



**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Um Estudo sobre Equações Diferenciais Impulsivas:
Existência de Solução, Estabilidade e Aplicações**

Lenara Ferreira dos Santos

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2021



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Lenara Ferreira dos Santos

**Um Estudo sobre Equações Diferenciais
Impulsivas: Existência de Solução,
Estabilidade e Aplicações**

**Rio Claro
2021**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um Estudo sobre Equações Diferenciais Impulsivas: Existência de Solução, Estabilidade e Aplicações

Lenara Ferreira dos Santos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Rio Claro
2021

S237e Santos, Lenara Ferreira dos
Um estudo sobre equações diferenciais impulsivas :
existência de solução, estabilidade e aplicações / Lenara
Ferreira dos Santos. -- Rio Claro, 2021
128 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas,
Rio Claro
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Matemática. 2. Equações Diferenciais. 3. Sistemas
Impulsivos. 4. Estabilidade. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Lenara Ferreira dos Santos

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPULSIVAS: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO, ESTABILIDADE E APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Prof. Dr. Luciano Aparecido Magrini
Departamento de Matemática - IFSP - São Paulo

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
Departamento de Computação e Matemática - USP - Ribeirão Preto

Rio Claro, 16 de novembro de 2021

À minha família, por todo incentivo, apoio e ensinamentos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por me conceder a possibilidade de escrever este trabalho e concluir o curso, pela determinação, paciência e oportunidades ao longo da minha trajetória.

Aos meus pais e irmã, por todo amor, incentivo e suporte, por acreditarem e, especialmente, por estarem comigo em todos os momentos.

Aos meus queridos amigos que foram essenciais na leveza dos meus dias, sou grata por tantas boas lembranças, risadas e por todo companheirismo.

Agradeço à professora Marta que com toda paciência e carinho esteve sempre disposta a me auxiliar e dedicar o seu tempo a este estudo. Obrigada por ser essa pessoa tão querida e uma profissional tão dedicada.

Agradeço aos meus professores do Instituto Federal de São Paulo, de modo especial, aos professores Luciano, Vânia e Henrique que foram essenciais para a minha caminhada e ingresso na pós-graduação, o incentivo de vocês foi a base para que este trabalho acontecesse.

Aos funcionários da Unesp - Rio Claro, que se fizeram presentes em tantas sextas-feiras de ida ao campus.

Por fim, agradeço a cada pessoa, que teve sua importante contribuição na minha caminhada até aqui, sem dúvida alguma, os momentos compartilhados serão lembrados com muito carinho.

Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.

Leonardo da Vinci

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta.

Carl Friedrich Gauss

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo acerca das Equações Diferenciais Impulsivas (EDIs), que embora um assunto recente, possui interessantes resultados dentro da Análise Matemática e aplicações a fenômenos. Tal estudo consiste em elucidar a definição formal e o processo de evolução de sistemas impulsivos, abordando a existência e unicidade de soluções, bem como a estabilidade tanto em casos com impulsos em tempos pré-fixados quanto impulsos em tempos variáveis, comparando em certas situações com o caso clássico de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Além disso, algumas aplicações em modelos impulsivos são detalhadas ao fim do trabalho, com intuito de exemplificar o tratamento teórico e prático ao qual o trabalho se propõe.

Palavras-chave: Existência de Solução, Sistemas Lineares, Estabilidade, Modelos Impulsivos.

Abstract

In this work we present a study on Impulsive Differential Equations (EDIs), which although it is a recent subject, has interesting results within the Mathematical Analysis and applications to phenomena. This study consists of elucidating the formal definition and evolution process of impulsive systems, addressing the existence and uniqueness of the solutions, as well as the stability both in cases with impulses at pre-fixed times and impulses at variable times, comparing in certain situations with the classic case of Ordinary Differential Equations (ODEs). Furthermore, some applications in impulsive models are detailed at the end of the work, in order to exemplify the theoretical and practical treatment to which the work is proposed.

Keywords: Existence of Solution, Linear Systems, Stability, Impulsive Models.

Lista de Figuras

1.1	Solução $x(t)$ sem impulso, $x(0) = 0, 5$	34
1.2	Solução da EDI no intervalo $[0, 3]$	35
1.3	Solução $x(t)$ da EDO com $x(0) = 1$	36
1.4	Solução da EDI no intervalo $[0, 3]$	37
1.5	Construção de B_{r_1}	40
1.6	Construção de $y(t)$	41
1.7	Construção de $(t_{n_0}, x(t_{n_0}))$	41
1.8	Esboço das soluções da EDO sem impulso.	49
1.9	Solução da equação de Verhulst com impulso.	51
1.10	Semiórbita negativa com condição inicial a	52
2.1	Solução da EDI homogênea (linha sólida).	61
2.2	Solução da EDI não homogênea (linha sólida).	62
2.3	Solução da EDI não homogênea (linha sólida).	63
2.4	Solução do sistema considerando $\alpha = \omega = 1; \beta = 0$	87
2.5	Solução do sistema considerando $\alpha = 2; \omega = 1, 4; \beta = 0, 2$	88
2.6	Solução do sistema considerando $\alpha = 1, 4; \omega = 2; \beta = -0, 2$	88
3.1	Modelo Bicompartimental.	102
3.2	Concentração de droga no trato gastrointestinal.	106
3.3	Concentração de droga no volume aparente.	106
3.4	As curvas (3.8) não têm ponto em comum.	107
3.5	Solução do problema expresso pela EDO sem impulso.	108
3.6	As curvas (3.8) têm intersecção.	108
3.7	Solução $t_0 \leq t \leq t_4$ do sistema com impulsos em tempos variáveis.	110
3.8	Solução do modelo de Gompertz com impulso.	114
3.9	Solução do modelo de Gompertz não periódico	115
3.10	Órbitas do sistema presa-predador sem impulso.	118
3.11	Órbitas γ_c do sistema (3.15) e superfície de impulso $y = kx$	120
3.12	$U(x, kx) = c_0$	121
3.13	Órbita periódica γ_{c_0} do sistema.	121
3.14	A intersecção das curvas ocorre em $T \approx 4, 38$	123
3.15	Órbita da solução impulsiva não periódica.	124

Sumário

Introdução	19
1 Teoria de Existência de Solução	23
1.1 Preliminares	23
1.2 Equações Diferenciais Impulsivas	31
1.3 Existência e Unicidade de Soluções	37
2 Sistemas Impulsivos	53
2.1 Sistemas Lineares	53
2.1.1 Sistemas Não Homogêneos	59
2.1.2 Estabilidade de Soluções	66
2.2 Sistemas Quase-Lineares	89
2.2.1 Estabilidade de Solução	90
3 Aplicações em Modelos com Impulsos	101
3.1 Modelo de Krüger-Thiemer	101
3.1.1 Caso I: impulsos pré-fixados	104
3.1.2 Caso II: impulsos em tempos variáveis	106
3.2 Modelo de Gompertz	110
3.3 Modelo de Lotka-Volterra	115
3.3.1 Caso I: modelo sem impulso	116
3.3.2 Caso II: modelo com impulsos em tempos variáveis	119
4 Considerações Finais	125
Referências	127

Introdução

Segundo a referência [1], a partir do estudo de Cálculo Diferencial e Integral suscitado por Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), o trabalho com equações diferenciais foi impulsionado e diversos ramos da ciência tomaram para si o estudo, buscando descrever fenômenos da natureza a partir desse objeto matemático. Assim, o século XVIII foi marcado por diversas teorias acerca das equações diferenciais na própria Matemática, mas também na Física e na Mecânica.

O estudo das equações diferenciais é objeto de pesquisa de muitos estudiosos até os dias atuais, tanto como modelagem de problemas quanto na análise puramente matemática, uma vez que se relacionam com a modelagem de situações concretas.

Desse modo, a partir da análise de modelos fundamentados em equações diferenciais, é possível fazer aproximações a respeito do comportamento de fenômenos estudados, por meio da modelagem de problemas propostos.

Usualmente, a modelagem de fenômenos é feita a partir de equações diferenciais ordinárias (EDOs), na investigação de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais, relacionando variáveis e parâmetros, a fim de fazer previsões acerca do comportamento desses problemas [1].

Contudo, nessas equações, a previsão depende somente do estado presente e a evolução do fenômeno é contínua, assim, nem sempre descrevem todos os fenômenos naturais, por exemplo, os picos de concentração de medicamentos no organismo com ingestão em tempos variáveis, ou seja, a ingestão ocorre mediante um patamar limite.

No contexto das equações diferenciais, temos alguns fenômenos que não se comportam de modo contínuo, assim, têm como característica a mudança abrupta de estado em determinados momentos de tempo durante seu desenvolvimento [2].

Tais mudanças resultam de perturbações cujo o tempo de duração é insignificante comparado a duração do fenômeno como um todo. Assim, essas perturbações podem ser entendidas como instantâneas, provocando os efeitos aos quais chamamos de impulsos.

No exemplo citado, os picos de concentração de medicamento ocorrem de modo instantâneo e caracterizam os chamados saltos ou impulsos na função que modela o problema impulsivo.

O estudo desses impulsos é descrito por meio das equações diferenciais impulsivas

(EDIs) que serão introduzidas e estudadas ao longo deste trabalho. Estas equações estão presentes em diversas áreas do conhecimento como: dinâmica populacional, biotecnologia, mecânica, farmacocinética e também estão presentes na teoria de impacto [3].

Segundo [2], o estudo acerca das EDIs começou a se tornar popular entre os matemáticos em 1980. Entre os primeiros artigos sobre o assunto está o artigo pioneiro dos matemáticos Vitali Milman e Anatoliy Myshkis. Eles consideraram as EDIs quando estas satisfaziam certa relação espaço-temporal e ainda obtiveram, a partir do estudo clássico de EDOs, os primeiros resultados de estabilidade para soluções de EDIs.

A publicação do artigo possibilitou pesquisas posteriores e culminou em diversos trabalhos sobre o assunto, no qual as EDIs são consideradas um par formado por uma equação diferencial ordinária e uma equação de diferenças satisfazendo os tempos de impulso fixados ou variáveis. Essa abordagem permitiu observar que as soluções desses sistemas são contínuas por parte com descontinuidades nos tempos de impulso, além disso, possibilitou o desenvolvimento da teoria qualitativa das equações diferenciais impulsivas [2].

As referências [2] e [4] discorrem sobre duas vertentes no estudo de equações diferenciais impulsivas. Uma que trata justamente dessa abordagem apresentada por Milman e Myshkis, que culminou em diversos trabalhos e na teoria qualitativa das EDIs, e a outra com influência dos trabalhos de Halanay e Wexler; Pandit e Deo envolvendo equação diferencial utilizando uma derivada de distribuição (incorporando a distribuição Delta de Dirac), nessa vertente os impulsos que ocorrem são pré-fixados, as funções são generalizadas e os resultados das soluções são de variação limitada.

Segundo [5], a noção da distribuição delta de Dirac, ou função impulso unitário, no início do século XX, foi o primeiro registro de sistemas impulsivos, contudo poucas vezes aparece explicitamente nos trabalhos sobre EDIs, uma vez que caracteriza o impulso no sentido de distribuição.

A pesquisa na teoria fundamental e qualitativa das equações diferenciais impulsivas foi estudada por alguns grupos de pesquisadores como D. Bainov, N. Perestyuk, A. Samoilenko, P. Simeonov e V. Lakshmikantham, que são referências importantes no assunto apresentando definições e resultados significativos.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da teoria de equações diferenciais impulsivas, desde os resultados de existência e unicidade de soluções e o estudo de estabilidade para sistemas impulsivos buscando a compreensão a respeito do comportamento das soluções, até as aplicações em modelos matemáticos.

No primeiro capítulo são apresentados conceitos preliminares importantes que darão base para o estudo subsequente, a definição matemática das equações diferenciais impulsivas e suas principais características. Além disso, apresentamos teoremas que garantem a existência e unicidade de soluções das equações estudadas, sendo fundamental para determinação de soluções considerando os impulsos, as quais nos destinamos a trabalhar.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo de sistemas impulsivos lineares, especialmente

acerca da existência e unicidade de soluções e estabilidade, contemplando o estudo de sistemas homogêneos e não homogêneos, e apresentamos uma seção sobre sistemas quase-lineares. Neste capítulo, fazemos ainda o estudo com impulsos em tempos pré-fixados e em tempos variáveis.

Por fim, ao terceiro capítulo compete o estudo de modelos clássicos impulsivos, desde seu contexto histórico de modelagem até suas respectivas soluções e comportamentos no decorrer do tempo, além de uma comparação com o caso sem impulsos, evidenciando assim o efeito impulsivo sobre o comportamento de soluções.

1 Teoria de Existência de Solução

Neste capítulo introduziremos as equações diferenciais impulsivas, faremos alguns exemplos e provaremos resultados referentes à existência e unicidade de solução. Antes disso, enunciaremos os conceitos e resultados de análise e de equações diferenciais ordinárias necessárias ao entendimento deste texto.

1.1 Preliminares

No decorrer do desenvolvimento da teoria sobre equações diferenciais impulsivas (EDI) utilizaremos resultados e definições importantes que serão apresentados nessa seção, a qual tem referências em [6], [7] e [8].

Definição 1.1. Espaço Métrico

Um espaço métrico é um par (X, d) , no qual X é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em X (ou a função distância em X), isto é, a função definida em $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$ temos:

$$(M1) \quad d \text{ é um valor real, finito e não negativo.}$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \text{ se, e somente se, } x = y.$$

$$(M3) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$(M4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Definição 1.2. Ponto Fixo

Seja (X, d) um espaço métrico e a função $T : X \rightarrow X$, então $x \in X$ é denominado ponto fixo de T se

$$T(x) = x.$$

Definição 1.3. Contração

Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $T : X \rightarrow X$ é chamada contração sobre X , se existe um número real $\alpha < 1$, tal que:

$$d(T(x), T(y)) < \alpha \cdot d(x, y), \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Definição 1.4. Sequência de Cauchy

Seja (X, d) um espaço métrico, uma sequência de elementos de X , (a_n) é dita uma sequência de Cauchy se, dado um número real $\varepsilon > 0$ pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$d(a_m, a_n) < \varepsilon, \quad m, n > n_0.$$

Teorema 1.5. Critério de Convergência de Cauchy¹

Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

Definição 1.6. Espaço métrico completo

Um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M .

Teorema 1.7. Teorema do Ponto Fixo de Banach²

Considere um espaço métrico (X, d) , sendo $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja $T : X \rightarrow X$ uma contração sobre X . Então T tem precisamente um ponto fixo.

Proposição 1.8. Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.

Definição 1.9. Dada uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que D é um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, uma solução para o problema de valor inicial (PVI),

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é uma função $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo I um intervalo contendo t_0 , de tal modo que $x(t_0) = x_0$, $(t, x(t)) \in D$ e $x'(t) = f(t, x(t))$, $\forall t \in I$.

Teorema 1.10. Teorema de Picard

Seja f uma função contínua em $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e assim limitada em R , ou seja, $\|f(t, x)\| \leq c$, para todo $(t, x) \in R$.

Suponha que f satisfaça a condição de Lipschitz sobre R , ou seja, existe uma constante k , tal que para $(t, x), (t, y) \in R$:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \cdot \|x - y\|. \quad (1.1)$$

Então, no intervalo fechado $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, sendo $0 < \beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}$, o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

tem única solução em J .

¹Ver demonstração em [6].

²Ver demonstração em [6].

Demonstração. Seja $C(J)$ o espaço métrico das funções contínuas definidas no intervalo J , $t_0 \in J$ e com a métrica do supremo:

$$d(x, y) = \sup_{t \in J} \|x(t) - y(t)\|. \quad (1.3)$$

Temos que $C(J)$ é um espaço métrico completo. Consideremos $C^*(J) \subset C(J)$ consistindo em um subespaço das funções $x \in C(J)$ satisfazendo:

$$\|x(t) - x_0\| \leq c\beta, \quad \forall t \in J. \quad (1.4)$$

O subconjunto $C^*(J)$ é fechado, logo pela Proposição 1.8, é um espaço completo.

De fato, $C^*(J)$ é fechado, pois, seja (x_n) uma sequência convergente em $C^*(J)$, então existe $x^* \in C(J)$ tal que $x_n \rightarrow x^*$, isto significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$d(x_n, x^*) = \|x_n - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Ou seja,

$$\|x_n(t) - x^*(t)\| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \quad \forall t \in J.$$

Como $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^*$ satisfaz (1.4), vem que:

$$\|x_n(t) - x_0\| \leq c\beta, \quad \forall t \in J, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (1.5) e usando a continuidade da norma, obtemos

$$\|x^*(t) - x_0\| \leq c\beta, \quad \forall t \in J.$$

Portanto, x^* satisfaz (1.4), concluindo que $x^* \in C^*(J)$ e, conseqüentemente, tem-se $C^*(J)$ fechado.

A partir disso, vamos resolver o PVI (1.2), o que equivale pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a resolver a equação integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in J.$$

Definimos então:

$$\begin{aligned} T & : C^*(J) \rightarrow C(J). \\ T(x(t)) & := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in J. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Como x e T são contínuas, a integral existe e T está bem definida. Além disso,

$$\begin{aligned} \|T(x(t)) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t c ds = c \cdot |t - t_0| \leq c\beta. \end{aligned}$$

Ou seja, $\|T(x(t)) - x_0\| \leq c\beta$, satisfazendo (1.4). Isso implica que $T(C^*(J)) \subset C^*(J)$ e podemos considerar:

$$T : C^*(J) \rightarrow C^*(J).$$

Mostremos que T é uma contração:

$$\begin{aligned} \|T(x(t)) - T(y(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} \int_{t_0}^t k \cdot \|x(s) - y(s)\| ds \\ &\stackrel{(1.3)}{\leq} \int_{t_0}^t k \cdot \sup \|x(s) - y(s)\| ds \\ &= k \cdot \sup \|x(s) - y(s)\| \int_{t_0}^t ds \\ &\stackrel{(1.3)}{\leq} k \cdot |t - t_0| \cdot d(x, y) \\ &\leq k \cdot \beta \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in C^*(J). \end{aligned}$$

Como $0 < \beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}$, segue que $k\beta < 1$ e T é uma contração em $C^*(J)$.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, T tem um único ponto fixo $x \in C^*(J)$, ou seja, uma única função x contínua em J satisfazendo $x(t) = T(x(t))$, $\forall t \in J$.

Logo, de (1.6), temos:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in J.$$

a qual corresponde à solução do PVI (1.2). □

O teorema anterior garante a existência de solução em um intervalo J , é natural pensarmos na possibilidade de estender a solução em um intervalo maior.

Definição 1.11. Continuação de solução

Seja $f(t, y)$ uma função contínua e $y = y(t)$ uma solução de:

$$y' = f(t, y). \tag{1.7}$$

definida no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha)$ com $\alpha > 0$.

Dada uma solução $y(t)$ de (1.7) definida no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha)$ com $\alpha > 0$, diz-se que uma solução $x(t)$ de (1.7) definida em $[t_0, t_0 + \beta)$ é uma continuação própria à direita de $y(t)$, se $\beta > \alpha$ e $y(t) = x(t)$, para $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$.

A continuação à esquerda é definida de modo análogo.

Definição 1.12. Intervalo Maximal

O intervalo $[t_0, t_0 + \alpha)$ é dito intervalo maximal à direita de existência de $y(t)$, se $y(t)$ está definida em $[t_0, t_0 + \alpha)$ e não tem nenhuma continuação própria à direita.

O intervalo maximal de existência à esquerda é definido de modo similar e o intervalo maximal de existência é o intervalo que é tanto maximal à direita quanto à esquerda.

Definição 1.13. Solução Máxima

Sejam E um conjunto aberto do \mathbb{R}^2 , $U(t, u)$ uma função contínua no plano, com $(t, u) \in E$. Uma solução máxima $u = u^*(t)$ de:

$$\begin{cases} u' = U(t, u), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

é a solução do sistema no intervalo maximal de existência tal que se $u(t)$ é uma solução qualquer do sistema, então:

$$u(t) \leq u^*(t),$$

no intervalo comum de existência de u, u^* .

Teorema 1.14. Comparação de soluções

Seja E um conjunto aberto do \mathbb{R}^2 , $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ e $g \in C(E, \mathbb{R})$. Suponha que $[t_0, t_0 + a]$ é o maior intervalo no qual a solução maximal $r(t)$ exista para o sistema:

$$\begin{cases} u' = g(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Seja $m \in C((t_0, t_0 + a), \mathbb{R})$, $(t, m(t)) \in E$ para $t \in [t_0, t_0 + a]$, $m(t_0) < u_0$ e,

$$Dm(t) \leq g(t, m(t)),$$

com $t \in [t_0, t_0 + a]$ e sendo $Dm(t)$ a derivada em t de $m(t)$.

Então:

$$m(t) \leq r(t), \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

A prova desse teorema foi omitida, mas pode ser encontrada em [9].

Definição 1.15. Matriz Solução

Consideremos o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} X' = A(t) \cdot X, \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Se $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ são n soluções linearmente independentes de (1.9), então toda solução $X(t)$ pode ser escrita da forma:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t).$$

Seja $\bar{X}(t)$ a matriz $n \times n$, cujas colunas são $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, então as soluções de (1.9) podem ser expressas por:

$$X(t) = \bar{X}(t) \cdot C,$$

em que

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Assim, uma matriz $\bar{X}(t)$ $n \times n$ é chamada matriz solução de (1.9), se suas colunas formam um conjunto de n soluções linearmente independentes de (1.9).

Definição 1.16. Traço de uma matriz

Para uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, o traço de A é definido como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja: $t_r(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Teorema 1.17. Fórmula de Liouville

Seja $X = X(t)$ matriz solução $n \times n$ de:

$$X' = A(t) \cdot X,$$

sendo $A(t)$ uma matriz $n \times n$, cujas entradas são funções contínuas definidas em J .

Defina $D(t) = \det(X(t))$, $t \in J$.

Então, no intervalo J , temos:

$$D(X(t)) = D(X(t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^t t_r \cdot A(s) ds}, \quad t \in J. \quad (1.10)$$

Demonstração. Consideremos $A(t) = (a_{ij}(t))$, $i = 1, \dots, n$. Seja $X(t)$ a matriz solução, assim $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$. Podemos reescrever a expressão utilizando a fórmula de

multiplicação de matrizes, tal que:

$$x'_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot x_{k,j}. \quad (1.11)$$

Temos que $D(X(t)) = \det(X(t))$, derivando a expressão e utilizando a regra de diferenciação para determinantes (Fórmula de Leibniz), segue que:

$$D'(X(t)) = \det \begin{pmatrix} x'_{1,1} & \cdots & x'_{1,n} \\ x_{2,1} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} + \cdots + \det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n} \\ x'_{n,1} & \cdots & x'_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Ou ainda: $D'(t) = \sum_{i,j=1}^n \det(X_i)$, sendo X_i a matriz obtida substituindo a i -ésima linha de $X(t)$ pela suas entradas derivadas.

Observemos que, por (1.11), as i -ésimas linhas podem ser escritas como:

$$\det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{i,1} & \cdots & x'_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot x_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot x_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}.$$

E ainda, podemos realizar as seguintes operações de linha (sendo R_i a notação para a i -ésima linha):

$$R_i - a_{i,1}R_1 - a_{i,2}R_2 - \cdots - a_{i,i-1}R_{i-1} - a_{i,i+1}R_{i+1} - \cdots - a_{i,n}R_n.$$

assim ao fim do procedimento teremos:

$$(a_{i,i}x_{i,1}, a_{i,i}x_{i,2}, \cdots, a_{i,i}x_{i,n}).$$

Exemplificando esse procedimento, com um elemento, observe:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot x_{k,1} - a_{i,1}x_{1,1} - a_{i,2}x_{2,1} - \cdots - a_{i,n}x_{n,1} = a_{i,i}x_{i,1}.$$

É importante ressaltar que essa construção não altera o valor do determinante. Obte-

mos, então:

$$\det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,i}x_{i,1} & \cdots & a_{i,i}x_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} = a_{i,i} \cdot \det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i,1} & \cdots & x_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Aplicando em (1.12),

$$\begin{aligned} D'(X(t)) &= a_{1,1} \cdot \det(X(t)) + \cdots + a_{n,n} \cdot \det(X(t)) = \det(X(t)) \cdot \sum_{k=1}^n a_{k,k}. \\ \Rightarrow D'(X(t)) &= \det(X(t)) \cdot T_r(A). \end{aligned}$$

E ainda:

$$\begin{aligned} T_r(A) &= \frac{D'(X(t))}{\det(X(t))} = \frac{\det'(X(t))}{\det(X(t))}. \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t T_r(A(s)) ds &= \int_{t_0}^t \frac{\det'(X(s))}{\det(X(s))} ds. \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t T_r(A(s)) ds &= \ln(\det(X(t))) - \ln(\det(X(t_0))) = \ln \left(\frac{\det(X(t))}{\det(X(t_0))} \right). \\ \Rightarrow e^{\int_{t_0}^t T_r(A(s)) ds} &= \left(\frac{\det(X(t))}{\det(X(t_0))} \right). \\ \Rightarrow \det(X(t)) &= \det(X(t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^t T_r(A(s)) ds}. \end{aligned}$$

□

Definição 1.18. Sistema autônomo

No estudo dos sistemas de EDOs tem-se, ainda, o caso em que a função f não depende explicitamente de t , o chamado sistema autônomo, e representamos:

$$x' = f(x), \tag{1.13}$$

sendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 , com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

Definição 1.19. Órbita e Espaço de Fase

Consideremos a equação autônoma (1.13), então f é denominada campo de vetores. As imagens das soluções, isto é, $\{x(t) : t \in I\}$, sendo I intervalo maximal de existência, são chamadas órbitas.

Denotamos por $\gamma(\bar{x}) = \{x(t) : t \in I \text{ e tal que } x(\bar{t}) = \bar{x}, \text{ para algum } \bar{t} \in I\}$, a órbita por $\bar{x} \in \Omega$ e Ω é chamado espaço de fase.

Finalizada a seção das preliminares, iniciaremos a teoria sobre equações diferenciais impulsivas.

1.2 Equações Diferenciais Impulsivas

Nesta seção apresentaremos as definições básicas e alguns exemplos interessantes sobre EDI, com referência em [10], [11] e [12].

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Suponhamos que para cada $k = 1, 2, \dots$, $\tau_k \in C(\Omega, (0, \infty))$, com $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$.

Um problema de valor inicial impulsivo é dado pelo sistema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k, \\ x(t_0^+) = x_0, & t_0 \geq 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

de modo que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua por partes, com descontinuidades de primeira espécie³ em $t = \tau_k$ e $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sendo:

$$\Delta x(t) = x(t_k^+) - x(t_k) \quad , \quad x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t) \quad \text{e} \quad x(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t),$$

ou seja, considerando x contínua à esquerda nestes pontos.

Um sistema de EDI, segundo classificação de [10], pode ter os momentos de impulso pré-fixados ou com tempo variável e, ainda, ser um sistema autônomo com impulso.

Quando os impulsos ocorrem em tempos variáveis, definimos uma sequência $\{S_k\}$ de superfícies, tais que $S_k : t = \tau_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ em que

$$\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty.$$

Tais sistemas com impulso variável são mais complicados em relação os de impulsos em tempos pré-fixados. Notemos que os momentos de impulso variáveis dependem da solução, ou seja, $\tau_k = \tau_k(x)$ para cada k , assim soluções que comecem em tempos diferentes terão diferentes pontos de descontinuidade.

Além disso, há a possibilidade que uma solução atinja a mesma superfície $t = \tau_k(x)$ várias vezes, ocorrendo o chamado fenômeno de batimentos. Ou ainda, soluções distintas

³Um ponto de descontinuidade diz-se de primeira espécie se os limites laterais neste ponto existem.

podem coincidir após um tempo, comportando-se como uma única solução, dando origem ao fenômeno de confluência.

Definição 1.20. Uma função $x : [t_0, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, $a > 0$ é solução de (1.14) se:

- i. $(t, x(t)) \in D$, para $t \in [t_0, t_0 + a)$;
- ii. $x(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz $x'(t) = f(t, x(t))$ para $t \in [t_0, t_0 + a)$ e $t \neq \tau_k(x(t))$;
- iii. Se $t \in [t_0, t_0 + a)$ e $t = \tau_k(x(t))$, então $x(t^+) = x(t) + I_k(x(t))$, vamos impor que

$$x(t) = \lim_{s \rightarrow t^-} x(s),$$

e que existe δ tal que $s \neq \tau_j(x(s))$, $\forall j$, $t < s < t + \delta$.

Considerando um sistema de equações com impulsos pré-fixados no intervalo $[t_0, a]$, com p momentos de impulsos t_i , $i = 1, 2, \dots, p$, com $t_0 < t_1 < \dots < t_p < a$ e $f(t, x(t))$ lipschitziana com respeito a segunda coordenada, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k; \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & t = t_k; \quad k = 1, 2, \dots, p \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Como consideramos um intervalo limitado $[t_0, a]$ com uma quantidade finita de impulsos, podemos trabalhar com PVI's clássicos de EDO.

- $t \in (t_0, t_1]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Picard 1.10, possui solução única neste intervalo.

- $t = t_1$, temos o primeiro impulso $x(t_1^+) = x(t_1) + I_1(x(t_1))$, com o operador I_1 definido em $x(t_1)$.
- $t \in (t_1, t_2]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in (t_1, t_2], \\ x(t_1) = x(t_1^+). \end{cases}$$

Novamente, pelo Teorema de Picard, possui solução única neste intervalo.

- $t = t_2$, ocorre o segundo impulso $x(t_2^+) = x(t_2) + I_2(x(t_2))$, com o operador I_2 definido em $x(t_2)$.

Seguimos o raciocínio até o intervalo $(t_p, a]$, no qual obtemos:

- $t \in (t_p, a]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in (t_p, a], \\ x(t_p) = x(t_p^+). \end{cases}$$

Pelo Teorema de Picard, possui solução única neste intervalo.

Podemos então construir a solução entre os momentos de impulso, a partir da equação integral equivalente ao problema (1.15), pois $x(t)$ é contínua em $[t_0, t_1]$ se é solução de:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds.$$

Isto significa que para $t_0 \leq t \leq t_1$

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))ds.$$

No momento de impulso, temos:

$$x(t_1^+) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))ds + I_1(x(t_1)).$$

Para o intervalo $t_1 < t \leq t_2$, $x(t)$ é solução de:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))ds + I_1(x(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + I_1(x(t_1)). \end{aligned}$$

No instante t_2 de impulso, temos:

$$x(t_2^+) = x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s))ds + I_1(x(t_1)) + I_2(x(t_2)).$$

Consideramos então, que é válida a expressão a seguir, por indução, temos:

$$x(t_p^+) = x_0 + \int_{t_0}^{t_p} f(s, x(s))ds + I_1(x(t_1)) + \cdots + I_p(x(t_p)).$$

Então para o intervalo $t_p < t \leq a$, $x(t)$ é solução de:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t_p} f(s, x(s)) ds + I_1(x(t_1)) + \cdots + I_p(x(t_p)) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{t_0 \leq t_i < t} I_i(x(t_i)). \end{aligned}$$

E assim a solução $x(t)$ do problema impulsivo pode ser escrita por:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{t_0 \leq t_i < t} I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Exemplo 1.21. Consideremos o PVI⁴:

$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \neq k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta x = 1, & t = k, \\ x(0) = 0, 5. \end{cases}$$

A função $f(t, x) = x - t^2 + 1$ é contínua em todo \mathbb{R}^2 , pelo Teorema de Picard, garantimos a existência e unicidade da solução para todo $t \in \mathbb{R}$.

