



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Vagner Figueira de Faria

# O triângulo e o tetraedro aritméticos: os teoremas binomial e multinomial e seus padrões geométricos

Rio Claro  
2020





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# O triângulo e o tetraedro aritméticos: os teoremas binomial e multinomial e seus padrões geométricos

**Vagner Figueira de Faria**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora  
**Profa. Dra. Érika Capelato**  
**FCL - UNESP - Araraquara (SP)**

**Rio Claro**  
**2020**

F224t

Faria, Vagner Figueira de

O triângulo e o tetraedro aritméticos: os teoremas binomial e multinomial e seus padrões geométricos / Vagner Figueira de Faria. -- Rio Claro, 2020

108 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Érika Capelato

1. Álgebra. 2. Teorema binomial. 3. Coeficientes binomiais. 4. Pascal, Triângulo de. 5. Análise combinatória. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

# TERMO DE APROVAÇÃO

Vagner Figueira de Faria

O TRIÂNGULO E O TETRAEDRO ARITMÉTICOS: OS TEOREMAS  
BINOMIAL E MULTINOMIAL E SEUS PADRÕES GEOMÉTRICOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

---

Profa. Dra. Érika Capelato  
FCL - UNESP - Araraquara (SP)  
Orientadora

---

Prof. Dr. Thiago de Melo  
IGCE - UNESP - Rio Claro (SP)

---

Prof. Dra. Denise de Mattos  
ICMC - USP - São Carlos (SP)

**Rio Claro, 03 de fevereiro de 2020**



*Aos meus pais,  
Geny e João Adelino,  
com amor.*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus caros professores Luiz Antonio Ponce Alonso e Carlos McDowell por terem lido as minhas primeiras descobertas sobre os Tetraedros Aritméticos e me incentivado em 1995, quando eu estudava no terceiro ano do Ensino Médio e no curso pré-vestibular.

Agradeço aos professores da UNESP: Prof. Dr. Thiago de Melo e Prof. Dr. Jamil Viana Pereira por terem avaliado de início minha proposta de tema para esta dissertação.

Agradeço aos professores do PROFMAT UNESP campus Rio Claro, Prof. Dr. Rawilson de Oliveira Araujo, Prof. Dr. Thiago de Melo, Prof. Dr. Jamil Viana Pereira e Prof. Dra. Érika Capelato pelas aulas bem preparadas e por terem seguido a bibliografia recomendada pelo PROFMAT; isso ajudou muito na minha preparação para o Exame Nacional de Qualificação e no resultado que obtive: aprovado com nota máxima.

Agradeço especialmente à minha orientadora, Prof. Dra. Érika Capelato por ter sugerido artigos, temas e demonstrações que deram estrutura sólida para esta dissertação. Além disso, é importante agradecer-lá pela disposição e motivação para ler e corrigir as versões deste trabalho, mesmo em dias e horários diversos. Sem seu incentivo esse projeto não teria se concretizado.

Em especial, agradeço ao saudoso Prof. Dr. Elon Lages Lima por ter idealizado o programa PROFMAT, possibilitando, assim, a oportunidade de realizar meu sonho de fazer o Mestrado em Matemática. Agradeço a todos os professores e autores dos livros do PROFMAT por terem sido tão caprichosos e precisos na execução desse grandioso projeto. À Sociedade Brasileira de Matemática e ao IMPA, centros de excelência em Matemática, que nos orgulham e nos guiam na Educação Matemática há décadas.

A todos os envolvidos o meu muito obrigado!



*A Matemática é a rainha das ciências e  
a Aritmética é a rainha das matemáticas.*  
Carl Friedrich Gauss



# Resumo

Neste trabalho, com o objetivo de adquirir diferentes conhecimentos e novas formas de abordagem, estudamos diversas demonstrações para os teoremas binomial e multinomial. Estas demonstrações possibilitaram explorar técnicas matemáticas como a indução matemática, análise combinatória, probabilidades e cálculo diferencial. Resultados interessantes foram apresentados neste trabalho com relação à expansão do triângulo de Pascal para outras dimensões como o tetraedro aritmético formado por todas as camadas triangulares associadas às expansões trinomiais e os tetraedros que são associados às expansões tetranomiais.

**Palavras-chave:** Teorema Binomial, Teorema Multinomial, Triângulo de Pascal, Tetraedro Aritmético, Análise Combinatória.



# Abstract

In this work, aiming to acquire different knowledge and new ways of approach, we study several demonstrations for the binomial and multinomial theorems. These demonstrations made it possible to explore mathematical techniques such as mathematical induction, combinatorial analysis, probabilities and differential calculus. Interesting results have been presented in this paper regarding the expansion of the Pascal triangle to other dimensions such as the arithmetic tetrahedron formed by all the triangular layers associated with trinomial expansions and the tetrahedra that are associated with tetranomial expansions.

**Keywords:** Binomial Theorem, Multinomial Theorem, Pascal's Triangle, Arithmetical Tetrahedron, Combinatorial Analysis.



# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                                                                   |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Diagramação usada por Montmort para o Triângulo Aritmético, 1708.<br>Fonte: [7], p. xiv. . . . .                                                                                                                                                  | 23 |
| 1.2  | Os Números Triangulares . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 23 |
| 1.3  | Números triangulares no triângulo de Pascal . . . . .                                                                                                                                                                                             | 24 |
| 1.4  | A soma dos seis primeiros naturais resulta um número triangular. . . .                                                                                                                                                                            | 25 |
| 1.5  | Os Números Quadrados ou Quadrados Perfeitos . . . . .                                                                                                                                                                                             | 26 |
| 1.6  | Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos.<br>Fonte: [7], p.4. . . . .                                                                                                                                             | 26 |
| 1.7  | Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos.                                                                                                                                                                         | 27 |
| 1.8  | Visualização de $(a + b)^2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 28 |
| 1.9  | Visualização $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$ . . . . .                                                                                                                                                                                              | 29 |
| 1.10 | Michael Stifel, 1487–1567. Fonte: [26]. . . . .                                                                                                                                                                                                   | 30 |
| 1.11 | <i>Die Coss</i> , Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação de Stifel<br>como ele a apresentou em 1553 (RUDOLFFS, STIFEL, 1553, p.168). . .                                                                                           | 31 |
| 1.12 | 1553: <i>Die Coss</i> , Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação<br>de Stifel como ele a apresentou; nesta página vemos a explicação do<br>mecanismo da soma ou <i>Relação de Stifel</i> (RUDOLFFS, STIFEL, 1553,<br>p.169). . . . . | 32 |
| 1.13 | Blaise Pascal, 1623–1662. Fonte: [25]. . . . .                                                                                                                                                                                                    | 33 |
| 1.14 | Capa da primeira edição do <i>Traité du triangle arithmétique</i> de Pascal,<br>(PASCAL, 1665) . . . . .                                                                                                                                          | 34 |
| 1.15 | Apresentação original do triângulo aritmético de Pascal, (PASCAL, 1665).<br>35                                                                                                                                                                    |    |
| 1.16 | Jakob Bernoulli (também escrito como “Jacques Bernoulli”, “Jacobi Ber-<br>noulli” ou ainda “James Bernoulli”). Fonte: [23]. . . . .                                                                                                               | 36 |
| 1.17 | Capa do livro <i>Ars Conjectandi</i> , de Jakob Bernoulli, 1713. Fonte: [24]. .                                                                                                                                                                   | 37 |
| 1.18 | O Triângulo Aritmético apresentado por Jakob Bernoulli, em seu livro<br><i>Ars Conjectandi</i> , publicado em 1713. (BERNOULLI, 1713, p.87). . . .                                                                                                | 38 |
| 2.1  | Triângulo de Pascal . . . . .                                                                                                                                                                                                                     | 43 |
| 2.2  | Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais . . . . .                                                                                                                                                                                          | 46 |
| 2.3  | Teorema das colunas. Fonte: [15], p. 99. . . . .                                                                                                                                                                                                  | 50 |
| 2.4  | Teorema das colunas. Fonte: [15], p. 96. . . . .                                                                                                                                                                                                  | 52 |
| 5.1  | $(a + b + c)^2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 76 |
| 5.2  | $(a + b + c)^3$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 79 |
| 5.3  | $(a + b + c)^4$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 80 |
| 5.4  | Coeficientes de $(a + b + c)^4$ . . . . .                                                                                                                                                                                                         | 81 |
| 5.5  | $(a + b + c)^5$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 82 |

|      |                                                                                                                    |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.6  | Coeficientes de $(a + b + c)^5$ . . . . .                                                                          | 83  |
| 5.7  | Princípio multiplicativo para obtenção da camada correspondente a $n = 4$                                          | 86  |
| 5.8  | Princípio multiplicativo para obtenção da camada correspondente a $n = 5$                                          | 86  |
| 5.9  | <i>O Tetraedro Aritmético</i> , com os coeficientes de $(a + b + c)^n$ , até $n = 5$ .                             | 89  |
| 5.10 | <i>O Tetraedro Aritmético</i> , com os coeficientes de $(a + b + c)^n$ , até $n = 5$ -<br>segunda visão . . . . .  | 90  |
| 5.11 | <i>O Tetraedro Aritmético</i> , com os coeficientes de $(a + b + c)^n$ , até $n = 5$ -<br>terceira visão . . . . . | 91  |
| 5.12 | Tetraedro com os coeficientes de $(a + b + c + d)^5$ . . . . .                                                     | 93  |
| 5.13 | Tetraedro: princípio multiplicativo . . . . .                                                                      | 94  |
| 5.14 | Uma representação parcial do Hipertetraedro da expansão de $(a + b + c + d + e)^5$ . . . . .                       | 95  |
| 6.1  | Os Números Triangulares . . . . .                                                                                  | 100 |
| 6.2  | Os Números Triangulares . . . . .                                                                                  | 101 |
| 6.3  | Números triangulares no triângulo de Pascal . . . . .                                                              | 102 |
| 6.4  | A soma $1 + 2 + \cdots + n$ no triângulo de Pascal . . . . .                                                       | 104 |
| 6.5  | Números tetraédricos no triângulo de Pascal . . . . .                                                              | 106 |
| 6.6  | A soma dos números triangulares resulta em um número tetraédrico:<br>$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$ . . . . .     | 107 |

# Sumário

|          |                                                                        |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                      | <b>21</b>  |
| <b>2</b> | <b>O Triângulo Aritmético</b>                                          | <b>43</b>  |
| 2.1      | Relação de Stifel . . . . .                                            | 47         |
| 2.2      | Teoremas relacionados aos termos do Triângulo Aritmético . . . . .     | 49         |
| <b>3</b> | <b>O Teorema Binomial</b>                                              | <b>55</b>  |
| 3.1      | Demonstração por Indução Matemática . . . . .                          | 56         |
| 3.2      | Demonstração usando Análise Combinatória . . . . .                     | 58         |
| 3.3      | Demonstração usando Probabilidade . . . . .                            | 59         |
| 3.4      | Demonstração usando Cálculo Diferencial . . . . .                      | 62         |
| <b>4</b> | <b>O Teorema Multinomial</b>                                           | <b>65</b>  |
| 4.1      | Demonstração usando Análise Combinatória . . . . .                     | 66         |
| 4.2      | Demonstração probabilística . . . . .                                  | 69         |
| 4.3      | Demonstração usando Cálculo Diferencial . . . . .                      | 71         |
| <b>5</b> | <b>Padrões geométricos para as expansões trinomiais e tetranomiais</b> | <b>73</b>  |
| 5.1      | Expansão Trinomial . . . . .                                           | 74         |
| 5.2      | Expansão Tetranomial . . . . .                                         | 92         |
| 5.3      | Passos futuros para novas dimensões . . . . .                          | 95         |
| <b>6</b> | <b>Atividades para sala de aula</b>                                    | <b>97</b>  |
| 6.1      | Atividade 1 - O Triângulo de Pascal e a Relação de Stifel . . . . .    | 97         |
| 6.2      | Atividade 2 - Os Números Triangulares . . . . .                        | 99         |
| 6.3      | Atividade 3 - Números Tetraédricos . . . . .                           | 106        |
|          | <b>Referências</b>                                                     | <b>109</b> |



# 1 Introdução

De acordo com Edwards (2019), o Triângulo Aritmético é o mais famoso de todos os padrões de números. À primeira vista parece tratar apenas dos coeficientes binomiais. Porém, ele contém os números triangulares e piramidais da Grécia Antiga, os números combinatórios que vieram com os estudos Hindus de arranjos e seleções de objetos e ainda, de forma um pouco velada, os números de Fibonacci<sup>1</sup> da Itália medieval. Ele revela padrões que agradam os olhos, levanta questões que instigam os estudiosos de Teoria dos Números e, sobretudo, “Há tantas relações presentes que quando alguém descobre uma nova identidade, não há mais tantas pessoas que se empolguem a seu respeito, exceto o descobridor!” - Knuth (1973).

O Triângulo Aritmético foi escrito pela primeira vez muito antes de 1654, ano em que Blaise Pascal escreveu o seu *Traité du triangle arithmétique*, mas foi o seu trabalho que uniu todos os diferentes aspectos dos números pela primeira vez. Nele, Pascal desenvolveu as propriedades dos números como uma peça de matemática pura (frequentemente usando indução matemática em suas demonstrações) e então, numa série de apêndices, mostrou como essas propriedades são relevantes para o estudo dos números figurados, para a teoria de combinações, para a expansão das expressões binomiais e para a solução de um importante problema da teoria das probabilidades. É, portanto, muito apropriado que o Triângulo Aritmético seja conhecido como Triângulo de Pascal.

O subsequente florescimento da teoria das probabilidades aumentou a importância dos coeficientes binomiais através da principal aplicação na distribuição binomial. Durante o desenvolvimento da análise no século XVII, esses coeficientes com grande frequência vinham à tona influenciando diretamente as descobertas de Wallis<sup>2</sup>, Newton<sup>3</sup> e Leibniz<sup>4</sup>. Mais recentemente, o crescimento da importância da análise combinatória tem fomentado novo interesse nos coeficientes binomiais. Para contarmos a história desses números, é importante distinguirmos três caminhos pelos quais eles vieram. Temos então que distinguir três tipos de números:

---

<sup>1</sup>Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, (c.1170–c.1250), mais reconhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano. É considerado o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido pela grande descoberta da Sequência de Fibonacci e pela sua participação na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

<sup>2</sup>John Wallis (1616–1703) foi um clérigo inglês e matemático, a quem é dado crédito por parte do desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

<sup>3</sup>Isaac Newton (1643–1727) foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático. Sua obra, *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* é considerada uma das mais influentes na história da ciência.

<sup>4</sup>Gottfried Wilhelm (von) Leibniz (1646–1716) foi um proeminente polímata alemão e um dos mais importantes lógicos, matemáticos e filósofos naturais do Iluminismo. Leibniz e Newton criaram o Cálculo Diferencial e Integral independentemente um do outro.

1. *Os números figurados*. São sequências de números associados a agrupamentos de pontos (ou objetos) que formam alguma figura ou padrão geométrico. Os números triangulares apresentados na Figura 1.2 são um exemplo de números figurados.

Podemos definir os *Números Figurados* como sendo os números que ocorrem numa certa família de progressões nas quais o  $l$ -ésimo número da  $k$ -ésima progressão, denotado por  $f_k^l$ , é a soma dos primeiros  $l$  números da progressão anterior (a  $(k-1)$ -ésima progressão), sendo a primeira dessas progressões, a sequência dos números inteiros:  $1, 2, 3, 4, \dots$ .

2. *Números Combinatórios*: são aqueles que dão o número de maneiras de se escolher  $k$  elementos de um conjunto com  $n$  elementos, simbolizado atualmente como  $C_n^k$  ou  ${}^nC_k$  ou ainda  $C_{n,k}$ . Algebricamente, a definição de combinação é dada por

$$C_n^k = {}^nC_k = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.1)$$

3. *Números Binomiais*: são os coeficientes que ocorrem na expansão da  $n$ -ésima potência da expressão binomial  $(a+b)$ ; o coeficiente de um termo  $a^{n-k}b^k$  dessa expansão é normalmente denotado por  $\binom{n}{k}$ <sup>5</sup>. Algebricamente temos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.2)$$

De maneira análoga, uma diagramação de números será chamada de *Triângulo Figurado*, *Triângulo Combinatório* ou *Triângulo Binomial* de acordo com o contexto no qual estiver inserido. Essas diagramações de números não estarão necessariamente em formato triangular – de fato, como esses padrões podem ser estendidos indefinidamente, não raramente ficará difícil atribuir um determinado formato geométrico a eles – mas é conveniente e consistente trabalharmos com a forma triangular. Claro que todos esses triângulos mostraram tratar das mesmas coisas; são de fato uma coisa só. Mas fizemos essa diferenciação para facilitar a apresentação de sua história. Ao pesquisarmos os estudos e descobertas ao longo da história, notamos que cada descobridor do Triângulo Aritmético estava mergulhado em um ambiente de estudo: *Números Figurados*, *Números Combinatórios* ou *Números Binomiais*.

Segundo Edwards (2019), foi Montmort<sup>6</sup> que, em 1708, pela primeira vez atrelou o nome de Pascal ao Triângulo Combinatório (“*Table de M. Pascal pour les combinaisons*”). No entanto Montmort apresenta o Triângulo Aritmético com uma configuração um pouco diferente:

---

<sup>5</sup>Note que  $C_n^k = {}^nC_k = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ . Para usar notações distintas para contextos diferentes, alguns autores usam as notações  $C_n^k$ ,  ${}^nC_k$  e  $C_{n,k}$  para se referirem aos *números combinatórios* e a notação  $\binom{n}{k}$  para se referirem aos *coeficientes binomiais*.

<sup>6</sup>Pierre Rémond de Montmort, matemático francês, 1678–1719.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & \dots \\
 & & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & \dots \\
 & & & & 1 & . & 3 & . & 6 & \dots \\
 & & & & & & 1 & . & 4 & \dots \\
 & & & & & & & & 1 & \dots
 \end{array}$$

Figura 1.1: Diagramação usada por Montmort para o Triângulo Aritmético, 1708. Fonte: [7], p. xiv.

Depois disso, em “*Miscellanea Analytica*” de 1730, De Moivre<sup>7</sup> perpetuou a forma de Pascal batizando o triângulo aritmético como “*Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM*”, reservando o termo “*TRIANGULUM ARITHMETICUM*” para o formato apresentado por Montmort.

## Os Números Figurados

A linha de raciocínio mais longa que Pascal desenvolveu em seu *Tratado do triângulo aritmético* foi sobre os números figurados, os quais remontam aos tempos da *Escola Pitagórica* que se dedicou muito a estudar padrões para os números 540 anos antes de Cristo.

Os pitagóricos estudaram os padrões numéricos formados por objetos (como pequenas pedras, esferas ou pontos) arrumados em forma de triângulos ou quadrados.

*Disposição de objetos formando triângulos*

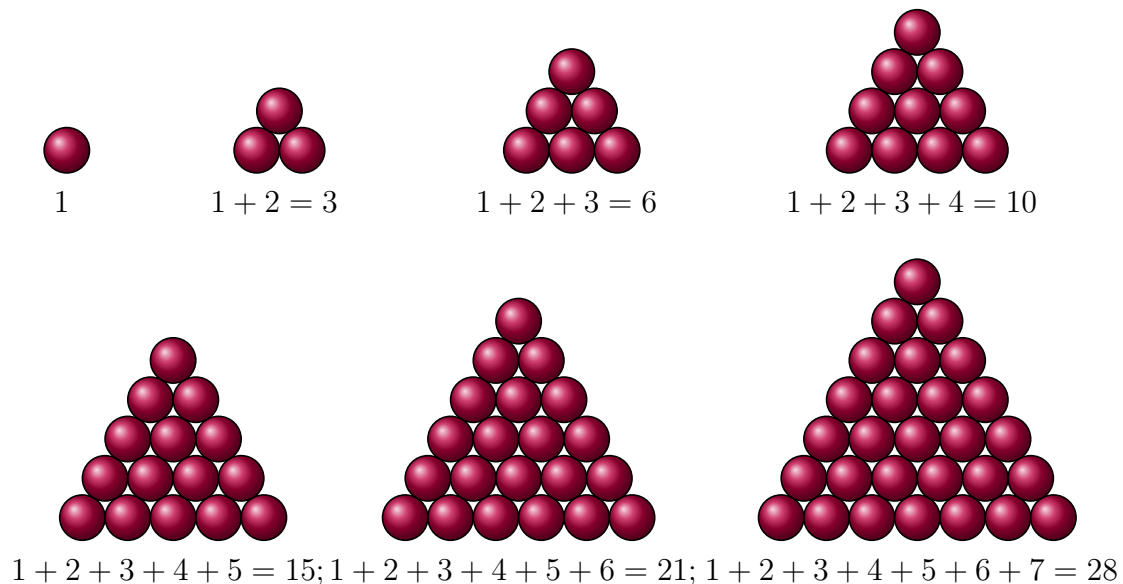


Figura 1.2: Os Números Triangulares

A sequência dos números triangulares é  $1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \dots, f_2^{l-1} + l = f_2^l, \dots$ , onde  $f_2^l$  representa o  $l$ -ésimo número

<sup>7</sup>Abraham de Moivre, matemático francês, conhecido pelas “*Fórmulas de De Moivre*” para os Números Complexos, 1667–1754.

triangular. O índice 2 indica 2 duas dimensões. Se o índice for 3, então estaremos falando sobre os números “piramidais” (o mais apropriado seria o termo: *números tetraédricos*).

Note que a sequência dos primeiros números triangulares associada à sequência dos primeiros números naturais, se escritos em disposição adequada, já gerariam naquela época (entre o século VI a.C. e o século II d.C.) uma parte do triângulo aritmético, ver Figura 1.6.

Note ainda que a soma dos seis primeiros números naturais,  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ , resulta no número triangular 21, ver Figura 1.4. Do mesmo modo, a soma dos  $n$  primeiros números naturais resulta um número triangular.

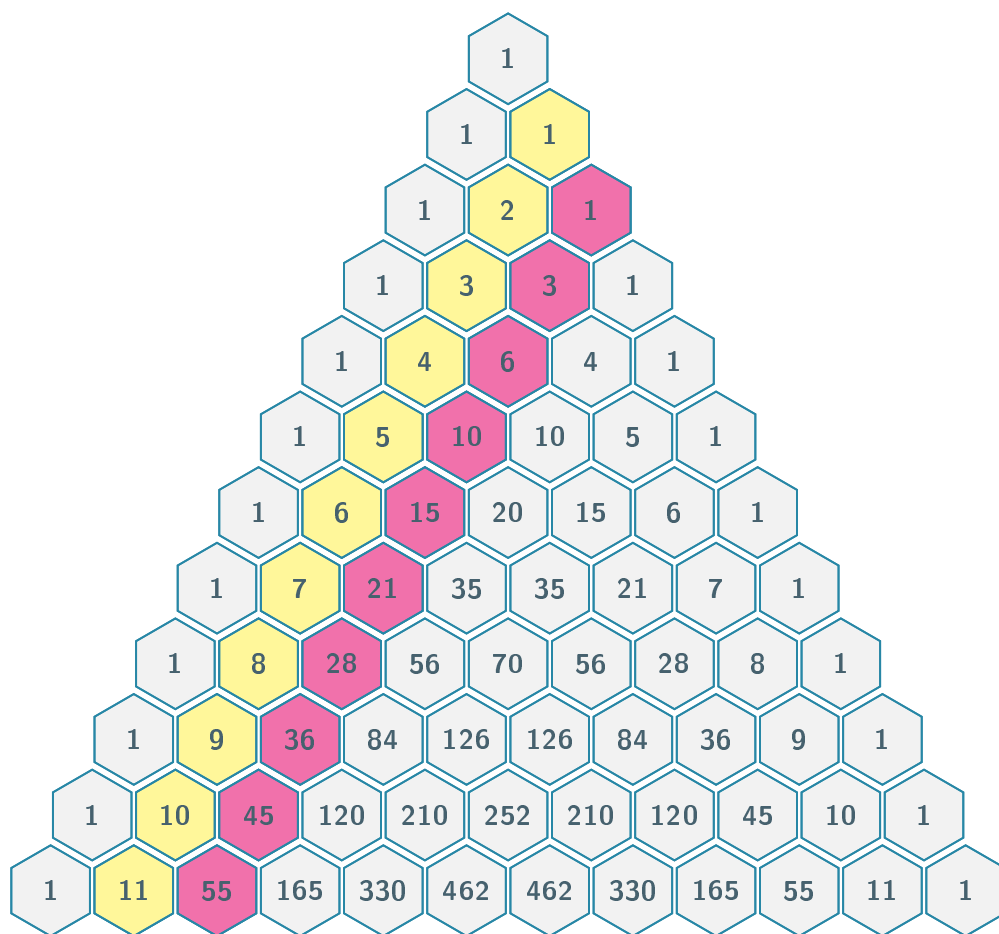


Figura 1.3: Números triangulares no triângulo de Pascal

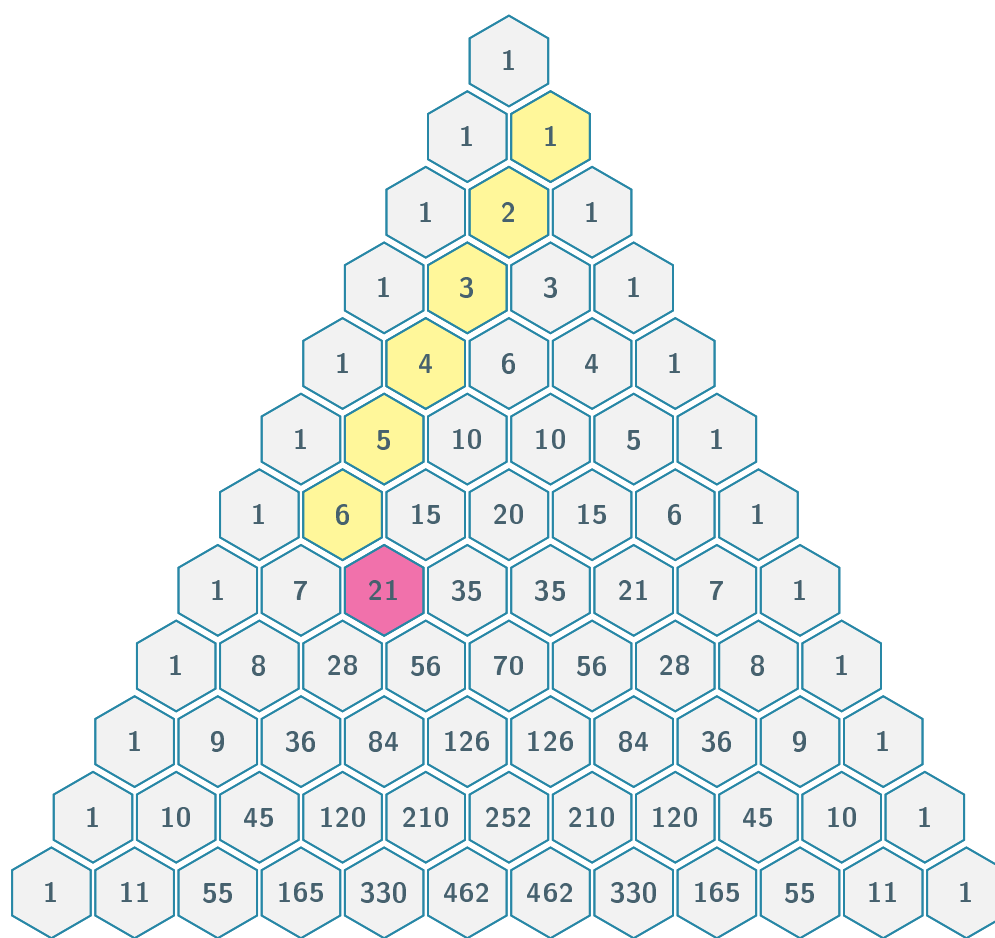


Figura 1.4: A soma dos seis primeiros naturais resulta um número triangular.

