado vamos novamente nos interessar nos pontos singulares de ξ . Tal resultado é bastante interessante pois relacionará o estudo feito na seção anterior com o feito na presente. Entre outras afirmações, o teorema a seguir garante que as boas dobras (Definição 3.16) são auto-duais, ou seja, a EDI obtida ao aplicarmos o Método de Legendre tem o mesmo tipo de singularidade que a EDI inicial.

Teorema 3.29 ([8], p. 794) *Considere a EDI dada por $F(x, y, p) = 0$ e a correspondente $G(X, Y, P) = 0$ obtida de F através do Método de Legendre. Tome $q = (0, 0, 0)$ e $L(q) = (0, 0, 0)$. Nessas condições temos os seguintes resultados:*

- (i) *A EDI F tem uma dobra (ou pior) e um zero do campo levantado em q se, e somente se, o mesmo ocorre para a EDI G .*
- (ii) *Os campos levantados de F e G são suavemente equivalentes. Consequentemente, as boas dobras da EDI F são auto-duais.*

Demonstração.

- (i) Sabemos que $G(X, Y, P) = F(P, XP - Y, X)$, e dessa forma, derivando em X, Y e P , obtemos

$$G_X = xF_y + F_p, \quad G_Y = -F_y \quad \text{e} \quad G_P = F_x + pF_y.$$

Assim, G tem uma dobra ou pior e um zero no campo levantado em $L(q)$ se, e somente se, $G_p(L(q)) = 0$ e $(G_X + PG_Y)(L(q)) = 0$, respectivamente. Ou seja, se, e somente se, $(F_x + pF_y)(q) = 0$ e $F_p(q) = 0$, respectivamente, o que é equivalente a F ter um zero do campo levantado e um ponto de dobra ou pior em q .

- (ii) Sabemos que a Transformação de Legendre é um difeomorfismo global e dessa forma a superfície $M = F^{-1}(0)$ é levada difeomorficamente na superfície $N = G^{-1}(0)$, como visto na Observação (3.21). Portanto, é natural que os campos levantados de ambas equações sejam suavemente equivalentes e conseqüentemente que as boas dobras da EDI F sejam auto-duais. ■

3.3 Equações diferenciais binárias

Nesta seção vamos tratar de um tipo particular e de bastante interesse de EDI's, as Equações Diferenciais Binárias (EDB's). As EDB's surgem de maneira natural na matemática, como por exemplo, em geometria diferencial, sistemas dinâmicos e equações diferenciais parciais.

Seja $F(x, y, p) = 0$ uma EDI como em (3.1) e $q \in M = F^{-1}(0)$ tal que $F_p(q) = 0$ e $F_{pp}(q) \neq 0$. Nessas condições, há no máximo duas curvas soluções por cada ponto de U e a EDI (3.1) pode ser escrita na forma quadrática

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2 = 0, \quad (3.5)$$

onde a, b, c são funções reais suaves definidas em V e que não se anulam simultaneamente em nenhum ponto de U . De fato, pelo Teorema da Divisão de Mather (ver [19], p. 95) podemos escrever F da seguinte maneira:

$$F(x, y, p) = F(q) + \phi(x, y, p) \left(p^2 + \sum_{i=0}^1 a_i(x, y) p^{1-i} \right) = 0,$$

com ϕ suave tal que $\phi(x, y, p) \neq 0$ e $a_i(x_0, y_0) = 0$. Reescrevendo a função acima, obtemos

$$F(x, y, p) = \phi(x, y, p) dy^2 + \phi(x, y, p) a_0(x, y) dy dx + \phi(x, y, p) a_1(x, y) dx^2 = 0.$$

Basta agora dividirmos a expressão por $\phi(x, y, p)$ e tomar $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = a_0(x, y)$ e $c(x, y) = a_1(x, y)$. Toda equação da forma (3.5) é chamada **equação diferencial binária** (EDB). As funções a, b, c são chamadas de **coeficientes da EDB**. Assim, os coeficientes de uma EDB qualquer podem também se anular em algum ponto de seu domínio.

