



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Márcia Richtielle da Silva

Extensão da teoria de estabilidade para sistemas de equações
diferenciais funcionais impulsivas

São José do Rio Preto
2017

Márcia Richtielle da Silva

Extensão da teoria de estabilidade para sistemas de equações
diferenciais funcionais impulsivas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

São José do Rio Preto
2017

Silva, Márcia Richtielle da.

Extensão da teoria de estabilidade para sistemas de equações diferenciais funcionais impulsivas / Márcia Richtielle da Silva. -- São José do Rio Preto, 2017
86 f.

Orientador: Suzete Maria Silva Afonso

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais funcionais. 3. Equações diferenciais - Equações com retardamento. 4. Equações diferenciais ordinárias. 5. Estabilidade. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
II. Título.

CDU – 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar resultados básicos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas (EDOGs) e Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e Impulsos (EDFRIs) em tempos pré-fixados e obter resultados mais gerais relacionados à estabilidade das soluções destas equações.

Palavras-chave: Equação Diferencial Funcional com Retardamento e Impulsos, Equação Diferencial Ordinária Generalizada, Estabilidade.

ABSTRACT

The main goals of this work is to study basic results of the theory of Generalized Ordinary Differential Equations (GODEs) and impulsive retarded functional differential equations (IRFDEs) with pre-fixed moments of impulsive effect and obtain more general results with respect to the stability of solutions of these equations.

Keywords: Impulsive Retarded Functional Differential Equation, Generalized Ordinary Differential Equation, Stability.

Agradecimentos

Agradeço e dedico este trabalho às mulheres da minha vida, minha mãe Lourdes F. da Silva e minha avó Clotildes M. da Silva, mulheres guerreiras que sempre fizeram da vida luta, para que eu me fizesse feliz. Ao meu avô José G. da Silva, *in memoriam*, por todo amor dedicado à nossa família. Ao meu irmão Mário Renato S. Alves, pelo carinho e proteção de sempre e à minha tia Ana L. da Silva pelo acolhimento, quando precisei.

Quero agradecer também a todos os amigos que, de alguma forma, contribuíram para a minha caminhada até aqui. Em especial, aos amigos Alex Melges, Eliton Moro pelo companheirismo nos estudos, aos companheiros da Moradia Estudantil da Unesp, Câmpus de Rio Claro e aos meus irmãos e irmãs de coração Diego M. Mesquita, Isadora Machado, Maya Onishi, Ana L. Mayer, Cristina Sacilotto, Letícia Rocha e Ayana Kissi.

Também sou grata à Profa. Dra. Elíris Rizioli e à Profa. Dra. Marta C. Gadotti pelos ensinamentos e experiências compartilhadas na graduação e no Programa de Educação Tutorial-PET.

Agradeço ainda, a Profa. Dra. Suzete M. Afonso, pela orientação exímia neste trabalho, por todo carinho, paciência e pela valiosa contribuição para minha formação acadêmica. Bem como, à CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível dedicar-me integralmente aos estudos.

Por fim e não menos importante: “agradecer às nuvens que logo são chuva, sereniza os sentidos e ensina a vida a reviver. Agradecer os amigos que fiz e que mantém a coragem de gostar de mim, apesar de mim... Agradecer a alegria das crianças, as borboletas dos meus quintais reais, o não, a cada folha, a toda raiz, as pedras majestosas e também aquelas pequeninas como eu, em Aruanda. Agradecer o sol que raia o dia e a lua que espraia luz e vira os meus sonhos de pernas pro ar. Agradecer as marés altas e também aquelas que levam para outros costados todos os males. Agradecer a tudo que canta livre no ar, dentro do mato sobre o mar, as vozes que soam de cordas tênues e partem cristais. Agradecer os senhores, que acolhem e aplaudem esse milagre. Agradecer ter o que agradecer, louvar.” - Maria Bethânia

*“Somos, enfim, o que fazemos para transformar o que somos. A identidade não é uma
peça de museu, quietinha na vitrine, mas a sempre assombrosa síntese das
contradições nossas de cada dia”.*
(O livro dos Abraços) - Eduardo Galeano.

Sumário

Introdução	13
1 Integral de Kurzweil	15
1.1 Propriedades da integral de Kurzweil	21
1.2 Teoremas de Convergência	30
2 Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas	37
2.1 Existência e unicidade de solução	43
2.2 Solução maximal	47
3 Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e Impulsos	51
3.1 Descrição do sistema impulsivo	51
3.2 EDFRs com impulso em tempo pré-fixado	53
4 Correspondência entre EDFRIs e EDOGs	59
4.1 Construção de uma EDOG a partir de uma EDFRI	59
4.2 Correspondência biunívoca entre EDFRIs e EDOGs	64
5 Estabilidade	75
5.1 Estabilidade variacional	75
5.2 Estabilidade de EDFRIs	81
5.3 Estabilidade lipschitziana para EDOGs	86
5.4 Estabilidade lipschitziana para EDFRIs	88
5.5 Aplicação	90
Referências	95

Introdução

Nos últimos anos, as equações diferenciais funcionais com retardamento (EDFRs) e impulsos tem sido objeto de intensa pesquisa. Isto se deve a duas razões principais: a grande utilidade de tais equações na modelagem de diversos fenômenos que ocorrem nas mais diversas áreas do conhecimento (como, por exemplo, dinâmica populacional, engenharia, física, química, medicina e economia) e o interesse intrinsecamente matemático que possuem.

Estamos interessados, neste trabalho, em estudar a estabilidade da solução trivial de um sistema de EDFRs com impulsos em tempo pré-fixado. Para tanto, faremos uso da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas, desenvolvida por Stefan Schwabik em [11], que por meio de uma correspondência biunívoca com as EDFRIs, fornecerá as informações desejadas, com respeito a estabilidade.

No primeiro capítulo apresentamos a teoria de integração de Kurzweil, onde pode-se notar a generalidade e as vantagens desta integral em relação às demais. No segundo capítulo desenvolvemos a teoria básica das EDOGs, destacando propriedades a fim de obter informações com respeito à existência e unicidade de solução. No terceiro capítulo, abordamos de forma breve as EDFRIs; o resultado principal exibido neste capítulo é o teorema de existência e unicidade de solução. No capítulo seguinte, de posse dos resultados estudados nos capítulos anteriores, vemos como se dá a correspondência biunívoca entre as soluções das EDOGs e EDFRIs e, finalmente, no último capítulo, exibimos os critérios de estabilidade para a solução trivial de uma EDOG e, por consequência, obtemos resultados de estabilidade para EDFRIs, por meio da relação biunívoca entre as soluções destas equações. Cabe mencionar que, neste último capítulo, expomos resultados inéditos sobre estabilidade lipschitziana para as soluções de um sistema de EDFRIs. Estes resultados estão presentes em [1].

1 Integral de Kurzweil

Alguns matemáticos, no final do século XIX, trouxeram à tona questões que revelaram certas desvantagens ao se trabalhar com a tradicional integral de Riemann ou R-integral, definida por Bernhard Riemann em 1854, no sentido de que esta técnica de integração não daria cabo aos novos problemas emergidos. Uma dessas questões era garantir a integrabilidade de funções ilimitadas, que não é garantida pela integral de Riemann. O Teorema Fundamental do Cálculo exige que a função seja contínua para que sua derivada seja R-integrável. Uma outra indagação então, era sobre a possibilidade de generalizar esse resultado, isto é, reconstruir uma função através de sua derivada, sem que houvesse mais hipóteses sobre a função.

Em 1902, Henri Léon Lebesgue desenvolveu um novo conceito de integral que generaliza a integral de Riemann. A integral de Lebesgue ou L-integral apresenta relevantes vantagens à R-integral, principalmente no tratamento de cálculos envolvendo limites de funções. Não há versões na teoria de integração de Riemann para os Teoremas da Convergência Dominada, Monótona e o Lema de Fatou, por exemplo. Porém a versão do Teorema Fundamental do Cálculo para funções L-integráveis exige que as funções sejam absolutamente contínuas para que suas derivadas sejam Lebesgue integráveis.

A versão ideal do Teorema Fundamental do Cálculo foi desenvolvida por Arnaud Denjoy, em 1912. Dois anos depois Perron explorou o mesmo problema com um método diferente e aplicou ao estudo das equações diferenciais. Improvisavelmente, as integrais de Perron e Denjoy coincidem.

Jaroslav Kurzweil, em 1957, obteve um novo conceito de integração baseado nas ideias de Riemann, que generaliza as integrais de Riemann, Lebesgue e Perron. A integral de Kurzweil, K-integral ou integral de Riemann Generalizada, é definida para funções de duas variáveis e surgiu com o intuito de solucionar algumas dificuldades encontradas em Equações Diferenciais Ordinárias que envolvem por exemplo, funções que oscilam copiosamente, são descontínuas ou que não são de variação limitada. Também, em 1961, Ralph Henstock desenvolveu o mesmo conceito que Kurzweil, mas para funções de uma variável. Como a integral de Kurzweil engloba a de Henstock, encontramos em algumas literaturas o nome de integral de Henstock-Kurzweil ou HK-integral.

Neste capítulo, vamos formalizar o conceito da integral de Kurzweil, dar alguns exemplos que ilustram como a classe das K-integrais englobam a classe das integrais de Riemann e Lebesgue e mostrar algumas das principais propriedades da K-integral, que servirão como apoio para o desenvolvimento das teorias a serem trabalhadas posteriormente nesta dissertação. Para maiores detalhes sobre a integral de Kurzweil, veja a referência [11].

Definição 1.1. Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $\tau \in \mathbb{R}$ um ponto. O par (τ, J) é chamado de *intervalo marcado*, onde τ é a marca de J .

Definição 1.2. Seja $[a, b]$ um intervalo compacto, com $-\infty < a < b < +\infty$. Uma coleção finita $\Delta = \{(\tau_j, J_j); j = 1, \dots, k\}$ de intervalos marcados é dito um *sistema* em $[a, b]$ se $\tau_j \in J_j$, para cada $j = 1, \dots, k$, e os intervalos $J_j \subset \mathbb{R}$ são tais que $\text{Int}(J_i) \cap \text{Int}(J_j) = \emptyset$ para $i \neq j$, em que $\text{Int}(J)$ denota o interior do intervalo J .

Um sistema $\Delta = \{(\tau_j, J_j); j = 1, \dots, k\}$ é uma *partição* de $[a, b]$ se

$$\bigcup_{j=1}^k J_j = [a, b].$$

Definição 1.3. Uma função positiva $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ será chamada de *calibre* em $[a, b]$. Um intervalo marcado (τ, J) , com $\tau \in [a, b]$, é dito *δ -fino* se

$$J \subset [\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)].$$

Um sistema (em particular, uma partição) $\Delta = \{(\tau_j, J_j); j = 1, \dots, k\}$ é *δ -fino* se cada par (τ_j, J_j) é *δ -fino*, para todo $j = 1, \dots, k$.

Definição 1.4. Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais, assumindo valores reais. Diremos que U é *integrável* sobre $[a, b]$, se existir um número $I \in \mathbb{R}$ que satisfaz: dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a, b]$ tal que,

$$|S(U, D) - I| = \left| \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right| < \epsilon,$$

para toda partição *δ -fina* $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, \dots, k\} = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ de $[a, b]$.

A notação $S(U, D) = \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})]$ indica a soma de Riemann correspondente à função U e à partição D de $[a, b]$.

O número real I é chamado *integral generalizada de Perron*, *integral de Kurzweil* ou ainda *K-integral* de U sobre o intervalo $[a, b]$ e é denotado por $\int_a^b DU(\tau, t)$. Se existir a integral $\int_a^b DU(\tau, t)$, definimos:

$$\int_b^a DU(\tau, t) = - \int_a^b DU(\tau, t) \text{ e } \int_a^a DU(\tau, t) = 0 \text{ quando } a = b.$$

Observação 1.1. Conforme a Definição 1.3, dado um calibre δ em $[a, b]$, a partição $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ é *δ -fina* se

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b, \alpha_{j-1} \leq \tau_j \leq \alpha_j, j = 1, \dots, k$$

e

$$[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)], j = 1, \dots, k.$$

Observação 1.2. Nem toda marca tornará uma partição *δ -fina*. Por exemplo, se considerarmos a partição $D = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ de $[0, 1]$ e o calibre $\delta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dado por:

$$\delta(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases}$$

veremos que a partição $D' = \{(\frac{1}{10}, [0, \frac{1}{3}]), (\frac{1}{2}, [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]), (1, [\frac{1}{2}, 1])\}$ não é *δ -fina*, pois $[0, \frac{1}{3}] \not\subset [\frac{1}{10} - \delta(\frac{1}{10}), \frac{1}{10} + \delta(\frac{1}{10})] = [0, \frac{1}{5}]$.

O lema seguinte afirma que, dado um calibre δ em $[a, b]$, é sempre possível obter uma partição δ -fina.

Lema 1.1. (Cousin) Se δ é um calibre em $[a, b]$, então existe uma partição δ -fina em $[a, b]$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que não exista uma partição δ -fina em $[a, b]$. Seja $\left\{ \left[a, \frac{a+b}{2} \right], \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \right\}$ uma partição de $[a, b]$. Então, algum desses subintervalos não possui uma partição δ -fina, o qual denotaremos por $[a_1, b_1]$.

Analogamente, seja $\left\{ \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2} \right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1 \right] \right\}$ uma partição de $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Novamente, algum dos subintervalos de $[a_1, b_1]$ não possui uma partição δ -fina, digamos $[a_2, b_2]$, com $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$.

Assim, por indução, conseguimos uma sequência de subintervalos de $[a, b]$ tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$:

- 1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
- 2) não há uma partição δ -fina em $[a_n, b_n]$;
- 3) $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$.

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, segue que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{c\}$, para algum $c \in [a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos a vizinhança de c , $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ em $[a, b]$.

Pelo item 3) sabemos que,

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} < \epsilon,$$

para n suficientemente grande. Então, como $c \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e ϵ é maior que o comprimento de $[a_n, b_n]$, segue que $[a_n, b_n] \subset (c - \epsilon, c + \epsilon)$, para n suficientemente grande.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, tomemos em particular $\epsilon = \delta(c) > 0$. Logo, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, teremos $[a_n, b_n] \subset (c - \delta(c), c + \delta(c)) \subset [c - \delta(c), c + \delta(c)]$. Isso implica que $(c, [a_n, b_n])$ é δ -fino, para n grande, contradizendo o item 2). $\square$

Observação 1.3. Consideremos uma função real $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Defina a função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $U(\tau, t) = f(\tau)t$. Então, dada uma partição $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, \dots, k\}$ de $[a, b]$, a soma

$$S(U, D) = \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] = \sum_{j=1}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$$

representa a clássica soma de Riemann da função f .

Dessa forma, podemos, na Definição 1.4 da integral de Kurzweil, usar a função U acima e obter, como se conhece na literatura, a integral de *Henstock-Kurzweil* ou HK-integral da função real f definida em $[a, b]$, denotada por $(HK) \int_a^b f(s)ds$.

Note que, se tomarmos na Definição 1.4 a função calibre como sendo uma constante δ proveniente do $\epsilon > 0$ dado, concluiremos que toda função Riemann integrável é Henstock-Kurzweil integrável, porém não vale a recíproca, como bem mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}). \end{cases}$$

A função f não é Riemann integrável, como pode ser visto na referência [9].

Afirmamos que $(HK) \int_0^1 f(s)ds = 0$. De fato, dados $\epsilon > 0$ e (x_n) uma enumeração dos racionais em $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, defina a função calibre δ em $[0, 1]$ por:

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, & t = x_n, \forall n \in \mathbb{N}; \\ 1, & t \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Seja $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, \dots, k\}$ uma partição δ -fina em $[0, 1]$. Portanto,

$$\begin{aligned} |S(f, D) - 0| &= |S(f, D)| = \left| \sum_{j=1}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ \tau_j \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}}}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right| + \left| \sum_{\substack{j=1 \\ \tau_j \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})}}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right| = \\ &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ \tau_j \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}}}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right| = \sum_{j=1}^k (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^k 2\delta(\tau_j) < \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} 2\delta(\tau_j) = \sum_{j=1}^{\infty} 2 \frac{\epsilon}{2^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon, \end{aligned}$$

e assim, segue que f é HK-integrável.

A seguir temos uma versão mais geral do Teorema Fundamental do Cálculo, garantindo que toda função que possui uma primitiva é integrável.

Teorema 1.2. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f , isto é, $f(x) = F'(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Então, f é HK-integrável e

$$(HK) \int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Com efeito, seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Por hipótese, para cada $\tau \in [a, b]$, $F'(\tau) = f(\tau)$. Logo, para cada τ , existe uma constante $\delta(\tau) = \delta(\tau, \epsilon) > 0$, tal que

$$|F(r) - F(\tau) - f(\tau)(r - \tau)| < \epsilon|r - \tau|$$

e

$$|F(\tau) - F(s) - f(\tau)(s - \tau)| < \epsilon|\tau - s|,$$

desde que $\tau - \delta(\tau) < s < \tau < r < \tau + \delta(\tau)$. Portanto,

$$|F(r) - F(s) - f(\tau)(r - s)| < \epsilon|r - s|, \quad (1.1)$$

sempre que $\tau - \delta(\tau) < s < \tau < r < \tau + \delta(\tau)$. Definamos então o calibre $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ pondo, para cada $\tau \in [a, b]$, o valor $\delta(\tau)$.

Seja $D = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]); j = 1, \dots, k\}$ uma partição δ -fina em $[a, b]$. Assim,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - (F(b) - F(a)) \right| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^k [f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - (F(t_j) - F(t_{j-1}))] \right| \stackrel{(1.1)}{<} \sum_{j=1}^k \epsilon(t_j - t_{j-1}) = \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Portanto, a função f é HK-integrável. $\square$

A integral de Henstock-Kurzweil também generaliza a integral de Lebesgue. O próximo exemplo vai ilustrar que existem funções HK-integráveis que não são Lebesgue integráveis.

Exemplo 1.2. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

A função f é diferenciável, com

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.2, a função f' é HK-integrável em $[0, 1]$.

Vamos mostrar que f' não é Lebesgue integrável em $[0, 1]$. Por certo, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b \leq 1$. Como a função f' é contínua em $[a, b]$, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, f' é Riemann integrável, i.é,

$$(R) \int_a^b f'(x) dx = b^2 \cos\left(\frac{\pi}{b^2}\right) - a^2 \cos\left(\frac{\pi}{a^2}\right).$$

Consideremos $a_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$ e $b_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$(R) \int_{a_k}^{b_k} f'(x) dx = b_k^2 \cos\left(\frac{\pi}{b_k^2}\right) - a_k^2 \cos\left(\frac{\pi}{a_k^2}\right) = \frac{1}{2k}.$$

Note que $\{[a_k, b_k]_{k \in \mathbb{N}}\}$ é uma família de intervalos em $[0, 1]$ dois a dois disjuntos, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] \subset [0, 1]$ e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (R) \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)| dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} (R) \int_{a_k}^{b_k} f'(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} = +\infty$$

de onde segue que $|f'|$ não é Lebesgue integrável, pois

$$(L) \int_0^1 |f'(x)| dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} (L) \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)| dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (R) \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)| dx \geq +\infty.$$

Como f' não é absolutamente integrável em $[0, 1]$, então f' não é Lebesgue integrável em $[0, 1]$.

É claro que a Definição 1.4 pode ser dada em termos de uma função U que assume valores em um espaço de Banach X sobre o corpo $\mathbb{R}$. Denotaremos a norma em X por $\|\cdot\|$.

Definição 1.5. Uma função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ é *integrável* sobre $[a, b]$, se existir $I \in X$ que satisfaz: para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a, b]$, tal que

$$\|S(U, D) - I\| = \left\| \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right\| < \epsilon,$$

para toda partição δ -fina $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, \dots, k\} = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ de $[a, b]$.

Denotaremos por $\mathcal{K}([a, b], X)$ o conjunto de todas as funções $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ que são K-integráveis sobre $[a, b]$.

Teorema 1.3. (Critério de Cauchy) A função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a, b]$ tal que

$$\|S(U, D_1) - S(U, D_2)\| < \epsilon, \quad (1.2)$$

para quaisquer partições marcadas δ -finas D_1 e D_2 de $[a, b]$.

Demonstração. Com efeito, suponha que $\int_a^b DU(\tau, t) = I$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ de $[a, b]$ tal que $\|S(U, D) - I\| < \frac{\epsilon}{2}$, para toda partição D δ -fina. Sejam D_1 e D_2 partições δ -finas em $[a, b]$. Como por hipótese,

$$\|S(U, D_1) - I\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \|S(U, D_2) - I\| < \frac{\epsilon}{2},$$

podemos concluir que

$$\|S(U, D_1) - S(U, D_2)\| \leq \|S(U, D_1) - I\| + \|I - S(U, D_2)\| < \epsilon.$$

Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$, seja

$$S(\epsilon) = \{S(U, D); D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, \dots, k\}\},$$

em que D é uma partição δ -fina de $[a, b]$.

Observe que o conjunto $S(\epsilon)$ é não vazio pelo Lema de Cousin (Lema 1.1). Como por hipótese vale (1.2) para quaisquer partições marcadas δ -finas D_1 e D_2 em $[a, b]$, segue que

$$\text{diam } S(\epsilon) < \epsilon, \quad (1.3)$$

onde $\text{diam } S(\epsilon)$ denota o diâmetro do conjunto $S(\epsilon)$.¹ Dados $\epsilon_1 < \epsilon_2$ e escolhendo calibres δ_1, δ_2 correspondentes a ϵ_1, ϵ_2 respectivamente, tais que $\delta_1(\tau) \leq \delta_2(\tau)$ para todo $\tau \in [a, b]$, tem-se

$$S(\epsilon_1) \subset S(\epsilon_2).$$

¹Seja (M, d) um espaço métrico. O diâmetro de um conjunto limitado $X \subset M$ é o número real $\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y); \forall x \in X, \forall y \in X\}$.

Agora, sejam $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência, com $\epsilon_n \rightarrow 0$, e os calibres correspondentes δ_n satisfazendo $\delta_{n+1}(\tau) \leq \delta_n(\tau)$. Portanto, os conjuntos $S(\epsilon_n)$ formam uma sequência decrescente de subconjuntos de X , com $\text{diam } S(\epsilon_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, o conjunto $\bigcap_{\epsilon_n > 0} \overline{S(\epsilon_n)}$ consiste em um único ponto S_U de X , já que X é um espaço de Banach.²

Portanto, dado $\epsilon > 0$ acima, tomando $\epsilon_n < \epsilon$ e o calibre δ correspondente a ϵ , temos $S(\epsilon_n) \subset S(\epsilon)$. Então, $S_U \in S(\epsilon)$ e por (1.3),

$$\|S(U, D) - S_U\| < \epsilon,$$

para toda partição δ -fina D de $[a, b]$ e assim, $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$. $\square$

1.1 Propriedades da integral de Kurzweil

Vamos descrever algumas das propriedades principais da integral $\int_a^b DU(\tau, t)$.

Sejam $U, V : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ uma partição arbitrária de $[a, b]$. Então, verifica-se facilmente a igualdade:

$$S(c_1U + c_2V, D) = c_1S(U, D) + c_2S(V, D),$$

de onde segue, imediatamente, o seguinte resultado:

Teorema 1.4. Sejam $U, V \in \mathcal{K}([a, b], X)$. Então, $c_1U + c_2V \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e

$$\int_a^b D[c_1U(\tau, t) + c_2V(\tau, t)] = c_1 \int_a^b DU(\tau, t) + c_2 \int_a^b DV(\tau, t).$$

Teorema 1.5. Seja $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$. Então, para todo $[c, d] \subset [a, b]$, temos $U \in \mathcal{K}([c, d], X)$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Como U é integrável sobre $[a, b]$, segue do Critério de Cauchy, Teorema 1.3, que existe um calibre δ em $[a, b]$ tal que

$$\|S(U, D_1) - S(U, D_2)\| < \epsilon, \quad (1.4)$$

para quaisquer partições δ -finas D_1, D_2 de $[a, b]$.

Consideremos $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ partições δ -finas de $[c, d]$ arbitrárias. Vamos assumir $a < c < d < b$. Sejam D_L a partição δ -fina de $[a, c]$ e D_R a partição δ -fina de $[d, b]$, que existem pelo Lema de Cousin 1.1. Note que, se:

$$\tilde{D}_1 = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}, \quad D_L = \{\alpha_0^L, \tau_1^L, \alpha_1^L, \dots, \alpha_{l-1}^L, \tau_l^L, \alpha_l^L\}$$

e

$$D_R = \{\alpha_0^R, \tau_1^R, \alpha_1^R, \dots, \alpha_{r-1}^R, \tau_r^R, \alpha_r^R\},$$

²Lema: Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\{S_n\}$ uma sequência de conjuntos fechados não vazios $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots$ para os quais $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ tem exatamente um ponto x de X .

então $\alpha_0^L = a$, $\alpha_l^L = c = \alpha_0$, $\alpha_k = \alpha_0^R = d$ e $\alpha_r^R = b$. Assim, reunindo as partições D_L , D_R e $\tilde{D}_1$, construímos a partição D_1 da seguinte forma:

$$D_1 = \{\alpha_0^L, \tau_1^L, \alpha_1^L, \dots, \alpha_{l-1}^L, \tau_l^L, \alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k, \tau_1^R, \alpha_1^R, \dots, \alpha_{r-1}^R, \tau_r^R, \alpha_r^R\}.$$

Claramente, D_1 é uma partição de $[a, b]$. E é δ -fina pois as partições D_L , D_R e $\tilde{D}_1$ são δ -finas. Com um procedimento análogo feito às partições D_L , D_R e $\tilde{D}_2$, obtemos uma partição δ -fina D_2 de $[a, b]$. Por (1.4), temos:

$$\|S(U, \tilde{D}_1) - S(U, \tilde{D}_2)\| = \|S(U, D_1) - S(U, D_2)\| < \epsilon.$$

Note que vale a igualdade acima, porque $S(U, D_1)$ e $S(U, D_2)$ tem partes comuns D_L e D_R . Então, os termos da soma $S(U, D_1) - S(U, D_2)$ correspondentes a D_L e D_R são anulados. Portanto, pelo Teorema 1.3, U é integrável sobre $[c, d]$. $\square$

Teorema 1.6. Se $c \in (a, b)$ e $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ são tais que, $U \in \mathcal{K}([a, c], X)$ e $U \in \mathcal{K}([c, b], X)$, então $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e $\int_a^b DU(\tau, t) = \int_a^c DU(\tau, t) + \int_c^b DU(\tau, t)$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Denotemos por $I_L = \int_a^c DU(\tau, t)$ e $I_R = \int_c^b DU(\tau, t)$.

Então, por hipótese, existe um calibre δ_L em $[a, c]$ e um calibre δ_R em $[c, b]$ tais que

$$\|S(U, D^L) - I_L\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \|S(U, D^R) - I_R\| < \frac{\epsilon}{2},$$

para quaisquer divisões D^L , D^R δ_L -fina e δ_R -fina de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente.

Defina a função auxiliar:

$$\tilde{\delta}(\tau) = \begin{cases} \delta_L(\tau), & \tau \in [a, c), \\ \min(\delta_L(c), \delta_R(c)), & \tau = c \\ \delta_R(\tau), & \tau \in (c, b] \end{cases}$$

e escolha $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ tal que

$$\delta(\tau) < \min\{\tilde{\delta}(\tau), |\tau - c|\}, \text{ se } \tau \neq c \text{ e } \delta(c) = \tilde{\delta}(c).$$

Claramente, δ é um calibre sobre $[a, b]$. Seja $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ uma partição δ -fina de $[a, b]$. Note que, para algum m fixado, $c \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m]$.

