UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

SETOR TRIGONAL: CONTRIBUIÇÕES DE UMA ATIVIDADE DIDÁTICA NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA

MICHELE DE SOUZA MORAES

BAURU
2017

MICHELE DE SOUZA MORAES

SETOR TRIGONAL: CONTRIBUIÇÕES DE UMA ATIVIDADE DIDÁTICA NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre à Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Faculdade de Ciências, Campus de Bauru – Programa de Pós-graduação em Docência para a Educação Básica, sob orientação da Profª. Drª. Marisa da Silva Dias.

BAURU

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Moraes, Michele de Souza.

Setor trigonal : contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática / Michele de Souza Moraes, 2017
113 f.

Orientadora: Marisa da Silva Dias

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2017

1. História da matemática. 2. Ensino de matemática 3. Setor trigonal. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MICHELE DE SOUZA MORAES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 20 dias do mês de março do ano de 2017, às 16:00 horas, no(a) Sala 2 da Pós-graduação da Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. MARISA DA SILVA DIAS - Orientador(a) do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Prof. Dr. FUMIKAZU SAITO do(a) PUC / São Paulo (SP), Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA do(a) Educação / UNESP/ Campus de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MICHELE DE SOUZA MORAES, intitulada **O SETOR TRIGONAL: CONTRIBUIÇÕES DE UMA ATIVIDADE DIDÁTICA NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final:_APROVADA___ . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Profa. Dra. MARISA DA SILVA DIAS

Prof. Dr. FUMIKAZU SAITO

Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA

SETOR TRIGONAL: CONTRIBUIÇÕES DE UMA ATIVIDADE DIDÁTICA NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA

Este trabalho é dedicado ao Edvaldo, com amor e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho. E a minha mãe Arenice por tudo que fez por mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida.

Ao meu marido Edvaldo, seu amor me fortalece. Muito obrigada por sempre estar ao meu lado, abraçando-me em momentos difíceis.

A minha mãe Arenice Maria de Souza, que sempre fez o possível para que eu pudesse me dedicar aos estudos, devo tudo a você.

Ao meu irmão que sempre me apoia.

À Marisa da Silva Dias, pela confiança, paciência e pelo aprendizado, com suas contribuições para minha carreia docente.

Aos professores Nelson Antônio Pirola e Fumikazu Saito pelas contribuições para a pesquisa.

A Michelle Di Flora, Josiane Faxina, Larissa David, Priscila Zioto, Patrícia Gonçalves e Viviane Sotana, pela amizade descontrolada construída neste percurso, e aos demais amigos do Mestrado Profissional, por todos os momentos compartilhados.

A Suzana Maria e Cybelle Amaral pela ajuda constante.

Ao Diego Nunes, Geanderson Tramontini, Ligia Serrano, Maria Gabriela, Elaine Lopes por toda ajuda na pesquisa e companheirismo.

Aos alunos da 1ª e 2ª série do ensino médio que acolheram e contribuíram para a pesquisa.

As amigas queridas, de hoje e sempre Amanda Verardo, Ana Dorotéia, Taila Paulina e Francielle Paini, pela compreensão e por sempre oferecerem ajuda e o ombro amigo.

MORAES, M. de S. **Setor Trigonal: Contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática.** 2017. 113f. Dissertação (Mestre em Docência para Educação Básica) – UNESP, Faculdade de Ciências, Bauru, 2017.

RESUMO

Esta dissertação foi desenvolvida a partir do estudo de um tratado intitulado *The Trigonall Sector.* A obra foi publicada por John Chatfeilde, em 1650, e mostra a descrição e o uso de um instrumento matemático chamado setor trigonal. O documento apresenta relações geométricas e trigonométricas verificadas nas propriedades dos triângulos, incluindo senos, tangentes, secantes, como também cordas e relações de proporção. O objetivo geral foi investigar o movimento do pensamento de estudantes do ensino médio na formação dos conceitos inerentes ao uso do instrumento setor trigonal e seu respectivo tratado em uma atividade didática. A pesquisa é exploratória, orientada por uma interface entre história e ensino de matemática fundamentada na relação entre o movimento do pensamento na formação de conceito e o contexto no qual os conceitos foram desenvolvidos. Realizou-se estudo sobre a história de instrumentos matemáticos, o tratado e o próprio instrumento, a partir dos quais inferem-se potencialidades didáticas que desencadearam a realização de uma atividade orientadora de ensino com estudantes do ensino médio de uma escola pública. A análise das ações dos estudantes pautou-se na perspectiva lógico-histórica e dos pensamentos empírico e teórico. Verificou-se que a atividade orientadora de ensino proporcionou um diálogo entre os conhecimentos matemáticos de uma época com os atuais, o que permitiu aos participantes mobilizar conceitos matemáticos durante a atividade e auxiliá-los na compreensão do movimento do pensamento. Dentre os resultados destaca-se a relação do simples ao complexo no que tange a representação direta de um triângulo e as elaborações conceituais necessárias quanto a aparente limitação do instrumento, e o movimento do pensamento empírico para o teórico por meio de análises das classificações dos triângulos quanto aos seus lados e ângulos. A partir desta pesquisa elaborou-se um produto final em formato de livreto contendo contribuições para o ensino dos triângulos por meio do instrumento setor trigonal e seu tratado.

Palavras-chave: História da matemática. Ensino de matemática. Setor Trigonal.

MORAES, M. de S. **Trigonal Sector: Contributions of a didactic activity in forming mathematical concepts in an interface between history and mathematics teaching.** 2017. 113f. Dissertation (Master in Teaching for Basic Education) – UNESP, Faculty of Science, Bauru, 2017.

ABSTRACT

This dissertation was developed from a study of a treatise, titled *The Trigonall Sector.* This work was published by John Chatfeilde, in 1650, and shows the description and use of a mathematical instrument called trigonal sector. The document presents geometric and trigonometric relations verified in the properties of triangles, including sines, tangents, secants, as well as strings and proportion ratios. The general objective was to investigate the thinking process of students from high school when formulating inherent concepts to the use of the trigonal sector instrument and its respective treatise in a didactic activity. The research is exploratory, oriented by an interface between history and the teaching of Mathematics, based in a relation between the thinking process in forming concepts and the context in which the concepts were developed. It was conducted a study on the history of mathematical instruments, the treatise and the instruments themself, from where it is inferred didactic potentialities which resulted in the performance of an oriented teaching activity with high school students from a public school. The analyses of students' actions were guided by a logic-historical perspective and by empirical and theoretical thinking. It was verified that this activity provided a dialogue between mathematical knowledge from a time with the present day, which allowed to the participants to mobilize mathematical concepts during the activity and assist them in the comprehension of thinking process. Among the results, it can be highlighted the relation from the simple to the complex in what regards the direct representation of a triangle and the conceptual elaboration necessary as to the apparent limitation of the instrument, and the empirical to the theoretical thinking process by the analyses of the classification of the triangles as to their sides and angles. From that research, a final product was elaborated as a booklet with contributions to the teaching of triangles by the instrument of trigonal sector and its treatise.

Key words: History of mathematics. Mathematics teaching. Trigonal sector.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A proposta de pesquisa relaciona-se com a experiência acadêmica e profissional da pesquisadora Michele, que no período de 2008 a 2011 graduou-se no curso de licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), e desenvolveu projetos de iniciação científica pelo Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) durante a graduação, o que contribuiu para que a carreira docente fosse escolhida, já que até então não havia tido uma experiência direta com o ambiente escolar (contato direto com estudantes, professores e a gestão da escola), a não ser na realização do estágio obrigatório do curso.

Ao término da graduação, iniciou a carreira docente ministrando aulas de matemática no ensino básico e deparou-se com duas situações desconfortáveis: primeiramente percebeu que a maior parte dos estudantes demonstravam desinteresse para aprender matemática (alegando ser de difícil compreensão) e também pelo fato do conteúdo curricular a ser ministrado não ser compatível com o que, de fato, os estudantes deveriam aprender na série que estavam cursando, situação essa que levou a professora a ter que retomar conteúdos das séries anteriores.

O programa de mestrado Docência para a Educação Básica tinha como requisito que o candidato estivesse ministrando aulas para poder cursá-lo, desse modo, viu a oportunidade de envolver as experiências profissionais até então vivenciadas no âmbito escolar com as acadêmicas. Cursar tal mestrado possibilitou a participação em um grupo de pesquisa.

Mediante a participação no grupo de pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática (HEEMa), é que surgiu a escolha do tema da pesquisa. O grupo propõe construir interfaces entre história, ensino e aprendizagem de matemática e explorar as potencialidades didáticas de antigos instrumentos matemáticos. As pesquisas do grupo iniciaram-se por meio de análises de documentos históricos, visto que seu uso é uma proposta para aproximar história da matemática do ensino e da aprendizagem da matemática (DIAS; SAITO, 2014). Dias e Saito (2014, p. 1228) ressaltam ainda que “tais documentos se afiguram como potencial recurso para a elaboração de propostas didáticas que contemplem a formação do conceito matemático”.

Em meio a diversos documentos históricos, o grupo optou por tratados que versam sobre a construção e o uso de instrumentos matemáticos (DIAS; SAITO, 2014).

Esta pesquisa investigou um instrumento chamado setor trigonal, cuja descrição e uso encontram-se em um tratado do século XVI, denominado *The Trigonall Sector*, descrito por John Chatfeilde, publicado em 1650. O setor trigonal é um dos instrumentos sobre os quais o grupo desenvolve pesquisas. O báculo, o quadrante num quarto de círculo e o quadrante geométrico são outros exemplos.

O estudo do tema iniciou-se pelos trabalhos realizados por Saito e Dias (2013, 2011) e posteriormente por outros membros do grupo HEEMa, como Castillo (2016), Santos (2014), Monteiro (2012) e Beo (2015). Estes últimos estudaram instrumentos matemáticos antigos propondo a interface entre história e o ensino de matemática, contemplando principalmente o contexto histórico no qual tais conceitos foram desenvolvidos. O presente trabalho aborda os dois movimentos, “o movimento do pensamento na formação de conceitos e o contexto no qual tais conceitos foram desenvolvidos” (SAITO; DIAS, 2013, p. 89), porém com ênfase para a formação de conceitos, a partir de um estudo sobre potencialidades do tratado e do instrumento para o ensino de matemática.

Por meio das pesquisas realizadas sobre os instrumentos de medida, defende-se que uma interface adequada entre a história e o ensino da matemática podem auxiliar os estudantes para um melhor entendimento na formação de conceitos, entretanto, cabe ressaltar que “embora a história da matemática seja uma mediadora para a aprendizagem da matemática, não é método de ensino, mas uma provedora de recursos que conduz à reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático”. (FURINGHETTI, 2007 apud SAITO e DIAS, 2013, p. 90).

Este trabalho busca contribuir na construção dessa interface, já que articular história e ensino “não parece ser uma tarefa simples, pois ela visa não só uma compreensão mais contextualizada dos objetos matemáticos, mas, também, uma metodologia de abordagem que viabilize uma proposta didático-pedagógica” (SAITO; DIAS 2013, p. 91).

Em alguns casos, o docente utiliza notas históricas presentes nos livros didáticos a fim de contextualizar as indagações dos estudantes (por que eu tenho que aprender esse conteúdo? Ou onde eu vou usar isso na minha vida?). Geralmente os dados apresentados são pequenos trechos, nunca aprofundados, limitando-se a informações de quem estudou determinado assunto e em que ano e local foram descobertos, ou seja, localizam no passado os precursores do que está sendo ensinado. Entretanto, essas informações não bastam para compreender como o conhecimento matemático se desenvolveu, uma vez que as informações possuem enfoque em dados históricos ou biográficos.

Por conseguinte, o estudante não consegue ter a concepção de que os conteúdos foram criados mediante uma necessidade humana de uma determinada época e cultura. Com isso, ele dificilmente compreende o sentido de aprender tal conteúdo e se ver como sujeito histórico (DIAS, 2009), herdeiro do conhecimento das gerações precedentes. Compreendemos que se professores e estudantes tivessem acesso a materiais adequados que fizeram parte da história de seus precedentes, eles compreenderiam os processos que envolveram a construção do conhecimento matemático.

A necessidade de estudo e materiais adequados gerou ao grupo a proposição de investigar uma interface que busca estabelecer um diálogo entre professores, estudantes e pesquisadores para que, por intermédio deste, eles se tornem sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem e de produção de materiais.

Mediante o exposto, surge a seguinte questão geral: que conhecimentos matemáticos emergem do estudo de um tratado e o uso de um instrumento de medida do século XVI? Sendo assim, a questão de investigação é: qual o movimento do pensamento que se pode inferir a partir de uma atividade didática desenvolvida com o uso do instrumento setor trigonal e seu respectivo tratado? Com isso, o objetivo desta pesquisa é o de investigar o movimento do pensamento de estudantes do ensino médio na formação dos conceitos inerentes ao uso do instrumento setor trigonal e seu respectivo tratado em uma atividade didática.

Tendo em vista o objetivo geral citado, optamos em apresentar três objetivos específicos, a saber:

- Analisar as potencialidades didáticas do instrumento setor trigonal no processo de ensino e aprendizagem com a finalidade de desenvolver uma atividade orientadora de ensino junto a estudantes do ensino médio;

- Desenvolver uma atividade didática com o uso do tratado e do instrumento setor trigonal, a fim de desencadear manifestações dos estudantes que permitam uma análise do movimento do pensamento na formação dos conceitos;

- Elaborar um livreto com base na atividade didática desenvolvida com propostas para o ensino dos triângulos na educação básica.

Utilizamos a abordagem metodológica qualitativa para a realização da pesquisa, já que esta possibilita analisar o movimento do conceito a partir das manifestações dos sujeitos.

A pesquisa tem como embasamento teórico os estudos de Leontiev, Davydov, Vygotsky, Kopnin, entre outros, os quais versam na perspectiva histórico-cultural e o movimento lógico-histórico, que visam o desenvolvimento do pensamento teórico, formador de conceitos teóricos.

Apresenta-se um levantamento de pesquisas que se inserem no estudo entre ensino e história da matemática a partir do estudo de instrumentos matemáticos, principalmente do século XVI, a fim de compreender o contexto histórico em que o tratado do setor trigonal foi produzido.

No tópico sobre o instrumento setor trigonal e suas potencialidades, apresentam-se a descrição e o uso do instrumento, assim como reflexões sobre as potencialidades didáticas para o ensino de matemática que subsidiam a organização da atividade didática.

Logo, a atividade didática desenvolvida com estudantes tem por base a atividade orientadora de ensino (AOE), (MOURA, 2010, 1996), que está fundamentada na perspectiva histórico-cultural como uma possibilidade de organização da prática pedagógica que visa à apropriação de conceitos por meio de atividade (LEONTIEV, 2001).

A análise dos dados ocorre mediante o destaque de episódios da atividade didática que sintetizam o movimento do pensamento na formação dos conceitos, sendo fundamentada na perspectiva histórico-cultural, lógico-histórica e no pensamento empírico e teórico. No apêndice B, encontra-se o produto final dessa dissertação, sob a forma de um livreto.

2 TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL, MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO E O PENSAMENTO EMPÍRICO E TEÓRICO

2.1 Teoria histórico-cultural

Nesse tópico, abordaremos concepções acerca da teoria histórico-cultural, visto que pretendemos compreender a produção de conhecimento pela humanidade e como esse conhecimento é apropriado pelos indivíduos, a fim de subsidiar a elaboração da atividade didática.

A psicologia histórico-cultural tem como um de seus criadores L. S. Vygotsky (1896-1934) que apresentou em seus estudos duas ideias que serviram de base para compreendermos a teoria: as funções psicológicas dos indivíduos, as quais o autor classificou em elementares e superiores e que a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento do psiquismo. Essas premissas contribuem para a compreensão do psiquismo humano, particularmente, nesta pesquisa, do pensamento.

As funções psicológicas elementares possuem origem biológica e estão presentes nos animais, “em virtude das quais os órgãos se adaptaram às condições e às necessidades da produção” (LEONTIEV, 1978, p. 281).

Para Rego (1995, p. 44):

> A atividade dos animais é instintiva e marcada pela satisfação de suas necessidades biológicas (de alimento, autoconservação ou necessidade sexual). Ou seja, ela permanece dentro dos limites das suas relações biológicas, instintivas, com a natureza. O modo de perceber o mundo pelo animal, a forma de se relacionar com seus semelhantes e até as possibilidades de aquisição de novas atividades, são determinadas por suas características inatas.

Por isso, podemos considerar que as leis biológicas são transmitidas de geração em geração por meio da hereditariedade, ou seja, os animais não possuem a capacidade de realizar reflexões ou planejar ações. Contrapondo-se a isso, as funções psicológicas superiores mostram que “o homem é um ser de natureza social, tudo o que tem de humano nele provém da sua vida em *sociedade*, no seio da *cultura* criada pela humanidade” (LEONTIEV, 1978, p. 279, grifo do autor).

Rego ressalta que:

> [...] diferente do animal, o ser humano não se orienta somente pela impressão imediata e pela experiência anterior, pois pode abstrair fazer relações, reconhecer as causas e fazer previsões sobre os acontecimentos, e depois refletir e interpretar, tomar decisões. Nesse sentido, ele é livre e

independente das condições do momento e do espaço presentes (1995, p. 47).

Leontiev (1978, p. 285) ressalta que “as aptidões e caracteres especificamente humanos não se transmitem de modo algum por hereditariedade biológica, mas adquirem-se no decurso da vida por um processo de apropriação da cultura criada pelas gerações precedentes”. Desse modo, os conhecimentos produzidos ao longo do tempo são mediados pelas experiências em sociedade:

> [...] esta forma particular de fixação e de transmissão às gerações seguintes das aquisições da evolução deve o seu aparecimento de fato, diferentemente dos animais, dos homens terem uma atividade criadora e produtiva. É, aliás, o caso da atividade humana fundamental: *o trabalho.* (LEONTIEV, 1978, p. 283, grifo do autor)

A concepção de trabalho colocada pelo autor não está relacionada à atividade remunerada presente no sistema capitalista que conhecemos atualmente, mas sim, a tudo que o homem realiza para o desenvolvimento humano.

> Cada geração começa, portanto, a sua vida num mundo de objetos e de fenômenos criados pelas gerações precedentes. Ela apropria-se das riquezas deste mundo participando no trabalho, na produção e nas diversas formas de atividade social e desenvolvendo assim as aptidões especificamente humanas que cristalizaram, encarnaram nesse mundo. (LEONTIEV, 1978, p.284)

As contribuições realizadas pelas gerações precedentes e transmitidas às futuras gerações não terão assim um fim, já que essa última “se multiplicam e se aperfeiçoam pelo trabalho e pela luta as riquezas que lhe foram transmitidas e “passam o testemunho” do desenvolvimento da humanidade” (LEONTIEV, 1978, p. 285, grifo do autor), assim, esse processo de apropriação possui como característica “criar no homem aptidões novas, funções psíquicas novas” (LEONTIEV, 1978, p. 288).

Além disso, à medida que o indivíduo se apropria da cultura desenvolvida pela humanidade ou age:

> [...] intencionalmente sobre a natureza, visando transformá-la de modo a satisfazer suas necessidades, produzindo o que deseja e quando deseja, o homem, ao mesmo tempo que deixa sobre a natureza as marcas da

> atividade humana, também transforma a si próprio constituindo-se humano (MOURA, 2010, p. 17).

A atividade na perspectiva histórico-cultural não se confunde com ação, nem com o que se costuma nomear atividade no meio educacional, “por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo” (LEONTIEV, 2001, p. 68).

Devemos questionar como, de fato, o processo de apropriação ocorre, como as relações sociais são capazes de transmitir às gerações seguintes o conhecimento transformado pelas gerações precedentes?

Leontiev (1978, p. 290) destaca que:

> [...] a criança não está de modo algum sozinha em face do mundo que a rodeia. As suas relações com o mundo têm sempre por intermediário a relação do homem aos outros seres humanos; a sua atividade está sempre inserida na *comunicação*. A comunicação quer esta se efetue sob a sua forma exterior, inicial, de atividade em comum, quer sob a forma de comunicação verbal ou mesmo apenas mental, é a condição necessária e específica do desenvolvimento do homem na sociedade. [...] A criança, o ser humano, deve entrar em relação com os fenômenos do mundo circundante através de outros homens, isto é, num processo de comunicação com ele. Assim, a criança *aprende* a atividade adequada. Pela sua função este processo é, portanto, um processo de *educação* (grifo do autor).

Percebe-se, por meio das citações, o que Leontiev (1978) afirma sobre a influência da comunicação na relação dos seres humanos uns com os outros e sua necessidade no desenvolvimento social do homem, como também o papel da escola em mediar esse processo (comunicação), já que a forma e o conteúdo das relações sociais são transmitidos por outros homens e isso ocorre por meio da educação. “A instituição escolar participa, dessa forma, da divisão social do trabalho, devendo proporcionar aos indivíduos os elementos fundamentais para a vida em sociedade” (MOURA, 2010, p. 29).

Paro (2001, apud MOURA, 2010, p. 30) ressalta que:

> A escola fundamental reveste-se, assim, de uma dupla responsabilidade social: por um lado, é a mediação indispensável para a cidadania, ao prover, de modo sistemático e organizado, a educação que atualiza

> historicamente as novas gerações; por outro, porque não pode dar conta de todo o saber produzido historicamente, ela precisa fazer isso de modo seletivo, priorizando aquilo que é mais relevante para a formação dos cidadãos.

A escolha do que deve ser ensinado para a formação dos cidadãos é determinada por meio do currículo escolar, ou seja, existe um grupo de pessoas que seleciona, por determinados critérios, os conteúdos de sala de aula. Para Moura (2010), o que deve ser ensinado influencia na formação de um determinado grupo, sendo assim, em diferentes momentos da história, conteúdos são questionados, inseridos e retirados do currículo escolar.

De modo geral:

> [...] o movimento da história só é, portanto, possível com a transmissão, às novas gerações, das aquisições da cultura humana, isto é, com educação. Quanto mais progride a humanidade, mais rica é a prática sócio-histórica acumulada por ela, mais cresce o papel específico da educação e mais complexa é a sua tarefa (LEONTIEV, 1978, p. 291).

Diante da teoria histórico-cultural o indivíduo só torna-se humano mediante as relações sociais com o meio, ou seja, o “desenvolvimento do homem das forças e das aptidões que são evolução sócio-histórica” (LEONTIEV, 1978, p. 292).

Consideramos que essa teoria auxilia na compreensão dos processos de elaboração e desenvolvimento do conhecimento produzido pela humanidade, como é o caso dos instrumentos de medida.

2.2 O movimento lógico-histórico e o pensamento empírico e teórico

Por intermédio dos estudos realizados por Dias (2007), Kopnin (1978) e Davydov (1988), abordamos o movimento lógico-histórico e no pensamento empírico e teórico a abordagem da formação de conceitos.

Os estudos têm por princípio o materialismo histórico-dialético e sua relação com a produção de conhecimento. Davydov (1988) ressalta que a base de todo conhecimento humano é o trabalho, uma vez que os objetos da natureza sofrem transformações pelo homem conforme suas necessidades sociais, já que no processo de trabalho deve considerar as propriedades externas e internas dos objetos para transformá-los de um estado a outro. Desse modo, o materialismo histórico-dialético auxilia a apropriação de conceitos por meio do desenvolvimento lógico-histórico do objeto.

Kopnin explana o movimento lógico-histórico do seguinte modo:

> Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica. (1978, p. 183)

Desse modo, o lógico organiza o pensamento em todos os seus processos não considerando apenas o fim. Além disso, “a lógica do movimento do pensamento tem como uma de suas leis principais a ascensão do simples ao complexo” (KOPNIN, 1978, p. 184). Kopnin ressalta ainda que a “dialética materialista define o início do conhecimento e o sucessivo caminho de seu movimento” (1978, p. 184).

O histórico auxilia a compreender os processos que envolvem a produção de conhecimento, particularmente, na produção dos instrumentos matemáticos de uma época, ao passo que o lógico reflete tanto a história do objeto quanto da história do seu conhecimento.

Dias (2007, p. 47) aponta que:

> Com a abordagem lógico-histórica, pode-se ter a compreensão, por exemplo, da inexistência de verdades absolutas, concepções frequentes de estudantes em relação à matemática, gerada pelo método de ensino que aborda somente a lógica formal.

Desse modo, o estudante terá condições de compreender que a matemática não é uma ciência pronta e acabada, bem como não há uma linearidade no acontecimento de seus fatos como a lógica-formal indica. Além disso, a lógica dialética é mais ampla que a lógica formal, já que essa última se interessa pela forma linguística da expressão de uma ideia, já a lógica dialética estuda o conteúdo mental expresso na forma linguística, dando atenção ao próprio processo de aquisição do conhecimento (DIAS, 2007).

As diferenças na forma do pensamento não estão no fato de analisarmos objetos diferentes, mas o mesmo objeto é representado em diferentes formas de diversos modos, e com fim diferente, assim, cada forma exerce a sua função no movimento do pensamento no sentido de verdade objetiva (KOPNIN, 1978).

"Ao estudar as formas de pensamento, sua estrutura e função gnosiológica, a lógica há muito definiu como principais as formas: conceito, juízo e dedução" (KOPNIN, 1978, p. 188). Davydov (1988) aponta que o homem pode estruturar juízos (isto é uma pedra, esse animal tem duas patas), já que esses são base das designações verbais de representações gerais e resultados de representações diretas, além disso, na lógica formal tradicional o conceito é o abstrato expresso em palavra, caracterizando assim, o pensamento empírico.

Já a lógica dialética possui relação estreita com pensamento teórico.

> Enquanto o pensamento empírico compara, classifica, cataloga objetos e fenômenos por meio de abstrações dos seus aspectos externos, o pensamento teórico revela suas leis de movimento, no processo de análise de suas relações no sistema (DIAS, 2007, p. 50).

Como vemos, o pensamento empírico relaciona-se com os juízos expressos por representações gerais e externas. Entretanto, a partir dos juízos, é possível desenvolver raciocínios mais complexos e alcançar um pensamento teórico. Kopnin destaca que:

> O conceito é a confluência, a síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento. Ao mesmo tempo, *não se pode conceber a dedução sem os conceitos e juízos, assim como não se pode conceber o juízo sem conceitos e deduções* (1978, p. 191, grifo do autor).

O pensamento teórico é o processo das formas universais das coisas permitindo ao indivíduo realizar experimentos mentalmente (com o passar do tempo). Além disso, não opera com representações, mas sim com conceitos. Esses são formas de atividades mentais que reproduz o objeto idealizado e suas relações.

Contudo, no movimento lógico-histórico buscamos refletir não só com a história do próprio objeto, mas com a história do seu conhecimento, desse modo, consideramos que a história do objeto incorpora a história do seu conhecimento. Assim, o estudante compreenderá que a relação com a matemática não é pautada apenas na lógica formal, no modo de verdades absolutas, mas em uma lógica histórico-dialética como forma de pensamento.

Dias e Saito completam que:

> [...] ao reproduzir na mente a criação e o desenvolvimento de um conceito, o indivíduo, além de compreender sua necessidade e as aptidões humanas nele sintetizadas, elabora novos aspectos e novas relações do movimento do objeto no pensamento (2013, p.94).

Desse modo, os pressupostos do movimento lógico-histórico e pensamento empírico e teórico auxiliam na análise dos dados da pesquisa no que diz respeito a o movimento do pensamento na formação dos conceitos.

3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO NA RELAÇÃO COM OS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

3.1 História da matemática e ensino

Nesse tópico, apresentamos algumas considerações acerca da história da matemática e o modo de escrevê-la, e as contribuições para o ensino visando a interface desses dois campos do conhecimento.

Saito (2015) salienta que a história é a narrativa de um evento ou acontecimento e que a historiografia é a arte de escrever a história e, dessa maneira, trata dos critérios da *"escrita da história"*, desse modo, toda narrativa da história é historiograficamente orientada.

