

***“Aplicação da Computação
Simbólica na Resolução de
Problemas de Condução de Calor
Em Cilindros Vazados com
Condições de Contorno
Convectivas”***

VALESCA ALVES CORRÊA

VALESCA ALVES CORRÊA

APLICAÇÃO DA COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR EM CILINDROS
VAZADOS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO
CONVECTIVAS

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção
do título de Doutor em Engenharia
Mecânica na área de Transmissão e
Conversão de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci

Co-orientador: Prof. Dr. Marcio Abud Marcelino

Guaratinguetá
2007

C824a	Corrêa, Valesca Alves Aplicação da computação simbólica na resolução de problemas de condução de calor em cilindros vazados com condições de contorno convectivas / Valesca Alves Corrêa.- Guaratinguetá : [s.n.], 2007 139f.: il. Bibliografia: f. 112-116 Inclui apêndice Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2007 Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci Co-orientador: Prof. Dr. Marcio Abud Marcelino 1. Calor - Condução I. Título CDU 536.21
-------	---



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

"APLICAÇÃO DE COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR EM CILINDROS VAZADOS
COM CONDIÇÕES DE CONTORNO CONVECTIVAS"

VALESCA ALVES CORRÊA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA"

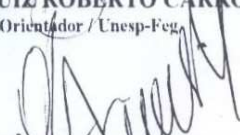
PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA: TRANSMISSÃO E CONVERSÃO DE ENERGIA

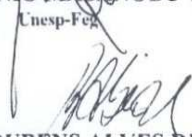
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. João Andrade de Carvalho Junior
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. LUIZ ROBERTO CARROCCI
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. PETRÔNIO MASA NOBU TANISHO
Unesp-Feg


Prof. Dr. RUBENS ALVES DIAS
Unesp-Feg


Prof. Dr. CARLOS ALBERTO CHAVES
Unitau


Prof. Dr. JOSÉ RUI CAMARGO
Unitau

Janeiro de 2007

DADOS CURRICULARES

VALESCA ALVES CORRÊA

NASCIMENTO	20.07.1966 – TAUBATÉ / SP
1984/1986	Curso de Graduação Tecnólogo em Processamento de Dados – UNITAU
1987/1991	Curso de Graduação Engenharia Elétrica - UNITAU
1994/1995	Curso de Pós-Graduação em nível de Especialização (Lato Sensu) em Técnicas de Computação Avançada - UNITAU
1998/2000	Curso de Pós-Graduação em nível de Mestrado em Engenharia Mecânica, no Departamento de Engenharia Mecânica - UNITAU
2002/2007	Curso de Pós-Graduação em nível de Doutorado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá - UNESP

de modo especial a minha mãe, às minhas filhas Thaís e Tássia, que foram as grandes incentivadoras para que eu continuasse no curso, e ao meu esposo João Luiz.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci* que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

à minha mãe *Arlete*, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivou meus estudos.

às Professores do Departamento de Engenharia Mecânica pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar.

.

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade:

- UNITAU – através do PROGRAMA DE BOLSA DE ESTUDOS.

“Aprender é descobrir aquilo que você já sabe.
Fazer é demonstrar que você o sabe. Ensinar é
lembrar aos outros que eles sabem tanto quanto
você.”

Richard Bach

CORRÊA, V. A. Aplicação da computação simbólica na resolução de problemas de condução de calor em cilindros vazados com condições de contorno convectivas. 2007. 139f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

RESUMO

Com a evolução dos sistemas de computação simbólica ampliou-se a capacidade de modelagem e análise de problemas provenientes de equações diferenciais. Propõe-se a resolução da equação da condução de calor em regimes permanente e transiente para uma geometria cilíndrica com condições de contorno convectivas de forma analítica e numérica utilizando o software de computação simbólica Maple. Para este propósito serão empregados para a resolução analítica, o método de separação de variáveis e para a resolução numérica, o método das diferenças finitas com o esquema Crank-Nicolson e explícito. Os resultados obtidos das resoluções analíticas e numéricas, para algumas situações avaliadas são comparadas. As vantagens computacionais da utilização do software Maple são apresentadas.

PALAVRAS-CHAVE: Condução de calor, computação simbólica, resolução transiente, diferenças finitas.