A solução geral da equação $x' = x - t^2 + 1$ (sem impulso) é dada por:

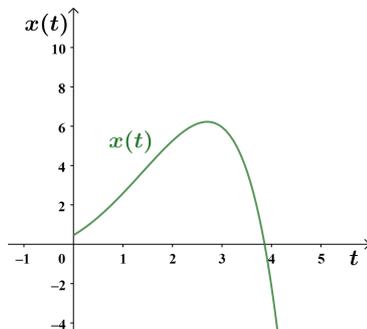
$$x(t) = (t + 1)^2 - ce^t, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Acrescentando a condição inicial em (1.16), a solução é expressa por:

$$x(t) = (t + 1)^2 - 0,5e^t.$$

E a representação gráfica da solução pode ser vista a seguir:

Figura 1.1: Solução $x(t)$ sem impulso, $x(0) = 0, 5$.



Fonte: Elaborada pela autora.

⁴Exemplo extraído de: [11].

Considerando o sistema impulsivo, observamos que os saltos na solução possuem uma unidade de comprimento e podemos calcular os pontos em cada intervalo.

- Se $t \in [0, 1]$, a solução do sistema coincide com a solução da EDO sem impulso, ou seja:

$$x(t) = (t + 1)^2 - 0,5e^t.$$

- Em $t = 1$, ocorre o primeiro impulso e temos:

$$x(1^+) = x(1) + \Delta x(1) = (1 + 1)^2 - 0,5e^1 + 1 = 5 - 0,5e \approx 3,640.$$

- Se $t \in (1, 2]$, a solução é dada por (1.16), considerando uma nova condição inicial $x(1^+) = 5 - 0,5e$, ou seja:

$$x(t) = (t + 1)^2 + (e^{-1} - 0,5)e^t.$$

- Em $t = 2$, há o segundo momento de impulso:

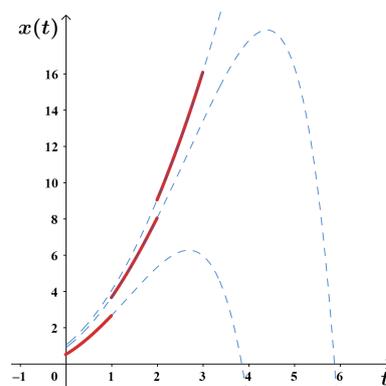
$$x(2^+) = x(2) + \Delta x(2) = (2 + 1)^2 + (e^{-1} - 0,5)e^2 + 1 = 10 + (e^{-1} - 0,5)e^2 \approx 9,0237.$$

- Sendo, $t \in (2, 3]$, então a solução $x(t)$ é expressa por (1.16) com condição inicial $x(2^+) = 10 + (e^{-1} - 0,5)e^2$:

$$x(t) = (t + 1)^2 + (-0,5 + e^{-1} + e^{-2})e^t.$$

Podemos prosseguir dessa forma e determinar a curva que representa a solução no intervalo $[0, t)$. No gráfico a seguir, as linhas sólidas representam a solução do sistema com impulso, enquanto as pontilhadas fazem referência a solução da EDO associada ao problema com as novas condições iniciais em cada intervalo.

Figura 1.2: Solução da EDI no intervalo $[0, 3]$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 1.22. Consideremos a mesma função do exemplo (1.21), note que no sistema a seguir o impulso é dado em função de x e não mais uma constante:

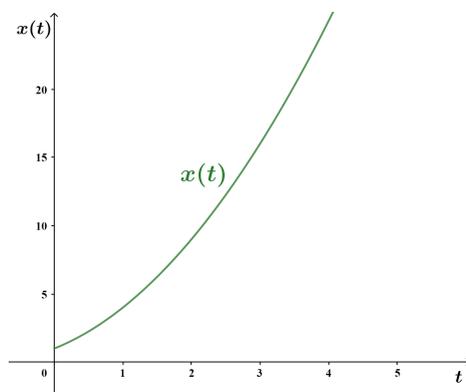
$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \neq k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta x = x - 1, & t = k, \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

A solução geral da EDO sem impulso será (1.16), com a condição inicial $x(0) = 1$, ou seja:

$$x(t) = (t + 1)^2.$$

O gráfico a seguir, ilustra a curva da solução da equação diferencial:

Figura 1.3: Solução $x(t)$ da EDO com $x(0) = 1$.



Fonte: Elaborada pela autora.

- Se $t \in [0, 1]$, a solução do sistema coincide com a EDO sem impulso, ou seja:

$$x(t) = (t + 1)^2.$$

- Em $t = 1$, ocorre o primeiro impulso e temos:

$$x(1^+) = x(1) + \Delta x(1) = (1 + 1)^2 + (1 + 1)^2 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

- Se $t \in (1, 2]$, a solução é dada por (1.16), com uma nova condição inicial $x(1) = 7$, ou seja:

$$x(t) = (t + 1)^2 + 3e^{t-1}.$$

- Em $t = 2$, há o segundo momento de impulso:

$$x(2^+) = x(2) + \Delta x(2) = (2 + 1)^2 + 3e^{2-1} + (2 + 1)^2 + 3e^{2-1} - 1.$$

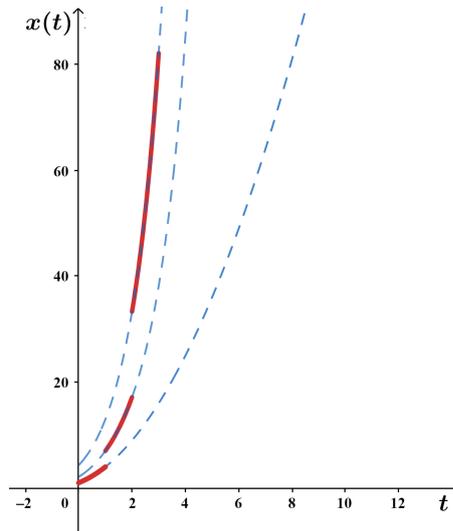
$$x(2^+) = 17 + 6e \approx 33,3096.$$

- Quando $t \in (2, 3]$, com a condição inicial $x(1) = 17 + 6e$, a solução é expressa por:

$$x(t) = (t + 1)^2 + (8e^{-2} + 6e^{-1})e^t.$$

A seguir, a solução do sistema impulsivo (1.17) é expressa graficamente (linhas sólidas).

Figura 1.4: Solução da EDI no intervalo $[0, 3]$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Entretanto, para o estudo de existência e unicidade de solução faz-se necessário mais critérios, além da continuidade de f , é preciso estabelecer, condições sobre t_i e f garantindo a existência de solução para o sistema estudado.

1.3 Existência e Unicidade de Soluções

Nesta seção trataremos a respeito da existência (local e global), continuidade e unicidade das soluções, de modo a estabelecer condições que garantam que certas funções satisfaçam o sistema de equações diferenciais impulsivas.

O sistema impulsivo estudado é o (1.14), na seção anterior, no qual já definimos a solução e as características sobre f e I_k .

Definição 1.23. Um ponto (t, x) é chamado ponto regular se $t \neq \tau_k(x)$, $\forall k \geq 1$. Caso contrário, é chamado ponto irregular.

Teorema 1.24. *Suponha que:*

- $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua para $t \neq \tau_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ e, ainda, para cada $(t, x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existe uma função $l \in L_{loc}^1$ ⁵ tal que em uma pequena vizinhança

⁵ $L_{loc}^1 = \{l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é localmente integrável}\}$ e é localmente integrável se for integrável em cada intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} .

de (t, x) ,

$$|f(s, y)| \leq l(s). \quad (1.18)$$

ii. Para qualquer k , $t_1 = \tau_k(x_1)$ existe um valor $\delta > 0$, tal que $t \neq \tau_k(x)$, para todo $0 < t - t_1 < \delta$ e $|x - x_1| < \delta$.

Então, para cada $(t_0, x_0) \in D$, existe uma solução $x : [t_0, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.14) para algum $\alpha > 0$.

Demonstração. Se $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, ou seja, t_0 é ponto regular então $x(t)$ é solução da EDO (desconsiderando o impulso), o resultado segue do teorema de existência de soluções para um problema de valor inicial (PVI) ordinário.

Se $t_0 = \tau_k(x_0)$, ou seja, ponto irregular, para algum $k \geq 1$, consideramos:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases}$$

A partir das hipóteses assumidas inicialmente (i) e (ii), segue que para $t_0 = \tau_k(x_0)$ existe $\delta > 0$ tal que $t \neq \tau_k(x)$ para cada (t, x) de modo que seja satisfeito que $0 < t - t_0 < \delta$ e $|x - x_0| < \delta$, assim fica garantido que a solução não encontra a superfície S_k , em um intervalo suficientemente pequeno.

Uma vez que $\tau_i(x) < \tau_j(x)$ para $i < j$, então $t \neq \tau_j(x(t))$ para $j \neq k$ e t suficientemente perto de t_0 . □

Podemos ainda, estabelecer alguns critérios a respeito de $\tau_k(x)$ necessários para garantir a existência da solução, descritos no teorema a seguir.

Teorema 1.25. *Suponha que:*

i. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

ii. $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ é diferenciável, $\forall k = 1, 2, \dots$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

iii. Se $t_1 = \tau_k(x_1)$ para algum $(t_1, x_1) \in D$ e $k \geq 1$ então existe um $\delta > 0$ tal que:

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t, x) \neq 1,$$

para $(t, x) \in D$ tal que $|x - x_1| < \delta$ e $0 < t - t_1 < \delta$.

Então para cada $(t_0, x_0) \in D$, existe uma solução $x : [t_0, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.14) para algum $\alpha > 0$.

Demonstração. Se $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, o resultado segue conforme a demonstração do Teorema 1.24. No entanto, se temos $t_0 = \tau_k(x_0)$, para algum $k \geq 1$ e $x(t)$ solução do sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases}$$

Definimos $\gamma(t) = t - \tau_k(x(t))$. Assim,

$$\gamma(t_0) = t_0 - \tau_k(x(t_0)) = t_0 - \tau_k(x_0) = t_0 - t_0 = 0.$$

E derivando $\gamma(t)$, obtemos por (ii):

$$\gamma'(t) = 1 - \frac{\partial \tau_k x(t)}{\partial x} \cdot x'(t) = 1 - \frac{\partial \tau_k x(t)}{\partial x} \cdot f(t, x(t)).$$

Pela condição (iii), $\gamma' \neq 0$, em uma vizinhança pequena em torno de t_0 .

Assim $\gamma(t)$ é estritamente crescente (ou decrescente) nessa vizinhança, e ainda, segue que $t \neq \tau_k(x(t))$, em $0 < t - t_0 < \delta$, para algum $\delta > 0$. Conforme a demonstração do Teorema 1.24, $t \neq \tau_j(x(t))$ para $j \neq k$ e t suficientemente perto de t_0 , logo, $x(t)$ é uma solução do problema (1.14). □

Com respeito a existência de continuação ou prolongamento de solução do sistema (1.14), pode-se observar, sob certas condições, que as conclusões são as mesmas que do caso clássico de EDO, isto é, para uma solução x de (1.14) com intervalo maximal $[t_0, t_0 + a]$, se $a < \infty$, então a solução se aproxima da fronteira de Ω ou $|x(t)|$ fica ilimitada quando $t \rightarrow (t_0 + a)^-$.

Teorema 1.26. *Suponha que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e*

i. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

ii. $I_k \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\tau_k \in C(\Omega, (0, \infty))$, $k \geq 1$.

Então, para qualquer solução $x(t)$ do sistema (1.14), com um intervalo limitado $[t_0, b)$ como intervalo maximal de existência, temos:

$$\lim_{t \rightarrow b^-} |x(t)| = \infty,$$

desde que uma das seguintes condições esteja satisfeita:

a) para qualquer $k \geq 1$, $t_1 = \tau_k(x_1)$ implica a existência de um valor $\delta > 0$, tal que $t \neq \tau_k(x)$, para todo (t, x) com $0 < t - t_1 < \delta$ e $|x - x_1| < \delta$.

b) para todo $k \geq 1$, $t_1 = \tau_k(x_1)$ implica que $t_1 \neq \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$, para todo $j \geq 1$.

c) $\tau_k \in C^1(\Omega, (0, \infty))$ para todo $k \geq 1$ e $t_1 = \tau_k(x_1)$ implica $t_1 = \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$ para algum $j \geq 1$ e:

$$\frac{\partial \tau_k(x_1^+)}{\partial x} \cdot f(t_1, x_1) \neq 1,$$

sendo: $x_1^+ = x_1 + I_k(x_1)$.

Demonstração. Suponhamos que a conclusão seja falsa. Neste caso, existe uma sequência (t_n) , com $t_n \geq t_0$, com $t_n < t_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x^*$, para algum $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Para qualquer $(t, x) \in D$ e $t > 0$ definimos:

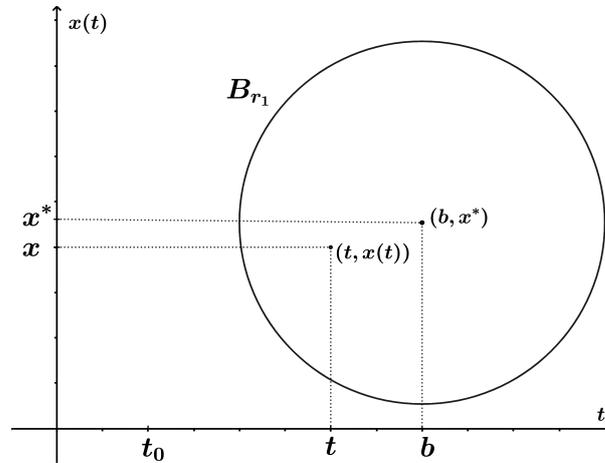
$$B_r(t, x) = \{(s, y) \in D : |s - t| \leq r, |y - x| \leq r\}.$$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}.$$

Vamos assumir que o ponto (b, x^*) é regular, ou seja, $b \neq \tau_k(x^*), \forall k \geq 1$.

Então existe $r_1 > 0$ tal que todo $(t, x) \in B_{r_1}(b, x^*)$, é ponto regular, pois τ_k é contínua em x e crescente em k .

Figura 1.5: Construção de B_{r_1} .



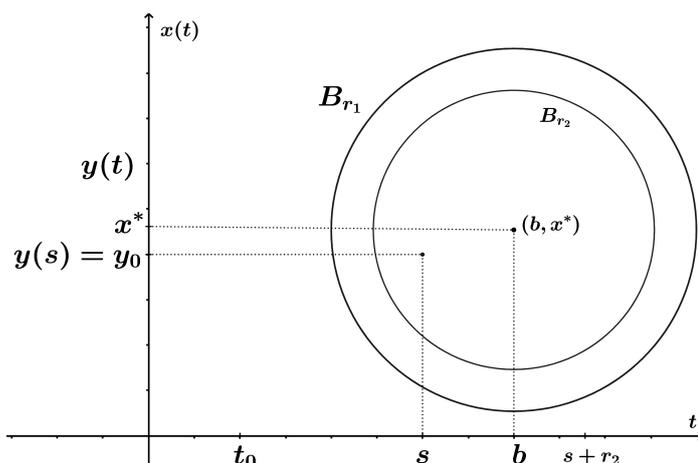
Fonte: Elaborada pela autora.

Como f é contínua, existe $r_2 > 0$, com $r_2 < r_1$, tal que o problema:

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), \\ y(s) = y_0, \end{cases} \quad (1.19)$$

tem solução $y(t) \in B_{r_1}(x^*)$ para $t \in [s, s + r_2]$ para qualquer s fixado, $s \in [t_0, b)$, e $y_0 \in B_{r_2}(x^*)$.

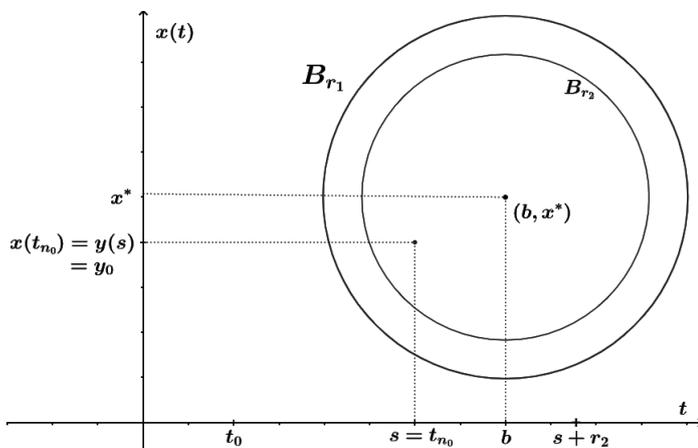
Além disso, qualquer solução $y(t)$ de (1.19) com $t_0 \leq s < b$ e $y_0 \in B_{r_2}(x^*)$ satisfaz $y(t) \in B_{r_1}(x^*)$ para $t \in [s, s + r_2]$.

Figura 1.6: Construção de $y(t)$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Escolhemos n_0 tal que $(t_{n_0}, x(t_{n_0})) \in B_{r_2}(b, x^*)$. Como, $(t_{n_0}, x(t_{n_0}))$ é regular, $x(t)$ é uma solução de (1.19) com $s = t_{n_0}$ e $y_0 = x(t_{n_0})$, ou $[t_{n_0}, t^*]$, sendo t^* o primeiro momento depois de t_{n_0} para $(t, x(t))$ ser um ponto irregular.

Pela escolha de $r_2 > 0$, temos que para $t \in [t_{n_0}, t^*]$, $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^*)$ e assim $(t^*, x(t^*))$ também é regular.

Figura 1.7: Construção de $(t_{n_0}, x(t_{n_0}))$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Consequentemente, $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^*)$ e é regular, então $x(t)$ satisfaz (1.19) para todo $t \in [t_{n_0}, b)$.

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x^*,$$

e $x(t)$ pode ser estendida à direita de b , o que é uma contradição, pois supomos $[t_0, b)$ intervalo maximal. Esse argumento será repetido no decorrer da demonstração

Suponha agora que (b, x^*) seja ponto irregular, ou seja, existe $k \geq 1$, tal que $b = \tau_k(x^*)$. Consideremos $x^+ = x^* + I_k(x^*)$. Devemos analisar as três condições do enunciado.

Sendo válido o item (a.) podemos encontrar $r_3 > 0$, $r_3 < r_1$, tal que $t \neq \tau_k(x)$ para todo $(t, x) \in B_{r_3}(b, x^*)$. Podemos escolher r_4 com $r_4 < r_3$, tal que $t \neq \tau_j(x)$ para todo $j \geq 1$ e $(t, x) \in B_{r_4}(b, x^*)$.

Novamente o problema (1.19) tem solução $y(t) \in B_{r_3}(x^*)$, para $t \in [s, s + r_4]$ para todo s fixado com $s \in [t_0, b)$ e $y_0 \in B_{r_4}$ para $t \in [s, s + r_4]$.

Além disso, qualquer solução $y(t)$ do sistema (1.19) com $t_0 \leq s < b$ e $y_0 \in B_{r_4}$ satisfaz $y(t) \in B_{r_4}$ para $t \in [s, s + r_4]$.

Analogamente ao anterior, escolhemos n_0 , de modo que $(t_{n_0}, x(t_{n_0})) \in B_{r_4}(b, x^*)$. Como $(t_{n_0}, x(t_{n_0}))$ é regular, $x(t)$ é solução do sistema com $s = t_{n_0}$ e $y_0 = x(t_{n_0})$, ou $[t_{n_0}, t^*]$, sendo t^* o primeiro momento depois de t_{n_0} para que $(t, x(t))$ seja um ponto irregular.

Temos $(t, x(t)) \in B_{r_4}(b, x^*)$ para $[t_{n_0}, t^*]$, ou seja, $(t^*, x(t^*))$ também é regular.

Como $(t, x(t)) \in B_{r_4}(b, x^*)$ e é regular, segue que $x(t)$ é solução de (1.19) para todo $t \in [t_{n_0}, b]$.

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x^+,$$

e $x(t)$ pode ser estendida à direita de b , o que é uma contradição, pois $[t_0, b)$ é maximal.

Sendo o item (b.) satisfeito, então $b = \tau_j(x^+)$ para todo $j \geq 1$. Podemos provar que existe $r_1 > 0$, tal que $t \neq \tau_j(x)$, $j \geq 1$ e $(t, x) \in B_{r_1}(b, x^+)$.

De modo semelhante aos casos anteriores, podemos encontrar r_2 e $0 < r_2 < r_1$, tal que para cada solução $y(t)$ de (1.19) com $t_0 \leq s < b$ e $y_0 \in B_{r_2}(x^+)$, temos que $y(t) \in B_{r_1}(x^+)$, para $t \in [s, s + r_2]$.

Como $I_k(x)$, $\tau_k(x)$ são contínuas e $b = \tau_k(x^*)$, podemos encontrar r_3 e $0 < r_3 < r_2$, tal que $[x + I_k(x)] \in B_{r_2}(x^+)$, para todo $x \in B_{r_3}(x^*)$ e $t \neq \tau_j(x)$, para todo $(t, x) \in B_{r_3}(b, x^*)$ e $j \neq k$.

Então, existe r_4 com $0 < r_4 < r_3$ tal que dada qualquer solução $y(t)$ de (1.19), com $t_0 \leq s < b$ e $y_0 \in B_{r_4}(x^*)$, temos que $y(t) \in B_{r_3}(x^*)$ para $t \in [s, s + r_4]$.

Agora, fixando n_0 tal que $(t_{n_0}, x(t_{n_0})) \in B_{r_4}(b, x^*)$, temos duas possibilidades:

- (1) $(t, x(t))$ não é ponto irregular, para $x(t) \in B_{r_3}(x^*)$ e $t \geq t_{n_0}$. Ou seja, é regular e $x(t)$ é solução de (1.19) para todo $t \in [t_{n_0}, b)$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x^*,$$

e $x(t)$ pode ser estendida à direita de b , o que é uma contradição.

- (2) $(t^*, x(t^*))$ é irregular com $x(t^*) \in B_{r_3}(x^*)$ para algum $t_{n_0} \leq t < b$.

Assim, $x(t)$ satisfaz $t^* = \tau_k(x(t^*))$ e:

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t^{*+}) = y_0, \end{cases} \quad (1.20)$$

para $t \in (t^*, t^* + \delta)$, para algum $\delta > 0$ pequeno, pelo item (iii.) do Teorema 1.24, sendo, $y_0 = x(t^*) + I_k(x(t^*))$.

Desde que $x(t^*) \in B_{r_3}(x^*)$, $y_0 \in B_{r_2}(x^+)$, por construção. Como $(t, x(t))$ é regular quando $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^+)$, então, pelo mesmo argumento dos casos anteriores, $x(t) \in B_{r_1}(x^+)$ e $(t, x(t))$ é regular para todo $t \in [t^*, b)$, logo o

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = y,$$

para algum $y \in B_{r_1}(x^+)$, o que é uma contradição.

Por fim, sendo satisfeito o item (c.) do enunciado, temos $b = \tau_j(x^+)$, para algum $j \geq 1$.

Escolhemos, $r_1 > 0$, tal que $t \neq \tau_i(x)$ e $\frac{\partial \tau_j(x)}{\partial x} \cdot f(t, x) \neq 1$, para todo $(t, x) \in B_{r_1}(b, x^+)$ e $i \neq j$.

Assim, escolhemos $r_2 > 0$, com $r_2 < r_1$, tal que a solução $y(t)$ do sistema (1.19) com $t_0 \leq s \leq b$ e $y_0 \in B_{r_2}(x^+)$ satisfaça $y(t) \in B_{r_1}(x^+)$ para todo $t \in [s, s + r_2]$.

Como $b = \tau_k(x^*)$, sendo τ_i, I_i contínuas, encontramos $r_3 > 0$, $r_3 < r_2$ tal que $(t, x) \in B_{r_3}(b, x^*)$, implica que $(t, x + I_k(x)) \in B_{r_2}(b, x^+)$ e $t \neq \tau_i(x)$, $i \neq k$.

Então escolhemos $r_4 > 0$, $r_4 < r_3$ tal que qualquer solução $y(t)$ de (1.19) com $t_0 \leq s \leq b$ e $y_0 \in B_{r_4}(x^*)$ satisfaz $y(t) \in B_{r_3}(x^*)$, para todo $t \in [s, s + r_4]$.

Fixando n_0 tal que $(t_{n_0}, x(t_{n_0})) \in B_{r_4}(b, x^*)$, temos duas possibilidades:

- (1) $(t, x(t))$ não é ponto irregular, para $x(t) \in B_{r_3}(x^*)$ e $t_{n_0} \leq t < b$. Ou seja, é regular e $x(t)$ é solução de (1.19) para todo $t \in [t_{n_0}, b)$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x^*,$$

e $x(t)$ pode ser estendida à direita de b , o que é contradição.

- (2) $(t^*, x(t^*))$ é irregular com $x(t^*) \in B_{r_3}(x^*)$ e $t_{n_0} \leq t^* < b$.

Logo, $x(t)$ satisfaz $t^* = \tau_k(x(t^*))$, desde que $t^* \neq \tau_i(x(t^*))$ para $i \neq k$. E ainda, $t^* = \tau_i(y_0)$, para $y_0 = x(t^*) + I_k(x(t^*))$ e $i \neq j$, sendo $y_0 \in B_{r_2}(x^+)$.

Segue então pela condição (c.) que $t^* = \tau_j(y_0)$. E ainda, $x(t)$ satisfaz o sistema (1.20), para $t \in (t^*, t^* + \delta)$ com $\delta > 0$ pequeno.

Seja $t^* < s < b$ tal que $(t, x(t))$ é um ponto regular para $t \in (t^*, s)$, mas $(s, x(s))$ é irregular, então $(t, x(t)) \in B_{r_1}(b, x^+)$, para todo $t \in [t^*, s]$ e $s = \tau_j(x(s))$, pela escolha de r_1 .

Definimos: $\sigma(t) = t - \tau_j(x(t))$, de modo que:

$$\sigma'(t) = 1 - \frac{\partial \tau_j(x(t))}{\partial x} \cdot f(t, x) \neq 0,$$

para todo $t \in [t^*, s]$.

Contudo, isso é uma contradição, pois,

$$\sigma(t^{*-}) = \sigma(s) = s - \tau_j(x(s)) = s - s = 0.$$

Assim, $(t, x(t)) \in B_{r_1}(t, x^+)$ não é ponto irregular para todo $t \in [t^*, b]$. A partir do argumento usado anteriormente,

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = y,$$

para algum $y \in B_{r_1}(x^+)$, o que é novamente uma contradição.

□

Podemos ainda estabelecer a existência global da solução de um sistema impulsivo. Para determinar tais condições, consideremos o PVI impulsivo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = I_k(x(t)), & t = \tau_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Sendo: $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tau_k : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ com $\tau_k(x) \geq \tau_{k+1}(x)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.27. Existência Global

Suponha as hipóteses do Teorema 1.26, além disso, que não há fenômeno pulso no sistema (1.21) e:

$$|f(t, x)| \leq g(t, |x|), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \quad (1.22)$$

$$|x + I_k(x)| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.23)$$

sendo $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $g(t, u)$ é não decrescente em u para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Seja $r(t) = r(t, t_0, u_0)$ a solução maximal de:

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \geq 0, \quad (1.24)$$

no intervalo $[t_0, \infty)$.

Então o maior intervalo de existência de qualquer solução $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ de (1.21) para cada $|x_0| \leq u_0$ é $[t_0, \infty)$.

Demonstração. Consideremos $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ uma solução do PVI (1.21), de modo que $|x_0| \leq u_0$, no intervalo maximal $[t_0, \beta)$, $\beta < \infty$.

Seja $m(t) = |x(t)|$ com $t_0 \leq t < \beta$. Como $\tau_k(x) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e não existe fenômeno pulso para o PVI, segue que $x(t)$ encontra um número finito de superfícies S_i em $t_0 \leq t < \beta$.

Sejam t_i , $i = 1, 2, \dots, p$ os momentos que $x(t)$ toca as superfícies e $D_-m(t)$ a derivada à esquerda em t de $m(t)$, então:

$$\begin{cases} D_-m(t) \leq g(t, m(t)), \\ m(t_i^+) \leq m(t_i), \\ m(t_0) \leq u_0. \end{cases} \quad (1.25)$$

De fato isso ocorre, pois temos as seguintes possibilidades:

- i. Se $m(t)$ for identicamente nula, ou seja, $m(t) = 0$, $\forall t \in (t_0, \beta)$, $t \neq t_i$, com $i = 1, \dots, p$, então $D_-m(t) = 0 \leq g(t, m(t))$, pois a imagem de g está contida em \mathbb{R}_+ .
- ii. Se existe $s \in (t_0, \beta)$, tal que $m(s) = 0$, $s \neq t_i$, como $m(t) = |x(t)|$ é contínua nos intervalos (t_i, t_{i+1}) com $i = 1, 2, \dots, p$, temos que $D_-m(t) = 0 \leq g(t, m(t))$.
- iii. Se $m(t) \neq 0$, para todo $t \in (t_0, \beta)$, $t \neq t_i$, então $D_-m(t) = \frac{x(t)}{|x(t)|} \cdot x'(t)$. Assim:

$$|D_-m(t)| = |x'(t)| \text{ e } D_-m(t) \leq |D_-m(t)| = |x'(t)|.$$

Mas, temos que: $|x'(t)| = |f(t, x(t))| \stackrel{1.6}{\leq} g(t, |x|) = g(t, m(t))$, ou seja:

$$D_-m(t) \leq g(t, m(t)).$$

Afirmamos agora que:

$$m(t) = |x(t)| \leq r(t), \quad t_0 \leq t < \beta. \quad (1.26)$$

Como $r(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(t, \varepsilon)$ uniformemente em $[t_0, \beta)$, sendo $u(t, \varepsilon)$ uma solução qualquer de:

$$u' = g(t, u) + \varepsilon, \quad u(t_0) = u_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.27)$$

Para provar (1.26), devemos mostrar que $m(t) < u(t, \varepsilon)$, $t_0 \leq t < \beta$.

Suponha que isso não ocorra, ou seja, existe um t^* tal que $t_i < t^* \leq t_{i+1}$ para algum $1 \leq i \leq p-1$, satisfazendo $m(t^*) \geq u(t, \varepsilon)$, e $m(t) < u(t, \varepsilon)$, para $t_0 \leq t \leq t_i$.

Segue por (1.25) que $m(t_i^+) \leq m(t_i, \varepsilon)$, assim existe um t° tal que $t_i < t^\circ \leq t^*$ satisfazendo:

$$m(t^\circ) = u(t^\circ, \varepsilon) \quad \text{e} \quad m(t) \leq u(t, \varepsilon), \quad t_i \leq t < t^\circ.$$

Definimos, $H(t) = m(t) - u(t, \varepsilon)$, $t \in [t_i, t^\circ)$.