Ao considerarmos a história da matemática, devemos ter a compreensão de que não se trata de qualquer história, já que "ela teve papel central no processo de transmissão, apropriação e divulgação de conhecimentos matemáticos" (SAITO, 2015, p. 19). Além disso, ao estudarmos a história da matemática devemos compreender que esse campo não se trata da união de história mais matemática, como se juntados os dois campos resultasse em um terceiro, a história da matemática tem características próprias (SAITO; DIAS, 2013).

Os estudos referentes à história da matemática podem ser orientados por diferentes vertentes historiográficas. Saito (2015) aponta que nos últimos trinta anos a história buscou renovar seus pressupostos metodológicos e historiográficos procurando contextualizar o conhecimento matemático em seu processo de construção, abordando diferentemente a escrita da história do conhecimento matemático.

Duas perspectivas históricas referentes aos estudos da história da matemática são: a tradicional e a atualizada.

Como a pesquisa trata do instrumento setor trigonal, pautaremos na vertente historiográfica atualizada, uma vez que essa permitiu compreender o processo de construção do instrumento, considerando as conexões internas e externas a ele e não apenas os acontecimentos como a história tradicional observa. Além disso, não consideramos o setor trigonal como um artefato que ajuda fazer cálculos ou que demonstra informações matemáticas, mas procuramos compreender que conhecimentos matemáticos estão agregados no instrumento, tanto em sua construção quanto em seu manuseio, além do porquê do instrumento ser elaborado, para qual finalidade, entre outros.

Como a proposta de pesquisa está direcionada para estudantes da educação básica, procuramos compreender como o instrumento contribuiu para a formação de novos conhecimentos.

Com isso, realizamos uma investigação que subsidia elementos constitutivos de uma interface entre história e ensino de matemática de modo a contribuir com a reflexão sobre a relação entre o processo histórico da construção do conhecimento matemático e a formação dos conceitos. Não nos distanciamos da proposta curricular sobre a abordagem da história no ensino de matemática, porém a interpretamos de forma crítica ao que temos observado neste assunto.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a história da matemática oferece uma contribuição ao processo de ensino e aprendizagem para a matemática, revelando a matemática como uma criação humana (BRASIL, 1998).

Miguel e Miorim (2011, p. 16) destacam que para os autores do PCN, "a História da Matemática, se tratada como um assunto específico ou conteúdo seria insuficiente para contribuir para o processo de ensino-aprendizagem", porém Miguel e Miorim alertam que matemáticos, historiadores da matemática e investigadores em Educação Matemática, recorrem a motivação para justificar a necessidade de tal inclusão. Beo (2015) ressalta que o mesmo ocorre em grande parte dos livros didáticos que usam a História da Matemática como fator de motivação.

Um dos fatores que tem contribuído para essa forma de abordagem se deve a ausência de literatura adequada que privilegie a construção do conhecimento matemático como atividade humana. (BEO, 2015, MIGUEL; MIORIM, 2011).

Desse modo, a história da matemática é um recurso para que o professor de matemática articule a construção do conhecimento e o seu contexto, de maneira que o significado dos conceitos estudados seja ampliado, tomando-se o "cuidado de não reduzir a história da matemática a dados biográficos ou a uma coleção de curiosidades e anedotas sobre matemáticos" (SAITO, 2015, p. 20).

Saito e Dias ressaltam três aspectos que podem ser entendidos como favoráveis à integração da história da matemática com o ensino.

> O primeiro diz respeito à própria área de referência dos educadores matemáticos, ou seja, a história tem ajudado a construir uma visão diferenciada da matemática, que passa a ser vista como atividade

> intelectual e humanizadora, ao invés de um corpo de conhecimento dado ou um conjunto de técnicas de resolução de problemas matemáticos.
> O segundo aspecto está relacionado à percepção do conhecimento matemático. A articulação de tópicos de história no ensino de matemática tem possibilitado a reorientação da visão do que são os objetos da Matemática, pois o estudo do processo histórico conduz a uma linha interpretativa diferenciada, propiciando a abordagem do mesmo objeto matemático por outra perspectiva e, assim, contribuindo para sua melhor compreensão.
> O terceiro aspecto a ser considerado é a interdisciplinaridade, na qual o processo histórico tem se mostrado eficaz ao abordar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, na medida em que os insere num contexto particular e estabelece relações com outras áreas do conhecimento científico, tecnológico e social (SAITO; DIAS, 2013, p. 92).

Nesse sentido, Saito e Dias (2013) propõem o uso de documentos históricos como recurso para a elaboração de propostas que visam a formação do conhecimento matemático.

Esta pesquisa está condizente com essa proposta do uso de documentos históricos, sendo que analisamos as potencialidades didáticas do uso do tratado e do instrumento setor trigonal, e elaboramos uma atividade didática, cujo detalhamento será abordado respectivamente nos itens 4 e 5.4.

3.2 Instrumentos

Nesse tópico, pretendemos analisar os instrumentos matemáticos como objeto do desenvolvimento histórico humano, considerando todo o contexto em que os mesmos estiveram e estão inseridos, ou seja, relacioná-los com o conhecimento vinculado ao saber-fazer.

Como mencionamos anteriormente, na perspectiva histórico-cultural, uma das características que difere os homens dos animais, deve-se ao fato de que o homem é capaz de transformar a natureza para satisfazer suas necessidades, dominando-a, o que não ocorre com os animais. Além disso, o homem se desenvolve mediante a interação social construída historicamente.

Rego (1995, p. 50) destaca que:

> Compreender a questão da mediação, que caracteriza a relação do homem com o mundo e com os outros homens, é de fundamental importância justamente porque é através deste processo que as funções psicológicas superiores, especificamente humanas, se desenvolvem.

Os estudos de Vygotsky (1991) apontam dois elementos que fazem essa medição: o instrumento e o signo. O instrumento tem a função de mediar a ação sobre objetos e o signo mediar a ação no psiquismo.

Os signos podem ser representados por gestos, imagens, sistemas simbólicos, linguagem escrita, numerais, entre outros. O número 3, por exemplo, é um signo que remete a ideia de quantidade, mesmo sendo representado de diferentes maneiras, de acordo com os sistemas de numeração, o homem saberá o significado do número se outro homem lhe disser, ou seja, é necessária a mediação de um indivíduo com outro para que o primeiro compreenda a relação do signo com sua representação.

Os instrumentos podem ser materiais ou ideais: o primeiro relaciona-se aos objetos físicos, o segundo relaciona-se com o pensamento. Tomemos como exemplo de instrumento material o osso. Imagine que um macaco utilize o osso para bater ou quebrar algo. Essa ação faz o osso se transformar num instrumento material momentâneo. Assim que o objeto perde sua função, se torna indiferente para o animal. Já o homem, incorpora a função do osso em outros instrumentos, como o martelo, por exemplo. Desse modo, consegue evoluir a ideia, ou seja, armazena no pensamento (instrumento ideal) a funcionalidade do objeto e cria outros, pois não precisa guardar o osso, uma vez que relaciona o modo geral com o particular. Além disso, o novo instrumento criado não se configura apenas material, mas também como ideal.

> Diferente de outras espécies de animais, os homens não só produzem seus instrumentos para a realização de tarefas específicas, como também são capazes de conservá-los para uso posterior, de preservar e transmitir sua função aos membros de seu grupo, de aperfeiçoar antigos instrumentos e de criar novos. (REGO, 1995, p. 51)

Vygotsky compara os instrumentos concretos com os signos, que ele nomeia como instrumentos psicológicos.

> A invenção e o uso de signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.) é análoga à, invenção e uso de instrumentos, só que agora no campo psicológico. O signo age como um instrumento da atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho (1991, p. 59).

Com relação ao instrumento citado por Vygotsky, Leontiev completa que:

> O instrumento é produto da cultura material que leva em si, da maneira mais evidente e mais material, os traços característicos da criação humana. Não é apenas um objeto de forma determinada, possuindo determinadas propriedades.
>
> O instrumento é ao mesmo tempo um objeto *social* na qual estão incorporadas e fixadas as operações de trabalho historicamente elaboradas (1978, p. 287, grifo do autor).

Os instrumentos, desse modo, são objetos criados dentro de um contexto histórico. A ideia de instrumento citada por Vygotsky (1991) e Leontiev (1978) associa-se aos instrumentos de uma maneira geral, entretanto, trataremos particularmente sobre os instrumentos matemáticos.

Quando pensamos em instrumentos matemáticos antigos, vem a nossa mente a imagem de objetos envelhecidos e sem utilidades, contudo, é possível extrair significados implícitos de certa época ou cultura.

Segundo Saito e Dias (2011, p. 56):

> Os instrumentos matemáticos são mais do que simples artefatos. Eles incorporam conhecimentos que revelam a articulação entre o saber e o fazer e, desse modo, sintetizam a produção de conhecimento de uma época. Conhecimento este que pode receber diferentes interpretações e, consequentemente, significados.

A compreensão dos conhecimentos matemáticos presentes na construção do instrumento pode revelar aspectos de uma determinada época ou cultura. Desse modo, os usos apresentados no tratado do instrumento setor trigonal não são as únicas contribuições que eles podem agregar aos indivíduos. “Os instrumentos teriam, assim, importante papel no desenvolvimento de novos conhecimentos na medida em que exerceriam diferentes funções na articulação entre a teoria e a prática” (GALISON, 1998 apud SAITO 2014).

Abordaremos os instrumentos matemáticos de medida, mas antes disso, trataremos de forma sucinta as concepções relacionadas sobre o que é medir.

Lanner de Moura (1995, p. 44) salienta que “a medida é a forma de expressar quantitativamente acontecimentos, fenômenos, objetos de nossa vida diária”. De fato, o ato de medir se constitui algo amplo, pois dependendo da grandeza utilizamos várias formas de medir. A saber, para medir a distância entre dois lugares razoavelmente próximos, pode-se usar passos, trena, báculo. Lanner de Moura (1995, p. 44) aponta que “as maneiras de medir a variedade de grandezas são quase inumeráveis”.

A padronização de um sistema de medida deu-se devido ao grande avanço do comércio e da indústria em fins do século XVIII (LANNER de MOURA, 1995, p. 44). Entretanto, mesmo com a universalização de uma unidade de medida, as diferentes formas de medir permanecem presentes no cotidiano do homem, já que este ainda faz uso das unidades de medidas não padronizadas, como partes do corpo, cabo de vassouras, pedras, entre outras.

Cunha (2008) enfatiza que a história da humanidade documenta as contribuições que o conceito de medir trouxe para o desenvolvimento do pensamento.

De fato, as medições realizadas pelo homem iniciam-se desde a pré-história. Nessa época, surgiram as primeiras concepções de número, forma e tamanho, uma vez que a principal atividade era a colheita de alimentos, e o fato de viverem em cavernas contribuía para a convivência direta com os animais. Além disso, ao construírem instrumentos de caça, por exemplo, os indivíduos tinham uma concepção de forma e tamanho (LANNER de MOURA, 1995).

Na história antiga, as terras habitadas localizavam-se em torno dos rios o que aumentava a produção das colheitas. Além disso, técnicas de demarcação de terras foram desenvolvidas. No Egito, devido as cheias do rio Nilo, prevaleceu a presença dos medidores oficiais, onde se desenvolveram as técnicas para cálculo de áreas, assim como as grandes construções (LANNER de MOURA, 1995).

Os povos mesopotâmicos também se desenvolveram próximos a rios e criaram técnicas de medidas como, por exemplo, o sistema sexagesimal. Já os gregos sofreram influências dos babilônicos e egípcios e criaram a escola de Alexandria contribuindo na transformando a geometria empírica para a demonstrativa (LANNER de MOURA, 1995).

A partir do que foi apresentado, percebe-se que o desenvolvimento do conhecimento não se processa de forma rápida e nem imediata, e sim mediada, além disso, os processos de medição relacionam-se com diversas situações da prática humana em diferentes contextos. “O conhecimento da história do conceito é de extrema importância na busca da essência como produção humana e compreensão da interação do sujeito com o seu meio” (CUNHA, 2008, p. 14).

A formação do conceito de medida relaciona-se com o pensamento teórico, em que as relações de comparação que se estabelecem entre objetos sob os aspectos de quantidade, qualidade, grandezas, unidades, discreto e contínuo, diferentes linguagens de medida são considerados seus aspectos internos. Já o ato da medição e o seu resultado aspectos externos. A medida é uma unidade dialética do pensamento caracterizada pelos aspectos da grandeza e da unidade em que a escolha de uma implica na determinação da outra, ou seja, a escolha da grandeza a ser medida implica na natureza da unidade que a mede (CUNHA, 2008).

Quando necessitamos realizar medições de comprimento, tempo, massa, capacidade, área, volume e temperatura é comum fazer o uso de instrumentos simples e que estejam presentes em nosso cotidiano como a régua, a balança e o relógio por exemplo. Entretanto, dificilmente alguém questiona a funcionalidade desses instrumentos, ou até mesmo, como eles foram construídos, afinal, uma educação escolar baseada somente na cotidianeidade interessa somente seu aspecto funcional.

Saito (2014, p. 26) ressalta que:

> Os modernos instrumentos de medida parecem, dessa maneira, artefatos simples e óbvios em sua operação de modo que não questionamos o resultado, ou seja, aquilo que aparece num visor ou numa escala. Contudo, o processo que está por trás dessa operação é extremamente complexo não só do ponto de vista técnico-científico, mas também histórico.

Cada ser inicia sua vida interagindo com objetos e fenômenos criados pelas gerações precedentes, desse modo, se apropriam das conquistas por meio das atividades com esses objetos. Por vezes, tais objetos são transformados, substituídos ou desaparecem em um período histórico, deixam de existir. Isso não significa que o que se mede não é mais necessário. O processo de ensino-aprendizagem escolar pode trazer essas discussões ao tratar de conceitos matemáticos relacionados ao instrumento.

Castillo (2016) realizou um estudo de um tratado direcionado à agrimensura publicado em 1556 por Leonard Digges (1520 – 1559). A obra apresenta uma série de procedimentos de medida que revela interessantes aspectos do saber-fazer matemático da época. Essa “obra foi direcionada aos praticantes de matemáticas em geral e a outros interessados por instrução nas matemáticas” (CASTILLO, 2016, p.14). Os instrumentos não eram fabricados por qualquer pessoa, e sim pelos chamados “*praticantes de matemáticas*”.

> Essa expressão (*mathematical practitioner*) foi cunhada por E. G. R. Taylor para descrever aquele artesão que lidava com conhecimentos matemáticos. Refere-se a um grupo de estudiosos ingleses que se dedicavam às matemáticas práticas, fabricando instrumentos e escrevendo tratados. Esses praticantes de matemáticas não tinham, em sua maioria, formação universitária. Muitos deles mantinham estreito contato com eruditos e pessoas próximas a príncipes e governantes. (SAITO, 2015, p.172)

Apesar da grande maioria dos praticantes não terem formação universitária, mesmo assim, tinham um conhecimento matemático capaz de realizar construções geométricas e escrever tratados que validavam os instrumentos.

O interesse por esses instrumentos matemáticos começou a ganhar destaque no início do século XVI com a valorização de artesãos e estudiosos da natureza, impulsionada pela exploração de novos territórios e a colonização destes. Além disso, os aspectos práticos da geometria despertaram o interesse de príncipes, estadistas, comerciantes e banqueiros, pois eram utilizados para: organização de artilharia (caso houvesse guerra), transações comerciais, aumentar os valores das terras, determinar a altura de muralhas e distância entre navios, traçado de mapas, entre outros (SAITO; DIAS, 2011; SAITO; DIAS, 2014; CASTILLO, 2016).

No século XV, outro tratado trouxe contribuições para a época, Santos (2014) apresenta a obra *Matemática Lúdica,* escrita por Leon Battista Alberti (1404-1472) que viveu na cidade de Florença e ingressou na universidade iniciando seus estudos pelas artes liberais, o *trivium* e o *quadrivium.* Eves explica que:

> [...] a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas [...] Esse grupo de matérias tornou- se conhecido na Idade Media como *quadrivium*, ao qual se acrescentava o *trivium*, formado de gramatica, logica e retorica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada (2011, p. 98, grifo do autor).

“Concluindo seus estudos nas sete artes liberais, os estudantes optavam por um dos três níveis mais altos de formação: teologia, lei ou medicina” (BURKE, 1999, apud SANTOS, 2014, p. 20). Alberti teria escolhido a formação em direito, porém devido a problemas pessoais, segundo Santos (2014), teve que interromper seus estudos e passou a dedicar-se ao estudo da Matemática, Ciências da Natureza e Física, posteriormente voltou a universidade concluindo direito. Além disso, trabalhou como arquiteto despertando interesse de príncipes da época.

Santos (2014, p. 27) explica que a obra *Matemática Lúdica*:

> [...] é composta por 20 resoluções de problemas práticos referentes à arquitetura, construção civil ou militar, topografia ou navegação, utilizando procedimentos matemáticos [...] para medir profundidade de um lago ou rio, tempo, distância entre cidades, além de abordar alguns aspectos ligados à agrimensura, ao nivelamento de solo, e à elaboração de mapas.

Castillo (2016) e Santos (2014) aprofundaram seus estudos sobre tratados diferentes, mas com conteúdos semelhantes, visto que, os conhecimentos desenvolvidos na época buscavam contribuir para a resolução de problemas ligados a situações práticas.

Os estudos dos tratados podem auxiliar na compreensão dos processos que envolvem a construção, funcionamento e necessidades dos instrumentos de medida ao qual se referem.

Contudo, o próprio estudo do tratado pode dar início ou estar relacionado a pesquisas mais abrangentes que investigam mais profundamente suas relações com os processos de construção do conhecimento, nas relações sociais de um período histórico. Portanto, o diálogo com a história do conhecimento no ensino escolar, pode permitir aos estudantes a compreensão de que os conteúdos da disciplina de matemática não são estáticos, como também auxiliar no desenvolvimento do pensamento teórico.

3.3 Pesquisas que tratam sobre instrumentos matemáticos

Com a finalidade de selecionar textos relevantes à pesquisa e verificar as produções com o tema instrumentos matemáticos (precisamente na construção de conceitos matemáticos tendo os instrumentos matemáticos como recurso) fizemos um levantamento nos seguintes bancos de dados: CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior); Banco de teses e dissertações da USP, PUC, UNESP e UNICAMP e revistas eletrônicas.

As pesquisas em periódicos, produções, dissertações e teses foram realizadas com as palavras-chaves: instrumento matemático, história da matemática, educação matemática e formação de conceito.

Através da busca realizada, percebemos que não há muitos autores brasileiros que realizaram trabalhos sobre o referido tema. O processo de busca atinge produções que estão disponíveis em revistas eletrônicas, como: Ensino da

Matemática em Debate; Revista de Matemática, Ensino e Cultura (REMATEC); Revista de Produção Discente em Educação Matemática; Educação Matemática Pesquisa (Online); Ciência & Educação; Revista Brasileira de História da Matemática; Revista Tecnologia e Sociedade (Online); História da Ciência e Ensino: construindo interfaces. Além dos periódicos citados, o banco de teses e dissertações da PUC-SP consta quatro trabalhos referentes ao tema exposto, sendo três dissertações e uma tese.

Uma das dissertações pesquisadas, que aborda os instrumentos na história, é o trabalho de Santos (2014) que apresentou uma história da matemática do século XV. Pautada em tendências historiográficas atuais, a pesquisa discorre sobre medida do tempo por meio de uma análise dos procedimentos descritos na obra *Matemática Lúdica*, produzida por Leon Battista Alberti (1404-1472). Santos (2014) propõe explorar uma das práticas matemáticas descritas na obra publicada no século XV e fornecer ao professor material de história da matemática atualizado, além de apresentar uma história que não se baseia em grandes narrativas. Por conseguinte, procura discutir o significado da medida, principalmente no que se refere à medida de tempo, destacando dessa forma, as diferenças nos procedimentos de medir distâncias e tempo. Para alcançar os objetivos propostos, Santos (2014) contextualiza a obra primeiramente por meio da biografia de Alberti, depois as obras do mesmo, dando destaque para o cálculo do espaço sem utilizar um instrumento de medida, mas sim por relações geométricas. Em seguida, apresenta diferentes relógios capazes de medir ou calcular (no caso da hora noturna que é calculada com base nos astros) o tempo por diferentes maneiras.

Monteiro (2012), em sua dissertação, apresentou e analisou alguns elementos que surgiram durante o desenvolvimento de uma atividade que articula história e ensino da matemática. A proposta consistiu na construção de uma réplica do instrumento quadrante num quarto de círculo por um grupo de professores do ensino fundamental, do ciclo II, no Estado de São Paulo. Pôde-se constatar que a atividade propiciou um diálogo entre os conhecimentos matemáticos do presente e do passado. Contudo, os professores não tiveram facilidade para a realização da construção, pois foram disponibilizados régua sem graduação e compasso, sendo necessário retomar conhecimentos sobre construções geométricas. O objetivo era criar um ambiente em que os participantes pudessem estabelecer um diálogo com os conhecimentos matemáticos do século XVI. Desse modo, a pesquisa realizada por Monteiro (2012) incentivou os participantes a refletirem e discutirem sobre os conceitos matemáticos mobilizados durante a construção do instrumento, relevando assim, as possíveis contribuições que a história da matemática pode trazer para a formação de professores.

Beo (2015) desenvolveu seu trabalho a partir do estudo do *Trattato del Radio Latino*, obra publicada em Roma no século XVI, que traz informações sobre a construção e uso de um instrumento de medida, denominado *Radio Latino*. O tratado foi escrito por Orsini (1517-1586), artesão e inventor do instrumento. A pesquisa teve como objetivo contribuir com os estudos a respeito da História da Matemática discutindo possíveis articulações desse campo com o ensino na exploração do tratado que versa sobre medida de alturas. A pesquisa pautou-se no trabalho desenvolvido por Saito e Dias (2013) que discutem as interfaces entre História da Matemática e ensino de Matemática a partir do estudo de tratados que descrevem a construção e uso de instrumentos de medida. Os procedimentos metodológicos foram constituídos por meio da simulação e uso do instrumento, além da leitura de obras que tratam do contexto histórico do Renascimento. Em seguida, a autora apresenta duas atividades didáticas relacionadas ao ensino de matemática e sugere alguns conceitos que podem ser explorados. Na primeira sobre a construção do instrumento, Beo mobiliza conceitos matemáticos dentro da situação proposta, a saber, mediatriz, perpendicular e raio da circunferência. Já a segunda propicia a discussão sobre os aspectos da medida sugerindo estudos sobre o teorema de Pitágoras e os números irracionais.

Castillo (2016) em sua tese também apresenta um instrumento matemático, no caso, discorre sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (instrumento de medida abordado no tratado *A Boke Named Tectonicon*), escrito e publicado por Leonard Digges (1520-1559). A pesquisa teve como objetivos: identificar o contexto no qual a obra e seu autor estavam inseridos; verificar, a partir desse contexto, quais conhecimentos matemáticos foram mobilizados e abordados no tratado e sua relação com as práticas matemáticas e o saber erudito da época, além de analisar esses conhecimentos matemáticos incorporados no báculo, considerando a prática de mensuração e os procedimentos descritos na obra. Foram articuladas três dimensões de análise: a historiográfica, a contextual e a epistemológica. A partir da construção e uso do instrumento, a autora concluiu que tanto o báculo como os outros instrumentos abordados em *Tectonicon*, são mais que simples ferramentas, pois são instrumentos que incorporam conhecimentos, mostram a relação entre o saber e o fazer de uma época, e apontam questões de ordem epistemológica para reflexão a respeito do processo de construção do conhecimento científico e matemático, na medição de alturas e larguras e no cálculo da área de triângulo no século XVI.

Saito e Dias (2011), discutem os conhecimentos matemáticos mobilizados por participantes de um minicurso, bem como reflexões sobre história, construção e utilização do instrumento quadrante de um quarto de círculo. Partem da ideia de que a história é um potencial recurso para a elaboração de propostas didáticas que contemplam a formação do conceito matemático, buscando no processo histórico o movimento do pensamento no contexto da formação deste conceito. Os autores apresentam também um panorama geral do contexto histórico em que os instrumentos matemáticos se encontravam no século XVI, assim como a perspectiva lógico-histórica como possibilidade do estudo do movimento do pensamento.

Os autores utilizaram dois excertos de uma obra publicada por Cosimo Bartoli (1503-1572), no século XVI, que instruem sobre a construção e o uso do instrumento quadrante num quarto de círculo. Ressaltam que para a construção do instrumento, não era permitido o uso de réguas graduadas, transferidores e outros recursos modernos, pelos participantes do minicurso, já que no século XVI os padrões de medida não se encontravam estabelecidos. Os autores destacam ainda a dificuldade dos participantes em compreender as instruções para a construção do instrumento e, por fim, realizam reflexões sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados na construção do instrumento, como mediatriz, bissetriz, teorema de Tales e paralelismo.

As pesquisas mencionadas anteriormente tratam sobre a ideia de articular história e ensino da matemática, por meio de tratados e instrumentos de medida. Alguns dos trabalhos deixaram sugestões de atividades utilizando os tratados e instrumentos de medida, já outros, desenvolvem propostas didáticas. Entretanto, não é mencionada intervenção com estudantes da educação básica, o que procuraremos abordar nesta pesquisa.

Salientamos as considerações realizadas por Saito e Dias (2011) em relação ao *tratamento didático* do documento utilizado, o tratado *Del modo di misure,* de Cosimo Bartoli, que foi o escolhido para a atividade didática elaborada pelos autores. O *tratamento didático* caracteriza-se como sendo um tratamento no documento com vistas ao seu objetivo de modo que o documento seja acessível ao público. Saito e Dias apontam que:

> O primeiro tratamento didático dado ao documento foi de caráter estrutural com o objetivo de elaborar um material que compusesse uma proposta a ser desenvolvida com os estudantes. Esse tratamento levou em conta o objetivo, o público-alvo e o tempo disponibilizado para o desenvolvimento (2011, p. 25).

Para tanto, os autores realizaram uma tradução para a língua portuguesa, do toscano do século XVI. Selecionaram imagens que ilustram o processo de construção do instrumento e seu uso. Além disso, colocaram nota de rodapé com a explicação de termos ou expressões que pudessem impedir o leitor na compreensão do tratado, levando em consideração o tempo disponível para a atividade didática (SAITO; DIAS, 2011).

O tratado *The Trigonall Sector* também passou pelo primeiro *tratamento didático*, uma vez que o documento foi traduzido para a língua portuguesa, do inglês arcaico, por professores membros do grupo HEEMa. Porém a tradução não foi publicada, sendo assim, por se tratar de um documento não oficial, optamos em indicar neste texto por “tradução livre” quando fizermos referência aos trechos traduzidos do tratado.

4 O INSTRUMENTO SETOR TRIGONAL E SEU TRATADO: POTENCIALIDADES DIDÁTICAS

Nesse tópico, apresentamos o tratado e o instrumento matemático denominado setor trigonal, além disso, com vistas à abordagem de potencialidades didáticas na interface entre história e ensino de matemática.

As potencialidades para o ensino referem-se aos conhecimentos que o próprio instrumento agrega, que por sua vez, faz com que os conceitos que são ensinados aos estudantes tenham significado e não sejam transmitidos como algo pronto, acabado e descontextualizados. Esse estudo integra a atividade orientadora de ensino que organizou a atividade didática desenvolvida com estudantes do ensino médio de uma escola pública.

4.1 O instrumento setor trigonal

Descreveremos as características do instrumento juntamente com o tratado, a fim de realizar uma reflexão sobre as potencialidades didáticas. Um breve contexto histórico encontra-se em Dias e Saito (2014), faremos aqui somente alguns destaques.

Instrumentos matemáticos e os praticantes de matemáticas ganharam destaque a partir do século XVI, quando a busca por instrução em geometria e aritmética mais prática foram necessárias para o desenvolvimento de técnicas de navegação, agrimensura, artilharia, entre outras (DIAS; SAITO, 2014).