CORRÊA, V. A. Symbolic computation application on the resolution of conduction heat problems in hollow cylinders with convective boundary conditions. 2007. 139f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

ABSTRACT

The evolution of symbolic computation systems enlarges the capacity of modeling and analysis of problems by differential equations. The aim is the resolution of the conduction heat equation in unsteady and steady state for the cylindrical geometry with convective boundary conditions with analytical and numerical solutions using the Maple software. To this results will be used the separated variables method and finite differences to numerical solutions with Crank-Nicolson and explicit schemes. The results obtained for numerical and analytical solutions for some situations it will available and compared. The computational advantages of the Maple software are showed too.

KEYWORDS: heat conduction, symbolic computation, unsteady resolution, finite differences.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Representação de um cilindro vazado com condições de contorno convectivas	30
FIGURA 2 – Representação da nomenclatura de diferenças finitas para um cilindro vazado	39
FIGURA 3 – Esquema de uma matriz tridiagonal	44
FIGURA 4 – Distribuição de temperatura – Caso 1 - regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$	87
FIGURA 5 – Distribuição de temperatura – Caso 2 - regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$	88
FIGURA 6 – Distribuição de temperatura – resolução analítica - Caso 3	91
FIGURA 7 – Distribuições de temperatura com variação de autovalores e perfil inicial constante para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$	92
FIGURA 8 – Distribuições de temperatura com variação de autovalores e perfil inicial linear para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$	92
FIGURA 9 – Distribuições de temperatura com variação de autovalores e perfil inicial parabólico para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$	93
FIGURA 10 – Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_2	96
FIGURA 11 – Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_1	96

FIGURA 12 – Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico utilizando 20 autovalores na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ 97

FIGURA 13 - Distribuições de temperatura para alguns valores de tempo com perfil inicial parabólico utilizando 20 autovalores com $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ 98

FIGURA 14 – Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_2 , $t = 10 \text{ s}$ e $\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3$ 102

FIGURA 15 – Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_2 , $t = 10 \text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$

FIGURA 16 – Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico e 2 autovalores na solução usando parâmetros $H_1 = 100 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$ 103

FIGURA 17 – Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico e 5 autovalores na solução. usando parâmetros $H_1 = 100 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$ 104

FIGURA 18 – Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico e 10 autovalores na solução. com os parâmetros $H_1 = 100 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$ 104

FIGURA 19 - Distribuições de temperatura com alguns valores de tempo com perfil inicial parabólico e 20 autovalores na solução usando parâmetros $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3$ 105

FIGURA 20 – Distribuições de temperatura – analítico-numérico – Caso 2 - $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$ 107

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Porcentagem de superioridade de resolução do Maple e outros softwares existentes no mercado (adaptado de Wester, 1999).....	27
TABELA 2 – Critérios de estabilidade dos esquemas explícito, implícito e Crank-Nicolson.....	41
TABELA 3 – Erros relativos ao tamanho da malha aplicado ao Caso 1.....	42
TABELA 4 – Valores das propriedades usadas nas soluções do Caso 1.....	86
TABELA 5 – Distribuições de temperatura e erros relativos ao Caso 1 no regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$	88
TABELA 6 – Distribuições de temperatura e erros relativos ao Caso 2 no regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$	89
TABELA 7 – Valores das propriedades usadas nas soluções do Caso 3.....	90
TABELA 8 – Valores dos erros relativos em função dos autovalores e perfil inicial para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$	94
TABELA 9 – Valores das propriedades usadas nas soluções do Caso 1.....	95
TABELA 10 – Valores obtidos de tempo com perfis linear, constante e parabólico com $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1000 \text{ m}^{-1}$	98
TABELA 11 – Valores das distribuições de temperatura obtidos pela resolução analítica e numérica e erros relativos no $t = 1 \text{ s}$	99

TABELA 12 – Valores dos erros relativos pelo esquema explícito – Caso 1 no $t = 1\text{ s}$	100
---	-----

TABELA 13 – Valores das distribuições de temperatura obtidos pela resolução analítica e numérica e erros relativos no $t = 1\text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000\text{ W/m}^3$ – Caso 2	106
---	-----

TABELA 14 – Valores das distribuições de temperatura obtidos pela resolução analítica e numérica e erros relativos no $t = 2\text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000\text{ W/m}^3$ – Caso 2	108
---	-----

TABELA 15 – Tempos de processamento utilizados nas simulações analíticas	109
--	-----

TABELA 16 – Tempos de processamento utilizados nas simulações numéricas	109
---	-----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- CAS - Computer Algebra System
- TDMA - TriDiagonal Matrix Algorithm