Desse modo, $H(t^\circ) = m(t^\circ) - u(t^\circ, \varepsilon) = 0$, e ainda, $H(t) \leq 0$. Derivando H , temos:

$$H'(t^\circ) = D_-m(t^\circ) - u'(t^\circ, \varepsilon) \geq 0.$$

Segue que $D_-m(t^\circ) \geq u'(t^\circ, \varepsilon)$. E ainda:

$$\begin{aligned} u'(t^\circ, \varepsilon) &\stackrel{(1.27)}{=} g(t^\circ, u(t^\circ, \varepsilon)) + \varepsilon \leq D_-m(t^\circ) \stackrel{(1.25)}{\leq} g(t^\circ, m(t^\circ)) = g(t^\circ, u(t^\circ, \varepsilon)). \\ &\Rightarrow g(t^\circ, u(t^\circ, \varepsilon)) + \varepsilon \leq g(t^\circ, m(t^\circ)). \end{aligned}$$

O que é contradição, pois g é não decrescente. Assim fica provada a afirmação (1.26).

Observemos que $x(t)$ satisfaz a equação integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + \sum_{t_0 < t_i < t} I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Além disso, para $s_1 < s_2$, com $t_p < s_1, s_2 < \beta$, observe que t_p é o último momento de impulso, assim, segue de (1.22) e (1.26) que:

$$\begin{aligned} |x(s_2) - x(s_1)| &\leq \int_{s_1}^{s_2} |f(\theta, x(\theta))|d\theta \stackrel{(1.22)}{\leq} \int_{s_1}^{s_2} g(\theta, |x(\theta)|)d\theta \\ &\stackrel{(1.26)}{\leq} \int_{s_1}^{s_2} g(\theta, r(\theta))d\theta = r(s_2) - r(s_1). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Sendo $\lim_{t \rightarrow \beta^-} r(t) = r(\beta)$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para qualquer t pertencente ao domínio de r , vale:

$$|t - \beta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |r(t) - r(\beta)| < \varepsilon.$$

Tomando o limite quando $s_1, s_2 \rightarrow \beta^-$, segue que:

$$\lim_{s_1 \rightarrow \beta^-} r(s_1) = r(\beta) \quad \text{e} \quad \lim_{s_2 \rightarrow \beta^-} r(s_2) = r(\beta).$$

Temos respectivamente para $\delta > 0$ que $|s_1 - \beta| < \delta$ e $|s_2 - \beta| < \delta$ implica em:

$$|r(s_1) - r(\beta)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |r(s_2) - r(\beta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |r(s_2) - r(s_1)| &= |r(s_2) + r(\beta) - r(\beta) - r(s_1)| \\ &= |r(s_2) - r(\beta) - r(s_1) + r(\beta)|. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade triangular, segue que:

$$\begin{aligned} |r(s_2) - r(s_1)| &\leq |r(s_2) - r(\beta)| + |r(s_1) - r(\beta)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, $|r(s_2) - r(s_1)| < \varepsilon$ o que implica em $(r(s_2) - r(s_1)) < \varepsilon$.

Por (1.28) segue que $|x(s_2) - x(s_1)| < \varepsilon$, portanto, pelo Critério de Convergência de Cauchy, $x(t)$ com $|t - \beta| < \delta$ é convergente, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$ existe.

Definimos $x(\beta, t_0, x_0) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$ e consideremos o sistema (1.21) com $x(\beta) = x(\beta, t_0, x_0)$.

Pelo Teorema 1.26, $x(t, t_0, x_0)$ pode ser estendido além de β , contradizendo nossa hipótese de que isso não aconteceria.

Portanto, toda solução $x(t)$ de (1.21), com $|x_0| \leq u_0$ existe no intervalo $[t_0, \infty)$.

□

Teorema 1.28. Unicidade de Solução

Dado $R_0 = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$, consideremos o sistema (1.21), e ainda, seja $f \in C(R_0, \mathbb{R}^n)$, $g \in C([t_0, t_0 + a] \times [a, 2b], \mathbb{R}_+)$ e para $(t, x), (t, y) \in R_0$ vale

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq g(t, |x - y|). \quad (1.29)$$

Além disso, suponha que para qualquer t^* com $t_0 \leq t^* < t_0 + a$, o PVI:

$$\begin{cases} u' = g(t, u), \\ u(t^*) = 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

tem solução única $u(t) = 0$ em $[t^*, t_0 + a]$. Então (1.21) possui no máximo uma solução sobre $[t_0, t_0 + a)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem duas soluções distintas $y(t)$ e $x(t)$ do problema (1.21) em $[t_0, t_0 + a)$.

Definimos $m(t) = |y(t) - x(t)|$, $t \in [t_0, t_0 + a]$ e $\Omega = \{t, t \geq t_0 \text{ e } m(t) > 0\}$. Assim, $\Omega \neq \emptyset$.

Seja $t^* = \inf \Omega$, então $m(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, t^*)$ e ainda $m(t^*) = 0$, pois $y(t)$ e $x(t)$ são contínuas à esquerda. Então, $y(t^*) = x(t^*)$.

Se $t^* \neq \tau_k(y(t^*))$ para todo $k \geq 1$, então temos $t^* \neq \tau_k(x(t^*))$, pois $y(t^*) = x(t^*)$. Se existir $k \geq 1$, tal que $t^* = \tau_k(y(t^*))$, então $t^* = \tau_k(x(t^*))$.

Logo, $m(t^*) = 0$ e também $m(t_+^*) = 0$, uma vez que,

$$y(t_+^*) = I_k(y(t^*)) = I_k(x(t^*)) = x(t_+^*),$$

se t^* for um momento de impulso.

Por (1.29), segue que:

$$D_-m(t) \leq |f(t, y) - f(t, x)| \leq g(t, |y - x|) = g(t, m(t)),$$

para $t \in [t_0, t_0 + a)$. Pelo Teorema 1.14, existe $\delta > 0$ tal que

$$m(t) \leq r(t), \quad t^* \leq t \leq t^* + \delta, \quad (1.31)$$

em que $r(t) = r(t, t^*, 0)$ é uma solução maximal de (1.30). Por hipótese, temos $r(t) = 0$. De (1.31), segue que $m(t) = 0$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ o que é contradição, pois $t^* = \inf \Omega$.

Portanto, $y(x) = x(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + a)$. □

A partir do estudo geral acerca dos impulsos, é possível analisar suas consequências em diversas situações cotidianas, utilizando inclusive modelos conhecidos de equações diferenciais ordinárias, que ao sofrerem o efeito impulsivo apresentam uma nova configuração. Um exemplo interessante se aplica à Equação Logística, apresentada na sequência.

Exemplo 1.29. Equação Logística (Verhulst)

Consideremos a equação diferencial de Verhulst⁶:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (1.32)$$

sendo $r > 0$ a taxa de crescimento (natalidade – mortalidade) e $K > 0$ a taxa de capacidade do ambiente.

A equação (1.32), representa o desenvolvimento de uma espécie biológica isolada em um ambiente com recursos naturais limitados e a solução geral desta equação por meio de técnicas para encontrar solução de EDO é dada por:

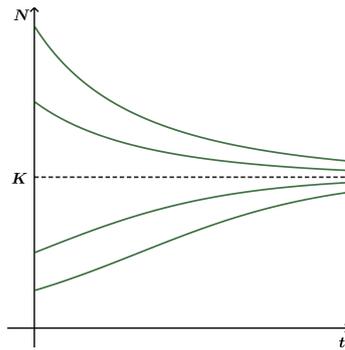
$$x(t) = \frac{K \cdot x_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}, \quad t \in [0, \infty),$$

considerando a condição inicial $x(0) = x_0$.

A seguir, representamos graficamente o esboço das possíveis soluções de (1.32), variando a condição inicial acima ou abaixo da taxa de capacidade do ambiente (K).

⁶Este exemplo pode ser encontrado em [12] de modo generalizado.

Figura 1.8: Esboço das soluções da EDO sem impulso.



Fonte: Elaborada pela autora.

No entanto, um efeito externo (efeito impulsivo) pode causar mudanças na quantidade $x(t)$, podendo ser de acréscimo ou decréscimo, de forma que não cause a extinção da espécie em estudo.

Como resultado do efeito externo, $x(t)$ recebe um incremento δ_k , tal que:

$$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k) = \delta_k, \quad \text{em determinados instantes } t_k.$$

E assim, escrevemos:

$$\Delta x(t_k) = \delta_k, \quad t = t_k. \quad (1.33)$$

Os momentos t_k em que ocorre o efeito impulsivo podem ser escolhidos de diversas formas, como vimos a partir do estudo geral, contudo, a fim de atender interesses práticos consideremos o caso em que os impulsos t_k ocorrem quando cada quantidade $x(t_k)$ é solução de alguma equação $\varphi(x) = 0$.

Se $\varphi(x) = 0$ possui apenas uma raiz $x = N$ e o incremento δ_k não depende de k , isto é, são constantes e iguais a C , então podemos escrever:

$$x(t_k) = N \quad \text{e} \quad \Delta x(t_k) = C.$$

E a expressão (1.33) é reescrita:

$$\Delta x(t_k) = C, \quad \text{para } x(t) = N,$$

sendo $N + C > 0$.

Para exemplificar a situação, consideremos $r = K = 1$ e o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x), \\ \Delta x = -\frac{1}{2}, \text{ para } x = \frac{3}{4}, \\ x(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Assim, a solução deste PVI sem impulso é expressa por:

$$x(t) = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) e^{-t}} = \frac{1}{1 + 3e^{-t}}, \quad t \in [0, \infty)$$

Verificaremos a seguir que a solução será periódica, ou seja, terá os pontos de impulso com uma frequência (T) determinada, correspondente a:

$$T = a \cdot \ln 9, \quad a \in \mathbb{N}.$$

A princípio os intervalos de solução não estão pré-fixados, contudo, sabemos que os saltos ocorrerão quando $x(t) = \frac{3}{4}$, desse modo o primeiro momento de salto ocorre quando:

$$x(t) = \frac{3}{4} \Rightarrow t = \ln 9.$$

- Se $t \in [0, \ln 9]$, a solução com a condição inicial $x(0) = \frac{1}{4}$ é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{1 + 3e^{-t}}.$$

- Quando $t = \ln 9$, temos:

$$x(\ln 9^+) = x(\ln 9) + \Delta x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- O problema no próximo intervalo, terá condição inicial $x(\ln 9^+) = \frac{1}{4}$. Assim, para $t \in (\ln 9, 2 \ln 9)$:

$$x(t) = \frac{1}{1 + 27e^{-t}} = \frac{1}{1 + 3 \cdot 9 \cdot e^{-t}} = \frac{1}{1 + 3 \cdot e^{\ln 9} \cdot e^{-t}} = \frac{1}{1 + 3 \cdot e^{-(t - \ln 9)}}$$

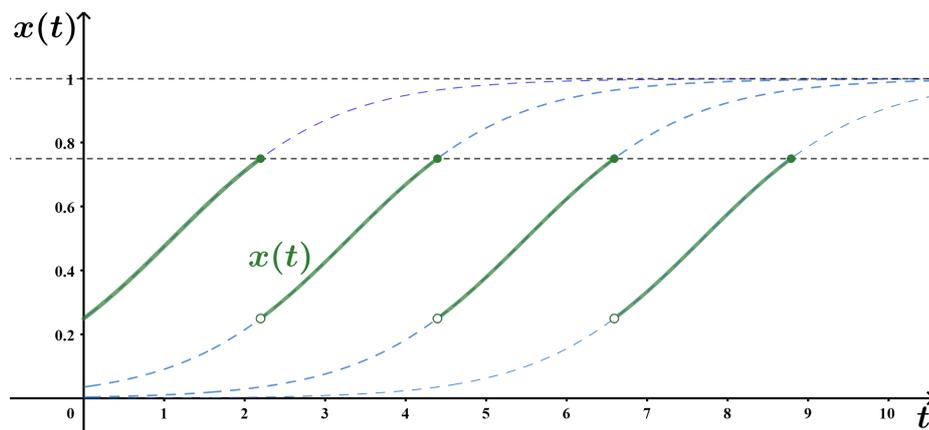
O próximo salto acontecerá quando $x(t) = \frac{3}{4}$, ou seja quando, $t = 2 \cdot \ln 9$.

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, construímos a solução $x(t)$ em todo intervalo $[0, \infty)$. Podemos escrever a solução do seguinte modo:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 3e^{-t}}, & 0 < t \leq \ln 9, \\ \frac{1}{1 + 3e^{-(t - a \cdot \ln 9)}}, & a \cdot \ln 9 < t \leq (a + 1) \ln 9, \quad a \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A seguir, temos o gráfico da solução impulsiva em linhas sólidas e o traçado das soluções das equações diferenciais com as novas condições iniciais.

Figura 1.9: Solução da equação de Verhulst com impulso.



Fonte: Elaborada pela autora.

A seguir, veremos um exemplo planar, no qual as equações diferenciais não dependem do tempo t e, a princípio, o sistema não descreve explicitamente os momentos de impulso.

Exemplo 1.30. Consideremos $M = \{(x, y) \mid xy = 1, x > 0\}$, $F(x, y) = (x, y + 1)$ e o sistema:

$$\begin{cases} x' = -1, \\ y' = 0, \\ (x(t), y(t)) \in M \Rightarrow (x(t^+), y(t^+)) = (x(t), y(t) + 1). \end{cases} \quad (1.34)$$

A solução geral do sistema, desconsiderando os impulsos é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = -t + k_1, & k_1 \in \mathbb{R}, \\ y(t) = k_2, & k_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se $a = \left(4, \frac{1}{4}\right) \in M$, então a solução $\phi(t, a) = (x(t, a), y(t, a))$ sofre o primeiro impulso quando $t = 0$, pois temos:

$$\phi(t, a) = \begin{cases} x(t) = -t + 4, \\ y(t) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Segue então que o impulso ocorre nos pontos pertencentes a M :

$$x(t) \cdot y(t) = 1 \Rightarrow (-t + 4) \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow t = 0.$$

Dessa forma, é possível escrever:

- Se $t \in (-\infty, 0]$, a solução é dada por:

$$\phi(t, a) = \left(-t + 4, \frac{1}{4}\right).$$

- Quando $t = 0$, ocorre o primeiro salto:

$$(x(t^+), y(t^+)) = (x(t), y(t) + 1) = \left(4, \frac{5}{4}\right).$$

- O próximo instante de impulso deve ocorrer quando:

$$x(t) \cdot y(t) = 1 \Rightarrow (-t + 4) \cdot \frac{5}{4} = 1 \Rightarrow t = \frac{16}{5}.$$

- Assim, se $t \in \left(0, \frac{16}{5}\right]$, temos a solução com uma nova condição inicial:

$$\phi(t, a) = \begin{cases} x(t) = -t + \frac{20}{5}, \\ y(t^+) = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

- Quando $t = \frac{16}{5}$:

$$(x(t^+), y(t^+)) = \left(\frac{4}{5}, \frac{9}{4}\right).$$

- O próximo momento de impulso ocorrerá:

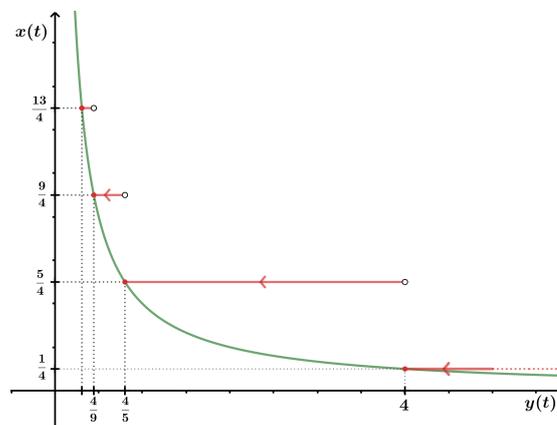
$$x(t) \cdot y(t) = 1 \Rightarrow \left(-t + \frac{20}{5}\right) \cdot \frac{9}{4} = 1 \Rightarrow t = \frac{32}{9}.$$

Assim a solução do sistema sofre impulsos em:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{16}{5}, \quad t_2 = \frac{32}{9}, \quad \dots, \quad t_n = 4 \left[1 - \frac{1}{4n+1}\right], \quad \dots$$

A semiórbita negativa $\gamma^-(a) = \phi((-\infty, 4), a)$ é representada abaixo, na qual os pontos em destaque correspondem as soluções nos tempos em que os impulsos ocorrem.

Figura 1.10: Semiórbita negativa com condição inicial a .



Fonte: Elaborada pela autora.

2 Sistemas Impulsivos

Este capítulo traz um estudo sobre sistemas impulsivos com respeito à existência de solução e também à estabilidade. Como no caso ordinário, veremos que é possível, com sistemas lineares, definir a matriz fundamental de solução e demonstrar alguns resultados de estabilidade envolvendo a tal matriz, também faremos estudo de um sistema quase-linear, sob algumas hipóteses, no caso de impulsos em tempos variáveis. As referências utilizadas neste capítulo foram [7], [13], [14] e [15].

2.1 Sistemas Lineares

Consideremos o sistema de equações impulsivas lineares e homogêneas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x, & t \neq t_i, \\ \Delta x = B_i x, & t = t_i. \end{cases} \quad (2.1)$$

Sendo $A(t)$ uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções contínuas no intervalo I e B_i é uma matriz cujas entradas são constantes para cada $i \in \mathbb{N}$, além disso t_i são tempos fixos tais que $t_i < t_{i+1}$. Denotaremos por I_n a matriz identidade $n \times n$.

Teorema 2.1. Existência e Unicidade

Seja $A(t)$ uma matriz como descrita acima, dado um intervalo $[t_0, t_0+h] \subset I$, contendo um número finito de pontos t_i . Então, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução do sistema (2.1), dada por $x(t, x_0)$ com a condição inicial $x(t_0, x_0) = x_0$ existe para todo $t \in [t_0, t_0+h]$.

Além disso, para todo i , tal que $t_i \in [t_0, t_0+h]$, as matrizes $(I_n + B_i)$ são não singulares, temos então:

$$x(t, x_0) \neq x(t, y_0),$$

para todo $t \in [t_0, t_0+h]$, com $x_0 \neq y_0$.

Demonstração. Seja $t_0 < t_j < t_{j+1} < \dots < t_{j+k} < t_0 + h$. Pelo Teorema de Picard, a solução $x = \varphi_j(t)$ do sistema ordinário:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (2.2)$$

com a condição inicial dada por $\varphi_j(t_0) = x_0$ existe e é única no intervalo $[t_0, t_j]$, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Lembremos aqui que as soluções do problema impulsivo são funções contínuas à esquerda.

Para $t \in [t_0, t_j]$, definimos $x(t, x_0) = \varphi_j(t)$.

Segue do sistema (2.1), que para $t = t_j$, temos:

$$x_j^+ = x(t_j, x_0) + \Delta x = x(t_j, x_0) + B_j \quad x(t_j, x_0) = (I_n + B_j) \quad x(t_j, x_0).$$

Novamente, utilizando o Teorema de Picard, existe uma única solução para o sistema (2.2), no intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, sendo a solução $x = \varphi_{j+1}(t)$, $\varphi_{j+1}(t_j) = x_j^+$.

Assim, podemos estender a solução (\cdot, x_0) do sistema (2.1) até $t = t_{j+1}$, fazendo

$$x(t, x_0) = \varphi_{j+1}(t), \quad t_j < t \leq t_{j+1}.$$

E em $t = t_{j+1}^+$, temos:

$$x(t_{j+1}, x_0) = (I_n + B_{j+1}) \quad x(t_{j+1}, x_0) = x_{j+1}^+.$$

Denotamos a solução do sistema (2.2) com a condição inicial x_{j+1}^+ por φ_{j+2} . Novamente, podemos estender a solução $x(t, x_0)$ do sistema inicial (2.1) até o instante $t = t_{j+2}$, fazendo,

$$x(t, x_0) = \varphi_{j+2}(t), \quad t_{j+1} < t \leq t_{j+2}.$$

E assim, repetimos o argumento e, uma vez que, por hipótese, o intervalo $[t_0, t_0 + h]$ possui um número finito de pontos t_j , construímos a solução $x(t, x_0)$ do sistema (2.1) em todo o intervalo.

O processo de construção da solução $x(t, x_0)$ apresentado, supõe $t_0 < t_j$, no entanto, se temos $t_0 = t_j$ a construção de $x(t, x_0)$ segue com desenvolvimento semelhante, com a observação de que temos:

$$x(t_0^+) = (I_n + B_i)x_0.$$

E a partir disso, construímos a função $\varphi_{j+1}(t_j) = x_j^+$.

Para provar a segunda afirmação do teorema, observemos que se $x(t_i^+, x_0) \neq x(t_i^+, y_0)$, então pelo Teorema de Picard, segue que $x(t, x_0) \neq x(t, y_0)$ para todo $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i = j, j + 1, \dots, j + k$.

E temos que:

$$x(t_i^+, x_0) - x(t_i^+, y_0) = (I_n + B_i) \quad (x(t_i, x_0) - x(t_i, y_0)).$$

Como, por hipótese, $(I_n + B_i)$ é não singular, e $x(t_i^+, x_0) \neq x(t_i^+, y_0)$, segue que $x(t_i, x_0) \neq x(t_i, y_0)$.

Logo $x(t, x_0) \neq x(t, y_0)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + h]$, sempre que $x_0 \neq y_0$ e $(I_n + B_i)$ for não singular para $i = j, j + 1, \dots, j + k$, o que conclui a prova da unicidade. \square

O próximo teorema garante que o conjunto solução de um problema linear impulsivo é um espaço vetorial, como ocorre no caso ordinário.

Teorema 2.2. *O conjunto X de todas as soluções do sistema (2.1), definidas no intervalo $[a, b]$, forma um espaço vetorial de dimensão n .*

Demonstração. Denotemos por S o conjunto de todas as soluções de (2.1). Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ soluções arbitrárias do sistema (2.1), definidas no intervalo $[a, b]$ e c_1, c_2, \dots, c_n escalares (podendo ser reais ou complexos).

A combinação linear $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$ é solução de (2.1). De fato,

$$\varphi' = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' + \dots + c_n\varphi_n',$$

e cada φ_i , $i = 1, \dots, n$ é solução satisfazendo (2.1), tem-se:

$$\varphi' = c_1A(t)\varphi_1 + c_2A(t)\varphi_2 + \dots + c_nA(t)\varphi_n.$$

$$\varphi' = A(t)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n).$$

$$\varphi' = A(t)\varphi.$$

E assim φ é solução de (2.1). Portanto, o conjunto das soluções é um subespaço vetorial do espaço de todas as funções definidas em $[a, b]$.

Considerando $c_1 = 1$ e $c_2 = \dots = c_n = 0$ e aplicando o Teorema de Picard, existe uma solução única x de (2.1) no intervalo $[a, b]$, satisfazendo $x(t_0) = \varphi(t_0)$.

Para mostrar que a dimensão é n , mostremos que S é isomorfo ao espaço \mathbb{R}^n .

Consideremos então a função $g_t : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_t(\varphi) = \varphi(t)$ que mapeia uma solução $\varphi(t) \in S$, ou seja, g_t leva a solução φ à sua imagem calculada no instante t .

Temos que $g_t : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear. Pois, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e k uma constante qualquer, então

$$g_t(\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = g_t(\varphi_1) + g_t(\varphi_2).$$

$$g_t(k \cdot \varphi_1) = k \cdot \varphi_1(t) = k \cdot g_t(\varphi_1).$$

Utilizando o Teorema 2.1, segue que a imagem de g_t é de fato todo o \mathbb{R}^n , pois para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma solução $\varphi(t) = x(t, x_0)$, $\varphi(t_0) = x_0$, provando a sobrejetividade de g_t .

E ainda, o núcleo da g_t tem somente o vetor nulo, pois, também pelo Teorema 2.1, $\varphi(t) = 0$ implica que φ é identicamente nula pela não singularidade de $(I_n + B_i)$, assim, g_t é injetiva.

Portanto, temos um isomorfismo e segue que o conjunto S tem mesma a dimensão de \mathbb{R}^n , ou seja, é um espaço vetorial de dimensão n .

□

A base no espaço S é chamada base *fundamental* de soluções do sistema.

Denotemos por $X(t)$ a matriz, cujas colunas são as soluções fundamentais do sistema (2.1), esta é chamada de matriz fundamental e, pelo que vimos anteriormente,

$$x(t) = X(t) \cdot c, \quad (2.3)$$

é uma solução do sistema para qualquer vetor c com entradas constantes. Se o vetor c varia em \mathbb{R}^n , então a família de soluções (2.3) forma um espaço vetorial.

A matriz fundamental $X(t)$ satisfaz o sistema impulsivo matricial:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X, & t \neq t_i, \\ \Delta X = B_i \cdot X, & t = t_i. \end{cases} \quad (2.4)$$

Além disso, qualquer solução não degenerada (ou seja, não nula) do sistema (2.4) é uma matriz fundamental do sistema inicial (2.1).

Todas as soluções não degeneradas do sistema (2.4) são dadas pela expressão:

$$X(t) = X_0(t) \cdot C,$$

sendo $X_0(t)$ alguma solução não degenerada de (2.4) e C é uma matriz arbitrária não singular.

A solução $X(t)$ não degenerada de (2.4) que satisfaz a condição $X(t_0, t_0) = I_n$ é denotada por $X(t, t_0)$.

Denotemos por $U(t, s)$ uma solução do problema matricial de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = A(t) \cdot U, \\ U(t, t) = I_n. \end{cases}$$

Veremos a seguir como $U(t, s)$ pode ser usado na expressão de $X(t)$.

Note que quando $t_0 < t < t_1^+$, a solução $X(t)$ não tem impulso e corresponde a matriz fundamental do caso ordinário:

$$X(t) = U(t, t_0) \cdot X(t_0).$$

No primeiro momento de impulso, ou seja, $t = t_1^+$, temos:

$$X(t_1) = (I + B_1)U(t_1, t_0)X(t_0).$$

Em $t_1^+ < t < t_2^+$, obtemos:

$$X(t) = U(t, t_1)(I + B_1)U(t_1, t_0)X(t_0).$$

E no segundo momento de impulso, quando $t = t_2^+$ a solução é escrita como:

$$X(t_2) = (I + B_2)U(t_2, t_1)(I + B_1)U(t_1, t_0)X(t_0).$$

Logo, repetindo o processo até o último momento de impulso, qualquer solução $X(t)$ do sistema (2.4) pode ser representada por:

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t, t_{j+k})(I_n + B_{j+k})U(t_{j+k}, t_{j+k-1})(I_n + B_{j+k-1}) \times \cdots \\ &\cdots \times U(t_{j+1}, t_j)(I_n + B_j)U(t_j, t_0)X(t_0), \end{aligned}$$

para $t_{j-1} < t_0 < t_j < t_{j+k} < t \leq t_{j+k+1}$.

Ou ainda:

$$X(t) = U(t, t_{j+k})(I_n + B_{j+k}) \prod_{v=k}^1 U(t_{j+v}, t_{j+v-1})(I_n + B_{j+v-1})U(t_j, t_0)X(t_0), \quad (2.5)$$

para: $t_{j-1} < t_0 \leq t_j < t_{j+k} < t \leq t_{j+k+1}$.

Em particular, para $X(t, t_0)$,

$$X(t, t_0) = U(t, t_{j+k})(I_n + B_{j+k}) \cdot U(t_{j+k}, t_{j+k-1})(I_n + B_{j+k-1}) \cdots (I_n + B_j) \cdot U(t_j, t_0),$$

pois $X(t_0, t_0) = I_n$. Equivalente a:

$$X(t, t_0) = U(t, t_{j+k})(I_n + B_{j+k}) \prod_{v=k}^1 U(t_{j+v}, t_{j+v-1})(I_n + B_{j+v-1})U(t_j, t_0), \quad (2.6)$$

com: $t_{j-1} < t_0 \leq t_j < t_{j+k} < t \leq t_{j+k+1}$.

A partir de (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \det(X(t)) &= \det(U(t, t_{j+k})) \det(I_n + B_{j+k}) \times \\ &\times \prod_{v=k}^1 \det(U(t_{j+v}, t_{j+v-1})) \det(I_n + B_{j+v-1}) \det(U(t_j, t_0)) \det(X(t_0)). \end{aligned}$$

Utilizando a Fórmula de Liouville (1.17), segue que:

$$\begin{aligned} \det(X(t)) &= e^{\int_{t_{j+k}}^t \text{Tr}(A(s))ds} \det(I_n + B_{j+k}) \times \\ &\times \prod_{v=k}^1 e^{\int_{t_{j+v-1}}^{t_{j+v}} \text{Tr}(A(s))ds} \det(I_n + B_{j+v-1}) e^{\int_{t_0}^{t_j} \text{Tr}(A(s))ds} \det(X(t_0)). \end{aligned}$$

E assim:

$$\det(X(t)) = \det(X(t_0)) e^{\int_{t_0}^t T_r(A(s)) ds} \prod_{v=1}^{k+1} \det(I_n + B_{j+v-1}),$$

para: $t_{j-1} < t_0 \leq t_j < t_{j+k} < t \leq t_{j+k+1}$.

Como $(I_n + B_i)$ é não singular, segue que $X(t)$ também é não singular desde que $X(t_0)$ seja não nula. Sendo $X(t)$ não singular, implica que esta possui inversa e $X^{-1}(t)$ é denotada por:

$$\begin{aligned} X^{-1}(t) &= X^{-1}(t_0)U^{-1}(t_j, t_0)(I_n + B_j)^{-1} \cdots U^{-1}(t_{j+k}, t_{j+k-1}) \times \\ &\times (I_n + B_{j+k})^{-1}U^{-1}(t, t_{j+k}), \end{aligned}$$

com $t_{j-1} < t_0 \leq t_j < t_{j+k} < t \leq t_{j+k+1}$.

E o produto é dado por:

$$X(t)X^{-1}(s) = U(t, t_{j+k}) \prod_{v=k}^{m+1} (I + B_{j+v})U(t_{j+v}, t_{j+v-1})(I + B_{j+m})U(t_{j+m}, s), \quad (2.7)$$

sendo, $t_{j+m-1} < s < t_{j+m} < t_{j+k} < t \leq t_{j+k+1}$.

Observemos que (2.7) é válida, pois temos $s < t$, assim os termos da matriz $X^{-1}(s)$ serão cancelados, restando apenas o último fator que corresponde a $U^{-1}(t_{j+m}, s) = (I + B_{j+m})U(t_{j+m}, s)$. A prova pode ser feita por indução.

Considere, por exemplo, as soluções:

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t, t_3)(I + B_3)U(t_3, t_2)(I + B_2)U(t_2, t_1)(I + B_1)U(t_1, t_0)X(t_0), \text{ e,} \\ X(s) &= U(t_1, s)(I + B_1)U(t_1, t_0)X(t_0), \end{aligned}$$

com $s < t_1 < t_2 < t_3 < t$.