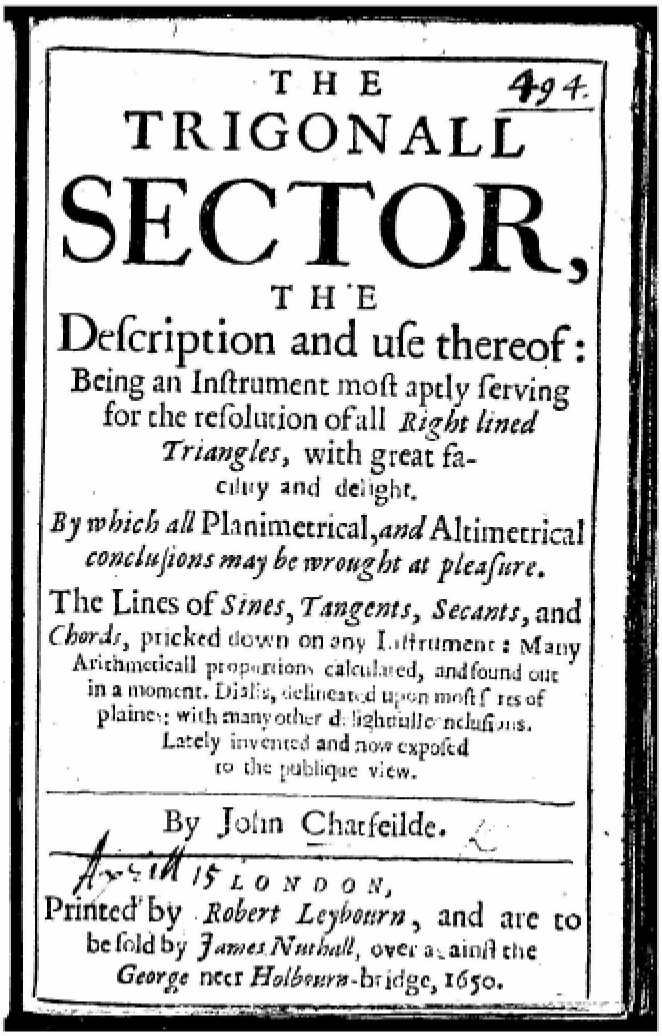
Segundo Saito (2013b, p. 5) os praticantes de matemáticas:

> [...] tinham uma orientação mais empirista, no sentido de que as técnicas matemáticas por eles desenvolvidas eram aplicadas ao mundo real. Muitos deles se denominavam “professores” de matemática, no sentido daquele que professava a arte matemática. A maioria deles, entretanto, não possuía formação universitária e estava associada a uma corporação de ofício, ou trabalhava em uma oficina que fabricava instrumentos.

Desse modo, o tratado que descreve o instrumento setor trigonal direciona-se para os interessados em aprender o uso de setores. “Embora não se tenha notícias da origem dos setores, sabe-se que foram inventados por diferentes fabricantes de instrumentos e praticantes de matemáticas no século XVII" (DIAS; SAITO, 2014, p. 1230).

No que refere ao tratado, apresentamos seu frontispício (figura1) e na sequência, a introdução do documento assinada pelo próprio Chatfeilde. O frontispício informa a descrição e o uso de um instrumento, sendo esse adequado para resolver problemas com triângulos com facilidade, além de conclusões planimétricas e altimétricas, cálculos das linhas dos senos, tangentes, secantes, cordas e proporções aritméticas.

Figura 1 – Frontispício do tratado *The Trigonall Sector*



THE 494.

TRIGONALL

SECTOR,

THE

Deſcription and uſe thereof:

Being an Inſtrument moſt aptly ſerving for the reſolution of all *Right lined Triangles*, with great facility and delight.

By which all Planimetrical, *and* Altimetrical *concluſions may be wrought at pleaſure.*

The Lines of *Sines*, *Tangents*, *Secants*, and *Chords*, pricked down on any Inſtrument: Many Arithmeticall proportions calculated, and found out in a moment. Dials, delineated upon moſt ſorts of plaines; with many other delightfull concluſions. Lately invented and now expoſed to the publique view.

By John Chatfeilde.

LONDON,

Printed by *Robert Leybourn*, and are to be ſold by *James Nuthall*, over againſt the *George* neer *Holbourn*-bridge, 1650.

Fonte: Chatfeilde (1650)

> Tu tens aqui apresentado, para tua apreciação, a descrição e o uso de um Instrumento Geométrico por meio do qual (se tu és ainda um aprendiz) podes compreender, corretamente, a doutrina dos triângulos com maior facilidade: mas se tu já avançaste nas maiores dificuldades, e és um Mestre nessa arte, sem dúvidas, mesmo assim, tu encontrarás algo aqui que te

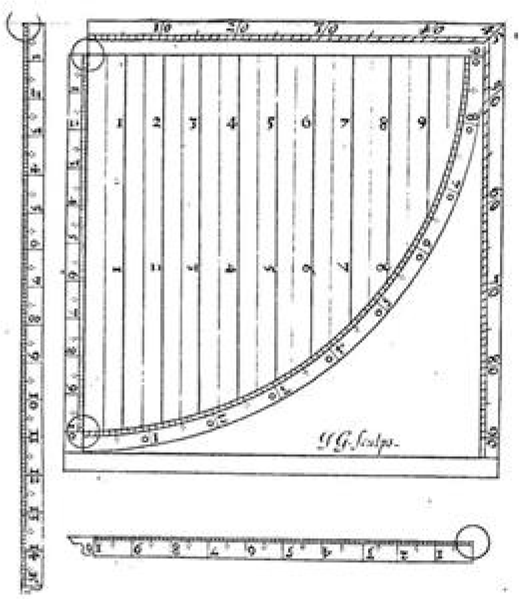
> interessará e que, talvez, possa ajudar-te a realizar aquelas coisas com maior rapidez e facilidade do que costumavas a fazê-las [...] (CHATFEILDE, 1650, prefácio, tradução livre).

A partir dessa breve introdução, Chatfeilde explicita que o instrumento serviria tanto para aprendizes quanto para mestres. Entretanto, podemos notar que o autor deixa implícito que o uso inicialmente favorece os aprendizes, já que esses buscam avançar nessa compreensão e assim tornarem-se mestres. É possível que para o contexto da época, trata-se de um instrumento de simples manuseio.

O setor trigonal é assim descrito por Chatfeilde:

> Ele consiste de uma placa quadrada de metal, ou de madeira, em cujos lados são fixadas lâminas, ou longos filetes, que se projetam um pouco além da placa nas beiradas dos lados. Além disso, contém dois marcadores que são fixados em duas extremidades de um dos lados da placa. Estes marcadores movem-se em torno de seus respectivos centros (ou extremidades) e podem ser aplicados um sobre o outro de modo a cruzarem-se e a formarem um ângulo entre si. Este ângulo deverá completar 180gr. juntamente com os outros dois ângulos formados pelos dois marcadores e o Raio, isto é, o lado do quadrado que contém os dois centros em que são fixados os marcadores (...) (1650, p. 1, tradução livre).

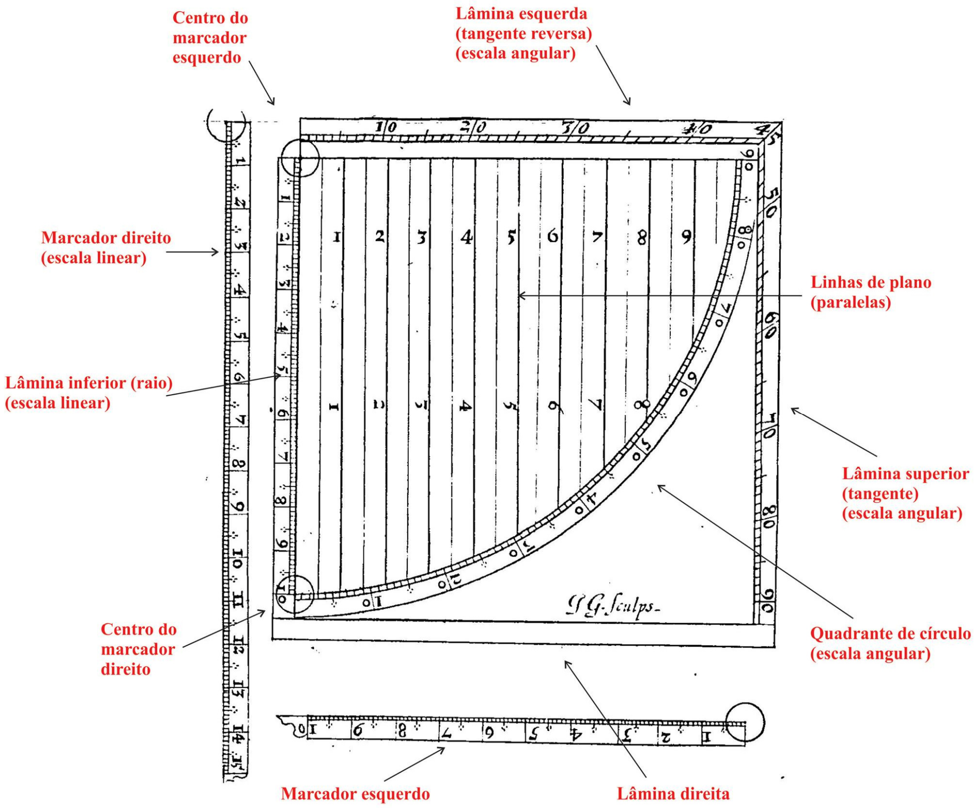
Figura 2 – Instrumento setor trigonal



Fonte: Chatfeilde (1650)

As informações explicitadas pelo autor e a imagem do instrumento presente no documento nos dão noções de como poderia ser a montagem do setor trigonal no encaixe de suas partes. O princípio do funcionamento desse instrumento são os triângulos, razão pela qual o setor recebe seu nome, isto é, "trigonal" no sentido de que os dois marcadores móveis podem ser ajustados para formar três ângulos (DIAS; SAITO, 2014). A imagem a seguir ilustra as partes do instrumento citado.

Figura 3 - Partes do setor trigonal



Fonte: Adaptado de Dias e Saito (2014).

O autor ainda apresenta quatorze instruções para manuseio do instrumento, sendo as primeiras referentes aos triângulos:

- Para encontrar qualquer quantidade de ângulo;
- Representar qualquer triângulo retângulo alinhado sendo dois de seus ângulos conhecidos;
- Representar qualquer triângulo retângulo;
- Representar qualquer triângulo obtuso;
- Representar qualquer triângulo acutângulo;
- Encontrar o conteúdo de qualquer um desses triângulos;
- Reduzir a área de um triângulo encontrado de uma denominação, para uma perpendicular e base de outra denominação.

As representações seguintes relacionam-se com cálculos trigonométricos e operações baseadas na proporcionalidade dos lados do triângulo:

- Encontrar o comprimento da linha tangente de qualquer grau com um Raio de 10000;
- Encontrar o comprimento de uma secante para qualquer grau;
- Encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau;
- Encontrar o comprimento de uma linha de cordas para qualquer grau;
- Encontrar uma linha ou um número em proporção contínua tendo sido dado dois números;
- Tendo o quadrado e sua raiz encontrar o seu cubo;
- Tendo o cubo e seu quadrado do qual foi tirado, encontrar a raiz de ambos.

Dias e Saito (2014, p. 1238) complementam que:

> As operações básicas que o setor trigonal apresenta possibilitam não só realizar cálculos, mas também instruir sobre as propriedades dos triângulos. Uma vez que incorpora conhecimentos matemáticos, esse instrumento, tanto em sua forma de quadrante, como em suas escalas (em partes móveis e fixas), permite explorar diferentes atributos e propriedades não só geométricas como também trigonométricas.

Apesar de o instrumento proporcionar as representações citadas com o seu manuseio, não podemos considerar o documento como um material didático e nem o setor trigonal como recurso didático no sentido que temos hoje, já que não fora elaborado para esse fim. Nesse sentido, na perspectiva lógico-histórica compreendemos que:

> [...] o instrumento e o tratado podem fornecer elementos com os quais é possível compor um conjunto de ações voltado para o ensino de matemática. As potencialidades didáticas, dessa maneira, devem emergir do movimento do pensamento no processo de apropriação do conhecimento incorporado não só no instrumento, mas também no tratado (DIAS; SAITO, 2014, p. 1239).

Contudo, dentre os quatorze tópicos mencionados, oito deles (representar qualquer triângulo retângulo sendo dois de seus ângulos conhecidos; representar qualquer triângulo retângulo; representar qualquer triângulo obtuso; representar qualquer triângulo acutângulo; encontrar o conteúdo de qualquer um desses triângulos; encontrar o comprimento da linha tangente de qualquer grau, com um raio de 10000; encontrar o comprimento de uma secante para qualquer grau; encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau) serão abordados nas potencialidades didáticas com o uso do instrumento e na atividade didática desenvolvida com estudantes da educação básica.

4.2 Algumas potencialidades didáticas do setor trigonal

A discussão das potencialidades didáticas do setor trigonal não tem como objetivo reproduzir o instrumento, mas sim articular história, ensino e aprendizagem de matemática, a fim de promover reflexões sobre os conceitos matemáticos e não matemáticos.

Antes de apresentarmos algumas potencialidades didáticas sobre a construção e uso do instrumento setor trigonal, juntamente com o tratado, faremos considerações sobre a linguagem matemática utilizada na escrita do tratado e para a construção de partes do instrumento mediante sua representação (Figura 2).

Dias e Saito (2014) apontam, quanto ao tratamento didático, que o tratado apresenta termos que não são comuns para a linguagem matemática atual e que não são utilizadas em livros didáticos, tais como “quantidade de ângulos” (medida de ângulos), “conteúdos de triângulos” (área de triângulos), “igual” (congruentes), e notações como *gr.* (“°”, isto é, grau). Outro termo que não é comum para a linguagem matemática é o que Chatfeilde chamou de “Tangente reversa”. No tratado, o autor não explicita com clareza o conceito de tangente reversa. Porém a falta dessa informação não compromete o entendimento dos itens abordados na atividade didática. O estudo da tangente reversa ficará para trabalhos futuros.

Os termos discutidos acima, presentes no tratado, podem auxiliar o professor a esclarecer o movimento do conhecimento matemático em seu processo histórico, conduzindo-o a refletir sobre o significado não só dos conceitos, mas também da linguagem na própria construção e expressão do conhecimento matemático, além disso, discutir o movimento da constituição da própria linguagem matemática (DIAS; SAITO, 2014).

Além disso, Chatfeilde (1650) indica sobre uso de tabelas:

> [...] consistem todas em partes iguais e, portanto, não precisam de tabelas para a sua inscrição, exceto apenas para a Tangente reversa (*reversed Tangent*), que pode ser feito, como é comumente conhecido, pelas tabelas comuns. (1650, p. 4, tradução livre)

O uso de tabelas era comum naquela época, pois “eram necessárias, tanto pelo desconhecimento de algoritmos de cálculo por quem efetuava as medições como pela inexistência, nesse período, de um padrão universal de unidades de medida” (CASTILLO, 2016, p. 50).

Mesmo após a criação do *sistema internacional de unidades*[1] de medidas, ainda eram usadas tabelas de conversão de medidas devido ao uso diferenciado em certos grupos sociais, como milha, jarda, pés, pouco usados no Brasil. Explorar esse assunto também pode ser uma potencialidade didática, incluindo práticas sociais atuais. Como, por exemplo, quando se vai comprar calçados ou roupas no exterior.

Abordaremos algumas potencialidades didáticas presentes na construção de algumas partes do instrumento setor trigonal.

A partir imagem do instrumento (Figura 2) e sua descrição apresentadas no tratado, temos uma placa de formato quadrado e um quadrante de um círculo no interior do corpo da placa, cujo raio (base do instrumento) tem mesma medida do lado do quadrado. Essas representações geométricas podem ser feitas com o uso de régua não graduada, esquadros e compasso.

Como potencialidades didáticas para mobilização das construções geométricas do instrumento, destacamos a representação de retas perpendiculares que são utilizadas para dividir a circunferência em quadrantes e as retas paralelas para construir o formato quadrado descrito pelo tratado. O que por sua vez pode ser feito também pela construção de perpendiculares.

Tais construções são feitas sem a necessidade de instrumentos graduados (régua atual). Essa prática provavelmente influenciou a existência na forma de disciplina de desenho geométrico. Sendo assim, as potencialidades didáticas podem ser exploradas a fim de revelar conceitos matemáticos, a saber, retas paralelas e perpendiculares.

O tratado aponta também para unidades e subunidades de comprimento que estão divididas em 10 e 100 partes congruentes. Como a construção do instrumento

---

[1] É o sistema de unidades oficialmente adotado no Brasil, estabelecido em 1960, durante a 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, com base no Sistema Métrico Decimal (JUNIOR; FERRARO; SOARES, 2007).

não depende de uma unidade padrão de comprimento, o compasso e esquadros garantem sua construção.

O processo de divisão de um segmento em partes congruentes, a partir do Teorema de Tales, pode ser utilizado para formação das escalas nas réguas nomeadas no documento por lâminas e marcadores, ou por uma unidade qualquer para tal divisão. O ensino do teorema de Tales, na educação básica, ocorre no 8º ano do ensino fundamental e de acordo com o currículo a habilidade desenvolvida é de “reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos” (SÃO PAULO, 2012, p. 62).

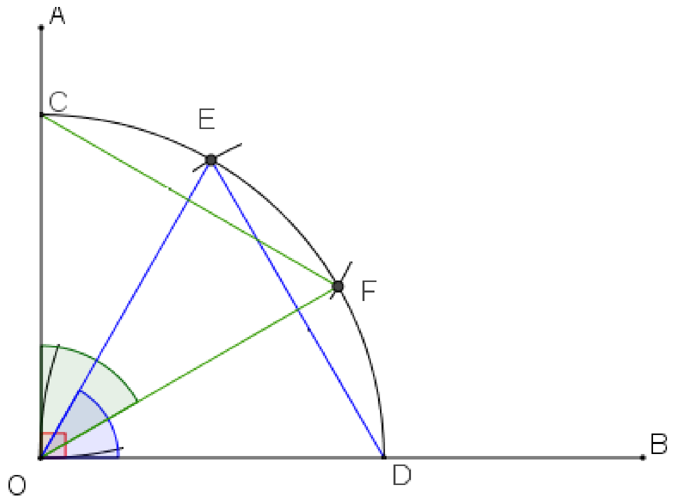
Para o teorema de Tales, pode-se analisar a potencialidade didática relacionada com sua construção geométrica e sua representação aritmética. Essa última é que se tem dado maior ênfase no ensino desse teorema, com isso, deixando de mostrar aos estudantes a produção de conhecimento na formação de um conceito e ressaltando a ideia de um conhecimento descontextualizado da prática humana. Pode-se discutir também a relação da geometria com a aritmética na história, uma vez que esses dois campos da matemática eram separados.

Além disso, na disciplina de matemática geralmente é ensinado um conceito para posteriormente mostrar uma aplicação, como se a construção de um conceito obedecesse essa ordem. Outra potencialidade didática é o fato de que para fazer construções geométricas sempre utilizamos uma unidade pré-estabelecida, porém, na construção do instrumento essa unidade não era padronizada, o que não ocorre no ensino atual que utiliza unidades padronizadas como: centímetro, milímetro ou metro, por exemplo.

A última potencialidade que destacaremos, em relação à descrição do instrumento presente no tratado, refere-se ao fato que o quadrante do círculo é dividido em 90°, o que leva a reflexão sobre um dos três problemas clássicos da geometria (a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo). Eves (2011, p. 134) aponta que “a importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso”. Entretanto, para o problema da trissecção do ângulo existe um caso particular que é possível: a divisão do ângulo de 90° em 3 partes congruentes utilizando ferramentas sem graduação (compasso e régua).

Considere um ângulo AÔB reto no vértice O. Com centro nesse vértice fazemos uma abertura qualquer traçando um arco de circunferência obtendo os pontos C e D. Com o centro em D, com a mesma abertura, marcamos o ponto E sobre o arco. Ainda com essa mesma abertura e centro em C, marcamos o ponto F sobre o mesmo arco. Unimos os pontos E e F ao vértice O, desse modo, o ângulo reto AÔB está dividido em 3 partes congruentes (CÔE, EÔF, FÔD) (Figura 4).

Figura 4 – Divisão do ângulo de 90° em três partes congruentes



Fonte: Elaborado pela autora

Quando utilizamos a mesma abertura do compasso traçamos um ângulo de 60°, consequentemente lados de um triângulo equilátero. No caso do ângulo de 90° é como se traçássemos dois triângulos equiláteros (Figura 4). Como o ângulo CÔF mede 60° e o ângulo AÔB mede 90°, concluímos que FÔD mede 30°, logo, os ângulos CÔE, EÔF também medem 30°. Tal representação torna-se uma potencialidade didática, uma vez que o professor pode discutir o problema da trissecção do ângulo e dialogar com os estudantes essa possibilidade para o ângulo de 90°.

O problema encontra-se em dividir o ângulo de 30° em 3 partes congruentes, visto que este é caracterizado como um dos clássicos, como já mencionamos. As instruções do tratado não explicam como a escala angular foi dividida em 9 partes congruentes de 10°. Saito (2014, p. 39) aponta que:

> As escalas angulares não eram utilizadas por razões de prática. O traçado preciso nas escalas lineares já não era tarefa fácil de ser executada. Mas, os problemas encontrados para dividir um arco de círculo em partes iguais eram praticamente insuperáveis.

Beo (2015) explicita em sua pesquisa sobre o tratado *Tratatto del Radio Latino* que a divisão angular era um procedimento conhecido pelos praticantes de matemáticas. Apesar de não ser explicitado no tratado como o instrumento Radio Latino teve suas medidas angulares divididas em partes congruentes.

O professor pode questionar os estudantes sobre o fato de que os softwares de desenhos matemáticos, como o Geogebra, por exemplo, possuem funções que são capazes de dividir um ângulo em três partes congruentes facilmente. Porém como essas divisões poderiam ser realizadas em uma época que os computadores não existiam? Apesar da dificuldade em realizar tal feito, existiam instrumentos que faziam uso da escala angular. Saito (2014) observa que não se tem notícia dos métodos de divisão de arcos de círculo em pequenas partes, entretanto, técnicas trigonométricas viriam a ocorrer ao longo do século XVI e XVII. Além disso, "os fabricantes de instrumentos matemáticos apropriaram-se dos métodos utilizados pelos astrônomos para construir suas escalas e procuraram incorporar aos instrumentos as escalas angulares" (p. 39).

Em se tratando do uso do instrumento, serão apontadas algumas potencialidades didáticas, sendo que incorporamos as potencialidades já descritas por Dias e Saito (2014) sobre: representar qualquer triângulo retângulo, encontrar a tangente e a secante de um ângulo, representar qualquer triângulo obtusângulo e representar qualquer triângulo acutângulo.

Após a descrição do setor trigonal, em seu tratado, Chatfeilde explicita sobre sua utilização:

> A utilização deste instrumento é muito interessante e variada, mas baseia-se especialmente na resolução de todos os tipos de Triângulos Retângulos alinhados aos quais todas as conclusões Geométricas são redutíveis, e nas proporções Aritméticas ou a resolução da Regra de Ouro.
> Na resolução de triângulos, 4 coisas devem ser consideradas. 1 A quantidade dos ângulos. 2 As proporções dos lados ou dos lados subtendidos e perpendiculares entre si. 3 Os conteúdos da área em partes correspondentes às partes dos lados. 4 A redução das partes a uma perpendicular e base de outra denominação: todos os quais são realizados por meio do instrumento desta maneira. (1650, p. 5, tradução livre)

O autor enfatiza a utilização do instrumento baseada nos triângulos, isso pode ser observado nas instruções seguintes do tratado cuja maioria das descrições tem os triângulos como objeto de estudo.

O tratado fornece diferentes instruções para o uso do instrumento, porém focaremos em sete: representar qualquer triângulo retângulo, representar qualquer triângulo obtuso, representar qualquer triângulo acutângulo, encontrar o conteúdo de qualquer um desses triângulos, encontrar o comprimento da linha tangente de qualquer grau, com um raio de 10000, encontrar o comprimento de uma secante para qualquer grau e encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau.

Antes de citar as representações dos triângulos, Chatfeilde apresenta os tipos:

> Todos os tipos de triângulos são distinguidos de duas formas.
> Em primeiro lugar, por seus lados e, desse modo, são chamados. 1 Equilátero, que tem todos os lados iguais. 2 Isósceles, que tem somente dois lados iguais e o terceiro lado diferente. 3 escaleno, isto é, triângulos cujos lados não são iguais.
> Em segundo lugar, por seus ângulos, e eles são, 1 Retângulo, que contém um ângulo reto. 2 Obtusângulo, em que um dos ângulos é obtuso ou maior que um ângulo reto, que é superior a 90 *gr*. 3 Acutângulo, em que todos os ângulos são inferiores a 90 *gr*.
> Note-se que três ângulos de cada triângulo são iguais a dois ângulos retos, que é 180 *gr*. (1650, p. 7, tradução livre).

Inicialmente, o tratado apresenta os tipos de triângulos relacionando-os pela medida de seus lados e os ângulos internos, além disso, é fornecida a relação da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo.

O tratado descreve o triângulo isósceles como tendo dois lados congruentes[2] e o terceiro lado diferente, sendo assim, podemos inferir que tal triângulo possui dois ângulos congruentes e um diferente. Entretanto, a definição atual é mais geral, ou seja, “triângulo isósceles tem apenas dois de seus lados iguais”[3] (EUCLIDES, 1952, p. 1, tradução nossa), a definição não menciona nenhuma informação sobre o terceiro lado. Logo, podemos concluir que um triângulo equilátero também é isósceles, diferentemente da descrição de triângulo isósceles apresentada no tratado, assim, percebe-se que as definições nem sempre se mantém fixas, podendo sofrer alterações.

---

[2] O termo congruentes é descrito no tratado como sendo “iguais”.

[3] Em inglês lê-se*: “an isosceles triangle that which has two of its sides alone equal”* (EUCLIDES, 1956, p. 1).

Nas orientações seguintes, os triângulos citados serão explorados relacionando-se seus ângulos internos e a medida de seus lados.

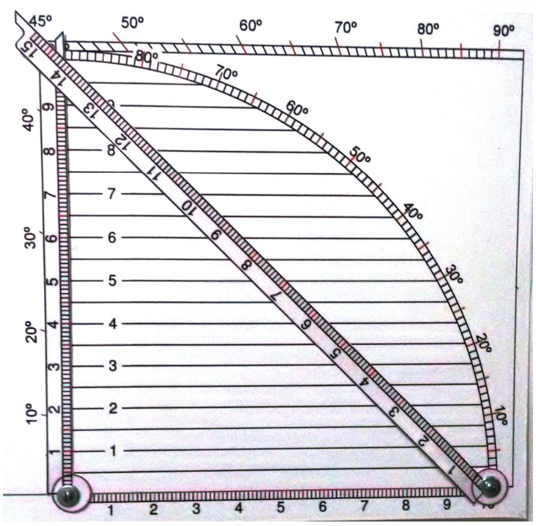
4.2.1 Representar qualquer triângulo retângulo

Na obra *The Trigonall Sector* o autor descreve a representação de qualquer triângulo retângulo com a finalidade de mostrar como encontrar a tangente e a secante de qualquer ângulo, desse modo, o procedimento que será apresentado a seguir pode ser utilizado para encontrar o comprimento da linha tangente de qualquer grau, com um raio de 10000 e encontrar o comprimento de uma secante para qualquer grau, operando o instrumento.

> Gire o marcador esquerdo em direção da lâmina da Tangente, pois, desse modo, ele faz um ângulo reto com o Raio. Em seguida, gire o marcador direito em direção ao grau do outro ângulo conhecido na linha Tangente e, assim, os dois marcadores e o raio resultarão num Triângulo, com as proporções dos lados entre si.
> Suponhamos que os dois ângulos conhecidos sejam 90 e 45, a distância entre os centros, o Raio, terá 100 partes, então o marcador direito deverá cortar o marcador esquerdo, também, em 141 partes.
> Um desses lados é o Raio, o segundo uma Tangente de 45, que é sempre igual ao Raio, o terceiro, a Secante de 45, que é uma linha traçada a partir do centro através da borda do círculo até encontrar a tangente. (CHATFEILDE, 1650, p. 8, tradução livre).