Afirmamos que $\tau_m = c$. De fato, suponha por absurdo que $\tau_m \neq c$. Assim,

$$\delta(\tau_m) < \min\{\tilde{\delta}(\tau_m), |\tau_m - c|\} \leq |\tau_m - c|. \quad (1.5)$$

Também, como D é δ -fina, sabemos que $c \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m] \subset [\tau_m - \delta(\tau_m), \tau_m + \delta(\tau_m)]$, para algum m . Logo,

$$\tau_m - c \leq \delta(\tau_m) \text{ e } \delta(\tau_m) \geq -(\tau_m - c)$$

implicam em

$$\delta(\tau_m) \geq |\tau_m - c|. \quad (1.6)$$

Portanto, de (1.5) e (1.6), temos

$$|\tau_m - c| \leq \delta(\tau_m) < |\tau_m - c|,$$

que é uma contradição. Consequentemente $\tau_m = c$, para algum m . Assim,

$$\begin{aligned}
 S(U, D) &= \sum_{j=1}^{m-1} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] + U(c, \alpha_m) - U(c, \alpha_{m-1}) + \\
 &+ \sum_{j=m+1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] = \sum_{j=1}^{m-1} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] + U(c, c) - U(c, c) + \\
 &+ U(c, \alpha_m) - U(c, \alpha_{m-1}) + \sum_{j=m+1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] = \\
 &\left[\sum_{j=1}^{m-1} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] + U(c, c) - U(c, \alpha_{m-1}) \right] + \\
 &+ \left[\sum_{j=m+1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] + U(c, \alpha_m) - U(c, c) \right] = S(U, D_L) + S(U, D_R),
 \end{aligned}$$

em que $D_L = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, c = \tau_m^L, \alpha_m^L = c\}$ e $D_R = \{\alpha_{m-1}^R = c, \tau_m^R = c, \alpha_m, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ são partições marcadas de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente.

D_L e D_R são δ_L -fina e δ_R -fina em virtude da escolha do calibre δ . Desse modo, se D é uma partição δ -fina de $[a, b]$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|S(U, D) - I_L - I_R\| &= \|S(U, D_L) + S(U, D_R) - I_L - I_R\| \leq \\
 &\leq \|S(U, D_L) - I_L\| + \|S(U, D_R) - I_R\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
 \end{aligned}$$

Assim sendo, $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e ainda $\int_a^b DU(\tau, t) = I_L + I_R$, como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 1.7. (Saks-Henstock) Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ integrável sobre $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, assumamos que o calibre δ em $[a, b]$ é tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| < \epsilon,$$

para toda partição δ -fina $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ em $[a, b]$.

Se $a \leq \beta_1 \leq \xi_1 \leq \gamma_1 \leq \beta_2 \leq \xi_2 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \beta_m \leq \gamma_m \leq b$ representa um sistema δ -fino $\{(\xi_j, [\beta_j, \gamma_j]), j = 1, \dots, m\}$. Então,

$$\left\| \sum_{j=1}^m [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t) \right\| < \epsilon.$$

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\beta_j < \gamma_j$, $j = 1, \dots, m$. Denote por $\gamma_0 = a$ e $\beta_{m+1} = b$.

Se $\gamma_j < \beta_{j+1}$, para algum $j = 1, \dots, m$, então a hipótese de U ser integrável sobre $[a, b]$ nos permite aplicar o Teorema 1.5 e concluir que a integral $\int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t)$ existe.

Então, dado $\eta > 0$, existe um calibre δ_j em $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$ tal que $\delta_j(\tau) < \delta(\tau)$, para todo $\tau \in [\gamma_j, \beta_{j+1}]$ e, para toda partição D^j δ_j -fina em $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$, temos:

$$\left\| S(U, D^j) - \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) \right\| < \frac{\eta}{m+1}. \quad (1.7)$$

É claro que se $\gamma_j = \beta_{j+1}$, então $S(U, D^j) = 0$.

Note que $\bigcup_{j=1}^m D^j \cup \{(\xi_j, [\beta_j, \gamma_j]), j = 1, \dots, m\}$ é uma partição δ -fina de $[a, b]$. Assim, temos:

$$\left\| \sum_{j=1}^m [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^m S(U, D^j) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| < \epsilon. \quad (1.8)$$

Como

$$\int_a^b DU(\tau, t) = \sum_{j=1}^m \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t) + \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t), \quad (1.9)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^m \left[U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t) \right] \right\| = \\ & = \left\| \sum_{j=1}^m [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] - \sum_{j=1}^m \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t) \right\| \stackrel{(1.9)}{=} \\ & \stackrel{(1.9)}{=} \left\| \sum_{j=1}^m [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| \leq \\ & \left\| \sum_{j=1}^m [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^m S(U, D^j) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| + \\ & + \left\| - \sum_{j=1}^m S(U, D^j) + \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) \right\| = \\ & = \left\| \sum_{j=1}^m [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^m S(U, D^j) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| + \\ & + \left\| \sum_{j=1}^m S(U, D^j) - \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) \right\| \stackrel{(1.7), (1.8)}{<} \epsilon + (m+1) \frac{\eta}{m+1} = \epsilon + \eta. \end{aligned}$$

Portanto, sendo $\eta > 0$ arbitrário, concluímos que

$$\left\| \sum_{j=1}^m [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t) \right\| < \epsilon.$$

□

Como consequência do Lema de Saks-Henstock, temos o próximo resultado.

Corolário 1.1. Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ Kurzweil integrável sobre $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ a função calibre em $[a, b]$ da Definição 1.4. Seja $[\gamma, v]$ um subintervalo fechado de $[a, b]$. Então,

(i) $(v - \gamma) < \delta(\gamma)$ implica

$$\left\| U(\gamma, v) - U(\gamma, \gamma) - \int_{\gamma}^v DU(\tau, t) \right\| < \varepsilon;$$

(ii) $(v - \gamma) < \delta(v)$ implica

$$\left\| U(v, v) - U(v, \gamma) - \int_{\gamma}^v DU(\tau, t) \right\| < \varepsilon.$$

Demonstração. (i) Segue do fato que $(\gamma, [\gamma, v])$ é uma divisão marcada δ -fina de $[\gamma, v]$ e do Lema de Saks-Henstock. Um argumento análogo se aplica a (ii). $\square$

Teorema 1.8. (Hake) Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ uma função tal que, para todo $c \in (a, b)$, $U \in \mathcal{K}([a, c], X)$ e existe

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \left[\int_a^c DU(\tau, t) - U(b, c) + U(b, b) \right] = I. \quad (1.10)$$

Então, $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e $\int_a^b DU(\tau, t) = I$.

Analogamente, se a função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ é tal que $U \in \mathcal{K}([c, b], X)$ para todo $c \in (a, b]$ e existe

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \left[\int_c^b DU(\tau, t) + U(a, c) - U(a, a) \right] = I,$$

então $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e $\int_a^b DU(\tau, t) = I$.

Demonstração. Da hipótese (1.10), sabemos que dado $\epsilon > 0$, existe $B \in [a, b)$ tal que,

$$\left\| \int_a^c DU(\tau, t) - U(b, c) + U(b, b) - I \right\| < \epsilon, \quad (1.11)$$

para todo $c \in [B, b)$.

Seja $\{c_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente em $[a, b)$, com $c_0 = a < c_1 < \dots$ e $\lim_{p \rightarrow \infty} c_p = b$.

Por hipótese, $U \in \mathcal{K}([a, c_p], X)$ para todo $p = 1, 2, \dots$. Logo, existe um calibre $\delta_p : [a, c_p] \rightarrow (0, +\infty)$ tal que, para toda partição D de $[a, c_p]$ δ_p -fina tem-se:

$$\left\| S(U, D) - \int_a^{c_p} DU(\tau, t) \right\| < \frac{\epsilon}{2^{p+1}}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Para cada $\tau \in [a, b)$, existe exatamente um $p = p(\tau) = 1, 2, \dots$ tal que $\tau \in [c_{p-1}, c_p)$. Então, dado $\tau \in [a, b)$, escolha um calibre $\widehat{\delta}$ em $[a, b]$ tal que $0 < \widehat{\delta}(\tau) < \delta_p(\tau)$, com $[\tau - \widehat{\delta}(\tau), \tau + \widehat{\delta}(\tau)] \cap [a, b] \subset [a, c_p]$.

Seja $c \in [a, b)$ e $\widehat{D} = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_{k-1}, \alpha_{k-1}\}$ uma partição $\widehat{\delta}$ -fina arbitrária de $[a, c]$. Se $p = p(\tau_j)$, então $[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset [\tau_j - \widehat{\delta}(\tau_j), \tau_j + \widehat{\delta}(\tau_j)] \subset [a, c_p]$ e também $[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset [\tau_j - \delta_p(\tau_j), \tau_j + \delta_p(\tau_j)]$.

Seja

$$\sum_{\substack{j=1 \\ p=p(\tau_j)}}^{k-1} \left[U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau, t) \right]$$

a parcela da soma correspondente às marcas τ_j tais que $\tau_j \in [c_{p-1}, c_p)$, $j = 1, \dots, k$.

Pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 4.1), obtemos:

$$\left\| \sum_{\substack{j=1 \\ p=p(\tau_j)}}^{k-1} \left[U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau, t) \right] \right\| < \frac{\epsilon}{2^{p+1}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^{k-1} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^c DU(\tau, t) \right\| = \\ & \left\| \sum_{j=1}^{k-1} \left[U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau, t) \right] \right\| \leq \\ & \leq \sum_{p=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ p=p(\tau_j)}}^{k-1} \left[U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau, t) \right] \right\| \stackrel{(1.12)}{\leq} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{p+1}} = \epsilon. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Defina agora um calibre δ em $[a, b]$, pondo para cada $\tau \in [a, b)$,

$$0 < \delta(\tau) < \min\{b - \tau, \widehat{\delta}(\tau)\}, \text{ com } 0 < \delta(b) < b - B.$$

Então, existe uma partição $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ δ -fina em $[a, b]$, pelo Lema de Cousin (Lema 1.1).

Afirmamos que, pela escolha do calibre δ , $\tau_k = \alpha_k = b$ e $\alpha_{k-1} \in (B, b)$. De fato, é claro que $\alpha_k = b$. Suponha que $\tau_k \neq b$. Então,

$$\delta(\tau_k) < b - \tau_k \Rightarrow \tau_k + \delta(\tau_k) < b.$$

Mas, como $[\alpha_{k-1}, \alpha_k] \subset [\tau_k - \delta(\tau_k), \tau_k + \delta(\tau_k)]$, segue que $\alpha_k < \tau_k + \delta(\tau_k) < b$, contradizendo o fato de que $\alpha_k = b$. Portanto, $\tau_k = \alpha_k = b$.

Também,

$$\alpha_{k-1} \geq \tau_k - \delta(\tau_k) = b - \delta(b) > b - b + B = B \text{ e } \alpha_{k-1} < \alpha_k = b.$$

Portanto, $\alpha_{k-1} \in (B, b)$ e a afirmação está provada.

De (1.11), temos:

$$\begin{aligned} \|S(U, D) - I\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k-1} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] + U(\tau_k, \alpha_k) - U(\tau_k, \alpha_{k-1}) - I \right\| \leq \\ &\left\| \sum_{j=1}^{k-1} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^{\alpha_{k-1}} DU(\tau, t) \right\| + \\ &+ \left\| \int_a^{\alpha_{k-1}} DU(\tau, t) - U(b, \alpha_{k-1}) + U(b, b) - I \right\| < \\ &< \left\| \sum_{j=1}^{k-1} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^{\alpha_{k-1}} DU(\tau, t) \right\| + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\alpha_{k-1} < b$, $\widehat{D} = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_{k-1}, \alpha_{k-1}\}$ é uma partição $\widehat{\delta}$ -fina de $[a, \alpha_{k-1}]$ e vale (1.13), concluímos que o primeiro termo à direita da desigualdade acima pode ser estimado por ϵ . Dessa forma, obtemos:

$$\|S(U, D) - I\| < 2\epsilon,$$

para toda partição δ -fina D . Por conseguinte, $\int_a^b DU(\tau, t) = I$.

A demonstração da segunda parte segue de modo análogo. $\square$

Teorema 1.9. Seja $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ tal que $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e $c \in [a, b]$. Então,

$$\lim_{s \rightarrow c} \left[\int_a^s DU(\tau, t) - U(c, s) + U(c, c) \right] = \int_a^c DU(\tau, t).$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ de $[a, b]$ tal que

$$\left\| S(U, D) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| < \epsilon,$$

para toda partição δ -fina D de $[a, b]$.

Se $s \in [c - \delta(c), c + \delta(c)] \cap [a, b]$, então pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 4.1), temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^s DU(\tau, t) - U(c, s) + U(c, c) - \int_a^c DU(\tau, t) \right\| &= \\ &= \left\| \int_c^s DU(\tau, t) - U(c, s) + U(c, c) \right\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Observação 1.4. O teorema anterior mostra que a função dada por

$$s \in [a, b] \mapsto \int_a^s DU(\tau, t) \in X,$$

isto é, a integral de Kurzweil indefinida para U , não é em geral contínua.

A integral indefinida será contínua no ponto $c \in [a, b]$ se, e somente se, a função $U(c, \cdot) : [a, b] \rightarrow X$ for contínua no ponto c .

Teorema 1.10. (Substituição) Assuma que $-\infty < c < d < +\infty$ e que $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, estritamente monótona em $[c, d]$.

Considere a função $U : [\varphi(c), \varphi(d)] \times [\varphi(c), \varphi(d)] \rightarrow X$. Se uma das integrais $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau, t)$, $\int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s))$ existem, então a outra também existe e

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau, t) = \int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s)).$$

Demonstração. Vamos assumir que φ é uma função crescente e que a integral $\int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s))$ existe. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre ω em $[c, d]$ tal que, para toda partição ω -fina $\{\beta_0, \sigma_1, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \sigma_k, \beta_k\}$ de $[c, d]$, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^k [U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_j)) - U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_{j-1}))] - \int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s)) \right\| < \epsilon. \quad (1.14)$$

Como φ é crescente, $\varphi([c, d]) = [\varphi(c), \varphi(d)]$ e a inversa $\varphi^{-1} : [\varphi(c), \varphi(d)] \rightarrow [c, d]$ existe, é contínua e crescente em $[\varphi(c), \varphi(d)]$. Logo, para cada $\tau \in [\varphi(c), \varphi(d)]$, existe um único $\sigma \in [c, d]$ tal que $\sigma = \varphi^{-1}(\tau)$.

Para $\tau \in [\varphi(c), \varphi(d)]$, defina $\delta(\tau) > 0$ tal que

$$[\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \cap [\varphi(c), \varphi(d)] \subset \varphi([\sigma - \omega(\sigma), \sigma + \omega(\sigma)] \cap [c, d]), \quad (1.15)$$

que é possível graças a continuidade de φ e φ^{-1} .

Seja $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ uma partição arbitrária δ -fina de $[\varphi(c), \varphi(d)]$. Consideremos os conjuntos $\{\beta_j = \varphi^{-1}(\alpha_j); j = 0, \dots, k\}$ e $\{\sigma_j = \varphi^{-1}(\tau_j); j = 1, \dots, k\}$.

Pela monotocidade de φ^{-1} ,

$$\beta_0 = \varphi^{-1}(\alpha_0) = c < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{k-1} < \beta_k = \varphi^{-1}(\alpha_k) = d$$

e

$$\beta_{j-1} \leq \sigma_j \leq \beta_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Portanto $\{\beta_0, \sigma_1, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \sigma_k, \beta_k\}$ é uma partição de $[c, d]$.

Visto que $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ é uma partição δ -fina de $[\varphi(c), \varphi(d)]$, temos

$$\tau_j - \delta(\tau_j) \leq \alpha_{j-1} \leq \tau_j \leq \alpha_j \leq \tau_j + \delta(\tau_j).$$

Por (1.15), segue que $\varphi(\sigma_j - \omega(\sigma_j)) \leq \alpha_{j-1} \leq \alpha_j \leq \varphi(\sigma_j + \omega(\sigma_j))$. Novamente pela monotocidade de φ^{-1} , temos:

$$\sigma_j - \omega(\sigma_j) = \varphi^{-1}(\varphi(\sigma_j - \omega(\sigma_j))) \leq \varphi^{-1}(\alpha_{j-1}) = \beta_{j-1} < \beta_j = \varphi^{-1}(\alpha_j) \leq \sigma_j + \omega(\sigma_j),$$

de onde segue que a partição $\{\beta_0, \sigma_1, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \sigma_k, \beta_k\}$ é ω -fina em $[c, d]$. Por conseguinte, de (1.14), obtemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s)) \right\| = \\ \left\| \sum_{j=1}^k [U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_j)) - U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_{j-1}))] - \int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s)) \right\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, existe a integral $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau, t)$.

Suponha agora que exista a integral $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau, t)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[\varphi(c), \varphi(d)]$ tal que, para toda partição $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ δ -fina de $[\varphi(c), \varphi(d)]$, temos:

$$\left\| \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau, t) \right\| < \epsilon. \quad (1.16)$$

Para todo $\sigma \in [c, d]$, existe um valor $\omega(\sigma) > 0$ tal que,

$$|\varphi(s) - \varphi(\sigma)| < \delta(\varphi(\sigma)), \quad (1.17)$$

desde que $s \in [\sigma - \omega(\sigma), \sigma + \omega(\sigma)] \cap [c, d]$.

Se $\{\beta_0, \sigma_1, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \sigma_k, \beta_k\}$ é uma partição ω -fina de $[c, d]$, então consideremos os conjuntos $\{\tau_j = \varphi(\sigma_j); j = 1, \dots, k\}$ e $\{\alpha_j = \varphi(\beta_j); j = 0, 1, \dots, k\}$. Pela monotocidade de φ e por (1.17), a partição $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ é δ -fina em $[\varphi(c), \varphi(d)]$.

Logo, por (1.16), temos:

$$\left\| \sum_{j=1}^k [U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_j)) - U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_{j-1}))] - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau, t) \right\| < \epsilon.$$

Note que

$$\sum_{j=1}^k [U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_j)) - U(\varphi(\sigma_j), \varphi(\beta_{j-1}))] = \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})],$$

onde $\{\beta_0, \sigma_1, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \sigma_k, \beta_k\}$ é uma partição ω -fina de $[c, d]$. Portanto, existe a integral $\int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s))$. Além disso, $\int_c^d DU(\varphi(\sigma), \varphi(s)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau, t)$. $\square$

Teorema 1.11. Sejam $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e $V \in \mathcal{K}([a, b], \mathbb{R})$. Se existe $\theta \in [a, b]$ tal que

$$|t - \tau| \|U(\tau, t) - U(\tau, \tau)\| \leq (t - \tau)[V(\tau, t) - V(\tau, \tau)], \quad (1.18)$$

para todo $t \in [\tau - \theta(\tau), \tau + \theta(\tau)]$, então vale a desigualdade

$$\left\| \int_a^b DU(\tau, t) \right\| \leq \int_a^b DV(\tau, t).$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Por hipótese, U e V são Kurzweil integráveis. Logo, existe um calibre δ em $[a, b]$, com $\delta(\tau) < \theta(\tau)$ para todo $\tau \in [a, b]$, tal que para toda partição $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_{k-1}, \alpha_{k-1}\}$ δ -fina de $[a, b]$ temos:

$$\left\| S(U, D) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| < \epsilon \quad (1.19)$$

e

$$\left\| S(V, D) - \int_a^b DV(\tau, t) \right\| < \epsilon \quad (1.20)$$

Pela hipótese (1.18), se $\alpha_i > \tau_i$, temos:

$$\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| \leq V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \tau_i)$$

e $\alpha_i < \tau_i$ implica:

$$\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| \leq V(\tau_i, \tau_i) - V(\tau_i, \alpha_i).$$

Assim, para cada $i = 1, \dots, k$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})\| &\leq \|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| + \\ &+ \|U(\tau_i, \tau_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})\| \leq V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Logo, de (1.19), (1.20) e (1.21), segue que

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b DU(\tau, t) \right\| &\leq \left\| S(U, D) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| + \|S(U, D)\| < \epsilon + \|S(U, D)\| < \\ &< \epsilon + \sum_{i=1}^k [V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1})] = \epsilon + \sum_{i=1}^k [V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1})] - \\ &\quad - \int_a^b DV(\tau, t) + \int_a^b DV(\tau, t) < 2\epsilon + \int_a^b DV(\tau, t). \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, obtemos o desejado. $\square$

1.2 Teoremas de Convergência

Definição 1.6. Uma sequência de funções integráveis $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $U_m : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$, é dita equi-integrável se $U_m \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a, b]$ tal que

$$\left\| S(U_m, D) - \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\| < \epsilon, \quad (1.22)$$

para toda partição δ -fina D de $[a, b]$ e todo $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.12. Sejam $U, U_m : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$, $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que a sequência $\{U_m\}$ seja equi-integrável e que exista um calibre η de $[a, b]$ tal que,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [U_m(\tau, t_2) - U_m(\tau, t_1)] = U(\tau, t_2) - U(\tau, t_1), \quad (1.23)$$

para cada $\tau \in [a, b]$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, com $t_1 \leq \tau \leq t_2$, $[t_1, t_2] \subset (\tau - \eta(\tau), \tau + \eta(\tau))$.

Então $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b DU_m(\tau, t) = \int_a^b DU(\tau, t).$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\{U_m\}$ é equi-integrável, existe um calibre δ em $[a, b]$, $\delta(\tau) \leq \eta(\tau)$, $\tau \in [a, b]$, tal que para toda partição δ -fina $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ de $[a, b]$, tem-se

$$\left\| S(U_m, D) - \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

De (1.23), para cada partição $D = \{(\tau_j, [\alpha_j, \alpha_{j-1}]), j = 1, \dots, k\}$ de $[a, b]$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U_m(\tau_j, \alpha_j) - U_m(\tau_j, \alpha_{j-1}) - U(\tau_j, \alpha_j) + U(\tau_j, \alpha_{j-1})\| < \frac{\epsilon}{2^{j+1}},$$

sempre que $m \geq m_0$.

Assim, para $m \geq m_0$, obtem-se:

$$\begin{aligned} \|S(U_m, D) - S(U, D)\| &= \left\| \sum_{j=1}^k [U_m(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_j) - U_m(\tau_j, \alpha_{j-1}) + U(\tau_j, \alpha_{j-1})] \right\| < \\ &< \sum_{j=1}^k \frac{\epsilon}{2^{j+1}} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

de onde segue que $\lim_{m \rightarrow \infty} S(U_m, D) = S(U, D)$.

Dessa forma, para toda partição D δ -fina de $[a, b]$, existe um inteiro positivo m_0 tal que para $m > m_0$, tem-se:

$$\left\| S(U, D) - \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\| \leq \|S(U_m, D) - S(U, D)\| + \left\| S(U_m, D) - \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\| < \epsilon. \quad (1.24)$$

Por outro lado, por (1.24), tem-se:

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b DU_m(\tau, t) - \int_a^b DU_l(\tau, t) \right\| &\leq \left\| S(U, D) - \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\| + \\ &+ \left\| S(U, D) - \int_a^b DU_l(\tau, t) \right\| < 2\epsilon, \end{aligned}$$

para $m, l \geq m_0$, o que implica que a sequência $\left\{ \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy no espaço de Banach X . Portanto, existe o limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b DU_m(\tau, t) = I \in X. \quad (1.25)$$

Por conseguinte, para toda partição D δ -fina de $[a, b]$ e $m \geq m_0$, podemos concluir por (1.24) e (1.25) que

$$\|S(U, D) - I\| \leq \left\| S(U, D) - \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\| + \left\| \int_a^b DU_m(\tau, t) - I \right\| < 2\epsilon.$$

□

A seguir vamos estabelecer condições a fim de verificar a equi-integrabilidade de uma sequência de funções. Para tal verificação, desenvolveremos alguns resultados técnicos preliminares.

Dada a função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ e o intervalo marcado (τ, J) , com $\tau \in J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, denotaremos por

$$U(\tau, J) = U(\tau, \beta) - U(\tau, \alpha),$$

a função ponto-intervalo correspondente à função U .

Assumamos, a partir de agora, que $U, U_m : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$, com $U_m \in \mathcal{K}([a, b], X)$, $m = 1, 2, \dots$, satisfaçam as seguintes condições:

- (I1) Para cada $\epsilon > 0$, existem um calibre ω em $[a, b]$, uma função $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ e uma função intervalo superaditiva ϕ assumindo valores em $\mathbb{R}$, ou seja, ϕ é tal que, $\phi(J_1 \cup J_2) \geq \phi(J_1) + \phi(J_2)$, para intervalos fechados $J_1, J_2 \subset [a, b]$, com $\phi([a, b]) < \epsilon$, tal que, para cada $\tau \in [a, b]$, tenha-se

$$\|U_m(\tau, J) - U(\tau, J)\| < \phi(J), \quad (1.26)$$

sempre que $m > p(\tau)$ e (τ, J) é um intervalo marcado ω -fino;

- (I2) Existem um calibre θ em $[a, b]$ e uma constante $C \in \mathbb{R}^+$ tal que, para cada função $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{N}$, a inequação

$$\left\| \sum_{j=1}^k U_{m(\tau_j)}(\tau_j, J_j) \right\| \leq C \quad (1.27)$$

é satisfeita, para toda partição $D = \{(\tau_j, J_j), j = 1, 2, \dots, k\}$ θ -fina em $[a, b]$.

Definição 1.7. Sejam $U, U_m : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ satisfazendo as condições (I1) e (I2), para cada $m = 1, 2, \dots$. Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos definir S_p como sendo a família de todas as funções $V : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ para as quais existe uma partição $a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{l-1} < \beta_l = b$ de $[a, b]$ tal que, para todo intervalo marcado (τ, J) , $\tau \in J \subset [a, b]$, tenhamos

$$V(\tau, J) = \begin{cases} U_{m_j}(\tau, J), & \tau \in (\beta_{j-1}, \beta_j) \\ U_{m_j}(\tau, J^-) + U_{m_{j+1}}(\tau, J^+), & \tau = \beta_j, \end{cases} \quad (1.28)$$

em que $m_j \geq p$, $J^- = J \cap (-\infty, \beta_j]$ e $J^+ = J \cap [\beta_j, +\infty)$, $j = 1, \dots, l$.

Lema 1.13. Se U e U_m satisfazem as condições (I1) e (I2), $m = 1, 2, \dots$, então as seguintes informações são verdadeiras:

- i) Para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $U_p \in S_p$;
- ii) se $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, $p_1 > p_2$ então $S_{p_1} \subset S_{p_2}$;
- iii) se $V \in S_p$ então $V \in \mathcal{K}([a, b], X)$.

Demonstração. Para provar o item i), tome $\beta_0 = a$ e $\beta_1 = b$. Dessa forma, $U_p(\tau, J) = V(\tau, J)$.

Para provar o item ii), note que, se $V \in S_{p_1}$ e $p_1 > p_2$, então $m_j \geq p_1 > p_2$. Portanto, $V \in S_{p_2}$.

Por fim, para provar o item iii), note que, se $V \in S_p$, (1.28) vale para toda partição

$$D^j = \{(\tau_i^j, J_i^j), i = 1, \dots, k\} = \{\alpha_0^j = \beta_{j-1}, \tau_1^j, \alpha_1^j, \dots, \alpha_{k-1}^j, \tau_k^j, \alpha_k^j = \beta_j\}$$

de $J_j = [\beta_{j-1}, \beta_j] \subset [a, b]$, com $\alpha_{i-1}^j \leq \tau_i^j \leq \alpha_i^j$, $j = 1, \dots, l$.