Existem dois tipos de EDB's: as EDB's do **tipo 1**, que são aquelas em que seus coeficientes não se anulam simultaneamente em nenhum ponto de seu domínio, e as do

tipo 2, em que os coeficientes se anulam simultaneamente em algum ponto do domínio.

O *discriminante* da EDB (3.5) é o conjunto

$$\Delta = \{(x, y) \in U; (b^2 - ac)(x, y) = 0\}$$

e a *função discriminante* é a função

$$\delta : U \rightarrow \mathbb{R}, \delta(x, y) = (b^2 - ac)(x, y).$$

A definição de discriminante da EDB (3.5) é coerente com a apresentada anteriormente. De fato, escrevendo a EDB na forma $F(x, y, p) = 0$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 2a(x, y)p + 2b(x, y).$$

Igualando a expressão acima à zero, isolando p e substituindo em $F(x, y, p) = 0$ obtemos $(b^2 - ac)(x, y) = 0$, ou seja, o discriminante é formado pelos pontos (x, y) tais que $\delta(x, y) = 0$.

Segue do Teorema de Sard que, em geral, $\nabla\delta \neq 0$ nos pontos em que $\delta = 0$ (pois temos 3 equações num espaço com 2 variáveis). Logo, em geral 0 é um valor regular de δ e, conseqüentemente, Δ é uma curva regular em \mathbb{R}^2 . Note que, se uma EDB é do tipo 2 em (x, y) , então $\delta_x(x, y) = \delta_y(x, y) = 0$ e, assim, Δ é singular naquele ponto.

A EDB dada em (3.5) define um par de direções transversais em cada ponto $(x, y) \in V$ onde $b^2 - ac > 0$. De fato, considere uma rotação no plano (x, y) , de modo que $a(x, y) > 0$. Então, considerando a equação dada como uma equação do segundo grau em dy , podemos resolver a equação (3.5) como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b(x, y) \pm \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)}.$$

Dessa forma podemos decompor a equação em dois fatores lineares. Cada uma dessas equações determina um campo de direções. Para pontos em que $a(x, y) = 0$, podemos resolver a equação para dx/dy , uma vez que, nesse caso, $c(x, y) \neq 0$.

Por outro lado, a EDB não define nenhuma direção nos pontos em que $b^2 - ac < 0$ e, nos pontos do discriminante Δ , determina uma única direção, ou infinitas soluções.

Vamos agora apresentar exemplos importantes de EDB's: a equação diferencial das curvas assintóticas e das linhas de curvatura. Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^3 , $q \in S$ e $\chi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em q . Vamos fazer uma breve recordação sobre alguns conceitos de Geometria Diferencial.

O produto interno usual do \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície suave S um produto interno, que será indicado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Se $w_1, w_2 \in T_p S$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno desses vetores vistos como vetores em \mathbb{R}^3 .

Esse produto interno herda as propriedades do produto interno usual do \mathbb{R}^3 : é uma forma bilinear simétrica, ou seja, $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ e $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é linear em w_1 e w_2 . A esse produto interno associamos uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0,$$

chamada de **primeira forma fundamental** de S em p .

Podemos expressar a primeira forma fundamental na base $\{\chi_u, \chi_v\}$. Como um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = \chi(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \chi_u u' + \chi_v v', \chi_u u' + \chi_v v' \rangle_p \\ &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \chi_u, \chi_v \rangle_p u'v' + \langle \chi_v, \chi_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle_p \end{aligned}$$

são os *coeficientes da primeira forma fundamental* na base $\{\chi_u, \chi_v\}$ de $T_p S$.

Lembramos que a esfera unitária em \mathbb{R}^3 centrada na origem é denotada por \mathbb{S}^2 . A aplicação de Gauss

$$N : \chi(V) \subset S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

leva cada ponto $p = \chi(u, v)$ no vetor

$$N(p) = \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|}(u, v)$$

normal à S em p .