Segundo a descrição do autor, com o instrumento é possível construir um triângulo retângulo posicionando os marcadores nas escalas angulares correspondentes aos ângulos de 90° e 45°. A tangente e a secante são definidas com o encontro dos dois marcadores. O marcador esquerdo sobrepõe à lâmina esquerda, formando ângulo de 90° com o raio (na base do instrumento da Figura 3). O marcador direito forma ângulos de 0 a 90° com o raio do instrumento. A medida dos ângulos é dada pela escala angular e a medida dos lados do triângulo, tangente e secante pela escala linear. A ilustração a seguir mostra a situação indicada pelo autor.

Figura 5 - Representação de um triângulo retângulo, com os ângulos de 90° e 45°, no setor trigonal



Fonte: fotografia tirada pela autora

Na imagem (Figura 5), temos a representação do triângulo descrito no tratado. Segundo as orientações do autor, o valor da tangente de 45° coincide com o marcador esquerdo (cateto), e da secante de 45° com o marcador direito (hipotenusa), ou seja, o comprimento da tangente e da secante é fornecido pelas escalas que estão sobre os marcadores no instrumento. Embora as marcações dessas escalas tenham sido indicadas no tratado como de 10 unidades subdivididas em 10, o autor utiliza em vários momentos do documento a versatilidade de compor os resultados a partir da proporcionalidade ao considerar o raio sendo unitário e múltiplo de 10.

Se o raio for dividido em 100 partes temos uma secante cuja proporcionalidade se dará a partir de 141 partes no marcador e a tangente 100 partes. Proporcionalmente, o documento sempre aponta múltiplos de 10. Usando linguagem matemática, a proporção para a secante e para tangente de 45° fica representada do seguinte modo:

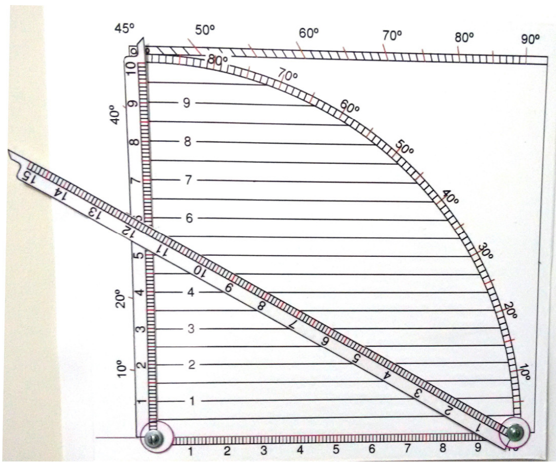
$$tg\,45° = \frac{1}{1} = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1000}{1000} \qquad \sec 45° = \frac{1{,}41}{1} = \frac{14{,}1}{10} = \frac{141}{100}$$

Desse modo, para o triângulo retângulo representado, temos que $\sec 45° = \sqrt{2}$ e a $tg\,45° = 1$.

Chatfeilde ainda ressalta que a tangente de 45° sempre será igual ao raio, além disso, ao indicar a medida dos marcadores o autor usa o termo “partes”, ressaltando que na época inexistia uma padronização das unidades de medida como temos atualmente.

Do ponto de vista didático, podemos explorar algumas ideias relacionadas com a representação descrita. Nos livros didáticos, as razões trigonométricas no triângulo retângulo normalmente iniciam-se pelo seno, cosseno e tangente (GIOVANNI; JÚNIOR; CASTRUCCI, 2015) e as outras razões são definidas a partir dessas três citadas. A representação no setor trigonal dá a possibilidade de encontrarmos a tangente e secante sem utilizar o seno e o cosseno, por exemplo, desse modo, o professor pode articular as duas formas para o ensino.

Figura 6 - Representação de um triângulo retângulo, com os ângulos de 90° e 30°, no setor trigonal



Fonte: fotografia tirada pela autora

Os mesmos procedimentos são adotados para o triângulo com ângulos de medidas 90° e 30° (figura 6). Pelas instruções do tratado temos as conclusões para o comprimento da tangente de 30°.

> Suponhamos que o grau seja 30, cuja tangente que encontraria, com os marcadores sendo aplicados um com o outro, conforme anteriormente mencionado, as partes interceptadas no marcador do lado esquerdo, entre o marcador do lado direito e o raio, deverão ser 5773, que deve ser o comprimento da Tangente (CHATFEILDE, 1650, p. 19, tradução livre).

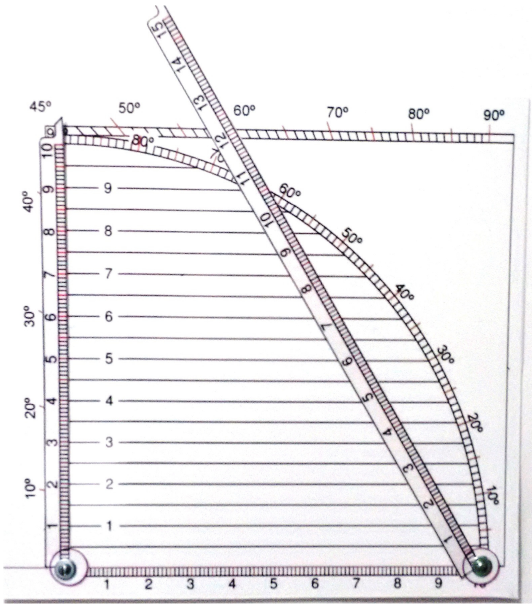
E os procedimentos para encontrarmos o comprimento da secante de 30°.

> Isto é para ser feito exatamente da mesma maneira como na proposição anterior em que a tangente foi encontrada, apenas com a diferença de que, enquanto as partes interceptavam entre a intersecção dos marcadores e o Raio do instrumento no marcador do lado esquerdo eram para ser contados na tangente representada pelo Raio do Instrumento; aqui a Secante é sempre encontrada observando-se o número de partes interceptadas entre o centro do marcador do lado direito e sua intersecção com o outro marcador. Isto no primeiro dos dois exemplos anteriores fica assim: o Raio encontrado sendo 10000, a tangente, 5773, a Secante será 11547, que é uma Secante de 30 *gr.* (CHATFEILDE, 1650, p. 21, tradução livre).

Nas duas citações anteriores o autor considera o raio sendo 10000. Se considerarmos o raio do instrumento sendo dividido em 10 partes, teremos a tangente de 30° igual a 5,7 partes e a secante como 11,5 partes. Fazendo a proporção do raio em 10000 partes, teremos 5773 partes para a tangente e 11547 partes para a secante que estão de acordo com as tabelas de tangente e secante para uma unidade, que estão próximos dos valores apresentados pelo instrumento.

O tratado traz ainda a representação de Tangente e Secante para ângulos maiores que 45°, já que se o marcador do lado esquerdo formar um ângulo reto com o raio e o outro marcador ficar em 60°, por exemplo, não haverá interseção dos marcadores, como mostra a figura 7.

Figura 7 - Representação dos ângulos de 90° e 60° no setor trigonal com os dois marcadores



Fonte: fotografia tirada pela autora

Se um dos ângulos for maior que 45° não é possível fazer a representação do triângulo, já que os marcadores não se interceptam. Nesse caso, as orientações do autor são pelo uso do complementar:

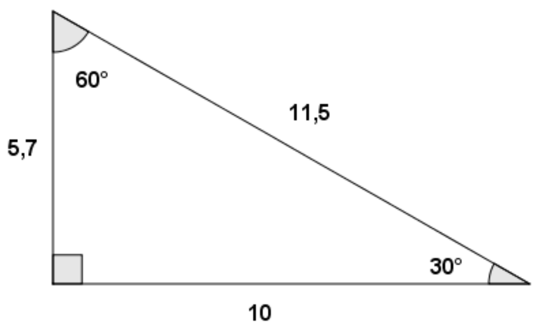
> [...] se um dos ângulos conhecidos estiver acima de 45: e o outro 90 *gr*, então coloque o marcador na tangente de seu complemento para 90 e, em seguida, deverão as partes sobre o marcador do lado esquerdo representar o Raio, e o Raio do Instrumento representará a tangente, e o marcador do lado direito representará a secante (CHATFEILDE, 1650, p. 8, tradução livre)

Como o marcador direito não intercepta o esquerdo em 60°, utilizaremos o complementar deste que é 30°. Logo, a representação formará um triângulo com dois de seus ângulos 90° e 30° como na figura 6. Logo, o terceiro ângulo possui a medida de 60°.

Para se encontrar a Tangente de 60° as instruções indicam:

> [...] aplique o marcador do lado direito ao seu complemento, que é a tangente de 30 *gr*. e você deverá encontrar as partes interceptadas, que representam o Raio de 60 *gr*., 5773, e o Raio do instrumento que representa a Tangente 10000. Eu digo então que como 5773 o Raio encontrado, está para 10000, o Raio do instrumento. Assim, 10000, o Raio do instrumento, está para 17.320, a tangente de 60 *gr*. (CHATFEILDE, 1650, p. 19, tradução livre)

Para a secante de 60° deve-se fazer as proporções das partes interceptadas no marcador esquerdo com as do marcador direito, assim como o raio do instrumento sendo 10000 para a secante procurada (CHATFEILDE, 1650). Após a representação no instrumento (Figura 6) e considerando um raio igual a 10000, usaremos as proporções para encontrarmos o valor da Tangente e a Secante de 60°, conforme ilustração em linguagem matemática:



Tangente de 60°

$$tg\,60° = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$$

$$tg\,60° = \frac{10000}{17320}$$

Secante de 60°

$$\sec 60° = \frac{hipotenusa}{cat.adj.}$$

$$\sec 60° = \frac{17320}{5773}$$

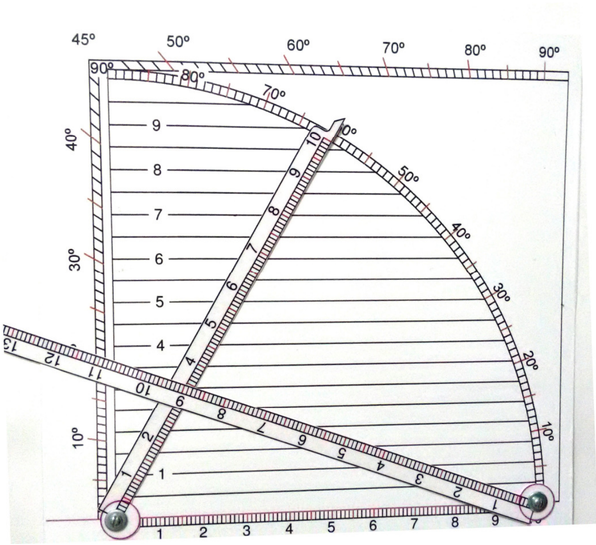
Assim, para diferentes ângulos é possível encontrar a tangente e a secante correspondente. Como potencialidade didática o professor pode explorar as proporções e discutir as razões trigonométricas que estão implícitas nas representações descritas no tratado.

4.2.2 Representar qualquer triângulo obtuso

Neste tópico, o autor traz instruções de como representar um triângulo obtusângulo por meio do instrumento.

> Suponhamos que os dois ângulos conhecidos sejam 60 e 100 *gr*. esse triângulo deve necessariamente ser obtuso, porque 100 *gr*. é maior do que 90 *gr*., e porque nenhum dos marcadores pode formar um ângulo maior do que 90 *gr*., portanto, o ângulo obtuso deve ser encontrado na intersecção de dois marcadores, desse modo, para encontrar este triângulo, faço assim: adicione os dois ângulos conhecidos e eles farão 160: subtraia deste 180, e assim restará 20, que é o terceiro ângulo, portanto, para representar isso, coloque um marcador em 20 *gr*. e o outro em 60 *gr*. e onde eles se cruzarem, a intersecção, formará um ângulo de 100 *gr*., porque todos os três ângulos devem fazer exatamente 180 *gr*. e os marcadores, assim aplicados, darão o triângulo procurado, e as divisões dos marcadores, juntos em suas intersecções com o raio, mostrarão as proporções dos três lados da mesma, como nos exemplos anteriores (CHATFEILDE, 1650, p. 11, tradução livre).

Figura 8 - Representação de um triângulo obtusângulo por meio do instrumento setor trigonal



Fonte: fotografia tirada pela autora

O instrumento possui uma limitação em indicar diretamente com os marcadores um ângulo obtuso, já que as duas escalas angulares do instrumento variam de 0° a 90°. Nesse caso, o autor instrui o uso da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Se conhecidos dois ângulos (100° e 60°) e não havendo a possibilidade de representar diretamente o angulo de 100° com vértices nos centros dos marcadores, então a partir da soma dos ângulos dados (100°+60°=160°) tem-se a medida do terceiro que é o seu, suplementar (20°). Assim, no exemplo descrito pelo autor, os marcadores formarão um triângulo com ângulos internos de 20°, 60° e 100°, sendo que o terceiro ângulo não está visivelmente indicado pelas escalas do instrumento.

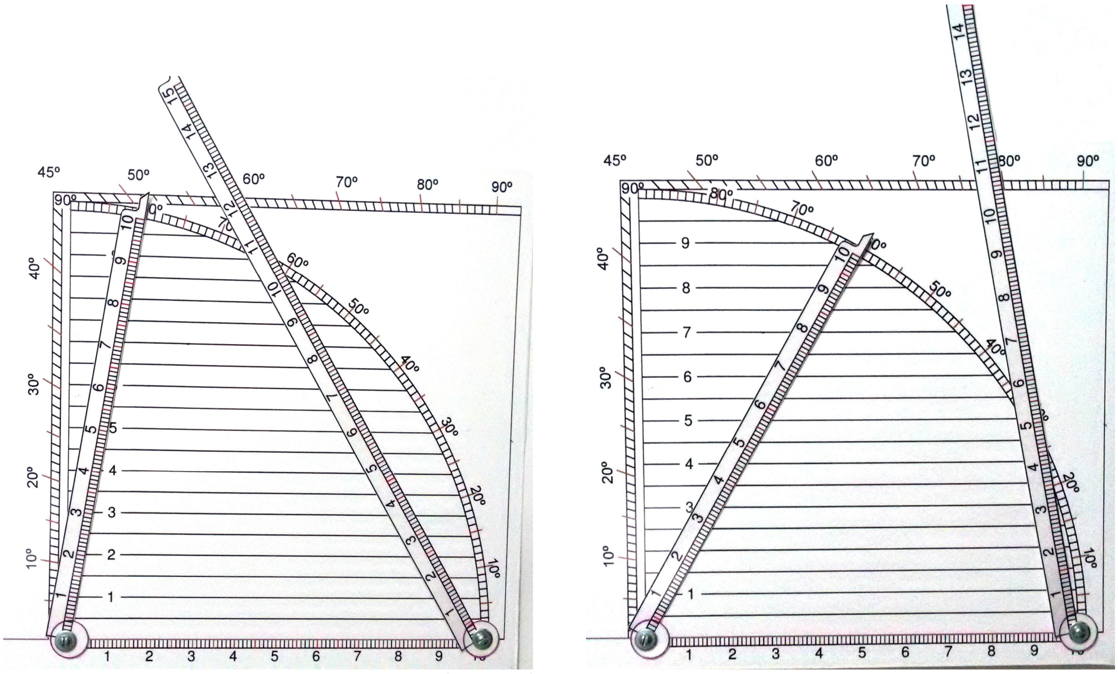
Uma potencialidade didática é que a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo não serve apenas para que os estudantes descubram um terceiro ângulo sendo dois deles conhecidos, em exercícios descontextualizados. Para o instrumento, o uso dessa propriedade é fundamental para que o instrumento represente quaisquer triângulos, incluindo os formados por ângulos obtusos, já que a escala angular varia de 0° a 90°, mostrando que não é necessário um instrumento com escala até 180°.

4.2.3 Representar qualquer triângulo acutângulo

Por semelhante modo ao anterior, o tratado dá instruções para a representação de qualquer triângulo acutângulo.

> Isto é feito apenas aplicando-se os marcadores nos graus dos ângulos conhecidos na linha tangente e no quadrante.
> Mas, se qualquer dos ângulos estiver acima de 60 *gr.* então ele deve ser suprido, colocando-se um dos marcadores no complemento de ambos, adicionados em conjunto, até 180 *gr.*, suponhamos que os dois ângulos agudos conhecidos sejam de 60 e 80: os marcadores ao serem aplicados a esses graus na Tangente e no Quadrante não se encontrarão para se cruzarem, portanto, coloque um marcador em 60, e o outro em 40 *gr.* que é o complemento da soma de ambos, 140 para 180, e assim você terá o Triângulo procurado, a proporção de seus lados é encontrada da forma como dito anteriormente (CHATFEILDE, 1650, p. 12, tradução livre).

Figura 9 - Representações dos ângulos 60° e 80° com vértices nos centros dos marcadores

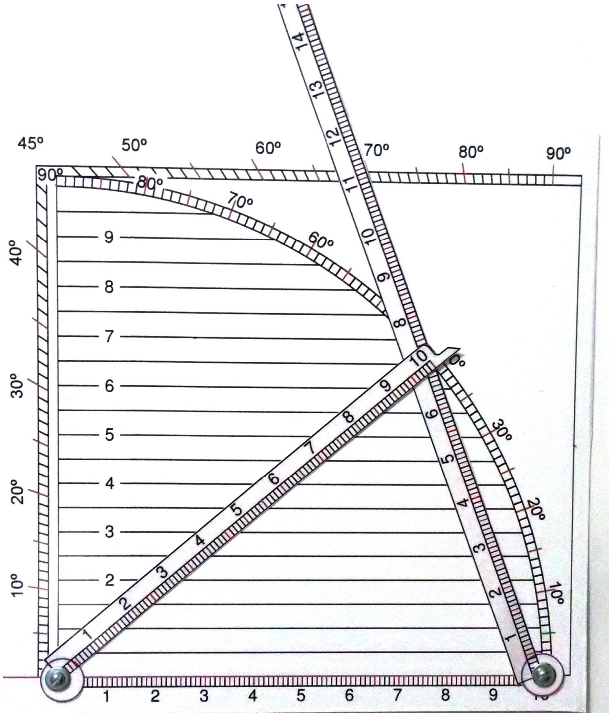


Fonte: fotografia tirada pela autora

Nem todos triângulos acutângulos podem ser representados diretamente no instrumento, ou seja, por meio da utilização dos marcadores posicionados nas escalas angulares diretamente na medida dos ângulos internos indicados. O autor aponta para o fato que se um dos ângulos for maior que 60° deve-se proceder da mesma maneira dos triângulos obtusângulos, utilizando a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Todavia, Dias e Saito (2014), ao analisarem o instrumento, perceberam que essa limitação apresentada pelo autor não tem validade para todos os ângulos. Tomemos como exemplo um triângulo acutângulo sendo conhecidas as medidas de dois ângulos, 70° e 40° (Figura 10).

Figura 10 - Representação de um triângulo acutângulo de 70° e 40° com vértices nos centros dos marcadores



Fonte: fotografia tirada pela autora

Destacamos como potencial didático para o ensino, o fato de que a representação dos ângulos internos nos centros dos marcadores é limitada para alguns exemplos, entretanto, pode-se articular a soma dos ângulos internos de um triângulo com a representação no instrumento, como já foi explorado. Além disso, também pode-se explorar o fato de que o comprimento do marcador esquerdo, por possuir a mesma medida do raio do instrumento, faz com que seu movimento ao percorrer a escala forme triângulos acutângulos isósceles (DIAS; SAITO, 2014).

4.2.4 Encontrar o conteúdo de qualquer um desses triângulos

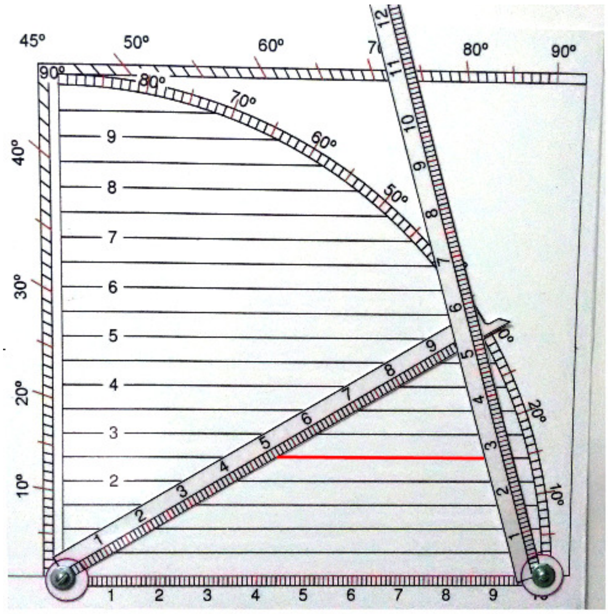
Nesse tópico, o autor dá instruções para encontrarmos a área de triângulo.

> Para efetuar isto, a perpendicular deve ser conhecida que, multiplicada pela metade da base, o produto dará a Área.
> Eu mostrei antes como encontrar as proporções de todos os lados, e assim, por conseguinte, o comprimento da base; a perpendicular também pode ser encontrada com grande facilidade: pois, quando você aplicou os marcadores um contra o outro, assim como o Triângulo foi representado por eles, assim lançando seu olho diretamente nessa interseção e abaixo dos marcadores entre as linhas paralelas, assim você deverá encontrar a

> distância da base, ou o comprimento da perpendicular: que multiplicado como dito anteriormente, dará a Área.
> *Ou para fazer com o instrumento, eu digo assim*
> Como 1 para o multiplicador, Assim, o multiplicando, para o produto.
> Supondo então que a perpendicular seja 5, e a base 10: cuja metade é 5, que deve ser multiplicado pela perpendicular.
> Eu aplico 10 no marcador do lado esquerdo, (que também pode ser contado para 1 ou 100 ou 1000: como a ocasião exigir) até 5, entre os paralelos, em seguida, procurando por 5, sobre o dito marcador, eu o encontro diretamente reunidos com 25 entre os paralelos, que é o número procurado (CHATFEILDE, 1650, p. 13, tradução livre).

O autor explica como encontrar a área realizando o cálculo aritmético e apenas observando os dados fornecidos pelo próprio documento.

Figura 11 - Área de um triângulo usando o instrumento setor trigonal



Fonte: fotografia tirada pela autora

Como um potencial didático pode-se refletir sobre o conceito de altura em triângulos, tratada no documento como perpendicular assim como a área, nomeada como conteúdo do triângulo. Além disso, pode-se explorar a generalização de uma relação que determine a área de qualquer triângulo baseando-se nas instruções fornecidas pelo tratado. Cabe ressaltar que encontrar a área de um triângulo pelo instrumento está vinculada à base do triângulo sendo sempre igual ao raio do setor (medida fixa).

O raio é a unidade de medida a ser considerada nas proporções tanto dos outros lados como da área, sendo que ao alterarmos sua medida (para 1 unidade, por exemplo) o valor da área também se altera (diminuindo em 100 unidades).

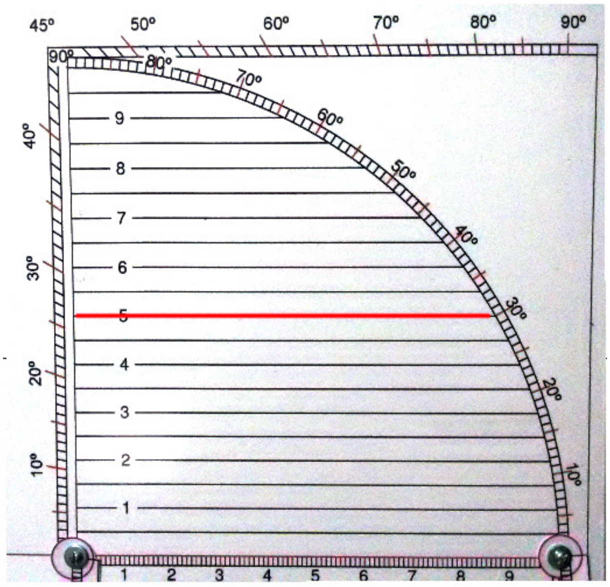
Nesse momento, no decorrer do tratado, é a primeira vez que se mostra o uso das paralelas do instrumento (altura dos triângulos), por isso, não é possível encontrar outras alturas relativas a outros lados.

4.2.5 Encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau

O tratado dá instruções sobre como encontrar o comprimento de uma linha de senos.

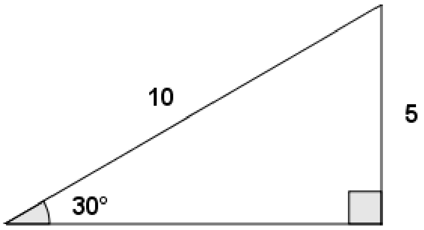
> Não há mais necessidade de encontrar isso, mas olhar para o grau no quadrante; então, observando, entre os paralelos, apenas reunindo com o grau: você deverá encontrar ali as partes procuradas. Por exemplo, se eu soubesse o comprimento do Seno de 30 *gr.* lançando meu olho sobre o arco de círculo, onde é cortado com o grau de 30: eu o encontro reunindo exatamente na intersecção do paralelo de 5: ou 5000. Concluo então que se o Raio é 10000, o seno de 30 *gr.* deve ser necessariamente 5000.
> O uso desta linha eu também me remeto aos escritos de outros porque é tão comumente tratado e conhecido de todos (CHATFEILDE, 1650, p. 23, tradução livre).

Figura 12 - Representação do seno de 30° pelo instrumento setor trigonal



Fonte: fotografia tirada pela autora

Pelas orientações do autor, observamos que para encontrar o comprimento do seno de 30° não será necessário usar os marcadores, uma vez que estes não são mencionados nessa representação, contudo, basta apenas localizar o ângulo no quadrante e direcionar para seu respectivo paralelo. Ao analisarmos o seno de um ângulo, dado um raio unitário ou múltiplo de 10, em um triângulo retângulo, perceberemos a validade das instruções presentes no tratado. A seguir, apresentamos a justificativa matemática para o seno de 30°.



$$sen 30° = \frac{5}{10}$$
$$sen 30° = 0,5$$

Como potencialidade didática, o professor pode explorar as proporções dos lados do triângulo retângulo e refletir com os estudantes sobre a razão trigonométrica do seno. Além disso, os outros ângulos do quadrante não encontram os paralelos em medidas exatas como foi observado com o seno de 30°, desse modo, para outros encontramos valores aproximados, já que na época era comum o uso de tabelas com os valores com maior precisão (CASTILLO, 2016).

Analisamos algumas das potencialidades didáticas tanto do documento *The Trigonall Sector*, quanto do próprio instrumento, e foi dado prioridade para os conceitos relacionados com a proposta de atividade didática que envolvem o setor trigonal.

Assim, nessa articulação, acreditamos que a história da matemática favoreça a ampliação dos conceitos ensinados aos estudantes, uma vez que ela permite uma articulação entre a construção do conhecimento e o seu contexto, ressaltando os processos que levaram o homem a constituir o conhecimento como herança cultural da humanidade.

Temos como hipótese que por meio desse instrumento, temos a possibilidade de relacionar conceitos matemáticos com o propósito didático, fazendo dessa forma, a contextualização da matemática no processo histórico e cultural, de tal forma que o estudante tenha conhecimento dos usos da matemática em determinado período histórico. Os conceitos abordados nas potencialidades didáticas aparecem no currículo do estado de São Paulo, o conceito de área, por exemplo, é abordado, pela primeira vez, no 6º ano do ensino fundamental, usando a decomposição de figuras, depois no 7º ano utiliza-se a álgebra no uso da fórmula da área, as razões trigonométricas aparecem (seno, cosseno e tangente) no 9º ano do ensino fundamental e 1ª série do ensino médio (SÃO PAULO, 2012).