Se $\alpha_{i-1}^j < \tau_i^j < \alpha_i^j$, para cada $j = 1, \dots, l$, seguirá de (1.28) que

$$V(\tau_i^j, J_i^j) = U_{m_j}(\tau_i^j, J_i^j).$$

Agora, se $\tau_k^j = \alpha_k^j = \beta_j$, para algum $j = 1, \dots, l$, então, por (1.28), seguirá que

$$V(\beta_j, J_k^j) = U_{m_j}(\beta_j, (J_k^j)^-) + U_{m_{j+1}}(\beta_j, (J_k^j)^+),$$

em que $(J_k^j)^- = [\alpha_{k-1}^j, \beta_j] \cap (\infty, \beta_j] = J_k^j$ e $(J_k^j)^+ = [\alpha_{k-1}^j, \beta_j] \cap [\beta_j, +\infty) = \{\beta_j\} := [\beta_j, \beta_j]$. Assim,

$$V(\beta_j, J_k^j) = U_{m_j}(\beta_j, J_k^j) + U_{m_{j+1}}(\beta_j, \{\beta_j\}) = U_{m_j}(\beta_j, J_k^j),$$

pois $U_{m_{j+1}}(\beta_j, \{\beta_j\}) = U_{m_{j+1}}(\beta_j, \beta_j) - U_{m_{j+1}}(\beta_j, \beta_j) = 0$.

De qualquer forma, para cada $j = 1, \dots, l$, teremos $S(V, D^j) = S(U_{m_j}, D^j)$.

Como U_{m_j} é integrável sobre $[a, b]$, segue do Teorema 1.5 que é também integrável sobre $[\beta_{j-1}, \beta_j]$, para cada $j = 1, \dots, l$. Então, pela igualdade acima, V é integrável sobre $[\beta_{j-1}, \beta_j]$, $j = 1, \dots, l$. Do Teorema 1.6, V é integrável sobre $[a, b]$. $\square$

Lema 1.14. Sejam U e U_m satisfazendo as condições (I1) e (I2), $m = 1, 2, \dots$. Se $V \in S_p$ então,

$$\left\| \sum_{j=1}^k V(\tau_j, J_j) \right\| = \|S(V, D)\| \leq C,$$

para alguma partição $D = \{(\tau_j, J_j), j = 1, \dots, k\}$ θ -fina de $[a, b]$.

Demonstração. Considere $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}$ pontos da partição do intervalo $[a, b]$ e

$$V(\tau, J) = \begin{cases} U_{m_j}(\tau, J), & \text{se } \tau \notin \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\} \\ U_{m_j}(\tau, J^-) + U_{m_{j+1}}(\tau, J^+), & \text{se } \tau \in \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}, \end{cases} \quad (1.29)$$

dados pela Definição 1.7.

Consideremos a partição de $[a, b]$

$$\begin{aligned} D = & \{(\tau_j, J_j^-), j = 1, \dots, k, \tau_j \notin \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}\} \cup \\ & \cup \{(\tau_j, J_j^-), j = 1, \dots, k, \tau_j \in \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}\} \cup \\ & \cup \{(\tau_j, J_j^+), j = 1, \dots, k, \tau_j \in \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}\}. \end{aligned}$$

Note que D é θ -fina, pela condição (I2). Daí por (1.27), obtem-se:

$$\left\| \sum_{j=1}^k V(\tau_j, J_j) \right\| = \|S(V, D)\| = \|S(U_{m_j}, D)\| = \left\| \sum_{j=1}^k U_{m_j}(\tau_j, J_j) \right\| \leq C,$$

em que $m_j = m(\tau_j) \in \mathbb{N}$, da função m dada em (I2). Portanto, o lema está provado. $\square$

Lema 1.15. Sejam U e U_m satisfazendo as condições (I1) e (I2), $m = 1, 2, \dots$. Se (τ, J) é um intervalo marcado ω -fino, $\tau \in J \subset [a, b]$, $p \geq p(\tau)$, então

$$\|V(\tau, J) - U(\tau, J)\| < \phi(J),$$

para todo $V \in S_p$.

Demonstração. Se $\tau_j \notin \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}$, então $V(\tau, J) = U_{m_j}(\tau, J)$, por (1.28). Como $m_j \geq p \geq p(\tau)$, o resultado segue imediatamente de (1.26).

Se $\tau_j \in \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}$, então $\tau_j = \beta_j$, para algum $j = 1, 2, \dots, l$ e, por (1.28),

$$V(\tau, J) = U_{m_j}(\tau, J^-) + U_{m_{j+1}}(\tau, J^+).$$

Se $J = [\alpha, \beta]$, então $J^- = [\alpha, \beta_j]$, $J^+ = [\beta_j, \beta]$ e

$$\begin{aligned} U(\tau, J^-) + U(\tau, J^+) &= U(\beta_j, \beta_j) - U(\beta_j, \alpha) + U(\beta_j, \beta) - U(\beta_j, \beta_j) = \\ &= U(\beta_j, \beta) - U(\beta_j, \alpha) = U(\tau, J). \end{aligned}$$

Dessa forma, por (1.26), segue:

$$\begin{aligned} \|V(\tau, J) - U(\tau, J)\| &= \|U_{m_j}(\tau, J^-) + U_{m_{j+1}}(\tau, J^+) - U(\tau, J^-) - U(\tau, J^+)\| \leq \\ &\leq \|U_{m_j}(\tau, J^-) - U(\tau, J^-)\| + \|U_{m_{j+1}}(\tau, J^+) - U(\tau, J^+)\| \leq \\ &\leq \phi(J^-) + \phi(J^+) \leq \phi(J^- \cup J^+) = \phi(J). \end{aligned}$$

Note que $m_j \geq p \geq p(\tau)$ e $m_{j+1} \geq m_j$ e, portanto, $m_{j+1} \geq p(\tau)$. $\square$

Versões análogas dos próximos dois lemas estão demonstradas em [11].

Lema 1.16. Sejam U e U_m satisfazendo as condições (I1) e (I2), $m = 1, 2, \dots$. Dado $\epsilon > 0$, existe $V_p \in S_p$, para cada $p \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left\| \left\| \int_a^b DV_p \right\| - I \right\| < \frac{\epsilon}{2^p},$$

onde $I = \inf \left\{ \left\| \int_a^b DV_p \right\|, V \in S_p \right\}$.

Lema 1.17. Sejam U e U_m satisfazendo as condições (I1) e (I2), $m = 1, 2, \dots$. Suponhamos que $I_j = [\gamma_{j-1}, \gamma_j]$, $j = 1, \dots, s$ seja uma sequência finita de intervalos disjuntos em $[a, b]$ e $V \in S_p$. Então, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^s \int_{I_j} DV(\tau, t) - \sum_{j=1}^s \int_{I_j} DV_p(\tau, t) \right\| < \frac{\epsilon}{2^p},$$

em que V_p é a função definida no Lema 1.16.

Teorema 1.18. Sejam U , U_m satisfazendo as condições (I1) e (I2), $m = 1, 2, \dots$. Então, a sequência $\{U_m\}$ é equi-integrável.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela hipótese (I1), existe um calibre ω em $[a, b]$ tal que,

$$\|U_m(\tau, J) - U(\tau, J)\| < \phi(J), \quad (1.30)$$

sempre que $m > p(\tau)$ e para cada (τ, J) ω -fino. Pelo Lema 1.15, ítem (1), segue que

$$\|V(\tau, J) - U(\tau, J)\| < \phi(J), \quad (1.31)$$

para todo $V \in S_p$, $p \geq p(\tau)$. Assim, por (1.30) e (1.31), temos

$$\|V_{p(\tau)}(\tau, J) - U_m(\tau, J)\| \leq \|V_{p(\tau)}(\tau, J) - U(\tau, J)\| + \|U_m(\tau, J) - U(\tau, J)\| < 2\phi(J), \quad (1.32)$$

sempre que $m > p(\tau)$ e para cada (τ, J) ω -fino.

Pelo Lema 1.13, $U_p, V_p \in \mathcal{K}([a, b], X)$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Então, para cada $p \in \mathbb{N}$, existe um calibre δ_p de $[a, b]$ tal que

$$\left\| S(U_p, D) - \int_a^b DU_p(\tau, t) \right\| < \frac{\epsilon}{2^p} \quad (1.33)$$

e

$$\left\| S(V_p, D) - \int_a^b DV_p(\tau, t) \right\| < \frac{\epsilon}{2^p}, \quad (1.34)$$

para toda partição D δ_p -fina de $[a, b]$.

Definamos um calibre δ em $[a, b]$ tal que, para cada $\tau \in [a, b]$,

$$\delta(\tau) \leq \min\{\omega(\tau), \delta_1(\tau), \delta_2(\tau), \dots, \delta_{p(\tau)}(\tau)\}.$$

Assuma que $D = \{(\tau_i, J_i), i = 1, \dots, k\}$ é uma partição δ -fina de $[a, b]$. Então,

$$S(U_m, D) = \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i).$$

Se $m \leq p(\tau_i)$, pela escolha do calibre, por (1.33), (1.34) e pelo Lema de Saks-Henstock (4.1), segue:

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^k \int_{J_i} DU_m(\tau, t) \right\| < \epsilon, \quad (1.35)$$

e

$$\left\| \sum_{i=1}^k V_{p(\tau_i)}(\tau_i, J_i) - \sum_{i=1}^k \int_{J_i} DV_{p(\tau_i)}(\tau, t) \right\| < \epsilon. \quad (1.36)$$

Agora, se $m > p(\tau_i)$ observe que, sendo D δ -fina pela escolha do calibre δ , D é também ω -fina em $[a, b]$. Logo, por (1.32) e pela condição (I1), obtemos

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k V_{p(\tau_i)}(\tau_i, J_i) \right\| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k 2\phi(J_i) \leq 2\phi([a, b]) < 2\epsilon. \quad (1.37)$$

E ainda, pelo Lema 1.2, por (1.37) e (1.36), tem-se:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k \int_{J_i} DU_m(\tau, t) \right\| &\leq \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{i=1}^k V_{p(\tau_i)}(\tau_i, J_i) \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^k V_{p(\tau_i)}(\tau_i, J_i) - \sum_{i=1}^k \int_{J_i} DU_m(\tau, t) \right\| < \\ &< 2\epsilon + \left\| \sum_{p(\tau_i)=1}^{m-1} \left[\sum_{i=1}^k V_{p(\tau_i)}(\tau_i, J_i) - \sum_{i=1}^k \int_{J_i} DV_{p(\tau_i)}(\tau, t) \right] \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{p(\tau_i)=1}^{m-1} \left[\sum_{i=1}^k \int_{J_i} DV_{p(\tau_i)}(\tau, t) - \sum_{i=1}^k \int_{J_i} DU_m(\tau, t) \right] \right\| < 2\epsilon + 2 \sum_{p(\tau_i)=1}^{m-1} \frac{\epsilon}{2^{p(\tau_i)}} < 4\epsilon. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Por Consequente, de (1.35), (1.38) e para todo $m \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \left\| S(U_m, D) - \int_a^b DU_m(\tau, t) \right\| &= \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^k \int_{J_i} DU_m(\tau, t) \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^k \int_{J_i} DU_m(\tau, t) \right\| < 5\epsilon, \end{aligned}$$

para toda partição δ -fina D de $[a, b]$. Portanto, $\{U_m\}$ é equi-integrável. $\square$

2 Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas

Neste capítulo faremos uma breve introdução à teoria das Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas, EDOGs, também conhecidas como Equações de Kurzweil, a fim de obter informações a cerca do comportamento das soluções desse tipo de equações.

Consideremos $\Omega = \mathcal{O} \times [a, b]$, em que $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto no espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, e $F : \Omega \rightarrow X$ uma função definida para $(x, t) \in \Omega$ e assumindo valores em X .

Definição 2.1. Uma função $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ é dita uma *solução* da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t) \quad (2.1)$$

no intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, se $(x(t), t) \in \Omega$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t), \quad \forall s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]. \quad (2.2)$$

A integral do lado direito de (2.2) deve ser entendida como sendo a integral de Kurzweil, definida no capítulo anterior.

Observação 2.1. É importante observar que a notação em (2.1) é apenas simbólica. O termo $\frac{dx}{d\tau}$ em (2.1) não significa que a solução da EDOG é diferenciável. Isso será ilustrado a seguir.

Exemplo 2.1. Seja $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que não é diferenciável em todos os pontos do intervalo $[0, 1]$.

Defina $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(\tau, t) = r(t)$. Claramente, F é contínua e, pela definição da integral, temos:

$$\int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) = \int_{s_1}^{s_2} Dr(t) = r(s_2) - r(s_1).$$

Assim, r é solução da EDOG $\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t) = Dr(t)$. Porém, a solução $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(s) = r(s)$ não é diferenciável.

Observação 2.2. Se adicionarmos a $F(x, t)$ uma função dependendo somente de x , as soluções da EDOG (2.1) não mudarão.

De fato, seja $H : \mathcal{O} \rightarrow X$ uma função. Defina $G(x, t) = F(x, t) + H(x)$, para $(x, t) \in \mathcal{O} \times [\alpha, \beta]$. Assim, dada a partição $D = \{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]); j = 1, \dots, k\}$ de $[\alpha, \beta]$, temos:

$$\begin{aligned} S(G, D) &= \sum_{j=1}^k [G(x(\tau_j), s_j) - G(x(\tau_j), s_{j-1})] = \sum_{j=1}^k [F(x(\tau_j), s_j) + H(x(\tau_j)) - \\ &\quad - F(x(\tau_j), s_{j-1}) - H(x(\tau_j))] = \sum_{j=1}^k [F(x(\tau_j), s_j) - F(x(\tau_j), s_{j-1})] = S(F, D). \end{aligned}$$

Portanto, $\int_a^b DG = \int_a^b DF$.

Dessa forma, se $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ for uma solução da EDOG $\frac{dx}{d\tau} = DG(x(\tau), t)$, então também será solução da EDOG $\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t)$ em $[\alpha, \beta]$.

Definição 2.2. Uma função $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ é dita *solução da EDOG* (2.1), com condição inicial $x(t_0) = z_0$ em $[\alpha, \beta]$, se $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $(x(t), t) \in \Omega$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e a igualdade

$$x(\nu) - z_0 = \int_{t_0}^{\nu} DF(x(\tau), t) \quad (2.3)$$

é válida para todo $\nu \in [\alpha, \beta]$.

Proposição 2.1. Seja $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ uma solução da EDOG (2.1) em $[\alpha, \beta]$. Então, para todo $\gamma \in [\alpha, \beta]$ fixo, vale:

$$x(s) - x(\gamma) = \int_{\gamma}^s DF(x(\tau), t), \quad s \in [\alpha, \beta]. \quad (2.4)$$

Se $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ satisfaz a equação integral (2.4) para algum $\gamma \in [\alpha, \beta]$, então x é solução de (2.1).

Demonstração. A primeira parte segue diretamente da definição. Agora, se x satisfaz (2.4), então para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$, com $s_1 < s_2$, tem-se:

$$x(s_2) - x(s_1) = x(\gamma) + \int_{\gamma}^{s_2} DF(x(\tau), t) - x(\gamma) - \int_{\gamma}^{s_1} DF(x(\tau), t) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t).$$

Portanto, x é solução de (2.1). □

A Proposição 2.1 nos diz que as soluções $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ de (2.1) se comportam de modo semelhante as K-integrais indefinidas. Vamos aplicar o Teorema 1.9 para garantir o seguinte resultado:

Proposição 2.2. Se $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (2.1), então:

$$\lim_{s \rightarrow \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma)] = x(\sigma), \quad \forall \sigma \in [\alpha, \beta].$$

Demonstração. Seja $\sigma \in [\alpha, \beta]$ fixado. Como x é solução de (2.1), segue pela Proposição 2.1 que $x(s) - x(\sigma) = \int_{\sigma}^s DF(x(\tau), t)$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$.

Assim, temos:

$$x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) - \int_{\sigma}^s DF(x(\tau), t) + F(x(\sigma), s) - F(x(\sigma), \sigma) - x(\sigma) = 0. \quad (2.5)$$

Sabemos pelo Teorema 1.9 que

$$\lim_{s \rightarrow \sigma} \left[\int_{\sigma}^s DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) \right] = \int_{\sigma}^{\sigma} DF(x(\tau), t) = 0$$

e por (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma)] &= \\ &= \lim_{s \rightarrow \sigma} \left[x(\sigma) + \int_{\sigma}^s DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) \right] = x(\sigma). \end{aligned}$$

□

Vamos introduzir uma classe de funções que permitirá garantir mais informações a respeito das soluções da EDOG (2.1).

Denotemos por G o conjunto $\mathcal{O} \times (a, b)$, em que $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto em X . Vamos assumir que $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente e $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente lipschitziana, crescente, com $\omega(0) = 0$.

Definição 2.3. A função $F : G \rightarrow X$ pertence à classe $\mathcal{F}(G, h, \omega)$ se:

- i) $\|F(x, t_2) - F(x, t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)|$, para quaisquer $(x, t_2), (x, t_1)$ em G e
- ii) $\|F(x, t_2) - F(x, t_1) - F(y, t_2) + F(y, t_1)\| \leq \omega(\|x - y\|) |h(t_2) - h(t_1)|$, para quaisquer $(x, t_2), (x, t_1), (y, t_2), (y, t_1)$ em G .

Sabendo que a função identidade $I : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é lipschitziana, crescente e se anula na origem, denotaremos a classe $\mathcal{F}(G, h, I)$ por $\mathcal{F}(G, h)$.

Lema 2.1. Suponha que $F : G \rightarrow X$ satisfaça as condições da Definição 2.3.

Se $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ é tal que $(x(t), t) \in G$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, e a integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ existe, então

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \right\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|, \forall s_2, s_1 \in [\alpha, \beta].$$

Demonstração. Pela condição i) da Definição 2.3 temos, para quaisquer $\tau, t \in [\alpha, \beta]$,

$$|t - \tau| \|F(x(\tau), t) - F(x(\tau), \tau)\| \leq |h(t) - h(\tau)| |t - \tau|.$$

Seja $V(\tau, t) = h(t)$. A integral $\int_{\alpha}^{\beta} DV(\tau, t)$ existe e

$$\int_{s_1}^{s_2} DV(\tau, t) = \int_{s_1}^{s_2} Dh(t) = h(s_2) - h(s_1), \forall s_2, s_1 \in [\alpha, \beta].$$

Pelo Teorema 1.11, obtemos

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} DV(\tau, t) \leq \left| \int_{s_1}^{s_2} DV(\tau, t) \right| = |h(s_2) - h(s_1)|, \forall s_2, s_1 \in [\alpha, \beta].$$

□

Vamos considerar a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t), \quad (2.6)$$

com a função F definida em G com valores em X .

Lema 2.2. Suponha que $F : G \rightarrow X$ satisfaça a condição $i)$ da Definição 2.3. Se $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ e $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ é uma solução da EDOG (2.6), então

$$\|x(s_2) - x(s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|, \forall s_2, s_1 \in [\alpha, \beta] \quad (2.7)$$

Demonstração. A desigualdade segue imediatamente do Lema 2.1 e da igualdade

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. □

Corolário 2.1. Nas condições do Lema 2.2, a função $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ será de variação limitada ¹ em $[\alpha, \beta]$ e

$$\text{var}_\alpha^\beta(x) \leq h(\beta) - h(\alpha) < +\infty.$$

Demonstração. De fato, seja $D = \{\alpha = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \beta\}$ uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$. Note que a desigualdade (2.7) implica em

$$\sum_{j=1}^k \|x(s_j) - x(s_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^k |h(s_j) - h(s_{j-1})| = h(\beta) - h(\alpha). \quad (2.8)$$

Então, tomando o supremo em (2.8), com respeito a todas as partições D de $[\alpha, \beta]$, teremos:

$$\text{var}_\alpha^\beta(x) \leq h(\beta) - h(\alpha).$$

□

No lema seguinte, teremos informações a respeito das descontinuidades de primeira espécie das soluções da EDOG (2.6).

Lema 2.3. Suponha que $F : G \rightarrow X$ satisfaça a condição $i)$ da Definição 2.3 e $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ seja uma solução da EDOG (2.6). Então,

- (i) $x(s^+) - x(s) = F(x(s), s^+) - F(x(s), s)$, para todo $s \in [\alpha, \beta)$, onde $F(x, s^+) = \lim_{\sigma \rightarrow s^+} F(x, \sigma)$;

¹A variação em $[a, b]$ de uma função $f : [a, b] \rightarrow X$ é dada pelo número real $\sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|f(s_i) - f(s_{i-1})\|, a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b, m \in \mathbb{N} \right\}$ e é denotado por $\text{var}_a^b(f)$.

- (ii) $x(s) - x(s^-) = F(x(s), s) - F(x(s), s^-)$, para todo $s \in (\alpha, \beta]$, onde $F(x, s^-) = \lim_{\sigma \rightarrow s^-} F(x, \sigma)$.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas o item (i). A demonstração do item (ii) é similar.

Primeiramente note que como h é não-decrescente, os limites laterais de h em $[\alpha, \beta]$ existem. Pela condição sobre F temos que $F(x(s), s^+)$ e $F(x(s), s^-)$ existem.

Como x é solução da EDOG (2.6), segue que

$$x(\sigma) - x(s) = \int_s^\sigma DF(x(\tau), t), \quad \forall \sigma, s \in [\alpha, \beta].$$

Assim, pelo Teorema 1.9, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow s^+} [x(\sigma) - x(s)] &= \lim_{\sigma \rightarrow s^+} \left[\int_s^\sigma DF(x(\tau), t) \right] \stackrel{1.9}{=} \\ &= \int_s^\sigma DF(x(\tau), t) + \lim_{\sigma \rightarrow s^+} [F(x(s), \sigma) - F(x(s), s)] = F(x(s), s^+) - F(x(s), s). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado garantirá a existência da integral da Definição 2.1, quando $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$, usando os resultados de convergência, da Seção (1.2).

Teorema 2.4. Seja $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$. Suponhamos que $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, seja o limite pontual de uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funções $x_k : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ tais que $(x(s), s) \in G$, $(x_k(s), s) \in G$, para todos $k \in \mathbb{N}$ e $s \in [\alpha, \beta]$.

Se $\int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau), t)$ existe para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t)$ existe e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau), t) = \int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t).$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$, temos:

$$\|F(x_k(\tau), t_2) - F(x_k(\tau), t_1) - F(x(\tau), t_2) + F(x(\tau), t_1)\| \leq \omega(\|x_k(\tau) - x(\tau)\|) |h(t_2) - h(t_1)|,$$

para todo $\tau \in [\alpha, \beta]$, com $t_1 \leq \tau \leq t_2$, $[t_1, t_2] \subset [\alpha, \beta]$.

Definimos a função $\mu : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo, para cada $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\mu(t) = \frac{\epsilon h(t)}{h(\beta) - h(\alpha) + 1}, \quad \text{onde } \mu(\beta) - \mu(\alpha) < \epsilon.$$

Note que μ é não-decrescente. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(\tau) = x(\tau)$, para todo $\tau \in [\alpha, \beta]$, e a função ω é contínua na origem, existe $p(\tau) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq p(\tau)$, temos

$$\omega(\|x_k(\tau) - x(\tau)\|) < \frac{\epsilon}{h(\beta) - h(\alpha) + 1}.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \|F(x_k(\tau), t_2) - F(x_k(\tau), t_1) - F(x(\tau), t_2) + F(x(\tau), t_1)\| &\leq \\ &\leq \omega(\|x_k(\tau) - x(\tau)\|) |h(t_2) - h(t_1)| < \mu(t_2) - \mu(t_1), \end{aligned}$$

para todos $\tau \in [t_1, t_2]$ e $k \geq p(\tau)$.

Seja δ um calibre de $[\alpha, \beta]$. Para toda aplicação $m : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{N}$ e toda partição δ -fina $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, \dots, k\}$ de $[\alpha, \beta]$, temos

$$\sum_{j=1}^k \|F(x_{m(\tau_j)}(\tau_j), \alpha_j) - F(x_{m(\tau_j)}(\tau_j), \alpha_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^k |h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})| = h(\beta) - h(\alpha).$$

Assim, estamos sob as condições (I1) e (I2) do Teorema 1.18, de onde se conclui, pelo Teorema 1.12, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} DF(x_k(\tau), t) = \int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t).$$

□

Corolário 2.2. Seja $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$. Suponha que $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, é o limite pontual de uma sequência de funções escada tal que $(x(s), s) \in G$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Então, a integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ existe.

Demonstração. Com efeito, basta mostrar que, dada uma função escada finita

$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow X$, com $(x(s), s) \in G$ para todo $s \in [\alpha, \beta]$, a integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(\varphi(\tau), t)$ existe.

Se φ é uma função escada finita, então existe uma partição $\alpha = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \beta$ de $[\alpha, \beta]$ tal que $\varphi(s) = c_j$, para cada $s \in (s_{j-1}, s_j)$, $j = 1, \dots, k$, onde $c_j \in X$ é constante. Pela definição de integral, é fácil ver que se $s_{j-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_j$, então a integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau), t)$ existe e

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau), t) = F(c_j, \sigma_2) - F(c_j, \sigma_1). \quad (2.9)$$

Tomemos $\sigma_0 \in (s_{j-1}, s_j)$. Por (2.9), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_{j-1}^+} \left[\int_s^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau), t) + F(\varphi(s_{j-1}), s) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}) \right] &= \\ &= \lim_{s \rightarrow s_{j-1}^+} [F(c_j, \sigma_0) - F(c_j, s) + F(\varphi(s_{j-1}), s) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1})] = \\ &= F(c_j, \sigma_0) - F(c_j, s_{j-1}^+) + F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.8, obtemos:

$$\lim_{s \rightarrow s_{j-1}^+} \left[\int_s^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau), t) + F(\varphi(s_{j-1}), s) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}) \right] = \int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau), t).$$

Portanto, a integral $\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau), t)$ existe e

$$\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau), t) = F(c_j, \sigma_0) - F(c_j, s_{j-1}^+) + F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}).$$

Analogamente, pode-se mostrar que a integral $\int_{\sigma_0}^{s_j} DF(\varphi(\tau), t)$ existe e

$$\int_{\sigma_0}^{s_j} DF(\varphi(\tau), t) = F(c_j, s_j^-) - F(c_j, \sigma_0) - F(\varphi(s_j), s_j^-) + F(\varphi(s_j), s_j).$$

Assim, pelo Teorema 1.6, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{s_{j-1}}^{s_j} DF(\varphi(\tau), t) &= F(c_j, s_j^-) - F(c_j, \sigma_0) - F(\varphi(s_j), s_j^-) + F(\varphi(s_j), s_j) + \\ &\quad + F(c_j, \sigma_0) - F(c_j, s_{j-1}^+) + F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}) = \\ &= F(c_j, s_j^-) - F(c_j, s_{j-1}^+) + F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}) - F(\varphi(s_j), s_j^-) + F(\varphi(s_j), s_j). \end{aligned}$$

Repetindo esse argumento em todos os intervalos $[s_{j-1}, s_j]$, $j = 1, \dots, k$ e usando o Teorema 1.6, garantimos a existência da integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(\varphi(\tau), t)$, bem como a validade da identidade:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} DF(\varphi(\tau), t) &= \sum_{j=1}^k [F(c_j, s_j^-) - F(c_j, s_{j-1}^+)] + \sum_{j=1}^k [F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}) - \\ &\quad - F(\varphi(s_j), s_j^-) + F(\varphi(s_j), s_j)]. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.4, a integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ existe. $\square$

Corolário 2.3. Sejam $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$ e $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ uma função regradada ²(em particular de variação limitada) em $[\alpha, \beta]$ tal que $(x(s), s) \in G$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$, então a integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ existe.