LISTA DE SÍMBOLOS

a	raio interno do cilindro vazado	m
A	parâmetro de simplificação das diferenças finitas	
b	raio externo do cilindro vazado	m
B	constante de simplificação das diferenças finitas	
c_p	calor específico	$J/Kg\ ^\circ C$
$Erro$	erro relativo	$\%$
$f(r)$	função associada a condição inicial	
F	resolução em regime permanente	
G	resolução em regime transiente	
h_1	coeficiente de transferência de calor por convecção do fluido interno	$W/m^2\ ^\circ C$
h_2	coeficiente de transferência de calor por convecção do fluido externo	$W/m^2\ ^\circ C$
H_1	parâmetro relacionado a fronteira interna do cilindro	m^{-1}
H_2	parâmetro relacionado a fronteira externa do cilindro	m^{-1}
i	localização de um ponto na malha	
k	condutividade térmica	$W/m\ ^\circ C$
ko	condutividade térmica na temperatura de referência To	$W/m\ ^\circ C$
m	indicador de nível de tempo	
M	número de pontos nodais	
O	ordem de erro	
$\dot{q}$	Taxa de geração de energia por unidade de volume	W/m^3
r	raio	m
R	solução em função do raio	
t	tempo	s
T	temperatura	$^\circ C$
To	Temperatura no tempo igual a zero	$^\circ C$
$T_{\infty 1}$	temperatura do fluido interno	$^\circ C$
$T_{\infty 2}$	temperatura do fluido externo	m

α	difusividade térmica	m^2/s
β	coeficiente de expansão térmica	$^{\circ}C^{-1}$
ε	erro associado ao critério de convergência	
$\mathfrak{S}$	solução em função do tempo	
λ	constante de separação	
θ	constante que define o grau de implicidade	
ρ	massa específica	Kg/m^3
Δr	incremento radial	m
Δt	incremento temporal	s

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	JUSTIFICATIVA	19
1.2	COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA	20
1.2.1	A computação simbólica e a transferência de calor	21
1.2.2	O software Maple	25
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO	27
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	28
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	30
2.1	MODELAGEM MATEMÁTICA – CASO 1	30
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA – CASO 2	32
2.3	MODELAGEM MATEMÁTICA – CASO 3	32
3	METODOLOGIA	34
3.1	MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	34
3.2	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	37
3.2.1	Discretização transiente da condução de calor	38
3.2.2	Definição da malha	42
3.2.3	Método de resolução de sistemas de equações lineares.....	43
4	SOLUÇÕES PARA O REGIME PERMANENTE	46
4.1	RESOLUÇÃO DO CASO 1.....	46
4.1.1	Resolução analítica – Caso 1 – regime permanente	46
4.1.2	Resolução numérica – Caso 1 – regime permanente.....	48
4.2	RESOLUÇÃO DO CASO 2.....	53
4.2.1	Resolução analítica – Caso 2 – regime permanente	54
4.2.2	Resolução numérica – Caso 2 – regime permanente.....	55
4.3	RESOLUÇÃO DO CASO 3.....	57
4.3.1	Resolução analítica – Caso 3 – regime permanente	57
5	SOLUÇÕES PARA O REGIME TRANSIENTE	64
5.1	RESOLUÇÃO DO CASO 1.....	64
5.1.1	Resolução analítica – Caso 1 – regime transiente	64
5.1.2	Resolução numérica – Caso 1 – regime transiente.....	76
5.1.2.1	Resolução numérica – Caso 1 – regime transiente – esquema Cranck-Nicolson	76
5.1.2.2	Resolução numérica – Caso 1 – regime transiente – esquema explícito	81
5.2	RESOLUÇÃO DO CASO 2.....	83
5.2.1	Resolução analítica – Caso 2 – regime transiente	83
5.2.2	Resolução numérica – Caso 2 – regime transiente.....	83