O operador $A_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ tem as seguintes propriedades: é auto-adjunto, isto é, satisfaz $\langle A_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, A_p(w_2) \rangle$ para quaisquer dois vetores w_1 e w_2 em $T_p S$; possui dois auto-valores reais κ_1, κ_2 chamados de **curvaturas principais**; possui dois auto-vetores ortogonais (quando $\kappa_1 \neq \kappa_2$) chamados de **vetores principais**. Os pontos onde $\kappa_1 = \kappa_2$ são chamados de **umbílicos**.

A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por

$$II_p = -\langle dN_p(v), v \rangle,$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de S em p .

Tome novamente $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. O vetor tangente à $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = \chi_u u' + \chi_v v'$ e

$$dN(\alpha') = (N \circ \alpha)'(t) = N_u u' + N_v v'.$$

Dessa forma, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\chi_u, \chi_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \chi_u u' + \chi_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde

$$e = \langle N, \chi_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, \chi_{uv} \rangle \quad e \quad g = \langle N, \chi_{vv} \rangle$$

são os coeficientes da segunda forma fundamental de S em p com relação a base $\{\chi_u, \chi_v\}$.

A segunda forma fundamental aplicada à um vetor unitário v , $II_p(v)$ nos dá a **curvatura normal**, $\kappa_n(v)$, de qualquer curva α em S tal que $\alpha' = v$. Assim,

$$\kappa_n(v) = II_p(v) = -\langle (N \circ \alpha), \alpha' \rangle.$$

Os valores extremos da curvatura normal $\kappa_n(v)$ obtidos de acordo com que v varia no círculo unitário de $T_p S$ são exatamente as curvaturas principais κ_1 e κ_2 (mínima e máxima, respectivamente) em p .

Os vetores unitários $\pm e_1(p)$ e $\pm e_2(p)$ associados aos valores extremos κ_1 e κ_2 , respectivamente, são os vetores principais (mínimo e máximo, resp.) em p . Eles são bem definidos e mutualmente ortogonais para todo ponto p não umbílico. Nos pontos umbílicos, as formas fundamentais I_p e II_p são proporcionais por um fator $\kappa = \kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

As retas $L_1(p) = \mathbb{R}(\pm e_1(p))$ e $L_2(p) = \mathbb{R}(\pm e_2(p))$ geradas pelos vetores principais são chamadas de **direções principais mínima** e **máxima** de S em p , respectivamente. Elas definem campos de linha suaves $L_1 : p \rightarrow L_1(p)$ e $L_2 : p \rightarrow L_2(p)$ mutuamente ortogonais, chamados **campos de linha principais mínimo** e **máximo** de S , respectivamente. As linhas principais coincidem com o autoespaço gerado pelos autovetores de dN_p associados aos autovalores κ_1 e κ_2 .

Sobre S as funções κ_1 e κ_2 são contínuas, podendo ser escritas como

$$\kappa_1 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad e \quad \kappa_2 = H + \sqrt{H^2 - K},$$

onde $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \text{tr}(-dN_p)$ é a **curvatura média** e $K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(-dN_p)$ é a **curvatura Gaussiana** de S .

Uma vez que $H^2 - K = [(\kappa_1 - \kappa_2)/2]^2$, segue que os pontos umbílicos podem também ser caracterizados como os zeros dessa função não negativa.

Em termos dos coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, as curvaturas média e Gaussiana são dadas, respectivamente, por:

$$H = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Exemplo 3.30 (Linhas de curvatura) Suponhamos que $q \in S$ é um ponto não umbílico. Então existem duas direções ortogonais, chamadas *direções principais*, correspondendo aos valores extremos da curvatura normal. Em um ponto umbílico, todas as direções são direções principais. Uma **linha de curvatura** é uma curva em S tal que a direção tangente em cada ponto é uma direção principal. A equação diferencial das linhas de curvatura é dada pela EDB

$$(gF - fG) dv^2 + (gE - eG) dudv + (fE - eF) du^2 = 0. \quad (3.6)$$

A EDB (3.6) é do tipo 2 se, e somente se, a superfície possui pontos umbílicos, uma vez que seus coeficientes se anulam somente em pontos umbílicos. Inicialmente mostremos que se $gF - fG = 0$ e $gE - eG = 0$ então $fE - eF = 0$. De fato:

$$\begin{cases} Fg - Gf = 0 \\ Eg - Ge = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Fge - Gfe = 0 \\ Egf - Gef = 0 \end{cases},$$

e, assim, $Fge - Efg = 0$.