Demonstração. Como toda função regradada é o limite uniforme de funções escada (veja [6]), o resultado segue do Corolário 2.2. $\square$

2.1 Existência e unicidade de solução

Nesta seção, continuaremos considerando $G = \mathcal{O} \times (a, b)$, onde $\mathcal{O}$ é um aberto de X , e $F : G \rightarrow X$ pertencente à classe $\mathcal{F}(G, h, \omega)$.

Vamos considerar a equação diferencial ordinária generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t). \quad (2.10)$$

Como F pertence à classe $\mathcal{F}(G, h, \omega)$, segue pelo Lema (2.3) que toda solução de (2.10) é contínua à esquerda, os limites laterais existem e se, para algum $t_0 \in (a, b)$, o valor da solução x é $x(t_0) = \tilde{x}$, então o limite à direita em t_0 satisfaz:

$$x(t_0^+) = x(t_0) + F(x(t_0), t_0^+) - F(x(t_0), t_0) = \tilde{x} + F(\tilde{x}, t_0^+) - F(\tilde{x}, t_0).$$

² Dizemos que $\psi : [a, b] \rightarrow X$ é uma função regradada se existem os limites laterais à direita e à esquerda em todos os pontos de $[a, b)$ e $(a, b]$, respectivamente.

Toda função $\psi : [a, b] \rightarrow X$ de variação limitada é regradada (veja [10]).

Como há a possibilidade de (2.10) admitir soluções descontínuas, pode ocorrer a existência de algum $\tilde{x} \in \mathcal{O}$ tal que $\tilde{x}^+ \notin \mathcal{O}$. Dessa forma, na demonstração do teorema de existência e unicidade local de solução para EDOGs, é natural assumirmos que $\tilde{x}^+ \in \mathcal{O}$.

O teorema de existência e unicidade local de solução para a EDOG (2.10) é uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach ³, como veremos a seguir.

Teorema 2.5. Sejam $F : G \rightarrow X$ pertencente à classe $\mathcal{F}(G, h, \omega)$ e $(\tilde{x}, t_0) \in G$ tal que $\tilde{x}^+ \in \mathcal{O}$. Então, existe $\Delta > 0$ de modo que $x : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow X$ é a única solução de (2.10) que satisfaz $x(t_0) = \tilde{x}$.

Demonstração. Como $G = \mathcal{O} \times (a, b)$, $\mathcal{O}$ é aberto e $\tilde{x} \in \mathcal{O}$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\tilde{x}, \epsilon) \subset \mathcal{O}$, em que $B(\tilde{x}, \epsilon)$ é a bola aberta de centro $\tilde{x}$ e raio ϵ em $\mathcal{O}$. Primeiramente, suponhamos que h seja contínua em t_0 . Então, para este mesmo $\epsilon > 0$, existe $\Delta_1 > 0$ tal que

$$|h(t) - h(t_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta_1].$$

Então, pelo Lema 2.2, temos que, para todo $x \in X$, $x(t) \in \mathcal{O}$, pois:

$$\|x(t) - \tilde{x}\| < |h(t) - h(t_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta_1].$$

Além disso, existe $\Delta_2 > 0$ tal que $h(t_0 + \Delta_2) - h(t_0) < \frac{1}{4L}$, onde L é a constante de Lipschitz de ω em $[t_0, t_0 + \Delta_2]$.

Consideremos $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$. Assim, $x(t) \in \mathcal{O}$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$. Como a função h é não-decrescente, segue que

$$h(t_0 + \Delta) - h(t_0) < \frac{1}{4L}. \quad (2.11)$$

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{z \in BV([t_0, t_0 + \Delta], X); \|z(t) - \tilde{x}\| \leq |h(t) - h(t_0)|, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]\},$$

em que $BV([t_0, t_0 + \Delta], X)$ denota o espaço de Banach das funções de variação limitada definidas em $[t_0, t_0 + \Delta]$ com valores em X , com a norma usual da variação dada por

$$\|z\|_{BV} = \|z(t_0)\| + \text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta} z.$$

Mostremos que $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach. Para isso, basta mostrarmos que $\mathcal{A}$ é fechado em $BV([t_0, t_0 + \Delta], X)$. Com efeito, seja $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{A}$ tal que $z_n \rightarrow z$ em $BV([t_0, t_0 + \Delta], X)$. Queremos concluir que $z \in \mathcal{A}$.

Note que $\|z_n(t) - \tilde{x}\| < |h(t) - h(t_0)|$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$. Como

$$\|z_n(t) - z(t)\| \leq \|z_n - z\|_{BV}, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta],$$

segue que $z_n(t) \rightarrow z(t)$ uniformemente em $[t_0, t_0 + \Delta]$. Então, dado $\eta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_n(t) - z(t)\| < \eta$, para todo $n \geq n_0$ e todo $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$. Daí, para todo $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, vemos que

$$\|z(t) - \tilde{x}\| \leq \|z_n(t) - z(t)\| + \|z_n(t) - \tilde{x}\| < \eta + |h(t) - h(t_0)|, \forall n \geq n_0.$$

³**Teorema do Ponto Fixo de Banach:** Se X é um espaço de Banach e $T : X \rightarrow X$ é uma contração, então existe um único $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$.

Sendo $\eta > 0$ arbitrário, temos

$$\|z(t) - \tilde{x}\| < |h(t) - h(t_0)|, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

Então, $z \in \mathcal{A}$ e, portanto, $\mathcal{A}$ é fechado.

Defina, para $s \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e $z \in \mathcal{A}$, a aplicação

$$Tz(s) = \tilde{x} + \int_{t_0}^s DF(z(\tau), t).$$

Como $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$ e $z \in BV([t_0, t_0 + \Delta], X)$, segue do Corolário 2.3 que a integral $\int_{t_0}^s DF(z(\tau), t)$ existe. Portanto, o operador T está bem definido. Além disso, segue do Lema 2.1, que

$$\|Tz(s) - \tilde{x}\| = \left\| \int_{t_0}^s DF(z(\tau), t) \right\| \leq |h(s) - h(t_0)|, \forall s \in [t_0, t_0 + \Delta],$$

ou seja, $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Afirmamos que T é uma contração. De fato, como $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$, para $t, \tau \in [t_0, t_0 + \Delta]$, com $t > \tau$, e $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t) - F(z_2(\tau), \tau) + F(z_1(\tau), \tau)\| &\leq \\ &\leq \omega(\|z_2 - z_1\|)|h(t) - h(\tau)| = \frac{t - \tau}{|t - \tau|} \omega(\|z_2 - z_1\|)[h(t) - h(\tau)]. \end{aligned}$$

Logo, para $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, usando o Teorema 1.11, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{s_1}^{s_2} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)] \right\| &\leq \int_{s_1}^{s_2} D[\omega(\|z_2 - z_1\|)h(t)] = \\ &= \omega(\|z_2 - z_1\|) \int_{s_1}^{s_2} Dh(t) = \omega(\|z_2 - z_1\|)[h(s_2) - h(s_1)] \leq L\|z_2 - z_1\|[h(s_2) - h(s_1)]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|(Tz_2 - Tz_1)(s_2) - (Tz_2 - Tz_1)(s_1)\| &= \left\| \int_{s_1}^{s_2} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)] \right\| \leq \\ &\leq L\|z_2 - z_1\|[h(s_2) - h(s_1)]. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Seja $D = \{t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t_0 + \Delta\}$ uma partição finita arbitrária de $[t_0, t_0 + \Delta]$. Por (2.12), temos:

$$\begin{aligned} \text{var}_{t_0}^{t_0 + \Delta}(Tz_2 - Tz_1) &= \sup_D \sum_{j=1}^k \|(Tz_2 - Tz_1)(s_j) - (Tz_2 - Tz_1)(s_{j-1})\| \leq \\ &\leq \sup_D \sum_{j=1}^k L\|z_2 - z_1\|[h(s_j) - h(s_{j-1})] = L\|z_2 - z_1\| \sup_D \sum_{j=1}^k [h(s_j) - h(s_{j-1})] = \\ &= L\|z_2 - z_1\|[h(t_0 + \Delta) - h(t_0)]. \end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned} \|Tz_2 - Tz_1\|_{BV} &= \|(Tz_2 - Tz_1)(t_0)\| + \text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \|Tz_2(t_0) - Tz_1(t_0)\| + \\ &\quad + 2\text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) = 2\text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \\ &\leq 2L\|z_2 - z_1\|[h(t_0 + \Delta) - h(t_0)] \stackrel{(2.11)}{<} \frac{2L}{4L}\|z_2 - z_1\| = \frac{1}{2}\|z_2 - z_1\|. \end{aligned}$$

Portanto, T é uma contração em $\mathcal{A}$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $x \in \mathcal{A}$ tal que,

$$x(s) = Tx(s) = \tilde{x} + \int_{t_0}^s DF(z(\tau), t), \quad \forall s \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

Consequentemente, $x : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow X$ é a única solução de (2.10) em $[t_0, t_0 + \Delta]$, com $\tilde{x} = x(t_0)$.

Agora, consideremos h descontínua em t_0 . Sendo assim, defina:

$$\bar{h}(t) = \begin{cases} h(t), & t \leq t_0 \\ h(t) - [h(t_0^+) - h(t_0)], & t > t_0. \end{cases}$$

Note que $\bar{h}$ é não-decrescente e contínua à esquerda em $[t_0, +\infty)$. Definimos também

$$\bar{F}(x, t) = \begin{cases} F(x, t), & t \leq t_0 \\ F(x, t) - [F(\tilde{x}, t_0^+) - F(\tilde{x}, t_0)], & t > t_0. \end{cases}$$

Observe que $\bar{F} \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$. Portanto, utilizando um procedimento análogo ao anterior, concluímos que existe uma única solução local z de $\frac{dz}{d\tau} = D\bar{F}(z(\tau), t)$, com $z(t_0) = \tilde{x}^+$.

Por conseguinte,

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}, & t = t_0 \\ z(t), & t > t_0, \end{cases}$$

pela Observação 2.2, é a única solução de (2.10) satisfazendo $\tilde{x} = x(t_0)$. $\square$

O próximo lema será importante para que, na seção posterior, consigamos estender as soluções à direita do intervalo, caso existam.

Lema 2.6. Se $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ e $y : [\beta, \gamma] \rightarrow X$ são soluções de (2.10) em $[\alpha, \beta]$ e $[\beta, \gamma]$ respectivamente, com $[\alpha, \gamma] \subset (a, b)$ e $x(\beta) = y(\beta)$, então $z : [\alpha, \gamma] \rightarrow X$ dada por

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [\alpha, \beta] \\ y(t), & t \in [\beta, \gamma] \end{cases}$$

é uma solução de (2.10).

Demonstração. De fato, pelo Teorema 1.6, para $s_1, s_2 \in [\alpha, \gamma]$, $s_1 < \beta < s_2$, temos

$$\begin{aligned} z(s_2) - z(s_1) &= z(s_2) - z(\beta) + z(\beta) - z(s_1) = y(s_2) - y(\beta) + x(\beta) - x(s_1) = \\ &= \int_{\beta}^{s_2} DF(y(\tau), t) + \int_{s_1}^{\beta} DF(x(\tau), t) = \int_{s_1}^{s_2} DF(z(\tau), t), \end{aligned}$$

o que conclui a prova. $\square$

2.2 Solução maximal

Vamos assumir que F pertence à classe $\mathcal{F}(G, h, \omega)$. É claro que, se $x : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow X$ é uma solução de (2.10) em $[t_0, t_0 + \Delta]$ e se o valor à direita do ponto final deste intervalo satisfaz

$$x((t_0 + \Delta)^+) = x(t_0 + \Delta) + F(x(t_0 + \Delta), (t_0 + \Delta)^+) - F(x(t_0 + \Delta), t_0 + \Delta),$$

com $(x(t_0 + \Delta)^+, t_0 + \Delta) \in G$, então o Teorema 2.5 pode ser aplicado neste ponto para garantir a continuação da solução à direita do intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$.

Vamos assumir que x é uma solução de (2.10), com condição inicial $\tilde{x} = x(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$, $\tilde{x} \in \mathcal{O}$ e que $x + F(x, t^+) - F(x, t) \in \mathcal{O}$, para quaisquer $x \in \mathcal{O}$, $t \in (a, b)$, ou seja, não existem pontos em G para os quais a solução de (2.10) não pertença ao conjunto $\mathcal{O}$.

Definição 2.4. Seja $x : [t_0, t_0 + \eta] \rightarrow X$, $\eta > 0$, uma solução de (2.10) em $[t_0, t_0 + \eta]$. A solução $y : I \rightarrow X$ de (2.10), onde $I = [t_0, t_0 + \sigma]$ ou $I = [t_0, t_0 + \sigma)$, $\sigma > 0$, é chamado um *prolongamento* (*extensão*) de x se $[t_0, t_0 + \eta] \subset I$ e $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \eta]$.

Se $\sigma > \eta$, então y é chamado um *prolongamento próprio* de x à direita.

Definição 2.5. Se $(\tilde{x}, t_0) \in G$, então a solução x de (2.10), com $x(t_0) = \tilde{x}$, definida para $t \geq t_0$ é maximal se existe um valor $b(\tilde{x}, t_0) > t_0$ tal que a solução x existe em $[t_0, b(\tilde{x}, t_0))$ e não pode ser prolongada ao intervalo $[t_0, \beta]$, onde $\beta \geq b(\tilde{x}, t_0)$. Em outras palavras, não existe prolongamento à direita do intervalo $[t_0, b(\tilde{x}, t_0))$ para a solução $x : [t_0, b(\tilde{x}, t_0)) \rightarrow X$ de (2.10).

Proposição 2.3. Sejam $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$ e $(\tilde{x}, t_0) \in G$. Então, existe uma solução maximal de (2.10) $x : J \rightarrow X$, com $x(t_0) = \tilde{x}$, e o intervalo J é tal que o seu ponto final esquerdo é igual a t_0 .

O intervalo J e a função y são unicamente definidos pela condição inicial $\tilde{x} = x(t_0)$ e pela propriedade de maximalidade da solução.

Demonstração. (Unicidade) Suponha que existam duas soluções maximais de (2.10), $x_1 : J_1 \rightarrow X$ e $x_2 : J_2 \rightarrow X$, com $x_1(t_0) = x_2(t_0) = \tilde{x}$.

A propriedade de unicidade local (Teorema 2.5) implica em

$$x_1(t) = x_2(t), \forall t \in J_1 \cap J_2 \cap [t_0, +\infty).$$

Defina

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in J_1 \\ x_2(t), & t \in J_2. \end{cases}$$

Note que $x : J_1 \cup J_2 \rightarrow X$ é solução de (2.10) em $J_1 \cup J_2$, pelo Lema 2.6. Além disso, x é um prolongamento de x_1 e x_2 , o que contradiz o fato de x_1 e x_2 serem soluções maximais. Portanto, $J_1 = J_2 = J$ e $x_1(t) = x_2(t)$, para todo $t \in J$.

(Existência) Mostremos que existe $x : J \rightarrow X$. Denote por S o conjunto de todas as soluções $x : J_x \rightarrow X$ de (2.10), com $x(t_0) = \tilde{x}$, em que J_x é um intervalo tendo t_0 como ponto final esquerdo. Note que o conjunto S é não vazio, pelo Teorema 2.5. Definamos

$$J = \bigcup_{x \in S} J_x.$$

Sabemos da unicidade de solução que se $t \in J_y \cap J_z$, para $y, z \in S$, então $z(t) = y(t)$. Dessa forma, definindo $x : J \rightarrow X$ por $x(t) = y(t)$, com $y \in S$ e $t \in J_y$, obtemos uma solução de (2.10) definida em J que satisfaz a condição inicial $x(t_0) = \tilde{x}$. Claramente, x é uma solução maximal de (2.10). $\square$

Proposição 2.4. Sejam $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$ e $(\tilde{x}, t_0) \in G$. Se $x : J \rightarrow X$ é solução maximal de (2.10), com $x(t_0) = \tilde{x}$, e $t_0 \in J$ é o ponto final à esquerda do intervalo J , então

$$J = [t_0, \beta) \cap (a, b), \quad t_0 < \beta \leq +\infty.$$

Demonstração. É claro que $J \subset (a, b)$. Seja $t^* \in J$ e tome $y = x(t^*) \in \mathcal{O}$. Pelo Teorema 2.5, existe $\delta > 0$ tal que, em $[t^*, t^* + \delta]$, existe uma solução $v : [t^*, t^* + \delta] \subset J \rightarrow X$ de (2.10), com $v(t^*) = y$. Dessa forma, x é um prolongamento de v .

Note que se $J = [t_0, \beta]$, então obviamente $\beta \in J$. Assim, pela construção acima, tomando $y = x(\beta) \in \mathcal{O}$, existirá um prolongamento de x , o que é um absurdo, visto que x é maximal. Isso significa que, em relação a (a, b) , o intervalo J é aberto à direita de t_0 . $\square$

Proposição 2.5. Sejam $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$ e $(\tilde{x}, t_0) \in G$. Se $x : [t_0, \beta) \rightarrow X$ é uma solução maximal de (2.10) e $M \subset G = \mathcal{O} \times (a, b)$ é um conjunto compacto, então existe $c \in [t_0, \beta)$ tal que $(x(t), t) \notin M$, para todo $t \in (c, \beta)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que a conclusão do teorema não seja verdadeira. Então, existe uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [t_0, \beta)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \beta$ e $(x(t_k), t_k) \in M$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como M é compacto e $b < \infty$, a sequência $(x(t_k), t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em M , a qual denotaremos também por $(x(t_k), t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, por simplicidade de notação. Assim, $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = y$ e, portanto, $(y, \beta) \in M \subset G$.

Pelo Teorema 2.5, existe $\delta > 0$ tal que, em $[\beta, \beta + \delta]$, existe única solução v de (2.10), com condição inicial $v(\beta) = y$.

Defina $u : [t_0, \beta + \delta] \rightarrow X$ por:

$$u(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, \beta) \\ v(t), & t \in [\beta, \beta + \delta]. \end{cases}$$

Vamos assumir que $s_1 \in [t_0, \beta)$ e $s_2 \in [\beta, \beta + \delta]$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $t_k \in (s_1, \beta)$ e

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} DF(u(\tau), t) &= \int_{s_1}^{\beta} DF(u(\tau), t) + \int_{\beta}^{s_2} DF(u(\tau), t) = \\ &= \int_{s_1}^{t_k} DF(u(\tau), t) + \int_{t_k}^{\beta} DF(u(\tau), t) + u(s_2) - u(\beta) = \\ &= u(t_k) - u(s_1) + \int_{t_k}^{\beta} DF(u(\tau), t) + u(s_2) - v(\beta) = \\ &= x(t_k) - u(s_1) + u(s_2) - y + \int_{t_k}^{\beta} DF(u(\tau), t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pelo Lema 2.1, temos:

$$\left\| \int_{t_k}^{\beta} DF(u(\tau), t) \right\| \leq h(\beta) - h(t_k). \quad (2.14)$$

Como h é contínua à esquerda e $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \beta$, $t_k \leq \beta$, segue de (2.14) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_{t_k}^{\beta} DF(u(\tau), t) \right\| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_k}^{\beta} DF(u(\tau), t) = 0.$$

Sabendo que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = y$ e fazendo $k \rightarrow \infty$ em (2.13), obtemos:

$$\int_{s_1}^{s_2} DF(u(\tau), t) = y - u(s_1) + u(s_2) - y = u(s_2) - u(s_1).$$

Para todas as outras possíveis posições de $s_1, s_2 \in [t_0, \beta + \delta]$, podemos obter a mesma relação da definição de u . Desta maneira, $u : [t_0, \beta + \delta] \rightarrow X$ é uma solução de (2.10). E ainda, u é um prolongamento da solução x , contradizendo assim a maximalidade da mesma. Portanto, o resultado está provado. $\square$

3 Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e Impulsos

Neste capítulo, vamos descrever sistemas de Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e Impulsos, EDFRIs, e demonstrar o teorema de existência e unicidade de solução para estas equações. Para um estudo mais detalhado da teoria de EDFRIs, veja a referência [16].

3.1 Descrição do sistema impulsivo

Seja Ω um espaço de fase de alguns processos evolucionários, isto é, um conjunto de estados de movimento de um determinado processo de evolução.

Denote por P_t o ponto de mapeamento do processo de evolução no momento t . Vamos assumir que o processo é determinado por n parâmetros. P_t pode ser interpretado como um ponto (t, x) de $\mathbb{R}^{n+1}$ e Ω como um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. O conjunto $\mathbb{R} \times \Omega$ é chamado espaço de fase estendido do processo evolucionário considerado.

Um sistema impulsivo é descrito da seguinte maneira:

Considera-se

- 1) uma equação diferencial funcional com retardamento (EDFR)

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t), \quad (3.1)$$

onde $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega$, $f : [t_0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $t_0 \in \mathbb{R}$, $D = \{\phi : [-r, 0] \rightarrow \Omega\}$ e, para todo $t \geq t_0$, $x_t \in D$ é definido por $x_t(s) = x(t+s)$, para todo $s \in [-r, 0]$;

- 2) Estruturas topológicas M_t, N_t contidas em Ω ;
- 3) Um operador $A_t : M_t \rightarrow N_t$.

Sejam $\phi \in D$, $y_{t_0} = \phi$ e $y(t_0) = \phi(0)$. Consideremos uma solução $y(t) = y(t; t_0, \phi)$ da equação (3.1), com condição inicial $y_{t_0} = \phi$. O ponto de mapeamento P_t começa seu movimento a partir do ponto $(t_0, y(t_0))$ e se move ao longo da curva $\{(t, y(t)); t > t_0\}$ até o momento $t_1 > t_0$ em que P_t atinge o conjunto M_{t_1} . No instante t_1 , o operador A_{t_1} transfere instantaneamente o ponto P_t da posição $P_{t_1} = (t_1, y(t_1))$ para a posição $P_{t_1}^+ = (t_1, y_{t_1}^+) \in (t_1, N_{t_1})$, onde $y_{t_1}^+ = A_{t_1}(y(t_1))$. Então, o ponto P_t vai se movendo pela curva $\{(t, x(t)); t > t_0\}$, descrita pela solução $x(t)$ de (3.1), com condição inicial $x(t) = y(t)$, para $t_1 - r \leq t \leq t_1$ e $x(t_1) = y_{t_1}^+$, até encontrar novamente o conjunto M_{t_2} , e assim o processo continua ao longo da solução de (3.1), caso exista.

A curva descrita pelo ponto P_t no espaço de fase estendido é chamada *curva integral* e a função que define esta curva é uma *solução* da EDFRI.

Os momentos $t_1, t_2, \dots$ em que P_t atinge o conjunto M_t são chamados de *momentos de efeito impulsivo* e o operador $A_t : M_t \rightarrow N_t$ é chamado de *operador de impulso*.

Uma solução do sistema impulsivo pode ser:

- i) uma função contínua, se a curva integral não intersectar o conjunto M_t ou se atingir M_t somente nos pontos fixos do operador A_t ;
- ii) uma função contínua por partes, com um número finito de descontinuidades de primeira espécie, se a curva integral intersectar o conjunto M_t em uma quantidade finita de pontos que não sejam fixos pelo operador A_t ;
- iii) uma função contínua por partes, com uma quantidade enumerável de descontinuidades de primeira espécie, se a curva integral encontrar o conjunto M_t em uma quantidade enumerável de pontos que não sejam fixos pelo operador A_t .

Vamos assumir que a solução $y(t)$ do sistema impulsivo é uma função contínua à esquerda nos momentos de efeito impulsivo, isto é, $y(t_k-) = y(t_k)$.

Nos *sistemas com impulsos em tempos pré-fixados*, o conjunto M_t é representado por uma sequência de tempos $t = t_k$, em que $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. O operador $A_{t_k} : \Omega \rightarrow \Omega$, para $k = 1, 2, \dots$, é dado por: $A_{t_k}(y) = y + I_k(y)$, onde $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$, $k = 1, 2, \dots$. O sistema impulsivo é caracterizado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k, & t \geq t_0 \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k)), & t = t_k, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\Delta y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Assumimos que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ e $t_k \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Seja $\phi \in D$. Denotemos por $y(t) = y(t; t_0, \phi)$ a solução de (3.2), satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} y(t; t_0, \phi) = \phi(t - t_0), & t_0 - t \leq t \leq t_0 \\ y(t_0^+; t_0, \phi) = \phi(0). \end{cases} \quad (3.3)$$

Uma solução $y(t) = y(t; t_0, \phi)$ de (3.2) satisfazendo a condição inicial (3.3) é dada da seguinte forma:

- (1) Para $t \in [t_0 - r, t_0]$, a solução $y(t)$ satisfaz a condição inicial (3.3);
- (2) Para $t \in (t_0, t_1]$, a solução $y(t)$ coincide com a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y_t), & t \geq t_0 \\ y_{t_0} = \phi(\theta), & -r \leq \theta \leq 0. \end{cases}$$

No instante $t = t_1$, o ponto de mapeamento $(t, y(t; t_0, \phi))$ salta do ponto $(t_1, y(t_1; t_0, \phi))$ para o ponto $(t_1, y(t_1; t_0, \phi) + I_1(y(t_1; t_0, \phi)))$;

- (3) Para $t \in (t_1, t_2]$, a solução $y(t)$ coincide com a solução de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y_t), & t \geq t_0 \\ y_{t_1} = \phi_1(\theta), & \phi_1 \in D, \end{cases}$$

onde

$$\phi_1(t - t_1) = \begin{cases} \phi(t - t_1), & t \in [t_0 - r, t_0] \cap [t_1 - r, t_1] \\ y(t; t_0, \phi), & t \in (t_0, t_1) \cap [t_1 - r, t_1] \\ y(t_1; t_0, \phi) + I_1(y(t_1; t_0, \phi)), & t = t_1. \end{cases}$$

No instante $t = t_2$ o ponto de mapeamento salta novamente. O processo continua ao longo da solução, caso exista.

Para se aprofundar na teoria das equações diferenciais funcionais, indicamos a referência [7]. E para estudar as equações diferenciais impulsivas, indicamos a referência [8].

3.2 EDFRs com impulso em tempo pré-fixado

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Seja $G^-(I, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções regradas $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas à esquerda. Então, se $y \in G^-(I, \mathbb{R}^n)$, existem os limites laterais à esquerda ($y(t-)$) e à direita ($y(t+)$) e $y(t-) = y(t)$ para todo $t \in I$.

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo compacto, então podemos definir uma norma em $G^-(I, \mathbb{R}^n)$ por $\|\phi\| = \sup_{t \in I} |\phi(t)|_{\mathbb{R}^n}$, para $\phi \in G^-(I, \mathbb{R}^n)$. O espaço de funções $G^-(I, \mathbb{R}^n)$ munido com a norma $\|\cdot\|$ é um espaço de Banach.

Sejam $I \subset [0, +\infty)$ um intervalo da forma $[a, b)$, com $0 \leq a < b \leq +\infty$, $t_0 \in I$, $r \geq 0$. Um problema de valor inicial para uma Equação Diferencial Funcional com Retardamento e Impulsos (EDFRI) é expresso da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y_t), & t \neq t_k \\ \Delta y(t_k) &= I_k(y(t_k)), & k = 1, 2, \dots \\ y_{t_0} &= \phi, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $f : I \times G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\Delta y(t_k) = y(t_k+) - y(t_k-) = y(t_k+) - y(t_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

a sequência de tempos pré-fixados é crescente, ou seja, $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$, com $t_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$ e, para $y : [t_0 - r, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, a função $y_t \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ é dada por $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, para cada $\theta \in [-r, 0]$.