Então:

$$X(t)X^{-1}(s) = U(t, t_3)(I + B_3)U(t_3, t_2)(I + B_2)U(t_2, t_1)U^{-1}(t_1, s).$$

Como $U(t, t) = I_n \Rightarrow U^{-1}(t, t) = (I_n)^{-1} = I_n = U(t, t)$, logo:

$$X(t)X^{-1}(s) = U(t, t_3)(I + B_3)U(t_3, t_2)(I + B_2)U(t_2, t_1)(I + B_1)U(t_1, s).$$

Em particular, para $X^{-1}(t, t_0)$, temos:

$$X^{-1}(t, t_0) = U^{-1}(t_j, t_0) \prod_{v=1}^k (I + B_{j+v+1})^{-1}U^{-1}(t_{j+v}, t_{j+v-1})(I + B_{j+k})^{-1}U^{-1}(t, t_{j+k}).$$

E assim,

$$\begin{aligned} X(t, t_0)X^{-1}(s, t_0) &= U(t, t_{j+k}) \prod_{v=k}^{s+1} (I + B_{j+v}) U(t_{j+v}, t_{j+v-1}) (I + B_{j+s}) U(t_{j+s}, t). \\ &= X(t, s), \end{aligned}$$

para $t_{j-1} < t_0 \leq t_j \leq t_{j+s-1} < s \leq t_{j+s} < t_{j+k} < t \leq t_{j+k+1}$.

Se $t_i < s \leq t \leq t_{i+1}$, então $X(t, t_0)X^{-1}(s, t_0) = U(t, s)$. Note também que qualquer solução $x(t, x_0)$ do sistema inicial (2.1), $x(t_0, x_0) = x_0$ pode ser escrita de tal modo que:

$$X(t, x_0) = X(t, t_0)x_0. \quad (2.8)$$

2.1.1 Sistemas Não Homogêneos

Consideremos agora o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), & t \neq t_i, \\ \Delta x = B_i x + a_i, & t = t_i, \end{cases} \quad (2.9)$$

no qual as matrizes $A(t)$ e B_i e os instantes t_i são os mesmos do sistema (2.1). Além disso, $f(t)$ é uma função contínua (contínua por partes) no intervalo I , e a_i são vetores com entradas constantes. O sistema (2.9) é chamado de sistema de equações diferenciais lineares não homogêneo com ação impulsiva.

A relação entre as soluções do sistema não homogêneo (2.9) e o sistema homogêneo correspondente (2.1) é descrito pelo teorema a seguir.

Teorema 2.3. *Se $\varphi(t)$ é uma solução do sistema (2.1) e $\psi(t)$ é uma solução do sistema não homogêneo (2.9). Então a função $x = \varphi(t) + \psi(t)$ é uma solução do sistema (2.9).*

Por outro lado, se $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são soluções do sistema não homogêneo (2.9), então $x = \varphi_1 - \varphi_2$ é uma solução do sistema (2.1).

Demonstração. Suponha $\varphi(t)$ solução de (2.1) e $\psi(t)$ solução de (2.9).

Então, denote $\sigma = \varphi(t) + \psi(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \varphi'(t) + \psi'(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + A(t)\psi(t) + f(t) \\ &= A(t)(\varphi(t) + \psi(t)) + f(t) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= A(t)(\sigma) + f(t), \quad t \neq t_i. \end{aligned}$$

E ainda, como $\Delta\varphi = B_i\varphi$ e $\Delta\psi = B_i\psi + a_i$, temos:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= B_i\varphi + B_i\psi + a_i \\ &= B_i(\varphi - \psi) + a_i \\ &= B_i\sigma + a_i, \quad t = t_i.\end{aligned}$$

Concluimos que σ é solução de (2.9).

Agora, suponha $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ soluções do sistema (2.9) e denote $\gamma = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$.

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt} &= \varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) \\ &= A(t)\varphi_1(t) + f(t) - A(t)\varphi_2(t) - f(t) \\ &= A(t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \\ \frac{d\gamma}{dt} &= A(t)(\gamma), \quad t \neq t_i.\end{aligned}$$

Sendo $\Delta\varphi_1 = B_i\varphi_1 + a_i$ e $\Delta\varphi_2 = B_i\varphi_2 + a_i$, segue que:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= B_i\varphi_1 + a_i - B_i\varphi_2 - a_i \\ &= B_i(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \Delta\gamma &= B_i\gamma, \quad t = t_i.\end{aligned}$$

Satisfazendo, por sua vez, a condição do sistema homogêneo (2.1).

□

A seguir veremos um exemplo sobre solução para sistema não homogêneo e a aplicação do teorema anterior.

Exemplo 2.4. Consideremos o sistema não homogêneo:

$$\begin{cases} y' = -2ty + t, & t \neq k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \Delta y = y^2 + 1, & t = k. \end{cases} \quad (2.10)$$

O sistema homogêneo associado a (2.10) é dado por:

$$\begin{cases} x' = -2tx, & t \neq k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \Delta x = x^2, & t = k. \end{cases} \quad (2.11)$$

Assim, a solução geral do sistema não homogêneo (2.10) é:

$$y(t) = c_2 \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, a solução geral do sistema homogêneo (2.11) é expressa pela função:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-t^2}.$$

O Teorema 2.3, afirma que $g(t) = x(t) + y(t)$ satisfaz o sistema (2.10). Consideremos a solução em ambos os sistemas impulsivos com a condição inicial $x(0) = 2$ e $y(0) = 2$, respectivamente.

Para o sistema homogêneo, temos:

- Se $t \in [0, 1]$, temos:

$$x(t) = 2e^{-t^2}.$$

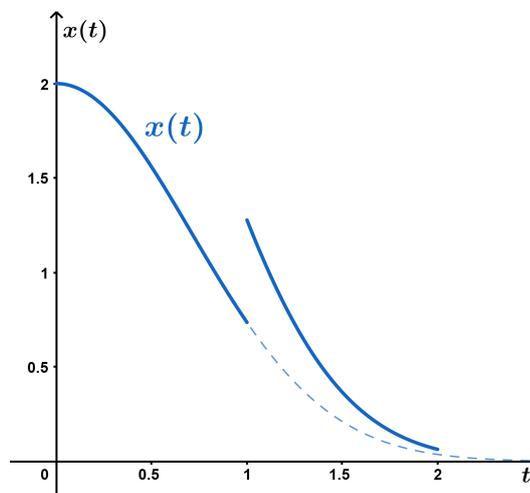
- Quando $t = 1$, ocorre o primeiro salto:

$$x(1^+) = x(1) + \Delta x = 2e^{-1} + (2e^{-1})^2 = 2e^{-1} + 4e^{-2}.$$

- Se $t \in (1, 2]$, consideremos a nova condição inicial $x(1^+) = 2e^{-1} + 4e^{-2}$:

$$x(t) = (2 + 4e^{-1})e^{-t^2}.$$

Figura 2.1: Solução da EDI homogênea (linha sólida).



Fonte: Elaborada pela autora.

E para o sistema não homogêneo:

- Se $t \in [0, 1]$, temos:

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}.$$

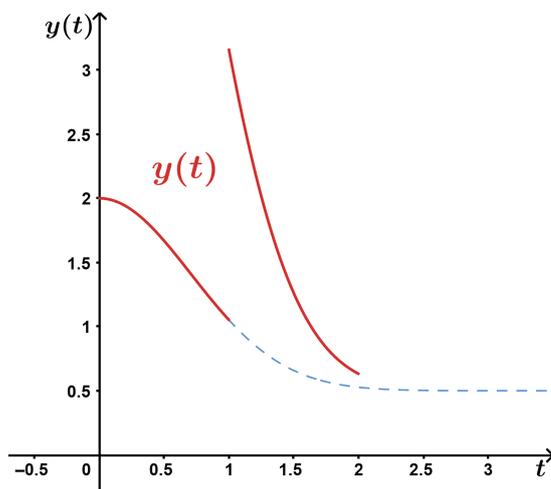
- Quando $t = 1$, ocorre o primeiro salto:

$$y(1^+) = y(1) + \Delta y = \frac{3}{2}e^{-1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}e^{-2} + 3e^{-1}.$$

- Se $t \in (1, 2]$, consideremos a nova condição inicial $y(1^+) = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}e^{-2} + 3e^{-1}$:

$$y(t) = \left(\frac{5}{4}e + \frac{9}{4}e^{-1} + 3 \right) e^{-t^2} + \frac{1}{2}.$$

Figura 2.2: Solução da EDI não homogênea (linha sólida).



Fonte: Elaborada pela autora.

A partir disso $g(t) = x(t) + y(t)$ para $t \in [1, 2]$ é expressa por

$$\begin{aligned} g(t) &= (2 + 4e^{-1})e^{-t^2} + \left(\frac{5}{4}e + \frac{9}{4}e^{-1} + 3 \right) e^{-t^2} + \frac{1}{2}. \\ &= \left(\frac{5}{4}e + \frac{25}{4}e^{-1} + 5 \right) e^{-t^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Derivando $g(t)$ e igualando a $y'(t)$:

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{5}{4}e + \frac{25}{4}e^{-1} + 5 \right) e^{-t^2} + \frac{1}{2},$$

satisfazendo a solução do sistema não homogêneo (2.10).

Além disso, o Teorema 2.3 garante que a diferença entre duas soluções do sistema (2.10), satisfaz o sistema homogêneo (2.11). Para isso, consideremos $y^*(t)$ para a solução do sistema (2.10) com nova condição inicial $y(0) = 1$, obtemos:

- Se $t \in [0, 1]$, temos:

$$y^*(t) = \frac{1}{2} (e^{-t^2} + 1).$$

- Quando $t = 1$, ocorre o primeiro salto:

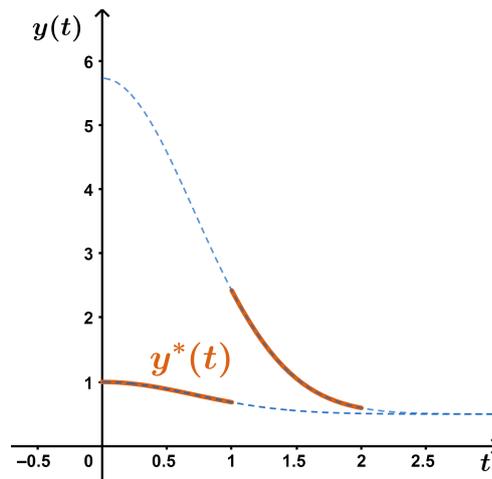
$$y^*(1^+) = y(1) + \Delta y = \frac{1}{2} (e^{-1} + 1) + \left(\frac{1}{2} (e^{-1} + 1) \right)^2 + 1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}e^{-2} + e^{-1}$$

- Se $t \in (1, 2]$, consideremos a nova condição inicial $y^*(1^+) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}e^{-2} + e^{-1}$:

$$y^*(t) = \left(\frac{5}{4}e + \frac{1}{4}e^{-1} + 1 \right) e^{-t^2} + \frac{1}{2}.$$

A representação gráfica da solução do sistema (2.10) com condição inicial $y(0) = 1$ é apresentada a seguir:

Figura 2.3: Solução da EDI não homogênea (linha sólida).



Fonte: Elaborada pela autora.

Segue que $h(t) = y(t) - y^*(t)$, para $t \in [1, 2]$, é expressa como:

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(\frac{5}{4}e + \frac{9}{4}e^{-1} + 3 \right) e^{-t^2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{4}e + \frac{1}{4}e^{-1} + 1 \right) e^{-t^2} - \frac{1}{2} \\ &= (2e^{-1} + 2) e^{-t^2}. \end{aligned}$$

Derivando $h(t)$ e igualando a $x'(t)$:

$$\Rightarrow x(t) = (2e^{-1} + 2)e^{-t^2},$$

satisfazendo a solução do sistema homogêneo (2.11).

O próximo resultado estabelece uma mudança de variável para o sistema não homogêneo. Também é admitido um único impulso t_i , mas a ideia pode ser repetida se tiver uma quantidade finita de momentos de impulso.

Teorema 2.5. *Seja S uma matriz não singular continuamente diferenciável para $t \in [a, b] - \{t_i\}$. Então a mudança linear de variáveis:*

$$x = S(t) \cdot y. \tag{2.12}$$

transforma o sistema não homogêneo (2.9) na forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = S^{-1}(t) \cdot \left[A(t)S(t) - \frac{dS}{dt} \right] y + S^{-1}(t)f(t), & t \neq t_i, \\ \Delta y = S^{-1}(t_i^+)(-\Delta S + B_i S)y + S^{-1}(t_i^+)a_i, & t = t_i. \end{cases} \quad (2.13)$$

Demonstração. Considere o sistema não homogêneo (2.9) e fazendo a mudança de variável (2.12) segue que:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) = A(t)S(t)y + f(t).$$

Além disso, derivando (2.12):

$$\frac{dx}{dt} = S'(t)y + S(t)y'.$$

Então:

$$\begin{aligned} S'(t)y + S(t)y' &= A(t)S(t)y + f(t). \\ S(t)y' &= A(t)S(t)y - S'(t)y + f(t). \\ &= [A(t)S(t) - S'(t)]y + f(t). \\ y' &= S^{-1}(t)[A(t)S(t) - S'(t)]y + S^{-1}(t)f(t). \\ \frac{dy}{dt} &= S^{-1}(t) \cdot \left[A(t)S(t) - \frac{dS}{dt} \right] y + S^{-1}(t)f(t). \end{aligned}$$

Além disso, pelo sistema não homogêneo (2.9), segue que:

$$\Delta x = B_i x + a_i \stackrel{(2.12)}{=} B_i(S(t)y) + a_i, \quad t = t_i.$$

E ainda, $\Delta x = x(t^+) - x(t) \stackrel{(2.12)}{=} S(t^+)y(t^+) - S(t)y(t)$, $t = t_i$.

Obtemos assim,

$$\begin{aligned} S(t^+)y(t^+) - S(t)y(t) &= B_i S(t)y + a_i. \\ S(t^+)y(t^+) - S(t)y(t) - S(t^+)y(t) &= -S(t^+)y(t) + B_i S(t)y + a_i. \\ S(t^+)y(t^+) - S(t^+)y(t) &= S(t^+)y(t) - S(t)y(t) + B_i S(t)y + a_i. \\ S(t^+)\Delta y &= -\Delta S y + B_i S(t)y + a_i. \\ S(t^+)\Delta y &= [-\Delta S + B_i S(t)]y + a_i. \\ \Delta y &= S^{-1}(t^+)[- \Delta S + B_i S(t)]y + S^{-1}(t^+)a_i, \quad t = t_i. \end{aligned}$$

□

Em particular, se $S(t)$ é a matriz fundamental do sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(t) \cdot x, & t \neq t_i, \\ \Delta x = F_i \cdot x, & t = t_i, \end{cases} \quad (2.14)$$

sendo $(I + F_i)$ matrizes não singulares o sistema (2.14) torna-se:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = S^{-1}(t) \cdot [A(t) - P(t)] S(t)y + S^{-1}(t)f(t), & t \neq t_i, \\ \Delta y = S^{-1}(t_i^+)(B_i - F_i)S(t)y + S^{-1}(t_i^+)a_i, & t = t_i. \end{cases}$$

Temos as equações acima, pois, sendo $S(t)$ a matriz fundamental do sistema (2.14), então:

$$\begin{cases} S'(t) = P(t) \cdot S(t), \\ \Delta S = F_i \cdot S(t). \end{cases}$$

Se $A(t) = P(t)$, $B_i = F_i$ e $S(t) = X(t)$, sendo $X(t)$ a matriz fundamental do sistema impulsivo (2.1), então a mudança de variáveis (2.12) é chamada “Variação dos Parâmetros”, pois o vetor c em (2.3) pode ser substituído pelo vetor y . E assim o sistema não homogêneo (2.9) torna-se:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = X^{-1}(t) \cdot f(t), & t \neq t_i, \\ \Delta y = X^{-1}(t_i^+)a_i, & t = t_i, \end{cases} \quad (2.15)$$

que pode ser prontamente integrado. Considerando $X(t_i^+) = (I + B_i)X(t_i)$, a condição de impulso pode ser escrita como:

$$\Delta y = X^{-1}(t_i)(I + B_i)^{-1}a_i, \quad t = t_i.$$

Assim de (2.15), obtemos:

$$y = c + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} X^{-1}(t_i)(I + B_i)^{-1}a_i,$$

sendo $c = y(t_0)$ um vetor constante.

Corolário 2.6. *Seja $X(t)$ a matriz fundamental do sistema impulsivo (2.1) com a matriz $(I + B_i)$ não singular. Então toda solução do sistema não homogêneo (2.9), para $t \geq t_0$ é dada por:*

$$x(t) = X(t) \left[c + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} X^{-1}(t_i)(I + B_i)^{-1}a_i \right]. \quad (2.16)$$

Em particular, se $X(t_0, t_0) = I_n$, então qualquer solução do sistema (2.9) $x(t, x_0)$, com $(t_0, x_0) = x_0$, $t \geq t_0$ pode ser escrita como:

$$x(t, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)f(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} X(t, t_i)a_i. \quad (2.17)$$

Demonstração. A demonstração é consequência direta do Teorema 2.5.

Observemos que, seja $X(t)$ a matriz fundamental do sistema (2.1), segue então que $x(t) = X(t) \cdot y$, (substituímos o vetor c pelo vetor y), e, pelo Teorema 2.5 temos:

$$x(t) = X(t) \left[c + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} X^{-1}(t_i)(I + B_i)^{-1}a_i \right].$$

Para o caso particular, como $X(t_0, t_0) = I_n = I_n^{-1} = X^{-1}(t, t_0)$, e ainda por (2.8) a solução pode ser escrita como

$$x(t, t_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)f(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} X(t, t_i^+)a_i, \quad t \geq t_0.$$

□

Estas duas relações mostram que se as soluções do sistema homogêneo correspondente são conhecidas, então as soluções do sistema não homogêneo (2.9) podem ser determinadas resolvendo a expressão (2.16) ou (2.17).

2.1.2 Estabilidade de Soluções

Nesta seção utilizaremos o conceito de norma matricial, apresentaremos, assim, uma breve introdução deste conceito e algumas propriedades que serão importantes para o desenvolvimento dos resultados de estabilidade.

Apresentamos na sequência a definição de estabilidade para o sistema diferencial impulsivo com impulsos pré-fixados. Entretanto para os resultados apresentados, faz-se necessário uma breve introdução sobre normas de matrizes com referência em [15].

A norma de um vetor x pode ser interpretada como sendo o comprimento ou a magnitude de x e essa ideia também pode ser estendida ao espaço de matrizes.

Definição 2.7. Chama-se norma de uma matriz A e denotamos por $\|A\|$ qualquer função $\|\cdot\|$ definida no espaço de matrizes $n \times m$, com valores em \mathbb{R} , satisfazendo as seguintes condições, sendo A e B matrizes $n \times m$:

i. $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (Positividade)

ii. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ para todo escalar α (Homogeneidade Absoluta)

iii. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Desigualdade Triangular)

Além disso, quando temos $m = n$ e as normas $\|\cdot\|$ são as mesmas, é válido:

iv. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (Consistência)

E se A é uma matriz $n \times n$ e x um vetor $m \times 1$, então vale:

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V.$$

Assim, em correspondência a qualquer norma vetorial no \mathbb{R}^n , é possível definir uma norma matricial compatível que é denominada normal matricial subordinada à norma vetorial. Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$, utilizaremos a seguinte norma matricial da soma:

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n \|a_{i,j}\|.$$

Vamos definir solução estável para o problema impulsivo, que permite estudar o estado do sistema em determinados pontos, ou seja, estudar o comportamento das soluções. Assim uma condição inicial suficientemente próxima de uma solução estável, por exemplo, implica que o sistema não se alterará.

Consideremos o sistema impulsivo a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x, & t \neq t_i, \\ \Delta x = B_i \cdot x, & t = t_i, \\ x(t_0^+) = x_0, \end{cases} \quad (2.18)$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções contínuas e limitadas para $t \neq t_i$ e B_i , $i = 1, 2, \dots$ são matrizes cujas entradas são uniformemente limitadas. Além disso, t_i são tempos fixos tais que o índice i pertence ao conjunto dos naturais, de modo que: $t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$ e $t_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$.

Definição 2.8. Seja $\bar{x} = x(t, t_0)$ uma solução de (2.18) para $t \geq t_0$. Então a solução \bar{x} de (2.18) é denominada:

i. Estável, se para todo $\varepsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}^+$, existe um $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tal que para $t \geq t_0$:

$$|x(t_0) - \bar{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x(t) - \bar{x}| < \varepsilon.$$

Assim, soluções que se iniciam próximas de \bar{x} permanecem próximas de \bar{x} para todo $t \geq t_0$.

- ii. Assintoticamente estável, se acontece (i.), ou seja, é estável e, além disso, para cada $\varepsilon > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$, tal que para $t \geq t_0$,

$$|x(t_0) - \bar{x}| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}(t).$$

Neste caso, além de se ter estabilidade, a solução que se inicia próxima a \bar{x} tende a \bar{x} com o passar do tempo.

- iii. Instável, se não acontece (i.), ou seja, existe $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $\delta > 0$ temos para algum $t \geq t_0$,

$$|x(t_0) - \bar{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x(t) - \bar{x}| \geq \varepsilon.$$

Dessa forma, a condição de estabilidade da solução do sistema (2.18) é enunciada a partir do teorema a seguir:

Teorema 2.9. *Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de uma solução $x(t, x_0)$ do sistema (2.18) é a matriz fundamental $X(t, t_0)$ do sistema (2.18), que satisfaz $X(t_0, t_0) = I_n$, ser limitada para $t \geq t_0$.*

Uma solução é assintoticamente estável se, e somente se, a matriz fundamental $X(t, t_0)$ satisfaz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0) = 0.$$

E para ser uma solução instável é necessário e suficiente que $X(t, t_0)$ seja ilimitada para $t \geq t_0$.

Demonstração. Seja $X(t, t_0)$ a matriz fundamental do sistema (2.18), então pode ser representada conforme (2.6) por:

$$X(t, t_0) = U(t, t_{j+k})(I_n + B_{j+k}) \prod_{v=k}^1 U(t_{j+v}, t_{j+v-1})(I_n + B_{j+v-1})U(t_j, t_0).$$

Sendo $x(t, x_0)$ uma solução de (2.18), então esta pode ser escrita como:

$$x(t, x_0) = X(t, t_0)x_0.$$

Dessa forma, a diferença entre duas soluções do sistema é dada por:

$$x(t, x_0) - x(t, y_0) = X(t, t_0) \cdot (x_0 - y_0). \quad (2.19)$$

Uma vez que buscamos uma diferença pequena entre soluções numa vizinhança de $x(t, x_0)$, o comportamento da solução dependerá de $X(t, t_0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Desse modo, vejamos as possibilidades que satisfazem as condições necessárias e suficientes do teorema.

Suponha $X(t, t_0) = \{q_{i,j}(t)\}$ limitada para $t \geq t_0$, ou seja, existe uma constante $M > 0$ tal que a expressão a seguir é válida para todo $t \geq t_0$:

$$\|X(t, t_0)\| = \sum_{i,j=1}^n |q_{\alpha,\beta}(t)| \leq M < \infty.$$

Então:

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| &= \|X(t, t_0) \cdot (x_0 - y_0)\| \\ &\leq \|X(t, t_0)\| \cdot \|x_0 - y_0\| \\ &= M \cdot \|x_0 - y_0\|. \end{aligned}$$

Seja, $\|x_0 - y_0\| < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$, então:

$$\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| < \varepsilon.$$

Ou seja a solução $x(t, x_0)$ satisfaz a definição de estabilidade.

Se $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0) = 0$, ou seja, pela definição de limite, $\exists \delta > 0$, tal que

$$t > \delta \Rightarrow \|X(t, t_0)\| < \varepsilon.$$

E assim, a matriz $X(t, t_0)$ é limitada e por (i.) a solução é estável.

Supondo $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0) = 0$, segue de (2.19) que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| = 0,$$

para qualquer solução $x(t, y_0)$, isto significa que a solução $x(t, x_0)$ é assintoticamente estável.

Suponha agora, $X(t, t_0)$ ilimitada para $t \geq t_0$. O que significa que existe uma sequência infinita e crescente de números $t_0 < t_1 < \dots$, tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X(t_k, t_0)\| = \infty.$$

Nesta situação, entre os elementos da matriz fundamental $X(t, t_0)$ existe ao menos um elemento $q_{\alpha,\beta}(t)$ sendo $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$, em que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|q_{\alpha,\beta}(t_k)\| = \infty. \quad (2.20)$$

A solução $x(t, x_0)$ do sistema (2.18) é representada por:

$$x(t, x_0) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_\beta & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Seja, então, a solução $x(t, x_0^*)$ do sistema (2.18) que passa pelo ponto x_0^* quando $t = t_0$, tal que as coordenadas sejam as de $x(t, x_0)$ exceto pela entrada $x_\beta \neq x_\beta^*$:

$$x(t, x_0^*) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_\beta^* & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Como:

$$x(t, t_0) = X(t, t_0) \cdot x_0.$$

Observando o elemento $q_{\alpha,\beta}(t)$ da matriz fundamental, a solução é representada por:

$$x_\alpha(t, x_0^*) = q_{\alpha,\beta}(t) \cdot x_\beta^*.$$

Dessa forma, a diferença entre as soluções na entrada α é dada por:

$$x_\alpha(t, x_0^*) - x_\alpha(t, x_0) = q_{\alpha,\beta}(t) \cdot (x_\beta^* - x_\beta).$$

Segue por (2.20) que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_\alpha(t_k, x_0^*) - x_\alpha(t_k, x_0)\| = \infty.$$

Não importa quão pequena seja a diferença $(x_\beta^* - x_\beta)$, a função $x_\alpha(t, x_0^*) - x_\alpha(t, x_0)$ será ilimitada quanto $t \rightarrow \infty$ implicando que $x(t, x_0^*) - x(t, x_0)$ também seja ilimitada.

Portanto a solução é instável.

□

Como $X(t, t_0)$ não depende da condição inicial de $x(t, x_0)$, as soluções do sistema (2.18) são estáveis ou instáveis, o sistema, por sua vez, é denominado conforme a estabilidade das soluções, ou seja, temos sistemas estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis.

Consideremos, por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(t) \cdot x, & t \neq t_i, \\ \Delta x = b_i \cdot x, & t = t_i. \end{cases} \quad (2.21)$$

Então podemos escrever a solução de (2.21):

Para $t \in [t_0, t_1]$:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Em t_1 , temos: $x(t_1^+) = x(t_1) + b_1x(t_1) = (1 + b_1)x(t_1)$

$$x(t_1) = x_0(1 + b_1) \cdot e^{\int_{t_0}^{t_1} a(s)ds}.$$

E para $t \in (t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= x_0(1 + b_1) \cdot e^{\int_{t_0}^{t_1} a(s)ds} e^{\int_{t_1}^t a(s)ds}. \\ \Rightarrow x(t) &= x_0(1 + b_1) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}. \end{aligned}$$

Quando t_2 , temos: $x(t_2^+) = x(t_2) + b_2x(t_2) = (1 + b_2)x(t_2)$

$$x(t_2) = x_0(1 + b_2) \cdot e^{\int_{t_0}^{t_2} a(s)ds}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= x_0(1 + b_1) \cdot e^{\int_{t_0}^{t_1} a(s)ds} (1 + b_2) \cdot e^{\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds} e^{\int_{t_2}^t a(s)ds}. \\ \Rightarrow x(t) &= x_0(1 + b_1)(1 + b_2) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad t \in (t_2, t_3]. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo argumento, para $t \in (t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(1 + b_1)(1 + b_2) \cdots (1 + b_j) e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}. \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{x(t)}{x_0} \right| &= \ln |1 + b_1| + \cdots + \ln |1 + b_j| + \int_{t_0}^t a(s)ds. \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{x(t)}{x_0} \right| &= \sum_{i=1}^j \ln |1 + b_i| + \int_{t_0}^t a(s)ds. \end{aligned}$$

Assim, o sistema será denominado estável, assintoticamente estável ou instável a partir do comportamento da expressão:

$$\int_{t_0}^t a(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} \ln |1 + b_i|,$$

que pode ser limitada ou tender a $-\infty$ quando $t \rightarrow \infty$ ou ser ilimitada para $t \geq t_0$.

Os sistemas impulsivos lineares com coeficientes constantes, são sistemas de resolução mais simples, mas serão importantes para determinar a estabilidade de sistemas mais complexos.

Consideremos o sistema :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, & t \neq t_i, \\ \Delta x = Bx, & t = t_i, \end{cases} \quad (2.22)$$

sendo A e B matrizes com entradas constantes.

A construção da solução do sistema é apresentada a seguir:

Se $t_0 = t_0^+$, então

$$X(t, t_0) = (I_n + B)e^{A(t-t_0)}.$$

Se $t_0^+ < t < t_1^+$, então

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_1)}(I_n + B)e^{A(t-t_0)}.$$

Se $t = t_1^+$, então

$$X(t, t_0) = (I_n + B)e^{A(t-t_1)}(I_n + B)e^{A(t-t_0)}.$$

Prosseguindo a construção, a matriz fundamental $X(t, t_0)$ do sistema (2.22) é representada pela seguinte equação:

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_i)} \prod_{t_0 < t_v < t} (I_n + B)e^{A(t_v-t_{v-1})}. \quad (2.23)$$

Suponha, então, que as matrizes $A(t)$ e B_i do sistema (2.18) possam ser escritas como:

$$\begin{aligned} A(t) &= A + P(t), \\ B_i &= B + F_i, \end{aligned}$$

sendo as matrizes A e B constantes, $P(t)$ uma matriz cujas entradas são funções contínuas no intervalo I e F_i é uma matriz com entradas constantes para cada $i \in \mathbb{N}$. Dessa forma o sistema (2.18) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + P(t)x, & t \neq t_i, \\ \Delta x = Bx + F_i x, & t = t_i. \end{cases} \quad (2.24)$$

A partir de (2.22) e (2.24) podemos estabelecer certa relação de estabilidade entre as soluções contudo, é necessários, antes, enunciarmos um importante lema que será utilizado no teorema de estabilidade.

Teorema 2.10. Desigualdade de Gronwall-Bellman

Sejam $u(t)$ e $f(t)$ funções contínuas e não negativas no intervalo $I = [0, \infty)$ satisfazendo

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t f(s)u(s)ds, \quad t \in I,$$

em que u_0 é uma constante não negativa. Então $u(t)$ satisfaz

$$u(t) \leq u_0 \cdot e^{\int_0^t f(s)ds}, \quad t \in I.$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [7].

Lema 2.11. *Suponha que uma função $u(t)$ contínua por partes e não negativa satisfaz para $t \geq t_0$,*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i u(t_i). \quad (2.25)$$

sendo $C \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $v(t)$ é uma função contínua e positiva e t_i são os pontos de descontinuidade de primeira espécie da função $u(t)$. Então a seguinte estimativa é válida para $u(t)$:

$$u(t) \leq C \cdot \prod_{t_0 \leq t_i < t} (1 + \beta_i) e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}. \quad (2.26)$$

Demonstração. Considere $t \in [t_0, t_1]$ então a desigualdade (2.25) é escrita como:

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds. \quad (2.27)$$

e pela desigualdade de Gronwall-Bellman temos:

$$u(t) \leq C e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.28)$$

e concluímos a validade do lema neste intervalo.

Provemos o lema usando indução finita. Façamos a prova para o caso $t \in (t_1, t_2]$.