A Figura 1.5 mostra disposições de objetos formando quadrados. Essas disposições em figuras representam uma das maneiras mais antigas de se enxergar os números conhecidos por “Quadrados Perfeitos”.

*Disposição de objetos formando quadrados*

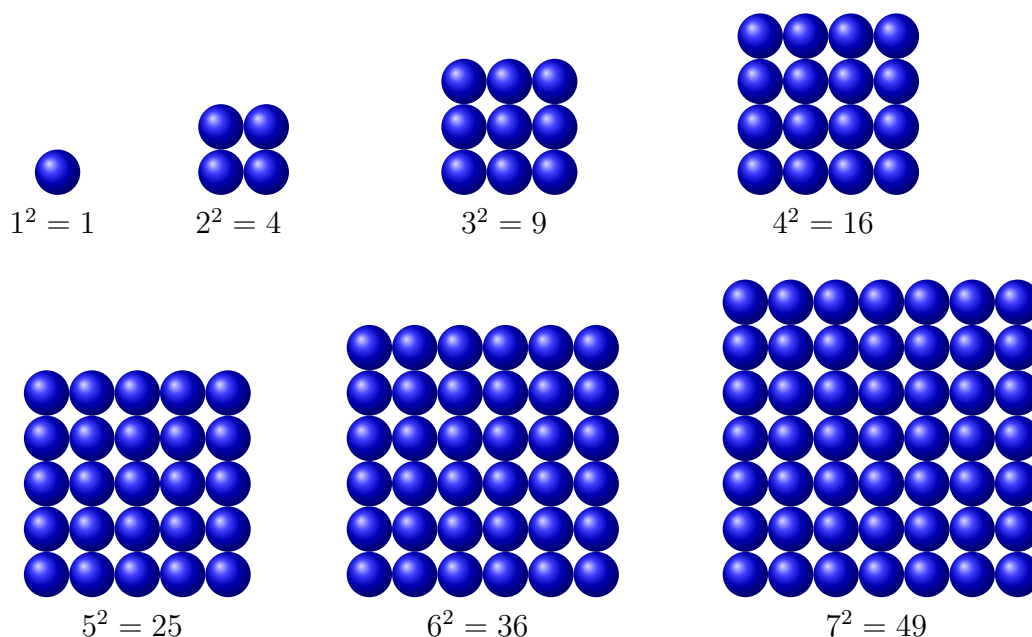


Figura 1.5: Os Números Quadrados ou Quadrados Perfeitos

Segundo Edwards (2019), mais adiante, no século II d.C., Theon de Smyrna<sup>8</sup> e Nicomachus<sup>9</sup> já sabiam que a soma de dois números triangulares resulta um quadrado perfeito. Além de conhecer os números triangulares, Nicomachus escreveu sobre os números tetraédricos.

|   |   |    |    |    |    |    |     |     |     |
|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | ... |
| 1 | 3 | 6  | 10 | 15 | 21 | 28 | 36  | 45  | ... |
| 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8   | 9   | ... |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | ... |

Figura 1.6: Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos. Fonte: [7], p.4.

Note que cada linha pode ser obtida a partir da anterior, por diferenças entre termos consecutivos.

Nem Nicomachus nem Theon parecem ter percebido as relações entre os números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos. Muito menos parecem ter escrito esses números de maneira tabelada, como apresentamos na Figura 1.6.

Note que se as sequências que apresentamos na Figura 1.6 fossem reescritas com ordem inversa das linhas, teríamos:

<sup>8</sup>Theon de Smyrna (por volta de 100 d.C.) foi um matemático e filósofo grego, mas pouco se sabe sobre ele. Seus trabalhos foram fortemente influenciados pela Escola Pitagórica. Sua obra que sobreviveu aos dias atuais “Sobre a Matemática útil para o entendimento de Platão” é uma fonte introdutória à matemática grega. Theon é citado por Ptolomeu várias vezes em sua obra “Almagesto” como “Theon, o Matemático” (Observação: não deve ser confundido com “Theon de Alexandria”).

<sup>9</sup>Nicomachus de Gerasa (aproximadamente 60–120 d.C.) foi um importante matemático antigo, mais conhecido por suas obras “Introdução à Aritmética e Manual de Harmônicos, ambas em grego.

|   | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | ... |
|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|
| 0 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | ... |
| 1 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | ... |
| 2 | 1 | 3 | 6  | 10 | 15 | 21 | 28 | ... |
| 3 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | ... |

Figura 1.7: Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos. Essa disposição dos *números figurados* forma um diagrama (ou tabela) muito próximo da versão de Pascal do Triângulo Aritmético

Essa disposição dos *números figurados* forma um diagrama (ou tabela) muito próximo da versão que Blaise Pascal escolheu para o Triângulo Aritmético que apresenta em *Traité du Triangle Arithmétique*, 1665.

Coolidge (1949) aponta que o Teorema Binomial é bastante conhecido por todos os estudantes de Álgebra, pelo menos em seus aspectos elementares. A maioria das pessoas associam esse teorema ao nome de Sir Isaac Newton: ele o teria inventado (ou descoberto) ou o Teorema Binomial teria sido gravado em sua tumba. No entanto, nenhuma dessas expectativas é verdadeira. De fato, o Teorema Binomial não foi invenção de Newton, mas os seus trabalhos marcaram um importante avanço em sua teoria geral. A história do Teorema Binomial remonta a pelo menos 2000 anos antes de Newton, em *Os Elementos de Euclides*<sup>10</sup>, século III a.C. (BICUDO, 2009).

Encontramos um dos primeiros traços do Teorema Binomial em *Os Elementos de Euclides*, livro II, proposição 4:

*“Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.” (BICUDO, 2009, p.137)*

Em linguagem algébrica, o trecho acima significa que, se os segmentos tiverem medidas  $a$  e  $b$  então obtemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (1.3)$$

<sup>10</sup>Euclides de Alexandria (em torno de 300 a.C.) foi um professor, matemático e escritor grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Seu livro mais famoso "Os Elementos" é o livro mais editado da história, depois da Bíblia.

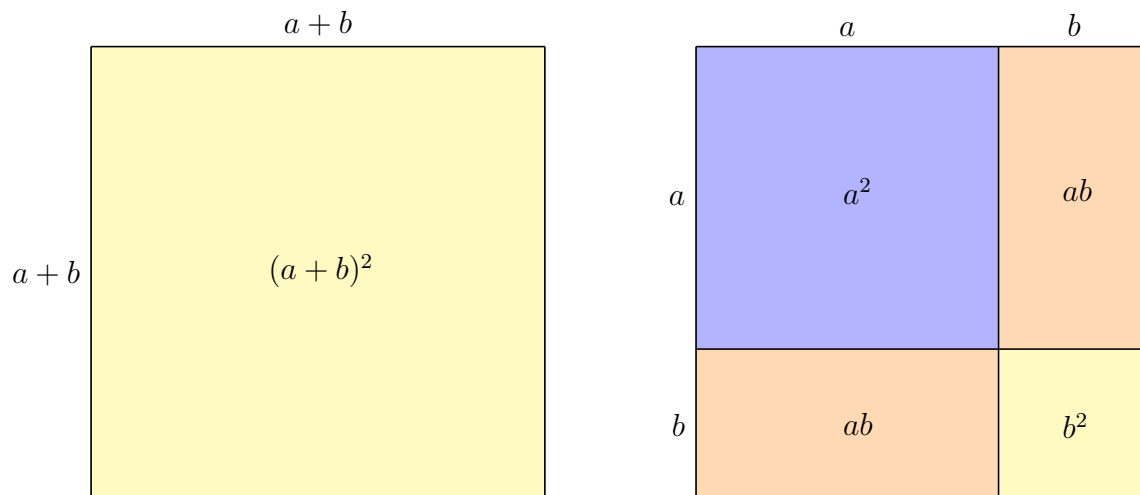


Figura 1.8: Visualização de  $(a + b)^2$

Na Figura 1.8 apresentamos uma visualização geométrica para a equação (1.3). São apresentados dois quadrados, congruentes um ao outro, de lados de medida  $a + b$ . O quadrado à esquerda, foi construído com lados de comprimento  $a + b$ ; assim, possui área  $(a + b)^2$ . O quadrado à direita tem os lados com a mesma medida  $(a + b)$  e, portanto, com área igual à do primeiro,  $(a + b)^2$ . Nesse segundo quadrado dividimos cada segmento horizontal em duas partes, de medidas a saber:  $a$  e  $b$ . O mesmo foi feito com os segmentos na posição vertical. Dessa maneira temos a figura original dividida em dois retângulos de dimensões  $a$  por  $b$ , um quadrado de lado  $a$  e outro quadrado de lado  $b$ . Ao somarmos as áreas desses dois quadrados  $a^2 + b^2$  com as desses dois retângulos  $ab + ab$ , obtemos a área do segundo quadrado. Da equivalência dos dois quadrados de lados  $(a + b)$  obtemos a equação (1.3).

A equação correspondente para o quadrado da diferença é encontrada em *Os Elementos de Euclides*, livro II, proposição 7:

*“Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, os quadrados ambos juntos, o sobre a reta toda e o sobre um dos segmentos, são iguais a duas vezes o retângulo contido pela reta toda e pelo dito segmento e também o quadrado sobre o segmento restante.” (BICUDO, 2009, p.141).*

Assim, se  $a$  representa o todo e  $b$  representa o primeiro segmento, temos:

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2 \quad (1.4)$$

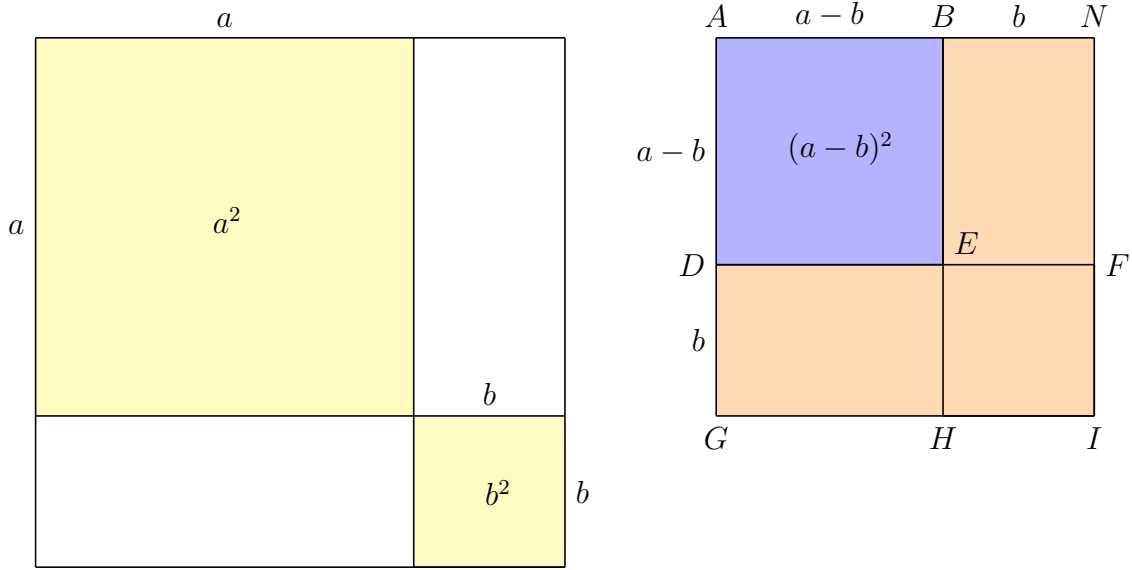


Figura 1.9: Visualização  $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$

Na Figura 1.9 apresentamos uma visualização geométrica para a equação (1.4). Nas versões que conhecemos de *Os Elementos*, Euclides nos apresenta figuras semelhantes a essas como parte do argumento, porém as medidas indicadas na figura são notações atuais que nós colocamos por motivos didáticos. À esquerda vemos o quadrado de lado  $a$  e o quadrado de lado  $b$ . Suas áreas somadas são  $a^2 + b^2$ . À direita temos o quadrado  $AGIN$  de lado  $a$ , que é congruente ao quadrado (amarelo) de lado  $a$  da esquerda e que, portanto, tem a mesma área:  $a^2$ . O quadrado  $ABED$ , de lado  $a - b$  tem área  $(a - b)^2$ . Note que há dois retângulos (cor laranja),  $DGIF$  e  $BHIN$ , que têm dimensões  $a$  por  $b$ ; suas áreas somadas, portanto, podem ser dadas por  $2ab$ . Note que o quadrado  $EHIF$  tem área  $b^2$ , mas estamos contando esta área duas vezes ao fazermos a soma anterior. Dessa forma, notamos que  $(ABED) + (DGIF) + (BHIN) - (EHIF) = (AGIN)$ , ou seja,  $(a - b)^2 + ab + ab - b^2 = a^2$ . De forma equivalente, podemos escrever:  $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$ .

Teria sido perfeitamente fácil para Euclides ir adiante e provar a fórmula para o cubo de um binômio, mas isso teria quebrado a sua linha de raciocínio. Nos livros II e X ele estava prodigiosamente interessado nos quadrados de binômios; qualquer generalização deles não parece ter-lhe de fato interessado. A moderna tendência de generalizar tão amplamente quanto possível, e estender cada teorema à sua forma mais geral, era quase algo estranho ao pensamento dos gregos em matemática; clareza e precisão eram as qualidades soberanas que sempre eram solicitadas.

Em Coolidge (1949) o autor escreve, como fato curioso, que um dos primeiros usos das fórmulas das potências binomiais tenha sido para descobrir as raízes aproximadas de números. O método de Heron<sup>11</sup> é a simplicidade por si mesma. Se desejamos encontrar uma aproximação para  $\sqrt{A}$  e  $a_1$  é um primeiro valor, o valor mais próximo será

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{A}{a_1} \right). \quad (1.5)$$

De acordo com Struik (1969), o triângulo de Pascal aparece pela primeira vez (até

<sup>11</sup>Heron de Alexandria, ou ainda Hero ou Herão (século I d.C.) foi um matemático e mecânico grego.

onde sabemos) em um livro de 1261 escrito por Yang Hui, um dos matemáticos da dinastia Sung na China. As propriedades dos coeficientes binomiais foram discutidas pelo matemático persa Jamshid Al-Kashi em “Chave para a aritmética” de c.1425.

De acordo com Struik (1969), Chu Shi-kié (nativo de Yen-shan, na China) escreveu sua segunda obra intitulada *O precioso espelho dos quatro elementos* em 1303. Ele começa essa obra com o triângulo aritmético, apresentando os valores dos coeficientes binomiais e se referindo ao esquema (do triângulo) como se fosse antigo.

Tanto na China quanto na Pérsia o conhecimento dessas propriedades pode ter sido muito mais antigo.

Esse conhecimento foi compartilhado por alguns matemáticos da Renascença, e nós vemos o triângulo de Pascal na página do título “Aritmética”, de Peter Apian (ou Petrus Apianus) escrito em 1527, como menciona Smith (1958). Essa obra nos chama a atenção especialmente por ser a primeira versão impressa do triângulo aritmético. Essa obra apareceu anos antes de Michael Stifel tocar no assunto.

## Michael Stifel, 1487–1567



Figura 1.10: Michael Stifel, 1487–1567. Fonte: [26].

Em 1553, Michael Stifel publicou uma nova edição da obra de Christoffs Rudolffs chamada *Die Coss*. Nessa nova edição, o próprio Stifel acrescentou e complementou assuntos e, como resultado final, a nova edição foi publicada com mais do que o dobro do número de páginas da edição anterior. Podemos observar na Figura 1.11 duas páginas em que Stifel apresenta o triângulo aritmético e explica o padrão da soma para se obter os coeficientes da linha seguinte.

der andern vnderſchied fol. 168

Item außs  $36z\text{re} - 96zz + 64z$  kommen  
 $6\text{re} - 82z$  . etc.

¶ Wir wollen aber künstlichere extractiones ſehen . Als ich ſoll radicem cubicam extrahiren außs

$1\text{re} + 25z + 18752z + 15625$  außs diſer zal  
 wirt die cubic wurzel  $12z + 25$  .

Wer nu meyn extrahiren kan (der cubic wurzeln) außs ledigen zalen / dem iſt hie leychtlich zu helfen . Derhalben will ich hie die tafel ſetzen ſollicher zalen die man brauchet zu ſollicher extrahiren von allerley wurzeln .

|        |   |    |    |    |    |   |   |
|--------|---|----|----|----|----|---|---|
| 1z .   | 2 | 1  |    |    |    |   |   |
| 1re .  | 3 | 3  | 1  |    |    |   |   |
| 1zz    | 4 | 6  | 4  | 1  |    |   |   |
| 1ß .   | 5 | 10 | 10 | 5  | 1  |   |   |
| 1zre . | 6 | 15 | 20 | 15 | 6  | 1 |   |
| 1ßß .  | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

So weyt iſt yetzt gnug .

Wenn ich nu cubice will extrahiren / ſo neme ich  
 außs der Tafel die zalen 3 vnd 3 .

27 ij Wenn

Figura 1.11: *Die Coss*, Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação de Stifel como ele a apresentou em 1553 (RUDOLFFS, STIFEL, 1553, p.168).

### Der driitt Anhang

Wenn ich will radicem zensizensicam extrahiren/so neme ich dise zalen . 4 . 6 . 4 .

Wenn ich will radicem sursolidam extrahiren/so neme ich 5 . 10 . 10 . 5 .

Wenn ich will radicem zensicubicam extrahiren/so neme ich dise zalen . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 .

Wenn ich will radicem Bsur-solidam extrahiren/so neme ich > . 21 . 35 . 35 . 21 . >

Vnd also hette ich die Tafel wol lenger vnd breyter machen können für mehr species . Aber das sey hie gnug .

So will ich außs diser zal

1 æ + > 5 z + 18 > 5 2z + 15 62 5 die cubic wurzel extrahiren . vnd verzeychne die erste vnd letste coffische teyl ( wie du sihest ) das zwen teyl / im mittel bleyben vnuerzeychnet .

So ich nun hab vnder 1 æ gefunden 1 2z zu setzen in den Quotient/als der in sich multiplicirt cubice/durch sollich product mit subtrahiren hin neme 1 æ . so neme ich die zalen außs der Tafel . 3 . vnd . 3 . setz die vndereinander ( wie du sehen wirst) Vnd sehe an zur lincken hand/ein progress anzurichten/die vbersich steyge . Also

$$\begin{array}{rcl} 18 & . & 3 . \\ 12z & . & 3 . \end{array}$$

Jetzt

Figura 1.12: 1553: *Die Coss*, Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação de Stifel como ele a apresentou; nesta página vemos a explicação do mecanismo da soma ou *Relação de Stifel* (RUDOLFFS, STIFEL, 1553, p.169).

Depois de Stifel, encontramos o triângulo e as propriedades dos coeficientes binomiais em muitos outros autores. Um exemplo é Johann Scheubel (1494–1570), que apresentou o triângulo aritmético um século antes de Pascal escrever sobre ele. Em seu trabalho, Scheubel extraiu raízes de índices até 24 (raízes 24-ésimas) por um processo similar ao processo de extração de raízes que utiliza o Teorema Binomial.

## “Traité du Triangle Arithmétique” de Blaise Pascal, de 1665



Figura 1.13: Blaise Pascal, 1623–1662. Fonte: [25].

De acordo com Struik (1969), o chamado Triângulo de Pascal aparece no famoso tratado de Blaise Pascal (1623–1662), publicado postumamente em 1665, sob o título *Traité du Triangle Arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la mesme matière*.

Esse tratado é importante, não somente por examinar cuidadosamente as propriedades dos coeficientes binomiais, mas também por suas aplicações em jogos de azar. Outro ponto muito importante de sua obra é que, em determinada parte, Pascal expressa de maneira clara e correta o Princípio da Indução Completa ou Princípio da

Indução Matemática.

Smith (1958) aponta que Blaise Pascal escreveu de maneira tão extensa e completa sobre o arranjo triangular dos coeficientes das potências de um binômio, que a partir dessa obra esse arranjo passou a ser chamado de “Triângulo de Pascal”.

A Figura 1.14 apresenta a capa desta obra e a Figura 1.15 mostra a apresentação original do triângulo aritmético.

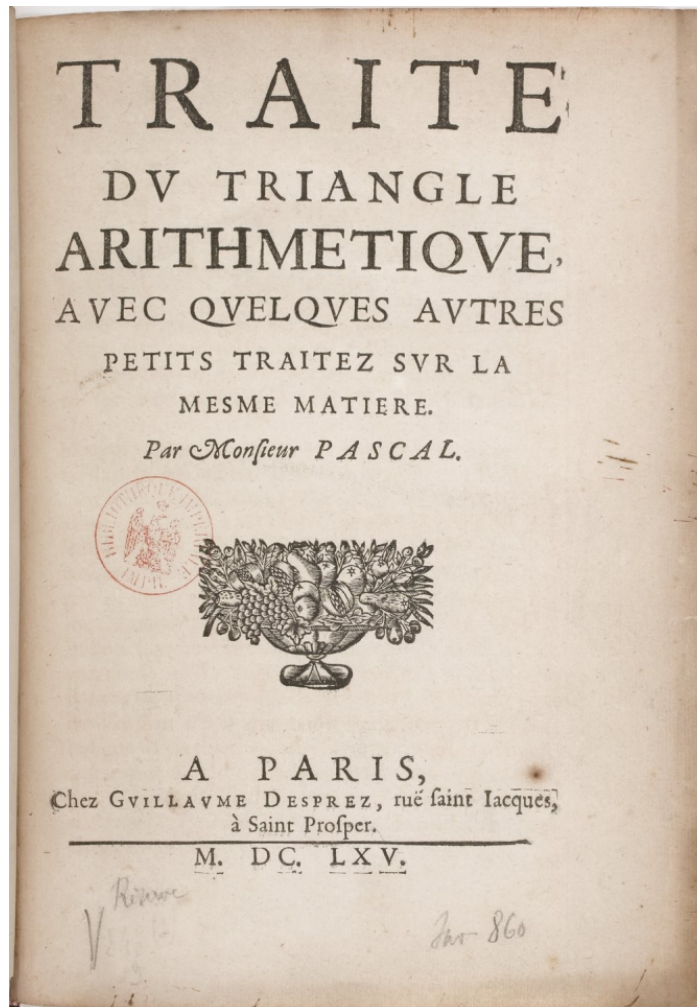


Figura 1.14: Capa da primeira edição do *Traité du triangle arithmétique* de Pascal, (PASCAL, 1665)

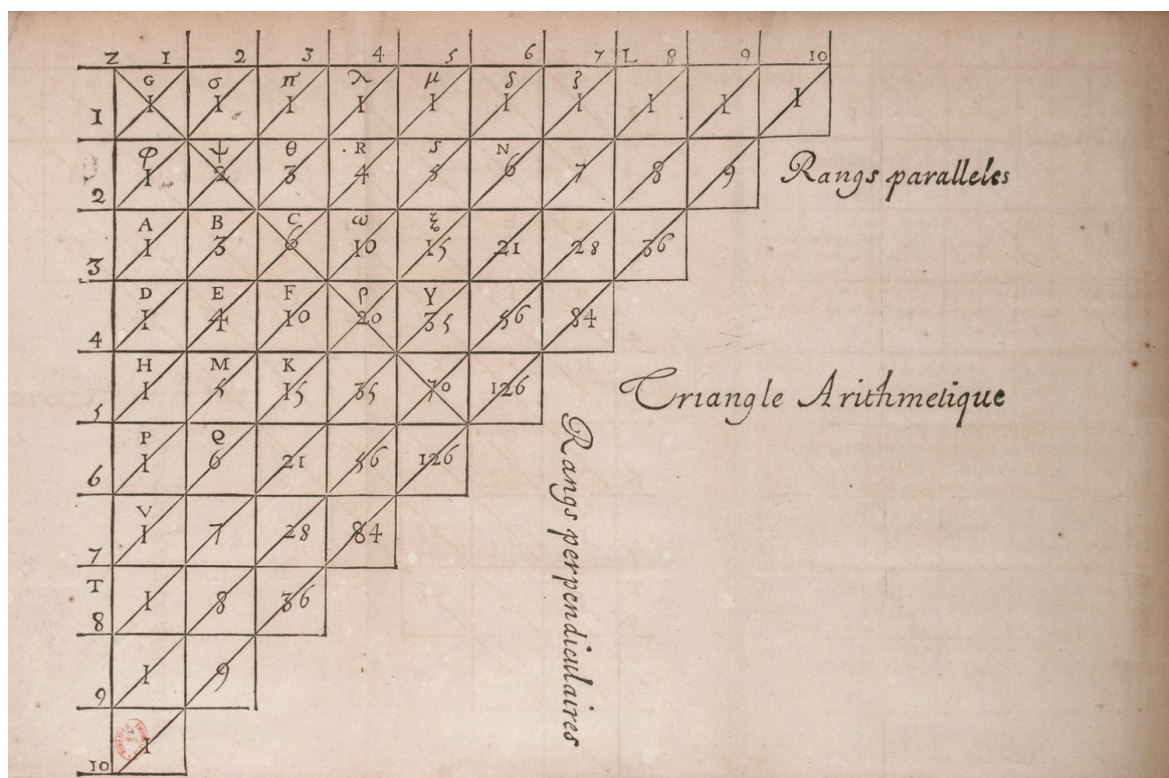


Figura 1.15: Apresentação original do triângulo aritmético na obra *Traité du triangle arithmétique* de Blaise Pascal, (PASCAL, 1665)

## “Ars Conjectandi”, de Jakob Bernoulli, de 1713



Figura 1.16: Jakob Bernoulli (também escrito como “Jacques Bernoulli”, “Jacobi Bernoulli” ou ainda “James Bernoulli”). Fonte: [23].

Em 1713 foi publicada a obra póstuma de Jakob Bernoulli: *Ars Conjectandi*. Essa obra foi publicada por seu filho, Nicolaus Bernoulli, 8 anos após a morte de Jakob. De acordo com Edwards (2019), esta famosa obra é notada especialmente pelo primeiro teorema sobre limite em Probabilidade; o “Teorema de Bernoulli”. Outro ponto de grande destaque dessa obra são os tratamentos que Bernoulli dá à Distribuição Binomial, à Teoria Combinatória e aos Números Figurados (especialmente sobre como usá-los nas somas de potências, que o leva à descoberta dos *Números de Bernoulli* da Análise).