6	RESULTADOS	86
6.1	RESULTADOS PARA O REGIME PERMANENTE	86
6.1.1	Resolução analítica e numérica – Caso 1.....	86
6.1.2	Resolução analítica e numérica – Caso 2	87
6.1.3	Resolução analítica – Caso 3.....	89
6.2	RESULTADOS PARA O REGIME TRANSIENTE.....	90
6.2.1	Definição do perfil inicial de temperatura.....	91
6.2.2	Resultados do caso 1.....	94
6.2.2.1	Resolução analítica - Caso 1.....	95
6.2.2.2	Resolução numérica – Caso 1– esquema Crank-Nicolson.....	99
6.2.2.3	Distribuição de temperatura – Caso 1 – comparação entre o esquema Crank-Nicolson e o esquema explícito	100
6.2.3	Resultados do Caso 2.....	101
6.2.3.1	Resolução analítica - Caso 2.....	101
6.2.3.2	Resolução numérica - Caso 2.....	105
6.3	TEMPOS COMPUTACIONAIS.....	108
7	COSIDERAÇÕES FINAIS.....	110
8	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	111
	REFERÊNCIAS.....	112
	APÊNDICE A – Resolução analítica do Caso 1.....	117
	APÊNDICE B – Resolução numérica do Caso 1- esquema Crank-Nicolson.....	133
	APÊNDICE C – Resumo dos comandos utilizados do software Maple.....	138

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de computação simbólica ou algébrica estão se destacando entre os desenvolvedores de softwares devido a grande variedade de aplicações a que se dispõem. Entre as aplicações que mais se destacam nesta metodologia está a potencialidade na resolução de equações diferenciais parciais e ordinárias, se tornando uma ferramenta poderosa na resolução de problemas analíticos e numéricos.

1.1 JUSTIFICATIVA

A evolução computacional que ocorre desde a década de sessenta proporcionou computadores com processamentos muito mais rápidos e com maior capacidade de armazenamento de informações, sendo que o desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas tem sido de grande interesse dos analistas, engenheiros e pesquisadores.

Desde então, algoritmos para o tratamento de problemas isolados com representação simbólica de soluções têm sido desenvolvidos, porém, só no final da década de sessenta se documentou o surgimento do primeiro sistema de computação algébrica (Computer Algebra System - CAS), onde se reuniram em um mesmo ambiente computacional soluções para mais de um problema.

Segundo Maliska (2004), um engenheiro ou projetista conta com as seguintes ferramentas para analisar ou desenvolver um projeto: métodos analíticos, métodos numéricos e experimentação em laboratório, sendo que os dois primeiros formam a classe dos métodos teóricos, pois objetivam resolver equações diferenciais que formam o modelo matemático.

Entre os muitos processos físicos que podem ser representados por equações diferenciais está o estudo da condução de calor que, segundo Braga Filho (2004), é definido como processo de troca de energia entre sistemas ou partes de um mesmo sistema, em diferentes temperaturas. Podendo ser analisado sem a dependência do

tempo caracterizando o regime permanente, ou com a dependência do tempo caracterizando o regime transiente.

Além da questão temporal, a complexidade de um problema de condução de calor depende também da escolha da geometria e da natureza dos parâmetros envolvidos.

Braga Filho (2004) e Arpaci (1966) descreveram que para simular os processos físicos envolvidos na área de transferência de calor deve-se recorrer ao estudo e o refinamento das leis governantes, à modelagem matemática e desenvolvimento de técnicas computacionais para o tratamento analítico e numérico destes problemas.

Conforme Maliska (2004), as soluções analíticas devem ser empregadas a problemas cujas hipóteses não se desviem em demasia do fenômeno físico real, mas ressalta sua aplicação na validação de modelos numéricos, além de tempos de computação satisfatórios em relação às simulações numéricas. A simulação numérica além de viabilizar a resolução de problemas complexos apresenta resultados que reduzem tempo e custo de projetos.

Lü, Tervola e Viljanen (2005, 2006a, 2006b) descreveram a importância do estudo da geometria do cilindro vazado, onde ressalta a importância das soluções analíticas na estimativa das propriedades dos materiais e na validação de soluções numéricas.

Os sistemas de computação simbólica ou algébrica vêm a ser mais uma ferramenta no auxílio da modelagem e tratamento computacional de problemas numéricos e analíticos em diversas áreas minimizando os desgastantes esforços algébricos das resoluções.

1.2 COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA

O surgimento da computação simbólica ou algébrica deve-se ao fato do estudo de modelos cada vez mais complexos, onde a máquina manipularia algebricamente extensas expressões matemáticas com rapidez e precisão. As primeiras referências documentadas surgiram na década de cinquenta e com elas os primeiros programas

computacionais para manipulação de polinômios, cálculos de derivadas e resolução de equações (HEARN, 1997).