- Se $g \neq 0$, temos que: $g(Fe - Ef) = 0 \Rightarrow fE - eF = 0$.

- Se $g = 0$

$$G \neq 0 \Rightarrow e = f = 0 \Rightarrow fE - eF = 0;$$

$$G = 0 \Rightarrow F \neq 0. \text{ Temos os casos:}$$

$$E = 0 \Rightarrow fE - eF = 0,$$

$$E \neq 0 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow fE - eF = 0.$$

Suponha agora que os coeficientes da EDB sejam todos nulos, ou seja, $gF = fG$, $gE = eG$ e $eF = fE$. Mostremos que isso ocorre somente nos pontos umbílicos. Sabemos que um ponto é umbílico se, e somente se, $H^2 - K = 0$. Utilizando as igualdades e fazendo substituições mostramos que $H^2 - K = 0$. Por outro lado, se o ponto é umbílico temos $e = \kappa E$, $f = \kappa F$ e $g = \kappa G$ o que nos garante que $gF - fG = gE - eG = 0$, e pelo que mostramos inicialmente $fE - eF = 0$, ou seja, os coeficientes da EDB se anulam.

O discriminante da equação (3.6) é o conjunto dos pontos umbílicos. De fato, podemos tomar a parametrização χ tal que $F \equiv 0$ em V . Assim, a EDB se torna

$$-fG dy^2 + (gE - eG) dydx + fE dx^2 = 0.$$

e seu discriminante passa a ser dado por

$$\delta = (gE - eG)^2 + f^2EG.$$

Dessa forma $\delta = 0$ se, somente se, cada fator for nulo. Mas se $f^2EG = 0$ temos que $f = 0$ (não podemos anular E, F e G simultaneamente) e usando $gE - eG = 0$ temos que $K = \frac{e^2}{E^2}$ e $H = \frac{e}{E}$. Consequentemente $H^2 - K = 0$ e sabemos que isso é válido se, e somente, se o ponto é umbílico. Portanto, o discriminante é formado pelo conjunto dos pontos umbílicos.

As configurações das linhas de curvatura foram primeiro dadas por Darboux (*Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic, Note VII, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. Gauthier-Villars. 1896*) e uma demonstração rigorosa foi dada em [7, 21] (ver Figura 3.10). ■

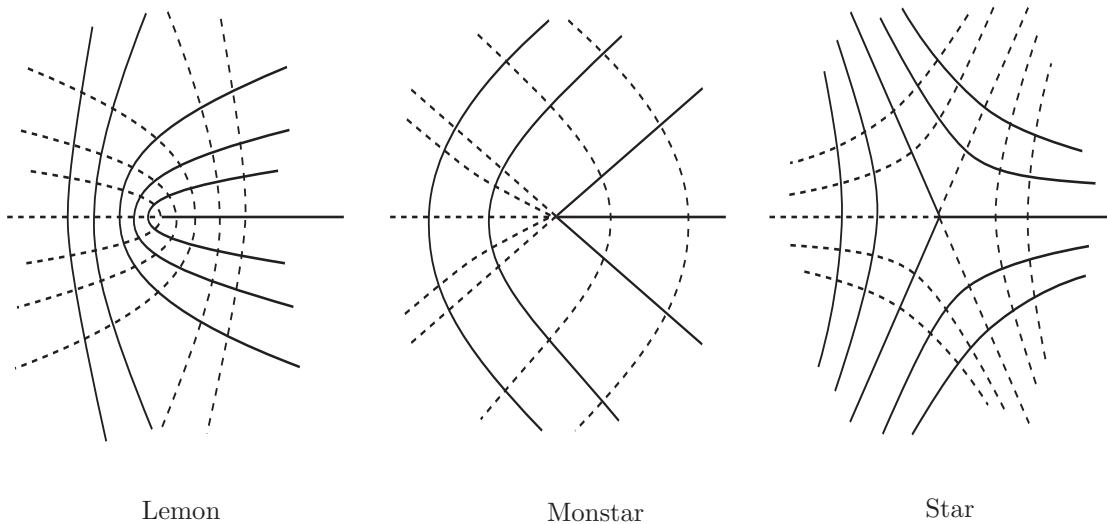


Figura 3.10: Figura do Exemplo 3.30.