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 Fundamentação da pesquisa qualitativa

Como já foi relatado, buscamos atingir três objetivos, sendo dois deles interligados, o primeiro se refere à análise das potencialidades didáticas do instrumento setor trigonal no processo de ensino e aprendizagem e, o segundo, desenvolver uma atividade didática que proporcione o movimento do pensamento na formação dos conceitos, o terceiro é a elaboração um livreto com base na atividade didática desenvolvida. Desse modo, a pesquisa possui enfoque na abordagem qualitativa, já que:

> Os dados qualitativos consistem, geralmente, na descrição profunda e completa (o mais possível) de eventos, situações, imagens mentais, interações, percepções, experiências, atitudes crenças, emoções, pensamentos e comportamentos particulares das pessoas, seja de forma individual, seja em grupo coletivo. Coleta-se com a finalidade de analisá-los para compreendê-los e assim responder a questões de pesquisa ou gerar conhecimento (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2006, p. 377).

Dentro da pesquisa qualitativa existem outras modalidades de pesquisas, porém não enfocaremos em uma especificamente, já que o “rigor metodológico não é medido pela indicação do tipo de pesquisa, mas por uma descrição clara e detalhada do caminho percorrido e das decisões tomadas pelo pesquisador ao conduzir seu estudo” (ANDRÉ, 2013, p. 96).

Contudo os princípios metodológicos aqui descritos condizem com uma pesquisa *exploratória*, ou seja, “quando o pesquisador, diante de uma problemática ou temática ainda pouco definida e conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela” (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 69). Deparamo-nos com tal situação no uso de instrumentos matemáticos que visa o movimento do pensamento na formação de conceitos. Sampieri, Collado e Lucio (2006, p. 100) complementam que tal pesquisa “é realizada quando o objetivo consiste em examinar um tema pouco estudado”.

A perspectiva histórico-cultural foi o referencial teórico escolhido para abordagem da atividade didática, como também no que se refere à apropriação de conhecimento, por considerarmos uma relação coerente de pressupostos que coadunam com o objetivo desta pesquisa. O instrumento matemático setor trigonal e o tratado foram utilizados como recurso didático que, com a organização de ensino, tiveram a finalidade de mediar a apropriação de conhecimentos pelos estudantes. O instrumento contém elementos históricos que fizeram parte de uma determinada época e contexto no qual conceitos foram desenvolvidos, em particular, conhecimentos matemáticos. Desse modo, utilizamos a atividade orientadora de ensino (AOE), que está fundamentada na perspectiva histórico-cultural, como uma possibilidade de organização da prática pedagógica visando à apropriação de conceitos por meio de uma atividade de ensino.

Definido o que se pretende realizar, deve-se analisar como coletar os dados para se alcançar os objetivos propostos. Tozoni-Reis (2009, p. 67) aponta que "a coleta consiste em um conhecimento da realidade a ser interpretada por meio da busca de dados sobre os fenômenos investigados na pesquisa", temos ainda que para a pesquisa qualitativa "o procedimento usual é aplicar um instrumento ou método de coleta de dados cuja essência também seja qualitativa, porém poderia ter algum elemento quantitativo" (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2006, p. 286), além disso, para a coleta de dados "a investigação qualitativa emprega diferentes alegações de conhecimento, estratégias de investigação e métodos de coleta e análise de dados" (CRESWELL, 2007, p. 185).

Mediante ao que foi exposto pelos autores, analisamos quais dos métodos de coletas de dados melhor se encaixa com as necessidades da pesquisa. Creswell (2007) relata quatro tipos básicos de métodos de coleta de dados, sendo: observação, entrevista, documentos e material de áudio e visual. Como parte da pesquisa está diretamente relacionada com a interação dos estudantes com o instrumento escolhido, se faz necessária uma forma de registro que capte tais momentos sem prejudicar as experiências individuais ou coletivas que os estudantes estejam vivenciando. Partindo desse encaminhamento, a coleta de dados nesta pesquisa está em:

- Observações das situações desenvolvidas pelos estudantes;
- Documentos produzidos e organizados no decorrer das diversas etapas da pesquisa, ou seja, anotações dos estudantes e da professora;
- Registros audiovisuais das aulas;
- Registro dos áudios dos estudantes e professora durante a realização das intervenções;
- Registro do questionário aplicado aos estudantes ao término da regência.

Contudo, é imprescindível uma análise criteriosa dos dados coletados, a fim de verificar se os objetivos foram alcançados, para isso os dados foram organizados em episódios, que consiste em reunir ações, palavras ou gestos que possam contribuir para explicar estratégias e ações que são construídas pelos estudantes para solucionar problemas (MOURA, 2001). A forma de expressar o episódio poderá ser de forma direta ou indireta (em relação à fala dos estudantes).

Todas as intervenções foram gravadas e filmadas. Para a captação de áudio das discussões realizadas em pequenos grupos, um gravador de áudio foi colocado próximo a cada um deles.

Nesta pesquisa para a transcrição de falas captadas por gravações de áudio utilizamos a sigla GA que refere-se aos diálogos dos estudantes reunidos em grupos. Além disso, as gravações serão identificadas por: G1 (grupo 1), G2 (grupo 2), G3 (grupo 3), G4 (grupo 4), G5 (grupo 5) e G6 (Grupo 6). Para as gravações áudio visuais, utilizamos a sigla GV, que indica a fala dos estudantes em diálogos coletivos. A fala da professora será representada pela sigla PO e os registros escritos (questionário) dos estudantes por RE. Por conseguinte, será utilizada uma sequência numérica que indica a data de aplicação das intervenções para ordenar as gravações, a saber, 18102016.

O registro das falas dos estudantes, referente a dados numéricos, está representado na forma escrita neste texto como numeral indo-arábico.

A entrevista é uma técnica muito presente na etapa da coleta de dados da pesquisa qualitativa, temos dois tipos: a entrevista estruturada e a semiestruturada, a primeira caracteriza-se por conter questões fechadas e a segunda questões abertas (TOZONI-REIS, 2009). Nesta pesquisa, uma entrevista semiestruturada (APÊNDICE A) foi utilizada ao final das regências com os estudantes, a escolha se deve ao fato que:

> As questões *fechadas são fáceis de codificar e preparar para sua análise.* Mesmo assim, *essas questões requerem um menor esforço por parte dos indivíduos.* Estes não têm de escrever ou verbalizar pensamentos, apenas selecionar a alternativa que descreva melhor sua resposta. (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2006, p. 330, grifo do autor).

O objetivo de acrescentar o questionário é para que os estudantes expressassem sínteses dos conceitos discutidos e não ficassem “presos” a uma resposta pré-determinada (perguntas objetivas). O questionário constou de sete questões sobre os conceitos e discussões trabalhados durante a regência, as informações descritas pelos estudantes auxiliaram na compreensão do problema em estudo.

5.2 Contexto da escola

A pesquisa foi desenvolvida em uma Escola Estadual localizada na cidade de Bauru (SP), o município possui 52 unidades escolares localizadas em diversos bairros, sendo que os níveis de ensino são divididos em: Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos. A escola selecionada para a pesquisa encontra-se em um bairro pequeno.

A escola possui um prédio novo (10 anos), tendo dois andares de salas de aula, um refeitório, sala de informática, sala de leitura/biblioteca, quadra poliesportiva, além disso, a escola dispõe de adaptações para estudantes com necessidade especiais, como rampas, elevador e banheiro adaptados. No período matutino estão matriculados 478 estudantes divididos em 7º, 8º, 9º anos e 1ª séries do ensino médio; no vespertino os estudantes representam 330, sendo que os níveis de ensino estão divididos em 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º anos do Ensino Fundamental; no período noturno estão as séries restantes que compõem o Ensino Médio, 1ª, 2ª, 3ª séries, agregando mais 215 estudantes. Nesse contexto, a escola é composta por um total de 1023 estudantes[4] divididos entre os níveis do 1º ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, constituindo 29 turmas. Além disso, a escola possui 40 professores que ministram aulas na unidade e cerca de 30 funcionários de apoio, totalizando 70 funcionários.

A pesquisa foi realizada com estudantes do Ensino Médio do período noturno, a pesquisadora optou por não selecionar uma série em específico e sim um grupo de estudantes voluntários para participar da atividade proposta. Tal escolha de estudantes do período noturno se deve ao fato de que no período matutino não há espaço físico disponível para a realização da atividade, sendo necessário ir ao período contrário de aula, porém a maioria dos estudantes não mora próximos da escola dependendo de transporte particular para a locomoção, além disso, há muitos que trabalham. Devido à falta de disponibilidade dos estudantes e espaço físico no

[4] Fonte: Dados fornecidos pela direção da unidade escolar em setembro de 2016

período matutino, a direção da escola sugeriu a aplicação da atividade no período noturno, já que possui salas de aula livres devido a menor quantidade de estudantes.

O convite foi feito a quatro turmas do ensino médio, sendo três turmas da 2ª série e uma da 1ª série, os estudantes foram consultados sobre a possibilidade de participarem da pesquisa, sendo a participação facultativa, desse modo, inicialmente 45 estudantes demonstraram interesse e receberam o Termo de Assentimento em que apresenta a pesquisa, cabe ressaltar que os estudantes são menores de idade e não respondem por si próprios, assim os pais ou responsáveis também tiveram que assinar um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), autorizando e estando cientes da participação de seus filhos.

A pesquisadora optou pela escolha das 4 salas devido ao fato de ter sido professora dos estudantes, de modo que ficassem mais confiantes para a aplicação das atividades, além disso, por conhecê-los a professora era ciente de que alguns conteúdos, embora presentes no PCN, não foram fixados pelos estudantes.

Os estudantes tiveram o prazo de duas semanas para a assinatura dos termos e até o término do prazo a pesquisadora passava nas salas recolhendo os termos duas vezes por semana. Após o prazo determinado, 24 alunos devolveram os termos, os demais desistiram de participar ou esqueceram de entregar os termos. Os professores das turmas também apoiaram, já que a aplicação seria concomitantemente ao período em que os estudantes estariam em aula.

Todos os estudantes foram informados sobre a utilização de recursos audiovisuais para registro das manifestações durante as atividades e de que as imagens e gravações não seriam utilizadas para outra finalidade.[5]

5.3 Atividade Orientadora de Ensino

Para que o objetivo de pesquisa, seja alcançado, foi desenvolvida uma atividade didática a fim de compreender o movimento do pensamento na formação de conceito. Para tanto, baseamo-nos na atividade orientadora de ensino (AOE) proposta por Moura (1996, 2010).

---

[5] Autorização Comitê de Ética – CAAE: 55266416.6.0000.5398

A atividade orientadora de ensino (AOE) tem a função de organizar o ensino no processo de ensino e aprendizagem como atividade humana. A AOE é desenvolvida a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e fundamentada na Teoria da Atividade desenvolvida por Leontiev (1978, 2001).

Leontiev (2001, p. 68) chama de atividade "os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo"

Só podemos garantir que um processo é uma atividade do sujeito, quando soubermos o que ele representa para este sujeito, assim é necessária uma análise psicológica do processo. Imagine um estudante que resolve uma lista de exercícios elaborada por seu professor a fim de compreender melhor o conteúdo exposto, se o docente comunicar a esse estudante que o conteúdo da lista não será cobrado em uma avaliação e, por sua vez, o discente abandonar a realização da lista, então o motivo pelo qual realizava a lista era simplesmente pela avaliação (LEONTIEV, 2001), neste caso, a realização da lista não era propriamente uma atividade, só uma ação. Segundo a ideia apresentada por Leontiev, de que a atividade deve focar o desenvolvimento psíquico se dá nas relações sociais. Dias (2007, p. 35) complementa que "a necessidade é a origem da atividade, o ponto de partida para criação do motivo que mobiliza o desenvolvimento de ações para apropriação do objeto para o qual se dirige o objetivo".

Como mencionamos na perspectiva histórico-cultural, o ser humano é capaz de transformar seu meio para satisfazer suas necessidades, desse modo, a atividade caracteriza-se como humana, pois só o ser humano idealiza seu objeto e suas ações antes de agir (DIAS, 2007).

Para o ensino a AOE estrutura e organiza as ações com a finalidade de humanizar os sujeitos. Moura (2010, p. 82) define a AOE:

> [...] como uma proposta de organização de atividade de ensino e de aprendizagem que, sustentada pelos pressupostos da teoria histórico-cultural, se apresenta como uma possibilidade para realizar a atividade educativa, tendo por base o conhecimento produzido sobre os processos humanos de construção de conhecimento.

Na organização do ensino escolar, seus sujeitos são professores e estudantes. A interação entre os sujeitos pressupõe a existência de um problema desencadeador da aprendizagem, uma vez que solucionam situações-problemas coletivamente mediadas pelos conteúdos e atribuindo sentidos às suas ações, apropriam-se dos significados da experiência da humanidade. A AOE está sempre sujeita a transformações, à medida que necessidades, motivos e objetivos se alteram. Ela é elemento de formação do estudante e do professor, considerando o movimento lógico-histórico do conceito.

As situações desencadeadoras de aprendizagem devem proporcionar ao estudante a necessidade de apropriação do conceito de modo que suas ações sejam realizadas na busca da solução de um problema que o mobilize para atividade de aprendizagem (MOURA, et. al 2010). Ela tem sido explicitada por meio de diferentes recursos metodológicos, sendo eles: o jogo, situações emergentes do cotidiano e a história virtual do conceito. O jogo considera "a possibilidade de colocar a criança diante uma situação-problema semelhante à vivenciada pelo homem ao lidar com conceitos matemáticos", já as situações emergentes do cotidiano colocam [...] "a criança diante da necessidade de vivenciar a solução de problemas atuais significativos", e por fim, a história virtual "coloca a criança diante de uma situação-problema semelhante àquela vivida pelo homem (no sentido genérico)" Moura (et. al 2010, p. 105).

Saito e Dias (2013), pautados na perspectiva lógico-histórica, propõem uma atividade didática que busca refletir o processo da produção do conhecimento que, dependendo da intencionalidade do educador, poderá ser orientada para diferentes propostas de ensino. A atividade é organizada em três etapas inter-relacionadas: 1) Tratamento didático do documento; 2) Intencionalidade e plano de ação; e 3) Desenvolvimento. Buscamos em seguida apresentar a organização didática considerando as orientações do tratado e o uso do instrumento setor trigonal, assim como as três etapas citadas por Saito e Dias.

5.4 A proposta de atividade a partir do tratado e instrumento setor trigonal

A atividade didática foi elaborada baseando-se no tratado e considerando o contexto em que ele foi produzido, a fim de que os estudantes compreendam um modo de produzir conhecimento situado em determinada época.

Partindo dessa intencionalidade, a organização do ensino compreende três etapas, a saber:

- 1ª Etapa – Roda da conversa: produção humana de instrumentos. Essa etapa caracteriza-se por um diálogo, com os estudantes, sobre os instrumentos de medidas atuais e de outras épocas. O objetivo da etapa é proporcionar a manifestação das reflexões dos estudantes sobre instrumentos, ao relacionar com a necessidade humana e com o conhecimento que compreende a construção e a interpretação de medidas.
- 2ª Etapa – Leitura do documento. Essa etapa destaca-se pela a leitura de partes do documento pelos estudantes, além de um diálogo sobre as características do tratado considerando a linguagem atual. O objetivo é compreender como os estudantes interagem com a tradução do documento no que se refere a forma e ao conteúdo.
- 3ª Etapa – Conhecendo e manuseando o setor trigonal. Essa etapa caracteriza-se pela leitura dos usos descritos no tratado, pelos estudantes, e a reprodução na réplica do instrumento setor trigonal. O objetivo foi compreender o movimento do pensamento nos estudantes, por meio de manifestações, na relação entre os usos descritos no documento, a interação com o instrumento e os conhecimentos a eles interligados.

Com o intuito de organizar cada atividade proposta, cada etapa foi estruturada em momentos. A tabela a seguir dá um panorama geral da organização da atividade.

Tabela 1 - Organização da atividade didática

1ª ETAPA	1º MOMENTO	Proporcionar aos estudantes reflexões sobre os instrumentos de medida presentes no cotidiano.
	2º MOMENTO	Necessidade dos instrumentos de medida e observação de imagens que contém instrumentos matemáticos na prática humana

2ª ETAPA	1º MOMENTO	Um diálogo com o passado sobre processos de comunicação.
	2º MOMENTO	Leitura inicial do tratado.
3ª ETAPA	1º MOMENTO	Leitura do tratado sobre a descrição do instrumento.
	2º MOMENTO	Situações propostas com e sem o instrumento setor trigonal.

Fonte: Elaborado pela autora

- 1ª Etapa - Roda da conversa: produção humana de instrumentos.

1º Momento: aproximando o olhar: concepções sobre instrumentos de medidas.

O objetivo de aprendizagem caracteriza-se por proporcionar aos estudantes reflexões sobre os instrumentos de medida presentes no cotidiano, desde a utilização, funcionamento, construção e interpretação dos dados fornecidos, além disso, ver os instrumentos como uma necessidade humana. As questões norteadoras para a discussão são: O que vocês entendem por instrumentos de medidas? Vocês conhecem alguns instrumentos de medidas? Quais? Eles servem para medir o quê? No seu dia a dia vocês utilizam algum instrumento de medida? É necessário saber matemática para manusear esses instrumentos de medida? Por quê? E para compreender as informações fornecidas pelos instrumentos, é preciso ter conhecimento matemático? Vocês seriam capazes de construir algum desses instrumentos citados?

Visou-se alcançar um dos objetivos da pesquisa, ou seja, investigar o movimento do pensamento na construção do conhecimento matemático na formação dos conceitos. Entendemos que não podemos atingi-lo por um único procedimento, mas sim por várias ações conectadas.

As questões norteadoras servem para o momento de compartilhamento de conhecimentos individuais, proporcionando uma atividade coletiva. Elas relacionam a função de instrumentos de medida criados pelo homem, sua reconstrução e a matemática, partindo de uma questão bem geral a fim de que outros elementos tenham espaço nessa atividade.

Sendo assim, espera-se que os estudantes reflitam sobre o conhecimento e a complexidade dos instrumentos que eles fazem uso cotidianamente ou que, de alguma forma, conhecem.

2º momento: A necessidade humana: criação de instrumentos de medida.

Dando continuidade às questões feitas no primeiro momento, nesse segundo a ênfase é dada a necessidade humana de criar instrumentos de medida: Por que o homem precisou criar os instrumentos de medidas que vocês citaram? Vocês acham que era possível fazer medições antes da criação desses instrumentos? Que recursos o homem poderia utilizar para fazer tais medições?

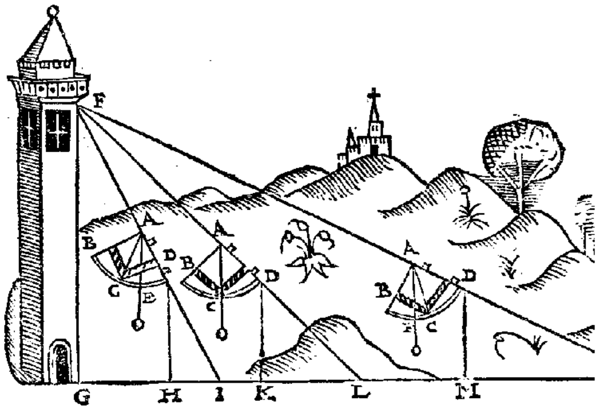
A intenção é que os estudantes aprendam que a forma para se realizar medições antes da criação dos instrumentos de medidas atuais, compreendeu um processo de elaboração que inclui conhecimento teórico, prático, de materiais entre outros de caráter operacional. E, algumas formas perpassam pela utilização de “objetos” ou fenômenos da natureza, a saber, pedras, movimento dos astros, ossos, cordas, partes do corpo, etc.

Em seguida, os estudantes, organizados em grupos, devem relatar suas percepções mediante a observação de duas imagens (Figuras 13 e 14).

Figura 13 - Balestilha

Fonte: < http://www.sab-astro.org.br/Resources/Documents/snea1/orais/SNEA2011_TCO14.pdf>

Figura 14 - Quadrante num quarto de círculo



Fonte: Saito; Dias, 2011.

Mediante as observações realizadas, algumas questões norteadoras são elaboradas para organizar o diálogo entre estudantes e pesquisadora, a saber: Em qual lugar o homem está? O que vocês acham que ele segura nas mãos? Por que ele está segurando esse objeto nas mãos? O que significa a estrela que está na imagem? E os tracejados? (Figura13) e para a segunda imagem as questões: Em qual ambiente se passa essa imagem? Você consegue visualizar algum instrumento de medida? Pelo o que se observa na imagem, para que serve esse instrumento de medida?

A intenção é que os estudantes percebam que os instrumentos de medidas eram utilizados a partir de uma necessidade para uma determinada época e contexto.

Com a finalização da primeira etapa e enfocando na construção do conhecimento na formação de conceitos, espera-se que os estudantes entrem em movimento de apropriação de alguns aspectos do processo de produção de conhecimento e, principalmente que a construção dos instrumentos partiu de uma necessidade e, para chegar ao que temos hoje, houve desenvolvimento e mobilização de conhecimento.

- 2ª Etapa: Leitura de partes do documento

1º momento: Um diálogo com o passado sobre processos de comunicação

A intenção nesse primeiro momento é que os estudantes conheçam que a escrita dos tratados era uma forma de divulgação de conhecimento. Para isso, questões norteadoras servem como mediação entre o contexto atual dos estudantes e a época de escrita dos tratados, propiciando reflexões sobre diferentes formas de registros ou transmissão. Como vocês fariam para transmitir um recado ou uma informação a uma pessoa que esteja distante de vocês? E antes do desenvolvimento da tecnologia, como vocês acham que as pessoas faziam para transmitir recados ou informações umas para as outras? Com o passar do tempo, como vocês acham que as informações sobre os instrumentos de medidas foram transmitidas para as pessoas?

2º momento: Neste momento os estudantes têm acesso ao documento do século XVI que apresenta o instrumento de medida setor trigonal. Em seguida leem os escritos iniciais como estão na tradução do documento original. O objetivo é aproximar os estudantes de textos escritos no século XVI.

Nessa primeira parte do documento, os estudantes realizam uma leitura individual e escrevem o que compreenderam ou não do texto. Em seguida, a professora lê com os estudantes, e de forma oral, cada um expõe o que compreendeu a respeito do que foi lido.

- 3ª Etapa: “Conhecendo e manuseando o setor trigonal”

1º momento: Primeiramente, mostra-se aos estudantes a imagem do instrumento setor trigonal presente no documento. A partir da imagem algumas questões são feitas aos estudantes: O que vocês podem dizer sobre essa imagem? Como foi feito o registro da imagem do instrumento no documento? Eles precisavam de algum recurso para desenhar a imagem? Qual? Qualquer pessoa poderia desenhá-lo?

As questões servem para que os estudantes percebam que as imagens registradas nos documentos não foram feitas por meio de fotografias. Além disso, para desenhar o instrumento era necessário ter um conhecimento específico. Trata-se de propor outra forma de interpretar e dialogar com registros de outra época.

Os estudantes fizeram uma leitura com a professora sobre a descrição do instrumento e puderam anotar informações ou termos que compreenderam ou não.

2º momento: Nesse momento busca-se que a atividade com o documento, juntamente com a contextualização proposta nos momentos anteriores, desencadeie aprendizagem de conteúdos matemáticos e extramatemáticos.

1º: Leitura dos tipos de triângulos apresentados no documento. Em seguida algumas perguntas iriam mediar o que os estudantes entenderão da leitura: O que vocês compreenderam sobre esse trecho do texto? Vocês já ouviram falar sobre esses tipos de triângulos? O que entenderam ao ler a última frase do trecho desse texto?

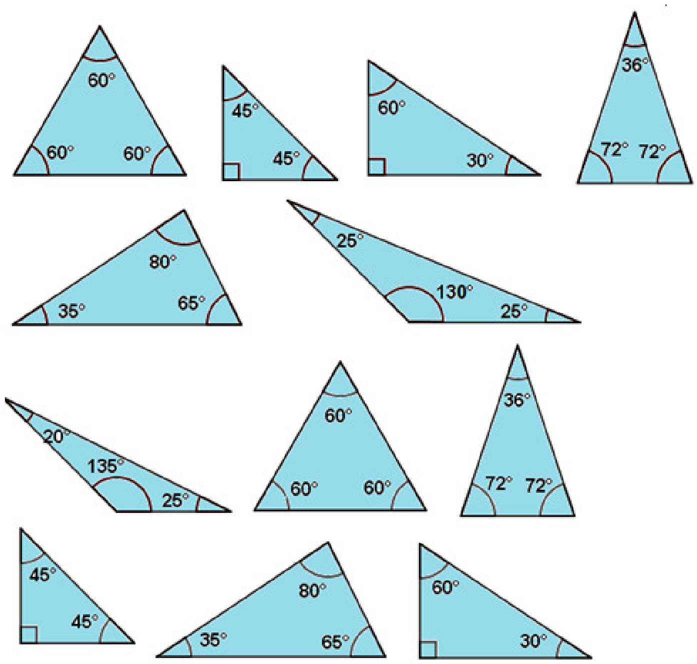
Com o intuito de familiarizar os estudantes com termos que são abordados no tratado, elaborou-se um quadro (Figura 15) e doze triângulos (Figura 16) relacionando a classificação dos triângulos.

Figura 15 - Modelo do quadro da atividade 1

		Quanto aos lados		
		Equilátero	Isósceles	Escaleno
Quanto aos ângulos	Acutângulo			
	Retângulo			
	Obtusângulo			

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 16 - Triângulos da atividade 1



Fonte: Elaborado pela autora

Dando sequência, a proposta é que os estudantes leiam os usos do instrumento que constam no tratado, compreendam, e executem as ações no instrumento fornecido. Os usos selecionados foram: representar qualquer triângulo retângulo, representar qualquer triângulo obtuso, representar qualquer triângulo acutângulo, encontrar o conteúdo de qualquer um desses Triângulos, encontrar o comprimento da linha tangente de qualquer grau, com um Raio de 10000, encontrar o comprimento de uma Secante para qualquer grau, encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau.

5.5 Tratamento didático do documento

Mediante a proposta de trabalhar o instrumento setor trigonal na educação básica, considerou-se necessária uma análise da linguagem apresentada na tradução do documento. Concordamos com Saito (2014, p. 28) que:

> A não ser que se trate de uma pesquisa histórica, utilizar documentos originais nem sempre é recomendável, pois os discentes não estão preparados para lidar com eles. Assim, para construir uma interface entre história, ensino e aprendizagem de matemática sugerimos que os documentos sejam revistos e adaptados à proposta de articulação,

> preservando neles aspectos essenciais que permitam trazer à luz, concepção de ciência e de matemática que influencia, quando não fundamenta, a prática matemática de uma determinada época.

Sendo assim, como o público alvo não está apto a ler o documento no original sendo necessária a realização de adaptações antes de ser levado para a sala de aula, buscando uma fidedignidade com os originais, para que eles compreendam e tenham aspectos do próprio documento, Saito e Dias (2013) classificaram tal ação como sendo um tratamento didático.

> Um tratamento adequado desses documentos sob a perspectiva de uma historiografia mais atualizada, associada a tendências didático-pedagógicas da Educação Matemática, pode conduzir a uma profícua articulação entre história e ensino de matemática. Mais ainda, essa articulação possibilita um novo olhar do historiador para o ensino, e vice-versa (SAITO, DIAS, 2013, p. 101).

Para o tratamento didático do documento, utilizamos a tradução do tratado *The Trigonall Sector* e, devido ao tempo escasso optamos em selecionar algumas partes do documento para desenvolver com os estudantes.