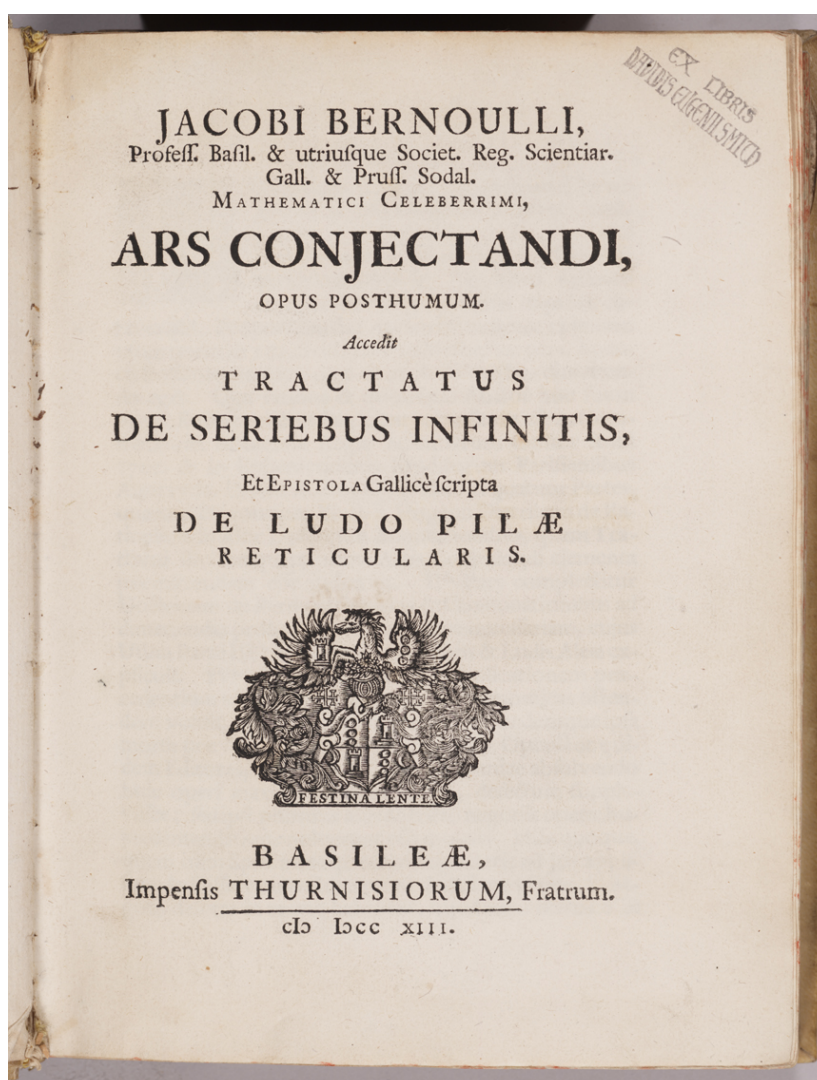


Figura 1.17: Capa do livro *Ars Conjectandi*, de Jakob Bernoulli, 1713. Fonte: [24].

Na primeira parte de seu livro Bernoulli dedica uma seção para desenvolver a Distribuição Binomial para probabilidades gerais, encontrando a expressão para obter no mínimo  $m$  sucessos em  $n$  provas (ou experimentos - os *experimentos de Bernoulli*).

## P A R S   S E C U N D A .

87

Pari ratione Quiniones omnes seriem constituunt Trianguli-pyramidalium 0.0.0.0.1.5.15.35. &c. Seniones seriem Pyramidi-pyramidalium 0.0.0.0.0.1.6.21. &c. aliæque combinationes secundum altiores exponentes efficiunt alias atque alias series Figuratorum altioris generis in infinitum.

Et sic occasione Doctrinæ Combinationum in speculationem insperatam Numerorum Figuratorum incidimus, quâ appellatione vulgè insigniuntur numeri, qui ex continuâ Arithmetice proportionalium indeque ortorum numerorum additione vel collectione generantur.

Ut verò hæ figuratorum numerorum series sub unum aspectum caderent, eoque facilius comprehenderentur quæ de illis dicenda sunt, sequentem apposui Tabellam, quam quis nullo negotio quous-

## Tabula

Combinationum, seu Numerorum Figuratorum.

Exponentes Combinationum.

|     | I. | II. | III. | IV. | V.  | VI. | VII. | VIII. | IX. | X. | XI. | XII. |
|-----|----|-----|------|-----|-----|-----|------|-------|-----|----|-----|------|
| 1.  | 1  | 0   | 0    | 0   | 0   | 0   | 0    | 0     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 2.  | 1  | 1   | 0    | 0   | 0   | 0   | 0    | 0     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 3.  | 1  | 2   | 1    | 0   | 0   | 0   | 0    | 0     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 4.  | 1  | 3   | 3    | 1   | 0   | 0   | 0    | 0     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 5.  | 1  | 4   | 6    | 4   | 1   | 0   | 0    | 0     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 6.  | 1  | 5   | 10   | 10  | 5   | 1   | 0    | 0     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 7.  | 1  | 6   | 15   | 20  | 15  | 6   | 1    | 0     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 8.  | 1  | 7   | 21   | 35  | 35  | 21  | 7    | 1     | 0   | 0  | 0   | 0    |
| 9.  | 1  | 8   | 28   | 56  | 70  | 56  | 28   | 8     | 1   | 0  | 0   | 0    |
| 10. | 1  | 9   | 36   | 84  | 126 | 126 | 84   | 36    | 9   | 1  | 0   | 0    |
| 11. | 1  | 10  | 45   | 120 | 210 | 252 | 210  | 120   | 45  | 10 | 1   | 0    |
| 12. | 1  | 11  | 55   | 165 | 330 | 462 | 462  | 330   | 165 | 55 | 11  | 1    |

Figura 1.18: O Triângulo Aritmético apresentado por Jakob Bernoulli, em seu livro *Ars Conjectandi*, publicado em 1713. (BERNOULLI, 1713, p.87).

Na Figura 1.18 observa-se o Triângulo Aritmético apresentado por Jakob Bernoulli na segunda parte de seu livro *Ars Conjectandi*, 1713. (BERNOULLI, 1713, p.87).

Já na segunda parte, ele apresenta a sua versão do Triângulo Aritmético em seu *Ars Conjectandi*; porém, de acordo com Edwards (2019), pela maneira única com que Bernoulli escreveu e pelas citações que faz ao longo do texto, fica evidente que ele não havia tomado conhecimento do *Traité du Triangle Arithmétique* de Pascal. Bernoulli descobriu por conta própria o Triângulo Aritmético e muitas de suas propriedades. Nessa obra, Bernoulli detalha como usar os Números Combinatórios e chega a calcular  $\binom{100}{20}$  - o maior número combinatório escrito em um livro até então. Por curiosidade, apresentamos o resultado:

$$\binom{100}{20} = 535.983.370.403.809.682.970.$$

## Objetivo e motivação do tema

O triângulo aritmético é um tema extremamente rico em aplicações e em propriedades matemáticas. Normalmente os estudantes têm acesso a esse tema somente no Ensino Médio. Os cronogramas e planejamentos escolares acabam por deixar pouco tempo ou quase nenhum para explorar algumas das principais propriedades que o triângulo de Pascal, como é mais conhecido, apresenta.

A maioria dos livros para o Ensino Médio apresentam o triângulo de Pascal e a expansão binomial logo após Análise Combinatória e Probabilidade. Dessa forma, os alunos acabam deixando de ver relações entre a expansão binomial e a análise combinatória, pois o assunto já passou. Poucas vezes vemos questões de Análise Combinatória que levem os alunos a encontrar os termos de uma linha do triângulo de Pascal, por exemplo. Uma obra que é uma ótima exceção à regra é o livro “Análise Combinatória e Probabilidade” de Morgado et al (1991), da Coleção do Professor de Matemática, da SBM.

O triângulo aritmético apresenta uma quantidade muito grande de propriedades: propriedade das linhas, propriedade das colunas, das diagonais, os números triangulares e sua soma, os números tetraédricos e sua soma, entre tantas. Até mesmo a famosa sequência de Fibonacci aparece no triângulo aritmético. Em Green (2012 e 2015), encontramos uma quantidade enorme de propriedades e atividades sobre o triângulo aritmético ao longo de mais de 500 páginas, somando os dois volumes.

Por ser um tema que pode ser explorado em vários níveis de profundidade, poderia ser apresentado já no Ensino Fundamental, ainda que de modo mais simples, adequado à faixa etária dos alunos, e também de maneira mais ampla no Ensino Médio, pois hoje fala-se muito pouco sobre esse assunto. As propriedades com os números que figuram no triângulo de Pascal, quando bem apresentadas, podem despertar o interesse de muitos estudantes.

Dentre os muitos aspectos que podemos investigar e escrever sobre o triângulo de Pascal, escolhemos dois pontos de vista que a nosso ver são bastante ricos: o entendimento dos teoremas binomial e multinomial assim como os padrões geométricos que as expansões trinômiais e tetranômiais nos sugerem.

A seguir pretendo contar um pouco da minha experiência com o triângulo de Pascal no último ano do Ensino Médio e assim, espero apontar melhor para a primeira motivação para este trabalho.

Em 1995, quando eu estudava no terceiro ano do Ensino Médio e também em um curso pré-vestibular, comecei a me interessar pelas expansões binomiais e sua relação com o triângulo de Pascal. Em determinado momento, divagando sobre o assunto, eu me fiz as seguintes perguntas: “Como seriam as expansões de  $(a+b+c)^n$ ? Que padrões geométricos teriam essas expansões?”.

Não havia livros a respeito (que estivessem ao meu alcance pelo menos), muito menos fontes na *internet*, a qual estava apenas começando a se popularizar e com a qual tive contato apenas em meados de 1996. Como estudante curioso, vi que só saberia a resposta se tentasse descobrir por meios próprios. Então comecei a calcular as expansões trinômiais na ponta do lápis, através de seguidas aplicações da propriedade distributiva.

O primeiro padrão que encontrei foi para  $(a+b+c)^3$ : percebi que se eu encontrasse uma maneira de dispor as parcelas da expansão desse trinômio numa folha de papel de modo que os expoentes de  $a$  ficassem em ordem crescente, assim como os de  $b$  e de  $c$ ,

as próprias parcelas me “diriam” como deveria ser a geometria dessa configuração. Se fosse uma configuração boa, valeria para todos os casos (todos os valores de  $n$ ). Quando finalmente consegui encontrar o padrão geométrico procurado, fiquei maravilhado com a simetria e com a elegância: era a Matemática elegante e simples por natureza, a meu ver.

Depois fui variando  $n$  até  $n = 5$  ou  $n = 6$ . Lembro de apresentar as ideias para três professores que me falaram que o assunto era muito interessante e nunca tinham visto algo parecido. O meu sentimento era o de estar em mares ainda não navegados. A sensação que tive foi de muita empolgação.

Ao enxergar os padrões triangulares para  $(a + b + c)^n$  comecei a investigar (sempre por conta própria) as suas relações com o triângulo de Pascal original, o que me levou a descobrir o que chamamos de “princípio multiplicativo” no Capítulo 5 deste trabalho. Além disso, descobri um padrão de organização que me levou a construir o que chamamos neste trabalho de “tetraedro aritmético”.

A curiosidade só aumentava, então passei a investigar os padrões para  $(a + b + c + d)^n$ , descobrindo que a melhor geometria para organizar as parcelas das expansões tetranomiais, respeitando as ordens crescentes dos expoentes de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , seriam tetraedros, um para cada  $n$  não-negativo escolhido.

Continuei a fazer várias investigações interessantes a respeito de  $(a + b + c + d + e)^n$  e acabei por descobrir o que hoje alguns chamam de “hipertetraedro”, ou seja, o análogo para 4 dimensões do que é o tetraedro para 3 dimensões - ou do triângulo, para 2 dimensões. Observação: o hipertetraedro não apresentaremos neste trabalho.

Em 2017, quando terminei de cursar as matérias do PROFMAT na Unesp de Rio Claro, apresentei esse assunto como proposta para a minha dissertação. Confesso que apresentei a ideia ainda de maneira tímida porque não sabia ao certo se o assunto seria de interesse de algum orientador. Aqui agradeço muito ao Prof. Dr. Thiago de Melo e à minha orientadora, Prof. Dra. Érika Capelato, por aceitarem a proposta e por terem me incentivado. A Prof. Dra. Érika foi de fundamental importância para dar rumo, orientação e profundidade para essa dissertação de mestrado.

Penso que compartilhar um pouco dessa história e desse tema possa ter algum proveito em sala de aula. Talvez seja uma leitura agradável para quem queira ver um pouco além do tradicional triângulo de Pascal. Talvez seja o ponto de partida para enxergar relações matemáticas ainda não vistas.

O mais importante para que haja o aprendizado é que a pessoa se sinta envolvida pelo tema, não importa qual seja.

## Estrutura da dissertação

Além desta introdução esta dissertação possui outros cinco capítulos. No Capítulo 2 descrevemos sobre o Triângulo Aritmético, também conhecido como Triângulo de Pascal. Neste capítulo definimos os coeficientes binomiais e demonstramos a Relação de Stifel, além de outros teoremas relacionados ao Triângulo Aritmético.

No Capítulo 3 apresentamos quatro demonstrações para o Teorema Binomial. A primeira demonstração, utilizando indução matemática, e a segunda, utilizando argumentos de análise combinatória, foram retiradas de Ross (2014). A terceira demonstração, retirada de Rosalsky (2007), usa resultados probabilísticos e a quarta demonstração, proposta por Hwang (2009) usa conceitos do cálculo diferencial.

No Capítulo 4 apresentamos três demonstrações para o Teorema Multinomial. A primeira demonstração foi feita utilizando conceitos de Análise Combinatória, a segunda por argumentos probabilísticos proposta por Kataria (2016) e a última foi uma generalização que fizemos baseada na demonstração para o caso binomial feita por Rosalsky (2007).

No Capítulo 5 apresentamos padrões geométricos para as expansões de trinômios, bem como uma relação com o triângulo de Pascal tradicional para a obtenção dos coeficientes dos termos dessas expansões trinomiais. Nesse mesmo capítulo, apresentamos padrões geométricos para as expansões tetranomiais.

No Capítulo 6 apresentaremos três atividades para a sala de aula do Ensino Médio. A primeira atividade está relacionada com a identificação da Relação de Stifel no Triângulo de Pascal. A segunda atividade, refere-se à observação dos “números triangulares”, o que são e qual a sua relação com o triângulo de Pascal. Na terceira atividade apresentamos uma extensão da segunda atividade, ou seja, uma atividade para os “números tetraédricos”.



## 2 O Triângulo Aritmético

Neste capítulo faremos uma apresentação didática introdutória e despretensiosa do Triângulo Aritmético de Pascal. Os resultados apresentados aqui foram baseados no *Tratado do Triângulo Aritmético* de Blaise Pascal (1665), em Morgado et al (1991), em Carvalho et al (2014), em Knuth et al (1994) e em Ross (2014).

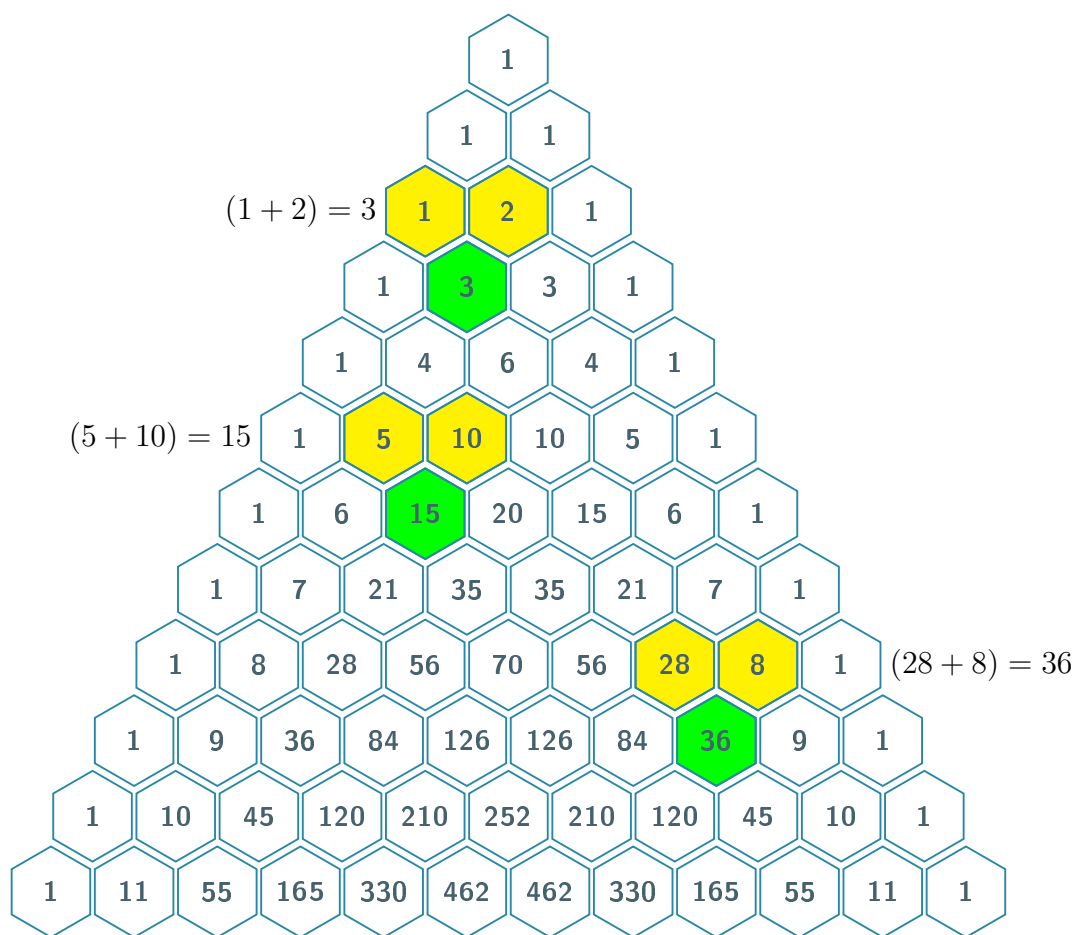


Figura 2.1: Triângulo de Pascal

O Triângulo Aritmético, Figura 2.1 pode ser obtido através das seguintes regras:

1. O Triângulo é formado por linhas de números escritos como numa lista, sem vírgulas. A primeira contém um termo, a segunda dois, a terceira três e assim sucessivamente.

2. A primeira linha, que para nós será a linha 0 ou ainda  $n = 0$ , apresenta apenas o número 1.
3. A segunda linha,  $n = 1$ , apresenta dois números: 1 e 1; o primeiro um pouco à esquerda e o segundo um pouco à direita do 1 da primeira linha.
4. Cada linha seguinte será montada da seguinte maneira: Comece com 1 (um pouco à esquerda do primeiro 1 da linha de cima) e termine com 1 (um pouco à direita do último 1 da linha de cima). Os demais números são iguais à soma dos dois números da linha de cima que estão mais próximos de sua posição, ver Figura 2.1.

Depois de montado o Triângulo Aritmético até algum  $n > 4$  de preferência, podemos notar alguns fatos interessantes:

1. Note que a linha  $n$  tem  $n + 1$  termos, ou seja, a linha  $n = 0$  tem 1 termo, a linha  $n = 1$  tem 2 termos e assim sucessivamente.
2. Note que cada linha apresenta simetria em relação à distribuição de seus termos.  
Exemplos:

Na linha  $n = 5$  temos os termos 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Na linha  $n = 6$  temos os termos 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Agora considere as potências do tipo  $(a + b)^n$ , com  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Podemos observar que cada potência de  $(a + b)$  pode ser obtida a partir da multiplicação por  $(a + b)$  da potência imediatamente anterior, isto é:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^0 &= 1 \\
 (a + b)^1 &= a + b \\
 (a + b)^2 &= (a + b)^1(a + b) = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 (a + b)^4 &= (a + b)^3(a + b) = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
 &\vdots \\
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n(a + b)
 \end{aligned}$$

Notemos que  $(a + b)^0 = 1$  é o primeiro número que aparece na linha  $n = 0$  do Triângulo Aritmético; já a linha  $n = 1$  (segunda linha do Triângulo Aritmético) é formada pelos coeficientes de  $(a + b)^1 = a + b$ , a linha  $n = 2$  (terceira linha) pelos coeficientes de  $(a + b)^2$  e assim sucessivamente.

Como observamos, para obtermos  $(a + b)^3$  basta multiplicarmos  $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$  por  $(a + b)$ . Podemos organizar a multiplicação de duas expressões algébricas de forma análoga à que usamos nas contas elementares no algoritmo de multiplicação para números com dois algarismos ou mais. A diferença é que a disposição deverá apresentar em uma mesma coluna as parcelas que apresentem  $a$  e  $b$  com os mesmos expoentes, como no exemplo a seguir. Essa maneira de dispor os resultados parciais da distributiva pode ser visto na obra de Lenhard Euler, *Elements of Algebra, Chapter X - Of the higher Powers of Compound Quantities, p. 106, article 341* [8].

$$\begin{array}{r}
1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
\times \quad 1a + 1b \\
\hline
+ 1a^2b^1 + 2a^1b^2 + 1a^0b^3 \\
+ \quad 1a^3b^0 + 2a^2b^1 + 1a^1b^2 \\
\hline
1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3
\end{array}$$

ou ainda,

$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3. \quad \square$$

Podemos observar que os coeficientes resultantes são os números da quarta linha (linha  $n = 3$ ) do Triângulo Aritmético, ver Figura 2.1.

Observe, como exemplo, o processo para obtermos  $(a + b)^4$ . Para isto basta multiplicarmos  $(a + b)^3$ , que já obtivemos, por  $(a + b)$ :

$$\begin{array}{r}
1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 \\
\times \quad 1a + 1b \\
\hline
1a^3b^1 + 3a^2b^2 + 3a^1b^3 + 1a^0b^4 \\
1a^4b^0 + 3a^3b^1 + 3a^2b^2 + 1a^1b^3 \\
\hline
1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4. \quad \square
\end{array}$$

Observe que os coeficientes resultantes são os números da quinta linha (linha  $n = 4$ ) do Triângulo Aritmético, ver Figura 2.1.

Observe, como exemplo, o processo para obtermos  $(a + b)^5$ . Para isso, basta multiplicarmos  $(a + b)^4$ , que já obtivemos, por  $(a + b)$ :

$$\begin{array}{r}
1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4 \\
\times \quad 1a + 1b \\
\hline
1a^4b^1 + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4a^1b^4 + 1b^5 \\
+ 1a^5 + 4a^4b^1 + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + 1a^1b^4 \\
\hline
1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5. \quad \square
\end{array}$$

Novamente, observe que os coeficientes resultantes são os números da sexta linha (linha  $n = 5$ ) do Triângulo Aritmético, ver Figura 2.1.



Desta forma, podemos reescrever o quadro anterior com os termos  $\binom{n}{p}$ :

|     | p=0            | p=1            | p=2            | p=3            | p=4            | p=5            | p=6            | p=7            | ... |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| n=0 | $\binom{0}{0}$ |                |                |                |                |                |                |                |     |
| n=1 | $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{1}$ |                |                |                |                |                |                |     |
| n=2 | $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{2}$ |                |                |                |                |                |     |
| n=3 | $\binom{3}{0}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{2}$ | $\binom{3}{3}$ |                |                |                |                |     |
| n=4 | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{4}{4}$ |                |                |                |     |
| n=5 | $\binom{5}{0}$ | $\binom{5}{1}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{5}{3}$ | $\binom{5}{4}$ | $\binom{5}{5}$ |                |                |     |
| n=6 | $\binom{6}{0}$ | $\binom{6}{1}$ | $\binom{6}{2}$ | $\binom{6}{3}$ | $\binom{6}{4}$ | $\binom{6}{5}$ | $\binom{6}{6}$ |                |     |
| n=7 | $\binom{7}{0}$ | $\binom{7}{1}$ | $\binom{7}{2}$ | $\binom{7}{3}$ | $\binom{7}{4}$ | $\binom{7}{5}$ | $\binom{7}{6}$ | $\binom{7}{7}$ |     |
|     | ...            | ...            | ...            | ...            | ...            | ...            | ...            | ...            | ... |

Observe que, enumerando tanto as linhas quanto as colunas a partir de 0, o termo  $\binom{n}{p}$  aparece na linha  $n$  e coluna  $p$ . A propriedade dos números binomiais que nos permite a rápida construção do Triângulo é conhecida como Relação de Stifel<sup>3</sup>. Na próxima seção apresentaremos esta relação.

## 2.1 Relação de Stifel

Nesta seção enunciamos o teorema que trata da relação de Stifel e apresentamos duas demonstrações para ele.

**Teorema 2.1** (Relação de Stifel). *Se  $p, n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq p \leq n - 1$ , então*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \quad (2.2)$$

<sup>3</sup>Stifel, Michael (1487–1567), algebrista alemão que apresentou a relação atualmente conhecida por Relação de Stifel em *Die Coss, 1553, p. 354–355 (fol. 168)* [19].

*Ou seja, somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.*

*Primeira demonstração.* Pela definição de número binomial, temos que

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \left( \frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1} \right) \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \left( \frac{p+1}{(p+1)(n-p)} + \frac{n-p}{(p+1)(n-p)} \right) \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \left( \frac{n+1}{(p+1)(n-p)} \right) \\
 &= \frac{(n+1)n!}{(p+1)p!(n-p)(n-p-1)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} \\
 &= \binom{n+1}{p+1}.
 \end{aligned}$$

□

*Segunda demonstração.* Considere um conjunto  $A$  de  $n+1$  elementos, um dos quais é  $x$ . O número de subconjuntos de  $A$  com  $p+1$  elementos é  $\binom{n+1}{p+1}$ . Esse número é

igual à soma do número de subconjuntos nos quais  $x$  está presente, ou seja,  $\binom{n}{p}$ , com

o número de subconjuntos em que  $x$  está ausente, ou seja,  $\binom{n}{p+1}$ . Logo,

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

□

A seguir apresentaremos outros teoremas relacionados aos termos do Triângulo Aritmético.

## 2.2 Teoremas relacionados aos termos do Triângulo Aritmético

**Teorema 2.2** (Teorema das Linhas). *A soma dos números da “linha  $n$ ” do Triângulo de Pascal é igual a  $2^n$ , ou seja,*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \quad (2.3)$$

*Demonstração.* Consideremos um conjunto  $A$  com  $n$  elementos.

Para calcularmos o número de subconjuntos de  $A$  podemos considerar que, num dado subconjunto, cada elemento de  $A$ , de duas, uma: estará “presente” ou estará “ausente” no subconjunto. Isso equivale a termos 2 possibilidades para cada elemento, resultando:  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ . Isso equivale ao lado direito da equação (2.3).

Podemos considerar um outro caminho lógico para determinarmos o número de subconjuntos de  $A$ . O número de maneiras de escolhermos  $p$  elementos dentre  $n$  elementos de  $A$  é igual a  $\binom{n}{p}$ . Então o total de subconjuntos de  $A$  com  $p$  elementos, com  $p = 0, 1, 2, \dots, n$ , é dado por:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n},$$

isso equivale ao lado esquerdo da equação (2.3) Logo,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

□

Observe que, no Triângulo Aritmético, a linha  $n$  começa em  $C_0^n$  e termina em  $C_n^n$ . Portanto,  $C_n^p$  (que está na linha  $n$  avançado em  $p$  colunas em relação ao início da linha) e  $C_n^{n-p}$  (que está na linha  $n$  atrasado em  $p$  colunas em relação ao fim da linha) são elementos da linha  $n$  que estão situados em posições equidistantes dos extremos. Números como  $C_n^p$  e  $C_n^{n-p}$  são chamados de *Combinações Complementares*. Por exemplo, a combinação complementar de  $C_7^2$  é  $C_7^5$ .