Por hipótese, temos

$$\begin{aligned} u(t) &\leq C + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds + \beta_1 u(t_1) \\ &= C + \beta_1 u(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} v(s)u(s)ds + \int_{t_1}^t v(s)u(s)ds. \end{aligned}$$

Usando (2.28) e aplicando na desigualdade anterior, ficamos com:

$$u(t) \leq C + \beta_1 \cdot C e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds} + \int_{t_0}^{t_1} v(s) \cdot C e^{\int_{t_0}^s v(s)ds} ds + \int_{t_1}^t v(s)u(s)ds. \quad (2.29)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} &C + \beta_1 \cdot C e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds} + \int_{t_0}^{t_1} v(s) \cdot C e^{\int_{t_0}^s v(s)ds} ds \\ &= C + \beta_1 \cdot C e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds} + C \cdot \int_{t_0}^{t_1} \left[e^{\int_{t_0}^s v(s)ds} \right]' ds \\ &= C + \beta_1 \cdot C e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds} + C \left[e^{\int_{t_0}^s v(s)ds} - 1 \right] \\ &= C + \beta_1 \cdot C e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds} + C e^{\int_{t_0}^s v(s)ds} - C \\ &= C (1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds}. \end{aligned}$$

Voltando em (2.29), ficamos com:

$$u(t) \leq C(1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s) ds} + \int_{t_1}^t v(s)u(s) ds.$$

Portanto,

$$u(t) \leq C^* + \int_{t_1}^t v(s)u(s) ds,$$

em que $C^* = C(1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s) ds}$.

Aplicando o Teorema 2.10, obtemos:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq C^* e^{\int_{t_1}^t v(s) ds}, \text{ ou seja,} \\ u(t) &\leq C(1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s) ds} \cdot e^{\int_{t_1}^t v(s) ds}. \\ \Rightarrow u(t) &\leq C(1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}, \quad t \in (t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Admitindo a hipótese (2.27), concluímos que:

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t v(s)u(s) ds + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i u(t_i),$$

com $t \in (t_{k-1}, t_k]$. Mostremos agora que é válido também para $t \in (t_k, t_{k+1}]$.

Devido a hipótese de indução, sabemos que:

$$\begin{aligned} u(t_1) &\leq C e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s)u(s) ds}. \\ u(t_2) &\leq C(1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^{t_2} v(s)u(s) ds}. \\ &\vdots \\ u(t_k) &\leq C[(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \cdots (1 + \beta_{k-1})] e^{\int_{t_0}^{t_{k-1}} v(s) ds}. \end{aligned}$$

Agora, para $t \in (t_k, t_{k+1}]$, vale:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq C + \int_{t_0}^t v(s)u(s) ds + \sum_{i=1}^k \beta_i u(t_i) \\ &= C + \beta_1 u(t_1) + \beta_2 u(t_2) + \cdots + \beta_k u(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} v(s)u(s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(s)u(s) ds. \end{aligned}$$

Utilizando as hipóteses nos termos $u(t_i)$,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq C + \beta_1 \cdot C e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s) ds} + \beta_2 \cdot C(1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^{t_2} v(s) ds} + \dots + \\ &+ \beta_k \cdot C[(1 + \beta_1) \cdots (1 + \beta_{k-1})] e^{\int_{t_0}^{t_{k-1}} v(s) ds} + \int_{t_0}^{t_1} v(s) \cdot C e^{\int_{t_0}^s v(s) ds} ds + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} v(s) \cdot C(1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^s v(s) ds} ds + \dots + \\ &+ \int_{t_k}^{t_{k-1}} v(s) \cdot C[(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \cdots (1 + \beta_{k-1})] e^{\int_{t_0}^s v(s) ds} ds + \int_{t_k}^t v(s) u(s) ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq C \left\{ 1 + \beta_1 \cdot e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s) ds} + \beta_2 \cdot (1 + \beta_1) e^{\int_{t_0}^{t_2} v(s) ds} + \dots + \right. \\ &+ \beta_k \cdot (1 + \beta_1) \cdots (1 + \beta_{k-1}) e^{\int_{t_0}^{t_{k-1}} v(s) ds} + \\ &+ \left[e^{\int_{t_0}^{t_1} v(s) ds} - 1 \right] + (1 + \beta_1) \left[e^{\int_{t_0}^{t_2} v(s) ds} - 1 \right] + \dots + \\ &+ \left. (1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \cdots (1 + \beta_{k-1}) \left[e^{\int_{t_0}^{t_k} v(s) ds} - 1 \right] \right\} + \int_{t_k}^t v(s) u(s) ds. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) \leq C \left(\prod_{i=1}^k (1 + \beta_i) e^{\int_{t_0}^{t_k} v(s) ds} \right) + \int_{t_k}^t v(s) u(s) ds,$$

como $C^* = C \left(\prod_{i=1}^k (1 + \beta_i) e^{\int_{t_0}^{t_k} v(s) ds} \right)$ é constante, pela Desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq C \left(\prod_{i=1}^k (1 + \beta_i) e^{\int_{t_0}^{t_k} v(s) ds} \right) \cdot e^{\int_{t_k}^t v(s) ds} \\ &\leq C \left(\prod_{i=1}^k (1 + \beta_i) e^{\int_{t_0}^t v(s) ds} \right), \end{aligned}$$

para $t \in (t_k, t_{k+1}]$, provando o lema. □

Assim, considerando os sistemas (2.24) e (2.22), segue o teorema:

Teorema 2.12. *Se as soluções do sistema (2.22) são estáveis, então as soluções do sistema (2.24) também são estáveis se:*

$$\int_{t_0}^{\infty} \|P(s)\| ds < \infty \quad e \quad \prod_{t_i > t_0} (1 + \|F_i\|) < \infty.$$

Demonstração. A matriz fundamental de (2.22) é representada por:

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_i)} \prod_{t_0 < t_v < t} (I_n + B) e^{A(t_v - t_{v-1})}, \quad t_0 = t_0^+.$$

Como a matriz $(I + B)$ é não singular, então $X(t, t_0)$ também é não singular e ainda:

$$X(t, t_0) \cdot X^{-1}(\sigma, t_0) = e^{A(t-t_i)} \prod_{\sigma < t_j < t_i} (I_n + B) e^{A(t_j - t_{j-1})} (I_n + B) e^{A(t_{k+1} - \sigma)},$$

$$t_i < t \leq t_{i+1}, \quad t_k < \sigma < t_{k+1}, \quad k < i.$$

Por hipótese, as soluções de (2.22) são estáveis, segue que a matriz fundamental $X(t, t_0)$ é limitada, ou seja, existe $K > 0$, tal que:

$$\|X(t, t_0)\| \leq K, \quad t \leq t_0. \quad (2.30)$$

Além disso, segue de (2.17) que qualquer solução do sistema (2.24) pode ser escrita como:

$$x(t, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \sigma)P(\sigma)x(\sigma, x_0)d\sigma + \sum_{t_0 < t_i < t} [X(t, t_i^+)F_i x(t_i^+, x_0)].$$

Assim a norma da diferença entre duas soluções de (2.24) é dada por:

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| &\leq \|X(t, t_0)(x_0 - y_0)\| + \int_{t_0}^t \|X(t, \sigma)P(\sigma) [x(\sigma, x_0) - x(\sigma, y_0)]\| d\sigma \\ &+ \sum_{t_0 < t_i < t} \|X(t, t_i^+)F_i [x(t_i^+, x_0) - x(t_i^+, y_0)]\|. \end{aligned}$$

Segue de (2.30) que:

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| &\leq K\|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t K\|P(\sigma)\| \|x(\sigma, x_0) - x(\sigma, y_0)\| d\sigma \\ &+ \sum_{t_0 < t_i < t} K\|F_i\| \|x(t_i^+, x_0) - x(t_i^+, y_0)\|. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.11, para todo $t \geq t_0$:

$$\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| \leq K\|x_0 - y_0\| \prod_{t_0 \leq t_1 < t} (1 + K\|F_i\|) \cdot e^{\int_{t_0}^t K\|P(\sigma)\| d\sigma}.$$

Se, por hipótese, $\prod_{t_i > t_0} (1 + \|F_i\|)$ é convergente e utilizando a conhecida Desigualdade de Bernoulli $(1 + K\|F_i\|) \leq (1 + \|F_i\|)^K$ segue que:

$$\prod_{t_0 \leq t_1 < t} (1 + K\|F_i\|),$$

também é convergente.

Dessa forma, considerando $K_2 = K \prod_{t \geq t_0} (1 + K \|F_i\|) \cdot e^{\int_{t_0}^{\infty} K \|P(\sigma)\| d\sigma}$, temos:

$$\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| \leq K_2 \|x_0 - y_0\|. \quad (2.31)$$

Seja, $\|x_0 - y_0\| < \delta < \frac{\varepsilon}{K_2}$, então:

$$\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| < \varepsilon.$$

Portanto, as soluções de (2.24) satisfazem a definição de estabilidade. □

Podemos ainda provar condições de estabilidade para sistemas com matrizes constantes. Consideremos então:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, & t \neq t_i, \\ \Delta x = Bx, & t = t_i. \end{cases} \quad (2.32)$$

sendo A e B matrizes com entradas constantes e os tempos de impulso t_i são indexados por números naturais em ordem crescente tal que $t_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $t_i > t_0$, sendo t_0 o tempo inicial.

As soluções de (2.32) podem ser escritas como

$$x(t, x_0) = X(t, t_0) \cdot x_0.$$

Sendo $X(t, t_0)$ a matriz fundamental do sistema (2.32) como em (2.23):

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_i)} \prod_{t_0 < t_v < t} (I_n + B) e^{A(t_v - t_{v-1})}.$$

Por esta expressão, não é possível, no caso geral, estabelecer as condições necessárias e suficientes para a estabilidade das soluções do sistema (2.32) em termos dos valores da matriz do sistema, como obtemos para equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Contudo, há casos específicos em que podemos determinar tais condições, por exemplo, se as matrizes A e B comutam, ou seja, $AB = BA$. Neste caso, obtemos propriedades interessantes da exponencial da matriz e temos como referência [16].

Definição 2.13. Exponencial de Matriz

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$, sendo $M(n)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n é definida por:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^j}{j!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

A convergência desta série pode ser garantida pelo Critério de Cauchy, uma vez que

para $m > n$ e $\varepsilon > 0$, temos:

$$\left\| \sum_{j=0}^m \frac{A^j}{j!} - \sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=n+1}^m \frac{\|A\|^j}{j!} < \varepsilon,$$

pois $\sum \frac{a^j}{j!}$ é convergente para todo $a \in \mathbb{R}$.

Sejam A , B e P matrizes quadradas $n \times n$ e a e b números reais ou complexos, arbitrários e $\mathbf{0}$ a matriz quadrada nula. As seguintes propriedades de exponencial de matriz são válidas:

- i. $e^{\mathbf{0}} = I_n$;
- ii. $e^{(a+b)A} = e^{aA} \cdot e^{bA}$;
- iii. Se $AB = BA \Rightarrow e^A \cdot e^B = e^{A+B}$;
- iv. $e^A \cdot e^{-A} = I_n$;
- v. Se A é uma matriz diagonalizável e P é inversível, então:

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1},$$

sendo D a matriz diagonal.

Utilizando as propriedades e observando a matriz fundamental temos:

- $t_i = t_1$

$$\begin{aligned} X(t, t_0) &= e^{A(t-t_1)} \cdot (I_n + B) \cdot e^{A(t_1-t_0)} \\ &= e^{At} \cdot e^{-At_1} \cdot (I_n + B) \cdot e^{At_1} \cdot e^{-At_0} \\ &= e^{A(t-t_0)}(I_n + B). \end{aligned}$$

- $t_i = t_2$

$$\begin{aligned} X(t, t_0) &= e^{A(t-t_2)} \cdot (I_n + B) \cdot e^{A(t_2-t_1)} \cdot (I_n + B) \cdot e^{A(t_1-t_0)} \\ &= e^{At} \cdot e^{-At_2} \cdot (I_n + B) \cdot e^{At_2} \cdot e^{-At_1} \cdot (I_n + B) \cdot e^{At_1} \cdot e^{-At_0} \\ &= e^{A(t-t_0)}(I_n + B)^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, com A e B comutativas, a matriz fundamental do problema (2.32) pode ser escrita como:

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}(I + B)^{i(t,t_0)}. \quad (2.33)$$

sendo $i(t, t_0)$ o número de instantes de impulso t_i ao longo do intervalo $[t_0, t)$, ou seja, $i(t, t_0) = k$, se $t_k < t < t_{k+1}$.

Assim quando $t \rightarrow \infty$, o comportamento das soluções dependem do autovalor das matrizes A e B e das condições da sequência $\{t_i\}$.

Definição 2.14. Autovalor

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n , com entradas reais e $\lambda \in \mathbb{C}$, dizemos que λ é um autovalor da matriz A , se existe um vetor v , não nulo, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

Neste caso, v é denominado autovetor da matriz A associado a λ .

Teorema 2.15. *Considere o sistema (2.32), em que as matrizes A e B são comutativas e os tempos de impulso t_i satisfazem:*

$$0 < \theta_1 \leq t_{i+1} - t_i \leq \theta_2.$$

Suponha,

$$\max \lambda_j(A) + \frac{1}{\theta_0} \ln \max |1 + \lambda_j(B)| < 0, \quad (2.34)$$

sendo $\lambda_j(A)$ e $\lambda_j(B)$ os autovalores associados às matrizes A e B , respectivamente, e:

$$\alpha = \max(\operatorname{Re}(\lambda_j(A))) \quad \beta = \max(1 + \operatorname{Re}(\lambda_j(B))).$$

Consideramos ainda:

$$\theta_0 = \begin{cases} \theta_1, & \alpha \geq 0, \\ \theta_2, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Então, as soluções do sistema (2.32) são assintoticamente estáveis.

Demonstração. Por hipótese as matrizes A e B são comutativas e segue que a matriz fundamental é dada por (2.33):

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}(I + B)^{i(t, t_0)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|e^{A(t-t_0)}\| &\leq K_1 \cdot e^{\alpha(t-t_0)} \leq K_1 \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)}, & K_1 > 0, \quad \varepsilon > 0. \\ \|(I + B)^{i(t, t_0)}\| &\leq K_2 \cdot (\beta)^{i(t, t_0)} \leq K_2 \cdot (\beta + \varepsilon)^{i(t, t_0)}, & K_2 = K_2(\varepsilon) > 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|X(t, t_0)\| &\leq K_1 \cdot K_2 \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)} \cdot (\beta + \varepsilon)^{i(t, t_0)} \\ &\leq K_1 \cdot K_2 \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_k)} \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)(t_k-t_{k-1})} (\beta + \varepsilon) \cdots e^{(\alpha+\varepsilon)(t_1-t_0)} (\beta + \varepsilon) \\ &\leq K_1 \cdot K_2 \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)\theta_0} \cdot \left[e^{(\alpha+\varepsilon)\theta_0} (\beta + \varepsilon) \right]^{i(t, t_0)}. \end{aligned}$$

A partir da hipótese (2.34), segue que:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{\max \lambda_j(A) + \frac{1}{\theta_0} \ln \max |1 + \lambda_j(B)|} < 1. \\ &\Rightarrow e^{\max \lambda_j(A)} \cdot e^{\frac{1}{\theta_0} \ln \max |1 + \lambda_j(B)|} < 1. \\ &\Rightarrow e^{\max \lambda_j(A)} \cdot \max |1 + \lambda_j(B)|^{\frac{1}{\theta_0}} < 1. \end{aligned}$$

Portanto, temos a desigualdade:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^\alpha \cdot \beta^{\frac{1}{\theta_0}} < 1. \\ &\Rightarrow e^\alpha \cdot (\beta)^{\frac{1}{\theta_0}} < 1. \\ &\Rightarrow e^{\alpha\theta_0} \cdot \beta < 1. \end{aligned}$$

Como por hipótese, $t \rightarrow \infty$ então $i(t, t_0) \rightarrow \infty$, e ainda podemos escolher ε suficientemente pequeno de modo que:

$$e^{(\alpha+\varepsilon)\theta_0} (\beta + \varepsilon) < 1.$$

Assim, $\|X(t, t_0)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e portanto, as soluções do sistema (2.32) satisfazem a definição e são assintoticamente estáveis.

□

Uma vez que as matrizes A e B são comutativas, a matriz $(I + B)$ é não singular e os tempos de impulso são igualmente espaçados, ou seja,

$$t_{i+1} - t_i = \theta > 0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.35)$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $t_i = t_0 + i\theta$, $i = 1, 2, \dots$ e assim,

$$i = \frac{t_i - t_0}{\theta}.$$

Fazendo as devidas substituições e ajustes, a matriz $X(t, t_0)$ é reescrita como:

$$X(t, t_0) = \exp \left\{ \left(A + \frac{1}{\theta} \ln(I + B) \right) \left[\frac{t - t_0}{\theta} \right] \theta \right\} \cdot \exp \left(\theta \left\{ \frac{t - t_0}{\theta} \right\} \right).$$

Nessa expressão $\left[\frac{t - t_0}{\theta} \right]$ e $\left\{ \frac{t - t_0}{\theta} \right\}$ são as partes inteira e fracionária do número

$\frac{t-t_0}{\theta}$. Note que a quebra entre parte inteira e fracionária acontece somente para facilitar cálculos. Portanto, as condições necessárias e suficientes da estabilidade assintótica das soluções de (2.32) são expressas em termos dos autovalores da matriz:

$$A + \frac{1}{\theta} \ln(I + B). \quad (2.36)$$

Exemplo 2.16. Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2, \\ \Delta x_1 = -\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{3}, & t = t_i, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1, \\ \Delta x_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{3}{2}x_2, & t = t_i, \end{cases} \quad (2.37)$$

sendo dada a sequência $\{t_i\}$, de modo que:

$$0 < \theta_1 \leq t_{i+1} - t_i \leq \theta_2,$$

Nesta situação temos:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

As matrizes A e B são comutativas, pois:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} & -1 + \frac{3}{2} \\ -1 + 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 - 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Podemos ainda, encontrar os autovalores da matriz A e obtemos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. E para o sistema:

$$\dot{x} = Ax.$$

encontramos duas soluções linearmente independentes do sistema (2.37):

$$\bar{x}_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Sendo:

$$(I + B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever as soluções de (2.37) na forma vetorial:

$$\bar{x}_{(1)}(t) = e^t \cdot (I + B)^{i(0,t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_{(2)}(t) = e^{2t} \cdot (I + B)^{i(0,t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então todas as soluções de (2.37) são representadas por:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = (I + B)^{i(0,t)} \left(c_1 \cdot e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Além disso, se temos $i(0, t) = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, observamos:

$$(I + B)^{2k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6^{2k}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^{2k}} \end{pmatrix},$$

se $i(0, t) = 2k + 1$:

$$(I + B)^{2k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{3 \cdot 6^{2k}} \\ \frac{2}{3 \cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} \end{pmatrix}.$$

Então, se $t_{2k} < t \leq t_{2k+1}$:

$$x_1(t) = \frac{1}{6^{2k}} (c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}), \quad x_2(t) = \frac{1}{6^{2k}} (2c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}).$$

E se $t_{2k+1} < t \leq t_{2k+2}$, temos:

$$x_1(t) = \frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} (c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}) - \frac{1}{3 \cdot 6^{2k}} (2c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}), \quad e,$$

$$x_2(t) = \frac{2}{3 \cdot 6^{2k}} (c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}) - \frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} (2c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}).$$

Sejam os tempos de impulsos t_i , tais que $t_i > 0$:

$$0 < \theta_1 \leq t_{i+1} - t_i \leq \theta_2,$$

para θ_1 e θ_2 positivos, $i = 1, 2, \dots$.

Se θ_2 é suficientemente pequeno, isto é, o efeito impulsivo ocorre com relativa frequência, todas as soluções de (2.37) tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$. Esta situação acontece se $6^{-i(0,t)} e^{2t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. No entanto, se $i(0,t) \leq \frac{t}{\theta_2}$, então:

$$6^{-i(0,t)} e^{2t} \leq 6^{-\frac{t}{\theta_2}} e^{2t} = e^{-\frac{t}{\theta_2} \ln 6} e^{2t} = e^{-\frac{t}{\theta_2} (\ln 6 - 2\theta_2)}. \quad (2.38)$$

Como analisamos $t \rightarrow \infty$, a expressão (2.38) vai para zero quando $\ln 6 - 2\theta_2 > 0$, o que implica em $\theta_2 < \ln \sqrt{6}$.

Portanto, se $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \ln \sqrt{6}$, então todas as soluções de (2.37) tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Exemplo 2.17. Oscilador linear

Considere o oscilador linear representado pela equação:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 > \beta^2. \quad (2.39)$$

sujeito a um efeito impulsivo no momento em que o ponto de fase no plano de fase (ou plano velocidade-posição) (x, \dot{x}) intersecta a linha $x = 0$ com velocidade não negativa.

A notação utilizada indica por ponto a ordem da derivada de x em relação ao tempo t , além disso, β representa uma constante de amortecimento, enquanto ω é a frequência angular do movimento.

Assim, suponha que como resultado deste efeito, o impulso do sistema é incrementado por uma quantidade proporcional à velocidade no momento em que ocorre o impulso.

Então o movimento do oscilador é dado por:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0, & x \neq 0, \\ \Delta\dot{x} = b\dot{x}, & \text{se } x(t) = 0 \text{ e } \dot{x} > 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

E ainda, fazendo uma mudança de variável, podemos reescrever o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y, & x \neq 0, \\ \dot{y} = -\omega x - 2\beta y, \\ \Delta y = by, & \text{se } x(t) = 0 \text{ e } y > 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Seja $(x(t), y(t))$ solução do sistema (2.32) que passa pelo ponto (x_0, y_0) em $t = 0$. Denotando por t_i as soluções da equação $x(t) = 0$ tal que $y(t_i) > 0$, ou seja, t_i são

pontos de descontinuidade da função $y(t)$. Observemos que, a princípio, não conhecemos os momentos de impulso, ou seja, não estão pré-fixados.

Certamente, a solução $(x(t), y(t))$ do sistema (2.32) é também solução do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y, & x \neq 0, \\ \dot{y} = -\omega x - 2\beta y, \\ \Delta y(t_i) = by, & t = t_i, \end{cases}$$

que vamos escrever do seguinte modo, uma vez que $x(t_i) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y, & t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) = bx, & t = t_i, \\ \dot{y} = -\omega x - 2\beta y, \\ \Delta y(t_i) = by, & t = t_i. \end{cases} \quad (2.42)$$

O sistema (2.42) pode ser escrito com a notação matricial, assim as matrizes A e B do sistema são representadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Segue ainda que as matrizes A e B são comutativas:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega b \\ -\omega b & -2\beta b \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega b \\ -\omega b & -2\beta b \end{pmatrix}.$$

A resolução desse exemplo tem como base a resolução clássica de EDO apresentada em [14].

A equação (2.39) é linear e homogênea de segunda ordem, suponha $x(t) = e^{pt}$, p constante, uma solução da equação. Segue então:

$$p^2 e^{pt} + 2\beta p e^{pt} + \omega^2 e^{pt} = 0.$$

$$e^{pt} (p^2 + 2\beta p + \omega^2) = 0.$$

As raízes da equação auxiliar são dadas por:

$$p_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

A solução geral de (2.39) é:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(\alpha_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} + \alpha_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} \right). \quad (2.43)$$

Como hipótese segue que $\omega^2 > \beta^2$, segundo [14] este caso é denominado subamortecimento, o que significa que apesar do movimento oscilatório, a força de atrito suaviza o deslocamento e a partícula para na posição de equilíbrio.

É conveniente definirmos $\omega_1^2 = \omega^2 - \beta^2$, sendo $\omega_1^2 > 0$, então na equação (2.43) os expoentes são imaginários e reescrevemos a equação:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(\alpha_1 e^{i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-i\omega_1 t} \right). \quad (2.44)$$

Fazendo $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha e^{i\delta}$ e $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha e^{-i\delta}$, temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} \left(\frac{1}{2}\alpha e^{i\delta} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2}\alpha e^{-i\delta} e^{-i\omega_1 t} \right) \\ &= \alpha e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta). \end{aligned} \quad (2.45)$$

A solução acima corresponde a uma oscilação de frequência ω_1 com amplitude $\alpha e^{-\beta t}$ e sendo $\delta \in \mathbb{R}$.

Se $b > -1$, segue que não há alternância de sinais na solução do problema ao sofrer impulso, pois:

$$\operatorname{sgn} x(t_i^+) = \operatorname{sgn}(1 + b)x(t_i) = \operatorname{sgn} x(t_i).$$

A partir disso, como a função cosseno se repete quando o seu argumento aumenta em 2π radianos, segue que o período θ da solução corresponde a:

$$\theta = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

Segue ainda que os tempos t_i são igualmente espaçados e:

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

A estabilidade das soluções do sistema (2.42) é determinada pela matriz:

$$A + \frac{1}{\theta} \ln(I + B).$$

Correspondente a:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| & \omega \\ -\omega & -2\beta + \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| \end{pmatrix},$$

de modo que os autovalores da matriz sejam:

$$\rho_{1,2} = -\beta + \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}.$$

Dessa forma, como a matriz fundamental pode ser escrita como:

$$X(t, t_0) = \exp \left\{ \left(A + \frac{1}{\theta} \ln(I + B) \right) \left[\frac{t - t_0}{\theta} \right] \theta \right\}.$$

e sabendo que:

$$A + \frac{1}{\theta} \ln(I + B)$$

é diagonalizável, uma vez que possui dois autovalores distintos, então podemos escrever a matriz fundamental em função dos seus autovalores.

Seja D a matriz diagonal tal que:

$$D = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix},$$

então:

$$A + \frac{1}{\theta} \ln(I + B) = PDP^{-1},$$

sendo P uma matriz constante e invertível dos autovetores associados aos autovalores.

Assim a norma da matriz fundamental é determinada por:

$$\|X(t, t_0)\| = \|e^{(PDP^{-1})(t-t_0)}\|.$$

A partir da propriedade (v.) das exponenciais de matriz, temos:

$$\|X(t, t_0)\| = \|P \cdot e^{D(t-t_0)} \cdot P^{-1}\|.$$

As matrizes P e P^{-1} são constantes, além disso, a parte imaginária dos autovalores em módulo é equivalente a 1.

Portanto, as soluções do problema são classificadas quanto a estabilidade a partir da

análise da parte real dos autovalores e assim, quando $t \rightarrow \infty$:

- Estável, se $-\beta + \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| = 0$;
- Assintoticamente estável, se $-\beta + \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| < 0$;
- Instável, se $-\beta + \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} \ln |1 + b| > 0$.

Se $b = -1$ qualquer solução do sistema (2.42) sofre impulso na origem.

Se $b < -1$, temos alternância de sinal na solução do problema, pois sendo $x(t_i)$ positivo ao sofrer impulso segue que $x(t_i^+)$ será negativa, além disso o período em que ocorre o impulso também sofre alteração.

Em (2.40) o impulso é descrito sendo: $\Delta \dot{x}|_{x=0} = b\dot{x}$, $\dot{x} > 0$. A solução do oscilador sem impulso é representado por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta). \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= -\alpha \beta e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) - \alpha \beta \omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \delta). \end{aligned}$$

Nas condições de impulso devemos ter:

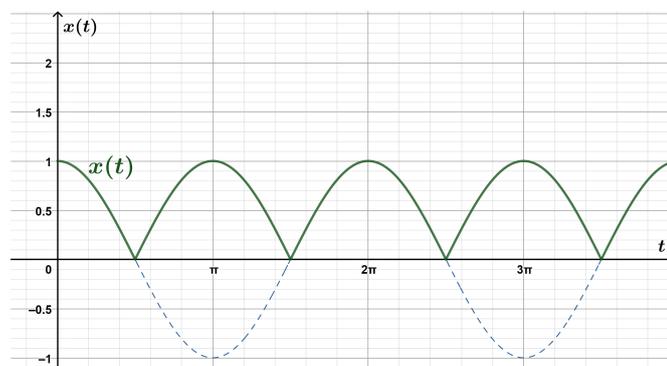
$$\dot{x}(t) = -\alpha \beta \omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \delta).$$

Temos que $\sin(t) = 0$ quando $t = k\pi$, então fazendo $\omega_1 t - \delta = k\pi$ e $\delta \rightarrow 0$ vem que:

$$t_{i+1} - t_i = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}. \quad (2.46)$$

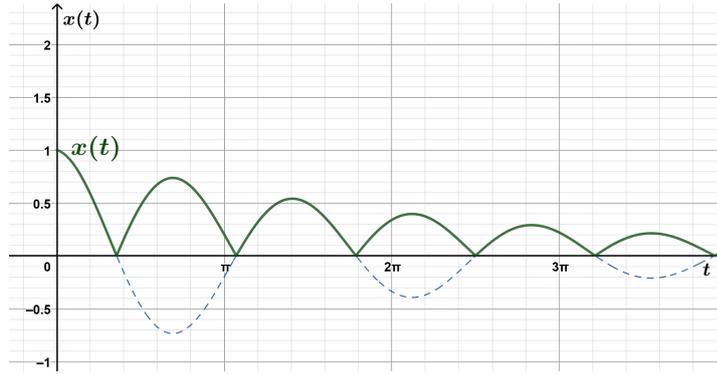
A solução neste caso sofre impulso quando $x(t) = 0$ e $\dot{x} > 0$. Os gráficos a seguir, representam a solução $x(t)$ do sistema impulsivo (linhas sólidas) e a curva da EDO (tracejado), sendo $\alpha =$ Amplitude; $\omega =$ Frequência e $\beta =$ Constante de amortecimento:

Figura 2.4: Solução do sistema considerando $\alpha = \omega = 1$; $\beta = 0$.



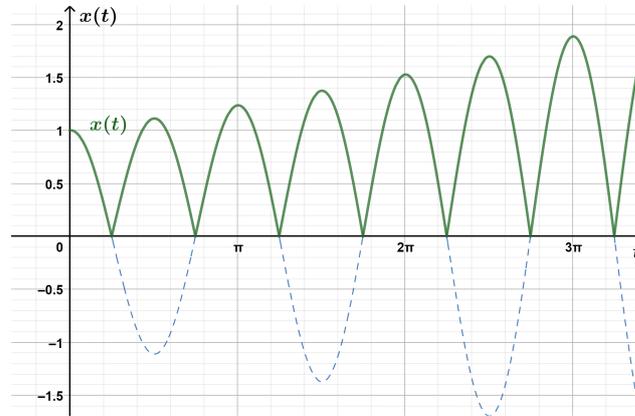
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 2.5: Solução do sistema considerando $\alpha = 2$; $\omega = 1, 4$; $\beta = 0, 2$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 2.6: Solução do sistema considerando $\alpha = 1, 4$; $\omega = 2$; $\beta = -0, 2$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Além disso, a matriz (2.36) é representada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} (\ln |1 + b| + i(2k + 1)\pi) & \omega \\ -\omega & \frac{-2\beta + \sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{2\pi} (\ln |1 + b| + i(2k + 1)\pi) \end{pmatrix}.$$

E seus autovalores são:

$$\rho_{1,2} = -\beta + \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{\pi} \ln |1 + b| + 2ik\sqrt{\omega^2 - \beta^2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De modo análogo ao caso $b > -1$, é possível escrever a matriz fundamental em função dos autovalores e a estabilidade da solução é expressa pela análise da parte real dos autovalores, isto é, a estabilidade depende do comportamento expressão, abaixo quando $t \rightarrow \infty$:

$$-\beta + \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{\pi} \ln |1 + b|. \quad (2.47)$$

Temos então que a solução será estável quando (2.47) é igual a zero; assintoticamente estável quando é menor que zero e instável se for maior que zero.