Por isso, ao trabalharmos com os documentos originais com estudantes da educação básica é necessário um tratamento. Nesse caso, estaríamos tornando as informações do tratado acessível para o público com uma determinada intencionalidade. Dias e Saito (2013) salientam que os textos devem ser tratados com os propósitos didáticos, para que o estudante possa ter o mínimo de autonomia ao lê-lo. Com isso, eles podem aprender que as expressões linguísticas não são fixas e nem mesmo o conhecimento que evidenciam o caráter histórico da produção do conhecimento.

Cabe ressaltar que o tratamento proporciona ao docente organizar as ideias de maneira diferente do que estão propostos nos livros didáticos, já que o tratamento reflete num contexto histórico, social e cultural que permite ao estudante identificar a necessidade do conhecimento matemático, assim como sua relação com outras áreas do conhecimento (artes, física, química, linguagem) (DIAS; SAITO, 2013).

Para a atividade didática nesta pesquisa, compôs o tratamento didático o acréscimo dos nomes das partes em uma imagem do instrumento (Figura 3), já que não optamos pela construção do instrumento junto aos estudantes. Além disso, optamos por não colocar o significado de alguns termos em nota de rodapé, para que as dúvidas referentes às informações desconhecidas fossem discutidas oralmente no coletivo, durante a intervenção. Essa também é uma estratégia de trabalhar a compreensão textual, por exemplo, no tratado aparece a palavra "deleite", quando esta é analisada individualmente é possível que os estudantes não saibam o seu significado, mas no texto, os elementos auxiliares podem auxiliar a compreensão do seu significado.

Mantivemos os termos: "*gr*" (graus "°"), "*quantidade de qualquer triângulo*" (medida de qualquer triângulo), "*conteúdo de qualquer triângulo*" (área de qualquer triângulo). Além disso, o termo "*Tangente Reserva*" também foi mantido, embora o documento traga poucos indícios de seu significado. Como não é um termo atual, são necessárias outras pesquisas historiográficas a fim de compreendê-lo mais profundamente. Contudo, esse fato não é relevante para o que se propõe na atividade didática.

5.6 Desenvolvimento

A organização da atividade ocorreu em três etapas, sendo que cada uma foi subdividida em momentos. O tempo de duração variou de acordo com o que era proposto em cada momento.

A primeira etapa foi dividida em dois momentos, o primeiro consistiu na realização de algumas indagações aos estudantes sobre suas concepções sobre instrumentos de medidas no cotidiano, desde sua utilização para simples tarefas a maneira como as informações indicadas por eles são interpretadas, além disso, discutiu-se sobre a necessidade da criação dos instrumentos de medida. No segundo momento, os estudantes, organizados em grupos, visualizam duas imagens referentes às práticas de medição de uma época e descrevem sobre as informações observadas.

Durante a intervenção do 1º momento (1ª etapa), os estudantes demonstraram certa passividade, de modo que a professora instigava a todo instante para que os estudantes respondessem às questões independentemente se as respostas estavam corretas ou não. No 2º momento (1ª etapa) os estudantes participaram ativamente da atividade, isso deve-se ao fato de estarem organizados em grupos com outros colegas que tenham mais afinidade.

Na segunda etapa, que também foi dividida em dois momentos, os estudantes tiveram o primeiro contato com o tratado que seria utilizado. No primeiro momento, foram feitas indagações sobre a forma de transmissão de uma informação a outras pessoas, a intenção era que os estudantes refletissem sobre a utilização dos registros escritos, para que pudessem compreender o uso dos tratados. No segundo momento, foi entregue a cada estudante a tradução do tratado *The Trigonall Sector*, eles deveriam ler as informações contidas no início da obra que relata de forma breve a finalidade do instrumento, e para quem estava destinado seu uso. As questões propostas no 1º momento (2ª etapa) tiveram participação dos estudantes, que já estavam mais envolvidos na realização das atividades, em seguida, durante a leitura inicial do tratado, os estudantes ficaram receosos em expor suas percepções acerca do entendimento do tratado por ser uma linguagem incomum, porém a mediação da professora e de alguns colegas, fez com que os demais participassem do diálogo.

Assim como as demais etapas, a terceira também foi dividida em dois momentos, sendo que no primeiro os estudantes deram continuidade na leitura da parte inicial do tratado, dessa vez, referente à descrição e uso do instrumento setor trigonal, nesse momento cada estudante tinha em mãos um instrumento. No segundo momento, organizados em grupo, os estudantes leram partes do documento, mais especificamente oito atividades de utilização do setor trigonal descritas pelo autor. Ao término de cada atividade cada grupo compartilhou suas ideias com os demais. Depois os estudantes responderam a um questionário sobre os temas abordados durante a intervenção.

A terceira etapa teve um tempo maior de duração em relação às demais, já que foram utilizadas um total de 8 horas divididas em três dias. Durante a realização da atividade, todas as etapas foram filmadas.

Os estudantes participaram ativamente das discussões propostas durante a realização da última etapa, de modo que expunham conclusões em relação às atividades realizadas e por indagarem a professora quando não compreendiam alguma atividade. No momento de responder o questionário foram dedicados, apesar do desconforto apresentado.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esse tópico consiste apresentar episódios referentes às atividades desenvolvidas, visando refletir sobre a formação do pensamento teórico, conceitual, nos estudantes, a partir de suas manifestações tendo por base os pressupostos da teoria histórico-cultural e do movimento lógico-histórico. As análises seguem a organização descrita na metodologia, em três etapas, sendo cada uma dessas divididas em dois momentos. Serão descritas ações que subsidiam a análise dos episódios.

1ª Etapa

Nesse início a proposta era que estudantes manifestassem suas reflexões sobre o conceito de instrumentos de medida. A primeira questão: “O que compreendem por instrumentos de medida?” (PO_18102016). Os estudantes explicitaram: “Uma trena”, “Régua”, “Fita métrica, balança, esquadros, transferidor, hidrômetro, medidor de pressão” (GV_18102016), as respostas descritas representam as falas de outros estudantes, já que apresentaram respostas semelhantes.

As respostas foram exemplos de instrumentos de medida. Em seguida, os estudantes foram questionados pela professora a respeito deles darem apenas exemplos e não uma ideia mais generalizada. De início eles permaneceram em silêncio (por alguns instantes) até que um estudante se manifestou dizendo: “Os instrumentos de medida são coisas usadas para determinar o tamanho ou coisas que são usadas para medir” (GV_18102016).

A dificuldade apresentada pelo grupo de estudantes quanto a generalização do conceito de instrumento de medida pode ser interpretada como reflexo do modo como o ensino de matemática tem-se estruturado na educação básica, ao menos para este grupo, ao fornecerem apenas exemplos. Esse procedimento provém de um pensamento empírico relacionado às situações sociais imediatizadas com instrumentos de medida.

Por conseguinte, a professora faz a seguinte pergunta para os estudantes: “É necessário saber matemática para manusear os instrumentos de medida citados?” (PO_18102016). As falas apresentadas foram: “Não necessariamente”, “Depende, tem uns que precisam, o termômetro, tem que saber se 37° é febre ou não”, “A régua não precisa porque você usa para fazer uma linha” , “Você não precisa da matemática para usar, mas para interpretar as coisas” (GV_18102016) . As duas respostas iniciais refletem juízos procedentes da cotidianeidade, provavelmente, vivenciada pelos sujeitos, a terceira reflete um pensamento generalizante, que expressa a necessidade de conhecimento mais elaborado para interpretar fenômenos. É possível que essa reposta tenha sido formulada a partir de uma reflexão das anteriores, indicando uma possibilidade no movimento do pensamento, do simples para o complexo.

Na sequência, a professora pergunta se para compreender as informações fornecidas pelos instrumentos é preciso ter conhecimentos matemáticos. Um estudante expõe: “Depende da experiência, porque se alguém sabe matemática e chega para medir a pressão, não consegue porque não tem experiência” (GV_18102016), em seguida, outros colegas complementam: “Se ela souber o que significa o número ela vai saber se a pressão está boa ou não”; “Falta estudo na área certa”; “A enfermeira precisa estudar enfermagem pra ela poder alinhar com a matemática”; “A enfermeira precisa saber um pouco de ciências e também matemática” (GV_18102016). Na visão dos estudantes, de uma forma geral, para interpretar informações fornecidas pelos instrumentos o conhecimento matemático por si só não é suficiente. Destacamos a partir dessas respostas, a formação do significado, no movimento do pensamento, e os níveis de compreensão da realidade, pois as respostas refletem que as ideias vão além do imediatismo do fenômeno *medir a pressão arterial*, e refletem a necessidade de articulação entre conhecimentos prático e teórico, num processo de dedução, nas formas de pensamento, pois não se trata de conhecer os numerais, ou o conceito de número, mas o significado que ele adquire na relação com o conhecimento de como o instrumento o expressa na relação com o aparato, primeiramente e depois o que isso significa para o corpo humano.

Castillo ressalta que já no século XVI as matemáticas “estavam relacionadas a outras áreas do saber, por isso, ao fazermos referência às matemáticas é mais adequado, coligá-las a outras áreas do saber” (2016, p. 16).

Na continuidade da atividade, a professora indaga os estudantes se seriam capazes de construir algum dos instrumentos citados. Após a pergunta, um estudante responde: “Fita métrica” (GV_18102016). A professora questiona como faria tal construção e o estudante responde que utilizaria uma corda ou um barbante. A professora novamente indaga como o estudante determinaria a distância entre as unidades da fita métrica. Nesse momento, o estudante responde que poderia usar uma régua, e a professora indaga como o estudante poderia realizar as marcações sem utilizar instrumentos com uma escala já estabelecida, como é o caso da régua que eles conhecem, o estudante pensa no assunto, porém não responde nada, a professora insiste em buscar respostas que refletissem conhecimentos sobre a construção de instrumentos, quando outro estudante responde: “usar os dedos ou o palmo” (GV_18102016). Diante das respostas a professora solicitou aos estudantes que ao invés de citar explicassem como construiriam os instrumentos mencionados, os participantes, porém não se manifestaram.

Ainda buscando respostas mais elaboradas a professora questionou os estudantes sobre a construção de uma balança ou aparelho de pressão. Um estudante de imediato responde que “não dá pra criar, porque o resultado da balança é exato” (GV_18102016), logo em seguida, outro estudante dá a seguinte sugestão: “se eu colocar um objeto aqui eu consigo um equilíbrio (mãos representando uma balança de dois pratos)” (GV_18102016). A professora então o indaga: “E quais objetos escolheria?” (PO_18102016). O estudante responde: “Uma pedra, um saquinho de areia. Pega um tijolo e coloca uma madeira em cima” (GV_18102016). O objetivo não era aprofundar sobre a construção de instrumentos específicos (balança e aparelho de pressão), mas que os estudantes citassem elementos necessários para sua construção, buscando explorar outras áreas do conhecimento.

A professora interviu dizendo que para alguns instrumentos os estudantes responderam de imediato quando foi feita a pergunta e outros nem mencionaram, sendo assim, indagou o que estava faltando para que os estudantes pudessem realizar as construções. Nesse momento dois estudantes responderam: “Estudo”, “Você precisa de um conhecimento em ciências para saber construir” (GV_18102016).

Para a atividade didática, consideramos que o fato de os estudantes manifestarem a necessidade de estudo e de conhecimento, pode indicar para os sujeitos, naquele momento ou posteriormente, um pensamento generalizante da sua própria necessidade de estudo e de conhecimento, que vão além do imediato dado na cotidianidade.

Ao final do diálogo a professora realizou uma breve contextualização sobre a construção dos instrumentos de medida ressaltando o fato de que, no século XVI os praticantes de matemáticas tinham instrução para construir e manipular instrumentos o que não se aplicava a qualquer indivíduo (CASTILLO, 2016).

Ainda no mesmo dia, propiciando que os estudantes manifestassem de forma oral os pensamentos sobre a criação de instrumentos de medida, a professora perguntou: Por que o homem precisou criar instrumentos de medida? As respostas dos estudantes foram: “Precisa medir”, “Para fazer construções”, “Para facilitar as coisas do dia a dia”, “Uma necessidade”, “Curiosidade”, “A balança era utilizada para o escambo, as pessoas queriam trocar coisas e ninguém queria sair lesado, então criaram um jeito”, “Tudo que foi inventado tinha uma pergunta, por que isso tem o mesmo tamanho que aquilo, qual o peso disso, eles se questionavam” (GV_18102016).

Na sequência, dando continuidade às discussões, a professora questiona sobre a possibilidade de medições antes da criação desses instrumentos. As opiniões verbalizadas foram: “Eles precisavam de uma base pra poder medir”, “Eles mediam aproximadamente”, “Pra medir o tempo, usavam o sol”, “Pra medir a temperatura usavam o próprio corpo para comparar com outro” (GV_18102016).

As respostas relacionavam-se com uma necessidade prática, a saber, escambo, construção civil, ou simplesmente medir. Além disso, houve manifestação, de possíveis formas de medir que seriam mais rudimentares, tendo como referência, elementos da natureza e partes do próprio corpo. Inferimos que a resposta que menciona uma “base” para medir, se relacione à necessidade de unidade de medida, porém não nos aprofundamos nessa análise. Nesse momento foi possível iniciar um diálogo com o passado, mesmo que as respostas tinham um caráter hipotético e pouco conhecimento histórico, já que não aparecem elementos no sentido da história dos instrumentos ou da história da matemática.

Ainda para promover esse diálogo com o passado, a atividade seguinte consistiu na observação e análise de duas imagens, os estudantes, em grupos, deveriam discutir e realizar anotações referentes à primeira imagem (Figura 13).

Destacamos os registros separando-os por grupos.

Grupo 1: “O homem. O sol. O homem está com um objeto de madeira. Ele está em um barco. Está fazendo um ângulo com o começo e o fim do instrumento. A balestilha é o nome do instrumento de medida” (GA_18102016G1).

Grupo 2: “Um homem no navio procurando um trajeto e vendo uma direção a qual seguir pelo sol medindo com a espada. Ele está em postura reta. Aparenta ser uma pessoa de tempos antigos. A balestilha pode ser um método que os antigos usavam para se localizar quando iam navegar” (GA_18102016G2).

Grupo 3: "Um homem no barco medindo a direção para onde ele quer ir através do manuseio da espada com os raios solares dando os pontos exatos. A balestilha é o nome de uma medida" (GA_18102016G3).

Grupo 4: "Há um homem em um barco com roupas que são da antiguidade. Ele usa o olho e um objeto de medida onde consegue ver aproximadamente um ângulo onde ele está com sua posição sobre o sol. O homem pode estar vendo em qual posição o barco está indo como uma espécie de bússola" (GA_181020164).

Grupo 5: "Um homem medindo um ângulo, sol, uma linha, uma estrela. Talvez ele está medindo o horário ou a posição dele" (GA_18102016G5).

Grupo 6: "O ângulo que ele olha para a estrela. Ele está usando o instrumento em um barco para saber a direção certa. Ele usava a estrela para se localizar" (GA_18102016G6).

Mediante os registros dos estudantes a professora realizou um diálogo a fim de aprofundar as percepções descritas. Com relação à estrela (sol), disseram: "Pode ser um ponto pra ele se localizar" (GV_18102016), "À noite eles usam as estrelas e de dia o sol, na imagem está de dia, mas a estrela pode representar a noite" (GV_18102016), "Faz mais sentido ele se localizar pelo sol do que pela estrela, porque a gente sabe onde o sol nasce" (GV_18102016), "Em filmes de pirata eles se localizam pela estrela que mais brilha" (GV_18102016). Embora as respostas indiquem que os estudantes não sabem que o sol é uma estrela, notamos que eles concordam que as estrelas serviam como referência para localização marítima.

Um dos grupos descreveu uma linha na imagem que mostrava o que o homem estava olhando, a professora os indagou para que explicassem qual era essa linha que estavam se referindo. As respostas foram: "A linha pontilhada representa o ângulo de visão" (GV_18102016), "Mas tem outra linha que ele está olhando" (GV_18102016). Nesse momento a professora questiona: "E o que ela representa?" (PO_18102016). Alguns grupos respondem: "os pontos cardeais" (GV_18102016), "O horizonte, está tentando achar terra" (GV_18102016).

As respostas indicam que os estudantes não conheciam o instrumento apresentado, já que foi comparado a uma espada, entretanto, mencionaram situações em que o instrumento poderia ser usado ainda que não entendessem de fato o seu funcionamento. Além disso, os estudantes associaram a balestilha à bússola, instrumento esse conhecido pelos estudantes, referindo-se a orientações e localizações geográficas. Os estudantes apresentaram considerações acerca da localização por meio do sol, para validar sua afirmação, um estudante manifestou o conhecimento sobre o ponto cardeal em que o sol nasce.

Ao final das discussões a professora fez uma breve contextualização da imagem destacando que nas grandes navegações os marinheiros usavam os instrumentos náuticos com a finalidade de obter a sua localização em alto-mar. Um desses instrumentos utilizados foi a balestilha, utilizada pelos "marinheiros entre os séculos XVI e XVIII, tinha a finalidade de medir a distância angular ou altura de um astro com relação à linha do horizonte, ou medir a distância entre dois astros" (BATISTA; PEREIRA, 2015, p. 3).

Os estudantes ainda em grupo receberam a segunda imagem (figura 14) e deveriam proceder de maneira análoga a anterior. De um modo geral, os estudantes descreveram sobre elementos da imagem, a saber: relevo, lugar plano, montanhas, árvores, torre, igreja, sol, instrumento, triângulos, letras. Assim como na imagem anterior, os estudantes fizeram registros, mas sem inferir relações entre eles. Em discussão posterior sobre o instrumento, um estudante disse que "São 3 instrumentos" (GV_18102016), outros rebatem essa ideia: "É o mesmo, só muda a posição" (GV_18102016); "Só muda o ângulo" (GV_18102016). A professora os indaga sobre os ângulos, sobre os quais eles disseram: "Nos três objetos, o primeiro e o último estão meio torto" (GV_18102016); "30°, 45°, 90°" (GV_18102016). A professora indaga onde os estudantes observam o ângulo de 90° e um estudante responde: "FG, porque é reto" (GV_18102016).

Na imagem não há valores numéricos para a medida dos ângulos, entretanto, os estudantes identificaram o ângulo de 90° indicando-o em um segmento perpendicular (parede da torre) e aos ângulos menores associaram aos raios de sol que tinham inclinações diferentes. Em relação à menção específica de 30° e 45° é possível que se origine dos conhecimentos dos estudantes referentes às medidas mais abordadas no ensino escolar.

A professora dá sequência na atividade questionando as respostas: "Vocês citaram o sol nos registros, por que vocês acham que é o sol?" (PO_18102016). Os estudantes respondem: "O sol bate na torre e faz a sombra" (GV_18102016), "A torre é o ponto de referência" (GV_18102016). A professora então questiona: "Quem está segurando o instrumento?" (PO_18102016). Os estudantes relatam: "Tá amarrado" (GV_18102016), "Está medindo se a torre tá torta" (GV_18102016), "Medindo o tamanho da torre" (GV_18102016). Mediante as respostas, a professora os indaga o porquê medir o tamanho da torre, as respostas dos estudantes foram: “Medir a distância da torre a visão” (GV_18102016), “Cada corda representa um horário de sombra” (GV_18102016).

Nas falas anteriores nota-se que os estudantes fizeram observações, porém não conseguiram fazer relações entre elas, a saber, a indicação de ângulos na imagem, que não conseguiram compreender exatamente sua utilidade, assim como, deduziram a existência de uma sombra na imagem, uma vez que isso não é justificativa para medir a torre. Inferimos que a dificuldade de relacionar tais observações deve-se à falta de pensamento teórico, além disso, os livros didáticos apresentam exercícios em que é necessário a medida da sombra determinar altura de uma torre, mas o ensino não explora o porquê medir a altura, desse modo, o estudante não realiza conexões histórico-sociais com suas observações.

Ao término fizemos uma breve contextualização da imagem apresentada ressaltando o interesse de príncipes por pessoas que tivessem instrução em aspectos práticos relacionados à geometria, já que esses eram utilizados a saber, “na organização da artilharia em uma possível guerra, na necessidade de determinar a medida das alturas de muralhas e distâncias entre navios e a costa, no traçado de mapas, no estabelecimento de posições em alto mar e na demarcação de fronteiras” (CASTILLO, 2016, p. 14).

A primeira etapa proporcionou aos estudantes reflexões sobre os instrumentos de medida, relacionando-o com a necessidade humana, conhecimento teórico e prático para sua construção e interpretação de informações fornecidas por eles. Além disso, as discussões no coletivo fizeram com que os estudantes refletissem sobre o tema abordado, propiciando o movimento do pensamento.

2ª etapa

No primeiro momento elaboramos um diálogo com os estudantes de modo que refletissem sobre as formas de comunicação atuais e as que eram utilizadas antigamente.

As discussões iniciaram por intermédio da seguinte pergunta feita pela professora: “Como vocês fariam para transmitir um recado ou uma informação a uma pessoa que estivesse distante de vocês?” (PO_19102016). Sobre esse assunto as respostas foram: “Internet, whatssap, twitter, facebook”, “Ligação por telefone”, “Carta”, “Antigamente usava pombo correio”, “Gavião”, “Sinal de fumaça”, “Eles mandavam os cavalheiros que iam de uma cidade a outra" (GV_19102016). Esse questionamento ocorreu de forma intencional, já que seriam introduzidas discussões sobre os registros dos instrumentos de medida.

Referindo-se aos instrumentos de medida a professora indaga os estudantes que pessoas poderiam realizar tais registros. Os estudantes expuseram: "Os nobres que sabiam escrever e tinham conhecimento", "Pessoas que tinham recurso financeiro para pagar um professor", "Pessoas alfabetizadas" (GV_19102016). As respostas dos estudantes se referem às pessoas que possuíam alguma instrução.

Dando sequência na discussão sobre os registros dos instrumentos de medida, a professora questiona os estudantes se era necessário ter conhecimento matemático para as descrições. Os estudantes responderam: "Sim, porque para elas falarem alguma coisa tem que saber o que é e pra que serve", "Os alfabetizados que tinham o conhecimento matemático" (GV_19102016). A professora aproveita essas respostas e faz outro questionamento: "De que maneira fariam o desenho do instrumento?" (PO_19102016). Um estudante responde: "Medindo, usando régua" (GV_19102016). A professora acrescenta que não havia a régua que eles utilizam atualmente, um estudante então complementa que poderiam utilizar outros objetos. A professora mais uma vez questiona: Como a pessoa transmitia as informações para outras pessoas? Alguns estudantes respondem: "imagens em cavernas"; "livros"; "papiros"; "repassava o conhecimento dela para outra pessoa"; "passava para alguém que não era alfabetizada, para os filhos".

Para finalizar esse primeiro momento da segunda etapa, a professora explana sobre os modos de transmitir informações, a saber, por meio dos tratados e pelas gerações. Pensando nos instrumentos, esse processo era caracterizado pela tarefa que os mestres faziam com os aprendizes (CASTILHO, 2016).

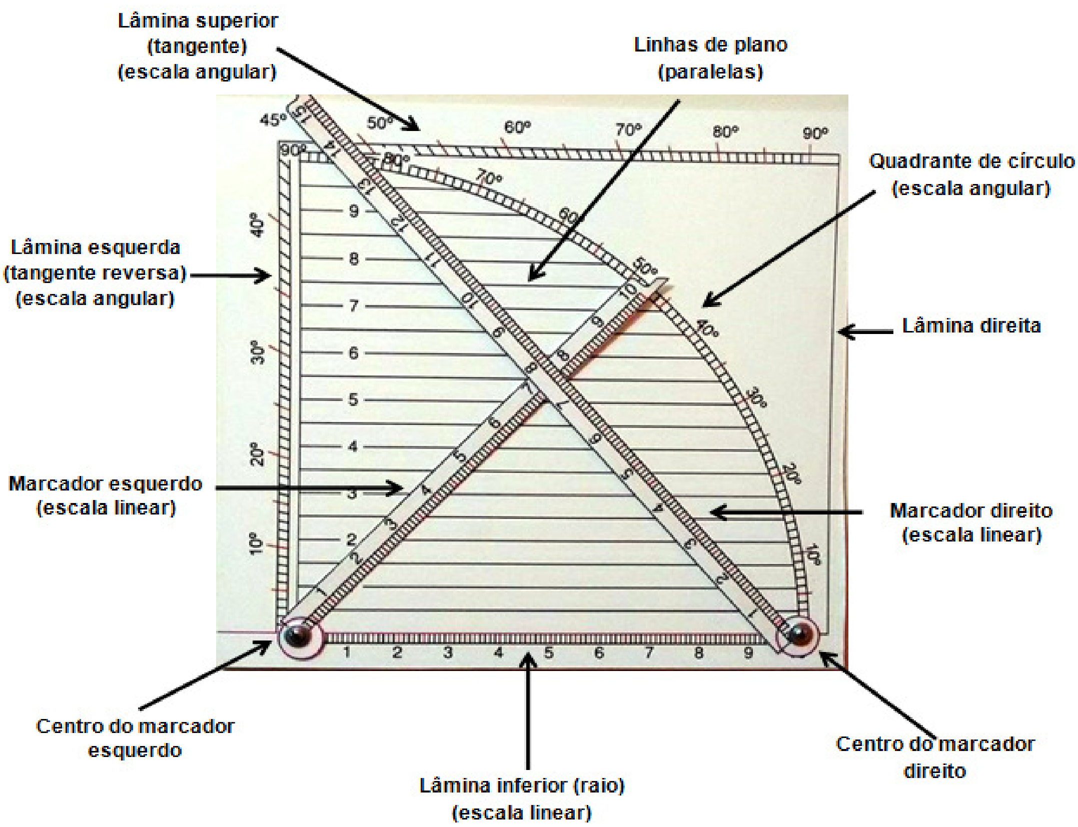
No segundo momento os estudantes passam a ter pela primeira vez um contato com o tratado. De início cada um recebeu uma tradução do tratado, por meio do qual os estudantes leram a síntese do instrumento e o tópico *Ao Leitor*, em seguida, apresentaram as impressões obtidas dessa leitura. Selecionamos as falas que sintetizam o diálogo realizado com os estudantes, já que havia falas semelhantes. Desse modo, as falas foram: "Tive que ler duas vezes", "Algumas frases não têm sentido", "Utiliza uma linguagem formal", "Um instrumento que ajuda a compreender contas", "A primeira parte é mais no geral, a segunda é direcionado totalmente ao leitor, mais fácil de entender", "Dificuldade para entender o que era altimétricas e planimétricas”, “Algumas palavras não são vistas atualmente, aí dificulta um pouco o entendimento” (GV_19102016). Pelas respostas dos estudantes percebemos algumas dificuldades encontradas. Essa reação por parte deles já era esperada, uma vez que o tratado apresenta uma linguagem diferenciada da qual estão acostumados na escola. Apesar disso, o contato com a linguagem do tratado é necessário, pois a maioria das representações com o instrumento é baseada nas descrições do documento.

Nessa etapa não tivemos movimento do pensamento, por se tratar de um diálogo com a finalidade de introduzirmos o tratado.

3ª etapa

No primeiro momento dessa etapa demos continuidade à leitura de parte do tratado, nesse caso, especificamente sobre a descrição do setor trigonal. De início foi apresentada para os estudantes uma imagem (figura 17) do instrumento destacando cada uma de suas partes.

Figura 17 – Instrumento setor trigonal, com suas partes



Fonte: Elaborado pela autora

Nesse instante, a professora faz uma leitura compartilhada com os estudantes, sendo essa realizada para identificarem as partes do instrumento e para os auxiliarem na compreensão da linguagem utilizada (termos desconhecidos), possibilitando-os para a realização das atividades posteriores.

Por intermédio da observação da imagem, os estudantes relataram sobre suas observações: “É uma régua”, “É um quadrado”, “Tem ângulos na borda, no círculo” (GV_20102016). A professora indaga os estudantes sobre que ferramentas são necessárias para realizar o desenho do instrumento. As falas foram: “O próprio objeto”, “Usavam madeiras”, “Um pedaço de transferidor” (GV_20102016). Mediante as falas percebe-se que ainda que não entendessem o instrumento no geral os estudantes identificaram alguns elementos matemáticos.