Definição 3.1. Seja $[t_0, t_0 + \sigma] \subset I$, com $\sigma > 0$. Uma função $y \in G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ é solução do sistema impulsivo (3.4) em $[t_0, t_0 + \sigma]$, com condição inicial $y_{t_0} = \phi$, se satisfaz:

- i) $\dot{y}(t) = f(t, y_t)$, sempre que $t \neq t_k$, $t \geq t_0$;
- ii) $y(t_k+) = y(t_k) + I_k(y(t_k))$, $k = 1, 2, \dots$.

Assim, uma solução $y(t)$ do sistema (3.4) existindo em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ e sofrendo impulso nos instantes t_k , $k = 1, \dots, m$, com $t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq t_0 + \alpha$, pode ser escrita como:

$$y(t) = \begin{cases} y(t; t_0, \phi), & t \in [t_0 - r, t_1] \\ y(t; t_k, y_{t_k}), & t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \\ y(t; t_m, y_{t_m}), & t \in (t_m, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Agora, se a solução $y(t)$ do sistema (3.4) existe em $[t_0 - r, \infty)$ e a solução sofre infinitos impulsos nos instantes t_k , $k = 1, 2, \dots$, então

$$y(t) = \begin{cases} y(t; t_0, \phi), & t \in [t_0 - r, t_1] \\ y(t; t_k, y_{t_k}), & t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Lema 3.1. Suponhamos que a função $t \mapsto f(t, y_t)$ seja localmente Lebesgue integrável em $t \in [t_0, +\infty)$. Então, $y \in G^-([t_0 - r, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$ é uma solução do sistema impulsivo (3.4) se, e somente se,

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds, & t \in (t_0, t_1] \\ y(t_k^-) + I(y(t_k^-)) + \int_{t_k}^t f(s, y_s) ds, & t \in (t_k, t_{k+1}] \\ y(t_m^-) + I(y(t_m^-)) + \int_{t_m}^t f(s, y_s) ds, & t \in (t_m, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Ou equivalentemente,

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds + \sum_{k=1} I_k(y(t_k)) H_{t_k}(t), & t \in (t_0, t_0 + \alpha], \end{cases}$$

onde $H_{t_k}(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq t_k \\ 1, & t_k < t \end{cases}$ é a função de Heaviside concentrada em t_k .

Dada a EDFRI (3.4), vamos supor que $f : I \times G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisfaça as seguintes condições do tipo Carathéodory:

- (A) para cada $y \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, a aplicação $t \mapsto f(t, y_t)$ é Lebesgue integrável em $[t_0, t_0 + \sigma]$;
- (B) existe uma função Lebesgue integrável $M : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativa tal que, para cada $x \in G^-([-r, 0])$, tem-se:

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(s, x_s) ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s) ds, \quad \forall u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \sigma];$$

- (C) existe uma função Lebesgue integrável $L : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativa tal que, para quaisquer $x, y \in G^-([-r, 0])$ tem-se:

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} [f(s, x_s) - f(s, y_s)] ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s) \|x_s - y_s\| ds, \quad \forall u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \sigma].$$

Vamos assumir também que os operadores de impulso, $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$, satisfaçam as seguintes condições:

- (A') existe uma constante $K_1 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \dots$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x)| \leq K_1;$$

(B') existe uma constante $K_2 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \dots$ e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq K_2|x - y|.$$

Lembramos que $BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ denota o espaço das funções $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são de variação limitada em $[a, b]$, com a norma usual da variação dada por

$$\|\phi\|_{BV} = \|\phi(a)\| + \text{var}_a^b \phi.$$

Lema 3.2. Suponha que as condições (A), (B), (C), (A') e (B') estejam satisfeitas. Se $y : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma > 0$, é uma solução do sistema (3.4), então a função $\bar{y} : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{y}(t) = y(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, pertence a $BV([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\text{var}_{t_0}^{t_0+\sigma}(\bar{y}) < +\infty$. Pelas condições (B), (C), (A') e (B'), podemos definir

$$h(t) = \int_{t_0}^t [M(s) + L(s)]ds + \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=0}^m H_{t_k}(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \sigma], \quad (3.5)$$

com $t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq t_0 + \alpha$. Claramente, h é não-decrescente e contínua à esquerda e, por conseguinte, $h \in BV([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R})$.¹

Pelo Lema 3.1, por (B) e (A'), tem-se:

$$\begin{aligned} |\bar{y}(s_i) - \bar{y}(s_{i-1})| &= \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] \right| \leq \\ &\leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} |f(s, y_s)|ds + \sum_{k=1}^m |I_k(y(t_k))| [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] \leq \\ &\leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} M(s)ds + K_1 \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] \leq \\ &\leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} [M(s) + L(s)]ds + \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] = h(s_i) - h(s_{i-1}), \end{aligned}$$

para toda partição $\{t_0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_l = t_0 + \sigma\}$ de $[t_0, t_0 + \sigma]$. Assim,

$$\sum_{i=1}^l |\bar{y}(s_i) - \bar{y}(s_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^l [h(s_i) - h(s_{i-1})] = h(t_0 + \sigma) - h(t_0) = \text{var}_{t_0}^{t_0+\sigma}(h) < +\infty.$$

Portanto, $\text{var}_{t_0}^{t_0+\sigma}(\bar{y}) \leq \text{var}_{t_0}^{t_0+\sigma}(h) < +\infty$. $\square$

O próximo teorema garante a existência e a unicidade de solução da EDFRI, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Teorema 3.3. (Existência e Unicidade) Consideremos o problema de valor inicial (3.4). Suponha que as condições (A), (B), (C), (A') e (B') estejam satisfeitas. Então, existe uma única solução $y : [t_0 - r, t_0 + \Delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (3.4), com condição inicial $y_{t_0} = \phi$, para algum $\Delta > 0$.

¹Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é função monótona, então $f \in BV([a, b], \mathbb{R})$ e $\text{var}_a^b(f) \leq |f(a) - f(b)|$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1, encontrar uma solução de (3.4) em $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$ é equivalente a resolver a equação

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(t), & t \in (t_0, t_0 + \Delta], \end{cases} \quad (3.6)$$

com $t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq t_0 + \Delta$. Além disso, dada a função $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, resta resolvermos a equação integral em (3.6) para todo $t \geq t_0$.

Consideremos a função h definida no Lema 3.2, em (3.5). Sabemos que h é não-decrescente e contínua à esquerda então, vamos dividir a prova deste teorema em duas partes: quando h for contínua em t_0 e quando não for.

Se h é contínua em t_0 , então existe $\Delta > 0$ tal que $h(t_0 + \Delta) - h(t_0) < \frac{1}{4}$. Note que

$$I_0(y(t_0)) = y(t_0^+) - y(t_0) = \phi(0) - \phi(0) = 0.$$

Se y é solução de (3.4) em $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$, vimos no Lema 3.2 que a restrição de y ao intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$ é de variação limitada. Assim, é natural considerarmos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{z \in BV([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n); \|z(t) - \phi(0)\| \leq |h(t) - h(t_0)|, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach. Como $BV([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach, basta mostrarmos que $\mathcal{A} \subset BV([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$ é fechado.

De fato, seja $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{A}$, tal que $z_n \rightarrow z$ em $BV([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$. Queremos concluir que $z \in \mathcal{A}$.

Como

$$\|z_n(t) - z(t)\| \leq \|z_n - z\|_{BV}, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta],$$

segue que $z_n(t) \rightarrow z(t)$ uniformemente em $[t_0, t_0 + \Delta]$. Portanto, dado $\eta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_n(t) - z(t)\| < \eta$, para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$\|z(t) - \phi(0)\| \leq \|z_n(t) - z(t)\| + \|z_n(t) - \phi(0)\| < \eta + |h(t) - h(t_0)|, \forall \eta \geq n_0.$$

Sendo $\eta > 0$ arbitrário, temos

$$\|z(t) - \phi(0)\| < |h(t) - h(t_0)|, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

Então $z \in \mathcal{A}$, de onde segue que $\mathcal{A}$ é fechado.

Defina, para $s \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e $z \in \mathcal{A}$, a aplicação

$$Tz(s) = \phi(0) + \int_{t_0}^s f(\tau, z_\tau) d\tau + \sum_{k=1}^m I_k(z(t_k)) H_{t_k}(s).$$

Pela condição (A), o operador T está bem definido. Vamos mostrar agora que $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Note que para $z \in \mathcal{A}$, temos:

$$|Tz(s) - \phi(0)| = \left| \int_{t_0}^s f(\tau, z_\tau) d\tau + \sum_{k=1}^m I_k(z(t_k)) H_{t_k}(s) \right| \leq h(s) - h(t_0). \quad (3.7)$$

Assim, dados $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \Delta]$, com $s_1 \leq s_2$, temos:

$$\begin{aligned} |Tz(s_2) - Tz(s_1)| &\leq |Tz(s_2) - \phi(0)| + |Tz(s_1) - \phi(0)| \leq \\ &\leq h(s_2) - h(t_0) - h(s_1) + h(t_0) = h(s_2) - h(s_1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Assim,

$$\text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz) \leq \text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}h < +\infty \Rightarrow Tz \in BV([t_0, t_0 + \Delta]).$$

Portanto, por (3.7) e (3.8), concluímos que $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Afirmamos que $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é uma contração. Com efeito, seja $D = \{t_0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_l = t_0 + \Delta\}$ uma partição de $[t_0, t_0 + \Delta]$ e $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$. Por (C) e (B'), vem:

$$\begin{aligned} |(Tz_2 - Tz_1)(s_2) - (Tz_2 - Tz_1)(s_1)| &\leq \left| \int_{s_1}^{s_2} [f(\tau, (z_2)_\tau) - f(\tau, (z_1)_\tau)] d\tau \right| + \\ &+ \sum_{k=1}^m |I_k(z_2(t_k)) - I_k(z_1(t_k))| [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] \leq \int_{s_1}^{s_2} L(\tau) \|(z_2)_\tau - (z_1)_\tau\| d\tau + \\ &+ K_2 \sum_{k=1}^m |z_2(t_k) - z_1(t_k)| [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] \leq \|(z_2)_\tau - (z_1)_\tau\| \int_{s_1}^{s_2} [M(\tau) + L(\tau)] d\tau + \\ &+ \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=1}^m \|z_2 - z_1\|_{BV} [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] \leq \\ &\leq \|z_2 - z_1\|_{BV} \int_{s_1}^{s_2} [M(\tau) + L(\tau)] d\tau + \|z_2 - z_1\|_{BV} \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] = \\ &= \|z_2 - z_1\|_{BV} [h(s_2) - h(s_1)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \|z_2 - z_1\|_{BV} [h(t_0 + \Delta) - h(t_0)] < \frac{1}{4} \|z_2 - z_1\|_{BV}. \quad (3.9)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|Tz_2 - Tz_1\|_{BV} &= \|(Tz_2 - Tz_1)(t_0)\| + \text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \\ &\leq \|Tz_2(t_0) - Tz_1(t_0)\| + 2\text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) = 2\text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \stackrel{(3.9)}{<} \frac{1}{2} \|z_2 - z_1\|_{BV}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $z \in \mathcal{A}$ tal que $Tz = z$. Consequentemente, a função

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0]; \\ z(t), & t \in (t_0, t_0 + \Delta]. \end{cases}$$

é única solução de (3.4).

Agora suponha que h seja descontínua em t_0 . Então, defina a função

$$\bar{h}(t) = \begin{cases} h(t), & t = t_0 \\ h(t) - [h(t_0^+) - h(t_0)], & t > t_0. \end{cases}$$

É fácil ver que $\bar{h}$ é contínua em t_0 e, assim, existe $\Delta > 0$ tal que $[\bar{h}(t_0 + \Delta) - \bar{h}(t_0)] < \frac{1}{4}$. Consideremos o operador $\bar{I}_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\bar{I}_0(x(t)) = \begin{cases} I_0(x(t)), & t = t_0 \\ I_0(x(t)) - [I_0(x(t_0^+)) - I_0(x(t_0))], & t > t_0, \end{cases}$$

para toda função $x : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consideremos também o sistema:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k, t \geq t_0 \\ \Delta y(t) = I_k(y(t)), & t = t_k, k = 1, 2, \dots \\ \Delta y(t) = \bar{I}_0(y(t)), & t = t_0 \\ y_{t_0} = \bar{\phi}, \end{cases}$$

onde

$$\bar{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(\theta), & \theta \in [-r, 0) \\ \phi(0) + \bar{I}_0(\phi(0)), & \theta = 0. \end{cases}$$

Definimos,

$$\bar{\mathcal{A}} = \{z \in BV([t_0, t_0 + \Delta]); \|z(t) - \bar{\phi}(0)\| \leq |\bar{h}(t) - \bar{h}(t_0)|, \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]\}.$$

Seguindo um raciocínio análogo ao utilizado anteriormente, concluímos que $\bar{\mathcal{A}}$ é um espaço de Banach e dado o operador:

$$\bar{T}z(s) = \phi(0) + \bar{I}_0(\phi(0)) + \int_{t_0}^s f(\tau, z_\tau) d\tau + \sum_{k=1}^m I_k(z(t_k)) H_{t_k}(s),$$

teremos, como no caso anterior, que $\bar{T}$ tem um único ponto fixo $z \in \bar{\mathcal{A}}$.

Portanto, a função $y : [t_0, t_0 + \Delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0]; \\ z(t), & t \in (t_0, t_0 + \Delta] \end{cases}$$

é a única solução de (3.4), satisfazendo $y_{t_0} = \phi$. □

4 Correspondência entre EDFRIs e EDOGs

Neste capítulo exibiremos a construção da correspondência biunívoca entre EDOGs e EDFRIs feita em [3]. Tal correspondência será de grande relevância para obter os resultados de estabilidade de solução para EDFRIs.

4.1 Construção de uma EDOG a partir de uma EDFRI

Vamos estabelecer alguns resultados que nos permitam construir uma EDOG a partir de uma EDFRI dada. Para isso, considere a EDFRI

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k)), & k = 1, 2, \dots \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Fixado $\sigma \in (t_0, +\infty)$, vamos supor que $f : [t_0, +\infty) \times G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaça as condições (A), (B) e (C) descritas na Seção 3.2 do capítulo anterior, a saber:

- (A) para cada $y \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, a aplicação $t \mapsto f(t, y_t)$ é Lebesgue integrável em $[t_0, t_0 + \sigma]$;
- (B) existe uma função Lebesgue integrável $M : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativa tal que, para cada $x \in G^-([-r, 0])$, tem-se:

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(s, x_s) ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s) ds, \quad \forall u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \sigma];$$

- (C) existe uma função Lebesgue integrável $L : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativa tal que, para quaisquer $x, y \in G^-([-r, 0])$, tem-se:

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} [f(s, x_s) - f(s, y_s)] ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s) \|x_s - y_s\| ds, \quad \forall u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \sigma].$$

Os operadores de impulso, $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$, satisfazem as condições (A') e (B') descritas na Seção 3.2 do capítulo anterior, que são:

(A') existe uma constante $K_1 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \dots$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x)| \leq K_1;$$

(B') existe uma constante $K_2 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \dots$ e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq K_2|x - y|.$$

Seja G^1 um conjunto aberto de $G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ com a seguinte propriedade: se $y \in G^1$ e $\bar{t} \in [t_0, t_0 + \sigma]$, então $\bar{y}$ dada por:

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 - r \leq t \leq \bar{t}; \\ y(\bar{t}), & \bar{t} < t < t_0 + \sigma \end{cases}$$

é um elemento de G^1 .

Exemplo 4.1. O espaço das funções, $BV([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n) \cap G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, de variação limitada e contínuas à esquerda em $(t_0 - r, t_0 + \sigma]$ é um conjunto G^1 em $G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$.

Exemplo 4.2. Qualquer bola aberta em $G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ é um conjunto G^1 em $G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$.

De fato, consideremos, sem perda de generalidade, a bola

$$B(x, a) = \{z \in G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n); \|z - x\| < a\}.$$

Sejam $y \in B(x, a)$, $\bar{t} \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$ e

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 - r \leq t \leq \bar{t} \\ y(\bar{t}), & \bar{t} < t < t_0 + \sigma. \end{cases}$$

Então, $\bar{y} \in B(x, a)$, pois

$$\|\bar{y} - x\| = \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |\bar{y}(t) - x(t)| = \sup_{t \in [t_0 - r, \bar{t}]} |y(t) - x(t)| \leq \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |y(t) - x(t)| < a.$$

Vamos definir a função $F : G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, pondo:

$$F(y, t)(v) = \begin{cases} 0, & v \in [t_0 - r, t_0] \\ \int_{t_0}^v f(s, y_s) ds, & v \in [t_0, \bar{t}] \\ \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds, & v \in [t, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.2)$$

Proposição 4.1. Seja $F : G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ a função definida em (4.2). Então, existe uma função $h_1 : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à esquerda tal que $F \in \mathcal{F}(\Omega, h_1)$, onde $\Omega = G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma]$.

Demonstração. Sejam $x, y \in G^1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0 + \sigma$ dados. Note que

$$F(y, s_2)(v) - F(y, s_1)(v) = \begin{cases} 0, & v \in [t_0 - r, t_0] \\ \int_{s_1}^v f(s, y_s) ds, & v \in [s_1, s_2] \\ \int_{s_1}^{s_2} f(s, y_s) ds, & v \in [s_2, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.3)$$

Das condições (B) e (C), segue que

$$\begin{aligned} \|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| &= \sup_{v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |F(x, s_2)(v) - F(x, s_1)(v)| = \\ &= \sup_{v \in [s_1, s_2]} |F(x, s_2)(v) - F(x, s_1)(v)| = \sup_{v \in [s_1, s_2]} \left| \int_{s_1}^v f(s, x_s) ds \right| \leq \\ &\leq \sup_{v \in [s_1, s_2]} \int_{s_1}^v M(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} M(s) ds \quad (4.4) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| &= \sup_{v \in [s_1, s_2]} \left| \int_{s_1}^v [f(s, x_s) - f(s, y_s)] ds \right| \leq \\ &\leq \int_{s_1}^v L(s) \|x_s - y_s\| ds = \sup_{v \in [s_1 - r, s_2]} |x(v) - y(v)| \int_{s_1}^{s_2} L(s) ds \leq \|x - y\| \int_{s_1}^{s_2} L(s) ds. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dessa forma, basta definir $h_1 : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$h_1(t) = \int_{t_0}^t [M(s) + L(s)] ds.$$

Note que a função h_1 é contínua e não-decrescente, pois $M, L : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções não-negativas e Lebesgue integráveis.

Por (4.4) e (4.5), concluímos que $\|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| \leq |h_1(s_2) - h_1(s_1)|$ e $\|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| \leq \|x - y\| |h_1(s_2) - h_1(s_1)|$, de onde segue que $F \in \mathcal{F}(\Omega, h_1)$. $\square$

Agora consideremos os operadores de impulso I_k , $k = 1, 2, \dots$, em (4.1), satisfazendo as condições (A') e (B'). Definimos $J : G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, pondo:

$$J(y, t)(v) = \sum_{k=1}^m H_{t_k}(t) H_{t_k}(v) I_k(y(t_k)), \quad (4.6)$$

onde m é a quantidade de momentos de impulso em $[t_0, t_0 + \sigma]$ e H_{t_k} é a função de Heaviside, contínua à esquerda e concentrada em t_k para $k = 1, \dots, m$.

Proposição 4.2. Considere $J : G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ definida em (4.6). Então, existe uma função $h_2 : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à esquerda tal que $J \in \mathcal{F}(\Omega, h_2)$, onde $\Omega = G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma]$.

Demonstração. Sejam $x, y \in G^1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0 + \sigma$ dados. Pela condição (A'), temos:

$$\begin{aligned} \|J(x, s_2) - J(x, s_1)\| &= \sup_{v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |J(x, s_2)(v) - J(x, s_1)(v)| = \\ &= \sup_{v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} \left| \sum_{k=1}^m (H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)) H_{t_k}(v) I_k(x(t_k)) \right| \leq \\ &\leq \sup_{v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} \sum_{k=1}^m |H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)| |H_{t_k}(v)| |I_k(x(t_k))| \leq \\ &\leq K_1 \sum_{k=1}^m |H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)| \sup_{v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |H_{t_k}(v)| \leq K_1 \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

E pela condição (B') , temos:

$$\begin{aligned} & \|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| \leq \\ & \leq \sup_{v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} \sum_{k=1}^m |H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)| |H_{t_k}(v)| |I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))| \\ & \leq \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] K_2 |x(t_k) - y(t_k)| \leq K_2 \|x - y\| \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Defina $h_2 : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$h_2(t) = \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=1}^m H_{t_k}(t).$$

Então, h_2 é não-decrescente e contínua à esquerda em $(t_0 - r, t_0 + \sigma]$, pois H_{t_k} o é. Daí, por (4.7) e (4.8), concluímos que $\|J(x, s_2) - J(x, s_1)\| \leq |h_2(s_2) - h_2(s_1)|$ e $\|J(x, s_2) - J(x, s_1) - J(y, s_2) + J(y, s_1)\| \leq \|x - y\| |h_2(s_2) - h_2(s_1)|$. Por conseguinte, $J \in \mathcal{F}(\Omega, h_2)$. $\square$

Sejam F e J definidas em (4.2) e (4.6), respectivamente. Vamos definir uma função $G : G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma])$ da seguinte forma:

$$G(y, t) = F(y, t) + J(y, t), \quad y \in G^1, \quad t \in [t_0, t_0 + \sigma]. \quad (4.9)$$

Proposição 4.3. Considere a função G definida em (4.9). Então, existe uma função $h : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à esquerda tal que $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, $\Omega = G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma]$.

Demonstração. De fato, dados $x, y \in G^1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0 + \sigma$, temos:

$$\begin{aligned} \|G(x, s_2) - G(x, s_1)\| &= \|F(x, s_2) - F(x, s_1) + J(x, s_2) - J(x, s_1)\| \leq \\ &\leq \|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| + \|J(x, s_2) - J(x, s_1)\| \leq \\ &\leq h_1(s_2) - h_1(s_1) + h_2(s_2) - h_2(s_1) = h(s_2) - h(s_1), \end{aligned}$$

onde $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ é não-decrescente e contínua à esquerda em $[t_0, t_0 + \sigma]$.

Analogamente, temos

$$\|G(x, s_2) - G(x, s_1) - G(y, s_2) + G(y, s_1)\| \leq \|x - y\| |h(s_2) - h(s_1)|.$$

Portanto, $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$. $\square$

Observe que conseguimos obter a função G a partir das funções F e J geradas através do sistema impulsivo (4.1). Sendo assim, considere a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = G(x, t), \quad (4.10)$$

onde $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$ é dada em (4.9).

Dizemos que $x : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma])$ é uma *solução* da EDOG (4.10), com condição inicial $\tilde{x} = x(t_0)$ dada por

$$\tilde{x}(v) = \begin{cases} \phi(v - t_0), & v \in [t_0 - r, t_0] \\ x(t_0)(t_0), & v \in [t_0, t_0 + \sigma], \end{cases} \quad (4.11)$$

onde $\phi \in G^-([-r, 0])$, se $(x(t), t) \in G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma]$ e se

$$x(u)(v) = \tilde{x}(v) + \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (v),$$

para todo $v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$ e para todo $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$.

Lema 4.1. Seja $x : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^1$ uma solução de (4.10), com condição inicial $\tilde{x} = x(t_0)$ dada por (4.11). Então, para cada $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, temos

$$x(u)(v) = \begin{cases} x(v)(v), & v \in [t_0 - r, u] \\ x(u)(u), & v \in [u, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.12)$$

Demonstração. Com efeito, seja $v \in [u, t_0 + \sigma]$. Sendo x solução de (4.10), temos:

$$x(u)(u) = \tilde{x}(u) + \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (u)$$

e

$$x(u)(v) = \tilde{x}(v) + \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (v).$$

Assim,

$$x(u)(v) - x(u)(u) = \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (v) - \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (u),$$

já que, para todo $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, vale $\tilde{x}(v) = \tilde{x}(u) = x(t_0)(t_0)$.

Da existência da integral $\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t)$ sabemos que, para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[t_0, t_0 + \sigma]$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^l [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})] - \int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right\| < \epsilon,$$

para toda partição $D = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]), i = 1, \dots, l\}$ δ -fina de $[t_0, u]$. Daí,

$$\begin{aligned} |x(u)(v) - x(u)(u)| &= \left| \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (v) - \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (u) \right| < \\ &< \left| \sum_{i=1}^l [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) + \epsilon - \sum_{i=1}^l [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](u) + \epsilon \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^l [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) - \sum_{i=1}^l [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](u) \right| + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Agora, basta mostrar que o segundo membro da desigualdade acima é zero, ou seja, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, basta que

$$[G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](u) = 0, \forall i = 1, \dots, l. \quad (4.13)$$

De fato, sejam $t_0 \leq s_{i-1} \leq s_i \leq u \leq v$, $i = 1, \dots, l$. Então,

$$[F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](v) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds = [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u). \quad (4.14)$$

Note que, se $t_k \leq u$ ou $t_k \geq v$, para algum $k = 1, \dots, l$, teremos $H_{t_k}(u) = H_{t_k}(v)$. E, se $u \leq t_k \leq v$, para algum $k = 1, \dots, l$, então $H_{t_k}(s_i) = H_{t_k}(s_{i-1}) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} [J(x(\tau_i), s_i) - J(x(\tau_i), s_{i-1})](v) &= \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(t_k)) = 0 = \\ &= \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(u) I_k(x(t_k)) = [J(x(\tau_i), s_i) - J(x(\tau_i), s_{i-1})](u). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Portanto, de (4.14) e (4.15), verifica-se a igualdade (4.13) e, dessa forma, concluimos que $x(u)(v) = x(u)(u)$, desde que $v \in [u, t_0 + \sigma]$.

Finalmente, suponhamos que $v \in [t_0 - r, u]$. Sendo x solução da EDOG (4.10), temos

$$x(u)(v) - x(v)(v) = \left(\int_v^u DG(x(\tau), t) \right) (v).$$

Como

$$F(x(\tau_i), s_i)(v) - F(x(\tau_i), s_{i-1})(v) = \int_{t_0}^v f(s, y_s) ds - \int_{t_0}^v f(s, y_s) ds = 0$$

e

$$J(x(\tau_i), s_i)(v) - J(x(\tau_i), s_{i-1})(v) = \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(t_k)) = 0,$$

para uma partição arbitrária $D = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]), i = 1, \dots, l\}$ de $[u, v]$, segue que

$$\int_v^u DG(x(\tau), t) = 0, \quad \forall v \in [t_0 - r, u].$$

Portanto, $x(u)(v) = x(v)(v)$. □

4.2 Correspondência biunívoca entre EDFRIs e EDOGs

Nesta seção, demonstraremos dois teoremas que estabelecem uma relação biunívoca entre as EDOGs e as EDFRIs. Nesse sentido, será possível construir uma solução para a EDFRI (4.1) a partir de uma solução da EDOG (4.10) e vice-versa.

Teorema 4.2. Sejam $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $G : G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma])$ função definida em (4.9).

Suponhamos que $y : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma solução da EDFRI (4.1), com condição inicial $y_{t_0} = \phi$, tal que $y \in G^1$. Para cada $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, seja

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in [t_0 - r, t] \\ y(t), & v \in [t, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.16)$$

Então, $x : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^1$ é uma solução da EDOG (4.10), com condição inicial

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \phi(v - t_0), & v \in [t_0 - r, t_0] \\ y(t_0), & v \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.17)$$

Demonstração. É suficiente mostrar que, para todo $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, existe $\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t)$ e que

$$x(u) - x(t_0) = \int_{t_0}^u DG(x(\tau), t).$$

Então, dado $\epsilon > 0$, devemos encontrar um calibre δ de $[t_0, u]$, satisfazendo a definição de integral de Kurzweil.