Wester (1999) definiu a computação simbólica ou algébrica como a área da computação que trabalha com a manipulação e solução de equações.

Cohen (2002) definiu a computação simbólica como a parte da informática que projeta, analisa, implementa e aplica algoritmos algébricos. Caracteriza-se por realizar cálculos simbólicos que representam objetos matemáticos sem erros de arredondamento ou truncamento.

Hearn (1997) definiu um sistema de computação algébrica ou simbólica como um programa que permite manipular expressões matemáticas de maneira simbólica.

Atualmente conta-se com uma série de sistemas de computação que permitem a manipulação simbólica de expressões matemáticas levando a resultados com uma aritmética exata, sendo que os que mais se destacam são os aplicativos Maple e Mathematica.

1.2.1 A computação simbólica e a transferência de calor

Devido ao crescente aumento da capacidade de processamento e de memória nos computadores, diversos aplicativos computacionais de computação simbólica ou algébrica ligados às áreas de Engenharia, Matemática e Física têm sido utilizados para minimizar as atividades complexas e demoradas nos cálculos das modelagens desenvolvidos por essas áreas de conhecimento.

Lopez (1993) apresentou a importância do uso da computação simbólica com o Maple no aprendizado dos estudantes de engenharia, onde cita a aplicação desta ferramenta desde 1988 no Instituto de Tecnologia Rose-Hulman na Inglaterra e analisa a viabilidade da aplicação desta metodologia destacando que os resultados são obtidos em tempo real substituindo a longa e tediosa tarefa de elaboração teórica da prática de ensino.

Andrade (1996) utilizou o software de computação simbólica Mathematica na resolução de equações diferenciais acopladas no estudo simultâneo da transferência de calor e massa em meios capilares porosos obtendo resultados analíticos e numéricos.

Jager e Asch (1996) descreveram o estudo da resolução de equações diferenciais parciais com o Maple, onde chegam ao resultado da viabilidade do sistema e sugerem a ampliação dos recursos do software para que novos métodos possam ser implementados e destaca a superioridade do software Maple em relação a outros CAS.

Frankel (1996) fez o estudo da condução de calor utilizando o método numérico dos mínimos quadrados via computação simbólica com o software Mathematica, onde mostra uma intensiva análise dos erros gerados e verificou que a implementação numérica não exigiu tempo excessivo de processamento.

Barton (1997) utilizou o software Maple na resolução da equação de Fourier em uma parede plana com condições de contorno de Cauchy pelo método da separação de variáveis, onde obteve uma resolução satisfatória ressaltando a viabilidade da transferência dos resultados para códigos em linguagem de programação C e Fortran para serem usados em simulações numéricas.

Mikhailov e Cotta (1997) utilizaram o software Mathematica para apresentar um roteiro dos comandos do software para o cálculo dos autovalores de um problema de transferência de calor com geometria cilíndrica na presença de convecção forçada, onde investigou as oscilações de temperatura e destacou os benefícios do uso da computação simbólica no cálculo de funções complexas.

Campo e Rodríguez (1998) sugeriram o uso de sistemas de computação simbólica como o Mathematica e o Maple na resolução de problemas de condução de calor, onde apresenta a distribuição de temperatura em regime permanente de uma aleta uniforme utilizando resoluções pelo método de série de potências e pela solução exata das funções de Bessel e analisa o tempo de processamento realizado pelos métodos de solução adotados.

Yang (1998) explorou o uso da computação simbólica no desenvolvimento de um algoritmo numérico híbrido onde usa diferenças finitas e elementos finitos aplicado a um problema de transferência de calor com o objetivo de analisar a potência de uma fonte de calor em geometria de parede plana com condições de contorno de segundo tipo. Determinou que a utilização da computação simbólica em sua análise foi eficiente na obtenção dos resultados.

Taylor (1999) apresentou a distribuição de temperatura em uma parede plana utilizando o método de linhas com o software de computação simbólica Maple.

Subramanian e White (2000) apresentaram uma metodologia de resolução de problemas de valor de contorno utilizando o software de computação algébrica Maple pelo método da Transformada de Laplace e usou o método numérico das diferenças finitas para a resolução de equações diferenciais ordinárias e descreveu a aplicação de um método semi-analítico para a resolução das equações diferenciais parciais.

Campbell e Macki (2000) mostraram o estudo de controle de temperatura em uma barra utilizando o software Maple, onde aplicou o método de diferenças finitas visando a análise de distúrbios periódicos do problema.