Esse primeiro momento (3ª etapa) serviu para que os estudantes conhecessem e se familiarizassem com o instrumento setor trigonal, sendo assim, não houve análise do movimento do pensamento.

O segundo momento caracterizou-se pela realização de procedimentos descritos no tratado, sendo que alguns deles utilizavam o instrumento setor trigonal.

1- Representar qualquer triângulo retângulo sendo dois de seus ângulos conhecidos.

O autor descreve sobre a classificação dos triângulos.

> Todos os tipos de triângulos são distinguidos de duas formas.
> Em primeiro lugar, por seus lados e, desse modo, são chamados. 1 Equilátero, que tem todos os lados iguais. 2 Isósceles, que tem somente dois lados iguais e o terceiro lado diferente. 3 escaleno, isto é, triângulos cujos lados não são iguais.
> Em segundo lugar, por seus ângulos, e eles são, 1 Retângulo, que contém um ângulo reto. 2 Obtusângulo, em que um dos ângulos é obtuso ou maior que um ângulo reto, que é superior a 90 *gr*. 3 Acutângulo, em que todos os ângulos são inferiores a 90 *gr*.
> Note-se que três ângulos de cada triângulo são iguais a dois ângulos retos, que é 180 *gr*. (CHATFEILDE, 1650, p. 7, tradução livre).

Os estudantes leram a descrição individualmente e fizeram os seguintes comentários: “Os triângulos equiláteros possuem os três lados iguais, ou seja, os ângulos também iguais todos possuem 60°”, “Eu não conheço o acutângulo e o obtusângulo” (GV_20102016). Com base nessas colocações, a professora os indaga perguntando: “O que compreenderam ao ler a última frase da descrição?”

(PO_20102016). Imediatamente um estudante responde: “Que se somar os três ângulos vai dar 180°” (GV_20102016).

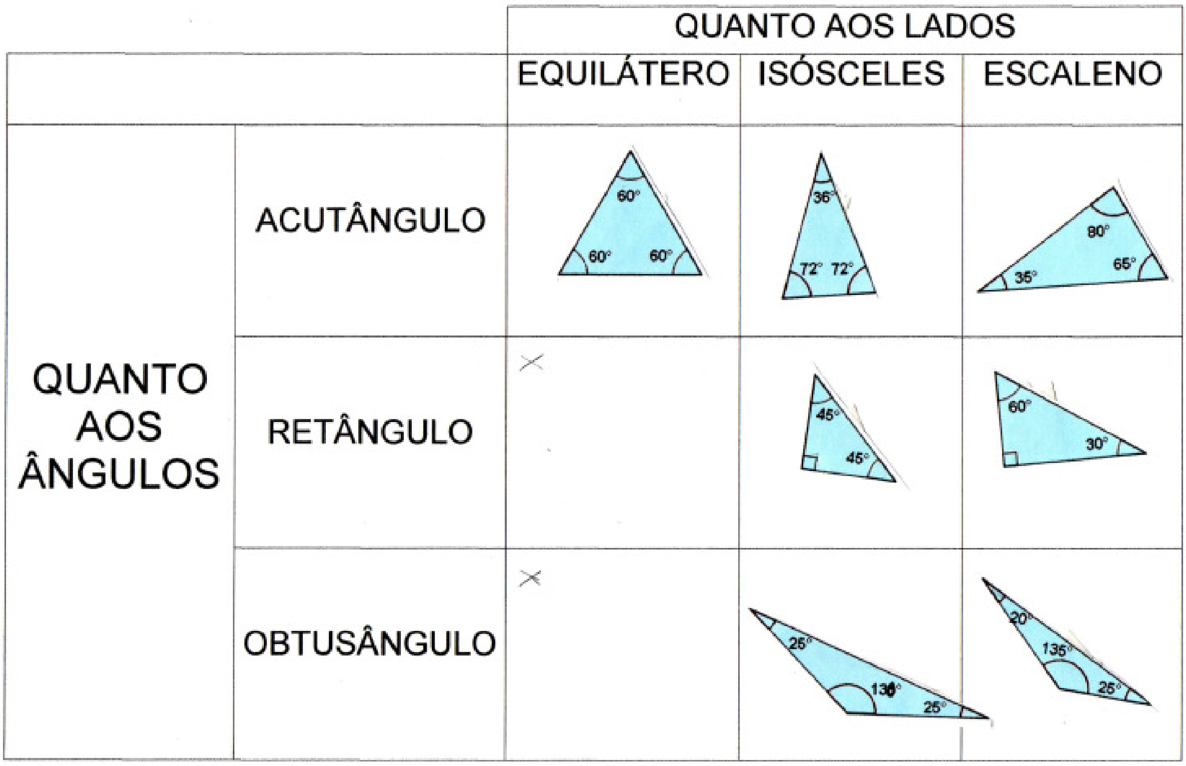
A primeira fala mostra que o estudante mobilizou conhecimentos acerca do triângulo equilátero ao apresentar informações que estavam além das descritas no tratado, relacionando a medida do lado e do ângulo do triângulo equilátero, já que o autor classifica tal triângulo tendo todos os lados congruentes e não faz referência quanto à medida de cada ângulo interno, mas sim da soma dos três ângulos. Podemos inferir duas hipóteses sobre a fala do estudante: a primeira é que suas conclusões foram baseadas na descrição do tratado, relacionando as informações sobre o triângulo equilátero (medida do lado e soma dos ângulos internos), a segunda hipótese é que talvez o estudante tenha obtido o conhecimento dos ângulos internos do triângulo de forma empírica, durante o aprendizado escolar, e associou com as informações do tratado.

A fala do estudante não é suficiente para validar uma das hipóteses, entretanto, mesmo ele tenha adquirido uma aprendizagem empírica mobilizou conhecimento para essa nova situação, o que inferimos um pensamento próximo ao dedutivo.

Em relação aos triângulos obtusângulo e acutângulo os estudantes apenas mencionaram não conhecerem tais classificações para os triângulos.

Após o diálogo com os estudantes, esses se reuniram em grupo, sendo que cada um recebeu dois quadros (Figura 15) e doze triângulos (Figura 16). No primeiro quadro os estudantes deveriam colar os triângulos referentes à sua característica relacionando-os de acordo com as medidas dos lados e ângulos, já no segundo quadro justificar de forma escrita a escolha de cada triângulo.

Figura 18 – Quadro preenchido com triângulos



Fonte: Cópia tirada pela autora

Figura 19 – Justificativa do grupo G2

Equilátero, pois tem todos os ângulos iguais (60°). Acutângulo, pois os ângulos são inferiores a 90°.	Isósceles pois tem dois ângulos iguais (72° = 72°) Acutângulo, pois os ângulos são inferiores a 90° (72°, 72°, 36°).	Escaleno, pois os ângulos não são iguais (35°, 80°, 65°). Acutângulo, pois os ângulos são inferiores a 90°.
Não é possível, pois para ser retângulo, tem que ter um ângulo de 90°, e para ser equilátero todos tem que ser iguais.	Isósceles, pois tem apenas dois lados iguais (45°). Retângulo, pois tem um ângulo de 90°.	Escaleno, pois os ângulos não são iguais (60°, 30°, 90°). Retângulo, pois tem um ângulo de 90°.
Não é possível, pois para ser equilátero, tem que ter todos os lados/ângulos	Isósceles, pois tem apenas dois ângulos iguais (25°).	Escaleno, pois os ângulos não são iguais. Obtusângulo, pois um dos

iguais, que não é o caso de ser um obtusângulo.	Obtusângulo, pois um dos ângulos é maior que 90° (130°).	ângulos é obtuso (135° > 90°).

Fonte: Transcrição do anexo A

Todos os grupos realizaram a colagem corretamente, como mostra a figura 18, e justificaram a escolha dos triângulos (figura 19). No que se refere aos espaços deixados em branco sem nenhum triângulo (figura 18) relataremos sobre o diálogo de três grupos. Um estudante do grupo G3 expõe para os colegas que acredita que os dois campos se tratam de uma “pegadinha”, já que um dos ângulos tem que ser obtuso. Em seguida, um colega do grupo aponta que talvez um dos triângulos colados possa estar errado. Após observarem os triângulos restantes, o grupo conclui que os triângulos foram colados corretamente e concluem que não há triângulos para preencher os dois campos e que ambos deveriam permanecer em branco.

Um estudante do grupo G4 avisa a professora que deixará os dois campos sem triângulo. Nesse momento, outro colega do grupo alega que “deve estar faltando triângulo, tenho certeza” (GA_20102016G4), se referindo ao espaço em branco.

No grupo G5 um estudante destacou para os colegas que o “triângulo equilátero retângulo não tem como” (GA_20102016G5) e solicita a um colega que “conte quantos triângulos tem” (GA_20102016G5). Com isso, concluiu que se tratava de uma “pegadinha” (GA_20102016G5).

A professora solicitou que um dos grupos explicasse com detalhes qual triângulo colou no campo equilátero retângulo, o grupo G1 respondeu: “Não colocamos nenhum triângulo, porque o retângulo contém um ângulo reto e o equilátero tem que ter todos os lados iguais, então não dá certo” (GA_20102016G1) e para complementar a fala, o grupo apresenta um exemplo relacionado à justificativa dada: “ele tem um ângulo de 90° e todos os lados tem que ser iguais e se você colocar 90°, 90°, 90° vai passar de 180°, então está errado” (GA_20102016G1).

O mesmo foi solicitado para o triângulo equilátero obtusângulo. O grupo G5 disse não ter colocado nenhum triângulo “porque precisa ter os três lados iguais e obtusângulo precisa ter um ângulo com mais de 90° e se somar ultrapassa 180°" (GA_20102016G5).

Os estudantes ao receberem os 12 triângulos tentaram de diversas formas encaixá-los para que nenhum espaço no quadro ficasse em branco. Com isso, percebemos que as classificações dos triângulos não geraram dúvidas, quanto aos lados e ângulos, pois todos identificaram e justificaram corretamente. Embora a classificação dos triângulos mobilize somente o pensamento empírico este serviu de base para reflexões posteriores, já que por meio dos juízos descritos no tratado (tipos de triângulos) os estudantes fizeram deduções que permitiram ir além da classificação dos triângulos e a somatória das medidas dos ângulos, concluindo que não existe triângulo equilátero retângulo e triângulo equilátero obtusângulo.

Os estudantes demonstraram dificuldade no momento de justificar a escolha dos triângulos por meio da escrita, alegando que utilizar a fala seria um recurso mais rápido e fácil do que a escrita. Essa atitude pode ter ocorrido pelo fato de que os estudantes estão acostumados a realizar apenas cálculos nas aulas de matemática, não tendo o hábito de justificar o pensamento por meio da escrita.

2- Representar qualquer triângulo retângulo

O autor descreve como representar triângulos retângulos usando o instrumento setor trigonal.

> Gire o marcador esquerdo em direção da lâmina da Tangente, pois, desse modo, ele faz um ângulo reto com o Raio. Em seguida, gire o marcador direito em direção ao grau do outro ângulo conhecido na linha Tangente e, assim, os dois marcadores e o raio resultarão num Triângulo, com as proporções dos lados entre si (CHATFEILDE, 1650, p. 8, tradução livre).

Essa atividade consistiu na representação de qualquer triângulo retângulo a partir das leituras do tratado e da utilização do instrumento setor trigonal.

No momento de compartilhar os triângulos representados, os grupos G5 e G6 deram o mesmo exemplo, um triângulo retângulo com dois ângulos de 45°. O grupo G4 não se prendeu em um exemplo específico, alegando que é possível representar vários triângulos retângulos apenas fixando o marcador esquerdo e movimentando o marcador direito do instrumento. Com isso, podemos perceber que tal grupo generalizou o processo de representação do triângulo retângulo. Inferimos que a dinamicidade permitida pelo instrumento favoreceu essa conclusão.

3- Representar qualquer triângulo obtuso

O autor faz a seguinte descrição:

> Suponhamos que os dois ângulos conhecidos sejam 60 e 100 *gr*. esse triângulo deve necessariamente ser obtuso, porque 100 *gr*. é maior do que 90 *gr*., e porque nenhum dos marcadores pode formar um ângulo maior do que 90 *gr*., portanto, o ângulo obtuso deve ser encontrado na intersecção de dois marcadores, desse modo, para encontrar este triângulo, faço assim: adicione os dois ângulos conhecidos e eles farão 160: substraia deste 180, e assim restará 20, que é o terceiro ângulo, portanto, para representar isso, coloque um marcador em 20 *gr*. e o outro em 60 *gr.* e onde eles se cruzarem, a intersecção, formará um ângulo de 100 *gr*., porque todos os três ângulos devem fazer exatamente 180 *gr*. e os marcadores, assim aplicados, darão o triângulo procurado, e as divisões dos marcadores, juntos em suas intersecções com o raio, mostrarão as proporções dos três lados da mesma, como nos exemplos anteriores (CHATFEILDE, 1650, p. 11, tradução livre).

Para a realização dessa atividade, descrita no tratado, os estudantes foram organizados em grupos, sendo solicitado que fizessem a leitura e representassem no instrumento setor trigonal as orientações dadas pelo autor para a representação do triângulo obtuso.

Lendo as instruções do tratado, um estudante do grupo G5 expõe para os demais que “É para colocar um dos marcadores em 60° e outro em 20°” (GA_24102016G5), de imediato um colega de grupo indaga: “Mas fala qual dos marcadores”? (GA_24102016G5). O outro responde que “Pode ser qualquer um desde que seja um em 60° e outro em 20°” (GA_24102016G5).

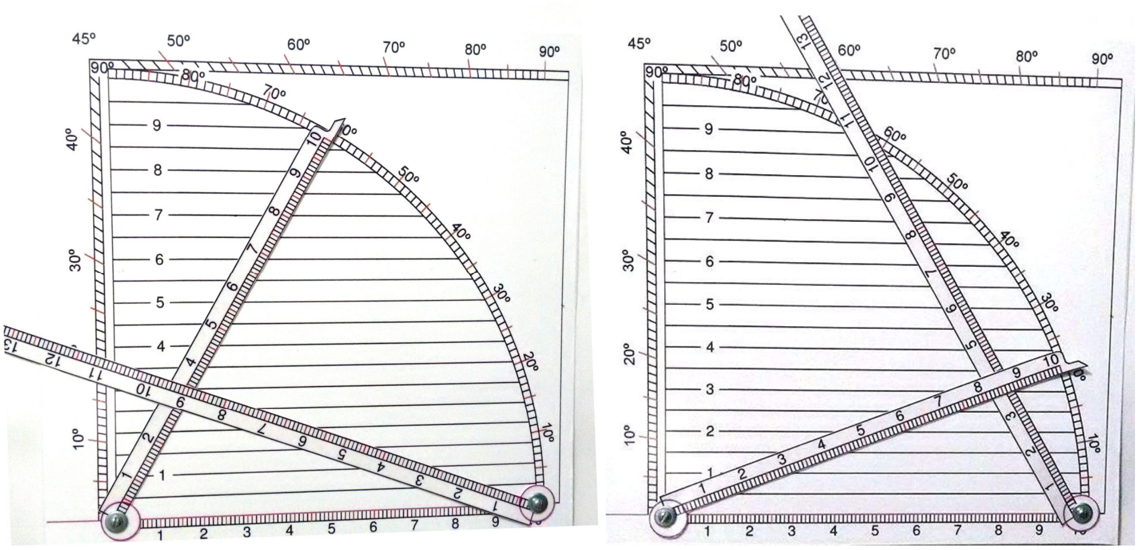
Inicialmente um dos estudantes parte dos juízos de que um ângulo é 20° e o outro é 60° (instruções do tratado).

A mesma ideia pode ser observada na fala do estudante do grupo 6, que após a leitura diz aos demais colegas de grupo que “ Se não tem como formar um ângulo de 100° com o marcador então você faz os outros, que tem que ser 80° somados, como um é 60° o outro é 20°” (GA_24102016G6).

A indagação do como fazer, ou seja, qual marcador vai em qual posição, é característica de um pensamento empírico, ou seja, o estudante ao perguntar isso indica uma indisposição para refletir sobre a questão ou mesmo não tem condições cognitivas para essa tarefa. Busca, de imediato, alguém que diga exatamente “o passo a passo”. Inferimos que esse modo de agir reflete um ensino que pouco exige reflexões dos estudantes.

Na resposta do outro estudante de que pode ser qualquer marcador, como na figura 20, indica uma abstração necessária para desenvolver o conceito de congruência de triângulos.

Figura 20 – Triângulos obtuso com ângulos de 60° e 20°



Fonte: fotografia tirada pela autora

Após o término da representação do que foi descrito no tratado, a professora pergunta aos estudantes quais dificuldades tiveram na atividade, algumas das respostas foram: “o tratado não falou qual ponteiro iria ficar em cada ângulo, se o esquerdo ia ficar em um e o direito em outro, tive que adivinhar, mas os dois jeitos dá certo” (GA_24102016G6); “a linguagem inicial foi difícil, mais para o final que ele explicou mais certinho que um ia no 60° e o outro no 20°, ficou mais fácil” (GA_24102016G5).

Um estudante aponta como dificuldade o fato de algumas instruções não serem dadas diretamente (qual marcador em cada ângulo), porém isso não foi obstáculo para que o estudante deduzisse que a representação independe do marcador escolhido, uma vez que utilizou-se os juízos, que um marcador iria no 60° e o outro no 20°. Isso indica a necessidade de se explorar as formas de pensamento teórico na escola.

No que se refere à representação do triângulo obtuso no instrumento, um estudante do grupo G6, responde rapidamente e de forma sucinta: “Ao invés de você representar 100° represente os outros dois” (GA_24102016G6). Após a representação do triângulo com o instrumento o estudante foi capaz de sintetizar o procedimento utilizado, ainda que não apresentou maiores detalhes em sua fala conseguiu organizar o pensamento.

No instrumento mediante as instruções do tratado, três estudantes quiseram expor suas representações, os triângulos representados tinham a medida dos ângulos internos sendo: 41°, 39°, 100°; 40°, 40°, 100°; 20°, 60°, 100°, nota-se que apenas um dos exemplos corresponde a descrição do tratado, os outros dois estudantes justificaram que compreenderam a ideia e que optaram em realizar um exemplo diferente do proposto pelo autor.

Desse modo, interpretamos que os estudantes ao compreenderem o modo geral de representação do triângulo obtuso com o instrumento mantendo a soma dos ângulos internos igual a 180° puderam realizar a transição do caso geral ao particular (DAVYDOV, 1988).

A professora representou um triângulo qualquer no setor trigonal e solicitou que os estudantes explicassem como fariam para encontrar os ângulos desse triângulo. Os estudantes respondem que dois ângulos podem ser encontrados olhando no próprio instrumento (quadrante de círculo e linha tangente, figura 3), e, para encontrar a medida do terceiro ângulo “soma os dois e subtrai de 180°” (GV_24102016). Isso evidencia que os estudantes atingiram o objetivo de aprendizagem que constam no 7º ano do ensino fundamental, em que o estudante deve ter a habilidade de “saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de *n* lados” (SÃO PAULO, 2012, p. 59, grifo do autor), porém de outra maneira. A organização didática entrelaçou outros elementos contextuais, que comumente não observamos no ensino escolar.

Percebemos o movimento do pensamento na fala do estudante ao generalizar o processo para encontrar os ângulos de um triângulo qualquer sem utilizar os juízos (representar um triângulo obtuso de 60° e 100°) descritos no tratado.

4- Representar qualquer triângulo acutângulo

O autor descreve tal representação do seguinte modo:

> Isto é feito apenas aplicando-se os marcadores nos graus dos ângulos conhecidos na linha tangente e no quadrante.
> Mas, se qualquer dos ângulos estiver acima de 60 *gr.* então ele deve ser suprido, colocando-se um dos marcadores no complemento de ambos, adicionados em conjunto, até 180 *gr.*, suponhamos que os dois ângulos agudos conhecidos sejam de 60 e 80: os marcadores ao serem aplicados a esses graus na Tangente e no Quadrante não se encontrarão para se cruzarem, portanto, coloque um marcador em 60, e o outro em 40 *gr.* que é o complemento da soma de ambos, 140 para 180, e assim você terá o Triângulo procurado, a proporção de seus lados é encontrada da forma como dito anteriormente (CHATFEILDE, 1650, p. 12, tradução livre).

Os estudantes realizaram a atividade corretamente sem questionamentos. Desse modo, a professora solicita que os estudantes representem um triângulo isósceles acutângulo.

Um estudante do grupo ressalta que representou um triângulo com os ângulos 80°, 50° e 50°, já outro estudante aponta que fez um triângulo com todos os ângulos iguais a 60°. No momento de compartilhar as representações, ele faz a seguinte observação: “Eu não lembrei que são só dois lados iguais, aí eu fiz três lados iguais” (GV_24102016). Em seguida, seu colega acrescenta: “Pra ser isósceles dois lados são iguais e um diferente” (GV_24102016). Nesse momento, os estudantes estão se referindo as instruções do tratado sobre a classificação dos triângulos. A professora então ressalta que o triângulo que contém os três ângulos internos com medida igual a 60° também é isósceles, os estudantes de imediato perguntam o porquê. Logo após esse questionamento, um estudante de outro grupo após instantes responde: “Porque também tem dois lados iguais não importa que tenha três” (GV_24102016), e os outros rebatem: “Mas o isósceles não tem um lado que não é igual?” (GV_24102016).

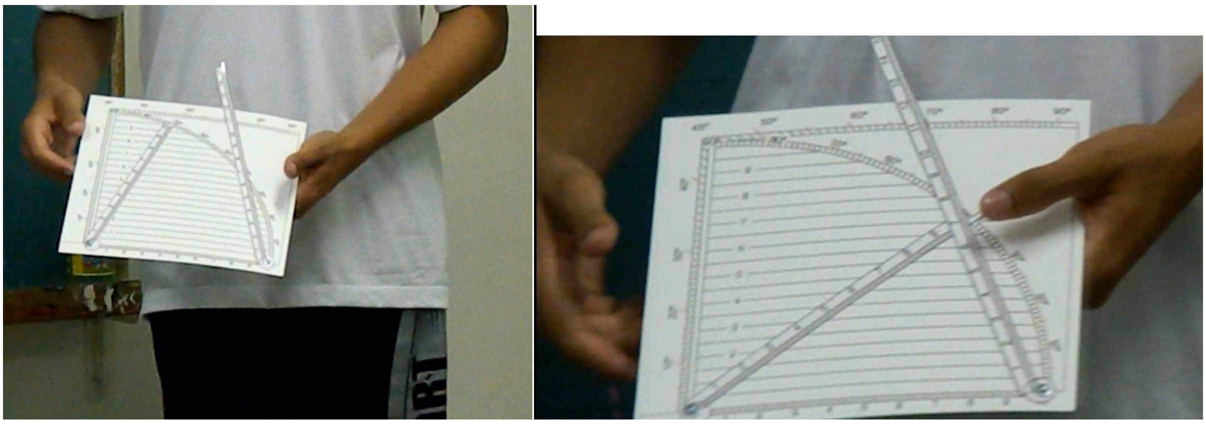
Não existe uma única resposta para a representação de um triângulo isósceles acutângulo no instrumento setor trigonal, a ideia era que os estudantes compreendessem esse tipo de triângulo para realizar sua representação, o que ocorreu, já que os estudantes não tiveram problema no entendimento.

Em relação às discussões sobre um triângulo equilátero também ser isósceles, a professora explicou para os estudantes sobre a definição atual e que essa podem ter sofrido mudanças ao longo do tempo [6].

. Os estudantes usaram a descrição do tratado para fazer suas indagações a respeito do triângulo cujos ângulos são todos com medidas iguais a 60°. Essa atividade mostrou para os estudantes que as definições para triângulo isósceles acutângulo sofreram mudanças ao longo do tempo. Além disso, foi evidenciado que os estudantes não conheciam as características desses triângulos anteriormente a essa atividade didática.

Um estudante ressalta que: "Não dá pra fazer dois ângulos de 70° com o instrumento, porque os marcadores não se encontram" (GV_24102016). Antes que a professora pudesse fazer um comentário, um colega se prontifica a responder: "70° e 70° ele não vai fechar (o triângulo) no instrumento, aí você esquece um dos maiores e marca os outros dois, coloca um no ângulo de 70° e um no ângulo de 40°, assim o outro só poderia ser 70°".

Figura 21 - Representações do estudante no setor trigonal



Fonte: tirado pela autora

Notamos que o estudante apreendeu as orientações apresentadas pelo tratado, de outro momento, utilizando a relação da soma dos ângulos internos de um triângulo. Desse modo, o estudante não só compreendeu as orientações, como conseguiu aplicá-las em exemplos particulares. Este movimento do pensamento é o que se espera para a formação de conceitos no âmbito escolar.

[6] Não sabemos as causas reais do autor do tratado ter escrito a definição de triângulo isósceles dessa forma, isso poderia ser objetivo de novas pesquisas.

5- Encontrar o comprimento da linha da tangente de qualquer grau, com um raio de 10000

Sobre essa representação o autor descreve:

> Gire para trás o marcador do lado esquerdo para o lado esquerdo da lâmina de modo que ele faça um ângulo reto com o Raio, em seguida, gire o marcador do lado direito para o grau exigido na linha tangente, e marcando o lugar de sua intersecção com o outro marcador, você deverá aí ver entre as divisões do marcador do lado esquerdo o número de partes que de tal Tangente deve ser.
> Suponhamos que o grau seja 30, cuja tangente que encontraria, com os marcadores sendo aplicados um com o outro, conforme anteriormente mencionado, as partes interceptadas no marcador do lado esquerdo, entre o marcador do lado direito e o raio, deverão ser 5773, que deve ser o comprimento da Tangente (CHATFEILDE, 1650, p. 19, tradução livre).

Os estudantes organizados em grupos leram as instruções no tratado realizaram a atividade proposta. A professora escolheu alguns grupos para expor suas respostas, no intuito de que todos os grupos participassem das discussões, e não focar em apenas um, a escolha dos grupos ocorreu aleatoriamente.

O grupo G2 explicou o procedimento realizado: “Colocar o marcador esquerdo formando um ângulo reto, o marcador direito mostra a tangente, aproximada que pode ser 57” (GV_25102016). Nesse momento, o grupo G6 indaga o grupo G2: “Não poderia ser 5,7?” (GV_25102016). Um estudante do grupo G5 complementa: “é proporcional” (GV_25102016).

Cabe ressaltar que nas atividades anteriores foi feita uma explanação aos estudantes sobre a ideia de proporcionalidade. A professora mais uma vez reforça a ideia de proporção explicando que o enunciado da atividade ressalta o raio sendo 10000. Logo, se considerarmos a base[7] do triângulo 10, a linha da tangente será 5,7 e se considerarmos a base 100 a linha da tangente será 57, mas como a orientação é para um raio de 10000, teremos a tangente igual 5700. A professora ainda explicou por qual motivo a tangente encontrada pelos estudantes refere-se a 5700 e o tratado mostra 5773, fazendo referência às tabelas trigonométricas dos ângulos.

---

[7] A base do instrumento seriam 10 u.c. (unidades de comprimento), porém não adotamos essa notação, para melhor fluidez do texto, pois compreendemos que o contexto não deixa dúvidas nem ambiguidades.

6- Encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau

O autor instrui sobre encontrar o comprimento de uma linha de senos.

> Não há mais necessidade de encontrar isso, mas olhar para o grau no quadrante; então, observando, entre os paralelos, apenas reunindo com o grau: você deverá encontrar ali as partes procuradas. Por exemplo, se eu soubesse o comprimento do Seno de 30 *gr*. lançando meu olho sobre o arco de círculo, onde é cortado com o grau de 30: eu o encontro reunindo exatamente na intersecção do paralelo de 5: ou 5000. Concluo então que se o Raio é 10000, o seno de 30 *gr.* deve ser necessariamente 5000.
> O uso desta linha eu também me remeto aos escritos de outros porque é tão comumente tratado e conhecido de todos (CHATFEILDE, 1650, p. 23, tradução livre).