**Teorema 2.3** (Simetria das Linhas do Triângulo Aritmético). *Em uma mesma linha do Triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja,  $C_n^p = C_n^{n-p}$ .*

*Primeira demonstração.* Devemos mostrar que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \quad (2.4)$$

O número  $\binom{n}{p}$  representa as possibilidades de escolher, entre  $n$  objetos,  $p$  objetos para usar. Isto equivale ao número  $\binom{n}{n-p}$ , que denota a quantidade de maneiras de escolher, entre  $n$  objetos,  $(n-p)$  objetos para não usar.  $\square$

Uma demonstração imediata, dada em [15] (1991, p. 97), é apresentada a seguir.

*Segunda demonstração.*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{n-p}. \quad (2.5)$$

$\square$

Ao contrário das linhas do Triângulo de Pascal, que sempre possuem uma quantidade finita de elementos, veja que cada uma de suas colunas possui uma quantidade infinita de entradas. Sendo assim, não faz sentido calcularmos a soma de todos os elementos de uma coluna. Assim, o próximo teorema surge naturalmente e, a demonstração que apresentamos, é baseada na encontrada em [15].

**Teorema 2.4** (Teorema das Colunas). *Dados inteiros não negativos  $p$  e  $n$ , a soma dos  $n+1$  primeiros termos da coluna  $p$  do Triângulo de Pascal é*

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}. \quad (2.6)$$

*Ou seja, a soma dos  $n+1$  primeiros elementos de uma coluna do Triângulo é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma. Veja Figura 2.3.*

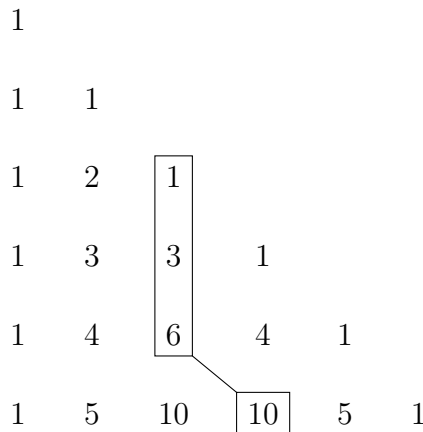


Figura 2.3: Teorema das colunas. Fonte: [15], p. 99.

*Demonstração.* Aplicando a Relação de Stifel para os elementos da coluna  $p+1$ , obtemos:

$$\begin{array}{rcl}
\binom{p+1}{p+1} & = & \binom{p}{p+1} + \binom{p}{p} \\
\binom{p+2}{p+1} & = & \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} \\
\binom{p+3}{p+1} & = & \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p} \\
\vdots & & \vdots \\
\binom{p+n}{p+1} & = & \binom{p+n-1}{p+1} + \binom{p+n-1}{p} \\
\binom{p+n+1}{p+1} & = & \binom{p+n}{p+1} + \binom{p+n}{p} .
\end{array}$$

Adicionando as equações acima membro a membro e simplificando parcelas iguais que aparecem em membros opostos, obtemos:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p}{p+1} + \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p} .$$

Sendo  $\binom{p}{p+1} = 0$ , obtemos:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p} . \quad \square$$

No próximo teorema, quando nos referimos a uma diagonal (paralela a uma hipotenusa) no Triângulo de Pascal, estamos nos referindo a uma sequência de termos que começa na coluna zero com o termo  $\binom{n}{0}$  e, os termos seguintes são obtidos

avançando-se um passo, tanto na coluna como na linha do triângulo, ou seja,  $\binom{n+1}{1}$ ,

$\binom{n+2}{2}, \dots$  são os elementos da diagonal  $n$ .

**Teorema 2.5** (Teorema das Diagonais). *Dados  $n$  e  $p$  inteiros não-negativos, a soma dos  $p+1$  primeiros números da diagonal  $n$  do Triângulo de Pascal é*

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}. \quad (2.7)$$

*Ou seja, a soma de uma quantidade finita de elementos de uma diagonal (isto é, de uma paralela à hipotenusa) do Triângulo de Pascal (começando no primeiro elemento da diagonal) é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela. Veja Figura 2.4.*

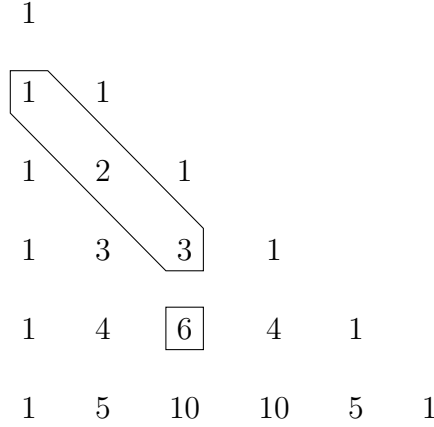


Figura 2.4: Teorema das colunas. Fonte: [15], p. 96.

É importante observarmos que o teorema das diagonais é praticamente idêntico ao teorema das colunas. Quando o Triângulo de Pascal é escrito na forma de triângulo retângulo, apresentada na Figura 2.2, colunas e diagonais parecem filas numéricas distintas, pelo menos pela disposição no triângulo; porém, se observarmos o Triângulo de Pascal na forma de triângulo isósceles, como apresentamos na Figura 2.1, observamos claramente a simetria das figuras e que as tais colunas e as tais diagonais são na verdade filas formadas por elementos simétricos de cada linha do triângulo. Dessa forma, para demonstrar o teorema das diagonais, basta provarmos que esse equivale ao das colunas.

*Demonstração.* Retomemos à equação (2.6) do teorema das colunas

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}. \quad (2.8)$$

Usando sucessivamente as combinações complementares, (elementos simétricos de cada linha do triângulo), a equação (2.8) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \binom{p}{p-p} + \binom{p+1}{(p+1)-p} + \binom{p+2}{(p+2)-p} + \cdots + \\ & \cdots + \binom{p+n-1}{(p+n-1)-p} + \binom{p+n}{(p+n)-p} = \binom{p+n+1}{(p+n+1)-(p+1)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Simplificando, temos:

$$\binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+n-1}{n-1} + \binom{p+n}{n} = \binom{p+n+1}{n}. \quad (2.10)$$

Para que a equação (2.10) fique idêntica à equação (2.7) podemos, sem perda de equivalência, trocar  $p$  por  $n$  e  $n$  por  $p$ , o que nos leva a:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}. \quad \square$$



### 3 O Teorema Binomial

Em Matemática, *expandir* o produto de duas ou mais somas de termos algébricos significa expressá-lo como uma soma de produtos. Normalmente a primeira forma é mais compacta, mais curta e, a segunda, mais extensa. Por esse motivo, a segunda forma é comumente chamada de *expansão algébrica* da primeira.

Como exemplo, a terceira potência da soma de  $a$  e  $b$  é  $(a + b)^3$ . Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição e agrupando termos semelhantes, obtemos uma soma de produtos:  $1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ . Como a primeira expressão,  $(a + b)^3$ , é a potência de um *binômio*, a segunda expressão,  $1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ , é chamada de *expansão binomial*, ou ainda mais precisamente, *expansão da potência de um binômio*.

A seguir, enunciamos o teorema binomial, que é um resultado matemático que permite escrever a expansão algébrica de uma potência de expoente inteiro e positivo da soma de dois termos de forma mais direta, sem que seja preciso aplicar sucessivas vezes a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição e o agrupamento de termos semelhantes.

**Teorema 3.1** (Teorema Binomial). *Para todos os inteiros  $n \geq 1$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ ,*

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p. \quad (3.1)$$

Se  $a$  ou  $b$  é zero, então  $0^0$  será interpretado como igual a 1. Ao longo das demonstrações usaremos expansões equivalentes à expansão binomial, ou seja, notemos que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \quad (3.2)$$

Isso é o mesmo que dizer que cada linha do Triângulo de Pascal tem simetria, como já descrevemos no Capítulo 2. Dessa forma, temos algumas maneiras equivalentes de escrever a expansão binomial.

- Coeficientes  $\binom{n}{p}$  escritos em ordem crescente de  $p$  e expoentes de  $a$  em ordem decrescente:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p; \quad (3.3)$$

- Coeficientes  $\binom{n}{p}$  escritos em ordem crescente de  $p$  e expoentes de  $a$  em ordem crescente:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}; \quad (3.4)$$

- Coeficientes  $\binom{n}{n-p}$  escritos em ordem decrescente de  $n-p$  e expoentes de  $a$  em ordem decrescente:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{n-p} a^{n-p} b^p; \quad (3.5)$$

- Coeficientes  $\binom{n}{n-p}$  escritos em ordem decrescente de  $n-p$  e expoentes de  $a$  em ordem crescente:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{n-p} a^p b^{n-p}. \quad (3.6)$$

As quatro maneiras de escrevermos as expansões de  $(a + b)^n$  descritas acima são equivalentes. É importante deixar isso claro para o leitor porque, nas demonstrações a seguir, ora uma maneira de escrever facilitará os cálculos, ora será outra maneira que facilitará, a depender do ambiente algébrico da demonstração.

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar diversas demonstrações para este teorema. Segundo Rosalsky (2007) a demonstração mais tradicional do teorema binomial é por indução matemática. A seguir, apresentaremos quatro demonstrações para o teorema binomial. A primeira será feita por indução matemática e a segunda estará baseada em argumentos de análise combinatória; ambas podem ser encontradas no livro de Ross (2014). A terceira, proposta por Rosalsky (2007) usa resultados probabilísticos e a quarta, proposta por Hwang (2009), usa conceitos do cálculo diferencial.

### 3.1 Demonstração por Indução Matemática

Em Indução Matemática, para provarmos que uma dada *proposição* matemática  $P(n)$  é *verdadeira* para todo  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , dividimos a prova em duas etapas:

1. Provar que “ $P(1)$ ” é *verdadeira*;
2. Provar que “ $P(k) \implies P(k + 1)$ ” é *verdadeira*.

*Demonstração.*

1. Para  $n = 1$  a equação (3.1) se reduz a

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} \cdot b^1 = a + b,$$

que é verdadeira.

2. Suponhamos que

$$(a + b)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} \cdot b^p \quad (3.7)$$

seja válida para um certo  $k > 1$  natural e mostremos que

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} a^{k+1-p} \cdot b^p$$

é verdadeira também.

Multiplicando por  $(a + b)$  ambos os membros de (3.7), temos:

$$\begin{aligned} (a + b)^k \cdot (a + b) &= \left( \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} \cdot b^p \right) \cdot (a + b) \\ &= \left( \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} \cdot b^p \right) \cdot a + \left( \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} \cdot b^p \right) \cdot b \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k+1-p} \cdot b^p + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} \cdot b^{p+1}. \end{aligned}$$

Fazendo  $p = i$  no primeiro somatório e  $p = i - 1$  no segundo somatório teremos

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+1} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k+1-i} \cdot b^i + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} a^{k-(i-1)} \cdot b^{(i-1)+1} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k+1-i} \cdot b^i + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} a^{k+1-i} \cdot b^i. \end{aligned}$$

Separando a parcela correspondente a  $i = 0$  no primeiro somatório e a parcela correspondente a  $i = k + 1$  no segundo teremos

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+1} &= \binom{k}{0} a^{k+1} \cdot b^0 + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} a^{k+1-i} \cdot b^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} a^{k+1-i} \cdot b^i + \binom{k}{k} a^0 \cdot b^{k+1}. \end{aligned}$$

Agora que os contadores dos dois somatórios têm os mesmos extremos, podemos juntá-los em um único somatório. Também podemos colocar em evidência o fator comum  $a^{k+1-i} \cdot b^i$  e obtermos

$$(a+b)^{k+1} = 1 \cdot a^{k+1} \cdot 1 + \sum_{i=1}^k \left( \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right) \cdot a^{k+1-i} \cdot b^i + 1 \cdot 1 \cdot b^{k+1}.$$

Da Relação de Stifel, temos que:  $\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$ .

Logo, obtemos:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} \cdot a^{k+1-i} \cdot b^i + b^{k+1}.$$

Note que podemos reescrever a expressão acima como:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} \cdot a^{k+1-i} \cdot b^i + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}.$$

Inserindo os termos  $\binom{k+1}{0} a^{k+1}$  e  $\binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$  no somatório, obtemos

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \cdot a^{k+1-i} \cdot b^i.$$

Assim, provamos a equação (3.1) por indução. □

## 3.2 Demonstração usando Análise Combinatória

*Demonstração.* Considere o produto

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n). \quad (3.8)$$

Esta expansão consiste na soma de  $2^n$  termos, cada termo sendo o produto de  $n$  fatores. Consequentemente, cada um dos  $2^n$  termos da soma conterá apenas um dos fatores  $a_i$  ou  $b_i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por exemplo,

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2.$$

Quantos dos  $2^n$  termos da soma (3.8) terá  $p$  fatores do tipo  $b_i$ 's e  $(n-p)$  fatores do tipo  $a_i$ 's? A resposta corresponde a uma escolha de  $p$  elementos dentre os  $n$  elementos

de  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Ou seja, há  $\binom{n}{p}$  termos.

Em outras palavras, temos  $n$  parênteses em (3.8). Dessa forma, para uma dada parcela final na distributiva, sempre haverá uma de duas possibilidades: ou um  $a_i$  ou um  $b_i$  do  $i$ -ésimo parêntese. De quantas maneiras podemos ter  $p$  fatores  $b_i$ ? Basta escolhermos  $p$  parênteses dentre os  $n$  disponíveis para tomarmos os  $b_i$ 's. Automaticamente, dos  $n - p$  parênteses dos quais não tomamos os  $b_i$ 's nós tomaremos os  $a_i$ 's.

Fazendo  $b_i = b$  e  $a_j = a$ , para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , temos que

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p. \quad \square$$

### 3.3 Demonstração usando Probabilidade

A seguir apresentaremos a demonstração que consta no artigo de Andrew Rosalsky (2007). A ideia geral dessa demonstração é: (i) estabelecer a validade do teorema para o caso particular em que  $0 < a < 1$  e  $b = 1 - a$  e (ii) mostrar que a validade desse caso particular do teorema leva à validade do caso geral para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Antes da demonstração apresentaremos algumas definições, resultados e exemplos sobre distribuição binomial, os quais podem ser encontrados com mais detalhes em (ROSALSKY, 2007) e em (COSTA NETO, CYMBALISTA, 2006).

#### Experimento de Bernoulli

Considere um experimento aleatório onde só podem ocorrer dois resultados: “sucesso” ou “fracasso”. Associaremos uma variável  $X$  aos possíveis resultados, de forma que

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se o resultado do experimento for “sucesso”;} \\ 0 & \text{se o resultado do experimento for “fracasso”.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Este experimento recebe o nome de *Ensaio de Bernoulli* ou *Experimento de Bernoulli* ou, ainda, *Prova de Bernoulli*.

Dizemos que uma variável segue o modelo de Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de “fracasso” ou “sucesso”, respectivamente. Sendo  $0 \leq p \leq 1$  a probabilidade de ocorrer um “sucesso”, a probabilidade de ocorrer um “fracasso” será  $1 - p$ . A função discreta de probabilidade da distribuição de Bernoulli será

$$P(X) = \begin{cases} 1 - p & \text{para } X = 0 \\ p & \text{para } X = 1 \\ 0 & \text{para } X \neq 0 \text{ e } X \neq 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

ou, de modo resumido,  $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$ , com  $x = 0$  (“fracasso”) ou  $x = 1$  (“sucesso”).

## Distribuição de Bernoulli

Considere agora as seguintes condições:

1. São realizados  $n$  experimentos (provas) independentes;
2. Cada experimento é um *Ensaio de Bernoulli*, ou seja, só pode levar a “sucesso” ou “fracasso” e
3. A probabilidade  $p$  de “sucesso” em cada prova é sempre a mesma, ou seja, constante (em consequência, a probabilidade  $1 - p$  de “fracasso” também o será).

Associando uma variável aleatória  $X$  igual ao número de “sucessos” nessas  $n$  provas, vamos determinar a distribuição de probabilidades dessa variável  $X$ , dada através da probabilidade de um número genérico  $k$  de “sucessos”.

Suponhamos que ocorram apenas “sucessos” nas  $k$  primeiras provas e apenas “fracassos” nas  $n - k$  provas restantes. Indicando “sucesso” em cada prova por 1 e “fracasso” por 0, teremos:

$$\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{n-k}.$$

Como as provas são independentes, a probabilidade de ocorrência desse evento é:

$$p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Porém, o evento  $k$  “sucessos” em  $n$  provas pode acontecer em outras ordens distintas, todas com a mesma probabilidade. Como o número de ordens é o número de combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ , a probabilidade de ocorrerem  $k$  “sucessos” em  $n$  provas será:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

À expressão (3.11) chamamos “*função de probabilidade Binomial*”. Note que a expressão que define essa função,  $\binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ , equivale ao  $(k + 1)$ -ésimo termo do desenvolvimento da  $n$ -ésima potência do binômio  $(p + (1 - p))$ , ou seja, é o  $(k + 1)$ -ésimo termo do desenvolvimento de  $(p + (1 - p))^n$ .

Usaremos a notação  $X \sim b(n, p)$  para indicar que a variável aleatória  $X$  segue o modelo Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

A seguir, faremos a demonstração do teorema binomial usando probabilidade e análise combinatória.

*Demonstração.* Por um argumento de indução simples, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , existem inteiros positivos  $C(n, 0), \dots, C(n, n)$  tais que, para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C(n, p) a^p b^{n-p}. \quad (3.12)$$

Para provarmos (3.1) a partir de (3.12) precisamos mostrar que

$$C(n, p) = \binom{n}{p}, \text{ com } p = 0, \dots, n. \quad (3.13)$$

Para isso, vamos tomar  $0 < a < 1$  e  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , onde  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com:

$$\begin{cases} P\{X_i = 1\} = a \\ P\{X_i = 0\} = 1 - a \end{cases}$$

A soma  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $a$ , ou seja,  $S_n \sim b(n, a)$ . Por (3.11), temos:

$$P\{S_n = p\} = \binom{n}{p} a^p (1 - a)^{n-p}, \text{ com } p = 0, \dots, n. \quad (3.14)$$

Então:

$$1 = \sum_{p=0}^n P\{S_n = p\} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p (1 - a)^{n-p}, \quad (3.15)$$

estabelecendo assim o teorema no caso particular de  $0 < a < 1$  e  $b = 1 - a$ . Logo, de (3.12), temos

$$1 = (a + (1 - a))^n = \sum_{p=0}^n C(n, p) a^p (1 - a)^{n-p} \quad (3.16)$$

De (3.16) subtraímos (3.15) membro a membro, o que resulta em

$$\sum_{p=0}^n \left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) a^p (1 - a)^{n-p} = \sum_{p=0}^n \left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) a^p \frac{(1 - a)^n}{(1 - a)^p} = 0$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) \frac{a^p}{(1 - a)^p} (1 - a)^n &= 0 \\ \sum_{p=0}^n \left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) \left( \frac{a}{1 - a} \right)^p (1 - a)^n &= 0. \end{aligned}$$

Como o fator  $(1 - a)^n$  aparece igualmente em todas as parcelas do somatório e não depende de  $p$ , podemos colocá-lo em evidência:

$$(1 - a)^n \cdot \sum_{p=0}^n \left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) \left( \frac{a}{1 - a} \right)^p = 0$$

Como  $(1-a)^n \neq 0$ , podemos dividir os dois membros por  $(1-a)^n$ :

$$\sum_{p=0}^n \left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) \left( \frac{a}{1-a} \right)^p = 0.$$

Como  $0 < a < 1$  é arbitrário, fazendo  $\frac{a}{1-a} = x$ , temos

$$\sum_{p=0}^n \left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) x^p = 0, \text{ com } 0 < x < \infty. \quad (3.17)$$

Notemos que (3.17) nos apresenta um polinômio de grau  $n$  identicamente nulo. Isso ocorre se, e somente se, cada coeficiente do polinômio for nulo.

Algebricamente:

$$\left( C(n, p) - \binom{n}{p} \right) = 0, \text{ para cada } p = 0, \dots, n.$$

Portanto,

$$C(n, p) = \binom{n}{p}, \text{ para cada } p = 0, \dots, n,$$

que é a identidade (3.13), como queríamos.  $\square$

### 3.4 Demonstração usando Cálculo Diferencial

Nesta seção apresentaremos a demonstração do teorema binomial dada por Leng-Cheng Hwang (2009). Em seu trabalho, o autor usou o conceito de derivada parcial do Cálculo Diferencial para fazer tal demonstração.

*Demonstração.* Considere o produto

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \dots (a+b). \quad (3.18)$$

Por uma expansão direta do lado direito da equação (3.18), para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , existem inteiros positivos  $C(n, 0), \dots, C(n, n)$  tais que, para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C(n, p) a^p b^{n-p}. \quad (3.19)$$

Para todo  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , nós calculamos as derivadas parciais de ambos os lados da equação (3.19),  $k$  vezes em relação a  $a$  e  $n-k$  vezes em relação a  $b$ .

Assim, a derivada parcial para o lado esquerdo da equação (3.19) é

$$\frac{\partial^n}{\partial a^k \partial b^{n-k}} (a+b)^n = n!. \quad (3.20)$$

Agora, para todos os inteiros  $k$  e  $p$  no intervalo  $[0, n]$ , temos

$$\frac{\partial^n}{\partial a^k \partial b^{n-k}} C(n, p) a^p b^{n-p} = 0, \quad k \neq p$$

e

$$\frac{\partial^n}{\partial a^k \partial b^{n-k}} C(n, k) a^k b^{n-k} = k! (n-k)! C(n, k), \quad k = p.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^n}{\partial a^k \partial b^{n-k}} \sum_{p=0}^n C(n, p) a^p b^{n-p} = k! (n-k)! C(n, k). \quad (3.21)$$

Segue de (3.20) e (3.21) que, para todo  $k = 0, \dots, n$ ,

$$n! = k! (n-k)! C(n, k),$$

ou seja,

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Isso completa a demonstração do teorema. □



## 4 O Teorema Multinomial

### Os Números Multinomiais ou Coeficientes Multinomiais

Consideraremos o seguinte problema de Contagem. Dado um conjunto  $A$  com  $n$  elementos, de quantas maneiras podemos montar subconjuntos de  $A$  de modo que

- o primeiro conjunto tenha  $n_1$  elementos,
- o segundo conjunto tenha  $n_2$  elementos,
- o terceiro conjunto tenha  $n_3$  elementos,
- $\vdots$
- e o  $k$ -ésimo conjunto tenha  $n_k$  elementos,

de modo que  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ?

Para resolvermos esse problema, podemos raciocinar da seguinte maneira:

1. Colocamos os  $n$  elementos de  $A$  numa fila. Há  $n!$  maneiras de se enfileirarem  $n$  objetos.
2. Os  $n_1$  primeiros elementos serão destinados ao primeiro subconjunto de  $A$ ; os próximos  $n_2$  elementos serão destinados ao segundo subconjunto de  $A$  e assim por diante, até os últimos  $n_k$  elementos que serão destinados ao  $k$ -ésimo subconjunto de  $A$ .
3. As trocas de ordem entre elementos de um mesmo subconjunto não geram novos subconjuntos. (Por exemplo, apesar de haver  $3! = 6$  maneiras de se ordenar os elementos de  $\{a, b, c\}$ , como  $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$ , devemos contar esse conjunto apenas uma vez). Então devemos dividir o total de permutações entre os  $n$  elementos de  $A$ , isto é,  $n!$ , por  $n_1!$  para eliminarmos as contagens repetidas devidas às permutações entre os  $n_1$  elementos do primeiro subconjunto. Da mesma forma, devemos dividir o resultado anterior por  $n_2!$  devido às permutações dos elementos do segundo subconjunto e assim por diante, até o  $k$ -ésimo subconjunto.

Logo, o número de maneiras de montar esses subconjuntos é dado por

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}. \quad (4.1)$$

Consideremos  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Definimos  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$  como

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (4.2)$$

$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$  representa o número de divisões de um conjunto de  $n$  elementos distintos em  $k$  subconjuntos distintos de tamanhos  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , respectivamente.

O teorema multinomial é um resultado matemático que permite escrever a expansão algébrica de uma potência de expoente inteiro e positivo da soma de “múltiplos” ou “muitos” termos de forma mais direta, ou seja, sem que seja preciso aplicar sucessivas vezes a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição e o agrupamento de termos semelhantes.

O teorema multinomial é uma generalização do teorema binomial no seguinte sentido: como seria o desenvolvimento de uma potência de uma soma algébrica da forma  $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ , com  $n$  inteiro não-negativo?

A seguir, enunciamos o teorema multinomial.

**Teorema 4.1** (Teorema Multinomial). *Se  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , são  $k$  números reais e  $n$  é um número natural então*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}, \quad (4.3)$$

com  $n_1, n_2, \dots, n_k$  números inteiros não-negativos tais que  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Neste capítulo apresentaremos três demonstrações do Teorema Multinomial. A primeira, usando análise combinatória, foi desenvolvida pelo autor e está baseada na demonstração apresentada por Ross(2014) para o Teorema Binomial. A segunda demonstração usa argumentos probabilísticos e foi retirada de Kataria (2016). Finalmente, a partir da demonstração do Teorema Binomial por Cálculo Diferencial que apresentamos no Capítulo 3, apresentaremos uma demonstração nossa para o Teorema Multinomial.

## 4.1 Demonstração usando Análise Combinatória

Como o raciocínio ao longo da demonstração pode ser um tanto denso para a leitura e compreensão, vamos apresentar dois exemplos para exibir o raciocínio combinatório que aplicaremos.

**Exemplo 4.2.** Considere a expansão de

$$(a + b + c)^4 = \underbrace{(a + b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c)}_{4 \text{ parênteses}}. \quad (4.4)$$

Sabe-se que a expansão de (4.4) pode ser obtida aplicando-se a propriedade distributiva e, depois disso, agrupar os termos (parcelas) semelhantes.

Para obtermos o termo  $a^4$ , que é o mesmo que  $a \cdot a \cdot a \cdot a$ , só há uma maneira: é necessário que tomemos o  $a$  do primeiro parêntese multiplicado pelo  $a$  do segundo, multiplicado pelo  $a$  do terceiro e multiplicado pelo  $a$  do quarto parêntese. Como  $a \cdot a \cdot a \cdot a$  só pode ser obtido de uma maneira, então seu coeficiente é 1.

Um outro exemplo. Considere todas as distributivas de (4.4) que dêem como resultado  $a^3b^1c^0$ . Se por um momento escrevermos os produtos que geram esse termo mantendo as letras ordenadas de modo que a posição de cada letra no produto corresponda à posição do parêntese de sua origem, teremos as seguintes possibilidades:

$$a \cdot a \cdot a \cdot b$$

$$a \cdot a \cdot b \cdot a$$

$$a \cdot b \cdot a \cdot a$$

$$b \cdot a \cdot a \cdot a.$$

Logo, a parcela que apresenta  $a^3b^1c^0$  é  $4a^3b^1c^0$ .

Note que podemos encontrar o coeficiente 4 fazendo análise combinatória. Em (4.4) temos 4 parênteses. Para que obtenhamos  $a^3 = a \cdot a \cdot a$  temos  $\binom{4}{3}$  maneiras de escolhermos 3 parênteses dentre os 4 como “origem” de cada  $a$ . A partir disso, resta apenas 1 parêntese para ser a “origem” do  $b$  que falta.

**Exemplo 4.3.** Considere a expansão de

$$(a+b+c)^6 = \underbrace{(a+b+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b+c)}_{6 \text{ parênteses}} \quad (4.5)$$

Desejamos saber qual será o valor do coeficiente numérico de  $a^3b^2c^1$ .