Muniz e Marzac. (2001) apresentaram exemplos do uso do software de computação simbólica Maple na resolução de equações diferenciais típicas de problemas de condução de calor em paredes planas nos regimes estacionário e transiente utilizando o método de separação de variáveis e verificou que a aplicação desta metodologia computacional de resolução possibilitou uma plena avaliação da influência dos parâmetros compreendidos no processo de condução de calor.

Malagutti e Nascimento (2001) discutiram a metodologia do uso do software Maple para a resolução e interpretação de resultados das principais equações da Física-Matemática proveniente da modelagem matemática de problemas ligados às Engenharias.

Cunha (2002) utilizou o software de computação simbólica Mathematica no estudo simultâneo da transferência de calor e massa em meios capilares porosos aplicados a outros materiais complementando o que foi proposto por Andrade (1996).

Santos e Mendes (2003) analisaram o método numérico de Euler, o método numérico de Euler modificado, um método numérico semi-analítico e a resolução pelo software Matlab em um problema de transferência de calor envolvendo condução, convecção e radiação de uma parede plana, onde fez um comparativo da influência do intervalo de tempo em diferentes métodos numéricos. Verificou que os métodos de Euler e Euler modificado usavam muito tempo computacional por exigirem intervalos de tempo muito pequenos e com o software Mathlab mostrou a vantagem de resolver o sistema de equações simultaneamente e requer um número menor de iterações apesar

das simulações serem lentas mostrando ser o método semi-analítico uma alternativa na redução dos tempos de processamento.

Arauzo, Campo e Cortés (2004) realizaram uma análise das características do problema de transferência de calor em aletas anulares com perfil hiperbólico pelo método de série de potências, e faz uso do software de computação simbólica Maple visando garantir a exatidão dos cálculos.

Carmo Filho, Ribeiro e Gonçalves (2004) utilizaram a teoria de aprendizagem de Ausubel e a computação simbólica com o software Mathematica para criar um ambiente informatizado de aprendizagem utilizando como exemplo o problema do resfriamento do *epoxy* com o método da separação de variáveis e método numérico das diferenças finitas, onde mostrou resultados da distribuição de temperatura em uma parede plana com condições de contorno de Dirichlet.

Lü, Tervola e Viljanen (2006a) propuseram um método analítico transiente para avaliação de um processo de transferência de calor em paredes planas com condições de contorno periódicas compostas aplicado à construção civil e fez uso do software de computação simbólica Maple na resolução algébrica de casos com mais de três camadas de parede.

Aziz (2006) mostra a resolução de problemas de transferência de calor com o software Maple para o regime permanente em paredes planas, cilindros sólidos, cilindros vazados e esferas apresentando soluções analíticas, numéricas e estudos de funções especiais. Apresenta também resoluções transientes para paredes planas e cilindros sólidos.

Este trabalho vai além das soluções apresentadas por Aziz (2006), pois inclui o estudo e análise da geometria do cilindro vazado com condições de contorno convectivas, dedução esta proposta por Özişik (1980), porém não detalhada algebricamente. O problema é explorado em duas situações: na presença e na ausência de geração interna de calor, onde é apresentada uma análise computacional da viabilidade do uso do software Maple para estas soluções, passando pelo estudo do perfil inicial de temperatura em função do número de autovalores usados pelas soluções, pelas resoluções analíticas e numéricas em regime permanente, pelas

resoluções transientes analíticas e numéricas e ainda a resolução de um caso em regime permanente com condutividade térmica variável.

1.2.2 O software Maple

Chonacky e Winch (2005a) descreveram um pequeno histórico do surgimento do software Maple, segundo Keith Geddes, fundador da Waterloo Maple, empresa responsável pelo software:

Em novembro de 1980 em uma reunião com acadêmicos da Ciência da Computação da Universidade de Waterloo discutia-se como desenvolver um software de computação simbólica e então segundo Geddes, o Maple foi concebido. Na primeira semana de dezembro do mesmo ano, um sistema operacional já tinha sido desenvolvido. Em janeiro de 1981, o Maple foi usado no curso de Introdução à Computação Simbólica da Universidade de Waterloo. No ano seguinte, matemáticos iniciaram suas pesquisas com o Maple e em 1983 foi difundido para pesquisadores de outras instituições sendo aplicado a outras áreas. Em 1987 haviam 300 instalações do software em todo o mundo. Apenas em abril de 1988, o software Maple foi incorporado a Waterloo Maple Software para comércio, distribuição e suporte e em 1990 o número de instalações passou para 2000. A partir desta data, o software Maple não parou de ser atualizado recebendo novos recursos e abrangendo um público cada vez maior de usuários e aplicações em diversas áreas do conhecimento.