Da hipótese, sabemos que a solução y de (4.1) em $[t_0, t_0 + \sigma]$, satisfaz

$$y(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \sigma]. \quad (4.18)$$

E ainda, como y é contínua à esquerda e existem os limites laterais em todo ponto de $[t_0, t_0 + \sigma]$, temos que, para cada $\tau \in [t_0, t_0 + \sigma]$, existe $\delta(\tau) = \delta(\tau, \epsilon) > 0$, tal que

$$|y(\rho) - y(\tau)| < \epsilon, \quad \forall \rho \in [\tau - \delta(\tau), \tau] \quad (4.19)$$

e

$$|y(\rho) - y(\tau^+)| < \epsilon, \quad \forall \rho \in [\tau, \tau + \delta(\tau)]. \quad (4.20)$$

Como existe $\delta(\tau)$, para cada $\tau \in [t_0, t_0 + \sigma]$, temos naturalmente um calibre δ em $[t_0, t_0 + \sigma]$. Sem perda de generalidade, podemos exigir que o calibre δ também satisfaça, para cada $\tau \in [t_0, t_0 + \sigma]$, as seguintes condições:

$$(i) \quad \left| \int_u^v L(s) ds \right| \leq \frac{\epsilon}{(m+1)(K_1+1)}, \text{ para todo } [u, v] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau));$$

$$(ii) \quad 0 < \delta(\tau) < \min \left\{ \frac{t_k - t_{k-1}}{2}, k = 1, \dots, m \right\};$$

$$(iii) \quad 0 < 2\delta(\tau) < \min\{|\tau - t_k|, |\tau - t_{k-1}|, \tau \in (t_{k-1}, t_k), k = 1, \dots, m\},$$

onde m é a quantidade de momentos de impulsos no intervalo $[t_0, t_0 + \sigma]$, K_1 é a constante dada na condição (A') e $L : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela condição (C) é não-negativa e Lebesgue integrável.

Se um intervalo marcado $(\tau, [s_2, s_2])$ é δ -fino, pelo item (ii) garantimos que o intervalo $[s_1, s_2]$ possui no máximo um instante de impulso t_k , para algum $k = 1, \dots, m$. Pois, caso contrário, se existissem $t_k, t_{k-1} \in [s_1, s_2]$ para algum $k = 1, \dots, m$, teríamos

$$\delta(\tau) < \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \leq \frac{s_2 - s_1}{2} < \frac{2\delta(\tau)}{2} = \delta(\tau),$$

que é uma contradição.

Além disso, se o intervalo marcado $(\tau, [s_2, s_2])$ é δ -fino e $t_k \in [s_1, s_2]$, para algum $k = 1, \dots, m$, então $\tau = t_k$. De fato, se $\tau \neq t_k$, então ou $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$ ou $\tau \in (t_k, t_{k+1})$, para algum $k = 1, \dots, m$. Assim (ii) implica em

$$2\delta(\tau) < |\tau - t_k| \leq |s_2 - s_1| < 2\delta(\tau),$$

que também é uma contradição.

Seja $D = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]), i = 1, \dots, l\}$ uma partição δ -fina do intervalo $[t_0, u]$. Usando (4.16) e (4.18), temos

$$\begin{aligned}
& [x(s_i) - x(s_{i-1})](v) = \\
& = \begin{cases} 0, & v \in [t_0 - r, s_{i-1}] \\ \int_{s_{i-1}}^v f(s, y_s) ds + \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(v) - H_{t_k}(s_{i-1})] I_k(y(t_k)), & v \in [s_{i-1}, s_i] \\ \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds + \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] I_k(y(t_k)), & v \in [s_i, t_0 + \sigma], \end{cases}
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, l$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
& [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) = \\
& = \begin{cases} \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(\tau_i)(t_k)), & v \in [t_0 - r, s_{i-1}] \\ \int_{s_{i-1}}^v f(s, x(\tau_i)_s) ds + \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(\tau_i)(t_k)), & v \in [s_{i-1}, s_i] \\ \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, x(\tau_i)_s) ds + \sum_{k=1}^m [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(\tau_i)(t_k)), & v \in [s_i, t_0 + \sigma]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Afirmamos que, para cada $i = 1, \dots, l$, vale

$$\begin{aligned}
& [x(s_i) - x(s_{i-1})](v) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) = \\
& = \begin{cases} 0, & v \in [t_0 - r, s_{i-1}] \\ \int_{s_{i-1}}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds, & v \in [s_{i-1}, s_i] \\ \int_{s_{i-1}}^{s_i} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds, & v \in [s_i, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Para verificarmos a validade desta afirmação temos que estudar cada intervalo marcado $(\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ δ -fino de D , $i = 1, \dots, l$. Temos duas possibilidades:

- (a) $t_p \in [s_{i-1}, s_i]$, para um único $p \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- (b) $[s_{i-1}, s_i] \cap \{t_1, \dots, t_m\} = \emptyset$.

Consideremos o caso (a), para $v \in [t_0 - r, s_{i-1}]$. Então,

$$[x(s_i) - x(s_{i-1})](v) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) = 0,$$

pois $H_{t_p}(v) = 0$.

Agora, se tomarmos $v \in [s_{i-1}, s_i]$, teremos

$$\begin{aligned}
& [x(s_i) - x(s_{i-1})](v) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) - \int_{s_{i-1}}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds = \\
& = \sum_{k=1}^m \{ [H_{t_k}(v) - H_{t_k}(s_{i-1})] I_k(y(t_k)) - [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(\tau_i)(t_k)) \} = \\
& = I_p(y(t_p)) H_{t_p}(v) - I_p(y(t_p)) H_{t_p}(v) = 0.
\end{aligned}$$

Se $v \in [s_i, t_0 + \sigma]$, então

$$\begin{aligned} & [x(s_i) - x(s_{i-1})](v) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds = \\ & = \sum_{k=1}^m \{ [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] I_k(y(t_k)) - [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(\tau_i)(t_k)) \} = \\ & = I_p(y(t_p)) H_{t_p}(v) - I_p(y(t_p)) H_{t_p}(v) = 0. \end{aligned}$$

Logo, mostramos (4.21) para o caso (a). A igualdade (4.21) também vale para o caso (b), pois $H_{t_k}(v) - H_{t_k}(s_{i-1}) = 0$, para todo $v \in [s_{i-1}, s_i]$.

Usando (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} & \|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| = \\ & = \sup_{v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |[x(s_i) - x(s_{i-1})](v) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](v)| = \\ & = \sup_{v \in [s_{i-1}, s_i]} \left| \int_{s_{i-1}}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds \right|, \quad (4.22) \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, l$. De (a), segue que

$$\int_{s_{i-1}}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds = \int_{s_{i-1}}^v [f(s, y_s) - f(s, x(t_p)_s)] ds = \int_{t_p}^v [f(s, y_s) - f(s, x(t_p)_s)] ds,$$

para $v \in [t_p, s_i]$, visto que

$$\int_{s_{i-1}}^{t_p} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds = \int_{s_{i-1}}^{t_p} [f(s, y_s) - f(s, y_s)] ds = 0.$$

E também vale

$$\int_{s_{i-1}}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds = 0,$$

para todo $v \in [s_{i-1}, t_p]$.

Da condição (C) vem que

$$\left| \int_{t_p}^v [f(s, y_s) - f(s, x(t_p)_s)] ds \right| \leq \int_{t_p}^v L(s) \|y_s - x(t_p)_s\| ds. \quad (4.23)$$

Usando (4.20) e (A'), para cada $s \in [t_p, s_i]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_s - x(t_p)_s\| &= \sup_{\rho \in [-r, 0]} |y(s + \rho) - x(t_p)(s + \rho)| = \sup_{\rho \in [t_p, s]} |y(\rho) - y(t_p)| \leq \\ &\leq \sup_{\rho \in [t_p, s]} \{|y(\rho) - y(t_p^+)| + |I_p(y(t_p))|\} \leq \epsilon + K_1. \quad (4.24) \end{aligned}$$

Portanto, para o caso (a), basta substituir para cada $i = 1, \dots, l$, (4.23) e (4.24)

em (4.22), obtendo

$$\begin{aligned}
& \|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| = \\
& = \sup_{v \in [t_p, s_i]} \left| \int_{t_p}^v [f(s, y_s) - f(s, x(t_p)_s)] ds \right| \leq \sup_{v \in [t_p, s_i]} \int_{t_p}^v L(s) \|y_s - x(t_p)_s\| ds \leq \\
& \leq (\epsilon + K_1) \int_{t_p}^{s_i} L(s) ds \leq \epsilon \int_{t_p}^{s_i} L(s) ds + K_1 \left| \int_{t_p}^{s_i} L(s) ds \right| \leq \\
& \leq \epsilon \int_{t_p}^{s_i} L(s) ds + K_1 \frac{\epsilon}{(m+1)(K_1+1)} < \epsilon \int_{t_p}^{s_i} L(s) ds + \frac{\epsilon}{(m+1)}. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Similarmente, para o caso (b), temos

$$\int_{s_{i-1}}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds = \begin{cases} \int_{\tau_i}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds, & v \in [\tau_i, s_i] \\ 0, & v \in [s_{i-1}, \tau_i]. \end{cases}$$

Por (4.20), vale

$$\|y_s - x(\tau_i)_s\| = \sup_{\rho \in [\tau_i, s]} |y(\rho) - y(\tau_i)| < \epsilon, \quad \forall s \in [\tau_i, s_i].$$

Daí, pela condição (C) e pela desigualdade anterior, obtemos

$$\left| \int_{\tau_i}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds \right| \leq \epsilon \int_{\tau_i}^v L(s) ds.$$

Assim, no caso (b), para cada $i = 1, \dots, l$, temos

$$\begin{aligned}
& \|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| = \\
& = \sup_{v \in [\tau_i, s_i]} \left| \int_{\tau_i}^v [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)] ds \right| < \sup_{v \in [\tau_i, s_i]} \epsilon \int_{\tau_i}^v L(s) ds \leq \epsilon \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Supondo que o caso (a) ocorra no máximo em $m < l$ intervalos marcados da partição D , obtemos de (4.25) e (4.26):

$$\begin{aligned}
& \|x(u) - x(t_0) - \sum_{i=1}^l [G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})]\| = \\
& = \left\| \sum_{i=1}^l [x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})] \right\| \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^l \|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| \leq \\
& \leq \sum_{\substack{i=1 \\ t_p \in [s_{i-1}, s_i]}}^l \left(\epsilon \int_{t_p}^{s_i} L(s) ds + \frac{\epsilon}{m+1} \right) + \sum_{i=1}^l \epsilon \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds < \\
& < 2\epsilon \int_{t_0}^{t_0+\sigma} L(s) ds + m \frac{\epsilon}{m+1} < 2\epsilon \int_{t_0}^{t_0+\sigma} L(s) ds + \epsilon. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, existe a integral $\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t)$ e vale a igualdade

$$x(u) - x(t_0) = \int_{t_0}^u DG(x(\tau), t).$$

□

Teorema 4.3. Sejam $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $G : G^1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^-([t_0 - r, t_0 + \sigma])$, definida em (4.9). Suponhamos que $x : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow G^1$ seja uma solução da EDOG (4.10), com condição inicial

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \phi(v - t_0), & v \in [t_0 - r, t_0] \\ x(t_0)(t_0), & v \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.28)$$

Para cada $v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$, seja

$$y(v) = \begin{cases} x(t_0)(v), & v \in [t_0 - r, t_0] \\ x(v)(v), & v \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.29)$$

Então, $y : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução da EDFRI (4.1). Além disso, $y(v) = x(t_0 + \sigma)(v)$, para todo $v \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$, ou seja, $y \in G^1$.

Demonstração. Por certo, observe que $y_{t_0} = \phi$ em $[-r, 0]$, pois

$$y_{t_0}(s) = y(t_0 + s) = x(t_0)(t_0 + s) = \phi(t_0 + s - t_0) = \phi(s), \quad \forall s \in [-r, 0].$$

Pelo Lema 4.1, temos

$$y(u) = x(t_0)(u) = x(u)(u) = x(t_0 + \sigma)(u), \quad \forall u \in [t_0 - r, t_0]$$

e

$$y(u) = x(u)(u) = x(t_0 + \sigma)(u), \quad \forall u \in [t_0, t_0 + \sigma].$$

Como $x(t_0 + \sigma) \in G^1$, temos $y \in G^1$.

Agora, é suficiente mostrar que, para cada $\eta > 0$, com $\eta < \sigma$, e cada $u \in [t_0, t_0 + \eta]$, tem-se

$$\left| y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds - \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(u) \right| < \eta. \quad (4.30)$$

Podemos escolher um calibre δ de $[t_0, t_0 + \sigma]$, que satisfaça, para cada $\tau \in [t_0, t_0 + \delta(\tau)]$, as seguintes condições:

- (i) $0 < \delta(\tau) < \min \left\{ \frac{t_k - t_{k-1}}{2}, k = 1, \dots, m \right\};$
- (ii) $0 < 2\delta(\tau) < \min\{|\tau - t_k|, |\tau - t_{k-1}|, \tau \in (t_{k-1}, t_k), k = 1, \dots, m\};$
- (iii) $\left| \int_u^v L(s) ds \right| < \frac{\epsilon}{(m+1)(K+1)},$ para todo $[u, v] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$, onde $K = \max\{K_1, K_2\};$
- (iv) $|h(\rho) - h(\tau)| < \epsilon,$ para todo $\rho \in [t_0 - \delta(\tau), t_0]$ e $|h(\rho) - h(\tau^+)| < \epsilon,$ para todo $\rho \in [t_0, t_0 + \delta(\tau)].$

Além disso, da demonstração do Teorema 4.2, sabemos que se o intervalo marcado $(\tau, [s_1, s_2])$ é δ -fino, então $[s_1, s_2]$ possui no máximo um momento de impulso t_k , em que $k \in \{1, \dots, m\}$.

Seja $D = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]), i = 1, \dots, l\}$ uma partição δ -fina do intervalo $[t_0, t_0 + \sigma]$. Se existe $p = 1, \dots, m$ tal que $t_p \in [s_{i-1}, s_i]$, para algum $i = 1, \dots, l$, temos

$$\begin{aligned} J(x(t_p), s_i)(v) - J(x(t_p), s_{i-1})(v) &= \sum_{k=1}^l [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(v) I_k(x(t_p)(t_k)) = \\ &= H_{t_p}(v) I_k(x(t_p)(t_p)) = H_{t_p}(v) I_k(y(t_p)), \end{aligned}$$

pois $H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1}) \neq 0$ se, e somente se, $k = p$. Porém, se $[s_{i-1}, s_i] \cap \{t_1, \dots, t_m\} = \emptyset$, então

$$J(x(\tau_i), s_i)(v) - J(x(\tau_i), s_{i-1})(v) = 0,$$

já que $H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1}) = 0$, para todo $k = 1, \dots, m$. Logo, existe a integral $\int_{t_0}^u DJ(x(\tau), t)$ e

$$\int_{t_0}^u DJ(x(\tau), t)(v) = \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(v). \quad (4.31)$$

Sendo x solução da EDOG (4.10), pelo Lema 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} y(u) - y(t_0) &= x(u)(u) - x(t_0)(t_0) = x(u)(u) - x(t_0)(u) = \left(\int_{t_0}^u DG(x(\tau), t) \right) (u) = \\ &= \left(\int_{t_0}^u DF(x(\tau), t) \right) (u) + \left(\int_{t_0}^u DJ(x(\tau), t) \right) (u), \quad \forall u \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim, (4.31) e (4.32) implicam em

$$\begin{aligned} y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds - \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(u) &= \\ &= \left(\int_{t_0}^u DF(x(\tau), t) \right) (u) + \left(\int_{t_0}^u DJ(x(\tau), t) \right) (u) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds - \\ &\quad - \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(u) = \left(\int_{t_0}^u DF(x(\tau), t) \right) (u) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como G e J são Kurzweil integráveis em $[t_0, t_0 + \sigma]$, então F também é Kurzweil integrável. Assim, para o calibre δ escolhido, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^l [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})] - \int_{t_0}^u DF(x(\tau), t) \right\| < \epsilon, \quad (4.34)$$

para toda partição δ -fina D .

De (4.32) e (4.34), segue que

$$\begin{aligned}
 & \left| y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds - \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(u) \right| = \\
 & = \left| \left(\int_{t_0}^u DF(x(\tau), t) \right) (u) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds \right| < \\
 & < \left| \epsilon + \sum_{i=1}^l [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds \right| = \\
 & = \left| \epsilon + \sum_{i=1}^l \left\{ [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right\} \right| \leq \\
 & \leq \epsilon + \sum_{i=1}^l \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right|. \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Vamos estimar o termo $\left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right|$.

Pela definição de F dada em (4.2), temos

$$[F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, x(\tau_i)_s) ds.$$

Assim,

$$\left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| = \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} [f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, y_s)] ds \right|.$$

Note que, se $u \in [s_{i-1}, \tau_i]$, segue pelo Lema 4.1, que

$$x(\tau_i)(u) = x(u)(u) = y(u) \Rightarrow x(\tau_i)_s(\theta) = y_s(\theta), \forall \theta \in [-r, 0].$$

Logo,

$$\int_{s_{i-1}}^{\tau_i} [f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, y_s)] ds = 0.$$

Desse modo,

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} [f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, y_s)] ds = \int_{\tau_i}^{s_i} [f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, y_s)] ds.$$

Para $u \in [\tau_i, s_i]$, tem-se pelo Lema 4.1 que, $y(u) = x(u)(u) = x(s_i)(u)$. Daí,

$$\int_{\tau_i}^{s_i} [f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, y_s)] ds = \int_{\tau_i}^{s_i} [f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, x(s_i)_s)] ds.$$

Logo, pela condição (C), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| = \\
 & = \left| \int_{\tau_i}^{s_i} [f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, x(s_i)_s)] ds \right| \leq \int_{\tau_i}^{s_i} |f(s, x(\tau_i)_s) - f(s, x(s_i)_s)| ds \leq \\
 & \leq \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) \|x(\tau_i)_s - x(s_i)_s\| ds. \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Vamos estudar os seguintes casos:

- (a) $[s_{i-1}, s_i]$ e $\{t_1, \dots, t_m\}$ contém um único ponto t_k , para algum $k = 1, \dots, m$;
 (b) $[s_{i-1}, s_i] \cap \{t_1, \dots, t_m\} = \emptyset$.

Considerando o caso (a), obtemos pelo item (iv) e pela definição de h ,

$$\begin{aligned} \|x(\tau_i)_s - x(s_i)_s\| &\leq \|x(\tau_i) - x(s_i)\| \leq |h(\tau_i) - h(s_i)| \leq \\ &|h(s_i) - h(\tau_i^+)| + |h(\tau_i^+) - h(\tau_i)| \leq \epsilon + K, \end{aligned}$$

onde $K = \max\{K_1, K_2\}$. E de (4.36) segue que

$$\left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| < (\epsilon + K) \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds. \quad (4.37)$$

Agora vamos considerar o caso (b). Pela definição de h , concluímos que

$$|h(\tau_i^+) - h(\tau_i)| = 0.$$

Por (iv), tem-se

$$\begin{aligned} |h(\rho) - h(\tau_i)| &\leq |h(\rho) - h(\tau_i^+)| + |h(\tau_i^+) - h(\tau_i)| = \\ &= |h(\rho) - h(\tau_i^+)| < \epsilon, \forall \rho \in [\tau_i, \tau_i + \delta(\tau_i)] \text{ e } \tau_i \neq t_k, \forall k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\|x(\tau_i)_s - x(s_i)_s\| \leq \|x(\tau_i) - x(s_i)\| \leq |h(\tau_i) - h(s_i)| < \epsilon.$$

Assim, por (4.36) segue

$$\left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| < \epsilon \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds. \quad (4.38)$$

Portanto, aplicando (4.37), (4.38) e o item (iii), tem-se

$$\begin{aligned} &\left| y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^u f(s, y_s) ds - \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) H_{t_k}(u) \right| < \\ &\epsilon + \sum_{i=1}^l \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| < \\ &< \epsilon + (\epsilon + K) \sum_{i; t_k \in [s_{i-1}, s_i], k=1, \dots, m} \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds + \epsilon \sum_{i=1}^l \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds < \\ &< \epsilon + 2\epsilon \int_{t_0}^u L(s) ds + K \sum_{i; t_k \in [s_{i-1}, s_i], k=1, \dots, m} \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds < \\ &< \epsilon + 2\epsilon \int_{t_0}^u L(s) ds + mK \frac{\epsilon}{(m+1)(K+1)} \leq \epsilon \left(2 + 2 \int_{t_0}^u L(s) ds \right). \quad (4.39) \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \left(2 + 2 \int_{t_0}^u L(s) ds \right) < \eta$, obtemos (4.30) e o teorema está provado. $\square$

Observação 4.1. Vimos que os Teoremas (3.3) e (2.5) garantem a existência e a unicidade das soluções locais para as EDFRIs e EDOGs respectivamente. Estamos interessados em estudar o comportamento global dessas soluções. Para estender os resultados locais obtidos nos capítulos anteriores, consideremos $G^-([a, +\infty), \mathbb{R}^n)$, com $a \in \mathbb{R}$, o espaço das funções limitadas $\varphi : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que admitem os limites laterais em todo ponto de $[a, +\infty)$ e são contínuas à esquerda em $[a, +\infty)$.

Seja G^1 um conjunto aberto de $G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$, com a seguinte propriedade: se $y \in G^1$ e $\bar{t} \in [t_0, +\infty)$, então $\bar{y}$ dada por:

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 - r \leq t \leq \bar{t}; \\ y(\bar{t}), & \bar{t} < t < +\infty \end{cases}$$

é um elemento de G^1 .

Vamos assumir que $f : [t_0, +\infty) \times G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$, satisfazem as condições (A), (B), (C), (A') e (B') descritas na Seção 4.1.

Para $y \in G^1$, $t \in [t_0, +\infty)$ e $v \in [t_0 - r, +\infty)$, definimos

$$F(y, t)(v) = \begin{cases} 0, & v \in [t_0 - r, t_0] \\ \int_{t_0}^v f(s, y_s) ds, & v \in [t_0, t] \\ \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds, & v \in [t, +\infty), \end{cases}$$

e

$$J(y, t)(v) = \sum_{k=1}^m H_{t_k}(t) H_{t_k}(v) I_k(y(t_k)).$$

Seja $G : G^1 \times [t_0, +\infty) \rightarrow G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ dada por:

$$G(y, t)(v) = F(y, t)(v) + J(y, t)(v),$$

para cada $v \in [t_0 - r, +\infty)$. Consideremos em $G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ a norma da convergência uniforme $\|\cdot\|$, ou seja, se $z \in G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$, então $\|z\| = \sup_{s \in [t_0 - r, +\infty)} |z(s)|$.

Similarmente ao que foi feito anteriormente, para $s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$ e $x, y \in G^1$, obtemos

$$\|G(x, s_2) - G(x, s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|$$

e

$$\|G(x, s_2) - G(x, s_1) - G(y, s_2) + G(y, s_1)\| \leq \|x - y\| |h(s_2) - h(s_1)|,$$

onde

$$h(t) = \int_{t_0}^t [M(s) + L(s)] ds + \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=0}^{+\infty} H_{t_k}(t), \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

é uma função não-decrescente e contínua à esquerda.

Claramente, $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, onde $\Omega = G^1 \times [c, d]$, para cada $[c, d] \in [t_0, +\infty)$. Consideremos a EDOG (4.10), com a condição inicial $\tilde{x} = x(t_0)$, onde

$$\tilde{x}(v) = \begin{cases} \phi(v - t_0); & v \in [t_0 - r, t_0] \\ \phi(0); & v \in [t_0, +\infty). \end{cases}$$

Fazendo as adaptações necessárias, obtemos a correspondência entre as EDFRIs e as EDOGs, ou seja, os Teoremas 4.2 e 4.3, para soluções definidas em intervalos ilimitados superiormente.

Observação 4.2. Sejam $t \geq t_0$ e $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 3.3, existe uma única solução $y : [t - r, \nu] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\nu > t$, da EDFRI (4.1) satisfazendo $y_t = \phi$. Então, pelo Teorema 4.2, encontramos a solução correspondente $x : [t, \nu] \rightarrow G^-([t, \nu], \mathbb{R}^n)$ da EDOG (4.10) satisfazendo a condição inicial $x(t) = \tilde{x}$, onde

$$x(\tau)(v) = \begin{cases} y(v); & v \in [t - r, \tau] \\ y(\tau); & v \in [\tau, \nu]. \end{cases}$$

Vamos escrever $x_\phi(t)$ ao invés de $x(t)$. Então, notemos que $x_\phi(t)(t + \theta) = y(t + \theta)$, para todo $\theta \in [-r, 0]$, ou seja, $(x_\phi(t))_t = y_t = \phi$.

Por outro lado, como $I_0 \equiv 0$, temos $\tilde{x}(t) = \tilde{x} + G(\tilde{x}, t^+) - G(\tilde{x}, t) = \tilde{x} \in G^1$. Então, pelo Teorema 2.5, existirá uma única solução $x : [t, \nu] \rightarrow G^-([t, \nu], \mathbb{R}^n)$ de (4.10), tal que $x(t) = \tilde{x}$. Pelo Teorema 4.3, obtemos uma única solução $y : [t - r, \nu] \rightarrow \mathbb{R}^n$ da EDFRI (4.1), satisfazendo $y_t = \phi$, onde

$$y(v) = \begin{cases} x(t)(v), & v \in [t - r, t]; \\ x(v)(v), & v \in [t, \nu]. \end{cases}$$

Logo, $(x_\phi(t))_t = y_t = \phi$.

Portanto, para cada $t \geq t_0$, a aplicação

$$(t, x_\phi(t)) \mapsto (t, y_t)$$

é uma bijeção.

5 Estabilidade

Estudaremos, neste capítulo, critérios de estabilidade variacional e estabilidade variacional lipschitziana (ambos no sentido de Lyapunov) para as soluções de EDOGs e, por meio da correspondência tratada na Seção 4.2 do Capítulo 5, obteremos resultados de estabilidade para as soluções de EDFRIs. O conceito de estabilidade variacional foi introduzido por Š. Schwabik em [12]. O conceito de estabilidade variacional lipschitziana será introduzido neste trabalho e os resultados referentes à este estão presentes em [1].

5.1 Estabilidade variacional

Nesta seção, vamos considerar $\Omega = B_c \times [t_0, +\infty)$, onde $B_c = \{y \in X; \|y\| < c\}$, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $c > 0$ e $t_0 \geq 0$. Consideraremos também a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x, t), \quad (5.1)$$

em que G pertence à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$, com $h : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à esquerda.

Vamos supor que $G(0, t) - G(0, s) = 0$, para quaisquer $t, s \in [t_0, +\infty)$. Então, para todo $[\gamma, v] \subset [t_0, +\infty)$, temos

$$\int_{\gamma}^v DG(0, t) = G(0, v) - G(0, \gamma) = 0$$

e, conseqüentemente, $x \equiv 0$ é solução da EDOG (5.1) em $[t_0, +\infty)$.

Note que, pelo Lema 2.2, toda solução $x : [\gamma, v] \rightarrow X$ de (5.1) é contínua à esquerda e ainda, pelo Corolário 2.1, x é de variação limitada em $[\gamma, v]$, o que motiva assim, o conceito de estabilidade variacional. É natural, então, medirmos a distância entre duas soluções de (5.1) usando a norma da variação dada por $\|x\| + \text{var}_{\gamma}^v(x)$.