1. Dos 6 parênteses do produto, temos  $\binom{6}{3}$  maneiras de escolhermos os 3 parênteses que servirão de “origem” para os 3  $a$ 's. Restam  $6 - 3 = 3$  parênteses.
2. Desses 3 parênteses, temos  $\binom{3}{2}$  maneiras de escolhermos os 2 parênteses que servirão como “origem” para os 2  $b$ 's. Resta  $3 - 2 = 1$  parêntese.
3. Finalmente temos  $\binom{1}{1}$  maneira de escolhermos o parêntese para servir de “origem” para o  $c$ .

Portanto, o coeficiente numérico de  $a^3b^2c^1$  é dado por

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = \frac{6!}{3!2!1!} = \binom{6}{3, 2, 1}. \quad (4.6)$$

Agora voltaremos ao Teorema Multinomial e à sua demonstração usando análise combinatória.

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$  é o produto de  $n$  fatores (parênteses), da seguinte forma:

$$\underbrace{(x_1 + \cdots + x_k) \cdot (x_1 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + \cdots + x_k)}_{n \text{ parênteses}}. \quad (4.7)$$

Em cada parêntese há as mesmas  $k$  parcelas:  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Aplicando a propriedade distributiva aos  $n$  parênteses e agrupando os termos semelhantes, desejamos saber qual será o valor do coeficiente numérico de uma determinada parcela  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ , com  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ .

Os argumentos de contagem que podemos utilizar são os seguintes:

1. Dos  $n$  parênteses do produto, temos  $\binom{n}{n_1}$  maneiras de escolhermos os  $n_1$  parênteses que servirão de “origem” para os  $n_1$  fatores  $x_1$ . Restam  $n - n_1$  parênteses.
2. Desses  $n - n_1$  parênteses, temos  $\binom{n - n_1}{n_2}$  maneiras de escolhermos os  $n_2$  parênteses que servirão como “origem” para os  $n_2$  fatores  $x_2$ . Restam  $n - n_1 - n_2$  parênteses.
3. Desses  $n - n_1 - n_2$  parênteses, temos  $\binom{n - n_1 - n_2}{n_3}$  maneiras de escolhermos os  $n_3$  parênteses que servirão como “origem” para os  $n_3$  fatores  $x_3$ . Restam  $n - n_1 - n_2 - n_3$  parênteses.
4. Assim procedemos com todos os  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .
5. Para o  $k$ -ésimo termo  $x_k^{n_k}$ , terão restado  $n - n_1 - n_2 \cdots - n_{k-1}$  parênteses. Como  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ , então  $n - n_1 - n_2 \cdots - n_{k-1} = n_k$ .

Portanto, o coeficiente numérico de  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$  é dado por

$$\binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \cdots \binom{n - n_1 - \cdots - n_{k-1}}{n_k}. \quad (4.8)$$

Aplicando a definição

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

temos:

$$\begin{aligned}
 & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \\
 & = \frac{n!}{\cancel{(n-n_1)!} n_1!} \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2)!} n_2!} \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!} n_3!} \cdots \frac{\cancel{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}}{0! n_k!} \\
 & = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \\
 & = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}.
 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}. \quad \square$$

## 4.2 Demonstração probabilística

No Capítulo 3 apresentamos uma demonstração do teorema binomial usando a distribuição binomial. Para fazermos a demonstração do teorema multinomial, com argumentos probabilísticos, devemos usar a distribuição multinomial a qual é modelada como segue.

Consideremos um experimento que consista de  $n$  provas independentes. O resultado de cada prova é a ocorrência de um dos  $m$  eventos independentes e mutuamente exclusivos  $E_1, E_2, \dots, E_m$ .

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , seja  $p_i$  a probabilidade constante de ocorrência do evento  $E_i$  e  $X_i$  a variável aleatória que denota o número de vezes que o evento  $E_i$  ocorreu. Então, a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_m$  é dada por

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_m = k_m) = n! \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{k_j}}{k_j!}, \quad (4.9)$$

onde  $\sum_{j=1}^m k_j = n$ . Dessa forma, como a definição dada na equação (4.9) é uma distribuição estatística válida, temos

$$1 = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} n! \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{k_j}}{k_j!} \quad (4.10)$$

Munidos desta definição, a seguir apresentaremos a demonstração do teorema multinomial, Teorema 4.1.

*Demonstração.* Vamos considerar

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)}_{n \text{ fatores}}. \quad (4.11)$$

Aplicando a propriedade distributiva ao lado direito da equação (4.11), segue que para todos os  $x_i$ 's reais temos

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} C(n, k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}, \quad (4.12)$$

onde os coeficientes  $C(n, k_1, k_2, \dots, k_m)$  são inteiros positivos e os  $k_i$ 's são inteiros não-negativos que satisfazem  $\sum_{i=1}^m k_i = n$ .

Para concluirmos a demonstração precisamos mostrar que

$$C(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}. \quad (4.13)$$

Suponhamos  $x_i > 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  e definemos

$$p_i = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}. \quad (4.14)$$

Da maneira como definimos  $p_i$  e assumindo que  $x_i > 0$ , claramente temos que  $0 < p_i < 1$  e também  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Substituindo a equação (4.14) na equação (4.10), temos:

$$1 = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} n! \prod_{j=1}^m \frac{\left( \frac{x_j}{x_1 + x_2 + \cdots + x_m} \right)^{k_j}}{k_j!}. \quad (4.15)$$

Em relação à equação (4.15), notemos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \left( \frac{x_j}{x_1 + x_2 + \cdots + x_m} \right)^{k_j} &= \prod_{j=1}^m \frac{x_j^{k_j}}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^{k_j}} \\ &= \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^{k_1 + k_2 + \cdots + k_m}} \\ &= \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Temos ainda, que

$$\prod_{j=1}^m \frac{1}{k_j!} = \frac{1}{k_1! k_2! \cdots k_m!}. \quad (4.17)$$

Então, a equação (4.15) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$1 = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} n! \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_m!} \cdot \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}}{(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n}, \quad (4.18)$$

a qual é equivalente a

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \quad (4.19)$$

Subtraindo, membro a membro, a equação (4.19) da equação (4.12), obtemos:

$$\sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} \left( C(n, k_1, k_2, \dots, k_m) - \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \right) \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} = 0, \quad (4.20)$$

para todo  $x_i > 0$  real. Da igualdade polinomial obtida na equação (4.20), obtemos a equação (4.13) e, portanto, está provado o teorema.  $\square$

### 4.3 Demonstração usando Cálculo Diferencial

Nesta seção apresentaremos a demonstração do teorema multinomial usando as ideias da demonstração dada por Hwang (2009) para o teorema binomial, apresentado neste trabalho na Seção 3.4. A demonstração está baseada no conceito de derivada parcial.

*Demonstração.* Aplicando a propriedade distributiva ao segundo membro da equação (4.11), obtemos

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} C(n, k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}, \quad (4.21)$$

onde os coeficientes  $C(n, k_1, k_2, \dots, k_m)$  são inteiros positivos e os  $k_i$ 's são inteiros não-negativos que satisfazem  $\sum_{i=1}^m k_i = n$ . Para concluirmos a demonstração, precisamos mostrar que

$$C(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}. \quad (4.22)$$

Para todo  $r_i = 0, 1, 2, \dots, n$ , com  $i = 1, \dots, m$  e com  $\sum_{i=1}^m r_i = n$ , calculamos as derivadas parciais de ambos os membros da equação (4.21), ( $r_1$  vezes em relação a  $x_1$ ,  $r_2$  vezes em relação a  $x_2$ ,  $\dots$ ,  $r_m$  vezes em relação a  $x_m$ ). A derivada parcial do lado esquerdo da equação (4.21) é sempre igual a

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_m^{r_m}} (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = n!. \quad (4.23)$$

Quanto às derivadas parciais do lado direito da equação (4.21), para todos os inteiros  $r_i$  pertencentes ao intervalo  $[0, n]$ , temos

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_m^{r_m}} C(n, k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} = 0,$$

se  $r_i \neq k_i$  para algum  $i$ , e

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_m^{r_m}} C(n, r_1, r_2, \dots, r_m) x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_m^{r_m} = r_1! r_2! \dots r_m! C(n, r_1, r_2, \dots, r_m), \quad (4.24)$$

se  $r_i = k_i$  para todo  $i$ .

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_m^{r_m}} \left( \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} C(n, k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \right) = \\ = r_1! r_2! \dots r_m! \cdot C(n, r_1, r_2, \dots, r_m). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Segue das equações (4.23) e (4.25) que para todo  $k_i = 0, 1, \dots, n$  e para todo  $i = 0, 1, \dots, m$ , temos:

$$n! = k_1! k_2! \dots k_m! \cdot C(n, k_1, k_2, \dots, k_m), \quad (4.26)$$

o que equivale à igualdade da equação (4.22), completando assim a nossa demonstração.  $\square$

## 5 Padrões geométricos para as expansões trinomiais e tetranomiais

Neste capítulo usaremos o termo *expansões trinomiais* para as expansões algébricas de potências de *trinômios*. Ou seja, para  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais e  $n \in \mathbb{N}$  a expansão trinomial se refere à expansão algébrica de potências do tipo  $(a + b + c)^n$ .

Analogamente, usaremos o termo *expansões tetranomiais* para as expansões algébricas de potências de *tetranômios*. Ou seja, para  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  números reais e  $n \in \mathbb{N}$  a expansão tetranomial se refere à expansão algébrica de potências do tipo  $(a + b + c + d)^n$ .

É importante observarmos que se aplicássemos correta e repetidamente as propriedades distributiva da multiplicação sobre a adição e a associativa da adição sem nos importarmos com algum tipo de ordenação das parcelas finais, talvez não fosse possível enxergar a conexão entre o triângulo aritmético e os coeficientes da dita expansão. Para darmos um exemplo, imagine que tivéssemos que efetuar a expansão de, digamos,  $(a + b)^4$  e, depois de muitas operações, dêssemos como resposta final o seguinte:

$$(a + b)^4 = 6a^2b^2 + b^4 + 4b^3a + 4a^3b + a^4. \quad (5.1)$$

Perceber que esse resultado está associado a uma linha do triângulo de Pascal ficaria, no mínimo, um pouco mais complicado, ou ainda, não enxergaríamos conexão alguma entre uma coisa e outra.

Porém, quando estabelecemos algumas *regras* para escrevermos as parcelas do resultado e para ordená-las, as chances de encontrarmos uma conexão (caso haja) entre o triângulo de Pascal e a expansão encontrada aumentam bastante. O fato de, historicamente, terem sido usadas duas *regras* simples permitiu que enxergássemos a conexão entre as expansões de binômios e os números do triângulo aritmético. Essas duas simples regras para  $(a + b)^n$  podem ser:

1. Escrever cada parcela da expansão apresentando coeficiente numérico (mesmo que seja igual a 1), potência de  $a$  e potência de  $b$ , nessa ordem, com os seus expoentes devidamente apresentados (mesmo que sejam 0 ou 1) e
2. Ordenar as parcelas de modo que os expoentes de  $a$  apareçam em ordem decrescente.

Então, pelas regras, o resultado do nosso exemplo será apresentado da seguinte maneira:

$$(a + b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4. \quad (5.2)$$

Essas regras nos levam a notar com mais facilidade pelo menos três aspectos:

1. As somas dos expoentes de  $a$  e de  $b$  é igual a 4;
2. Os expoentes de  $b$  aparecem na ordem inversa à dos expoentes de  $a$ , isto é, em ordem crescente;
3. Os coeficientes numéricos nessa ordem são claramente identificados com os termos de uma linha do triângulo de Pascal.

Quando notamos aspectos interessantes, como esses, que não parecem ocorrer por mero acaso, somos levados a nos perguntar: “Será que esse padrão ocorre para outros casos?” “Que casos seriam esses?”

Sabemos que, em assuntos de matemática, mesmo que um *padrão* se repita mil vezes, não quer dizer que se repita para o milésimo primeiro caso. Além disso, antes de provarmos um certo *padrão* em matemática, ele precisa ser descoberto! Sem a descoberta do padrão, não haveria novidade alguma a ser apreciada, muito menos provada. Os padrões ou conexões descobertas, enquanto ainda não demonstradas, são chamadas de *conjecturas*. Conjecturas são, ao pé da letra, *ligações*, *conexões*. Uma conjectura, ou seja, uma afirmação do tipo *Se “isso ocorre”, então “aquilo ocorre”*, se provada verdadeira dentro do rigor matemático, então deixa o *status* de *conjectura* para o *status* de *teorema*.

A seguir, vamos estabelecer algumas regras para a escrita de expansões de trinômios (e depois de tetranômios) e vamos tentar observar se há algum *padrão* que nos chame a atenção e então, que nos leve a algumas *conexões*.

## 5.1 Expansão Trinomial

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais e  $n$  inteiro não-negativo. O teorema multinomial para três termos pode ser escrito da seguinte maneira:

$$(a + b + c)^n = \sum_{n_a + n_b + n_c = n} \binom{n}{n_a, n_b, n_c} a^{n_a} b^{n_b} c^{n_c}, \quad (5.3)$$

com  $n_a, n_b, n_c$  números inteiros não-negativos tais que  $n_a + n_b + n_c = n$ .

Apresentaremos a seguir as *expansões trinomiais*  $(a + b + c)^n$  para  $n = 2, 3, 4$  e 5 e apontaremos um possível *padrão geométrico e aritmético* para a expansão trinomial. Este *padrão* é análogo aos padrões das linhas do Triângulo Aritmético, obtido para a expansão Binomial.

### Expansão trinomial $(a + b + c)^2$

Seguindo a expressão apresentada na equação (5.3), temos

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= \binom{2}{2, 0, 0} a^2 b^0 c^0 + \binom{2}{1, 1, 0} a^1 b^1 c^0 + \binom{2}{1, 0, 1} a^1 b^0 c^1 + \\ &+ \binom{2}{0, 2, 0} a^0 b^2 c^0 + \binom{2}{0, 1, 1} a^0 b^1 c^1 + \binom{2}{0, 0, 2} a^0 b^0 c^2. \end{aligned}$$

Na expansão acima consideremos:  $a^2b^0c^0 = aa$ ,  $a^1b^1c^0 = ab$ ,  $a^1b^0c^1 = ac$ ,  $a^0b^2c^0 = bb$ ,  $a^0b^1c^1 = bc$ ,  $a^0b^0c^2 = cc$ . Uma tentativa de usar a *ordem alfabética* para ordenar os termos nos dá  $aa$ ,  $ab$ ,  $ac$ ,  $bb$ ,  $bc$ ,  $cc$ . Note que a tradicional técnica de *ordenação alfabética* nos dá uma maneira de escrever os termos em certa ordem, porém sem apresentar resultados ou padrões notórios.

O padrão que descobri em 1995 para ordenar os termos dessa expansão é um pouco mais sofisticado do que a *ordem alfabética* e o resultado final se tornou muito interessante.

“Como devemos então organizar os termos (ou parcelas) da expansão de  $(a+b+c)^n$ ?”

Vamos procurar seguir as seguintes regras de escrita para as parcelas dessa expansão:

1. Todos os expoentes de  $a$ ,  $b$  e  $c$  deverão ser apresentados explicitamente (incluindo 0 e 1);
2. Os coeficientes serão os coeficientes trinômiais (ou seja, os coeficientes multinômiais para três termos);
3. Cada parcela será escrita com os fatores na seguinte ordem: coeficiente, potência de  $a$ , potência de  $b$  e potência de  $c$ ;
4. As parcelas devem ser ordenadas de modo que os expoentes de  $a$  sejam apresentados em ordem decrescente (ou crescente). A mesma regra deverá ser cumprida para os expoentes de  $b$  e para os expoentes de  $c$ .

Da quarta regra vem a parte mais difícil: *Como ordenar parcelas em que os expoentes de três fatores estejam, de algum modo, em ordem decrescente?*

Ao resolver esse “quebra-cabeças” encontrei, como melhor “encaixe das peças”, a disposição que apresentamos a seguir.

$$\binom{2}{2,0,0} a^2b^0c^0$$

$$\binom{2}{1,1,0} a^1b^1c^0 \quad \binom{2}{1,0,1} a^1b^0c^1$$

$$\binom{2}{0,2,0} a^0b^2c^0 \quad \binom{2}{0,1,1} a^0b^1c^1 \quad \binom{2}{0,0,2} a^0b^0c^2$$

Fazendo os cálculos, temos:

$$\binom{2}{2,0,0} = \frac{2!}{2!0!0!} = 1, \quad \binom{2}{0,2,0} = \frac{2!}{0!2!0!} = 1, \quad \binom{2}{0,0,2} = \frac{2!}{0!0!2!} = 1,$$

$$\binom{2}{1,1,0} = \frac{2!}{1!1!0!} = 2, \quad \binom{2}{0,1,1} = \frac{2!}{0!1!1!} = 2 \text{ e } \binom{2}{1,0,1} = \frac{2!}{1!0!1!} = 2.$$

Logo, podemos fazer o triângulo acima da seguinte forma:

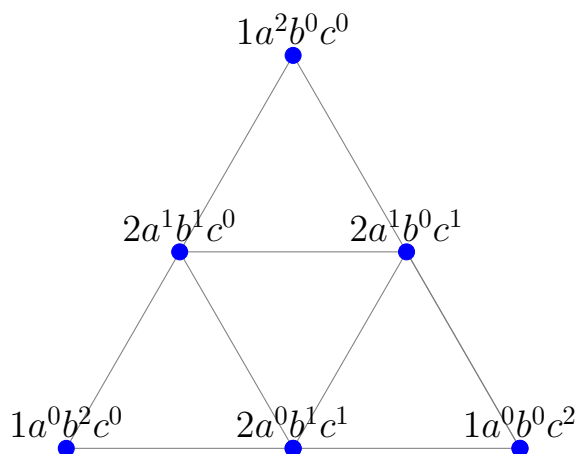


Figura 5.1:  $(a+b+c)^2$

**Expansão trinomial**  $(a + b + c)^3$ 

Seguindo a expressão apresentada na equação (5.3) temos

$$\begin{aligned}
 (a + b + c)^3 = & \binom{3}{3,0,0} a^3 b^0 c^0 + \binom{3}{2,1,0} a^2 b^1 c^0 + \binom{3}{1,2,0} a^1 b^2 c^0 + \\
 & + \binom{3}{0,3,0} a^0 b^3 c^0 + \binom{3}{0,2,1} a^0 b^2 c^1 + \binom{3}{0,1,2} a^0 b^1 c^2 + \\
 & + \binom{3}{0,0,3} a^0 b^0 c^3 + \binom{3}{1,0,2} a^1 b^0 c^2 + \binom{3}{2,0,1} a^2 b^0 c^1 + \\
 & + \binom{3}{1,1,1} a^1 b^1 c^1
 \end{aligned}$$

Ao observarmos os valores dos expoentes de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , é possível reorganizarmos esses termos numa estrutura triangular como a que segue:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3, 0, 0 \end{pmatrix} a^3 b^0 c^0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2, 1, 0 \end{pmatrix} a^2 b^1 c^0 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2, 0, 1 \end{pmatrix} a^2 b^0 c^1$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1, 2, 0 \end{pmatrix} a^1 b^2 c^0 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix} a^1 b^1 c^1 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1, 0, 2 \end{pmatrix} a^1 b^0 c^2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0, 3, 0 \end{pmatrix} a^0 b^3 c^0 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0, 2, 1 \end{pmatrix} a^0 b^2 c^1 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0, 1, 2 \end{pmatrix} a^0 b^1 c^2 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0, 0, 3 \end{pmatrix} a^0 b^0 c^3$$

Fazendo os cálculos temos:  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3, 0, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0, 3, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0, 0, 3 \end{pmatrix} = 1,$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2, 1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1, 2, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0, 2, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0, 1, 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2, 0, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1, 0, 2 \end{pmatrix} = 3 \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 6. \text{ Logo, podemos reescrever o triângulo acima da seguinte forma:}$$

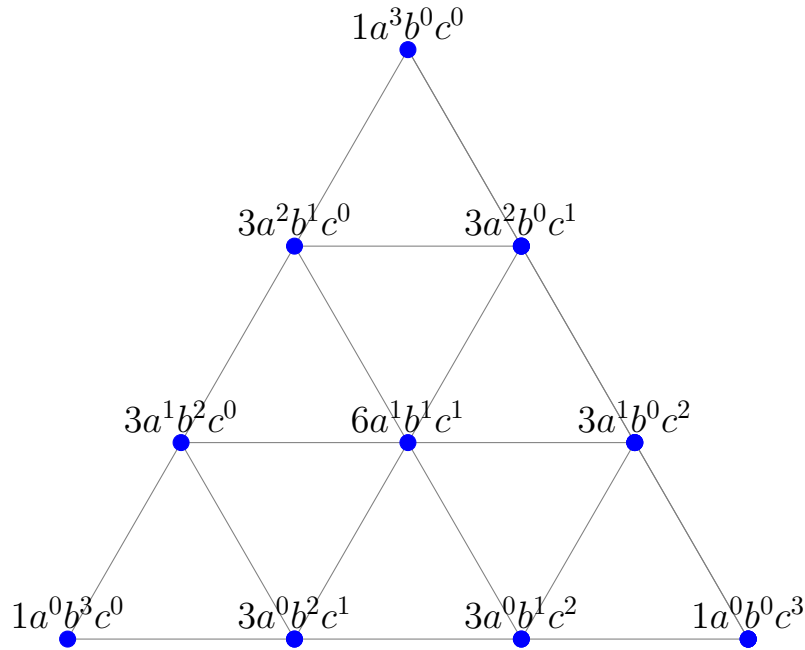


Figura 5.2:  $(a + b + c)^3$

### Expansão trinomial $(a + b + c)^4$

Seguindo a expressão apresentada na equação (5.3) o triângulo correspondente será:

$$\begin{aligned}
 & \binom{4}{4,0,0} a^4 b^0 c^0 \\
 & \binom{4}{3,1,0} a^3 b^1 c^0 \quad \binom{4}{3,0,1} a^3 b^0 c^1 \\
 & \binom{4}{2,2,0} a^2 b^2 c^0 \quad \binom{4}{2,1,1} a^2 b^1 c^1 \quad \binom{4}{2,0,2} a^2 b^0 c^2 \\
 & \binom{4}{1,3,0} a^1 b^3 c^0 \quad \binom{4}{1,2,1} a^1 b^2 c^1 \quad \binom{4}{1,1,2} a^1 b^1 c^2 \quad \binom{4}{1,0,3} a^1 b^0 c^3 \\
 & \binom{4}{0,4,0} a^0 b^4 c^0 \quad \binom{4}{0,3,1} a^0 b^3 c^1 \quad \binom{4}{0,2,2} a^0 b^2 c^2 \quad \binom{4}{0,1,3} a^0 b^1 c^3 \quad \binom{4}{0,0,4} a^0 b^0 c^4
 \end{aligned}$$

Fazendo os cálculos e substituindo os números trinomiais por seus respectivos valores numéricos, temos:

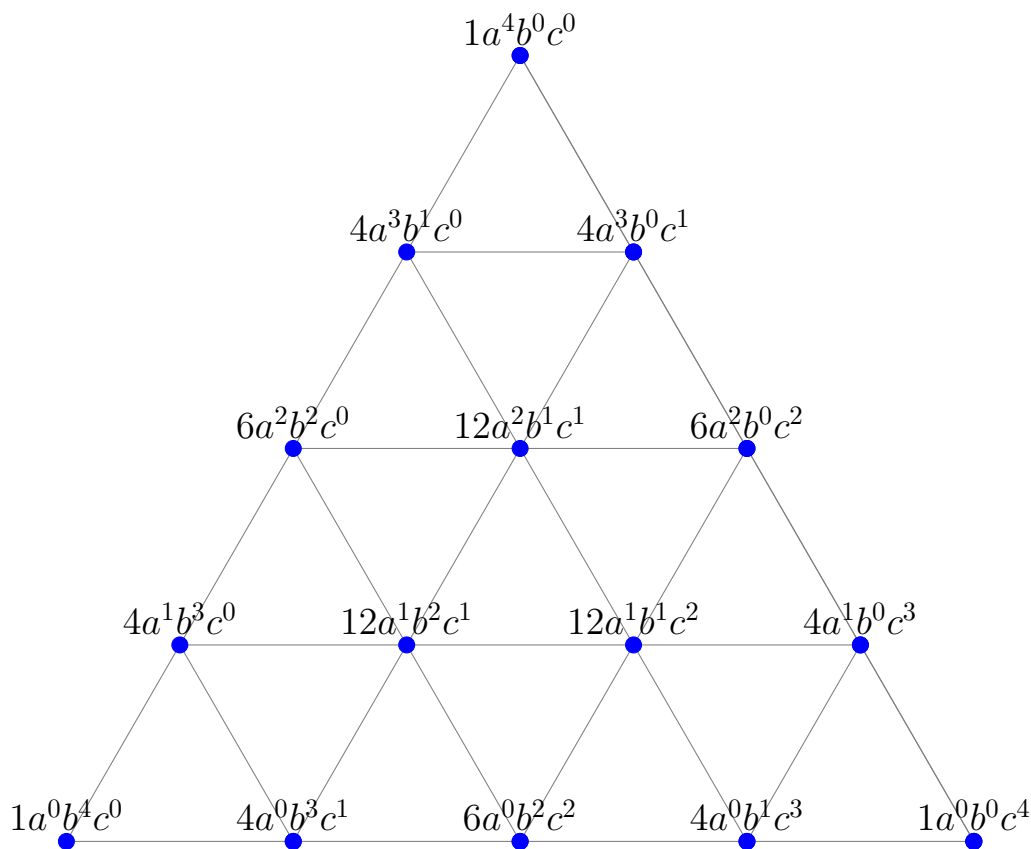


Figura 5.3:  $(a + b + c)^4$

Esses primeiros exemplos podem dar uma ideia do *padrão geométrico* que desejamos apresentar para as expansões dos trinômios  $(a + b + c)^n$ . Note que para cada  $n$ , a expansão de  $(a + b + c)^n$  se apresenta com uma configuração triangular, de acordo com os expoentes de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Observe ainda os seguintes pontos, a partir da Figura 5.3:

1. Vértices. No vértice superior, temos o termo correspondente a  $a^4$ ; no vértice inferior à esquerda, temos o termo correspondente a  $b^4$  e, no vértice inferior à direita, temos o termo correspondente a  $c^4$ .
2. Linhas paralelas horizontais. Observando as linhas horizontais, no sentido de cima para baixo, notamos que começamos com um ponto: o vértice em que temos  $a^4$  e, à medida que descemos, temos a linha correspondente aos termos em que aparece  $a^3$ , depois  $a^2$ ,  $a^1$  e, na última linha, os termos correspondentes a  $a^0$ .
3. Linhas paralelas à linha dos vértices  $a^4$  e  $c^4$ . Observando a partir do vértice do  $b^4$ , notamos que a linha seguinte apresenta os termos em  $b^3$ . Nas linhas seguintes, temos os termos em  $b^3$ , depois  $b^2$ , depois  $b^1$  e, finalmente, os termos com  $b^0$ .
4. Linhas paralelas à linha dos vértices  $a^4$  e  $b^4$ . Observando a partir do vértice  $c^4$ . Na linhas seguintes, temos os termos de  $c^3$ , depois de  $c^2$  até  $c^0$ .

Por um momento, retiramos os termos literais  $a^{n_a}$ ,  $b^{n_b}$  e  $c^{n_c}$  que aparecem na Figura 5.3, e construímos a Figura 5.4 para observarmos um pouco melhor os coeficientes numéricos.