A flexibilidade computacional do software Maple permite que ele seja utilizado como:

- um sistema de visualização;
- um *solver* simbólico ou numérico;
- uma linguagem de programação;
- um ambiente de modelagem e análise de dados.

O software é composto por planilhas permitindo tanto a entrada de comandos como a entrada de textos sendo que a interação com o usuário é feita em um único ambiente computacional.

O Maple possui cerca de 3000 comandos básicos e contém em seu menu de ajuda a descrição de cada comando e exemplos de aplicação. O Maple possui também pacotes computacionais que podem ser executados em uma linha de comando para a resolução de problemas específicos.

O Maple dispõe de versões para diversos sistemas, além do Windows, como Macintosh, Unix e Linux e é um software que pode ser usado:

- Na matemática: para resolver equações algébricas e diferenciais, ajuste de curvas e interpolação, cálculo de integrais, derivadas, séries e transformadas e resolução de funções especiais, entre outras.
- Na visualização e manipulação: de funções discretas ou contínuas.
- Na comunicação: permite produzir documentos finais em diversos formatos como HTML, LATEX, RTF ou XML e os gráficos também podem ser salvos em diversos formatos, além de permitir a criação de links acessíveis pela Internet.

Entre os CAS que mais se destacam no mercado estão: o Mathematica desenvolvido pela Wolfram Research Inc. em 1988, o Maxima desenvolvido inicialmente com o nome de Macsyma em 1968 pelo Massachusetts Institute of Technology e sendo reativado pela MathSoft Inc. em 1982, o Derive desenvolvido pela Universidade do Hawaii em 1985 e comercializado pela Soft Warehouse Inc., o Reduce desenvolvido pela Universidade de Utah em 1968 e o MuPad desenvolvido pela Universidade de Paderborn na década de oitenta (WESTER, 1999).

Wester (1999) fez uma comparação entre os vários sistemas de computação simbólica propondo a resolução de problemas de diversas aplicações matemáticas, sendo mostrado na Tabela 1 a porcentagem de superioridade do software Maple na resolução de 473 problemas propostos em relação a alguns CAS concorrentes:

Tabela 1 - Porcentagem de superioridade de resolução do Maple e outros softwares existentes no mercado (adaptado de Wester, 1999).

Software	Superioridade do CAS Maple na resolução de problemas [%]
MAXIMA	7,07
MATHEMATICA	15,92
DERIVE	28,31
MuPAD	38,49
REDUCE	47,78

O software Maple foi escolhido para este trabalho por ser uma ferramenta confiável e cientificamente explorada no estudo da resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

O presente trabalho concentra-se em explorar e utilizar um sistema de computação simbólica, no caso o software Maple 8, licenciado pela Universidade de Taubaté, na análise de problemas de condução de calor. Esta metodologia é utilizada na resolução analítico-numérica da equação da condução de calor da geometria clássica de um cilindro vazado longo com condições de contorno convectivas. Nestas condições serão realizadas:

- A resolução analítica em regime permanente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e sem a presença de geração interna de calor;
- A resolução numérica em regime permanente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e sem a presença de geração interna de calor pelo método das diferenças finitas com o esquema de diferenças centrais;

- A resolução analítica em regime permanente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e com a presença de geração interna de calor;

- A resolução numérica em regime permanente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e com a presença de geração interna de calor pelo método das diferenças finitas com o esquema de diferenças centrais;

- A resolução analítica em regime permanente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica variável e sem a presença de geração interna de calor;

- A resolução analítica em regime transiente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e sem a presença de geração interna de calor pelo método da separação de variáveis;

- A resolução numérica em regime transiente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e sem a presença de geração interna de calor pelo método das diferenças finitas pelos esquemas explícito e Crank-Nicolson;

- A resolução analítica em regime transiente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e com a presença de geração interna de calor pelo método da separação de variáveis;

- A resolução numérica em regime transiente do cilindro vazado com condições de contorno convectivas através do Maple com condutividade térmica constante e com a presença de geração interna de calor pelo método das diferenças finitas pelo esquema Crank-Nicolson;