Definição 5.1. A solução $x \equiv 0$ de (5.1) é dita:

- (i) *Variacionalmente estável* se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$, $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta$$

e

$$\text{var}_{\gamma}^v \left(\bar{x}(s) - \int_{\gamma}^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| < \epsilon, \forall t \in [\gamma, v];$$

- (ii) *Variacionalmente atratora* se existir $\delta_0 > 0$ e, para todo $\epsilon > 0$, existirem $T = T(\epsilon) \geq 0$ e $\rho = \rho(\epsilon) > 0$ tal que se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$ é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$ com

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta_0$$

e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \rho,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| < \epsilon, \forall t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T, +\infty), \gamma \geq t_0;$$

- (iii) *Variacionalmente assintoticamente estável* se for variacionalmente estável e variacionalmente atratora.

Para obter os teoremas do tipo Lyapunov para a EDOG (5.1), precisamos de alguns lemas auxiliares.

Lema 5.1. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas à esquerda em $(a, b]$. Se para cada $\sigma \in [a, b]$, existir um $0 < \delta(\sigma) < b - a$ tal que

$$g(\sigma + \eta) - g(\sigma) \leq f(\sigma + \eta) - f(\sigma), \quad (5.2)$$

para todo $\eta \in (0, \delta(\sigma))$, então

$$g(s) - g(a) \leq f(s) - f(a), \forall s \in [a, b].$$

Demonstração. De fato, consideremos o conjunto

$$\mathcal{M} = \{s \in [a, b]; g(\sigma) - g(a) \leq f(\sigma) - f(a), \sigma \in [a, s]\}.$$

Observe que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, pois tomando $\sigma = a$ em particular, existe $\delta(a) < b - a$ tal que, para todo $\eta \in (0, \delta(a)) \subset (0, b - a)$, tem-se $a + \eta \in [a, b]$ e, por (5.2),

$$g(a + \eta) - g(a) \leq f(a + \eta) - f(a).$$

Portanto, $a + \eta \in \mathcal{M}$.

Seja $S = \sup \mathcal{M}$. Queremos mostrar que $S = b$. Suponhamos, por absurdo, que $S \neq b$. Então, pela definição de supremo, existe uma sequência $(x_k) \subset \mathcal{M}$ tal que $x_k \rightarrow S^-$ e ainda,

$$g(x_k) - g(a) \leq f(x_k) - f(a).$$

Note que da continuidade à esquerda de f e g em $(a, b]$ e da desigualdade acima segue que

$$g(S) - g(a) = \lim_{x_k \rightarrow S^-} [g(x_k) - g(a)] \leq \lim_{x_k \rightarrow S^-} [f(x_k) - f(a)] = f(S) - f(a). \quad (5.3)$$

Seja $0 < \eta < b - S$, então $\eta + S \in [a, b]$. Por (5.2), vale

$$g(S + \eta) - g(S) \leq f(S + \eta) - f(S). \quad (5.4)$$

Assim, por (5.3) e (5.4), obtemos

$$\begin{aligned} g(S + \eta) - g(a) &= g(S + \eta) - g(S) + g(S) - g(a) \leq \\ &\leq f(S + \eta) - f(S) + f(S) - f(a) = f(S + \eta) - f(a). \end{aligned}$$

Portanto, $S + \eta \in \mathcal{M}$ e $S + \eta > S$, o que está em contradição com a definição de supremo. $\square$

Lema 5.2. Seja $V : [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in X$, $V(\cdot, x) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$ e satisfaz

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (5.5)$$

para algum $K > 0$. Além disso, suponhamos que exista uma função $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que, para $x : [a, b] \rightarrow X$ solução de (5.1), tenhamos

$$D^+V(t, x(t)) = \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq \Phi(x(t)), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (5.6)$$

Se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow X$, $[\gamma, v] \subset [t_0, +\infty)$, for contínua à esquerda em $(\gamma, v]$ e de variação limitada em $[\gamma, v]$, então

$$V(v, \bar{x}(v)) - V(\gamma, \bar{x}(\gamma)) \leq K \text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) + M(v - \gamma), \quad (5.7)$$

onde $M = \sup_{t \in [\gamma, v]} \Phi(\bar{x}(t))$.

Demonstração. Seja $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow X$ uma função contínua à esquerda em $(\gamma, v]$ e de variação limitada em $[\gamma, v]$. Pelo Corolário 2.3, existe a integral $\int_\gamma^v DG(\bar{x}(\tau), t)$.

De acordo com o Teorema 2.5, a EDOG (5.1) admite uma única solução local $x : [\sigma, \sigma + \eta_1(\sigma)] \rightarrow X$, com $\sigma \in [\gamma, v]$ e $\eta_1(\sigma) > 0$, satisfazendo a condição inicial $x(\sigma) = \bar{x}(\sigma)$.

Seja $\eta_2 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\eta_2 \leq \eta_1(\sigma)$ e $\sigma + \eta_2 \leq v$. Então a integral $\int_\sigma^{\sigma + \eta_2} DG(x(\tau), t)$ existe e a integral $\int_\sigma^{\sigma + \eta_2} D[G(\bar{x}(\tau), t) - G(x(\tau), t)]$ também existe. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe uma função calibre δ de $[\sigma, \sigma + \eta_2]$ correspondente a ϵ na definição da última integral. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\eta_2 < \delta(\sigma)$.

Por (5.6), tomemos $0 < \eta \leq \eta_2$ de forma que a desigualdade

$$V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \leq \eta \Phi(x(\sigma)) \quad (5.8)$$

seja válida e podemos supor, pelo Corolário 1.1(i), que

$$\left\| G(\bar{x}(\sigma), \sigma + \eta) - G(\bar{x}(\sigma), \sigma) - \int_\sigma^{\sigma + \eta} DG(\bar{x}(\tau), t) \right\| < \frac{\eta \epsilon}{2K} \quad (5.9)$$

e

$$\left\| G(x(\sigma), \sigma + \eta) - G(x(\sigma), \sigma) - \int_\sigma^{\sigma + \eta} DG(x(\tau), t) \right\| < \frac{\eta \epsilon}{2K}. \quad (5.10)$$

Como $x(\sigma) = \bar{x}(\sigma)$ e $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, temos

$$\begin{aligned} \|G(\bar{x}(\sigma), \sigma + \eta) - G(\bar{x}(\sigma), \sigma) - G(x(\sigma), \sigma + \eta) + G(x(\sigma), \sigma)\| &\leq \\ &\leq \|\bar{x}(\sigma) - x(\sigma)\| |h(\sigma + \eta) - h(\sigma)| = 0. \end{aligned}$$

Logo, de (5.9) e (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} D[G(\bar{x}(\tau), t) - G(x(\tau), t)] \right\| &\leq \\ &\leq \left\| G(\bar{x}(\sigma), \sigma + \eta) - G(\bar{x}(\sigma), \sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\bar{x}(\tau), t) \right\| + \\ &\quad + \left\| G(x(\sigma), \sigma + \eta) - G(x(\sigma), \sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(x(\tau), t) \right\| < \frac{\eta\epsilon}{K}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

De (5.5), segue que

$$\begin{aligned} V(\sigma + \eta, \bar{x}(\sigma + \eta)) - V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) &\leq K \|\bar{x}(\sigma + \eta) - x(\sigma + \eta)\| = \\ &= K \left\| \bar{x}(\sigma + \eta) - \bar{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(x(\tau), t) \right\|. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Assim, por (5.8), (5.11) e (5.12), obtemos

$$\begin{aligned} V(\sigma + \eta, \bar{x}(\sigma + \eta)) - V(\sigma, \bar{x}(\sigma)) &= V(\sigma + \eta, \bar{x}(\sigma + \eta)) - V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) + \\ &+ V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) - V(\sigma, \bar{x}(\sigma)) \leq K \left\| \bar{x}(\sigma + \eta) - \bar{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(x(\tau), t) \right\| + \\ &+ \eta\Phi(x(\sigma)) \leq K \left\| \bar{x}(\sigma + \eta) - \bar{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\bar{x}(\tau), t) \right\| + \\ &+ K \left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} D[G(\bar{x}(\tau), t) - G(x(\tau), t)] \right\| + \eta\Phi(x(\sigma)) \leq \\ &\leq K \left\| \bar{x}(\sigma + \eta) - \bar{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\bar{x}(\tau), t) \right\| + \eta\epsilon + \eta M. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Defina, para cada $s \in [\gamma, v]$, a função

$$P(s) = \bar{x}(s) - \int_{\gamma}^s DG(\bar{x}(\tau), t).$$

P é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$, pois $\bar{x}$ é de variação limitada. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \bar{x}(\sigma + \eta) - \bar{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\bar{x}(\tau), t) \right\| &= \|P(\sigma + \eta) - P(\sigma)\| \leq \\ &\leq \text{var}_{\sigma}^{\sigma+\eta} P = \text{var}_{\gamma}^{\sigma+\eta} P - \text{var}_{\gamma}^{\sigma} P \end{aligned} \quad (5.14)$$

Portanto, para $0 < \eta < \eta_2$, obtemos

$V(\sigma + \eta, \bar{x}(\sigma + \eta)) - V(\sigma, \bar{x}(\sigma)) \leq K[\text{var}_{\gamma}^{\sigma+\eta} P - \text{var}_{\gamma}^{\sigma} P] + \eta\epsilon + \eta M = f(\sigma + \eta) - f(\sigma)$, onde $f(t) = K\text{var}_{\gamma}^t P + \epsilon t + Mt$. Note que f é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$. Portanto, pelo Lema 5.1, concluímos que

$$V(v, \bar{x}(v)) - V(\gamma, \bar{x}(\gamma)) \leq K\text{var}_{\gamma}^v P + \epsilon(v - \gamma) + M(v - \gamma).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, a prova está completa. $\square$

Consideremos $\overline{B}_\rho = \{y \in X; \|y\| \leq \rho\}$, $0 < \rho < c$. A seguir, mostraremos que com certas condições sobre o funcional V , conseguimos resultados com respeito a estabilidade variacional da solução trivial da EDOG (5.1).

Teorema 5.3. Seja $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

- (i) $V(t, 0) = 0$, para todo $t \geq t_0$;
- (ii) $V(\cdot, x) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$, para cada $x \in \overline{B}_\rho$;
- (iii) Existe $K > 0$ tal que

$$|V(t, z) - V(t, y)| \leq K\|z - y\|, \quad \forall z, y \in \overline{B}_\rho, t \in [t_0, +\infty);$$

- (iv) V é positivo definido, isto é, existe uma função $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ crescente tal que $b(0) = 0$ e

$$V(t, x) \geq b(\|x\|), \quad \text{para todo } (t, x) \in [t_0, +\infty) \times \overline{B}_\rho;$$

- (v) Para toda solução $x : [\gamma, v] \rightarrow \overline{B}_\rho$ de (5.1), temos

$$D^+V(t, x(t)) = \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0,$$

ou seja, a derivada superior de Dini à direita de V é não-positiva ao longo de toda solução $x(t)$ da EDOG (5.1).

Então, a solução trivial $x \equiv 0$ de (5.1) é variacionalmente estável.

Demonstração. Seja $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow \overline{B}_\rho$ uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com $[\gamma, v] \subset [t_0, +\infty)$. Pelos itens (ii), (iii) e (iv), estamos nas condições do Lema 5.2. Assim, temos

$$V(t, \bar{x}(t)) \leq V(\gamma, \bar{x}(t)) + K \text{var}_\gamma^t \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), \bar{t}) \right), \quad \forall t \in [\gamma, v]. \quad (5.15)$$

Note que dos itens (i) e (iii), tem-se $V(t, \bar{x}(t)) \leq |V(t, \bar{x}(t))| \leq K\|\bar{x}(t)\|$, para todo $t \in [\gamma, v]$.

E ainda, por (iv), existe uma função $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ crescente tal que $b(0) = 0$ e $V(t, x) \geq b(\|x\|)$, para quaisquer $t \in [\gamma, v]$ e $x \in \overline{B}_\rho$. Assim, dado $\epsilon > 0$, temos $b(\epsilon) > 0$. Seja $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $2K\delta(\epsilon) < b(\epsilon)$. Suponhamos que

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta(\epsilon)$$

e

$$\text{var}_\gamma^t \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta(\epsilon), \quad \forall t \in [\gamma, v].$$

Então, a desigualdade em (5.15), implica em

$$V(t, \bar{x}(t)) \leq K\|\bar{x}(\gamma)\| + K \text{var}_\gamma^t \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), \bar{t}) \right) \leq 2K\delta(\epsilon) < b(\epsilon), \quad \forall t \in [\gamma, v]. \quad (5.16)$$

Por outro lado, se existisse $u \in [\gamma, v]$, tal que $\|\bar{x}(u)\| \geq \epsilon$, teríamos por (iv) que

$$V(u, \bar{x}(u)) \geq b(\|\bar{x}(u)\|) \geq b(\epsilon),$$

contradizendo (5.16). Portanto, segue que $\|\bar{x}(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [\gamma, v]$. $\square$

Teorema 5.4. Seja $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições de (i) a (iv) do Teorema 5.3. Além disso, suponhamos que exista uma função contínua $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(x) > 0$, sempre que $x \neq 0$, tal que para cada solução $x : [\gamma, v] \subset [t_0, v] \rightarrow \overline{B_\rho}$ de (5.1), tenhamos

$$D^+V(t, x(t)) = \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq -\Phi(x(t)), \quad t \in [\gamma, v].$$

Então, a solução trivial $x \equiv 0$ de (5.1) é variacionalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Como as hipóteses do Teorema 5.3 estão satisfeitas, segue que a solução trivial $x \equiv 0$ de (5.1) é variacionalmente estável. Desse modo, basta mostrarmos que a solução trivial $x \equiv 0$ de (5.1) é variacionalmente atratora.

Note que, pela definição de estabilidade variacional, temos:

- (I) Existe $\delta_0 \in (0, \rho)$ tal que se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_\rho$ é uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com $\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta_0$ e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta_0,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| < \rho, \quad \forall t \in [\gamma, v];$$

- (II) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, $\delta < \epsilon$ tal que se $\bar{x} : [\bar{\gamma}, \bar{v}] \rightarrow B_\rho$, $[\bar{\gamma}, \bar{v}]$ for uma função de variação limitada em $[\bar{\gamma}, \bar{v}] \subset [t_0, +\infty)$, contínua à esquerda em $(\bar{\gamma}, \bar{v}]$, com

$$\|\bar{x}(\bar{\gamma})\| < \delta$$

e

$$\text{var}_{\bar{\gamma}}^{\bar{v}} \left(\bar{x}(s) - \int_{\bar{\gamma}}^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| < \epsilon, \quad t \in [\bar{\gamma}, \bar{v}].$$

Sejam $\lambda(\epsilon) = \min\{\delta, \delta_0\} < \epsilon$, $N = \sup\{-\Phi(y); \lambda(\epsilon) \leq \|y\| \leq \epsilon\} < 0$ e

$$T(\epsilon) = \min \left\{ v - \gamma, -K \frac{(\delta_0 + \lambda(\epsilon))}{N} \right\}.$$

Suponhamos que $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_\rho$ seja uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$ tal que $\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta_0$ e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \lambda(\epsilon) \leq \delta.$$

Queremos provar que

$$\|\bar{x}(t)\| < \epsilon, \quad \text{para todo } t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T(\epsilon), +\infty).$$

Afirmamos que existe $t^* \in [\gamma, \gamma + T(\epsilon)]$ tal que $\|\bar{x}(t^*)\| < \lambda(\epsilon) \leq \delta$. De fato, suponhamos que isso não ocorra, isto é, que $\|\bar{x}(s)\| \geq \lambda(\epsilon)$, para todo $s \in [\gamma, \gamma + T(\epsilon)]$. Assim, pelo Lema 5.2, temos

$$\begin{aligned} V(\gamma + T(\epsilon), \bar{x}(\gamma + T(\epsilon))) &\leq V(\gamma, \bar{x}(\gamma)) + K \text{var}_\gamma^{\gamma + T(\epsilon)} \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) + NT(\epsilon) \\ &< K\|\bar{x}(\gamma)\| + K\lambda(\epsilon) + N \left(-K \frac{(\delta_0 + \lambda(\epsilon))}{N} \right) = K\|\bar{x}(\gamma)\| - K\delta_0 < 0, \end{aligned}$$

contradizendo assim, o fato de V ser positivo definido, pois

$$V(\gamma + T(\epsilon), \bar{x}(\gamma + T(\epsilon))) \geq b(\|\bar{x}(\gamma + T(\epsilon))\|) \geq b(\lambda(\epsilon)) > 0.$$

Consequentemente, $\|\bar{x}(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [t^*, v]$, já que vale (II) para $\bar{\gamma} = t^*$ e $\bar{v} = v$. Como $t^* \in [\gamma, \gamma + T(\epsilon)]$, segue que $\|\bar{x}(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T(\epsilon), +\infty)$. $\square$

5.2 Estabilidade de EDFRIs

Nesta seção vamos estabelecer resultados de estabilidade para as EDFRIs a partir dos resultados de estabilidade variacional obtidos na seção anterior, por meio da correspondência entre soluções de EDOs e EDFRIs.

Consideremos a EDFRI

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y_t), & t \neq t_k, t \geq t_0 \\ \Delta y(t_k) &= I_k(y(t_k)), & k = 1, 2, \dots \\ y_{t_0} &= \phi, \end{cases} \quad (5.17)$$

onde $t_0 \geq 0$ e $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Suponhamos que $f : [t_0, +\infty) \times G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaça as condições (A), (B) e (C) e os operadores impulsivos, $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$, satisfaçam as condições (A') e (B') da Seção 3.2 do Capítulo 4. Além disso, vamos assumir que

$$f(t, 0) = 0, \text{ para todo } t \in [t_0, +\infty) \text{ e } I_k(0) = 0, k = 1, 2, \dots$$

para que $y \equiv 0$ seja uma solução de (5.17) em qualquer intervalo contido em $[t_0, +\infty)$.

Dado $c > 0$, seja ρ tal que $0 < \rho < c$. Considere os conjuntos $E_c = \{\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) : \|\psi\| < c\}$, $\bar{E}_\rho = \{\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) : \|\psi\| \leq \rho\}$ e $\bar{B}_\rho = \{\psi \in G_1 : \|\psi\| \leq \rho\}$.¹

Definição 5.2. A solução trivial $y \equiv 0$ de (5.17) é dita

- (i) *estável* se, para quaisquer $t_0 \geq 0$, $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que se $\phi \in E_c$ e $\bar{y} : [t_0 - r, v] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (5.17) em $[t_0, v]$, com $\bar{y}_{t_0} = \phi$ e

$$\|\phi\| < \delta,$$

então

$$\|\bar{y}_t(t_0, \phi)\| < \epsilon, \forall t \in [t_0, v];$$

¹ G_1 é o conjunto aberto definido no Capítulo 4.

- (ii) *uniformemente estável* se o número δ no item (i) independe de t_0 ;
- (iii) *uniformemente assintoticamente estável* se existir $\delta_0 > 0$ e, para todo $\epsilon > 0$, existir $T = T(\epsilon) \geq 0$ tal que, se $\phi \in E_c$ e $\bar{y} : [t_0 - r, v] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (5.17) em $[t_0, v]$ satisfazendo a condição inicial $\bar{y}_{t_0} = \phi$ e

$$\|\phi\| < \delta_0,$$

então

$$\|\bar{y}_t(t_0, \phi)\| < \epsilon, \forall t \in [t_0, v] \cap [t_0 + T, +\infty).$$

Dado um funcional U para a EDFRI (5.17), vamos construir um funcional V para a EDOG (5.1). Essa construção manterá as propriedades fundamentais do funcional U e será de grande valia para a obtenção dos resultados de estabilidade para a solução trivial de (5.17).

Consideremos a aplicação biunívoca

$$(t, x_\phi(t)) \rightarrow (t, y_t(t, \phi)),$$

que, para cada $t \geq t_0$ e $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, estabelece que $y_t(t, \phi) = (x_\phi(t))_t = \phi$.

Então, para cada funcional $U : [t_0, +\infty) \times G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir um funcional $V : [t_0, +\infty) \times G^-([-r, +\infty), \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, pondo

$$V(t, x_\phi(t)) = U(t, y_t(t, \phi)). \quad (5.18)$$

Observação 5.1. Para cada $t \geq t_0$, $\|y_t(t, \phi)\| = \|x_\phi(t)\|$ pois, pelo Teorema 4.2,

$$\begin{aligned} \|y_t(t, \phi)\| &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} |y(t + \theta)| = \sup_{\tau \in [t-r, t]} |y(\tau)| = \sup_{\tau \in [t-r, t]} |x_\phi(t)(\tau)| = \\ &= \sup_{\tau \in [t-r, +\infty)} |x_\phi(t)(\tau)| = \|x_\phi(t)\|. \end{aligned}$$

No próximo lema, veremos que as propriedades do funcional U podem ser transmitidas para o funcional V definido em (5.18).

Lema 5.5. Seja $U : [t_0, +\infty) \times \overline{E_\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional e seja $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ definido em (5.18). Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) Se $U(t, 0) = 0$, para todo $t \geq t_0$, então $V(t, 0) = 0$, para todo $t \geq t_0$;
- (b) Se $U(\cdot, \psi) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$, para todo $\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, então $V(\cdot, z) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$, para todo $z \in G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$;
- (c) Se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|U(t, \psi) - U(t, \phi)| \leq K\|\psi - \phi\|, \forall \psi, \phi \in \overline{E_\rho},$$

então

$$|V(t, z) - V(t, y)| \leq K\|z - y\|, \forall z, y \in \overline{B_\rho};$$

- (d) Se U é positivo definido, então V também é positivo definido;

- (e) Se para toda solução $y : [\gamma - r, v] \rightarrow \overline{E}_\rho$ da EDFRI (5.17), tem-se $D^+U(t, y_t) \leq 0$, para todo $t \geq t_0$, então $D^+V(t, x(t)) \leq 0$, para toda solução $x : [\gamma, v] \rightarrow \overline{B}_\rho$ de (5.1), em que $[\gamma, v] \subset [t_0, +\infty)$.

Demonstração. O item (b) segue diretamente da definição do funcional V em (5.18).

- (a) Seja $y : [t - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução da EDFRI (5.17) tal que, $y_t = 0$. Então, seja $x : [t, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução da EDOG (5.1) correspondente, dada pelo Teorema 4.2. Assim, $(x_\phi(t))_t = y_t = 0$.

Pela Observação 5.1, temos:

$$0 = \|y_t\| = \|x_\phi(t)\| \Rightarrow x_\phi(t) = 0, \forall t \geq t_0.$$

Portanto, segue de (5.18) que

$$0 = U(t, 0) = U(t, y_t) = V(t, x_\phi(t)) = V(t, 0), \forall t \geq t_0.$$

- (c) Dados $t \geq t_0$, $z, \bar{z} \in \overline{B}_\rho$, sejam $x, \bar{x} : [t, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ as soluções da EDOG (5.1) tais que $x_\phi(t) = z$ e $\bar{x}_{\bar{\phi}}(t) = \bar{z}$.

Pelo Teorema 4.3, existem soluções $y, \bar{y} : [t - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ da EDFRI (5.17), correspondentes às soluções x e $\bar{x}$, respectivamente, tais que $y_t = \phi$ e $\bar{y}_t = \bar{\phi}$, com $\phi, \bar{\phi} \in \overline{E}_\rho$. E ainda, $(x_\phi(t))_t = y_t = \phi$ e $(\bar{x}_{\bar{\phi}}(t))_t = \bar{y}_t = \bar{\phi}$.

Note que

$$|V(t, x_\phi(t)) - V(t, \bar{x}_{\bar{\phi}}(t))| = |U(t, y_t) - U(t, \bar{y}_t)| = |U(t, \phi) - U(t, \bar{\phi})|.$$

Logo, da hipótese e da Observação 5.1, segue que

$$\begin{aligned} |V(t, z) - V(t, \bar{z})| &= |V(t, x_\phi(t)) - V(t, \bar{x}_{\bar{\phi}}(t))| \leq K\|\phi - \bar{\phi}\| = \\ &= K\|x_\phi(t) - \bar{x}_{\bar{\phi}}(t)\| = K\|z - \bar{z}\|. \end{aligned}$$

- (d) Sejam $t \geq t_0$, $z \in \overline{B}_\rho$, $x : [t, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução da EDOG (5.1) e $\phi \in \overline{E}_\rho$ tais que $x_\phi(t) = z$ e $(x_\phi(t))_t = y_t = \phi$, onde y é a solução da EDFRI (5.17) correspondente a x .

Por hipótese, existe uma função crescente $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $b(0) = 0$ e $U(t, \phi) \geq b(\|\phi\|)$. Por (5.18), temos

$$V(t, z) = V(t, x_\phi(t)) = U(t, \phi) \geq b(\|\phi\|) = b(\|z\|).$$

- (e) Sejam $x : [\gamma, v] \rightarrow \overline{B}_\rho$ uma solução qualquer de (5.1) e $y : [\gamma - r, v] \rightarrow \overline{E}_\rho$ a solução da EDFRI (5.17) correspondente a x tais que $y_t = \phi$ e $(x_\phi(t))_t = y_t = \phi$. Por hipótese e por (5.18), temos

$$\begin{aligned} D^+V(t, x_\phi(t)) &= \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, x_\phi(t + \eta)) - V(t, x_\phi(t))}{\eta} = \\ &= \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{U(t + \eta, y_{t+\eta}) - U(t, y_t)}{\eta} = D^+U(t, y_t) \leq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.6. Seja $U : [t_0, +\infty) \times \overline{E}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional que goza das seguintes propriedades:

- i) $U(t, 0) = 0$, para todo $t \geq t_0$;
- ii) $U(\cdot, \phi) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$, para cada $\phi \in \overline{E}_\rho$;
- iii) Existe $K > 0$ tal que $|U(t, \phi) - U(t, \phi)| \leq K\|\phi - \phi\|$, para cada $\phi, \phi \in \overline{E}_\rho$;
- iv) U é positivo definido;
- v) Para cada solução $y : [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \overline{E}_\rho$ da EDFRI (5.17), tem-se $D^+U(t, y_t) \leq 0$.

Então a solução $y \equiv 0$ de (5.17) é uniformemente estável.

Demonstração. Consideremos o funcional $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ definido por (5.18).

Pelo Lema 5.5, as condições de i) a v) são satisfeitas pelo funcional V . Logo, pelo Teorema 5.3, a solução $x \equiv 0$ da EDOG (5.1) é variacionalmente estável.

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_\rho$ é uma função de variação limitada, contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta \quad (5.19)$$

e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta, \quad (5.20)$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| < \epsilon, \forall t \in [\gamma, v]. \quad (5.21)$$

Seja $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $y : [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \overline{E}_\rho$ uma solução de (5.17), tal que $y_{t_0} = \phi$. Suponha que

$$\|\phi\| < \delta. \quad (5.22)$$

Queremos mostrar que

$$\|y_t(t_0, \phi)\| < \epsilon, \forall t \in [t_0, +\infty). \quad (5.23)$$

Para isso, defina

$$x(t)(\tau) = \begin{cases} y(\tau); & \tau \in [t_0 - r, t] \\ y(t); & \tau \in [t, +\infty), \end{cases} \quad (5.24)$$

para cada $t \in [t_0, +\infty)$. Pelo Teorema 4.2, a função $x : [t_0, +\infty) \rightarrow G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ é uma solução da EDOG (5.1), com condição inicial $\tilde{x} = x(t_0)$, onde

$$\tilde{x}(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau - t_0); & \tau \in [t_0 - r, t_0] \\ \phi(0); & \tau \in [t_0, +\infty). \end{cases}$$

Note que

$$\|\tilde{x}\| = \sup_{\tau \in [t_0 - r, +\infty)} |\tilde{x}(\tau)| = \sup_{v \in [-r, 0]} |\phi(v)| = \|\phi\| < \delta$$

e

$$\text{var}_\gamma^v \left(x(s) - \int_\gamma^s DG(x(\tau), t) \right) = 0 < \delta,$$

para todo $v \in (t_0, +\infty)$. Além disso, x é de variação limitada e contínua à esquerda em $(t_0, +\infty)$. Consequentemente, por (5.21), segue que $\|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [t_0, v]$. Em particular, $\|\bar{x}(v)\| < \epsilon$.