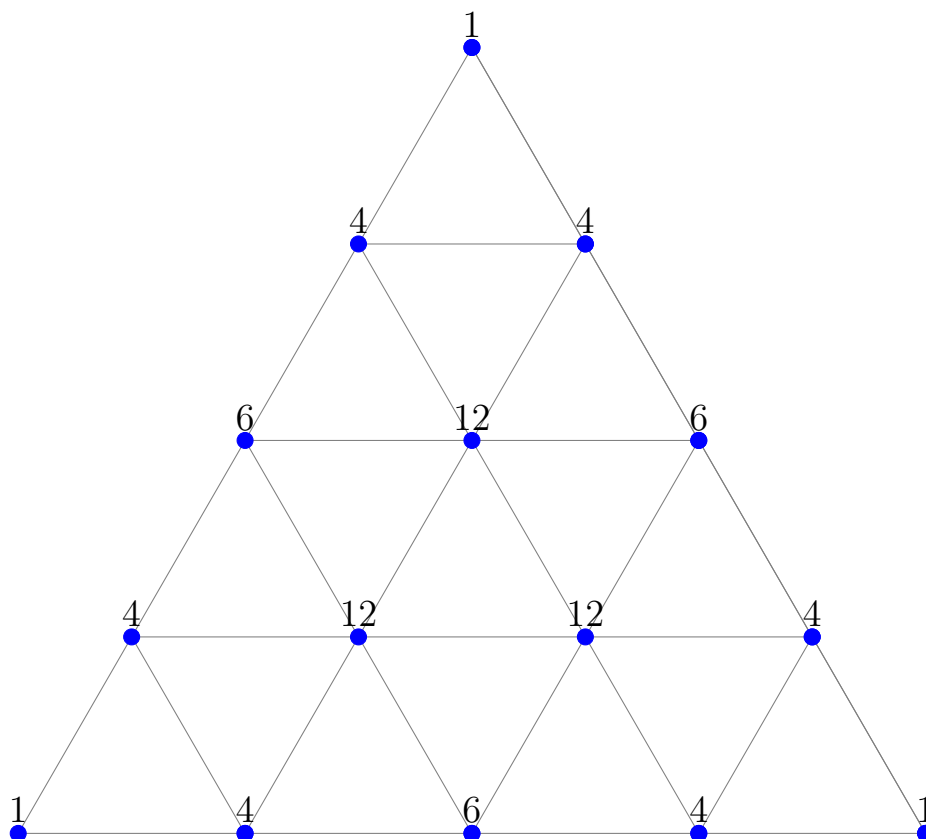
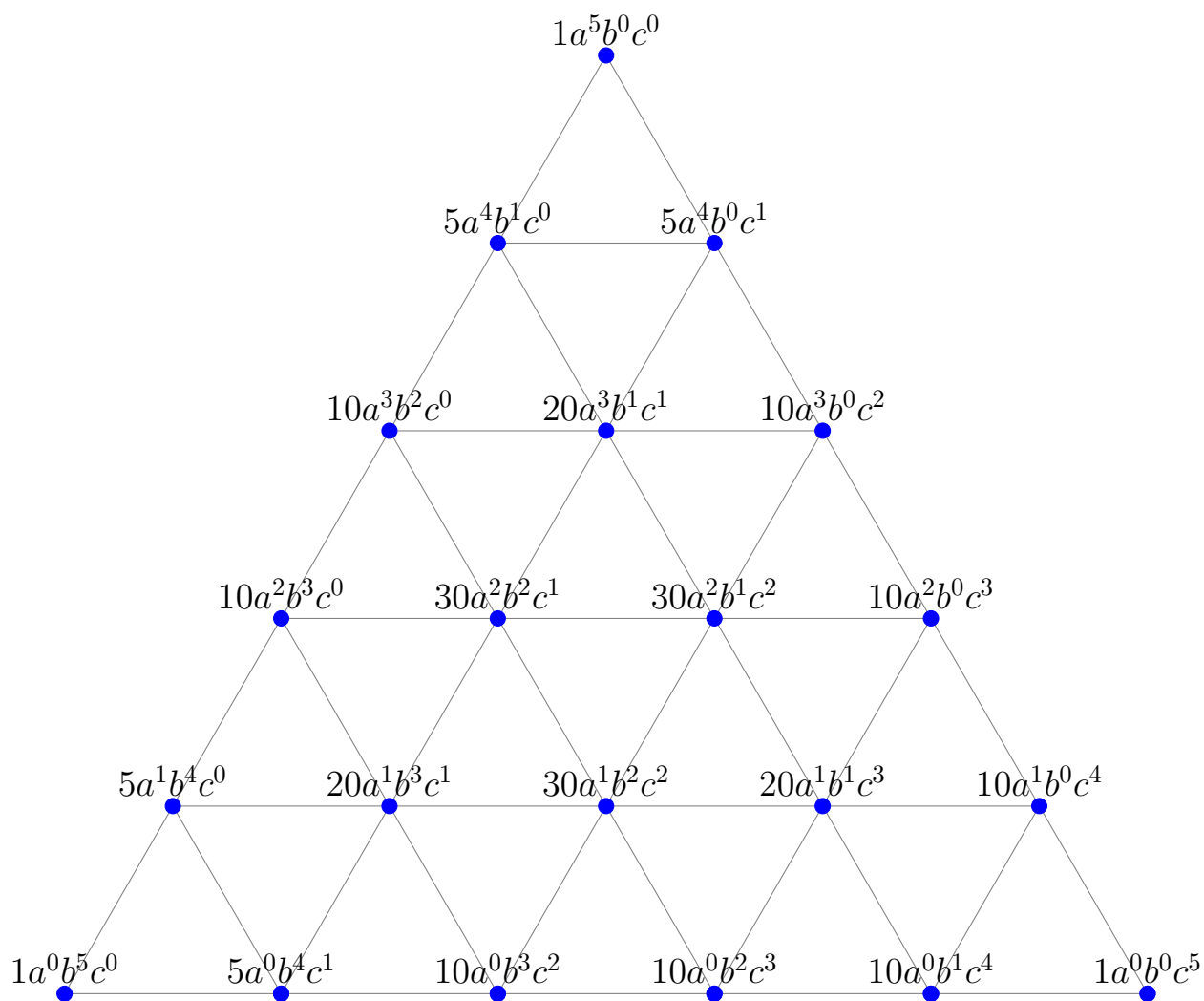


Figura 5.4: Coeficientes de  $(a + b + c)^4$

Todos os pontos observados acima podem ser notados se ainda fizermos a expansão trinomial  $(a + b + c)^5$ , conforme apresentamos a seguir:

### Expansão trinomial $(a + b + c)^5$

Seguindo a expressão apresentada na equação (5.3) e, apresentando diretamente o triângulo correspondente com os cálculos dos coeficientes trinômias realizados, temos:

Figura 5.5:  $(a + b + c)^5$

Conforme fizemos anteriormente, retiramos os termos literais  $a^{n_a}$ ,  $b^{n_b}$  e  $c^{n_c}$  que aparecem na Figura 5.5, e construímos a Figura 5.6 para observarmos um pouco melhor os coeficientes numéricos.

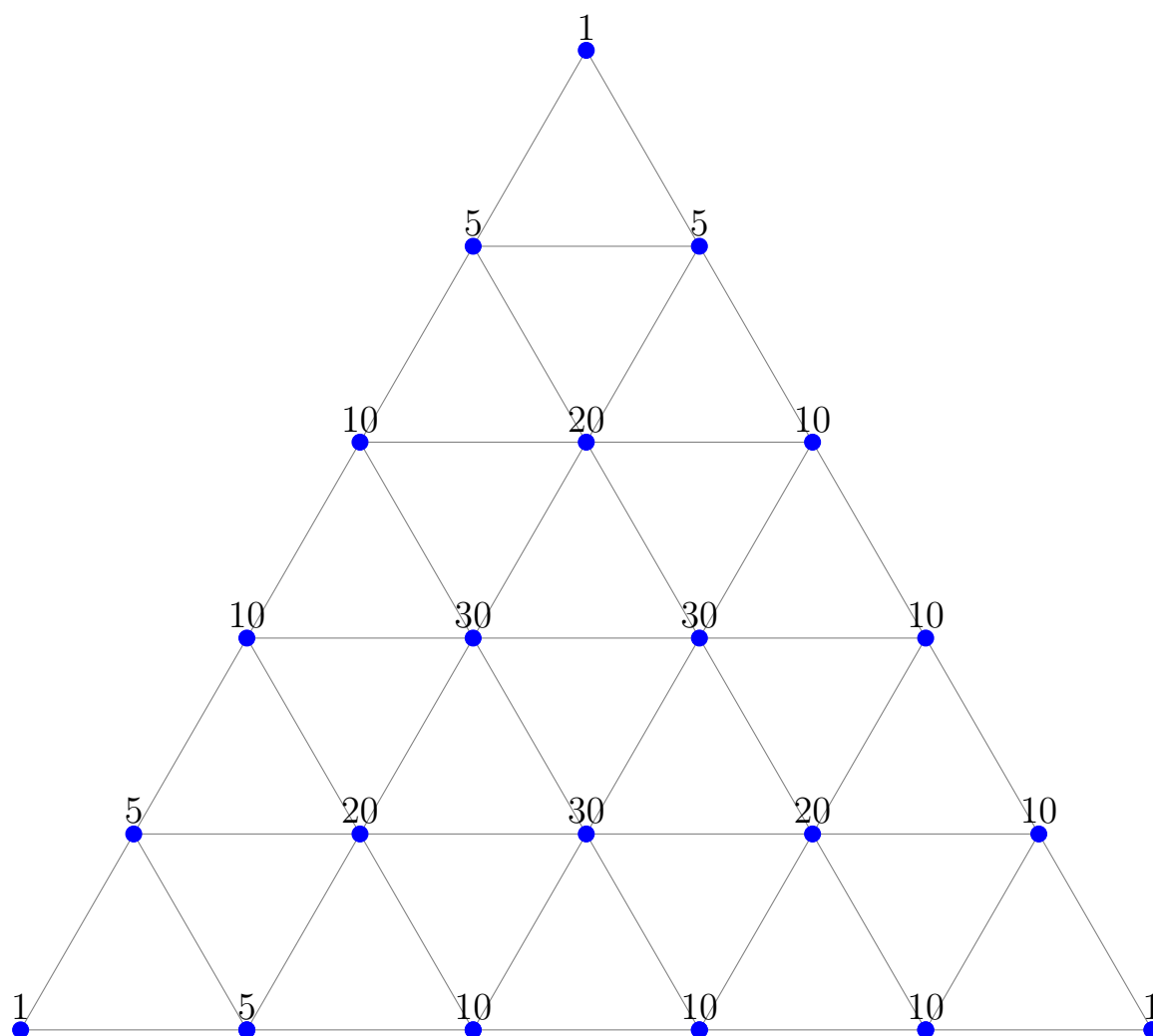


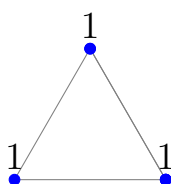
Figura 5.6: Coeficientes de  $(a + b + c)^5$

Podemos notar que a estrutura dos coeficientes trinomiais de  $(a+b+c)^n$  para cada  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  pode ser representada por uma camada triangular (exceto, obviamente, quando temos  $n = 0$  cuja camada é um ponto, não um triângulo). Observe:

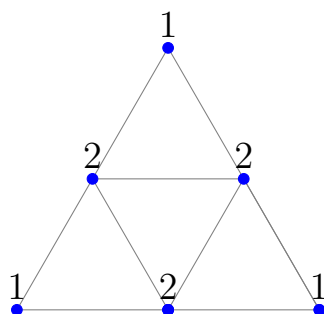
$$n = 0 : \quad (a+b+c)^0$$

1  
•

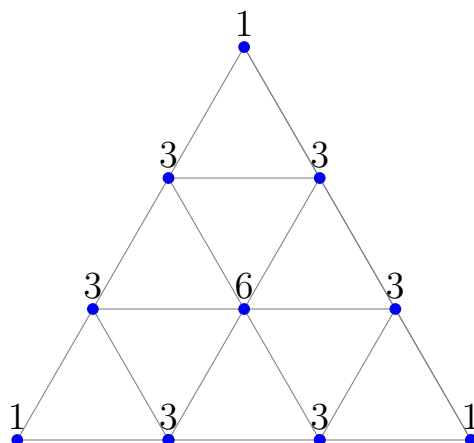
$$n = 1 : \quad (a+b+c)^1$$



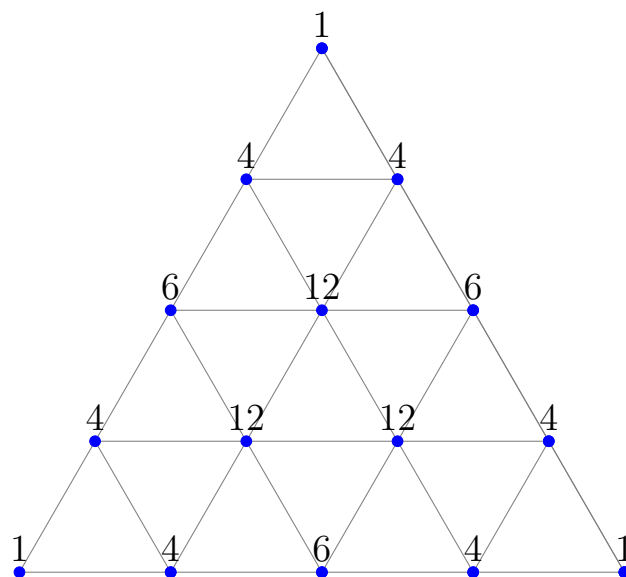
$$n = 2 : \quad (a+b+c)^2$$



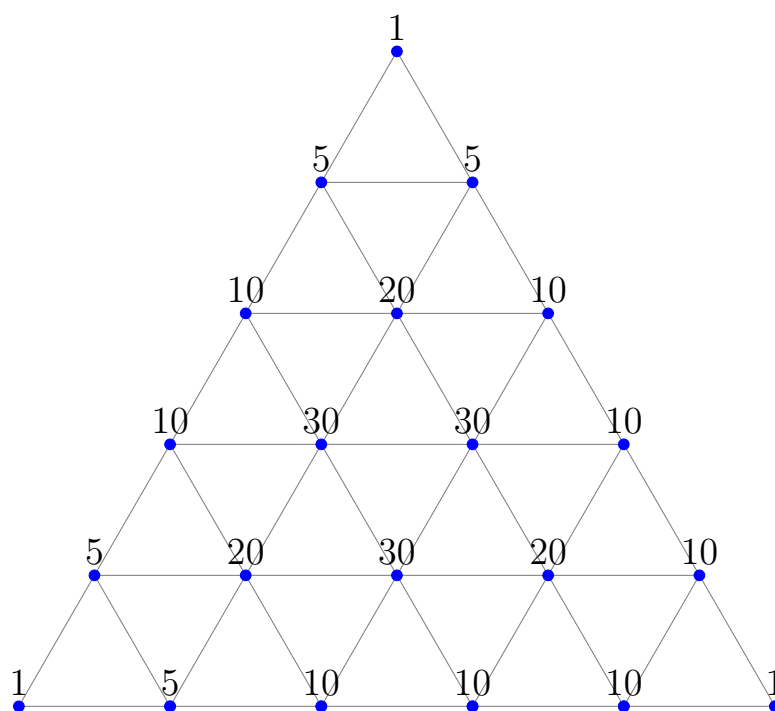
$$n = 3 : \quad (a+b+c)^3$$



$$n = 4 : \quad (a + b + c)^4$$



$$n = 5 : \quad (a + b + c)^5$$



A seguir pretendemos explicar como podemos obter cada camada triangular correspondente a cada valor de  $n$  para  $(a + b + c)^n$ , a partir do triângulo aritmético original (triângulo de Pascal).

Vamos analisar, por exemplo, a expansão de  $(a + b + c)^4$ . Essa camada triangular é formada da seguinte maneira:

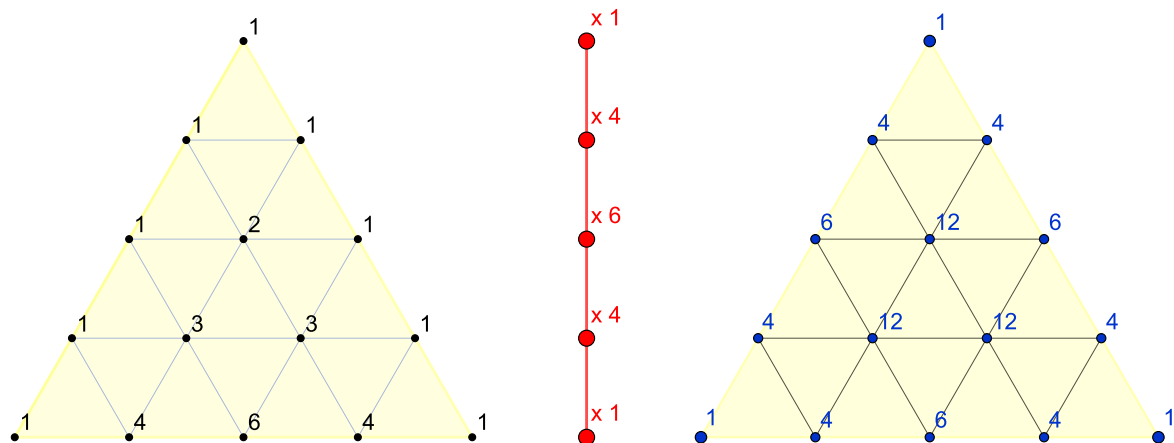


Figura 5.7: Princípio multiplicativo para obtenção da camada correspondente a  $n = 4$

1. À esquerda, conforme Figura 5.7, escrevemos o triângulo de Pascal até a linha correspondente à 4ª potência de  $(x+y)^n$ .
2. A seguir, logo à direita do triângulo, escrevemos numa linha vertical os números da linha correspondente à 4ª potência de  $(x+y)^n$  no triângulo de Pascal.
3. Multiplicando cada número de cada linha do triângulo à esquerda pelo fator correspondente escrito na linha vertical à mesma altura, obtemos o triângulo da direita que é a camada triangular dos coeficientes da expansão de  $(a+b+c)^4$ .

Vejamos ainda, outro exemplo, apresentando como é formada a camada triangular correspondente aos coeficientes da expansão de  $(a+b+c)^5$ . Para isto veja a Figura 5.8.

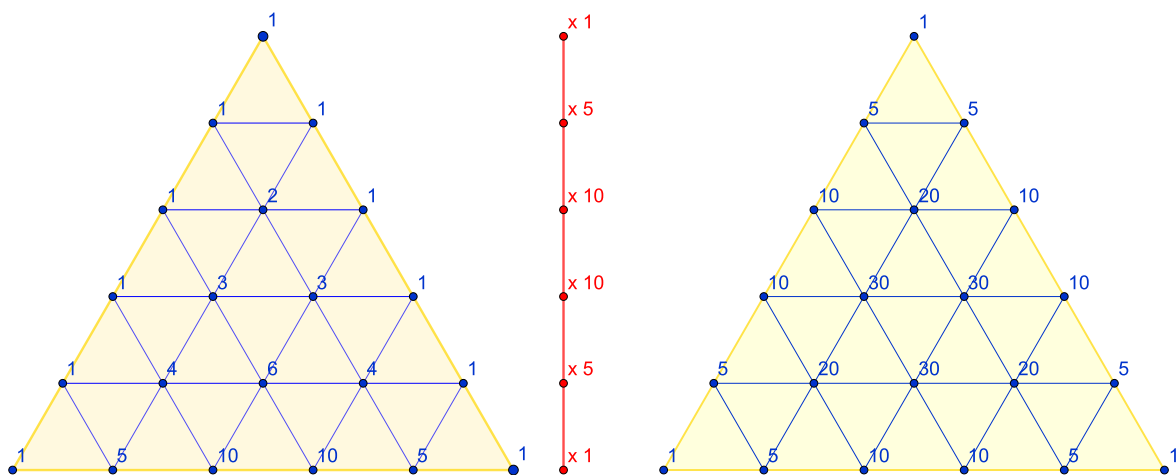


Figura 5.8: Princípio multiplicativo para obtenção da camada correspondente a  $n = 5$

As questões naturais que podemos fazer são: *Este padrão geométrico de construção das camadas vale para todo  $n$  na expansão trinomial  $(a+b+c)^n$ ? Qual seria o argumento matemático que justifica esse método de construção das camadas triangulares?*

A resposta está na expansão parcial de  $(a + (b + c))^n$ , ou seja, considerando num primeiro momento que  $(a + (b + c))^n$  seja um binômio com suas duas parcelas iguais a  $a$  e  $(b + c)$ .

Nos números multinomiais  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}$  os valores numéricos  $n_1, n_2, \dots, n_m$  são, respectivamente, iguais aos expoentes de sua parte literal  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$ . Assim, por exemplo para  $n = 4$ , temos:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^4 = (a + (b + c))^4 = & \binom{4}{4, 0} a^4 (b + c)^0 + \binom{4}{3, 1} a^3 (b + c)^1 \\ & + \binom{4}{2, 2} a^2 (b + c)^2 + \binom{4}{1, 3} a^1 (b + c)^3 + \binom{4}{0, 4} a^0 (b + c)^4 \quad . \quad (5.4) \end{aligned}$$

Observe que aqui usamos a notação  $\binom{n}{n_a, n_b}$  para o número binomial  $\binom{n}{n_b}$  por motivos didáticos. Essa notação que adotamos para o número binomial se enquadra melhor no modelo de notação que é normalmente usado para os números multinomiais.

Agora, expandindo os termos  $(b + c)^0$ ,  $(b + c)^1$ ,  $(b + c)^2$ ,  $(b + c)^3$  e  $(b + c)^4$ , temos

$$\begin{aligned} \binom{4}{4, 0} a^4 (b + c)^0 &= \binom{4}{4, 0} a^4 \times \left( \binom{0}{0, 0} b^0 c^0 \right) \\ \binom{4}{3, 1} a^3 (b + c)^1 &= \binom{4}{3, 1} a^3 \times \left( \binom{1}{1, 0} b^1 c^0 + \binom{1}{0, 1} b^0 c^1 \right) \\ \binom{4}{2, 2} a^2 (b + c)^2 &= \binom{4}{2, 2} a^2 \times \left( \binom{2}{2, 0} b^2 c^0 + \binom{2}{1, 1} b^1 c^1 + \binom{2}{0, 2} b^0 c^2 \right) \\ \binom{4}{1, 3} a^1 (b + c)^3 &= \binom{4}{1, 3} a^1 \times \left( \binom{3}{3, 0} b^3 c^0 + \binom{3}{2, 1} b^2 c^1 + \binom{3}{1, 2} b^1 c^2 + \binom{3}{0, 3} b^0 c^3 \right) \\ \binom{4}{0, 4} a^0 (b + c)^4 &= \\ &= \binom{4}{0, 4} a^1 \times \left( \binom{4}{4, 0} b^4 c^0 + \binom{4}{3, 1} b^3 c^1 + \binom{4}{2, 2} b^2 c^2 + \binom{4}{1, 3} b^1 c^3 + \binom{4}{0, 4} b^0 c^4 \right) . \end{aligned}$$

Fazendo o cálculo dos números binomiais e substituindo as expansões acima na equação (5.4), temos:

$$(a + (b + c))^4 = 1a^4(b + c)^0 + 4a^3(b + c)^1 + 6a^2(b + c)^2 + 4a^1(b + c)^3 + 1a^0(b + c)^4. \quad (5.5)$$

Consequentemente, do lado direito da equação (5.5) obtemos:

$$\begin{aligned}
 1a^4(b+c)^0 &= 1a^4 \times (1b^0c^0) \\
 4a^3(b+c)^1 &= 4a^3 \times (1b^1c^0 + 1b^0c^1) \\
 6a^2(b+c)^2 &= 6a^2 \times (1b^2c^0 + 2b^1c^1 + 1b^0c^2) \\
 4a^1(b+c)^3 &= 4a^1 \times (1b^3c^0 + 3b^2c^1 + 3b^1c^2 + 1b^0c^3) \\
 1a^0(b+c)^4 &= 1a^0 \times (1b^4c^0 + 4b^3c^1 + 6b^2c^2 + 4b^1c^3 + 1b^0c^4).
 \end{aligned}$$

Isso equivale a:

$$\begin{aligned}
 1a^4(b+c)^0 &= a^4 \times (1b^0c^0) \\
 4a^3(b+c)^1 &= a^3 \times (4b^1c^0 + 4b^0c^1) \\
 6a^2(b+c)^2 &= a^2 \times (6b^2c^0 + 12b^1c^1 + 6b^0c^2) \\
 4a^1(b+c)^3 &= a^1 \times (4b^3c^0 + 12b^2c^1 + 12b^1c^2 + 4b^0c^3) \\
 1a^0(b+c)^4 &= a^0 \times (1b^4c^0 + 4b^3c^1 + 6b^2c^2 + 4b^1c^3 + 1b^0c^4).
 \end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$\begin{aligned}
 1a^4(b+c)^0 &= 1a^4b^0c^0 \\
 4a^3(b+c)^1 &= 4a^3b^1c^0 + 4a^3b^0c^1 \\
 6a^2(b+c)^2 &= 6a^2b^2c^0 + 12a^2b^1c^1 + 6a^2b^0c^2 \\
 4a^1(b+c)^3 &= 4a^1b^3c^0 + 12a^1b^2c^1 + 12a^1b^1c^2 + 4a^1b^0c^3 \\
 1a^0(b+c)^4 &= 1a^0b^4c^0 + 4a^0b^3c^1 + 6a^0b^2c^2 + 4a^0b^1c^3 + 1a^0b^0c^4.
 \end{aligned}$$

Assim como na expansão binomial as linhas podem ser colocadas uma abaixo da outra, formando o triângulo aritmético, na expansão trinomial as camadas triangulares podem ser colocadas uma abaixo da outra formando um *tetraedro aritmético*.

Na Figura 5.9 apresentamos o *Tetraedro Aritmético* com as 6 primeiras camadas das expansões de  $(a+b+c)^n$ , para  $n = 0, 1, \dots, 5$ . Nas Figuras 5.10 e 5.11 temos outros ângulos de visão para o mesmo resultado: o *Tetraedro Aritmético*.