Exemplo 3.31 (Curvas assintóticas) Suponhamos que $q \in S$ é um ponto hiperbólico. Então existem duas direções em q , chamadas *direções assintóticas*, com relação as quais a curvatura normal de S é zero. Em um ponto parabólico tais direções coincidem, e não existem direções assintóticas em pontos elípticos. Uma **curva assintótica** é uma curva em S tal que a direção tangente em cada ponto é uma direção assintótica. A equação diferencial das linhas assintóticas é dada pela EDB

$$gdv^2 + 2fdudv + edu^2 = 0 \tag{3.7}$$

a qual, restrita à região hiperbólica, é do tipo 1, pois $K(q) = \frac{eg-f^2}{EG-f^2}(q) < 0$. Mas não sabemos dizer o tipo da EDB para qualquer superfície, vai depender se há pontos planares,

ou não, pois são estes que geram EDB's do tipo 2. Concluindo: se a superfície não possui pontos planares, então a EDB é do tipo 1. Supondo que $g \neq 0$ (resp. $e \neq 0$), a equação acima pode ser vista como uma equação do segundo grau em dv (resp. du). Assim, o discriminante da equação satisfaz

$$(2f du)^2 - 4eg du^2 = 4 du^2(f^2 - eg) > 0,$$

para todo $(x, y) \in V$ (diminuindo V , se necessário). Logo, para cada ponto de V temos um par de direções assintóticas.

O discriminante da equação (3.7) é o conjunto parabólico da superfície. Configurações das linhas assintóticas em determinados pontos (cúspides de Gauss) podem ser encontradas em [2, 3, 17] (ver Figura 3.11).

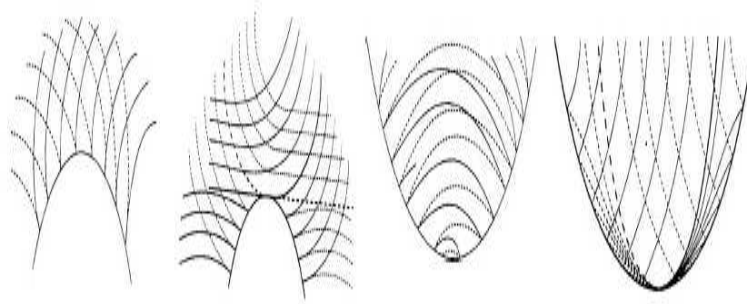


Figura 3.11: Figura do Exemplo 3.31.

■

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I., **Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1987. 351 p. (A series of comprehensive studies in mathematics, 250).
- [2] BANCHOFF, T.; THOM, R. Erratum et compléments: “Sur les points paraboliques des surfaces” by Y. L. Kergosien and Thom, **C.R Acad. Sci. Paris Sér. A-B** 291, A503-A505, 1980.
- [3] BANCHOFF, T.; GAFFNEY, T.; McCRORY, C. **Cusps of Gauss Mappings**. New York: Pitman, 1982.
- [4] BRUCE, J. W. A note on first order differential equations of degree greater than one and wavefront evolution. **Bull. london Math. Soc.**, v. 16, n. 2, 139-144, 1984.
- [5] BRUCE, J. W., FIDAL, D. On binary differential equations and umbilics, **Proc. Royal Soc. Edinburgh**, 111A, 147-168, 1989.
- [6] BRUCE, J. E; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities**: A geometrical introduction to singularity theory. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 321 p.
- [7] BRUCE, J. W.; TARI, F. On binary differential equations, **Nonlinearity**, v. 8, 255-271, 1995.
- [8] BRUCE, J. W.; TARI, F. Duality and implicit differential equations. **Nonlinearity**, v. 13, 791-811, 2000.
- [9] BRUCE, J. W., TARI, F. Implicit differential equations from the singularity theory viewpoint, **Banach Center Publications**, Warsaw, Institute of Math. Polish Academy of Sciences v. 33, 255-271, 1996.
- [10] CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 619 p. (Textos universitários, 4).