Portanto, para cada $t \in [t_0, v]$, obtemos:

$$\|y_t(t_0, \phi)\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |y(t + \theta)| = \sup_{\tau \in [t_0 - r, v]} |y(\tau)| = \sup_{\tau \in [t_0 - r, v]} |x(v)(\tau)| = \|x(v)\| < \epsilon.$$

Como v é arbitrário, (5.23) vale e a prova está completa. $\square$

Teorema 5.7. Suponhamos que o funcional $U : [t_0, +\infty) \times \overline{E}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça as condições (i) até (iv) do Teorema 5.6. Além disso, suponhamos que exista uma função contínua $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\Lambda(0) = 0$ e $\Lambda(x) > 0$, sempre que $x \neq 0$, de forma que, para cada solução $y : [t_0 - r, v] \rightarrow \overline{E}_\rho$, tenha-se

$$D^+U(t, y_t) \leq -\Lambda(\|y_t\|), \quad (5.25)$$

para cada $t \in [t_0, v]$. Então, a solução trivial $y \equiv 0$ de (5.17) é uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração. Suponhamos $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{B}_\rho \subset G^-([t_0, v], \mathbb{R}^n)$ dado por (5.18).

Defina $\Phi : \overline{B}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(z) = \Lambda(\|z\|)$. Então, Φ é contínua, $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(z) > 0$, para $z \neq 0$. Assuma que $x : [t, +\infty) \rightarrow \overline{B}_\rho$ é uma solução de (5.1) tal que, $(x_\phi(t))_t = \phi$, para todo $t \in [t_0, +\infty)$, e $\phi \in \overline{E}_\rho$. Seja $y : [t - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução da EDFRI (5.17), dada pelo Teorema 4.3, com condição inicial $y_t = \phi$.

Sabemos da Observação 5.1 que $\|y_t\| = \|x_\phi(t)\|$. Assim, obtemos:

$$D^+V(t, x_\phi(t)) = D^+U(t, y_t) \leq -\Lambda(\|y_t\|) = -\Lambda(\|x_\phi(t)\|) = -\Phi(x_\phi(t)).$$

Portanto, pelo Teorema 5.4, a solução $x \equiv 0$ da EDOG (5.1) é variacionalmente assintoticamente estável em $[t_0, v]$, ou seja, existe $\rho_0 > 0$ e, para todo $\epsilon > 0$, existem $T = T(\epsilon) \geq 0$ e $\rho = \rho(\epsilon) > 0$ tal que se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_\epsilon$, $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta_0$$

e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \rho,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| < \epsilon, \forall t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T, v].$$

Suponha que $\|\phi\| < \delta_0$. Queremos mostrar que $\|y_t(t_0, \phi)\| < \epsilon$, para todo $t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T, +\infty)$. Com efeito, de $\|\phi\| < \delta_0$ segue, como feito na demonstração do Teorema 5.6, que $\|\tilde{x}(t)\| < \delta_0$ e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) = 0 < \rho,$$

implicando em $\|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T, +\infty)$. Em particular, $\|x(v)\| < \epsilon$. Portanto, para cada $t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T, +\infty)$, temos

$$\|y_t(t_0, \phi)\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |y(t + \theta)| \leq \sup_{\tau \in [t_0 - r, v]} |y(\tau)| = \sup_{\tau \in [t_0 - r, v]} |x(v)(\tau)| = \|x(v)\| < \epsilon.$$

Como v é arbitrário, a prova está completa. $\square$

5.3 Estabilidade lipschitziana para EDOGs

À luz do que foi estudado na Seção 5.1, vamos introduzir o conceito de estabilidade variacionalmente lipschitziana para as EDOGs.

Definição 5.3. A solução $x \equiv 0$ da EDOG (5.1) é dita *variacionalmente uniformemente lipschitziana estável*, se existirem $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que, se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$, $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, é uma função de variação limitada, contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com $\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta$ e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| \leq M\|\bar{x}(\gamma)\|, \forall t \in [\gamma, v].$$

Definição 5.4. A solução $x \equiv 0$ da EDOG (5.1) é dita:

- (i) *uniformemente lipschitziana estável* se existirem $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que, se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$, $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, é uma solução da EDOG (5.1) em $[\gamma, v]$ tal que

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| \leq M\|\bar{x}(\gamma)\|, \forall t \in [\gamma, v];$$

- (ii) *uniformemente globalmente lipschitziana estável* se existe $M > 0$ tal que se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$ é uma solução da EDOG (5.1) em $[\gamma, v]$ então

$$\|\bar{x}(t)\| \leq M\|\bar{x}(\gamma)\|, \quad \forall t \in [\gamma, v].$$

Note que, se a solução trivial $x \equiv 0$ de (5.1) é variacionalmente uniformemente lipschitziana estável então também é uniformemente lipschitziana estável.

Teorema 5.8. Suponha que $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes condições:

- i) $V(t, 0) = 0$, para todo $t \geq t_0$;
- ii) $V(\cdot, x) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$, para todo $x \in \overline{B_\rho}$;
- iii) Existe $K > 0$ tal que

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \overline{B_\rho}, \forall t \geq t_0;$$

- iv) V é positivo definido, isto é, existe uma função $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ crescente tal que $b(0) = 0$ e

$$V(t, x) \geq b(\|x\|), \quad \forall (t, x) \in [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho};$$

- v) Para toda solução $x : [\gamma, v] \rightarrow \overline{B_\rho}$ de (5.1), tem-se

$$\dot{V}(t, x(t)) = \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0, \quad t \in [\gamma, v].$$

Então, a solução $x \equiv 0$ de (5.1) é variacionalmente uniformemente lipschitziana estável.

Demonstração. Seja $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$ uma função de variação limitada, contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com $[\gamma, v] \subset [t_0, +\infty)$. Pelo Lema 5.2, temos

$$V(t, \bar{x}(t)) - V(\gamma, \bar{x}(\gamma)) \leq K \operatorname{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right), \quad \forall t \in [\gamma, v], \quad (5.26)$$

e dos itens *i)* e *iii)*, segue que

$$V(\gamma, \bar{x}(\gamma)) \leq K \|\bar{x}(\gamma)\|. \quad (5.27)$$

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Pelas propriedades da função b , obtemos $0 < b(\epsilon) \leq b(\|\bar{x}(\gamma)\| + \epsilon)$. Seja $\delta > 0$ tal que $2K\delta < b(\epsilon)$. Se

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta \text{ e } \operatorname{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta,$$

então (5.26) e (5.27) implicam

$$V(t, \bar{x}(t)) \leq 2K\delta < b(\epsilon) \leq b(\|\bar{x}(\gamma)\| + \epsilon), \quad \forall t \in [\gamma, v]. \quad (5.28)$$

Por outro lado, por *iv)*, temos

$$V(t, \bar{x}(t)) \geq b(\|\bar{x}(t)\|), \quad \forall t \in [\gamma, v]. \quad (5.29)$$

Como b é uma função crescente, concluímos, por (5.28) e (5.29), que

$$\|\bar{x}(t)\| < \|\bar{x}(\gamma)\| + \epsilon, \quad \forall t \in [\gamma, v].$$

Tomando $M = 1$ na Definição 5.3, obtemos o resultado, visto que ϵ é arbitrário. $\square$

Teorema 5.9. Suponha que $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça as condições de *i)*, *ii)*, *iii)* e *v)* do Teorema 5.8 e também:

$$iv') \quad V(t, x) \geq \|x\|, \text{ para todo } (t, x) \in [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho}.$$

Então, a solução trivial $x \equiv 0$ de (5.1) é uniformemente globalmente lipschitziana estável.

Demonstração. Seja $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$ uma solução da EDOG (5.1) em $[\gamma, v]$. Pelo Lema 5.2 e por *iv')*, temos

$$\|\bar{x}(t)\| \leq V(t, \bar{x}(t)) \leq V(\gamma, \bar{x}(\gamma)) + K \operatorname{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right),$$

para cada $t \in [\gamma, v]$. Como $\operatorname{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) = 0$ e $V(\gamma, \bar{x}(\gamma)) \leq K \|\bar{x}(\gamma)\|$ (veja (5.27)), concluímos que

$$\|\bar{x}(t)\| \leq K \|\bar{x}(\gamma)\|, \quad \forall t \in [\gamma, v],$$

o que completa a prova. $\square$

5.4 Estabilidade lipschitziana para EDFRIs

Definição 5.5. A solução trivial $y \equiv 0$ da EDFRI (5.17) é dita:

- i) *uniformemente lipschitziana estável* se existirem $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que se $\phi \in E_c$ e $\bar{y} : [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (5.17), com $\bar{y}_{t_0} = \phi$ e $\|\phi\| < \delta$, então

$$|\bar{y}(t, t_0, \phi)| \leq M\|\phi\|, \quad \forall t \geq t_0;$$

- ii) *uniformemente globalmente lipschitziana estável* se existir $M > 0$ tal que se $\phi \in E_c$ e $\bar{y} : [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (5.17), com $\bar{y}_{t_0} = \phi$, então

$$|\bar{y}(t, t_0, \phi)| \leq M\|\phi\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Teorema 5.10. Suponha que $U : [t_0, +\infty) \times \overline{E_\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes condições:

- i) $U(t, 0) = 0, \forall t \geq t_0$;
- ii) $U(\cdot, \phi) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$, para todo $\phi \in \overline{E_\rho}$;
- iii) Existe $K > 0$ tal que

$$|U(t, \phi) - U(t, \psi)| \leq K\|\phi - \psi\|, \text{ para todos } \phi, \psi \in \overline{E_\rho};$$

- iv) Existe uma função monótona crescente $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $b(0) = 0$ e $U(t, \phi) \geq b(\|\phi\|)$, para todo $\phi \in \overline{E_\rho}$;
- v) Para toda solução $y : [\gamma - r, v] \rightarrow \overline{E_\rho}$ de (5.17), com $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, tem-se $D^+U(t, y_t) \leq 0$, para todo $t \in [\gamma, v]$.

Então a solução trivial $y \equiv 0$ de (5.17) é uniformemente lipschitziana estável.

Demonstração. Consideremos o funcional $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por (5.18). Pelo Lema 5.5, $V(\cdot, z) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo à esquerda em $(t_0, +\infty)$, para todo $z \in \overline{B_\rho}$,

$$V(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

e

$$|V(t, z) - V(t, \bar{z})| \leq K\|z - \bar{z}\|, \quad \text{para } t \in [t_0, +\infty) \text{ e } z, \bar{z} \in \overline{B_\rho}.$$

Desse modo, pela relação (5.18) e pelas hipóteses iv) e v), o funcional V satisfaz as condições iv) e v) do Teorema 5.8. Então, as hipóteses do Teorema 5.8 estão satisfeitas. Portanto, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow B_c$ é uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com

$$\|\bar{x}(\gamma)\| < \delta \text{ e } \text{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta,$$

então

$$\|\bar{x}(t)\| \leq M\|\bar{x}(\gamma)\|, \quad \text{para todo } t \in [\gamma, v].$$

Seja $\phi \in \overline{E_\rho}$ e $\bar{y} : [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de (5.17) tal que $\bar{y}_{t_0} = \phi$ e

$$\|\phi\| < \delta. \tag{5.30}$$

Devemos mostrar que

$$|\bar{y}(t, t_0, \phi)| \leq M\|\phi\|, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (5.31)$$

Denote $\bar{y}(t) = \bar{y}(t, t_0, \phi)$ e defina

$$\bar{x}(t)(\tau) = \begin{cases} \bar{y}(\tau), & t_0 - r \leq \tau \leq t, \\ \bar{y}(t), & \tau \geq t. \end{cases} \quad (5.32)$$

Pelo Teorema 4.2, a função $\bar{x}(t)$ é uma solução em $[t_0, +\infty)$ da EDOG (5.1), satisfazendo a condição inicial $\bar{x}(t_0) = \tilde{x}$, onde

$$\tilde{x}(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau - t_0), & t_0 - r \leq \tau \leq t_0, \\ \phi(0), & \tau \geq t_0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Além disso, $\bar{x}$ é de variação limitada em $[t_0, +\infty)$. Por (5.30) e (5.33), temos

$$\|\bar{x}(t_0)\| = \sup_{t_0 - r \leq \tau < +\infty} |\tilde{x}(\tau)| = \|\phi\| < \delta. \quad (5.34)$$

E ainda, para cada $v \in [t_0, +\infty)$,

$$\text{var}_{t_0}^v \left(\bar{x}(s) - \int_{t_0}^s DG(\bar{x}(\tau), t) \right) = 0 < \delta. \quad (5.35)$$

Assim, existe $M > 0$ tal que $\|\bar{x}(t)\| < M\|\bar{x}(t_0)\|$, para todo $t \in [t_0, v]$. Em particular,

$$\|\bar{x}(v)\| < M\|\bar{x}(t_0)\|.$$

Então (5.32) implica que

$$\begin{aligned} |\bar{y}(t)| &\leq \|\bar{y}_t\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\bar{y}(t + \theta)| \leq \sup_{t_0 - r \leq \tau \leq v} |\bar{y}(\tau)| \\ &= \sup_{t_0 - r \leq \tau \leq v} |\bar{x}(v)(\tau)| = \sup_{t_0 - r \leq \tau < +\infty} |\bar{x}(v)(\tau)| \\ &= \|\bar{x}(v)\| < M\|\bar{x}(t_0)\| = M\|\phi\|, \end{aligned} \quad (5.36)$$

para todo $t \in [t_0, v]$. Como v é arbitrário, (5.31) vale e a prova está completa. $\square$

Teorema 5.11. Suponha que $U : [t_0, +\infty) \times \overline{E}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça as condições *i*), *ii*), *iii*) e *v*) do Teorema 5.10. E ainda,

$$iv') \quad U(t, \phi) \geq \|\phi\|, \text{ para cada } \phi \in \overline{E}_\rho.$$

Então, a solução trivial $y \equiv 0$ de (5.17) é uniformemente globalmente lipschitziana estável.

Demonstração. É fácil verificar que o funcional $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$, definido em (5.18), satisfaz as condições do Teorema 5.9. Então, existe $M > 0$ tal que, se $\bar{x} : [\gamma, v] \rightarrow \overline{B}_\rho$, $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, é uma solução da EDOG (5.1), então

$$\|\bar{x}(t)\| \leq M\|\bar{x}(\gamma)\|, \quad \forall t \in [\gamma, v].$$

Sejam $\phi \in \overline{E}_\rho$ e $\bar{y} : [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução da EDFRI (5.17) tal que $\bar{y}_{t_0} = \phi$. A prova de que

$$|\bar{y}(t, t_0, \phi)| \leq M\|\phi\|, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \quad (5.37)$$

é feita usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 5.10. $\square$

5.5 Aplicação

De posse dos resultados sobre estabilidade de solução para um sistema de EDFRIs, vamos investigar um modelo de viscoelasticidade unidimensional com impulsos em instantes pré-fixados. Modelos similares foram investigados em [2] e [14]. Consideremos o sistema impulsivo

$$\begin{cases} y'(t) = - \int_{t-r}^t [p(t-s)g(y(s))]ds - \alpha(t)\beta(y(t)), & t \neq t_k, t \geq 0 \\ \Delta y(t) = I_k(y(t)), & t = t_k, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5.38)$$

com condição inicial $y_0 = \phi$, $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R})$, $r > 0$.

Vamos assumir que existem B_1 , B_2 e K constantes positivas tais que: $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}+$ é uma função Henstock-Kurzweil integrável com $p(u) \leq B_1$, para todo $u \in \mathbb{R}$, a função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é não-negativa, com $\alpha(u) \leq B_2$, para todo $u \in \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função função Henstock-Kurzweil integrável tal que $\beta(0) = 0$ e $x\beta(x) > 0$, sempre que $x \neq 0$ e ainda, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função lipschitziana com constante de Lipschitz K , $g(0) = 0$ e $xg(x) > 0$, sempre que $x \neq 0$. Assuma, também, que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(A1) Existem funções Lebesgue integráveis $m_1, m_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativas tais que, para quaisquer $z \in G^-(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} \beta(z(s))ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} m_1(s)ds$$

e

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} g(z(s))ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} m_2(s)ds;$$

(A2) Existe uma função Lebesgue integrável $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativa tal que, para quaisquer $z, w \in G^-(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} [\beta(w(s)) - \beta(z(s))]ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} \ell(s)|w(s) - z(s)|ds;$$

(A3) Se $z \in G^-(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $\int_{t-r}^t g(z(s))ds > 0$, sempre que $t \geq 0$.

Os operadores impulsivos I_k , $k = 1, 2, \dots$, satisfazem:

(B1) $I_k(0) = 0$, para todo $k = 1, 2, \dots$;

(B2) Existe uma constante $K_1 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \dots$ e para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|I_k(x)| \leq K_1;$$

(B3) Existe uma constante $K_2 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \dots$ e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq K_2|x - y|;$$

(B4) $xI_k(x) < 0$, para todo $x \neq 0$.

Para garantirmos a existência local de solução para o sistema (5.38), vamos verificar se as condições (A), (B) e (C) introduzidas na Seção 3.2 do Capítulo 4 estão satisfeitas. Com efeito, seja $f : [0, +\infty) \times G^-([-r, +\infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(t, \phi) = - \int_{t-r}^t [p(t-s)g(\phi(0))]ds - \alpha(t)\beta(\phi(0)).$$

A condição (A) é imediata. Mostremos que f satisfaz as condições (B) e (C).

Sejam $y \in G^1$ e $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$, $u_1 \leq u_2$. Temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_1}^{u_2} f(s, y_s) ds \right| &= \left| \int_{u_1}^{u_2} \left[\int_{s-r}^s p(s-u)g(y_u(0))du + \alpha(s)\beta(y_s(0)) \right] ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{s-r}^s p(s-u)g(y_u(0))du \right) ds \right| + \left| \int_{u_1}^{u_2} \alpha(s)\beta(y_s(0))ds \right| \leq \\ &\quad B_1 \left| \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{s-r}^s g(y(u))du \right) ds \right| + B_2 \left| \int_{u_1}^{u_2} \beta(y(s))ds \right| \leq \\ &\leq B_1 \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{s-r}^s m_2(u)du \right) ds + B_2 \int_{u_1}^{u_2} m_1(s)ds \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)ds, \end{aligned}$$

onde $M(s) = B_1 \int_{s-r}^s m_2(u)du + B_2 m_1(s)$ e, portanto, f satisfaz a condição (B).

Agora, dados $x, y \in G^1$ e $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$, $u_1 \leq u_2$, temos

$$\begin{aligned} &\left| \int_{u_1}^{u_2} [f(s, x_s) - f(s, y_s)]ds \right| = \\ &= \left| \int_{u_1}^{u_2} \left(- \int_{s-r}^s p(s-u)[g(x(u)) - g(y(u))]du \right) - \alpha(s)[\beta(x(s)) - \beta(y(s))]ds \right| \leq \\ &\left| \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{s-r}^s |p(s-u)|K|x(u) - y(u)|du \right) ds \right| + \left| \int_{u_1}^{u_2} B_2|\beta(x(s)) - \beta(y(s))|ds \right| \leq \\ &\int_{u_1}^{u_2} \left(\int_r^0 |p(\tau)|K|x(s-\tau) - y(s-\tau)|d\tau \right) ds + \int_{u_1}^{u_2} B_2\ell(s)|x(s) - y(s)|ds \leq \\ &\int_{u_1}^{u_2} K\|x_s - y_s\| \left(\int_0^r |p(\tau)|d\tau \right) ds + B_2 \int_{u_1}^{u_2} \ell(s)\|x_s - y_s\|ds \leq \\ &\int_{u_1}^{u_2} (B_2\ell(s) + B_1Kr)\|x_s - y_s\|ds = \int_{u_1}^{u_2} L(s)\|x_s - y_s\|ds, \end{aligned}$$

onde $L(s) = B_2\ell(s) + B_1Kr$. Portanto, f satisfaz (C).

Agora que garantimos a existência local de solução para (5.38), vamos estudar a estabilidade da solução trivial deste sistema. Para tanto, defina uma função auxiliar $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $W(s) = |s|$. Afirmamos que, para cada solução y de (5.38) num intervalo compacto $I \subset [0, +\infty)$, temos $D^+W(y(t)) \leq 0$, para todo $t \geq 0$. De fato, vamos considerar dois casos: quando t é um momento de impulso e quando $t \neq t_k$, para $k = 1, 2, \dots$.

Se $t \neq t_k$, para $k = 1, 2, \dots$, então:

(i) se $y(t) \geq 0$, temos

$$D^+W(y(t)) = y'(t) = - \int_{t-r}^t [p(t-s)g(y(s))]ds - \alpha(t)\beta(y(t)) \leq 0,$$

pois p , α , $g \circ y$ são funções não-negativas, $x\beta(x) > 0$, sempre que $x \neq 0$, e $\beta(0) = 0$.

(ii) se $y(t) < 0$, temos

$$D^+W(y(t)) = -y'(t) = \int_{t-r}^t [p(t-s)g(y(s))]ds + \alpha(t)\beta(y(t)) \leq 0,$$

uma vez que p e α são funções não-negativas, $g(y(s)) \leq 0$ para $s \in I$, $x\beta(x) > 0$, sempre que $x \neq 0$, e $\beta(0) = 0$.

Agora, se $t = t_k$, para $k = 1, 2, \dots$, então:

(i') se $y(t_k) > 0$, temos

$$0 < (1 - K_2)y(t_k) \leq I_k(y(t_k)) + y(t_k) \leq y(t_k),$$

por (B_1) , (B_3) e (B_4) . Assim, $W(I_k(y(t_k)) + y(t_k)) \leq W(y(t_k))$;

(ii') se $y(t_k) < 0$, então

$$y(t_k) < I_k(y(t_k)) + y(t_k) \leq (1 - K_2)y(t_k) < 0,$$

ou seja, $W(I_k(y(t_k)) + y(t_k)) \leq W(y(t_k))$. Portanto, podemos concluir em ambos os casos que

$$W(y(t_k^+)) \leq W(y(t_k)).$$

Pela continuidade de W , sabemos que

$$W(y(t_k^+)) = \lim_{\sigma \rightarrow t_k^+} W(y(\sigma)) \leq W(y(t_k)).$$

Então, existe uma vizinhança à direita de t_k , digamos $(t_k, t_k + \delta)$ para algum $\delta > 0$, tal que

$$W(y(\sigma)) \leq W(y(t_k)), \forall \sigma \in (t_k, t_k + \delta).$$

Seja $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que $t_k + \eta \in (t_k, t_k + \delta)$. Logo,

$$W(y(t_k + \eta)) \leq W(y(t_k)),$$

de onde segue que

$$D^+W(y(t_k)) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{W(y(t_k + \eta)) - W(y(t_k))}{\eta} \leq 0,$$

concluindo então que

$$D^+W(y(t)) \leq 0, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (5.39)$$

Defina o funcional $U : [0, +\infty) \times G^-([-r, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$U(t, \phi) = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(\phi(\theta)) = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)| = \|\phi\|.$$

Mostremos que U satisfaz as condições dos teoremas sobre estabilidade abordados no Capítulo 5.

(a) É fácil ver que $U(t, 0) = 0$, para todo $t \geq 0$.

(b) Sejam ψ, ϕ em $\overline{E}_\rho$. Então,

$$|U(t, \psi) - U(t, \phi)| \leq ||\psi| - |\phi|| \leq \|\psi - \phi\|,$$

para todo $t \geq 0$.

(c) Dados $t \geq 0$ e $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R})$, temos

$$U(t, \phi) = \|\phi\| = b(\|\phi\|),$$

onde $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por $b(s) = s$.

(d) Sejam $t \geq 0$, $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R})$ e y solução de (5.38) em $[t - r, v]$, $v > t$, com condição inicial $y_t = \phi$. Temos:

$$U(t, \phi) = U(t, y_t) = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(y_t(\theta)) = W(y_t(\theta_0)),$$

para algum $\theta_0 \in [-r, 0]$.

Mostremos que $D^+U(t, y(t)) \leq 0$, para todo $t \geq 0$. Se $\theta_0 = 0$, segue de (5.39) que $D^+U(t, y_t) = D^+W(y(t)) \leq 0$.

Agora, consideremos $-r \leq \theta_0 < 0$. Para $\eta > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(y_{t+\eta}(\theta)) = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(y_t(\theta))$$

e, portanto,

$$D^+U(t, y_t) = \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(y_{t+\eta}(\theta)) - \sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(y_t(\theta))}{\eta} = 0.$$

Por conseguinte, pelos Teoremas 5.6, 5.10 e 5.11 temos que a solução trivial $y \equiv 0$ de (5.38) é uniformemente estável, uniformemente lipschitziana estável e uniformemente globalmente lipschitziana estável, respectivamente.

Referências

- [1] AFONSO, S. M.; SILVA, M. R. da. Lipschitz stability for generalized ordinary differential equations and impulsive retarded differential equations. *Submitted*.
- [2] AFONSO, S.; BONOTTO, E.; FEDERSON, M. Stability of functional differential equations with variable impulsive perturbations via generalized ordinary differential equations. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, v. 137(2), p. 189–214, 2013.
- [3] FEDERSON, M.; SCHWABIK Š. Generalized odes approach to impulsive retarded differential equations. *Differential Integral Equations*, v. 19(11), p. 1201–1234, 2006.
- [4] FEDERSON, M.; SCHWABIK Š. A new approach to impulsive retarded differential equations: stability results. *Functional Differential Equations*, v. 16(4), p. 583–607, 2009.
- [5] FEDERSON, M.; SCHWABIK Š. Stability for retarded differential equations. *Ukrainian Math. J.*, v. 60(1), p. 107–126, 2008.
- [6] FRANKOVÁ, D. Regulated function. *Mathematica Bohemica*, v. 116(1), p. 20–59, 1991.
- [7] HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations*. Berlin: Springer Verlag, 1993.
- [8] LAKSHMIKANTHAM, V.; BAINOV, D. D.; SIMEONOV, P. S. *Theory of Impulsive Differential Equations, Series in Modern Applied Mathematics*. Singapore: World Scientific, 1989.
- [9] LIMA, E. L. *Análise real, Funções de uma variável, Volume 1*. 10. ed. Rio de Janeiro: Coleção matemática universitária, IMPA, 2010.
- [10] LIND, M. *Functions of bounded variation*. Karlstad: Mathematics C-level thesis, 2006.
- [11] SCHWABIK Š. *Generalized Ordinary Differential Equations, Series in Real Analysis*. Singapore: World Scientific, 1992. v. 5.
- [12] SCHWABIK Š. Variational stability for generalized ordinary differential equations. *Časopis P. ř. Mat.*, v. 109(4), p. 389–420, 1984.
- [13] SCHWABIK Š.; GUOJU, Y. *Topics in Banach Space Integration, Series in Real Analysis*. Singapore: World Scientific, 2005. v. 10.

-
- [14] SOUTO, G. M. *Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos via equações diferenciais ordinárias generalizadas*. Paraná: Dissertação de Mestrado, 2013.
- [15] STAMOVA, I. M. Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations. *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 77 (2), p. 331–345, 2008.
- [16] STAMOVA, I. M. *Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations*. gottingen: De Gruyter Expositions in Mathematics 52, 2009.
- [17] SUN, Y.; N., M. A.; ZHAI, G. Stability of discontinuous retarded functional differential equations with applications. *IEEE Trans. Automat. Control.*, p. 1090–1105, 2005.