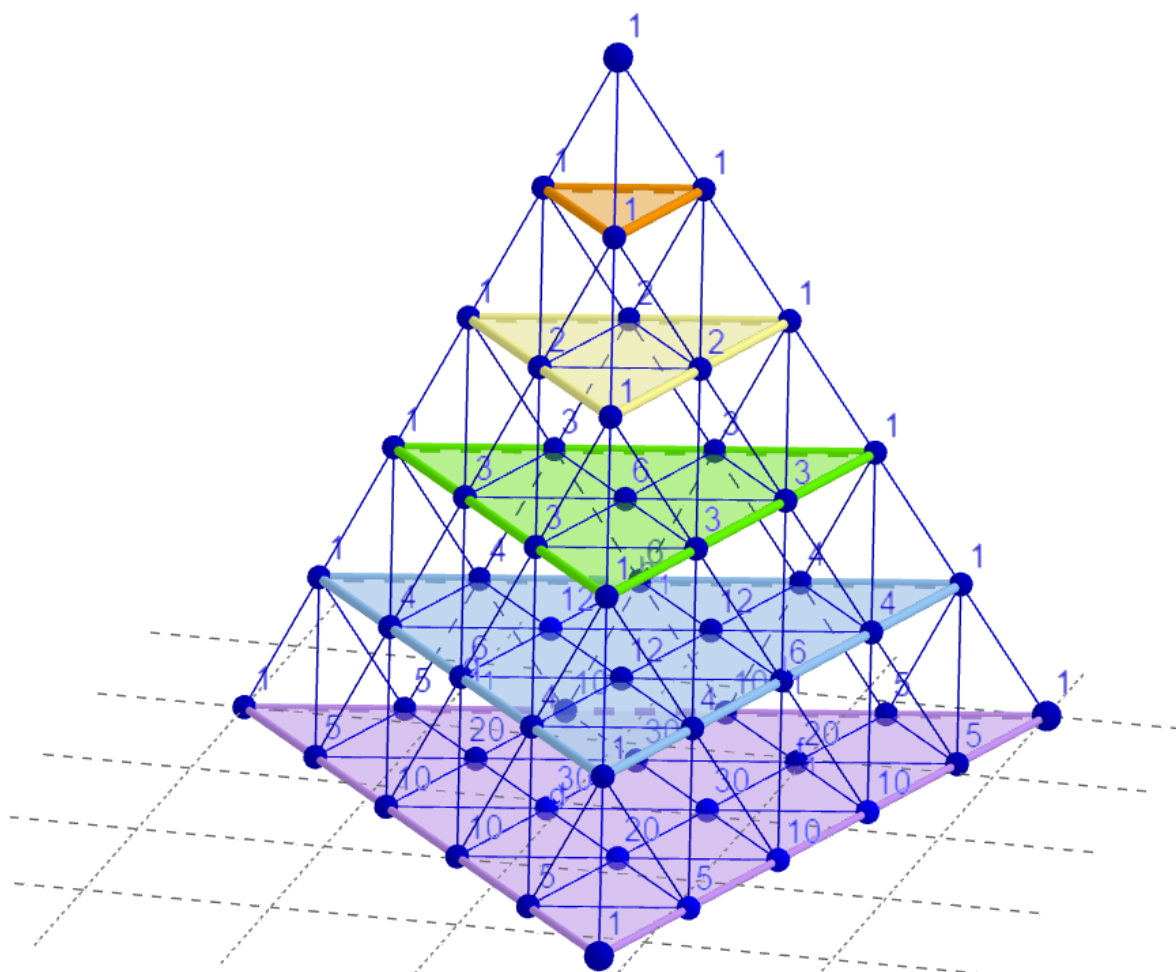


Figura 5.9: O Tetraedro Aritmético, com os coeficientes de  $(a + b + c)^n$ , até  $n = 5$

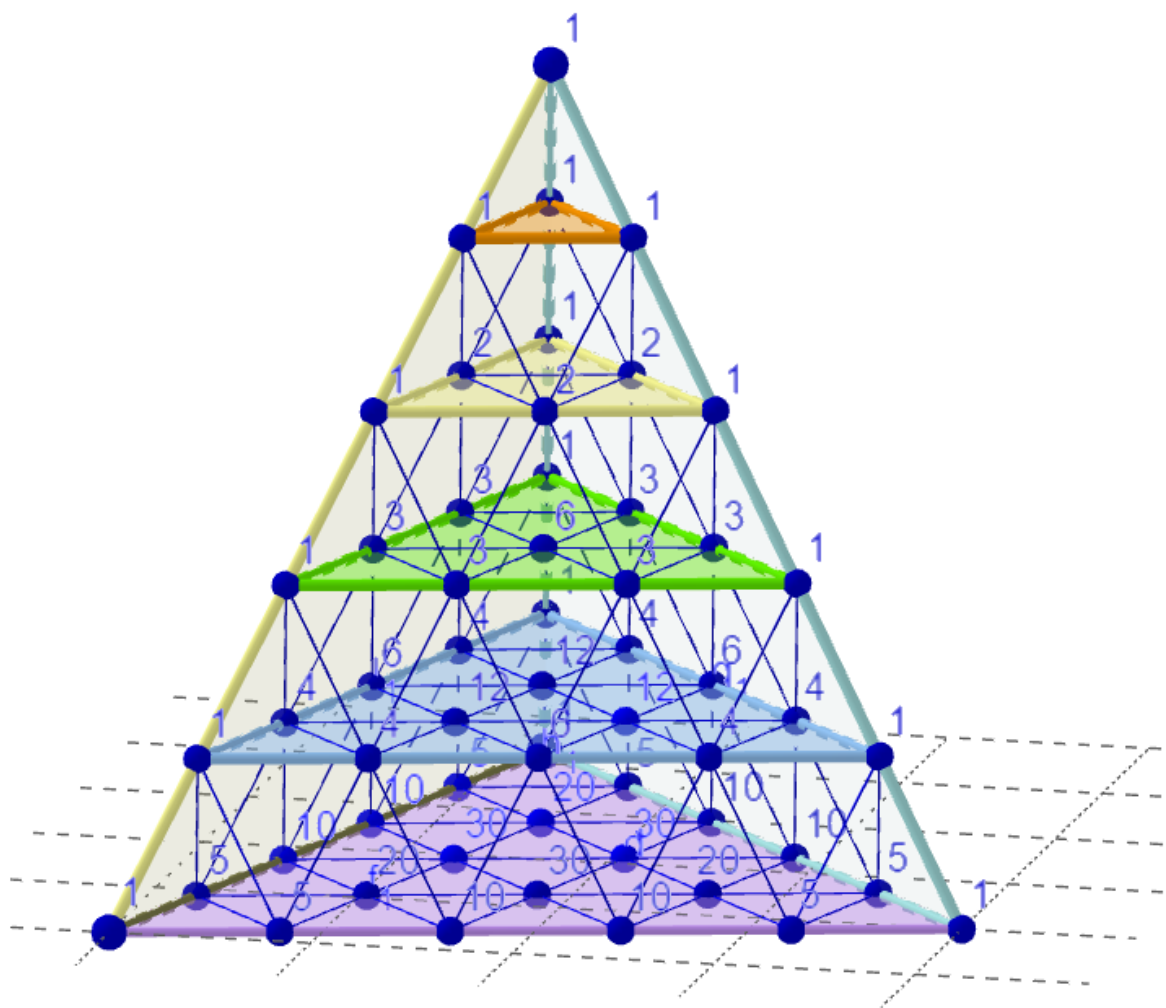


Figura 5.10: *O Tetraedro Aritmético*, com os coeficientes de  $(a + b + c)^n$ , até  $n = 5$  - segunda visão

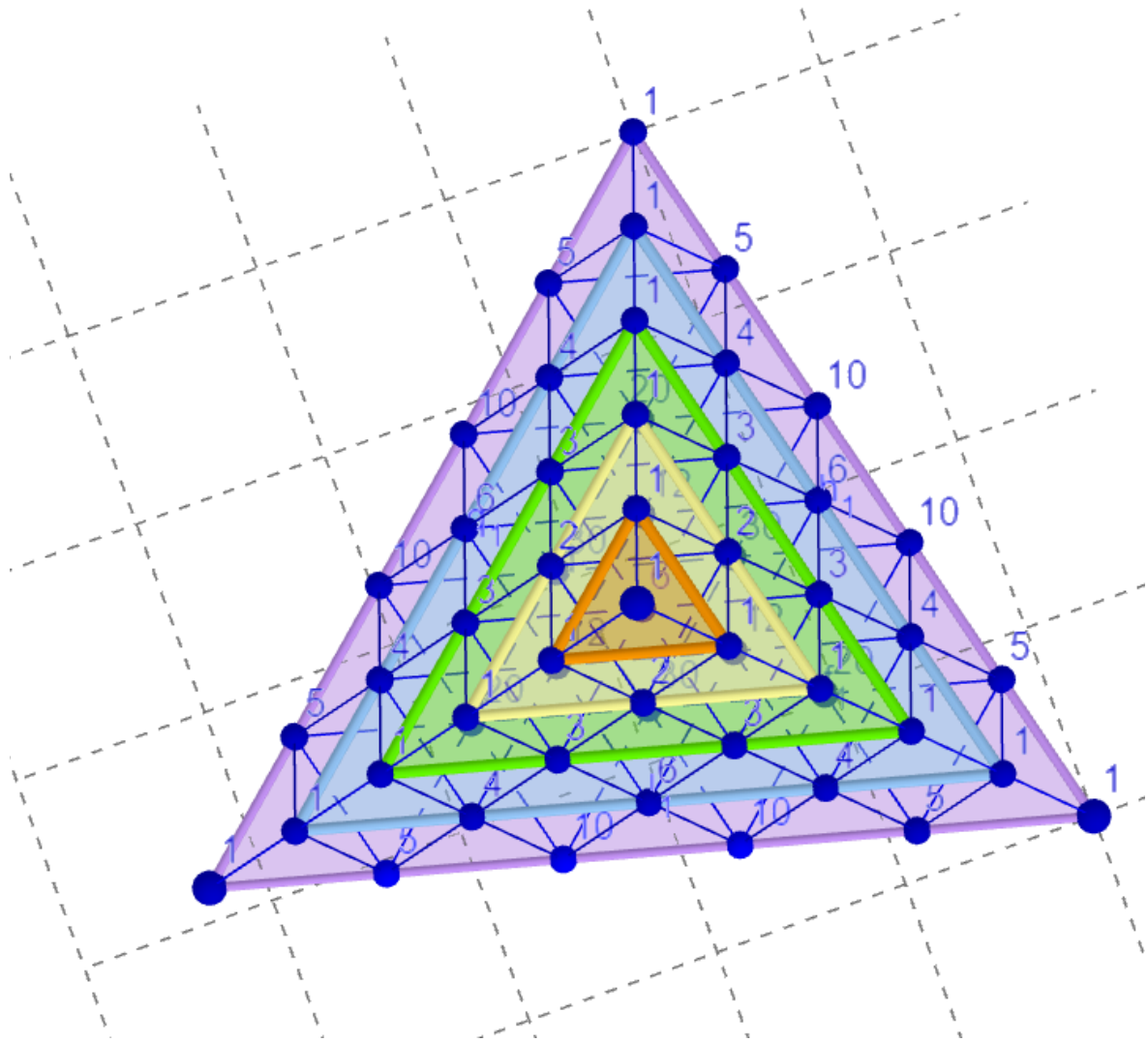


Figura 5.11: O Tetraedro Aritmético, com os coeficientes de  $(a + b + c)^n$ , até  $n = 5$  - terceira visão

## 5.2 Expansão Tetranomial

Chamamos *expansão tetranomial* à expansão de potências de uma soma de quatro termos algébricos, ou seja, potências do tipo  $(a + b + c + d)^n$ .

Apresentaremos a seguir um possível padrão geométrico e aritmético para a expansão tetranomial análoga aos padrões das linhas do triângulo aritmético e das camadas triangulares do tetraedro aritmético, que são os padrões obtidos para as expansões binomiais e trinomiais, respectivamente.

Para chegarmos ao resultado deste padrão geométrico, podemos seguir uma sequência análoga de passos, como fizemos anteriormente para as expansões trinomiais. Porém, a fim de apresentarmos mais diretamente o resultado, apresentaremos a seguir os passos aplicados para  $n = 5$ , ou seja, na expansão da potência  $(a + b + c + d)^5$ :

1. Primeiramente, escrevemos a expansão  $(a + b + c + d)^5$  utilizando o teorema multinomial ou realizando a propriedade distributiva nos termos.
2. Em seguida buscamos uma disposição para os quatro pontos principais que serão os vértices correspondentes às potências  $1a^5$ ,  $1b^5$ ,  $1c^5$  e  $1d^5$ , de modo que haja um caminho retilíneo de todo vértice a todo vértice. Essa costuma ser a parte mais difícil, mas já aprendemos com os trinômios a resolver essa questão. A figura que melhor se encaixa diante dessas exigências é um *tetraedro*.
3. Finalmente, posicionamos todos os termos de modo que os expoentes de  $a$  fiquem em ordem decrescente. A mesma regra vale para as potências de  $b$ ,  $c$  e  $d$ .

Uma disposição das parcelas que satisfaz essas regras de organização é apresentada na Figura 5.12. Note que omitimos os termos algébricos para melhor visualização do principal resultado, que é a configuração dos coeficientes da expansão.

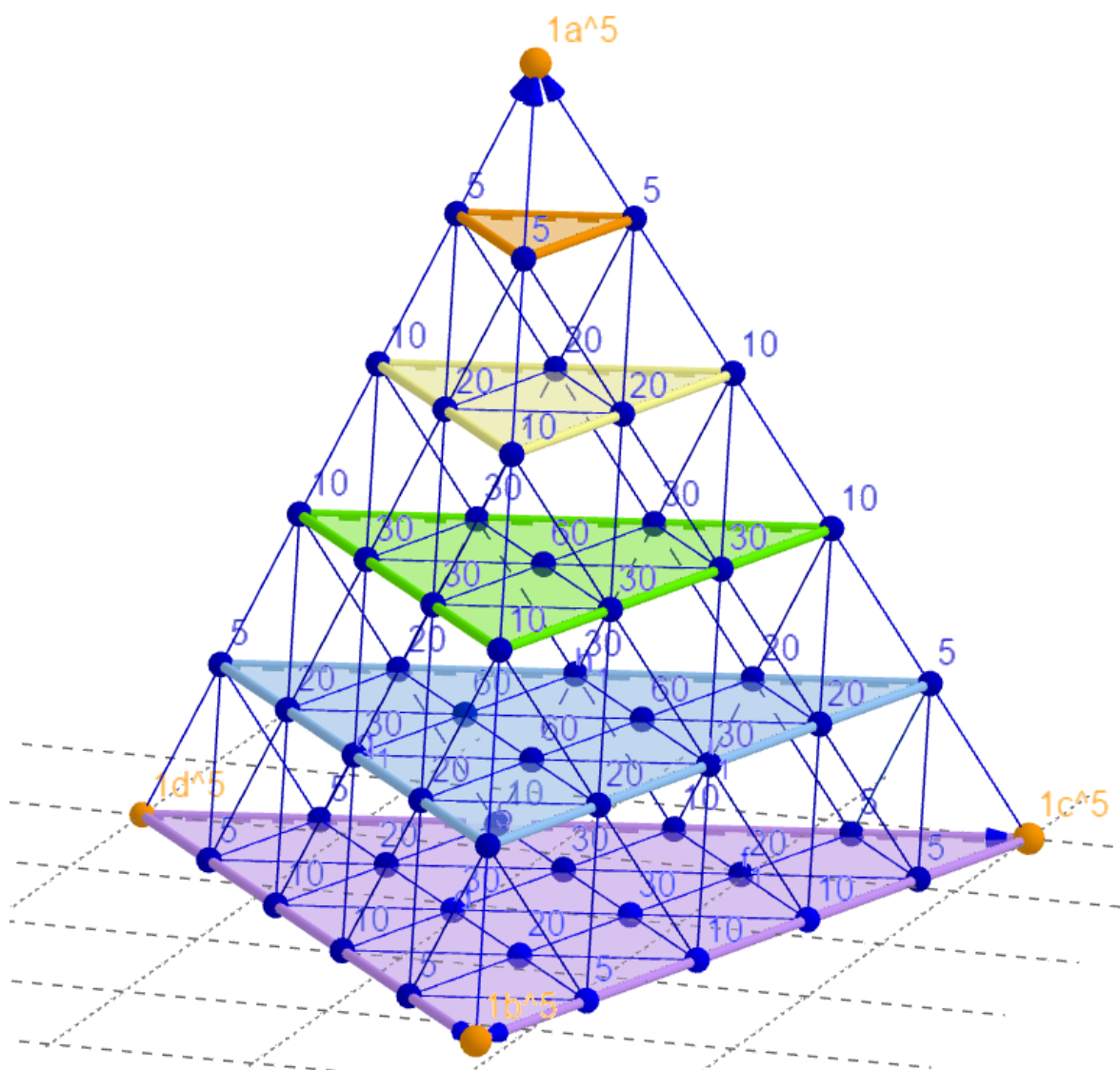


Figura 5.12: Tetraedro com os coeficientes de  $(a + b + c + d)^5$

Note na Figura 5.12 que o tetraedro apresenta coeficientes que são diferentes porém não muito estranhos aos nossos olhos. Observando por algum tempo a relação desse tetraedro (que representa a expansão de uma única potência  $(a + b + c + d)^5$ ) com o tetraedro aritmético (que é uma disposição de agrupamento de todos os resultados para as expansões do trinômio  $(a + b + c)^n$ ), notamos que o novo tetraedro segue o princípio multiplicativo numa outra dimensão. Ou seja, para obtermos o tetraedro referente a  $(a + b + c + d)^5$ , basta:

1. Desenharmos o tetraedro aritmético dos trinômios até a camada triangular referente ao expoente 5;
2. Escrever numa linha vertical (ou seja, na direção ortogonal aos planos das camadas triangulares) os coeficientes correspondentes à linha do expoente 5 do triângulo de Pascal tradicional;

3. Multiplicar cada termo de uma camada triangular pelo respectivo número da linha vertical.

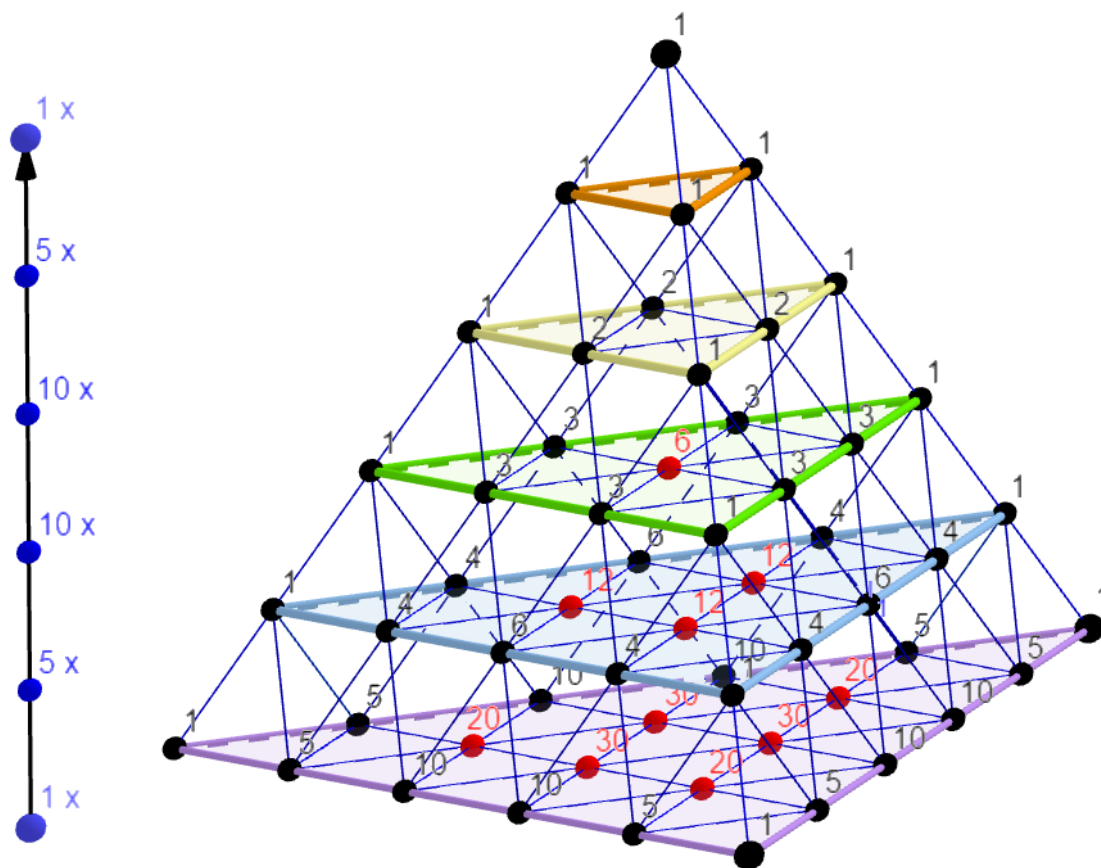


Figura 5.13: Tetraedro: princípio multiplicativo

A Figura 5.13 exemplifica os três passos descritos acima.

Ao realizarmos o princípio multiplicativo na Figura 5.13 obteremos a Figura 5.12.

### 5.3 Passos futuros para novas dimensões

Notamos que cada vez que aumentamos uma parcela dentro dos parênteses de cada potência, aumentamos em 1 dimensão a figura que comporta os termos da expansão. A pergunta que nos vem à mente, logo que percebemos essa possibilidade é: *Como seria o equivalente ao tetraedro na 4ª dimensão?*. Há um nome para tal figura: “*Hipertetraedro*”; na verdade se trata de uma figura do conjunto dos *Polytopes*; para definições, ver (COXETER, 1973). Ele tem 5 vértices para comportar, por exemplo, os termos  $1a^5$ ,  $1b^5$ ,  $1c^5$ ,  $1d^5$  e  $1e^5$  da expansão de  $(a + b + c + d + e)^5$ . O interessante é que a álgebra da expansão está nos levando para as geometrias das figuras por assim dizer!

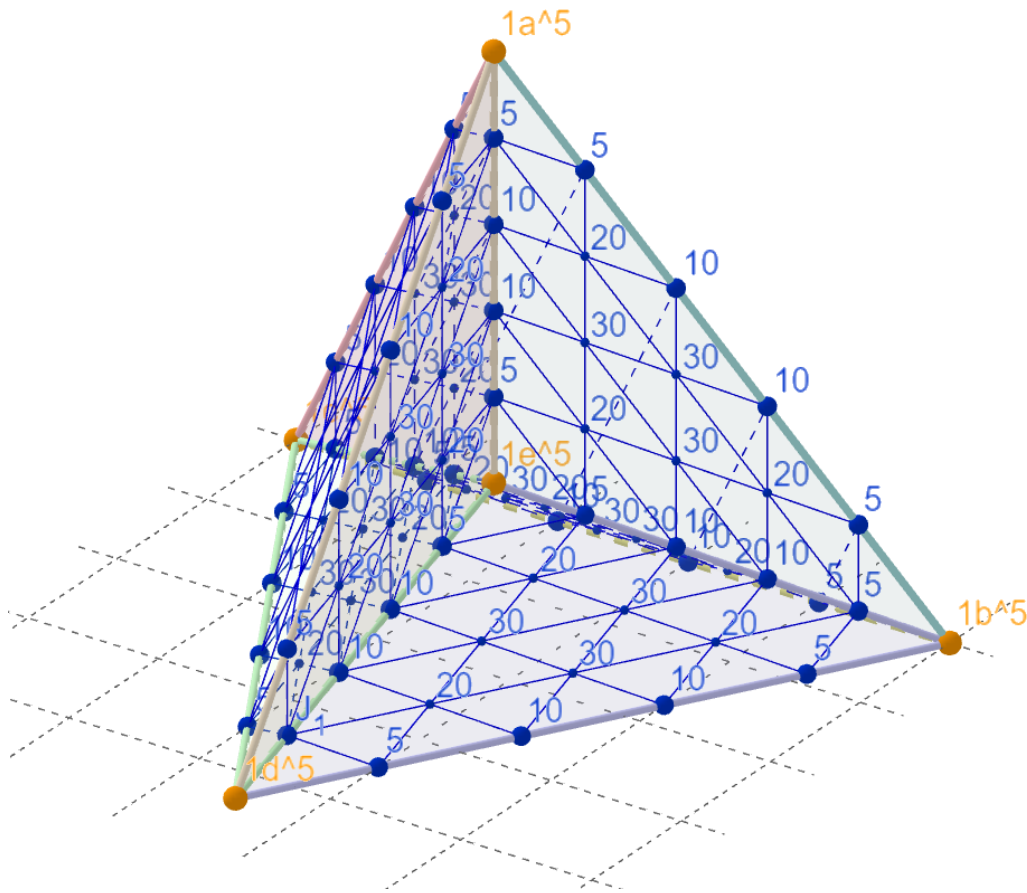


Figura 5.14: Uma representação parcial do Hipertetraedro da expansão de  $(a + b + c + d + e)^5$ .

Vários coeficientes foram omitidos para permitir a visualização em torno do vértice de  $1e^5$ . Esse vértice parece estar em uma região “interna” da figura, mas é importante lembrar que todos os 5 vértices são “externos”.

Algumas observações interessantes sobre o Hipertetraedro obtido:

1. São 5 vértices. Nenhum deles está “dentro” da figura.
2. Quantas arestas?

$$\text{R: } \binom{5}{2} = 10.$$

3. Quantas faces (planas) temos?

$$\text{R: } \binom{5}{3} = 10.$$

4. Quantos sólidos tetraédricos?

$$\text{R: } \binom{5}{4} = 5.$$

5. Temos exatamente 1 Hipertetraedro.

6. A aparição de (1) 5 10 10 5 1 num outro aspecto do nosso objeto de estudo é no mínimo surpreendente. Podemos em outro momento apresentar alguns apontamentos interessantes sobre essa questão que nos levaram a uma espécie de Relação de Euler generalizada.

Alguns questionamentos:

- Onde está o termo central ( $60abcde$ )?

Resposta: Sabemos onde esse termo *não* está.

- Não está em nenhum vértice, pois cada vértice apresenta apenas  $1a^5$  ou  $1b^5$  ou  $1c^5$  ou  $1d^5$  ou  $1e^5$ .
- Não está em nenhuma aresta. Cada aresta (sem considerar os vértices) apresenta somente termos que tenham duas e somente duas letras multiplicadas.
- Não está em nenhuma face. Cada face (sem considerar os vértices e as arestas) apresenta somente termos que tenham três e somente três letras multiplicadas.
- Não está em nenhum dos 5 tetraedros. Cada tetraedro (sem considerar os vértices, as arestas e as faces) apresenta somente termos que tenham três e somente três letras multiplicadas.
- Os padrões para as dimensões menores (1D, 2D e 3D) nos levam a intuir que  $60abcde$  é o ponto de intersecção de 5 retas do espaço 4D que não estão contidas em um mesmo espaço 3D. Como isso funciona ou como pode ser interpretado matematicamente? Para estudarmos uma Geometria Euclidiana com 4 dimensões teríamos que redigir com muita precisão novos *Postulados* ou *Axiomas*, assim como da Geometria Plana (2D) para a Geometria Espacial (3D) foram necessários novos postulados ou axiomas para Euclides e todos os autores e pesquisadores da Geometria Euclidiana.
- Um caminho para tentarmos responder a essa questão é o estudo da Geometria em 4D. Precisamos de novos Postulados que funcionem em conjunto com os postulados da Geometria Euclidiana 3D (em 3 dimensões).

## 6 Atividades para sala de aula

Neste capítulo apresentaremos três atividades para a sala de aula do Ensino Médio. A primeira atividade está relacionada com a identificação da Relação de Stifel no Triângulo de Pascal. A segunda atividade, refere-se à observação dos “números triangulares”, o que são e qual a sua relação com o triângulo de Pascal. Na terceira atividade apresentamos uma extensão da segunda atividade, ou seja, uma atividade para os “números tetraédricos”.

### 6.1 Atividade 1 - O Triângulo de Pascal e a Relação de Stifel

O objetivo da atividade é apresentar aos alunos a propriedade de mais fácil visualização no Triângulo de Pascal: a Relação de Stifel, ou seja “somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela”. Para sermos claros, “logo abaixo da última parcela” só faz sentido no caso de o Triângulo de Pascal estar desenhado na forma de um triângulo retângulo.

Primeiramente, será apresentado ao aluno a Figura 2.1 que traz o triângulo de Pascal e, ainda que não seja apresentada formalmente a Relação de Stifel, a aplicação da regra da soma será ensinada pelo professor. É conveniente o professor deixar os rigores algébricos (demonstrações inclusive) para outra oportunidade. O foco nesse momento é conquistar a atenção e a curiosidade dos alunos.