Os estudantes organizados em grupo leram a descrição e explicaram suas conclusões. O grupo G3 expôs: “Colocar o marcador do lado esquerdo no 30°, bateu bem no 5 paralelo ao 5 das linhas paralelas, concluímos que esse é o seno, que é 5000” (GA_26102016G3). O grupo G3 acrescenta: “Nós pensamos no arco de círculo” (GA_26102016G2). A professora indaga aos grupos em que parte da descrição o autor menciona utilizar o marcador para encontrar o comprimento da linha de senos, o grupo G2 aponta que a palavra intersecção sugere a utilização dos marcadores, a professora mais uma vez indaga os grupos sobre a possibilidade de olhar apenas para o instrumento sem utilizar os marcadores. O grupo G3 expõe: “Dá pra olhar, mas achamos mais fácil fazer com o marcador” (GA_26102016G3), o grupo G6 complementa: “Não precisa do marcador, só olhar no arco de círculo com o paralelo” (GA_26102016G6). A professora questiona o fato do tratado escolher o ângulo de 30° e o grupo G3 justifica que tal ângulo coincide exatamente no paralelo 5 e que se fosse outro ângulo o valor seria aproximado. Nesse sentido, a professora pergunta aos estudantes qual seria o valor do seno de 50°, os estudantes respondem: “aproximadamente 7,6” (GV_26102016).

Percebe-se que alguns estudantes, inicialmente, não se atentaram ao fato do tratado não mencionar sobre os marcadores para encontrar o comprimento de uma linha de senos, entretanto as indagações da professora e as observações de outros colegas permitiu refletissem sobre a representação. Além disso, o juízo de seno de 30° ser igual a 5 ou 5000, mencionado no tratado, contribuiu para que os estudantes deduzissem sobre tal escolha, já que esse comprimento coincide exatamente com um dos paralelos do instrumento, desse modo, a partir de tal dedução os estudantes formularam outro juízo, ao mencionar o valor aproximado do seno de 50°.

As atividades desenvolvidas com o tratado e o instrumento setor trigonal permitiram que os estudantes relacionassem os conhecimentos apresentados com os já adquiridos, e assim compreender o movimento do pensamento dos estudantes, por meio de suas manifestações.

Ao término das atividades foi elaborado um questionário (Apêndice A), de modo que sintetizasse os conceitos abordados durante a intervenção.

A questão 1 (As discussões permitiram você refletir sobre o porquê os instrumentos de medida foram criados pelo homem? Se sim, escreva suas reflexões) permitiu que os estudantes fizessem considerações sobre as discussões desenvolvidas na primeira etapa da aplicação da atividade didática. Para a análise, as respostas foram separadas nas ideias principais: facilitar a vida do homem, suprir as necessidades e usamos *em branco* para as não respondidas.

Tabela 2 - As discussões permitiram você refletir sobre o porquê os instrumentos de medida foram criados pelo homem? Se sim, escreva suas reflexões.

Respostas	Número de estudantes
Em branco	1
Facilitar a vida do homem	15
Suprir necessidades	7

Fonte: Elaborado pela autora

Não apontamos todos os registros feitos pelos os estudantes, pois algumas respostas eram semelhantes a outras. As respostas foram: “Sim, pois quando falamos sobre esse assunto desperta certa curiosidade de como eram as coisas antigamente, como faziam, o porquê de fazer aquilo, e agora já sabemos que foi por necessidade, por querer avançar na matemática, permitir novos estudos” (RE_26102016), “Sim, cheguei a conclusão que esses instrumentos foram criados para facilitar alguns cálculos na vida do homem, antes e atualmente” (RE_26102016), “Sim, pois nós nunca tínhamos pensado em como eles mediam as coisas antigamente e essas discussões nos fizeram refletir um pouco sobre isso" (RE_26102016).

Notamos que o diálogo desenvolvido permitiu que os estudantes concluíssem que os instrumentos são utilizados por uma necessidade humana ou para facilitar alguma ação.

Na questão 2 (Sabendo-se que a medida de dois ângulos internos de um triângulo são iguais, como podemos classificar esse triângulo?) as respostas foram classificadas: em branco, coerentes com o conceito, incoerentes. A tabela 3 mostra apresenta os dados.

Tabela 3 - Sabendo-se que a medida de dois ângulos internos de um triângulo são iguais, como podemos classificar esse triângulo?

Respostas	Número de estudantes
Em branco	4
Coerentes com o conceito	13
Incoerentes	6

Fonte: Elaborado pela autora

Os estudantes que escreveram respostas incoerentes classificaram o triângulo como escaleno, sendo que o triângulo escaleno não possui ângulos internos congruentes. Dos estudantes que responderam a questão coerente com o conceito daremos destaque a um, que descreveu que o triângulo poderia ser isósceles, obstusângulo, acutângulo, retângulo ou equilátero. Como a questão não faz referência à medida do terceiro ângulo do triângulo há mais de uma possibilidade de respostas, que caracterizou a descrição do estudante.

Tal questão relaciona-se com o ensino tradicional em que os estudantes apontam o triângulo como sendo isósceles apenas (maioria das respostas), sem fazer nenhuma relação. Inferimos que o estudante que descreveu 5 classificações para o triângulo percebeu que poderia classificá-lo não só pela medida dos lados, mas também pela medida dos ângulos internos. Desse modo, é possível analisar o movimento do pensamento empírico para o teórico por meio de análise das características.

A questão 3 (É possível representar um triângulo com dois de seus ângulos sendo retos?) serviu para que a professora fizesse uma análise da compreensão ou não dos estudantes da relação entre a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo.

Para analisar essa questão separamos as respostas da seguinte maneira: em branco, não, justificativa coerente; sim e não, justificativa incoerente. Sintetizamos na tabela 4 as respostas apresentadas pelos 23 estudantes.

Tabela 4 - É possível representar um triângulo com dois de seus ângulos sendo retos?

Respostas	Número estudantes
Em branco	2
Não, justificativa coerente.	9
Sim	6
Não, justificativa incoerente.	6

Fonte: Elaborado pela autora

Ao analisar o quadro acima percebemos que nove alunos conseguiram responder à questão de forma correta, ou seja, entenderam que é impossível representar um triângulo com dois ângulos retos, uma vez que a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo tem que ser igual a 180°. Apesar de seis dos estudantes terem respondido incorretamente (sim), necessita-se de uma investigação mais aprofundada, já que os estudantes deram respostas que não correspondiam com a pergunta, a saber, “sim, pois a altura pode ser do mesmo tamanho que a base” (RE_26102016).

No caso dos 6 estudantes que responderam a questão corretamente, mas a justificativa está incoerente, compreenderam que em um triângulo qualquer é impossível ter dois ângulos retos, pois ao serem indagados pela professora, oralmente deram a justificativa correta, porém não conseguiu expressar em palavras tal justificativa. Um dos estudantes que respondeu em branco foi pelo fato de ter estado ausente na maioria das aulas.

O objetivo da questão 4 (Com a leitura do tratado e a manipulação do instrumento foi possível encontrar a área de triângulos. Como generalizar esse processo para encontrar a área de qualquer triângulo?) foi observar o nível de compreensão dos estudantes em relação a generalização para se encontrar a área de triângulos, a partir da atividade com o instrumento.

Para analisar essa questão separamos as respostas da seguinte maneira: em branco, apresentam generalização e não apresentaram nenhuma generalização.

A partir da tabela a seguir as respostas foram apresentadas para a análise dos dados.

Tabela 5 - Com a leitura do tratado e a manipulação do instrumento foi possível encontrar a área de triângulos. Como generalizar esse processo para encontrar a área de qualquer triângulo?

Respostas	Número de estudantes
Em branco	1
Apresentam generalização	13
Não apresentaram nenhuma generalização	9

Fonte: Elaborado pela autora

Observando a tabela 5 percebemos que 13 estudantes conseguiram responder à questão de forma correta, ou seja, registraram uma generalização para encontrar a área de qualquer triângulo. O estudante que respondeu em branco foi o que faltou na maior parte das aulas, e nas que esteve presente não interagia com os colegas.

Já os nove estudantes que responderam à questão de forma incorreta, ou seja, não representaram nenhuma generalização, não explicaram com clareza: “Dá pra medir com a perpendicular” (RE_26102016), “Eu acho que você aprende com uma pessoa que tem prática, acho que você consegue e para encontrar a área é fácil” (RE_26102016), “Não, porque um triângulo tem medidas diferentes entre seus lados” (RE_26102016), outros não interpretaram o enunciado da questão, como podemos ver na resposta do estudante: “Foi possível” (RE_26102016), uma resposta que não condiz com aquilo que estava sendo solicitado.

A questão de número 5 (Mediante as informações apresentadas no tratado, qual a área dos triângulos?) serviu para que a professora fizesse uma análise da possibilidade dos estudantes mobilizarem o conhecimento sobre o cálculo da área de qualquer triângulo, abordado por meio da leitura feita no tratado e pela utilização do instrumento.

Para analisar essa questão separamos as respostas da seguinte maneira: em branco, conseguiram calcular a área, cálculo incorreto das áreas, conseguiram calcular uma das áreas.

A partir da tabela a seguir as respostas foram apresentadas para a análise dos dados.

Tabela 6 - Mediante as informações apresentadas no tratado qual a área dos triângulos abaixo?

Respostas	Número de estudantes
Em branco	3
Conseguiram calcular a área	9
Cálculo incorreto das áreas	7
Conseguiram calcular uma das áreas	4

Fonte: Elaborado pela autora

Ao analisar o quadro acima percebemos que nove alunos conseguiram responder à questão de forma correta, ou seja, determinaram a área dos triângulos, chegando ao resultado esperado.

Os sete estudantes que responderam à questão de forma incorreta erraram os cálculos de multiplicação e principalmente de divisão de números decimais, dando indícios que compreendiam o procedimento a ser realizado, mas apresentaram dificuldade nas operações básicas.

Cabe ressaltar que os estudantes apresentaram dificuldade para calcular a área do triângulo retângulo, já que a altura coincidia com o lado do triângulo (triângulo retângulo), situação não abordada com o instrumento. Nesse caso, podemos inferir que os estudantes não generalizaram o processo, mas sim fixaram um caso particular representado pelo instrumento.

A questão 6 (Dada as medidas de dois ângulos internos de um triângulo, como podemos encontrar a medida do terceiro ângulo? Explique) serviu para que os estudantes pudessem explicitar de maneira geral a relação existente entre a soma dos ângulos internos de um triângulo. As respostas foram classificadas em: branco, erro conceitual, não condiz com a pergunta, correta (generalização), correta (exemplos).

A tabela a seguir mostra as respostas apresentadas.

Tabela 7 - Dada as medidas de dois ângulos internos de um triângulo, como podemos encontrar a medida do terceiro ângulo? Explique.

Respostas	Números de estudantes
Em branco	6
Erro conceitual	4
Não condiz com a pergunta	1
Correta (generalização)	8
Correta (exemplo)	4

Fonte: Elaborado pela autora

Observamos que oito estudantes responderam corretamente a pergunta, explicitando a generalização de como é possível encontrar a medida de um ângulo interno de um triângulo, sendo os outros dois ângulos conhecidos.

A resposta que tipifica essa ideia é: "A soma de todos os ângulos de um triângulo é 180 *gr*. Então, basta somar os dois ângulos fornecidos e depois pegar o resultado e subtrair de 180°" (RE_26102016). Por conseguinte, tivemos quatro estudantes que responderam à questão corretamente justificando por meio de exemplo, como podemos verificar a seguir: "O total de todos os ângulos são 180°. Dando dois ângulos de exemplo, um ângulo de 45° e outro de 90°, irá faltar 45° para dar o total" (RE_26102016). Quatro estudantes apresentaram erro conceitual ao escrever: "Acho que fazendo uma conta de multiplicação e dividindo o resultado por 2" (RE_26102016). Como o estudante respondeu mais próximo do cálculo da área de um triângulo, pode ser que o estudante tenha respondido uma pergunta no lugar de outra. E por fim, um estudante deu uma resposta que interpretamos como incoerente à pergunta formulada: "Na explicação da teoria fica mais fácil de compreender do que na prática" (RE_26102016).

Para finalizar o questionário na questão 7 (O que mais gostaria de comentar ou sugerir?) os estudantes poderiam relatar suas experiências ou sugerir algo que pudesse melhorar o desenvolvimento de atividades posteriores. As respostas foram classificadas em: branco, elogios para a pesquisa e contribuição para o aprendizado por meio das atividades propostas.

Tabela 8 - O que mais gostaria de comentar ou sugerir?

Respostas	Números de estudantes
Em branco	9
Elogios para a pesquisa	6
Contribuição para o aprendizado por meio das atividades propostas	8

Fonte: Elaborado pela autora

Nenhum dos estudantes escreveu sugestões, eles expressaram comentários como elogios para a pesquisa: “a professora proporcionou um aprofundamento sobre a área pesquisada” (RE_26102016), 8 estudantes relataram como as atividades contribuíram para a aprendizagem: “Aprendi muitas coisas sobre os triângulos, como construir suas medidas, ângulos, proporções e com a atividade consegui conhecer também o setor trigonal que nem sabia que existia” (RE_26102016). Estas respostas representam a de outros colegas que se assemelharam a essas.

Os estudantes ao responderem o questionário puderam apresentar suas considerações sobre os assuntos abordados na atividade didática, a saber, a criação dos instrumentos por uma necessidade humana. Além disso, realizaram generalizações referentes a conceitos matemáticos, como o cálculo da área de qualquer triângulo. Desse modo, tais manifestações permitiram analisar o movimento do pensamento na formação dos conceitos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação desta dissertação iniciou-se pelo questionamento: qual o movimento do pensamento que se pode inferir a partir de uma atividade didática desenvolvida com o uso do instrumento setor trigonal e seu respectivo tratado? Por meio desta questão definimos o objetivo geral de investigar o movimento do pensamento de estudantes do ensino médio na formação dos conceitos inerentes ao uso do instrumento setor trigonal e seu respectivo tratado em uma atividade didática.

O tema do trabalho surgiu da participação no grupo de pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática (HEEMa) que realiza análises de documentos históricos e por meio deles propõe construir interfaces entre história, ensino e aprendizagem de matemática e explorar potencialidades didáticas de antigos instrumentos matemáticos. Estudamos um tratado chamado *The Trigonall Sector* e o instrumento setor trigonal.

Analisamos e refletimos sobre as potencialidades didáticas do instrumento setor trigonal, articulando os conhecimentos matemáticos agregados a ele e ao tratado com o contexto histórico no qual ambos estavam inseridos.

Sobre as potencialidades destacamos a representação de um triângulo retângulo no instrumento que permite encontrar a tangente e a secante de um ângulo conhecido. Essa é uma potencialidade didática, uma vez que esses conceitos (tangente e secante) na educação básica são ensinados por meio das razões trigonométricas do seno e cosseno, o que não ocorre no instrumento, já que ele possibilita uma mudança na ordem dos conceitos a serem ensinados.

Outra potencialidade didática está na representação de um triângulo obtuso no instrumento, uma vez que não é possível colocar um dos marcadores diretamente no ângulo obtuso pelo fato da escala angular do instrumento variar de 0° a 90°. Por causa disso, é utilizada a relação da soma dos ângulos internos de um triângulo para encontrar a medida do terceiro ângulo, e também, os marcadores nos dois ângulos que não são obtusos, sendo o ângulo representado no encontro dos marcadores. Dessa forma, não é necessário que o instrumento tenha uma escala angular que vá até 180°.

O mesmo procedimento pode ser utilizado na representação de um triângulo acutângulo, nos casos em que os marcadores não se interceptam (80° e 60°, por exemplo). Determinamos a medida do terceiro ângulo (40°) e colocamos os marcadores em dois deles (80° e 40° ou 40° e 60°), encontrando o terceiro ângulo que estará representado no encontro dos marcadores. Assim o instrumento proporciona aos estudantes situações em que a relação da soma dos ângulos internos é utilizada não apenas para encontrar um terceiro ângulo, mas em situações que mobilizam esse conhecimento indiretamente.

Para encontrar a área de um triângulo, o tratado descreve uma relação que pode ser generalizada com os estudantes (metade da base multiplicada pela altura do triângulo) ou ainda observar os paralelos do instrumento.

As potencialidades didáticas foram analisadas com a finalidade de se elaborar uma atividade didática para estudantes do ensino médio (cursando 1ª e 2ª série), que propiciasse manifestações deles e com isso, analisar o movimento do pensamento na formação de conceitos.

Utilizamos os pressupostos da teoria histórico-cultural a fim de compreender a produção de conhecimento e sua apropriação pelo homem, e com base nessa teoria, desenvolvemos uma atividade orientadora de ensino (fundamentada na teoria da atividade) a fim de organizar o ensino (a intervenção junto aos sujeitos).

A atividade orientadora de ensino foi organizada em três etapas, sendo cada uma delas divididas em 2 momentos. A 1ª etapa proporcionou aos estudantes reflexões sobre os instrumentos de medida presentes no cotidiano e a necessidade dos instrumentos matemáticos na prática humana. Na 2ª etapa realizou-se um diálogo com o passado sobre os processos de comunicação e a leitura inicial do tratado. Na 3ª etapa os estudantes leram as descrições do instrumento e desenvolveram as atividades propostas com e sem o instrumento.

O desenvolvimento da atividade didática dependeu da interação entre professora e estudantes, da intencionalidade da intervenção e das informações obtidas no estudo da tradução do documento e o contexto histórico de uma época.

A análise dos dados fundamentou-se no movimento lógico-histórico e nos pensamentos empírico e teórico a fim de analisar o movimento do pensamento.

A atividade didática permitiu aos estudantes reflexões sobre o que foi proposto, desse modo, os juízos estruturados pelos estudantes serviram para realizar deduções e conceitos, visando o movimento do pensamento do simples ao complexo, do pensamento empírico ao pensamento teórico.

Pudemos notar isso na representação de um triângulo isósceles qualquer por meio do instrumento, em que os estudantes fizeram indagações a respeito da descrição apresentada no tratado e a definição atual, que divergiam sobre a conclusão de um triângulo equilátero ser isósceles. O juízo de que o triângulo isósceles possui dois lados iguais e um diferente (descrito no tratado) diverge com o juízo de que o triângulo isósceles possui dois lados iguais (definição atual), uma vez que os estudantes deduziram que se considerarmos a descrição do tratado um triângulo equilátero não pode ser considerado isósceles, o que não ocorre com a definição atual que não menciona nada sobre o terceiro lado. Este fato revelou a discussão sobre objetos matemáticos e indagações sobre seu desenvolvimento, permitindo que os estudantes fizessem deduções por meio dos juízos.

Na representação de qualquer triângulo retângulo, como o documento não especíﬁcou quais os outros dois ângulos internos, um dos grupos não escolheu um exemplo, mas generalizou a representação alegando a possibilidade de representar vários triângulos retângulos apenas fixando o marcador esquerdo e movimentando o marcador direito do instrumento. Inferimos que o grupo antes de chegar a tal conclusão, representou vários exemplos no instrumento (pensamento empírico), logo a generalização mencionada pelo grupo é característica de um pensamento teórico.

Durante a intervenção um estudante questiona que não é possível representar um triângulo com dois ângulos de 70° no instrumento. Um colega pegou o instrumento e explicou aos demais como o procecimento deveria ser feito, seguindo as orientações do tratado. Desse modo o estudante não só comprendeu as orientações como às aplicou em exemplos particulares. Nesse caso, podemos perceber um movimento do pensamento esperado para a formação de conceitos.

A partir dos descritos, notamos que as representações descritas no tratado com e sem o uso do instrumento permitiram aos estudantes, em alguns momentos, o processo de análise e síntese necessário para a formação conceitual.

Outra situação que é possível perceber o movimento do pensamento, é que ao serem indagados sobre o tipo de triângulo que possui dois ângulos internos congruentes, um estudante considerou outras possibilidades, respondendo além de isósceles, obtusângulo, acutângulo, retângulo ou equilátero, que nos mostra, mesmo na mobilização do pensamento empírico uma reflexão sobre as relações entre ângulos e lados de triângulos.

Consideramos que quando o estudante apenas segue o que o tratado descreve e não faz elaboração nenhuma, o pensamento permanece no empírico, porém quando há extração de informações de conteúdo matemático, dá-se inicio ao processo de diálogo com a formação do conceito. Esse movimento presente no pensamento teórico e na lógica dialética ajuda a compreender o pensamento.

Na atividade orientadora de ensino inferimos um movimento do pensamento que articule conhecimentos do simples ao complexo, do empírico ao teórico, de juízos e dedução a conceitos, visando à formação de conceitos no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, esperamos que os resultados obtidos tragam contribuições para a história e ensino de matemática, assim como o desenvolvimento de outras pesquisas que visem o aprendizado de estudantes da educação básica.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. O que é um estudo de caso qualitativo em educação? **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95-103, jul/dez, 2013.

BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. Ensinando conceitos geométricos e trigonométricos envolvidos na construção e utilização da balestilha. In: XI Seminário Nacional de História da Matemática, 2015, Natal – RN. **Anais do XI Seminário Nacional de História da Matemática**. Natal: SBHMat, 2015.

BEO, N. D. **O estudo do *Trattato del Radio Latino*: Possíveis contribuições para a articulação entre História da Matemática e ensino**. 2015. Dissertação (mestrado). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUCSP.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares** Nacionais-Matemática Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BROMBERG, C.; SAITO, F. A história da matemática e a história da ciência. In: BELTRAN, Maria Helena R.; SAITO, Fumikazu; TRINDRADE, Lais dos Santos P. (Org.). **História da ciência: tópicos atuais.** São Paulo: Livraria da Física, p. 47-72, 2010.

CASTILLO, A. R. M. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em *A Boke Named Tectonicon* de Leonard Digges**. 2016. 121 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2016.

CRESWELL, J.W. **Projeto de pesquisa:** método qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. São Paulo: Artmed, 2007.

CHATFEILDE, J. **The Trigonall Sector**. London: Robert Leyborn, 1650.

CUNHA, M. R. K. da. **Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino**. Campinas, SP: [s.n.], 2008. Tese de doutorado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

DAVYDOV, V. V. **La enseñanza escolar y El desarrollo psíquico**. Havana: Editorial Progresso, 1988.

DIAS, M. da S. O professor e a atividade humana. In: IV EBEM - Encontro Brasileiro de Educação e Marxismo, 2009, São José do Rio Preto/SP. **Anais do IV Encontro Brasileiro de Educação e Marxismo**. Marília: Oficina Universitária, 2009.

DIAS, M. da S.; SAITO, F. Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, p. 1227-1253, 2014.

DIAS, M. da S. ; SAITO, F. . Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília : SBEM, 2009. p. G05-G05.

EUCLIDES. ***The Thirteen books of Euclid's elements***. The University of Chicago, 1952.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. /Howard Eves: tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. - Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. – (Coleção formação de professores)

GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**, 9º ano. São Paulo: FTD, 2015.

JUNIOR, F. R.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T. **Os fundamentos da física**. 9. ed. rev. e ampl. – São Paulo: Moderna, 2007.

KOPININ, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LANNER de MOURA, A. R. **A medida e a criança pré-escolar. Campinas**, SP, 1995. Tese de doutorado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

LEONTIEV, A. **O homem e a cultura. In O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Editora Moraes Ltd, s/d. p. 277-302.

LEONTIEV, A. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOSTKII, L.S.; LURIA, A.R.; LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 7ª ed. São Paulo: Ed. Ícone, 2001. p. 59-83.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: Propostas e desafios**. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MONTEIRO, W. **Alguns elementos que reforçam a importância da história da matemática na formação de professores**. 2012. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2012.

MOURA, M. O. et al. **A atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem.** In: MOURA, M.O. (org). A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural. Brasília: LiberLivro, 2010.

REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 12ª Edição. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995. – (Educação e conhecimento)

SAITO, F. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura (REMATEC)**, Natal (RN), ano 9, n. 16, maio-ago., p. 25-47, 2014.

______. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. v. 1. 262p – (Coleção história da matemática para professores).

______. História da Matemática e Educação Matemática: Uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. IN: ***Actas VII Congreso Iberoamericado de Educación Matemática***. Montevideo: FISEM/SEMUR, 2013a. p. 3990-3998.

______. Instrumentos e o “saber-fazer” matemático no século XVI. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 18, n. especial, p. 101-112, 2013b.

SAITO, F.; DIAS, M. da S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência e Educação**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SAITO, F.; DIAS, M. S. **Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, P. B. **Metodologia de Pesquisa.** 3ª edição. São Paulo: McGraw-Hill interamericana do Brasil Ltda, 2006. 567 páginas. ISBN: 85-8680493-2

SANTOS, L. R. **Leon Battista Alberti (1404-1472) e a medida do tempo em sua obra Matemática Lúdica**. 2014. 72 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2014.

SÃO PAULO. **Currículo Oficial do Estado de São Paulo**, 2012.

TOZONI-REIS, M. F. de C. **Metodologia da pesquisa**. 2ª edição. Curitiba. IESDE Brasil S.A., 2009. 136 páginas.

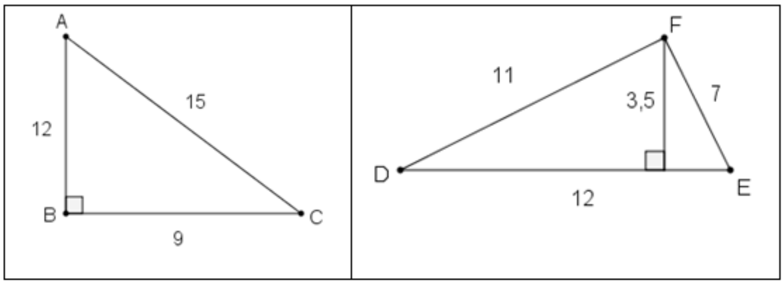
VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

ANEXO A - Justificativa do grupo G2

Equilátero pois tem todos os angulos iguais (60°) Acutângulo pois os angulos são infe_riores a 90°	Isósceles pois tem dois angulos iguais (72° = 72°) Acutângulo pois os angulos são inferio res a 90° (72°, 72°, 36°)	Escaleno pois os angulos não são iguais (35°, 80°, 65°) Acutangulo pois os angulos são inferio res a 90°
Não é possível. X Pois para ser retân_gulo, tem que ter um angulo de 90°, e pa_ra ser equilátero to_dos tem que ser iguais.	Isósceles pois tem apenas dois la_dos iguais (45°) Retângulo pois tem um angulo de 90°	Escaleno pois os angulos não são iguais (60°, 30°, 90°) Retângulo pois tem um angulo de 90°
Não é possível. X Pois para ser equilá_tero, tem que ter todos os lados/ângulos iguais, que não é o caso de ser um obtu_sângulo.	Isósceles pois tem apenas dois angulos iguais (25°) Obtusângulo pois um dos ângulos é maior que 90° (130°)	Escaleno pois os ângulos não são iguais. Obtusângulo pois um dos ângulos é obtuso (135° > 90°)

APÊNDICE A – Entrevista Semiestruturada

1- As discussões permitiram você refletir sobre o porquê os instrumentos de medida foram criados pelo homem? Se sim, escreva suas reflexões.
2- Sabendo-se que a medida de dois ângulos internos de um triângulo são iguais, como podemos classificar esse triângulo?
3- É possível representar um triângulo com dois de seus ângulos sendo retos? Justifique sua resposta.
4- Com a leitura do tratado e a manipulação do instrumento foi possível encontrar a área de triângulos. Como generalizar esse processo para encontrar a área de qualquer triângulo?
5- Mediante as informações apresentadas no tratado qual a área dos triângulos abaixo?



6- Dadas as medidas de dois ângulos internos de um triângulo como podemos encontrar a medida do terceiro ângulo? Explique
7- O que mais gostaria de comentar ou sugerir?

APÊNDICE B – Produto Final: Livreto

O conteúdo do livreto está apresentado neste apêndice por se tratar de um componente da dissertação.