2.2 Sistemas Quase-Lineares

Nesta seção, apresentamos um sistema impulsivo quase-linear com impulsos em tempos variáveis, de modo a estudar as mudanças ocorridas na solução mediante tais impulsos e estabilidade, além disso os resultados apresentados associam um sistema linear homogêneo ao sistema quase-linear, de modo semelhante ao caso clássico com EDOs.

No contexto das equações diferenciais, sistemas quase-lineares, são sistemas nos quais a parte não linear é pequena em relação a parte linear. Dessa forma, podemos entender que temos um sistema não linear “próximo” ao sistema linear.

Seja A uma matriz real $n \times n$ e $g(x)$ uma função contínua, o sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x)$$

é chamado um sistema quase linear, se

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0,$$

ou seja, $\|g(x)\|$ é pequena em comparação a $\|x\|$ próximo à origem.

Consideremos, então o sistema impulsivo quase-linear a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + g(t, x), & t \neq \tau_i, \\ \Delta x = B_i \cdot x + I_i(x), & t = \tau_i, \end{cases} \quad (2.48)$$

sendo $A(t)$ uma matriz limitada com entradas contínuas para $t \geq t_0$, B_i são matrizes com entradas constantes, as funções $g(t, x)$ e $I_i(x)$ são definidas para $t \geq t_0$, $\|x\| \leq h$, $h > 0$ e,

$$\|g(t, x)\| \leq \alpha(t) \cdot \|x\|, \quad \|I_i(x)\| \leq \beta_i \|x\|, \quad (2.49)$$

para todo $t \geq t_0$, x , $\|x\| \leq h$, $i = 1, 2, \dots$, $\alpha \in L_{loc}^1$, $\alpha(t) > 0$, $\beta_i > 0$.

Sistemas com impulsos em tempos variáveis são aqueles em que os impulsos ocorrem quando a curva integral cruza determinadas superfícies no espaço de fase estendido e tendem a ser mais complicados que os de impulso em tempos pré-fixados.

Assumimos que estas superfícies são dadas pelas equações $t = \tau_i$, $i = 1, 2, \dots$ e $\tau_i(x) \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$.

Além disso, a existência e unicidade da solução dos sistemas quase-lineares está garantida nos resultados apresentados no primeiro capítulo deste trabalho.

2.2.1 Estabilidade de Solução

A dificuldade no estudo de estabilidade para estes sistemas é apresentada pela possibilidade de ocorrência do fenômeno de batimentos, ou seja, a solução atinge a mesma superfície várias vezes, em virtude disso, apresentamos uma definição de estabilidade para as soluções com uma certa restrição se comparada à definição clássica.

Definição 2.18. Solução estável

A solução $x(t)$ do sistema (2.48) definida para todo $t \geq t_0$ é chamada estável se, para $\varepsilon > 0$ arbitrário e $\eta > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ que para qualquer solução $y(t)$ do sistema (2.48) vale:

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_0$, tal que $|t - t_i| > \eta$, sendo t_i os momentos de tempo em que a solução $x(t)$ intersepta as superfícies $t = \tau_i(x)$.

Definição 2.19. Solução assintoticamente estável

A solução $x(t)$ é chamada assintoticamente estável se é estável conforme a Definição 2.18 e se existe $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer outra solução $y(t)$ do sistema, satisfazendo

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta_0,$$

tem-se,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0,$$

para todo $t \geq t_0$, tal que $|t - t_i| > \eta$, sendo t_i os momentos de tempo em que a solução $x(t)$ intersepta as superfícies $t = \tau_i(x)$.

Definição 2.20. Solução exponencialmente estável

A solução $x(t)$ do sistema (2.48) é dita exponencialmente estável, se existem $\alpha, \delta, \lambda > 0$ tais que:

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - y(t)\| < \alpha \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)},$$

para todo $t \geq t_0$, tal que $|t - t_i| > \eta$, sendo t_i os momentos de tempo em que a solução $x(t)$ intersepta as superfícies $t = \tau_i(x)$.

Em geral, o problema de estabilidade de determinada solução do sistema (2.48) pode ser reformulado em termos da estabilidade da solução trivial de algum outro sistema impulsivo. Mas o procedimento de redução a outro sistema é mais complicado comparado com sistemas de EDOs.

Suponhamos que as superfícies $t = \tau_i(t)$ satisfazem as condições de Lipschitz:

$$|\tau_i(x_1) - \tau_i(x_2)| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|, \quad (2.50)$$

para todo $i = 1, 2, \dots$, $\|x_1\| \leq h$, $\|x_2\| \leq h$ e também satisfaz a desigualdade:

$$\tau_i(x) \geq \tau_i(x + I_i(x)), \quad (2.51)$$

além disso, as superfícies são separadas umas das outras uniformemente em relação a x , com $\|x\| \leq h$, ou seja, para algum $\theta > 0$,

$$\sup_i \left(\min_{\|x\| \leq h} \tau_{i+1}(x) - \max_{\|x\| \leq h} \tau_i(x) \right) \geq \theta. \quad (2.52)$$

Associado ao sistema (2.48), consideramos o sistema impulsivo linear homogêneo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x, & t \neq \tau_i, \\ \Delta x = B_i \cdot x, & t = \tau_i, \end{cases} \quad (2.53)$$

em que os tempos τ_i são tais que:

$$|\tau_i(x) - \tau_i(0)| \leq \Delta, \quad (2.54)$$

com $\Delta = \Delta(h)$, $\|x\| = h$ e ainda $\Delta(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, ou seja, a solução nula não sofre impulso, ou seja, é uma função contínua.

Notemos que a solução nula $x(t) = 0$ é solução do sistema (2.48), se:

$$x(t) = \int_{t_0}^t A(\sigma)x(\sigma)d\sigma + \int_{t_0}^t g(t, \sigma)d\sigma \Rightarrow 0 = \int_{t_0}^t g(t, \sigma)d\sigma.$$

E, a partir disso, enunciamos o teorema a seguir para soluções exponencialmente estáveis.

Teorema 2.21. *Considerando que para o sistema (2.48) estão satisfeitas as condições (2.49) e (2.52) e a desigualdade*

$$\tau_i(x) \geq \tau_i((I_n + B_i)x + I_i(x)), \quad (2.55)$$

mantida para todo x , $\|x\| \leq h$, $i = 1, 2, \dots$.

Se para algum τ_i que satisfaça (2.54), as soluções do sistema (2.53) são estáveis ou exponencialmente estáveis, então a solução trivial do sistema (2.48) será, correspondentemente, estável ou exponencialmente estável se $\alpha(t)$ e β_i satisfazem as condições:

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\alpha(t)\| dt < \infty \quad e \quad \prod_{t_i > t_0} (1 + \beta_i) < \infty. \quad (2.56)$$

Demonstração. Seja $x(t)$ uma solução arbitrária de (2.48) que passa através do ponto x_0 , $\|x_0\| \leq h_1 < h$ em $t = t_0$.

Denotamos por τ_i o tempo em que esta solução encontra a superfície $t = \tau_i(x)$, ou seja, a solução da equação

$$t = \tau_i(x(t)). \quad (2.57)$$

Como a desigualdade (2.55) é considerada válida, então a equação (2.57) tem única solução para todo i , pelo menos para aqueles valores de t , para os quais a solução $x(t)$ não sai da vizinhança h da solução trivial.

Para estes valores de t , $x(t)$ também satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + g(t, x), & t \neq \tau_i, \\ \Delta x = B_i \cdot x + I_i(x), & t = \tau_i. \end{cases}$$

E então $x(t)$ pode ser escrita pela forma integral de modo semelhante à escrita na seção sobre sistemas lineares não homogêneos (p.52):

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \sigma)g(\sigma, x(\sigma))d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} X(t, \tau_i)I_i(x(\tau_i)), \quad (2.58)$$

em que $X(t, t_0)$ é a matriz fundamental do sistema (2.53) com $X(t_0, t_0) = I_n$.

Se as soluções de (2.53) são estáveis, $X(t, t_0)$ é limitada por uma constante $K > 0$, e usando (2.49), segue que:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|X(t, t_0)x_0\| + \left\| \int_{t_0}^t X(t, \sigma)g(\sigma, x(\sigma))d\sigma \right\| + \left\| \sum_{t_0 < \tau_i < t} X(t, \tau_i)I_i(x(\tau_i)) \right\| \\ &\leq K\|x_0\| + \int_{t_0}^t K\alpha(\sigma)\|x(\sigma)\|d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} K\beta_i\|x(\tau_i)\|. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.11, obtemos

$$\|x(t)\| \leq K \cdot \|x_0\| \cdot \prod_{t_0 < \tau_i < t} (1 + K\beta_i) \cdot e^{\int_{t_0}^t K\alpha(\sigma)d\sigma}. \quad (2.59)$$

Uma vez que $\|x\| \leq h$, se $h_1 < h$ é suficientemente pequeno de modo que

$$K \cdot h_1 \cdot \prod_{\tau_i > t_0} (1 + K\beta_i) \cdot e^{\int_{t_0}^{\infty} K\alpha(\sigma)d\sigma} \leq h,$$

a partir da condição (2.56) e a desigualdade (2.60) temos

$$\|x(t)\| \leq h.$$

E ainda por (2.52), concluímos que $x(t)$ é definida para todo $t \geq t_0$ e intercepta cada superfície $t = \tau_i(x)$ apenas uma vez. Visto que tomamos arbitrariamente $x(t)$, segue que

a solução trivial de (2.48) é estável.

Se as soluções do sistema (2.53) são exponencialmente estáveis, então para todo $t \geq \sigma$, a matriz $X(t, t_0)$ admite:

$$\|X(t, t_0)\| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-\sigma)}, \quad K \geq 1, \quad \gamma > 0. \quad (2.60)$$

A partir de (2.58) temos:

$$\|x(t)\| \leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^t K e^{-\gamma(t-\sigma)} \alpha(\sigma) \|x(\sigma)\| d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} K e^{-\gamma(t-\tau_i)} \beta_i \|x(\tau_i)\|.$$

Novamente, pelo Lema 2.11:

$$\|x(t)\| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot \|x_0\| \cdot \prod_{t_0 < \tau_i < t} (1 + K \beta_i) \cdot e^{\int_{t_0}^t K \alpha(\sigma) d\sigma}.$$

Sendo $h_1 < h$ suficientemente pequeno tal que:

$$K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot h_1 \prod_{\tau_i > t} (1 + K \beta_i) \cdot e^{\int_{t_0}^{\infty} K \alpha(\sigma) d\sigma} \leq h.$$

Então:

$$\|x(t)\| \leq h \cdot e^{-\gamma(t-t_0)},$$

e a solução $x(t)$ de (2.48) é exponencialmente estável. □

Teorema 2.22. *Consideremos o sistema (2.48) em que as desigualdades (2.52) e (2.55) são válidas, e, além disso,*

$$\|g(t, x)\| \leq a \cdot \|x\|, \quad \|I_i(x)\| \leq a \|x\|. \quad (2.61)$$

Se a matriz $X(t, t_0)$ do sistema (2.53), com $X(t_0, t_0) = I_n$ satisfaz (2.60), então a solução nula do sistema (2.48) é assintoticamente estável para um valor suficientemente pequeno da constante a .

Demonstração. A solução do sistema (2.48) pode ser escrita na forma:

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \sigma)g(\sigma, x(\sigma))d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} X(t, \tau_i)I_i(x(\tau_i)).$$

A partir de (2.60) e (2.61), obtemos:

$$\|x(t)\| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \|x_0\| + \int_{t_0}^t K \cdot e^{-\gamma(t-\sigma)} \cdot a \|x(\sigma)\| d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} K \cdot e^{-\gamma(t-\tau_i)} \cdot a \|x(\tau_i)\|.$$

Ou ainda:

$$e^{\gamma(t-t_0)} \cdot \|x(t)\| \leq K \cdot \|x_0\| + \int_{t_0}^t Ka \cdot e^{\gamma(\sigma-t_0)} \|x(\sigma)\| d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} Ka \cdot e^{\gamma(\tau_i-t_0)} \cdot \|x(\tau_i)\|.$$

Aplicando o Lema 2.11, temos

$$e^{\gamma(t-t_0)} \cdot \|x(t)\| \leq K \cdot \|x_0\| \prod_{t_0 < \tau_i < t} (1 + Ka) \cdot e^{\int_{t_0}^t Kad\sigma}.$$

Sendo $i(t_0, t)$ o número de instantes de impulso t_i ao longo do intervalo $[t_0, t)$, então

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq K \cdot \|x_0\| (1 + Ka)^{i(t_0, t)} \cdot e^{Ka(t-t_0)} \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \\ &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{-(\gamma-Ka)(t-t_0)} \cdot (1 + Ka)^{i(t_0, t)}. \end{aligned}$$

As superfícies $t = \tau_i$ estão espaçadas satisfazendo (2.52), ou seja, tomamos θ sendo igual a esse espaçamento ou menor, de modo que possamos escrever $t_{i+1} - t_i \geq \theta$, ou ainda,

$$t_i \geq t_0 + i\theta.$$

Assim, tomando $i(t_0, t) \leq \frac{t_i - t_0}{\theta}$,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{-(\gamma-Ka)(t-t_0)} \cdot e^{\ln(1+Ka)^{i(t_0, t)}} \\ &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{-(\gamma-Ka)(t-t_0)} \cdot e^{\frac{t-t_0}{\theta} \ln(1+Ka)}. \\ \Rightarrow \|x(t)\| &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{-[(\gamma-Ka) - \frac{1}{\theta} \ln(1+Ka)](t-t_0)}. \end{aligned}$$

Supondo valores de a suficientemente pequenos, de modo que:

$$(\gamma - Ka) - \frac{1}{\theta} \ln(1 + Ka) > 0,$$

e ainda, $K \cdot \|x\|$, então a solução $x(t)$ permanece na vizinhança h da solução nula, para todo $t \geq t_0$, e, temos que esta solução intersepta cada superfície $t = \tau_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ apenas umas vez e assim a solução nula é assintoticamente estável. □

Os próximos teoremas também apresentam resultados sobre estabilidade assintótica, mas antes de enunciá-los, precisaremos de um resultado envolvendo a norma da solução e os autovalores das matrizes do sistema.

Lema 2.23. *Seja $x(t)$ uma solução qualquer do sistema linear impulsivo homogêneo (2.53) e $t \geq t_0$ é válida a desigualdade:*

$$\prod_{t_0 < \tau_i < t} \lambda_i \cdot e^{\int_{t_0}^t \lambda(\sigma) d\sigma} \cdot \|x_0\| \leq \|x(t)\| \leq \prod_{t_0 < \tau_i < t} \Lambda_i \cdot e^{\int_{t_0}^t \Lambda(\sigma) d\sigma} \cdot \|x_0\|, \quad (2.62)$$

sendo $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ o menor e o maior autovalor da matriz $\hat{A}(t) = \frac{1}{2} (A(t) + A^T(t))$ respectivamente, $A^T(t)$ é a matriz transposta da matriz $A(t)$, λ^2 e Λ^2 são, respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz $(I_n + B_i^T)(I_n + B_i)$, $i = 1, 2, \dots$ e $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Demonstração. Se temos a solução nula, ou seja, $x(t) = 0$, então (2.62) é válida.

Consideremos, assim, $x(t)$ uma solução não trivial do sistema (2.53). Então para $t \neq \tau_i$,

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle x, x \rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{d}{dt} x, x \right\rangle = 2 \cdot \langle A(t)x(t), x \rangle.$$

Por outro lado, como $\|x\|^2 = \langle x^T, x \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \langle x^T, x \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} x^T, x \right\rangle + \left\langle x^T, \frac{d}{dt} x \right\rangle = \langle x^T A^T(t), x \rangle + \langle x^T, A(t)x \rangle \\ &= x^T A^T(t) \cdot x + x^T \cdot A(t)x = x^T \cdot [A^T(t) + A(t)] \cdot x = x^T \cdot 2\hat{A}(t) \cdot x \\ &= 2 \cdot \langle x^T, \hat{A}(t)x \rangle = 2 \cdot \langle \hat{A}(t)x, x^T \rangle = 2 \cdot \langle \hat{A}(t)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Notemos que a última igualdade decorre da definição do produto interno de matrizes, ou seja, sendo A e B matrizes $m \times n$, então $\langle A, B \rangle = Tr(A^t B)$.

Assim, obtemos $2 \cdot \langle A(t)x(t), x \rangle = \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = 2 \cdot \langle \hat{A}(t)x(t), x \rangle$.

Como a matriz $\hat{A}(t)$ é simétrica, temos,

$$\begin{aligned} \lambda(t) \|x(t)\|^2 &\leq \langle \hat{A}(t)x(t), x \rangle \leq \Lambda(t) \|x(t)\|^2 \\ \Rightarrow 2 \cdot \lambda(t) \|x(t)\|^2 &\leq 2 \cdot \langle \hat{A}(t)x(t), x \rangle \leq 2 \cdot \Lambda(t) \|x(t)\|^2 \\ \Rightarrow 2 \cdot \lambda(t) \|x(t)\|^2 &\leq \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq 2 \cdot \Lambda(t) \|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

Se $\tau_i < t < \tau_{i+1}$, segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^t 2 \cdot \lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma &\leq \|x(t)\|^2 - \|x(\tau_i)\|^2 \leq \int_{\tau_i}^t 2 \cdot \Lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma \\ \int_{\tau_i}^t 2 \cdot \lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma + \|x(\tau_i)\|^2 &\leq \|x(t)\|^2 \leq \int_{\tau_i}^t 2 \cdot \Lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma + \|x(\tau_i)\|^2. \end{aligned}$$

Em cada extremo podemos aplicar a Desigualdade de Grownwall-Bellman (2.10), obtendo:

$$\|x(\tau_i)\|^2 \cdot e^{2 \cdot \int_{\tau_i}^t \lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma} \leq \|x(t)\|^2 \leq \|x(\tau_i)\|^2 \cdot e^{2 \cdot \int_{\tau_i}^t \Lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma}. \quad (2.63)$$

Como $x(\tau_i) = (I_n + B_i)x(\tau_i)$, segue que $\lambda_i^2 \|x(\tau_i)\|^2 \leq \Lambda_i^2 \|x(\tau_i)\|^2$. Utilizando a desi-

gualdade em (2.63):

$$\lambda_i^2 \|x(\tau_i)\|^2 \cdot e^{2 \cdot \int_{\tau_i}^t \lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma} \leq \|x(t)\|^2 \leq \Lambda_i^2 \|x(\tau_i)\|^2 \cdot e^{2 \cdot \int_{\tau_i}^t \Lambda(\sigma) \|x(\sigma)\|^2 d\sigma},$$

para $\tau_i < t < \tau_{i+1}$.

Por indução e a partir do Lema 2.11, expressamos (2.63) para todo $i = 1, 2, \dots$, como:

$$\prod_{t_0 < \tau_i < t} \lambda_i \cdot e^{\int_{t_0}^t \lambda(\sigma) d\sigma} \cdot \|x_0\| \leq \|x(t)\| \leq \prod_{t_0 < \tau_i < t} \Lambda_i \cdot e^{\int_{t_0}^t \Lambda(\sigma) d\sigma} \cdot \|x_0\|, \quad (2.64)$$

correspondente a desigualdade (2.62) do teorema. \square

A partir deste resultado, os próximos teoremas incluem hipóteses acerca dos autovalores envolvidos para estudo de estabilidade.

Teorema 2.24. *Considere o maior autovalor da matriz $\hat{A}(t) = \frac{1}{2} (A(t) + A^T(t))$ satisfazendo a desigualdade $\lambda(t) \leq \gamma$ para todo $t \geq t_0$ e o maior autovalor da matriz $(I_n + B_i^T)(I_n + B_i)$ tal que $\lambda_i^2 \leq \alpha^2$ para todo $i = 1, 2, \dots$ e ainda o limite*

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{i(t, t + \delta)}{\delta} = p \quad (2.65)$$

existe e é uniforme com relação a t , $t \geq t_0$ e a x , $\|x\| < h$, onde $i(t, t + \delta)$ é o número de pontos $\tau_i(x)$ no intervalo $[t, t + \delta]$. Suponha também que para $t \geq t_0$, x , $\|x\| < h$ e todo $i = 1, 2, \dots$ são válidas as desigualdades (2.50), (2.55) e (2.61).

Sendo,

$$\gamma + p \cdot \ln \alpha < 0 \quad (2.66)$$

e a constante a em (2.61) suficientemente pequena, então a solução nula do sistema (2.48) é assintoticamente estável.

Demonstração. Considerando $x(t)$ uma solução qualquer do sistema (2.53), a partir do Lema 2.23, temos:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \prod_{t_0 < \tau_i < t} \alpha \cdot e^{\int_{t_0}^t \gamma d\sigma} \cdot \|x_0\| \\ &\leq \alpha^{i(t, t + \delta)} \cdot e^{\gamma(t - t_0)} \cdot \|x_0\|. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Como o limite existe, usando (2.66) e (2.67), podemos encontrar $K \geq 1$ e $\mu > 0$ ($0 < \mu < \|\gamma + p \cdot \ln \alpha\|$), que para todo $t \geq t_0$ e $s \geq t_0$, $t \geq s$, a matriz $X(t, s)$, $X(s, s) = I_n$ do sistema (2.53), pode ser estimada por:

$$\|X(t, s)\| \leq K \cdot e^{-\mu(t-s)}.$$

As soluções do sistema (2.48) são expressas na forma:

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \sigma)g(\sigma, x(\sigma))d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} X(t, \tau_i)I_i(x(\tau_i)).$$

E de modo semelhante à prova do Teorema 2.22, obtemos,

$$e^{\mu(t-t_0)} \cdot \|x(t)\| \leq K \cdot \|x_0\| \prod_{t_0 < \tau_i < t} (1 + Ka) \cdot e^{\int_{t_0}^t Kad\sigma}.$$

Sendo $i(t, t + \delta)$ o número de pontos $\tau_i(x)$ no intervalo $[t, t + \delta]$, temos

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot (1 + Ka)^{i(t, t+\delta)} \cdot e^{Ka(t-t_0)} \cdot e^{-\mu(t-t_0)} \\ &= K \cdot \|x_0\| \cdot e^{i(t, t+\delta) \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{i(t, t + \delta)}{\delta} = p$ e δ é a variação do intervalo observado, segue que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{\frac{\delta}{\delta} i(t, t+\delta) \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)} \\ &= K \cdot \|x_0\| \cdot e^{\delta \frac{i(t, t+\delta)}{\delta} \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)} \\ &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{\delta \cdot p \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)} \\ &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{(t-t_0) \cdot p \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)}. \\ \Rightarrow \|x(t)\| &\leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{-(\mu - Ka - p \cdot \ln(1+Ka))(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Supondo valores de a suficientemente pequenos, de modo que:

$$\mu - Ka - p \cdot \ln(1 + Ka) > 0,$$

e ainda, $K \cdot \|x\|, \|x\| < h$ então a solução $x(t)$ permanece na vizinhança h da solução nula, para todo $t \geq t_0$, assim a solução nula é assintoticamente estável. □

Consideremos o caso em que as matrizes $A(t)$ e B_i em (2.48) são matrizes constantes, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + g(t, x), & t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x = Bx + I_x(x), & t = \tau_i(x). \end{cases} \quad (2.68)$$

Teorema 2.25. *Suponha que as funções $g(t, x)$ e $I_i(x)$ satisfazem as desigualdades (2.61) e as superfícies $t = \tau_i(x)$ satisfazem a desigualdade (2.50) e*

$$\tau_i(x) \geq \tau_i((I_n + B)x + I_i(x)),$$

para todo $i = 1, 2, \dots$, $\|x\| \leq h$, o limite (2.65) existe e é finito, e $\gamma = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(A)$, $\alpha^2 = \max_j \lambda_j((I_n + B)x + I_i(x))$. Se a desigualdade $\gamma + p \cdot \ln \alpha < 0$ é válida, então a solução nula do sistema (2.68) é assintoticamente estável enquanto a constante a em (2.61) é suficientemente pequena.

Demonstração. A prova do teorema segue o mesmo raciocínio dos anteriores, assim, considerando $x(t)$ uma solução qualquer do sistema (2.53), a partir do Lema 2.23 e das hipóteses assumidas, temos:

$$\|x(t)\| \leq \alpha^{2 \cdot i(t, t+\delta)} \cdot e^{\gamma(t-t_0)} \cdot \|x_0\|.$$

Podemos encontrar $K \geq 1$ e $\mu > 0$ ($0 < \mu < \|\gamma + p \cdot \ln \alpha\|$), que para todo $t \geq t_0$ e $s \geq t_0$, $t \geq s$, a matriz $X(t, s)$, $X(s, s) = I_n$ do sistema (2.53), pode ser estimada por:

$$\|X(t, s)\| \leq K \cdot e^{-\mu(t-s)}.$$

As soluções do sistema (2.48) são expressas na forma:

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \sigma)g(\sigma, x(\sigma))d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} X(t, \tau_i)I_i(x(\tau_i)).$$

E de modo semelhante à prova do Teorema 2.24, temos,

$$\|x(t)\| \leq K \cdot \|x_0\| \cdot e^{i(t, t+\delta) \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)}.$$

Sendo $i(t, t+\delta)$ é o número de pontos $\tau_i(x)$ no intervalo $[t, t+\delta]$ e (2.65), segue análogo ao Teorema 2.24 que a solução $x(t)$ permanece na vizinhança h da solução trivial, sendo esta assintoticamente estável.

□

Exemplo 2.26. Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, & t \neq \tau_i(x) \\ \dot{y} = -a^2x - \frac{bx}{(t+1)^2} - y, & t \neq \tau_i(x) \\ (\Delta x, \Delta y) = B_i \cdot x + I_i(x), & t = \tau_i(x), \end{cases}$$

sendo a e b constantes reais, $\|x\| \leq h$, a matriz B_i é a matriz nula e $I_i(x) \leq |b| \cdot \|x\|$.

De forma matricial escrevemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{b}{(t+1)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim, conforme notação do Teorema 2.25 obtemos:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Notemos que a função $g(t, x, y)$ possui duas componentes que escrevemos $g_1(t, x, y)$ e $g_2(t, x, y)$, tais que:

$$g_1(t, x, y) = 0, \quad g_2(t, x, y) = -\frac{bx}{(t+1)^2}.$$

E assim,

$$\|g_1(t, x, y)\| = 0, \quad \|g_2(t, x, y)\| = \frac{|b|}{(t+1)^2} \|x\|.$$

Desse modo, observando o limite em ambas componentes, podemos concluir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|g_1(t, x, y)\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|g_1(t, x, y)\| = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|g_2(t, x, y)\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|g_2(t, x, y)\| = |b| \|x\|.$$

Logo $\|g(t, x, y)\| = \|(g_1(t, x, y), g_2(t, x, y))\| \leq (0, |b|\|x\|)$, $\|x\| \leq h$.

Os autovalores da matriz $A(t)$ podem ser determinados de forma que:

$$\det(\lambda I_n - A) = \det \left(\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a^2 & -1 \end{vmatrix} \right) = \det \left(\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ a^2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - A) &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 + a^2 = 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -1 \pm |a|i. \end{aligned}$$

E, assim, $\gamma = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(A) = -1$, além disso, sendo B_i a matriz nula, segue que $\alpha^2 = \max_j \lambda_j((I_n + B)x + I_i(x)) = 1$.

A partir disso, as hipóteses do Teorema 2.25 são satisfeitas e

$$\gamma + p \cdot \ln \alpha < 0.$$

Portanto, a solução nula do sistema é assintoticamente estável.

3 Aplicações em Modelos com Impulsos

O presente capítulo tem por objetivo apresentar algumas aplicações das equações diferenciais impulsivas (EDIs).

As EDIs podem estar presentes em modelos já conhecidos, mas descrevendo fenômenos que sofrem alguma perturbação externa, as quais mudam o comportamento da solução, mesmo ocorrendo em instante de tempo insignificante, se comparado a todo o período observado, estes instantes são denominados impulsos.

3.1 Modelo de Krüger-Thiemer

O alemão Ekkehard Krüger-Thiemer (1918 - 1969), um dos principais cientistas no campo da farmacocinética teve grandes contribuições nesta área de estudo, em seus artigos destacamos *Formal theory of drug dosage regimens: I* (1966), descrevendo o modelo o qual analisaremos. As referências consultadas nesta seção foram: [22], [23], [24] e [25].

A farmacocinética¹ constitui o estudo dos processos envolvidos nas mudanças de concentração, em função do tempo, de drogas, venenos e outras substâncias em corpos humanos e animais e em tecidos isolados, além de sua descrição por equações matemáticas.

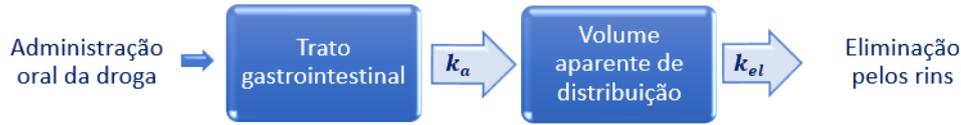
O modelo de Krüger-Thiemer é um modelo farmacocinético linear que descreve a variação de concentração de determinada droga no corpo humano ao longo do tempo, com base na ideia bicompartimental, ou seja, dois compartimentos que representam partes do corpo responsáveis no processo de distribuição e eliminação da droga no organismo.

Esta abordagem analisa a concentração da droga, após sua ingestão, no trato gastrointestinal e no chamado volume aparente, este constituído por sangue, músculos, tecidos, até finalmente ser eliminada por meio dos rins.

As constantes apresentadas na figura acima, k_a e k_{el} são respectivamente constantes de absorção e de eliminação da droga, as quais trataremos a seguir.

¹Os termos farmacocinética e farmacodinâmica se diferenciam, enquanto esta lida com a ação dos medicamentos no corpo, aquele trata dos processos de velocidade da ação do corpo sobre os medicamentos.

Figura 3.1: Modelo Bicompartimental.



Fonte: PIERCE; SCHUMITZKY (1976, p.548).

Em intervalos de tempo pré-fixados, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, a droga é ingerida em quantidades $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ e ocorre uma rápida elevação (efeito impulsivo) em sua concentração no organismo, dessa forma o modelo é descrito por meio de equações diferenciais impulsivas

Suponha que $x(t)$ e $y(t)$ são as quantidades de drogas no instante t no ambiente gastrointestinal e no volume aparente de distribuição, respectivamente, e sejam as constantes $k_a \neq k_{el}$, descrevemos o processo a partir do seguinte sistema [24]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_a \cdot x, \\ \dot{y} = k_a \cdot x - k_{el} \cdot y, \\ x(0) = q, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

De modo a obter o efeito terapêutico esperado, é preciso que a concentração de droga no volume aparente de distribuição nunca fique abaixo de um nível mínimo m durante o tempo de tratamento:

$$y(t) \geq m, \quad t \in [t_0, t_{n+1}], \quad t_{n+1} > t_n.$$

Determinamos o impulso por:

$$\begin{cases} \Delta x = q_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad y(t) = m, \\ \Delta y = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Podemos escrever o sistema dado em (3.1) de forma matricial, desconsiderando a condição de impulso, por: tal que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_a & 0 \\ k_a & -k_{el} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os autovalores deste sistema serão dados por $\lambda_1 = -k_a$ e $\lambda_2 = -k_{el}$. Além disso, o ponto de equilíbrio do sistema (3.1) é a origem, ou seja, $(0, 0)$.