Em seguida o professor apresentará aos alunos os Números Binomiais, ou seja, mostrará que cada número que compõe o Triângulo de Pascal é exatamente a quantidade de combinações de  $n$  objetos tomados em grupos de  $p$  objetos, dada pelo número

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Assim, a Figura 2.1 pode ser escrita, usando números binomiais, na forma:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Na sequência, o professor aponta para os alunos a Relação de Stifel nesse novo Triângulo de Pascal, dessa vez com os números binomiais. Basta selecionar dois ou três exemplos (como os que apontamos a seguir) e escrevê-los à parte para termos a Relação reescrita fora da figura. Os alunos gostam especialmente dessa explicação porque é mais visual e eles lembram com mais facilidade. Relações algébricas em geral têm menos apelo para a memória dos alunos.

“Quanto é

$$\binom{2}{1} + \binom{2}{2} ?”$$

Mostre a resposta no Triângulo de Pascal. Como encontrar cada termo e depois como encontrar a resposta. Então escreva a resposta:

$$\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$$

Mais um exemplo:

$$\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$$

A partir deste ponto apresentamos aos alunos as seguintes atividades:

1. Qual a Relação de Stifel para obtermos o número binomial  $\binom{4}{2}$ ? Resposta:

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

2. Quais números binomiais são usados na Relação de Stifel para obtermos o número  $\binom{35}{16}$ ? Resposta:  $\binom{34}{15}$  e  $\binom{34}{16}$ .

3. Determine, por Stifel, o resultado de  $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ . Resposta:  $\binom{n}{p}$ .

## 6.2 Atividade 2 - Os Números Triangulares

O objetivo desta atividade é apresentar aos alunos os números triangulares e identificá-los no Triângulo de Pascal. Além disso, a atividade permite observar padrões entre os números naturais e os números triangulares e demonstrar a relação entre a soma

$1 + 2 + 3 + \dots + n$  e o número binomial  $\binom{n+1}{2}$ .

Primeiramente, o professor deve apresentar aos alunos a tabela a seguir. A coluna da direita é preenchida com os números que identificam as quantidades de bolas na coluna da esquerda. Aos números que formam a sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... chamamos *números triangulares*.

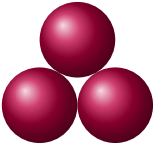
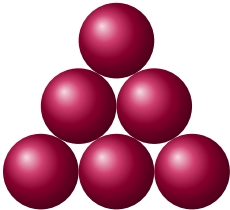
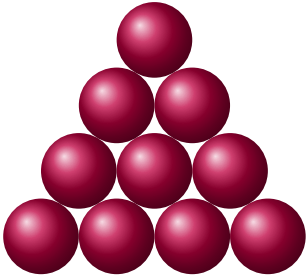
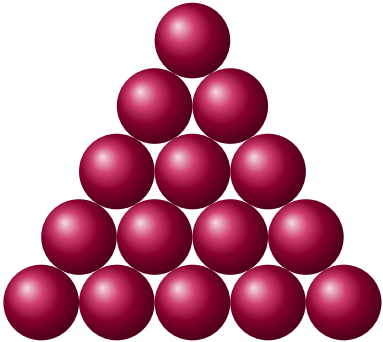
| <i>Bolas em formação triangular</i>                                                 | <i>Quantidade de bolas</i> |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
|    | 1                          |
|    | 3                          |
|    | 6                          |
|   | 10                         |
|  | 15                         |

Figura 6.1: Os Números Triangulares

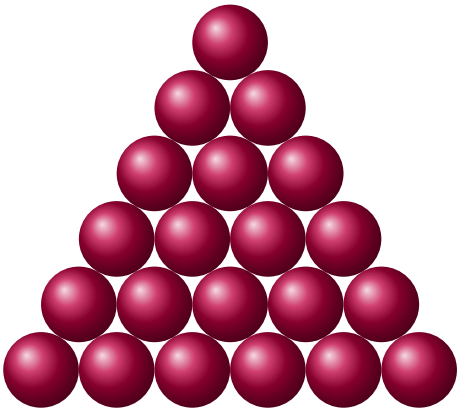
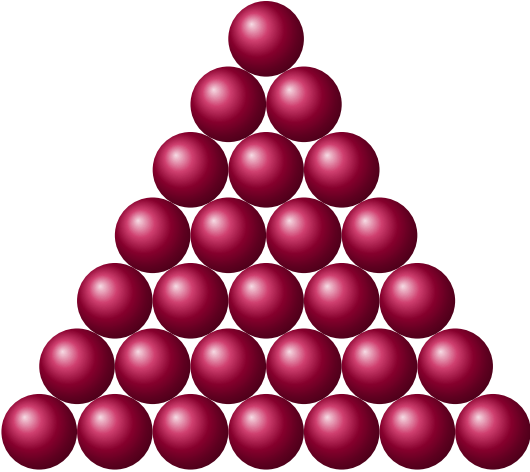
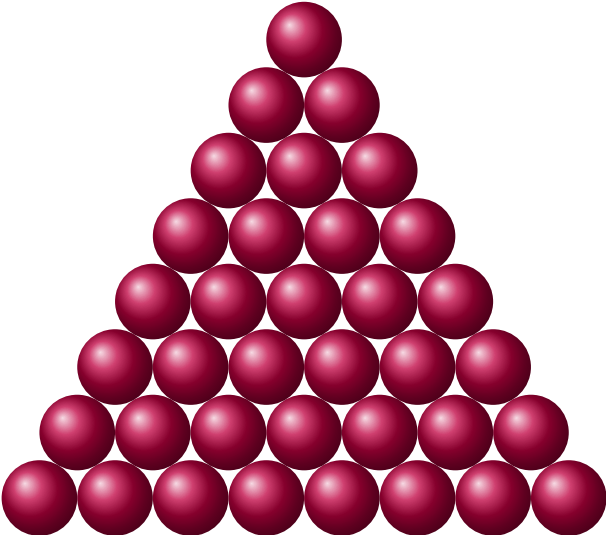
| Bolas em formação triangular                                                        | Quantidade de bolas |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
|    | 21                  |
|   | 28                  |
|  | 36                  |

Figura 6.2: Os Números Triangulares

É possível, olhando para a tabela acima, que o professor mostre aos alunos que o  $n$ -ésimo número triangular pode ser visto como o número de pontos de um triângulo equilátero de lado  $n$ . Por exemplo, o terceiro número triangular (o número 6) é visto como um triângulo com lados formados por três pontos. E ainda, o sétimo número triangular (o número 28) é visto como um triângulo com lados formados por sete pontos.

Em seguida o professor observa, junto aos alunos, as posições que os números triangulares ocupam no Triângulo de Pascal apresentando a Figura 6.3.

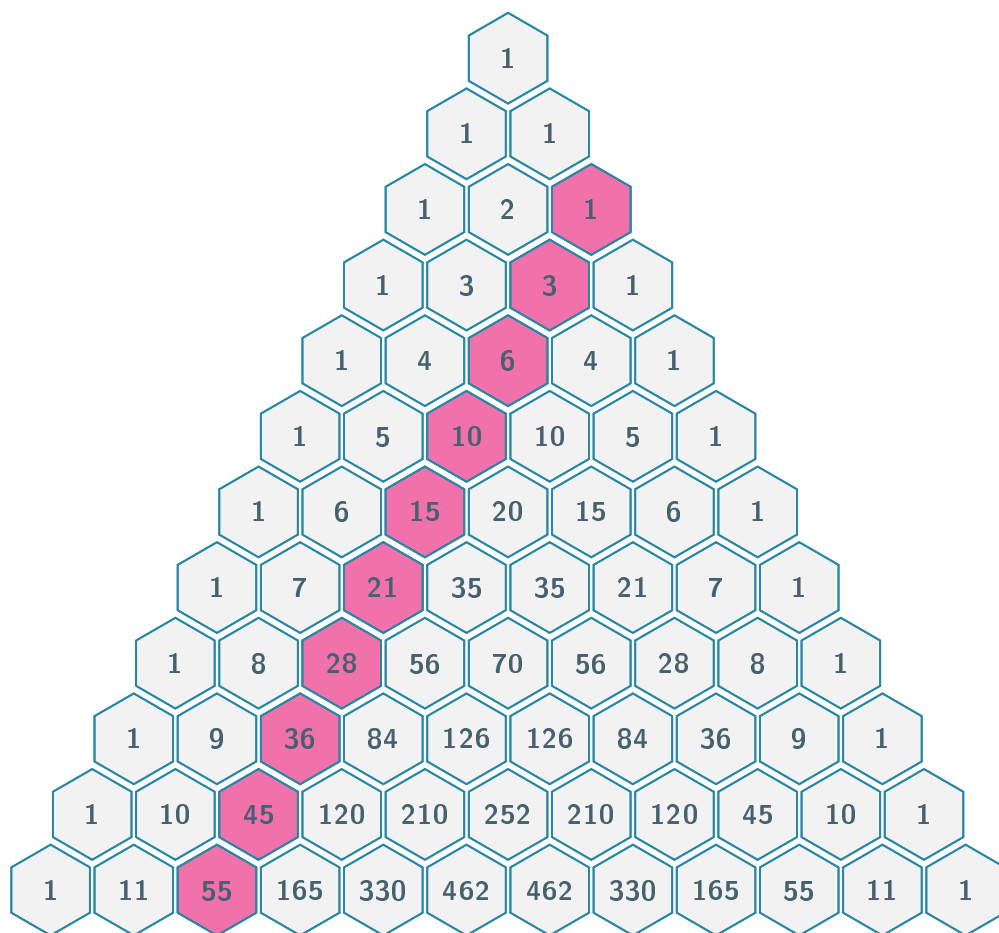


Figura 6.3: Números triangulares no triângulo de Pascal

Em seguida o professor levará os alunos a observarem que os números triangulares são as somas parciais de sequências de números naturais, ou a soma de uma Progressão Aritmética de razão 1, com primeiro número igual a 1, conforme abaixo:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

...

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$$

A pergunta a ser feita aos alunos é: *qual o valor para a soma  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ? Ou seja, qual o valor para a soma de  $n$  termos de uma Progressão Aritmética de razão 1 com o primeiro elemento igual a 1?*

A resposta desta pergunta pode ser obtida usando o método que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) usou entre os 8 e 10 anos de idade. Segundo Hefez (2009), Gauss usou este método, ainda quando garoto, para somar todos os números naturais de 1 até 100.

O método consiste em escrever a soma com suas parcelas em ordem crescente e, depois, reescrevê-la com suas parcelas em ordem decrescente. Em seguida somam-se os elementos na ordem em que aparecem:

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & & +2 & & +3 & & +\dots & + (n-2) & + (n-1) & +n \\ S_n & = & n & & + (n-1) & & + (n-2) & & +\dots & +3 & +2 & +1 \\ 2S_n & = & (n+1) & & + (n+1) & & + (n+1) & & +\dots & + (n+1) & + (n+1) & + (n+1) \end{array}$$

Logo,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}. \quad (6.1)$$

Na sequência, usando a Figura 6.4, o professor observa, junto aos alunos, que os números naturais  $1, 2, 3, 4, \dots, n$  são apresentados na fila destacada em azul, e a respectiva soma aparece em amarelo. Assim, a seguinte pergunta é feita para os alunos:

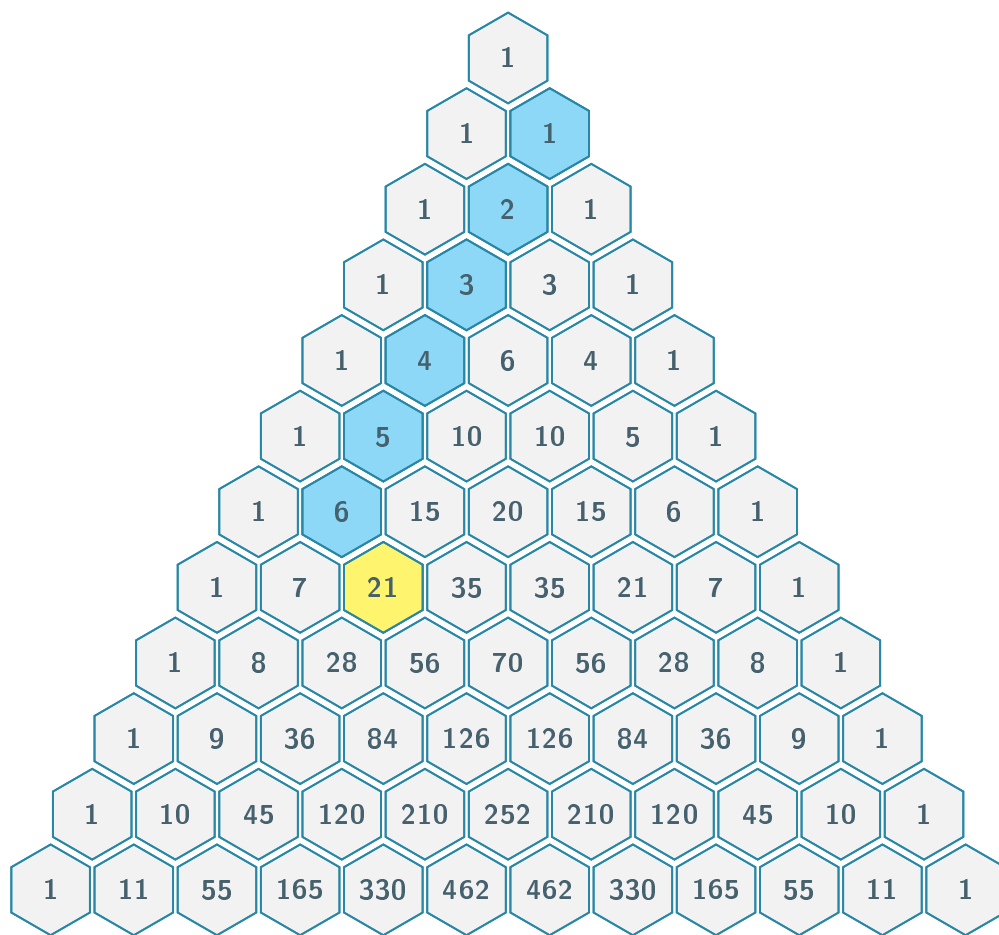


Figura 6.4: A soma  $1 + 2 + \dots + n$  no triângulo de Pascal

1. Como são representados, usando números binomiais, os números da sequência em azul na Figura 6.4?
2. Como é representado, em número binomial o número destacado em amarelo na Figura 6.4 que representa a soma?

O professor poderá contribuir com a construção da resposta a estas perguntas fazendo os alunos observarem, por exemplo, as seguintes relações:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} = \binom{5}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \binom{5}{1} = \binom{6}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \binom{5}{1} + \binom{6}{1} = \binom{7}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Observando que esse processo se repete, o professor pode perguntar: *Observando esses números no Triângulo de Pascal, como fica o caso geral? Ou seja,  $1+2+3+\dots+n$ ?* A resposta a ser apresentada é:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \dots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} \quad (6.2)$$

Calculando o número do lado direito da equação (6.2) temos

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{2(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Comparando com a equação (6.1) o professor concluirá, juntamente com os alunos, que os números da forma  $\frac{n(n+1)}{2}$  são os chamados *números triangulares*.

### 6.3 Atividade 3 - Números Tetraédricos

Na sequência da segunda atividade, onde exploramos os números triangulares, vamos abordar os números tetraédricos.

Primeiramente, o professor relembrará aos alunos a posição dos números triangulares no triângulo de Pascal (veja a fila destacada em azul na Figura 6.5).

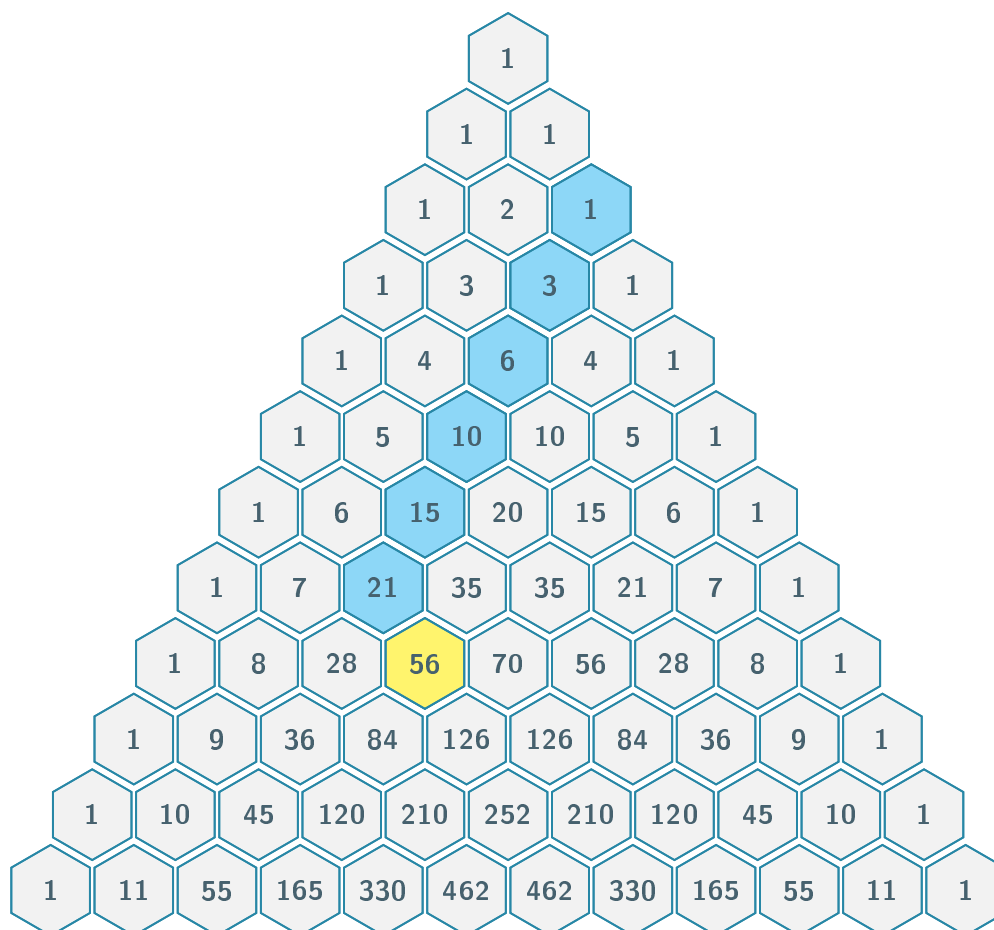


Figura 6.5: Números tetraédricos no triângulo de Pascal

Analogamente ao que foi feito para obterem os números triangulares, os alunos deverão concluir que os números tetraédricos estão na linha abaixo da linha que representa os números triangulares e, por exemplo, para obterem o sexto número tetraédrico (o número 56) devem somar os seis primeiros números triangulares (ou seja,  $1+3+6+10+15+21 = 56$ ).

O professor deverá indicar para o aluno que os números tetraédricos são obtidos “empilhando” camadas de esferas em disposições triangulares. Esse empilhamento formará estruturas que nos remetem aos tetraedros regulares.

Por exemplo, na Figura 6.6 temos o empilhamento dos seis primeiros números triangulares resultando no número tetraédrico 56.

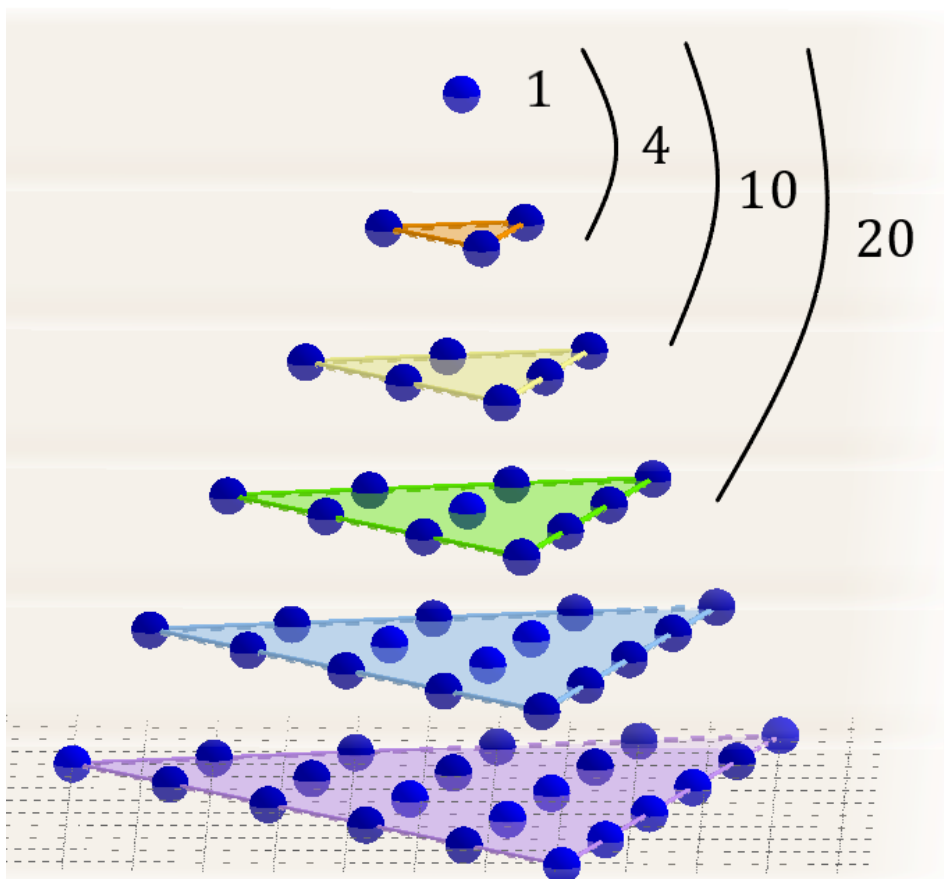


Figura 6.6: A soma dos números triangulares resulta em um número tetraédrico:  $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$

Na sequência, professor apresentará as seguintes somas, remetendo ao empilhamento das esferas em formatos triangulares, que representam os números triangulares.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 6 = 10$$

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

...

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + a_k = ?$$

A pergunta natural é como procedemos para somar os  $k$  primeiros números triangulares. A demonstração dessa expressão é relativamente mais demorada e elaborada pois trata-se da soma de uma *Progressão Aritmética de segunda ordem*, a qual não faz parte dos conteúdos curriculares do Ensino Médio. Essa demonstração está disponível em Carvalho et al (2014).

$$S_k = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \cdots + a_k.$$

$$S_k = \frac{1k^3 + 3k^2 + 2k}{6}.$$

Ou ainda,

$$S_k = \frac{(k+2)(k+1)k}{6}.$$

O interessante é que essa expressão é muito mais simples de ser encontrada através do Triângulo de Pascal. Notemos que a soma dos números triangulares e o respectivo resultado encontrado no Triângulo de Pascal são dados por:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} \quad (6.3)$$

Ou seja,

$$S_k = \frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} = \frac{(n+1)n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{3!\cancel{(n-2)!}} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

Como  $k$  começa a partir do 1 e  $n$  começa a partir do 2, podemos fazer a substituição  $n = k + 1$ , obtendo assim a expressão:

$$S_k = \frac{((k+1)+1)(k+1)((k+1)-1)}{6},$$

que nos leva a

$$S_k = \frac{(k+2)(k+1)k}{6}.$$

Com isto, o professor poderá concluir com os alunos que os números tetraédricos são da forma  $\frac{(k+2)(k+1)k}{6}$ .

Naturalmente, do ponto de vista mais rigoroso, precisaríamos demonstrar que a relação

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

é verdadeira. Porém, a ideia é motivar os alunos com as atividades para que eles se envolvam com o assunto.

# Referências

- [1] BERNOULLI, Jakob. **Ars Conjectandi**. Basileia, (Suíça). 1713.
- [2] BICUDO, Irineu. **Os elementos de Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo**. São Paulo, SP: Editora UNESP, 2009.
- [3] CARVALHO, Paulo César Pinto; MORGADO, Augusto César de Oliveira. **Matemática Discreta: coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [4] COOLIDGE, Julian L. The story of the binomial theorem. **The American Mathematical Monthly**, v. 56, n. 3, p. 147-157, 1949.
- [5] COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira; CYMBALISTA, Melvin. **Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos**. Edgard Blücher, 2006.
- [6] COXETER, H. S. M. **Regular Polytopes**. First edition at Dover Publications, USA, New York, 1973.
- [7] EDWARDS, Anthony William Fairbank. **Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea**. First edition: Oxford University Press, 1987; (2019: Dover edition).
- [8] EÜLER, Leonhard; LAGRANGE, Joseph-Louis; BERNOULLI III, Johann. **Elements of Algebra**. CreateSpace, Inc. and Kindle Direct Publishing, Divisions of Amazon.com, 2015, based on the 1828 edition of John Hewlett's 1822 translation from german to english.
- [9] GREEN, Thomas Marshall; HAMBERG, Charles L. **Pascal's Triangle**. Second edition. Right Angle, USA, 2012.
- [10] GREEN, Thomas Marshall. **The simplex, duplex and Pascal's triangles: relatives of Pascal's triangle, with excursions into hyperspace**. First edition. Right Angle, USA, 2015.
- [11] HEFEZ, Abramo. **Indução matemática**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.
- [12] HWANG, Leng-Cheng. A simple proof of the binomial theorem using differential calculus. **The American Statistician**, v. 63, n. 1, p. 43-44, 2009.
- [13] KATARIA, Kuldeep Kumar. A Probabilistic Proof of the Multinomial Theorem. **The American Mathematical Monthly**, vol. 123, n.1, pág. 94-96, 2016.

- 
- [14] KNUTH, Donald E.; GRAHAM, Ronald L.; PATASHNIK, Oren. **Concrete mathematics: a foundation for computer science**. 2nd edition, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1994.
  - [15] MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Instituto de Matemática pura e aplicada, 1991.
  - [16] PASCAL, Blaise. **Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière**. A Paris, Chez Guillaume Dresprez, Rue Saint Iacques, à Saint Prosper. 1665.
  - [17] ROSALSKY, Andrew. A simple and probabilistic proof of the binomial theorem. **The American Statistician**, v. 61, n. 2, p. 161-162, 2007.
  - [18] ROSS, Sheldon. **A first course in probability**. Pearson, 2014.
  - [19] RUDOLFFS, Christoffs; STIFEL, Michael. **Die Coss Christoffs Rudolffs, bearbeitet von Michael Stifel**, 1553.
  - [20] SMITH, David Eugene. **History of Mathematics General survey of the history of elementary mathematics**. v.1, Dover Publications. New York, NY, USA. 1958.
  - [21] SMITH, David Eugene. **History of Mathematics. Special topics of the history of elementary mathematics**. v.2, Dover Publications. New York, NY, USA. 1958.
  - [22] STRUIK, D. J. **A Source Book in Mathematics, 1200 - 1800**. Editado por D. J. Struik, Massachusetts Institute of Technology (MIT). Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.
  - [23] Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob\\_Bernoulli#/media/File:Jakob\\_Bernoulli.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli#/media/File:Jakob_Bernoulli.jpg). Acesso em 02/03/2020.
  - [24] Mathematical Association of America. <https://www.maa.org/book/export/html/116876>. Acesso em 01/03/2020.
  - [25] Mathematical Association of America. <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-blaise-pascals-collected-works>. Acesso em 02/03/2020.
  - [26] School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland. <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stifel.html>. Acesso em 02/03/2020.