- [11] CASTRO, F. R. **Folheações de dimensão 2 de \mathbb{R}^3 induzidas por 1-formas diferenciais**. 2012. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Unesp, São José do Rio Preto.
- [12] CIBRARIO, M. Sulla riduzione a forma canonica delle equationi lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto. **Accademia di scienze e lettere**, Instituto Lombardo, Rendiconti, v. 65, 889-906, 1932.
- [13] DARA, L. Singularités génériques des équations différentielles multiformes. **Bol. Soc. Brasil. Mat**, v. 6, n. 2, 95-128, 1975.
- [14] DAVYDOV, A. A. The normal form of the differential equation implicit in the derivative. **Funct. Anal. Appl.** v. 19, n. 2, 1-10, 1985.
- [15] DAVYDOV, A. A. **Qualitative theory of control systems**. 1st ed. Providence: American Mathematical Society, 1994. 147 p.
- [16] FRANCISCO, A. P. **Estrutura genérica local de curvas através de desdobramentos de funções reais**. 2015. 132 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Unesp, São José do Rio Preto.
- [17] KERGOSENIEN, Y.; THOM, R. Sur les points paraboliques des surfaces, **C.R Acad. Sci. Paris Sér. A-B** 290, A705-A710, 1980.
- [18] LIMA, E.L. **Variedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 289 p. (Publicações matemáticas).
- [19] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. **Stable mappings and their singularities**. New York: Springer-Verlag NY Inc., 1973. 209 p. (Graduate texts in mathematics, 14).
- [20] PALIS Jr., J.; MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. 190 p. (Projeto Euclides).
- [21] SOTOMAYOR, J.; GUTIERREZ, C. Structurally stable configurations of lines of principal curvature, Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981), 195-215, **Astérisque, Soc. Math. France**, Paris 98-99, 1982.
- [22] TARI, F., Pairs of foliations on surfaces. To appear in Real and Complex Singularities (São Carlos, 2008) **London Mathematical Society Lecture Notes Series**.
- [23] TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008. 270 p.

Índice Remissivo

- 1-forma de contato, 44
- k -jato, 32
- 1-forma diferencial, 18
- aplicação criminante, 22
- aplicação de Gauss, 65
- aplicação dobra, 27, 42
- boa dobra, 52
- campo de vetores, 14
- campos topologicamente conjugados, 16
- centro, 15
- conjunto discriminante, 34
- conjunto dobra, 27
- conjunto zero, 34
- contorno aparente, 20
- criminante, 20
- criminante da EDI, 42
- curva assintótica, 68
- curva integras da EDI, 45
- curvatura Gaussiana, 66
- curvatura média, 66
- curvatura principal, 65
- cuspidal edge, 61
- desdobramento, 33
- desdobramento p -versal, 59
- desdobramento a r -parâmetros, 33
- desdobramento versal, 33
- discriminante, 23
- EDB do tipo 1, 63
- EDB do tipo 2, 64
- EDI genérica, 41
- envoltória, 23, 42
- envoltória E_2 , 24
- equação diferencial binária, 63
- equação diferencial implícita, 40
- esfera unitária \mathbb{S}^2 , 7
- evoluta, 31
- foco, 15
- função discriminante, 64
- germe, 32
- involução, 55
- linha de curvatura, 67
- Método de Legendre, 56
- nó, 15
- nó impróprio, 15
- ortotômica, 24
- parametrização, 6
- plano de contato, 44
- ponto de regressão, 29
- ponto regular da EDI, 42
- ponto singular da EDI, 42
- ponto singular regular, 48
- primeira forma fundamental, 65
- rabo de andorinha, 61

segunda forma fundamental, 66

sela, 15

singularidade do tipo A_k , 32

superfície da equação, 42

superfície regular, 6

Teorema de Sard, 13

Transformação de Legendre, 55

vizinhança coordenada, 7