Logo, a solução do sistema sem impulso é expressa por:

$$x(t) = e^{-k_a \cdot t} \cdot c_1.$$

Utilizando a condição inicial $x(0) = q$, obtemos a solução:

$$x(t) = q \cdot e^{-k_a \cdot t}.$$

Considerando a variável y :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= k_a \cdot x - k_{el} \cdot y. \\ \frac{dy}{dt} + k_{el} \cdot y &= k_a \cdot x. \end{aligned}$$

Seja $u(t) = e^{\int k_{el} dt} = e^{k_{el} \cdot t}$ o fator integrante, então:

$$e^{k_{el} \cdot t} \cdot \frac{dy}{dt} + e^{k_{el} \cdot t} \cdot k_{el} \cdot y = e^{k_{el} \cdot t} \cdot k_a \cdot x.$$

Substituindo $e^{k_{el} \cdot t} \cdot k_{el} = \frac{d}{dt} (e^{k_{el} \cdot t})$ e, em seguida, aplicando a regra do produto:

$$\begin{aligned} e^{k_{el} \cdot t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d}{dt} (e^{k_{el} \cdot t}) \cdot y &= e^{k_{el} \cdot t} \cdot k_a \cdot x. \\ \frac{d}{dt} (e^{k_{el} \cdot t} \cdot y) &= e^{k_{el} \cdot t} \cdot k_a \cdot x. \\ y(t) &= e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left(\int e^{k_{el} \cdot t} \cdot k_a \cdot x \, dt \right). \\ y(t) &= e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left(\int e^{k_{el} \cdot t} \cdot k_a \cdot c_1 \cdot e^{-k_a \cdot t} \, dt \right). \\ y(t) &= e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left(k_a \cdot c_1 \int e^{(k_{el} - k_a) \cdot t} \, dt \right). \end{aligned}$$

$$y(t) = k_a \cdot c_1 \cdot e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{(k_{el} - k_a) \cdot t}}{k_{el} - k_a} + c_2 \right).$$

A partir da condição inicial $x(0) = q$ e $y(0) = 0$, temos:

$$y(t) = k_a \cdot q \cdot e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{(k_{el} - k_a) \cdot t}}{k_{el} - k_a} - \frac{1}{k_{el} - k_a} \right). \quad (3.3)$$

A partir da solução analisaremos duas possibilidades de impulso, a saber o impulso em tempos pré-fixados e em tempos variáveis.

3.1.1 Caso I: impulsos pré-fixados

Consideremos o sistema (3.1) com o impulso constante em tempos pré-fixados:

$$\begin{cases} \Delta x = q, & t = 1, 2, 3, \dots \\ \Delta y = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

A solução é obtida em cada intervalo de tempo, entre os instantes de impulso.

- Considerando a ingestão da droga no início do problema impulsivo, $t_0 = 0$, este é o primeiro momento de impulso cujas condições iniciais dadas são $x(0^+) = q$ e $y(0^+) = 0$.

- Se $t_0 < t \leq t_1$, a solução coincide com a solução (3.3) e obtemos:

$$y(t) = k_a \cdot q \cdot e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{(k_{el}-k_a) \cdot t}}{k_{el} - k_a} - \frac{1}{k_{el} - k_a} \right).$$

- Se $t_1 = 1$, a solução sofre um novo impulso de modo que:

$$\begin{aligned} x(1^+) &= x(1) + \Delta x = q \cdot (e^{-k_a} + 1). \\ y(1^+) &= y(1) + \Delta y = e^{-k_{el} \cdot t} \cdot k_a \cdot q \cdot \left(\frac{e^{k_{el}-k_a} - 1}{k_{el} - k_a} \right). \end{aligned}$$

- No próximo trecho, $t_1 < t \leq t_2$ as condições iniciais a serem usadas são $(x(1^+), y(1^+))$ e obtemos a seguinte expressão:

$$y(t) = k_a \cdot q(1 + e^{k_a}) \cdot e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{(k_{el}-k_a) \cdot t}}{k_{el} - k_a} - \frac{1 + e^{k_{el}}}{(k_{el} - k_a) \cdot (1 + e^{k_a})} \right).$$

- Se $t_2 = 2$, a solução sofre um novo impulso e temos:

$$\begin{aligned} x(2^+) &= x(2) + \Delta x = q \cdot (e^{-2k_a} + e^{-k_a} + 1). \\ y(2^+) &= y(2) + \Delta y = k_a \cdot q(1 + e^{k_a}) \cdot e^{-2k_{el}} \cdot \left(\frac{e^{2(k_{el}-k_a)}}{k_{el} - k_a} - \frac{1 + e^{k_{el}}}{(k_{el} - k_a) \cdot (1 + e^{k_a})} \right). \end{aligned}$$

- No próximo trecho $t_2 < t \leq t_3$ a expressão que corresponde a solução possui como condição inicial $(x(2^+), y(2^+))$ e equivale a:

$$y(t) = k_a \cdot q(1 + e^{k_a} + e^{2k_a}) \cdot e^{-k_{el} \cdot t} \cdot \left[\frac{e^{(k_{el}-k_a) \cdot t}}{k_{el} - k_a} - \frac{1 + e^{k_{el}} + e^{2k_{el}}}{(k_{el} - k_a) \cdot (1 + e^{k_a} + e^{2k_a})} \right].$$

- Quando $t_3 = 3$, há um novo momento de impulso, de modo que:

$$\begin{aligned} x(3^+) &= x(3) + \Delta x = q \cdot (e^{-3k_a} + e^{-2k_a} + e^{-k_a} + 1). \\ y(3^+) &= y(3) + \Delta y \\ &= k_a \cdot q(1 + e^{k_a} + e^{2k_a}) \cdot e^{-3k_{el}} \left(\frac{e^{3(k_{el}-k_a)}}{k_{el} - k_a} - \frac{1 + e^{k_{el}} + e^{2k_{el}}}{(k_{el} - k_a) \cdot (1 + e^{k_a} + e^{2k_a})} \right). \end{aligned}$$

- Assim para $t_3 < t \leq t_4$ as condições iniciais usadas e $(x(3^+), y(3^+))$ e temos:

$$y(t) = k_a \cdot q(1 + e^{k_a} + e^{2k_a} + e^{3k_a}) \cdot e^{-k_{el}t} \cdot \left[\frac{e^{(k_{el}-k_a)t}}{k_{el} - k_a} - \frac{1 + e^{k_{el}} + e^{2k_{el}} + e^{3k_{el}}}{(k_{el} - k_a) \cdot (1 + e^{k_a} + e^{2k_a} + e^{3k_a})} \right].$$

Podemos prosseguir nos intervalos seguintes da mesma forma e utilizando o Princípio de Indução obter a expressão para solução para $n < t \leq n + 1$:

$$y(t) = k_a \cdot q \left(\sum_{i=0}^n e^{ik_a} \right) \cdot e^{-k_{el}t} \cdot \left[\frac{e^{(k_{el}-k_a)t}}{k_{el} - k_a} - \frac{\sum_{i=0}^n e^{ik_{el}}}{(k_{el} - k_a) \cdot (\sum_{i=0}^n e^{ik_a})} \right].$$

Ou ainda, simplificando a equação:

$$y(t) = \frac{k_a \cdot q}{k_{el} - k_a} \cdot \left(e^{-k_a t} \sum_{i=0}^n e^{ik_a} - e^{-k_{el}t} \cdot \sum_{i=0}^n e^{ik_{el}} \right). \quad (3.5)$$

É claro que o tratamento poderia ser prescrito para um tempo limitado, mas, evidenciamos que o comportamento da solução $y(t)$ tende ao infinito, quando $t \rightarrow \infty$ e a solução do problema é instável.

De fato, supondo $k_a > k_{el}$ façamos as seguintes análises:

- O limite do somatório tende mais rapidamente ao infinito do que a exponencial $e^{-k_a t} \rightarrow 0$.
- A partir da nossa suposição:

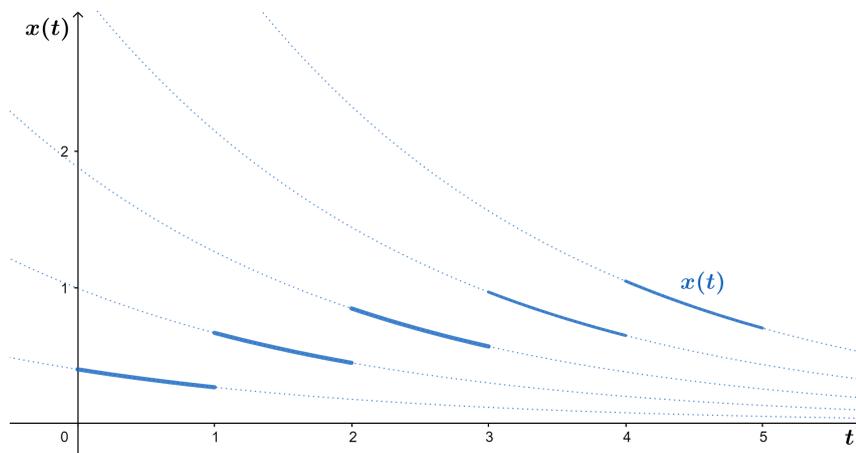
$$e^{-k_{el}t} \cdot \sum_{i=0}^n e^{ik_{el}} > e^{-k_a t} \sum_{i=0}^n e^{ik_a}.$$

Assim, teríamos em (3.5) dentro do parênteses o limite indo para $-\infty$ e na fração um valor negativo, conseqüentemente, $y(t) \rightarrow \infty$. O raciocínio é análogo para $k_{el} > k_a$ e obtemos a mesma conclusão.

A seguir, as Figuras 3.2 e 3.3 representam os gráficos correspondentes a solução $x(t)$ e $y(t)$, que, respectivamente, apresentam a quantidade de droga no trato gastrointestinal e no volume aparente, nos intervalo $t_0 < t < t_3$ com os parâmetros $q = 0.4$, $k_a = 0.4$ e

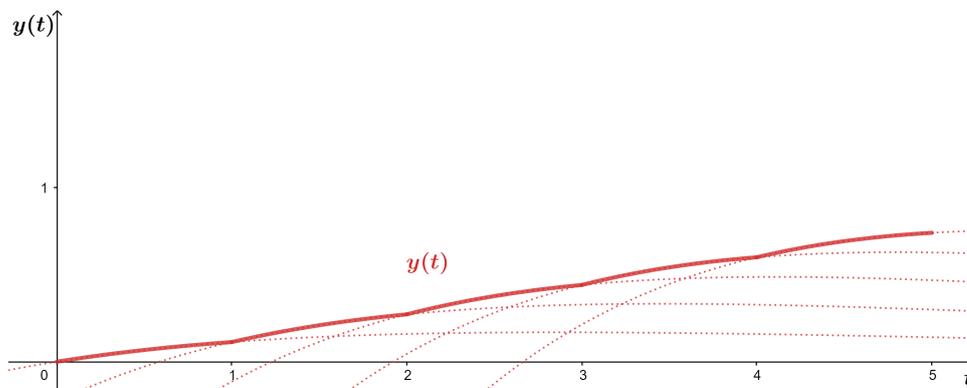
$k_{el} = 0.3$. Nota-se que a quantidade de droga diminui no trato gastrointestinal enquanto aumenta no volume aparente.

Figura 3.2: Concentração de droga no trato gastrointestinal.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 3.3: Concentração de droga no volume aparente.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.1.2 Caso II: impulsos em tempos variáveis

No caso do problema impulsivo em tempos variáveis, consideremos o sistema (3.1) com o impulso constante e para fins terapêuticos, não permitimos que o sistema atinja seu estado crítico, o impulso deve ocorrer quando $y(t) = m$.

Reescrevemos o sistema impulsivo de modo que

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_a \cdot x & y(t) \neq m, \\ \dot{y} = k_a \cdot x - k_{el} \cdot y & y(t) \neq m, \\ \Delta x = q, & y(t) = m, \\ \Delta y = 0, & y(t) = m, \\ x(0) = q, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

- Quando $t = 0$ as condições iniciais apresentadas são $x(0) = q$ e $y(0) = 0$, nessa situação a solução do problema impulsivo coincide com a solução de (3.1).

$$y(t) = e^{-k_{el}t} \cdot k_a \cdot q \cdot \left(\frac{e^{t \cdot (k_{el} - k_a)}}{k_{el} - k_a} - \frac{1}{k_{el} - k_a} \right). \quad (3.7)$$

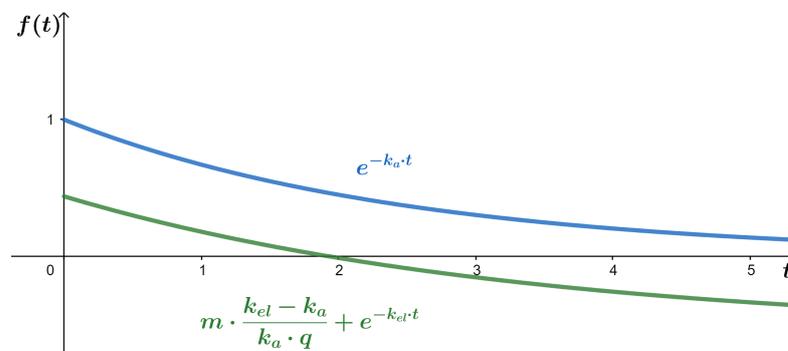
- O próximo momento de impulso ocorrerá quando $y(t) = m$, ou seja:

$$\begin{aligned} m &= e^{-k_{el}t} \cdot k_a \cdot q \cdot \left(\frac{e^{t \cdot (k_{el} - k_a)}}{k_{el} - k_a} - \frac{1}{k_{el} - k_a} \right), \\ m \cdot \frac{k_{el} - k_a}{k_a \cdot q} &= e^{-k_{el}t} (e^{k_{el}t} \cdot e^{-k_a t} - 1), \\ m \cdot \frac{k_{el} - k_a}{k_a \cdot q} + e^{-k_{el}t} &= e^{-k_a t}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A igualdade (3.8) pode ou não ter solução (isto é, as curvas podem ou não ter ponto comum) dependendo dos parâmetros utilizados.

Se as curvas não possuírem intersecção, então problema (3.6) não sofrerá impulso, logo será descrito pela EDO expressa em (3.7) em todo trecho $n < t \leq n + 1$.

Figura 3.4: As curvas (3.8) não têm ponto em comum.

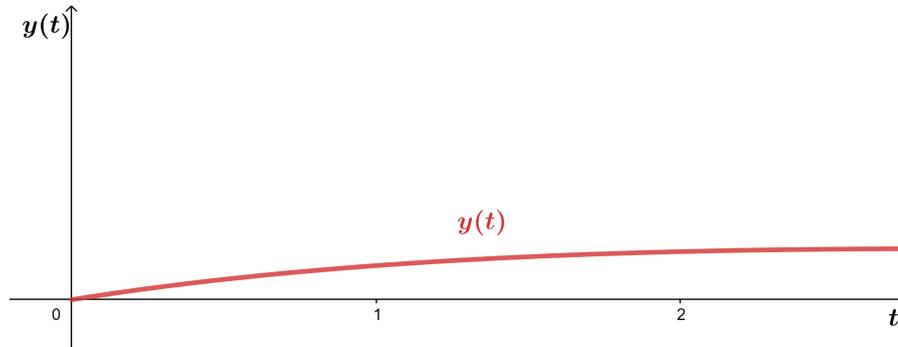


Fonte: Elaborada pela autora.

Os parâmetros usados foram iguais ao do problema pré-fixado, ou seja, $q = 0,4$,

$k_a = 0,4$ e $k_{el} = 0,3$, além disso, consideramos $m = 0,9$. A seguir temos o gráfico da solução $y(t)$, caso em que não sofre impulso.

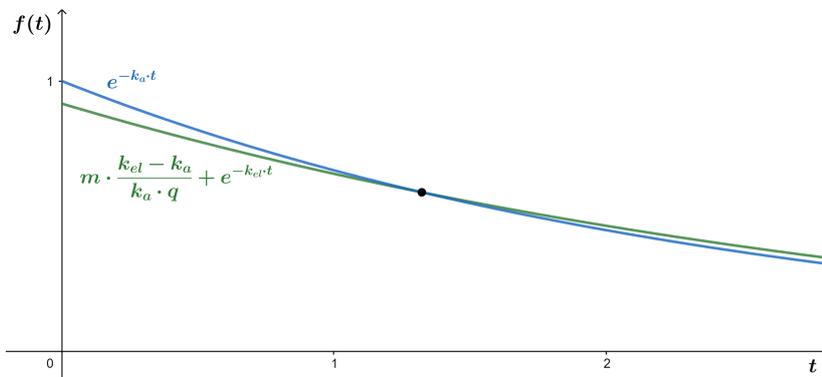
Figura 3.5: Solução do problema expresso pela EDO sem impulso.



Fonte: Elaborada pela autora.

Entretanto, no caso em que as curvas (3.8) têm ponto comum e determinamos o valor de t , o impulso ocorre e obtemos nova condição inicial a ser considerada para construir a solução no intervalo seguinte.

Figura 3.6: As curvas (3.8) têm intersecção.



Fonte: Elaborada pela autora.

O sistema a seguir é apresentado com exemplo nessa situação particular, nos quais os parâmetros usados viabilizam a ocorrência do impulso.

$$\begin{cases} \dot{x} = -0,4 \cdot x & y(t) \neq 0,9, \\ \dot{y} = 0,4 \cdot x - 0,3 \cdot y & y(t) \neq 0,9, \\ \Delta x = 2,7, & y(t) = 0,9, \\ \Delta y = 0, & y(t) = 0,9, \\ x(0) = 2,7, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

A solução do problema sem impulso de (3.9) é expressa por:

$$y(t) = e^{-k_{el} \cdot t} \cdot k_a \cdot q \cdot \left(\frac{e^{t \cdot (k_{el} - k_a)}}{k_{el} - k_a} - \frac{1}{k_{el} - k_a} \right).$$

- Assim no trecho $t_0 < t \leq t_1$, a solução é expressa de modo particular ao sistema (3.9) por:

$$y(t) = 10,8 \cdot (e^{-0,3 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}). \quad (3.10)$$

Uma vez que o sistema sofre impulso nos instantes em que $y(t) = 0,9$, de modo a manter a solução sempre acima deste parâmetro, faremos uma análise sobre a escolha do t , no qual sendo $Y_1 = (t^* ; 0,9)$ e $Y_2 = (t^{**} ; 0,9)$, tais que $t^* < t^{**}$, então o ponto Y_2 sofre impulso.

- O primeiro instante de impulso ocorre em $t_1 = 5,34$, pois,

$$0,9 = 10,8 \cdot (e^{-0,3 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}).$$

Obtemos nesse trecho $Y_1 = (1,32 ; 0,9)$ e $Y_2 = (5,34 ; 0,9)$, como $1,32 < 5,34$, então o ponto Y_2 é um ponto de impulso.

Segue ainda que:

$$\begin{aligned} x(t_1^+) &= x(t_1) + \Delta x = 2,7 \cdot e^{-0,4 \cdot 5,34} + 2,7 = 3,02. \\ y(t_1^+) &= y(t_1) + \Delta y = 10,8 \cdot (e^{-0,3 \cdot 5,34} - e^{-0,4 \cdot 5,34}) = 0,90. \end{aligned}$$

- O trecho $t_1 < t \leq t_2$ tem como condição inicial $(x(t_1^+), y(t_1^+))$ e escrevemos:

$$y(t) = 10,224 \cdot e^{-0,3 \cdot t} \cdot \left(-\frac{e^{-0,4 \cdot t}}{0,1} + 6,29 \right).$$

- Quando $t_2 = 12,08$ ocorre o novo impulso, determinado por:

$$0,9 = 10,224 \cdot e^{-0,3 \cdot t} \cdot \left(-\frac{e^{-0,4 \cdot t}}{0,1} + 6,29 \right).$$

Sendo $Y_1 = (5,34 ; 0,9)$ e $Y_2 = (12,08 ; 0,9)$, então Y_2 sofre o impulso. E,

$$\begin{aligned} x(t_2^+) &= x(t_2) + \Delta x = 25,56 \cdot e^{-0,4 \cdot 12,08} + 2,7 = 2,90. \\ y(t_2^+) &= y(t_2) + \Delta y = 10,224 \cdot e^{-0,3 \cdot 12,08} \cdot \left(-\frac{e^{-0,4 \cdot 12,08}}{0,1} + 6,29 \right) = 0,90. \end{aligned}$$

- Em $t_2 < t \leq t_3$, expressamos a solução com as condições $(x(t_2^+), x(t_2^+))$,

$$y(t) = 145,54 \cdot e^{-0,3 \cdot t} \cdot \left(-\frac{e^{-0,4 \cdot t}}{0,1} + 3,22 \right).$$

- O novo impulso ocorre em $t_3 = 18,67$,

$$0,9 = 145,54 \cdot e^{-0,3 \cdot t} \cdot \left(-\frac{e^{-0,4 \cdot t}}{0,1} + 3,22 \right).$$

Em que, $Y_1 = (12,08 ; 0,9)$ e $Y_2 = (18,67 ; 0,9)$, então Y_2 sofre o impulso. E,

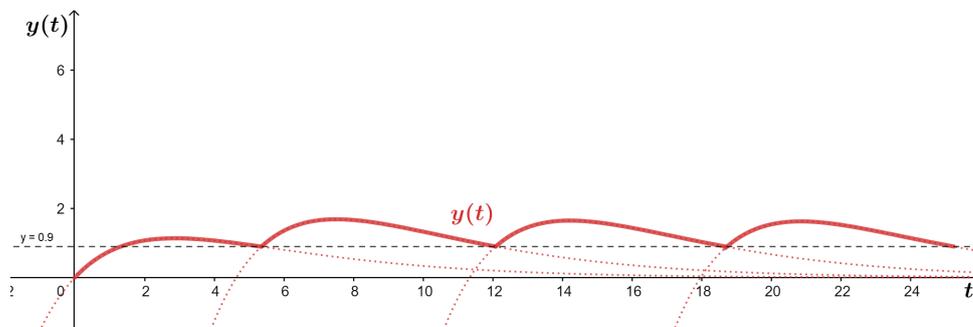
$$x(t_3^+) = x(t_3) + \Delta x = 363,84 \cdot e^{-0,4 \cdot 18,67} + 2,7 = 2,90.$$

$$y(t_3^+) = y(t_3) + \Delta y = 145,54 \cdot e^{-0,3 \cdot 18,67} \cdot \left(-\frac{e^{-0,4 \cdot 12,08}}{0,1} + 3,22 \right) = 0,90.$$

- A solução no trecho $t_3 < t \leq t_4$ com as novas condições iniciais equivale a

$$y(t) = 2031,27 \cdot e^{-0,3 \cdot t} \cdot \left(-\frac{e^{-0,4 \cdot t}}{0,1} + 1,66 \right).$$

Figura 3.7: Solução $t_0 \leq t \leq t_4$ do sistema com impulsos em tempos variáveis.



Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 3.7 representa a solução do sistema impulsivo, construída em cada intervalo para $t > 0$.

3.2 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz é um modelo matemático de série temporal, formulado pelo matemático Benjamin Gompertz, em 1938, inicialmente, como um modelo para o aumento da taxa de mortalidade com a idade em uma população humana. Trata-se de um problema não linear e escalar, no qual veremos como a solução do problema com impulsos em tempo

variável pode ser expressa, permitindo algumas considerações sobre o efeito impulsivo ao longo do tempo. As referências utilizadas nesta seção são [17], [18], [19].

Na década de 60, a bióloga Anna Kane Laird, obteve bons resultados ao ajustar a solução do modelo aos dados de volume do tumor para vários animais experimentais, cuja discussão está presente no artigo publicado em 1964, intitulado *Dynamics of Tumor Growth*. De fato, tumores são populações celulares em crescimento em um espaço confinado em que a disponibilidade de nutrientes é limitada.

Como regra, o crescimento é altamente dependente de variáveis como suprimentos, condições ambientais, competições etc, então para suportar a biomassa populacional em limites considerados bons, é possível realizar efeitos externos discretos (perturbações), que consistem na remoção ou adição de certas quantidades de biomassa.

O modelo de Gompertz impulsivo pode ser descrito do seguinte modo:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(r - \gamma \ln N), & \chi_1 < N(t) < \chi_2. \\ N(t^+) = N(t) + I_1(t, N(t)), & N(t) = \chi_1. \\ N(t^+) = N(t) + I_2(t, N(t)), & N(t) = \chi_2. \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

sendo, $N = N(t)$ a quantidade de biomassa em $t \geq 0$, $r > 0$ a constante do potencial reprodutivo; $\gamma > 0$ a constante do coeficiente de competição intraespecífica, $\chi_1(t) = \chi_1$ o valor constante da barreira inferior; $\chi_2(t) = \chi_2$ o valor constante da barreira superior.

Os valores da barreira inferior e superior são definidos de acordo com a espécie observada, definindo valores limites em condições ótimas para a quantidade de biomassa.

Suponhamos, portanto, que $0 < \chi_1 < \chi_2 < e^{\frac{r}{\gamma}}$, em que $x_1 = 0$ e $x_2 = e^{\frac{r}{\gamma}}$ são as raízes da equação $f(N) = N(r - \gamma \ln N)$ que corresponde a EDO do sistema impulsivo gompertziano.

A condição inicial tal que $x_1 < N_0 < x_2$, implica que a solução do sistema ficará limitada nesse intervalo, não atingindo os valores das raízes da EDO. Além disso, temos:

$$I_1 = I_1(t, N) > 0,$$

compreende o tamanho da adição de biomassa, quando atinge o valor da barreira inferior e $0 < I_1 < \chi_2 - \chi_1$.

$$I_2 = I_2(t, N) < 0,$$

sendo o tamanho da remoção de biomassa, quando atinge o valor da barreira superior e $\chi_1 - \chi_2 < I_2 < 0$.

Tais efeitos impulsivos (adição ou remoção) ocorrem sobre o modelo nos momentos em que a biomassa da população isolada é igualada a alguma quantidade das barreiras

(inferior ou superior).

No modelo de Gompertz, a quantidade de biomassa aumenta entre dois impulsos vizinhos, conseqüentemente, apenas a constante de barreira superior pode ser alcançada, ou seja, consideraremos apenas remoções discretas como efeito impulsivo, nos momentos em que a quantidade de biomassa atinge a barreira superior χ_2 .

A determinação do salto depende do fenômeno estudado, no entanto, aplicando o modelo no contexto de crescimento de tumores, a literatura traz peculiaridades quanto aos tratamentos individuais e apresenta uma taxa proporcional de células cancerígenas atingidas frente a utilização de certa droga.

Assim, se uma dose particular de uma droga individual leva a uma morte de $3 \log$ das células cancerosas e reduz a carga tumoral de 10^{10} para 10^7 células, a mesma dose usada em uma carga tumoral de 10^5 células reduz a massa tumoral para 10^2 células. A morte celular é, portanto, proporcional, independentemente da carga tumoral (KATSUNG, 2017, p. 950, tradução nossa).

O modelo de Gompertz tem como característica o crescimento mais lento no início e no fim de um período, assim, para um paciente com câncer avançado, a massa tumoral é maior, a fração de crescimento é baixa e a fração de células mortas é pequena.

Dessa forma a resposta à droga usada no tratamento depende, em especial, do lugar em que o tumor se encontra na curva de crescimento particular.

Consideremos, portanto, um tratamento que consiste na retirada de biomassa de modo proporcional $I_2 = -\beta \cdot N(t)$, sendo $\beta > 0$.

Assim, reformulamos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(r - \gamma \ln N), & N(t) \neq \chi_2. \\ \Delta N = -\beta \cdot N(t), & N(t) = \chi_2. \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (3.12)$$

A solução do sistema (3.12) apresentada por trechos existe e é única, garantida pelo Teorema de Existência e Unicidade para $t \geq 0$, apresentados no primeiro capítulo deste trabalho.

Além disso, observando a solução sem impulso, temos que esta é crescente e deverá encontrar a barreira superior, nos instantes de tempo variável $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, quando $N(t) = \chi_2$ e satisfazem $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$.

A EDO apresentada no sistema impulsivo é de variáveis separáveis, a solução é vista a seguir:

$$\int \frac{1}{N(r - \gamma \ln N)} dN = \int dt.$$

Fazendo uma mudança de variável, na qual $u = r - \gamma \ln N$ e $-\frac{1}{\gamma} du = \frac{1}{N} dN$, obtemos:

$$-\frac{1}{\gamma} \int \frac{1}{u} du = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{\gamma} \ln |u| = t + C \Rightarrow -\frac{1}{\gamma} \ln |r - \gamma \ln N| = t + C.$$

Assim, a solução $N(t)$ é dada por:

$$N(t) = \exp \left(\frac{r - e^{-\gamma t} \cdot k}{\gamma} \right).$$

Como $N(0) = N_0$, segue que $k = r - \ln N_0$ e

$$N(t) = \exp \left(\frac{r - e^{-\gamma t} \cdot (r - \ln N_0)}{\gamma} \right).$$

Antes do primeiro impulso, a solução do sistema (3.12) coincide com a solução da EDO sem impulso, observamos, então, a solução pro trechos.

- Seja $0 < t < t_1$, então a solução não sofre impulso e temos:

$$N(t) = \exp \left(\frac{r - e^{-\gamma t} \cdot (r - \ln N_0)}{\gamma} \right).$$

- Seja $t = t_1$ o primeiro instante de impulso, ou seja, $N(t_1) = \chi_2$

$$t_1 = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{r - \gamma \ln(\chi_2)}{k} \right).$$

Além disso, $N(t_1^+) = N(t_1) + \Delta N = (1 - \beta) \cdot N(t_1) = a$.

- Quando $t_1 < t < t_2$, consideramos a condição inicial $N(t_1^+) = a$.

Nesta situação, com a nova condição, temos:

$$k_1 = \frac{r - \gamma \ln(a)}{e^{-\gamma t_1}}, \quad \text{e}$$

$$N(t) = \exp \left(\frac{r - e^{-\gamma t} \cdot k_1}{\gamma} \right).$$

- Seja $t = t_2$ então, $N(t_2) = \chi_2$

$$t_2 = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{r - \gamma \ln(\chi_2)}{k_1} \right).$$

E ainda, $N(t_2^+) = N(t_2) + \Delta N = N(t_2) - \beta \cdot N(t_2) = a$.

Observamos que $N(t_1) = N(t_2) = \chi_2$.

- Quando $t_2 < t < t_3$, o segundo salto da solução já ocorreu e consideramos a condição inicial $N(t_2^+) = a$.

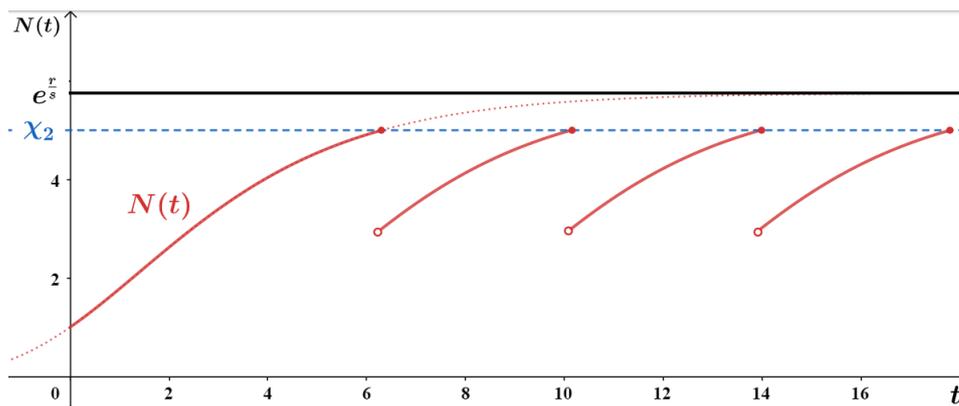
Nesta situação, com a nova condição, temos:

$$k_2 = \frac{r - \gamma \ln(a)}{e^{-\gamma t_2}}, \quad e$$

$$N(t) = \exp\left(\frac{r - e^{-\gamma t} \cdot k_2}{\gamma}\right).$$

Podemos prosseguir com a escrita do solução para todo $t \geq 0$. A seguir, apresentamos o esboço de solução considerando os parâmetros $r = 0,7$, $\gamma = 0,4$, $\beta = 0,4$, $N_0 = 1$.

Figura 3.8: Solução do modelo de Gompertz com impulso.



Fonte: Elaborada pela autora.

O modelo assim como o logístico (seção 1.3), possui comportamento periódico, uma vez que a cada instante de impulso a condição inicial mantém o mesmo valor a .

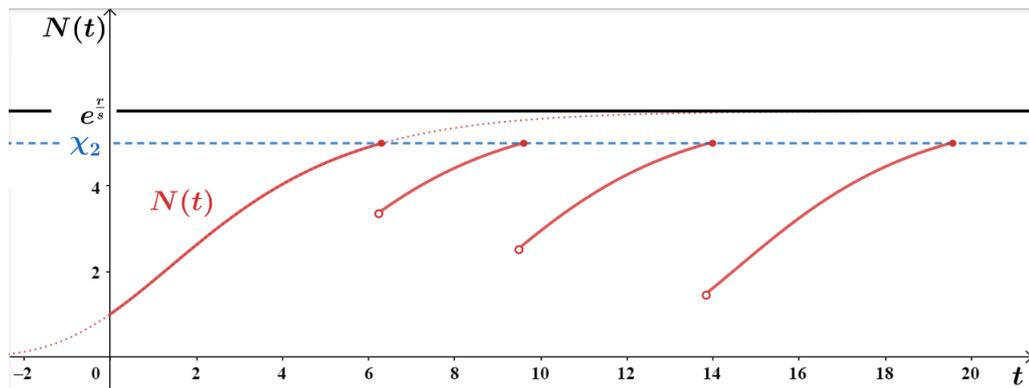
Suponhamos, a fim de obter um comportamento não periódico o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(0,7 - 0,4 \ln N), & N(t) \neq 5. \\ \Delta N = -0,05 \cdot t \cdot N(t), & N(t) = 5. \\ N(0) = 1, \end{cases} \quad (3.13)$$

Observemos a mudança na condição de impulso que, neste sistema, depende do tempo t . Dessa forma, os instantes de impulso sofrerão mudança de acordo com o intervalo da solução, correspondendo ao gráfico da Figura 3.9.

Obtemos, portanto um exemplo de solução não periódica para o modelo impulsivo de Gompertz, uma vez que o tamanho dos saltos é modificado ao passar do tempo.

Figura 3.9: Solução do modelo de Gompertz não periódico



Fonte: Elaborada pela autora.

3.3 Modelo de Lotka-Volterra

Nos últimos anos, o estudo de ecologia unida a teoria matemática tem se desenvolvido rapidamente, de modo que muitos modelos matemáticos foram propostos no estudo da dinâmica populacional. As referências utilizadas nesta seção são: [17], [20] e [21].

Um dos modelos famosos para a dinâmica da população é o sistema de competição Lotka – Volterra, também conhecido como modelo presa-predador e proposto de modo independente pelos matemáticos Vito Volterra e Alfred James Lotka. Em 1925, as equações foram usadas para analisar interações de predador-presa e assim foi desenvolvido o modelo, conhecido e estudado até os dias atuais.

A competição é um importante processo biótico que afeta a dinâmica populacional dos ecossistemas. No entanto, o sistema ecológico é frequentemente perturbado por atividades de exploração humana e controle biológico, as quais podem provocar descontinuidades no processo.

Esses modelos estão sujeitos a perturbações de curto prazo que muitas vezes são assumidas como na forma de impulsos no processo de modelagem. Conseqüentemente, obtendo uma descrição mais precisa do sistema, as equações diferenciais impulsivas fornecem uma descrição natural de tais sistemas.

Com esse controle impulsivo, estabelecemos critérios para evitar que todas as espécies sejam extintas estabilizando algum ponto positivo, que pode não ser o ponto de equilíbrio do sistema. Ao simular o controle impulsivo, obtemos resultados teóricos significativos, nos quais o impulso é caracterizado por intervenções (periódicas ou não) como liberação de pragas, utilização de pesticidas, captura ou envenenamento com produtos químicos usados na agricultura.

3.3.1 Caso I: modelo sem impulso

Inicialmente, escrevemos o sistema sem impulso:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - q_1 y), \\ \dot{y} = -y(r_2 - q_2 x), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

sendo: $x = x(t) > 0$ a quantidade de biomassa da presa no instante $t \geq 0$; $y = y(t) > 0$ a quantidade de biomassa do predador no momento $t \geq 0$; as constantes $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ são coeficientes específicos relativos ao crescimento da presa e do predador, respectivamente; as constantes $q_1 > 0$ e $q_2 > 0$ são os coeficientes de competição intraespécies. E $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, correspondem às quantidades iniciais de ambas espécies em $t = 0$.

A escrita matricial do sistema não linear (ou seja, a matriz $A(x, y)$ depende de x e y) (3.14) é expressa por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & -q_1 \cdot x \\ y \cdot q_2 & -r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os pontos de equilíbrio do sistema sem impulso, são dados nos momentos em que não há variação no número de presas e predadores, ou seja,

$$\dot{x} = 0 \text{ e } \dot{y} = 0,$$

assim os pontos de equilíbrio são também pontos críticos, a saber:

$$(0, 0) \text{ e } \left(\frac{r_2}{q_2}, \frac{r_1}{q_1} \right).$$

No primeiro instante, observemos as soluções próximas a origem $(0, 0)$ e linearizando o sistema (3.14) temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Determinamos os autovalores a partir de

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - r_1 & 0 \\ 0 & \lambda + r_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = r_1 \text{ e } \lambda_2 = -r_2.$$

Como os autovalores possuem sinais opostos, o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto de

instabilidade do sistema (3.16). Isto significa que para qualquer condição inicial dada em uma vizinha da origem, as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio.

Agora, analisamos o ponto crítico $\left(\frac{r_2}{q_2}, \frac{r_1}{q_1}\right)$. Para isto, fazemos uma mudança de variáveis, que corresponde a deslocar o ponto de equilíbrio para a origem, de modo que,

$$u = x - \frac{r_2}{q_2} \quad \text{e} \quad v = y - \frac{r_1}{q_1}.$$

Derivando, segue que,

$$\dot{u} = \dot{x} \quad \text{e} \quad \dot{v} = \dot{y}.$$

E assim,

$$\begin{array}{l|l} \dot{u} = x(r_1 - q_1 y) & \dot{v} = -y(r_2 - q_2 x) \\ \dot{u} = \left(u + \frac{r_2}{q_2}\right) \cdot \left[r_1 - q_1 \left(v + \frac{r_1}{q_1}\right)\right] & \dot{v} = -\left(v + \frac{r_1}{q_1}\right) \cdot \left[r_2 - q_2 \left(v + \frac{r_2}{q_2}\right)\right] \\ \dot{u} = -q_1 \cdot \left(u + \frac{r_2}{q_2}\right) \cdot v & \dot{v} = q_2 \cdot \left(v + \frac{r_1}{q_1}\right) \cdot u \end{array}$$

Dessa forma, o sistema matricial correspondente ao ponto de equilíbrio estudado é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_1 v & -q_1 \frac{r_2}{q_2} \\ q_2 \frac{r_1}{q_1} & q_2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Como a mudança de variáveis desloca a origem para o ponto de equilíbrio, novamente linearizando o sistema (3.14) e usando u e v :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q_1 \frac{r_2}{q_2} \\ q_2 \frac{r_1}{q_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

E determinamos os autovalores a partir de

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -q_1 \frac{r_2}{q_2} \\ q_2 \frac{r_1}{q_1} & \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Ou seja,

$$\lambda = \pm i \sqrt{r_1 r_2}.$$

Os autovalores são imaginários puros (parte real nula) e, conseqüentemente, o ponto $\left(\frac{r_2}{q_2}, \frac{r_1}{q_1}\right)$ é um ponto de estabilidade do sistema. A fim de facilitar a notação denominamos o ponto de equilíbrio estável por (x^*, y^*) .

O sistema presa-predador não apresenta um solução explícita, mas é possível determinar as órbitas de solução.

Para isto, utilizamos a regra da cadeia nas EDOs do problema (3.14), obtendo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(r_2 - q_2x)}{x(r_1 - q_1y)}.$$

Utilizando a técnica referente à equações separáveis, obtemos:

$$\int \frac{(q_1y - r_1)}{y} dy = \int \frac{(r_2 - q_2x)}{x} dx.$$

$$\Rightarrow q_1y - r_1 \ln y + q_2x - r_2 \ln x = C, \quad (3.15)$$

sendo C uma constante positiva.

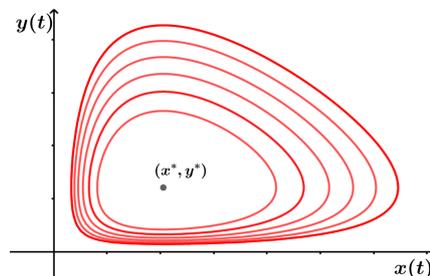
De fato, C é positiva pois, sendo $C = \ln K$

$$\ln K = q_1y - r_1 \ln y + q_2x - r_2 \ln x.$$

$$K = e^{q_1y} \cdot y^{-r_1} \cdot e^{q_2x} \cdot x^{-r_2},$$

para $x, y > 0$, então $K > 1$ e, conseqüentemente, $C > 0$. E para cada valor de C , traçamos no plano de fase $x \times y$ as órbitas que devem satisfazer a relação (3.15).

Figura 3.10: Órbitas do sistema presa-predador sem impulso.



Fonte: Elaborada pela autora.

A partir da observação do sistema sem impulso, é possível uma análise mais clara acerca do modelo com impulso, que estudaremos a seguir.

3.3.2 Caso II: modelo com impulsos em tempos variáveis

Observando as características do modelo, introduzimos os efeitos impulsivos. Para tanto, escrevemos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - q_1y), & y(t) \neq k \cdot x(t), \\ \dot{y} = -y(r_2 - q_2x), & y(t) \neq k \cdot x(t), \\ \Delta x(t) = -\alpha x(t), & y(t) = k \cdot x(t), \\ \Delta y(t) = -\alpha y(t), & y(t) = k \cdot x(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.16)$$

O modelo de Lotka-Volterra, descrito pelo sistema impulsivo não linear (3.16), possui única solução, conforme os teoremas apresentados no primeiro capítulo deste trabalho, além disso, as considerações a respeito do problema impulsivo são obtidas por meio da solução descrita em cada intervalo de tempo estudado.

No sistema (3.16), o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem a equação $y = k \cdot x(t)$, com $k > 0$ o qual será definido posteriormente; $\alpha x(t)$ e $\alpha y(t)$ são as quantidades de biomassa da presa e do predador, respectivamente, que serão removidas em forma de impulsos.

Denominamos o lado direito da equação (3.15) por $W(x, y)$, ou seja,

$$W(x, y) = q_1y - r_1 \ln y + q_2x - r_2 \ln x.$$

Seja $U(x, y)$ a diferença entre a função $W(x, y)$ calculada em pontos arbitrários (x, y) e no ponto de equilíbrio estável (x^*, y^*) ,

$$U(x, y) = W(x, y) - W(x^*, y^*).$$

$$U(x, y) = q_1y - r_1 \ln y + q_2x - r_2 \ln x + r_1 \left(\ln \left(\frac{r_1}{q_1} \right) - 1 \right) + r_2 \left(\ln \left(\frac{r_2}{q_2} \right) - 1 \right).$$

Segue que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $(x, y) \neq (x^*, y^*)$, a desigualdade $U(x, y) > 0$ é válida, pois $W(x, y) > 0$, para $x, y > 0$ (vide observação sobre $C > 0$ em (3.15)).

As órbitas do sistema (3.16) são dadas implicitamente para algum $c \geq 0$, por:

$$\gamma_c = \{(x, y) : U(x, y) = c\}.$$

E a superfície impulsiva (neste caso, o segmento no qual os instantes de impulso ocorrem) é um segmento da reta $r : y = kx$.

A inclinação da reta $y = kx$ é especificada tal que

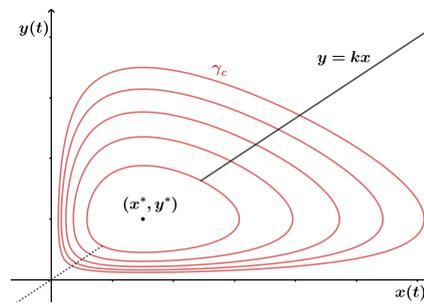
$$\frac{y^*}{a} \leq k \leq \frac{b}{x^*},$$

sendo a e b , respectivamente, os maiores valores das soluções das equações a seguir:

$$U(x, y^*) = c_1 \Leftrightarrow q_2 x - r_2 \ln x = c_1 - r_2 (\ln(x^*) - 1).$$

$$U(x^*, y) = c_1 \Leftrightarrow q_1 y - r_1 \ln y = c_1 - r_1 (\ln(y^*) - 1).$$

Figura 3.11: Órbitas γ_c do sistema (3.15) e superfície de impulso $y = kx$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Suponhamos que o domínio D , no qual está localizada a órbita do problema impulsivo, situa-se entre duas órbitas de fronteira γ_{c_1} e γ_{c_2} , com $0 < c_1 < c_2$, ou seja, $D = D_{c_2} - D_{c_1}$.

Assim, seja c_0 , tal que $c_1 < c_0 < c_2$, a órbita do sistema impulsivo é uma parte da órbita γ_{c_0} .

Observando o sistema (3.16) e sabendo que a superfície que define o impulso é um segmento da reta $y = kx$, então o vetor de impulso é expresso por

$$B(x, y) = B(x, kx) = -(\alpha x, k\alpha x).$$

Assim, as soluções nos instantes de impulso são expressas por:

$$(x^+, y^+) = (x^+, kx^+) = (x + \Delta x, kx + \Delta kx) = (x, kx) - \alpha(x, kx).$$

Tomando a condição inicial do problema impulsivo (3.16) sobre a curva γ_{c_0} , no momento em que a órbita do problema toca a superfície de impulso, assim, $U(x, kx) = c_0$, ou ainda,

$$q_1 kx - r_1 \ln(kx) + q_2 x - r_2 \ln x = c_0 - r_1 \left(\ln \left(\frac{r_1}{q_1} \right) - 1 \right) - r_2 \left(\ln \left(\frac{r_2}{q_2} \right) - 1 \right), \quad (3.17)$$

obtemos soluções para (3.17), no entanto não é possível expressá-las analiticamente, isto

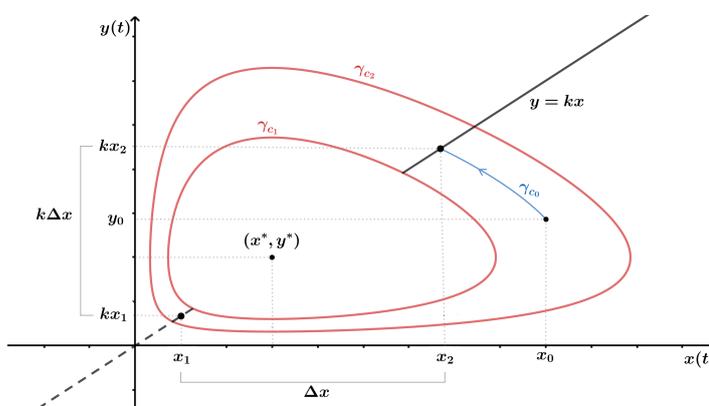
é, x e y em função de t .

Sejam elas, x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$. Então $x = x_2$ e $y = kx_2$ são as quantidades aproximadas de presa e predador no momento do impulso (remoções).

Neste caso, mostraremos a solução periódica, no qual os tamanhos dos saltos são determinados pela diferença entre as soluções encontradas, de modo que:

$$\begin{cases} \Delta x(t) = x_2 - x_1, \\ \Delta kx(t) = k \cdot (x_2 - x_1). \end{cases}$$

Figura 3.12: $U(x, kx) = c_0$.

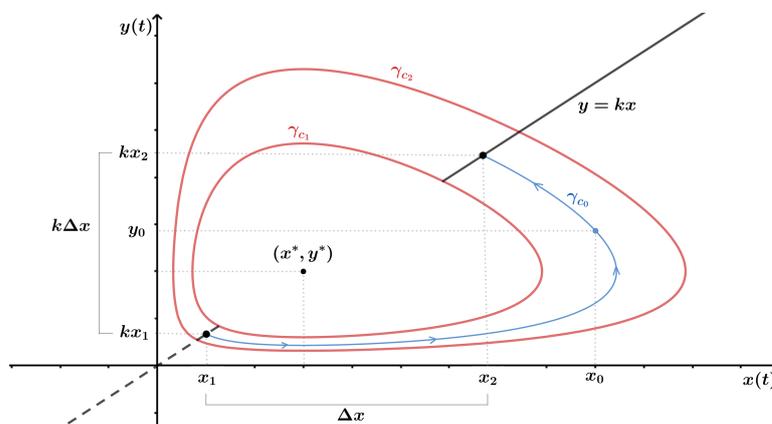


Fonte: Elaborada pela autora.

De modo que a solução (x^+, y^+) após impulso ainda esteja sobre a órbita γ_{c_0} , sendo, portanto uma nova condição inicial para se dar continuidade à construção da solução.

Na construção da solução deste problema impulsivo, em particular, observa-se que os pontos de impulso e os tamanhos dos saltos coincidem, dando origem a um processo periódico, que é interessante, visto que as remoções tendem a ocorrer em períodos determinados para cada espécie estudada.

Figura 3.13: Órbita periódica γ_{c_0} do sistema.



Fonte: Elaborada pela autora.

Neste caso específico Figura 3.13, o gráfico do espaço de fase $x \times y$ foi traçado a partir dos seguintes parâmetros no sistema (3.16):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(4 - 2y), \quad y(t) \neq \frac{2}{3} \cdot x(t). \\ \dot{y} = -y(3 - x), \quad y(t) \neq \frac{2}{3} \cdot x(t). \\ \Delta x(t) = 0,85 \cdot x(t), \quad y(t) = \frac{2}{3} \cdot x(t). \\ \Delta y(t) = 0,85 \cdot y(t), \quad y(t) = \frac{2}{3} \cdot x(t). \\ x(0) = 9, \\ y(0) = 2,86, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Escolhendo as órbitas do sistema com $c_1 = 2$, $c_2 = 4$ e $c_0 = 3$, as condições iniciais sobre a órbita γ_{c_0} e resolvendo a equação:

$$U\left(x, \frac{2}{3}x\right) = 3,$$

os valores aproximados encontrados para x foram $x_1 = 1$ e $x_2 = 6,69$. Desse modo os pontos de intersecção da órbita e da superfície de impulso são dados por $X_1 = (1; 0,67)$ e $X_2 = (6,69; 4,46)$ (Na Figura 3.13, representados por $(x_1; kx_1)$, $(x_2; kx_2)$). E ainda, como $x_2 > x_1$, segue que o ponto X_2 sofre impulso.

O tamanho do salto, representado no sistema (3.18) é aproximado, mas pode ser obtido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x(t) = 6,69 - 1 = 5,59. \\ \Delta y(t) = \frac{2}{3} \cdot 5,59 = 3,79. \end{array} \right.$$

Assim, estando sobre o ponto $X_2 = (6,69; 4,46)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) = -\alpha x(t) &= -\alpha \cdot 6,69 = 5,59. \\ \Rightarrow \alpha &\approx 0,85. \end{aligned}$$

Encontramos o mesmo valor aproximado determinando α por meio do $\Delta y(t)$, o que corresponde ao salto sobre a curva γ_{c_0} e, especialmente, sobre o ponto de intersecção entre a órbita e a superfície de impulso, tornando o processo periódico.

De modo a garantir a existência do período da solução escrevemos

$$\begin{aligned}
 U(x, kx) &= U(x + T, kx + T). \\
 2kx - 4 \ln(kx) + x - 3 \ln x &= 2(kx + T) - 4 \ln(kx + T) + (x + T) - 3 \ln(x + T). \\
 -4 \ln(kx) - 3 \ln x &= 3T - 4 \ln(kx + T) - 3 \ln(x + T).
 \end{aligned}$$

A partir das propriedades de logaritmos, temos:

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{kx + T}{kx} \right)^4 + \ln \left(\frac{x + T}{x} \right)^3 &= 3T. \\
 \left(\frac{kx + T}{kx} \right)^4 \cdot \left(\frac{x + T}{x} \right)^3 &= e^{3T}.
 \end{aligned}$$

Notemos que $T = 0$ é uma solução para esta igualdade. Então chamando:

$$P(T) = \left(\frac{kx + T}{kx} \right)^4 \cdot \left(\frac{x + T}{x} \right)^3, \quad E(T) = e^{3T},$$

calculamos a primeira derivada quando $T = 0$:

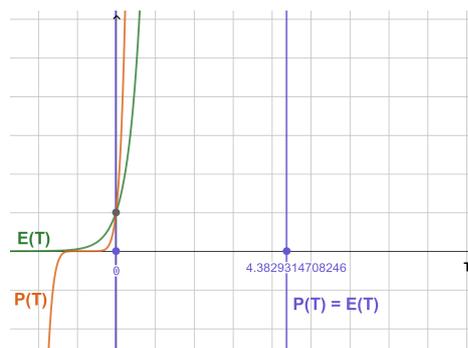
$$P'(0) = 7, \quad E'(0) = 3.$$

Desta forma, podemos concluir que a inclinação de $P(T)$ é maior que a inclinação de $E(T)$, no instante zero. No entanto, a exponencial tende a um crescimento maior que qualquer polinômio conforme T varia, conseqüentemente, teremos um novo ponto de intersecção entre os gráficos de $y = P(T)$ e $y = E(T)$, que corresponde ao período T .

Observemos este raciocínio no exemplo utilizado, em que obtivemos os pontos de intersecção com a superfície de impulso $X_1 = (1; 0, 67)$ e $X_2 = (6, 69; 4, 46)$, no entanto o ponto em que o impulso ocorre é o ponto X_2 e o período é o tempo decorrido de X_1 até o impulso ocorrer.

Com esta análise deixamos fixo, $x = 1$ e obtemos período $T \approx 4, 38$.

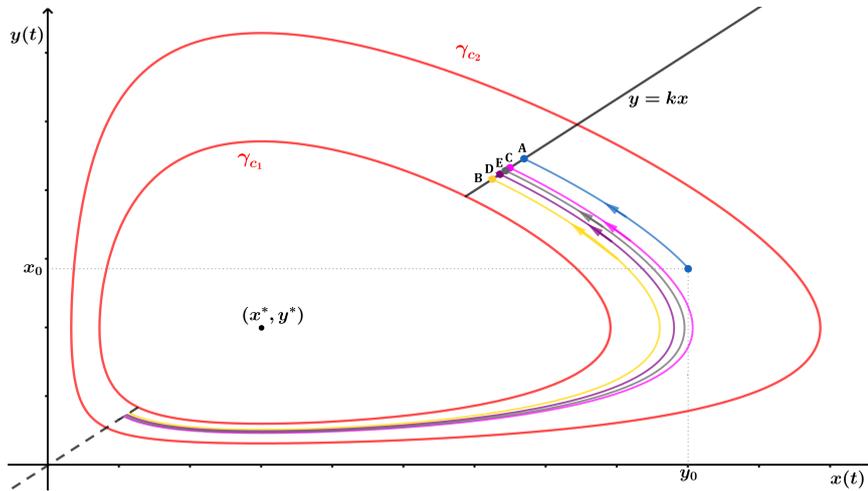
Figura 3.14: A intersecção das curvas ocorre em $T \approx 4, 38$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Por outro lado, as remoções poderiam ocorrer de forma não periódica, neste caso, após o impulso a nova condição inicial pertenceria a outra órbita do sistema, para tanto, considerando o sistema (3.18) e fazendo o parâmetro $\alpha = 0,83$, obtemos um comportamento não periódico da solução.

Figura 3.15: Órbita da solução impulsiva não periódica.



Fonte: Elaborada pela autora.

A condição inicial é dada sobre a órbita $U(x, kx) = 3$, sendo $(x_0, y_0) = (9; 2,86)$. A partir desse ponto inicial, obtemos a órbita representada pelo traçado de cor azul e o primeiro ponto de impulso determinado por $A = (6,69; 4,47)$.

O ponto $A^+ = A - \alpha A$, como definimos $\alpha = 0,83$ temos que $A^+ = (1,13; 0,75)$, sendo esta a nova condição inicial que determina uma nova órbita, tal que $c = 2,44$, representada na curva em amarelo.

A órbita encontra a superfície de impulso no ponto $B = (6,24; 4,17)$ sofre o impulso de modo que $B^+ = (1,06; 0,70)$, dando origem a uma nova órbita, sendo $c = 2,74$, representada na cor rosa.

Prosseguimos dessa forma e determinamos os pontos $C = (6,49; 4,33)$, $D = (6,35; 4,24)$, $E = (6,43; 4,29)$ e as órbitas representadas na Figura 3.15 em roxo e cinza, respectivamente, a fim de exemplificar o comportamento não periódico em função do tamanho do salto escolhido inicialmente.

4 Considerações Finais

As equações diferenciais impulsivas, embora estudadas em contexto recente, constituem-se em uma área de relevante pesquisa, possibilitando novos estudos e compreensões sobre o tema, além da modelagem de fenômenos que melhor se ajustam por meio dos impulsos.

O sistema impulsivo definido por uma equação diferencial ordinária e uma condição condizente ao impulso possui aplicações em diversas áreas do conhecimento, abrangendo as ciências sociais, físicas, biológicas e farmacológicas.

Tais impulsos, estudados para essas equações, representam uma perturbação no sistema que ocorre em um tempo muito curto, considerado instantâneo se comparado com todo o tempo de desenvolvimento do fenômeno.

Ainda, estes impulsos são classificados em dois tipos, a saber: impulso pré-fixado e impulsos em tempos variáveis, o primeiro caracteriza-se por um tempo fixo e bem definido, contribuindo para maior facilidade na escrita da solução do sistema impulsivo, enquanto o segundo tipo de impulso, depende da solução do sistema em momentos específicos, sendo mais complexo, mas trata de situações bastante interessantes, em especial, nesses casos, trazemos a noção de soluções periódicas em certos sistemas estudados.

O presente trabalho buscou apresentar alguns resultados teóricos dessas equações, a partir da existência e unicidade de soluções, estabilidade e a apresentação de modelos, possibilitando maior clareza a respeito do objeto de estudo.

As aplicações apresentadas dialogam com as demais áreas do conhecimento, desde o contexto social, como o crescimento populacional, até a aplicação biológica em sistemas farmacocinéticos, no entanto, outras discussões acerca do tema se fazem possíveis, como existência e comportamento de sistemas não lineares, bem como suas devidas aplicações, além de vislumbrar impulsos das mais variadas formas a depender da análise escolhida.

Artigos recentes, apresentam as equações impulsivas em modelos e resultados significativos dentro da área biológica (tratamentos de SIS e HIV, por exemplo), sendo, portanto, um campo aberto para uma sequência deste estudo.

Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC, 2010.
- [2] BALLINGER, G. H. Qualitative theory of impulsive delay differential equations. University of Waterloo, 2000.
- [3] GIMENES, L. P. *Estabilidade e oscilação de soluções de equações diferenciais com retardos e impulsos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007.
- [4] DISHLIEVA, K. Impulsive differential equations and applications. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, v. 1, 2012.
- [5] CHURCH, K. *Applications of impulsive differential equations to the control of malaria outbreaks and introduction to impulse extension equations: a general framework to study the validity of ordinary differential equation models with discontinuities in state*. Tese (Doutorado) — Université d'Ottawa/University of Ottawa, 2014.
- [6] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: wiley New York, 1978. v. 1.
- [7] HARTMAN, P. Ordinary differential equations (birk-hauser, boston). 1982.
- [8] ORIAMATHEMATICS. *Liouville's Formula Proof*. Disponível em: <<https://oriamathematics.wordpress.com/2015/07/08/liouilles-formula-proof/>>.
- [9] LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S. *Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications: Volume I: Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Academic press, 1969.
- [10] LAKSHMIKANTHAM, V.; SIMEONOV, P. S. et al. *Theory of impulsive differential equations*. [S.l.]: World scientific, 1989. v. 6.
- [11] FUKUSHIMA, P. K. *Problemas inversos associados a equações diferenciais impulsivas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.

-
- [12] BAINOV, D.; SIMEONOV, P. *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*. [S.l.]: Longman Scientific & Technical, Harlow, UK, 1993.
- [13] SAMOILENKO, A. M.; PERESTYUK, N. *Impulsive differential equations*. [S.l.]: world scientific, 1995.
- [14] MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Academic Press, 2013.
- [15] LEON, S. J. *Álgebra Linear com Aplicações*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- [16] KNAPP, A. W. *Basic real analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005.
- [17] DISHLIEV, A.; DISHLIEVA, K.; NENOV, S. *Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications*. [S.l.]: Academic Publication, 2012.
- [18] LAIRD, A. K. Dynamics of tumour growth. *British journal of cancer*, Nature Publishing Group, v. 18, n. 3, p. 490, 1964.
- [19] KATZUNG, B. G. *Basic and clinical pharmacology*. [S.l.]: McGraw Hill Professional, 2017.
- [20] TANG, S.; CHEN, L. The periodic predator-prey lotka–volterra model with impulsive effect. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, World Scientific, v. 2, p. 267–296, 2002.
- [21] JIN, Z.; MAOAN, H.; GUIHUA, L. The persistence in a lotka–volterra competition systems with impulsive. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 24, p. 1105–1117, 2005.
- [22] KRÜGER-THIEMER, E. Pharmacokinetics: Kinetic aspects of absorption, distribution, and elimination of drugs. In: *Kinetics of drug action*. [S.l.]: Springer, 1977. p. 63–123.
- [23] KRÜGER-THIEMER, E. Formal theory of drug dosage regimens. i. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 13, p. 212–235, 1966.
- [24] PIERCE, J.; SCHUMITZKY, A. Optimal impulsive control of compartment models, i: Qualitative aspects. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 18, p. 537–554, 1976.
- [25] KRÜGER-THIEMER, E. Pharmacokinetics and dose-concentration relationships. *Physico-Chemical Aspects of Drug Action*, Pergamon Press, p. 63–113, 1968.