Os resultados das distribuições de temperatura serão apresentados e as vantagens e limitações computacionais analisadas.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Os próximos capítulos serão dispostos com os seguintes conteúdos:

- no capítulo dois serão apresentados os modelos matemáticos escolhidos para o desenvolvimento do trabalho;
- no capítulo três serão apresentadas as metodologias envolvidas tanto na resolução numérica como na analítica para os modelos descritos no capítulo dois;
- no capítulo quatro serão apresentadas as resoluções analíticas e numéricas em regime permanente através do software Maple dos modelos descritos no capítulo dois;
- no capítulo cinco serão apresentadas as resoluções analíticas e numéricas em regime transiente através do software Maple dos modelos descritos no capítulo dois;
- no capítulo seis serão apresentadas as distribuições de temperatura provenientes das resoluções analíticas e numéricas através do software Maple provenientes das soluções obtidas dos capítulos quatro e cinco e os tempos computacionais de cada tipo de solução;
- no capítulo sete serão apresentadas as conclusões obtidas do trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros;
- no Apêndice A será apresentada a resolução analítica para um dos casos propostos para facilitar o entendimento da resolução computacional;
- no Apêndice B será apresentada a resolução numérica para um dos casos propostos visando também facilitar o entendimento da resolução computacional;
- no Apêndice C é mostrado um resumo da descrição dos comandos utilizados do software Maple.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A seguir serão apresentados os modelos matemáticos para os casos avaliados, sendo referenciados ao longo do texto por Caso 1, Caso 2 e Caso 3.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA – CASO 1

Segundo Carlaw e Jaeger (1976), a equação da condução de calor para um cilindro vazado longo de raios interno a e externo b considerando a condutividade térmica constante, com ausência do termo de dissipação-geração interna de energia em regime permanente, é descrita pela equação (1).

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0 \quad a < r < b \quad (1)$$

As condições de contorno são expressas na Figura 1:

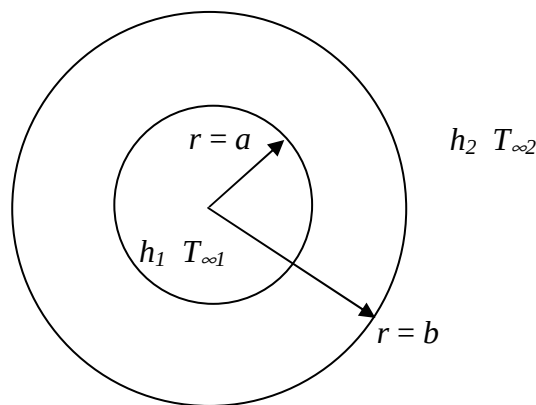


Figura 1 - Representação de um cilindro vazado longo com condições de contorno convectivas.

As condições de contorno ficam:

$$-k \frac{dT(r)}{dr} + h_1 T(r) = h_1 T_{\infty 1} \quad r = a \quad (2)$$

$$k \frac{dT(r)}{dr} + h_2 T(r) = h_2 T_{\infty 2} \quad r = b \quad (3)$$

Segundo Incropera e Witt (1985) a equação da condução de calor em regime transiente é dada pela equação (4):

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) \quad a < r < b, \quad t > 0 \quad (4)$$

sendo:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (5)$$

No regime transiente, para $t > 0$, a superfície de contorno dissipa calor por convecção em $r = a$ e em $r = b$ e as condições de contorno convectivas são definidas como:

$$-\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + H_1 T(r,t) = H_1 T_{\infty 1} \quad r = a, \quad t > 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + H_2 T(r,t) = H_2 T_{\infty 2} \quad r = b, \quad t > 0 \quad (7)$$

sendo:

$$H_1 = \frac{h_1}{k} \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{h_2}{k} \quad (8)$$

A condição inicial associada é:

$$T(r, t) = f(r) \quad t = 0 \quad (9)$$

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA – CASO 2

Segundo Incropera e Witt (1985), se for considerada a presença de geração interna de calor na equação da condução de calor descrita pelo Caso 1 na equação (1) ela se torna:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT(r)}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad a < r < b \quad (10)$$

As mesmas condições de contorno representadas pelas equações (2) e (3) foram mantidas.

Conforme Incropera e Witt (1985), se a equação da condução de calor (10) for dependente do tempo, se resume a:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{k} \quad a < r < b, \quad t > 0 \quad (11)$$

As mesmas condições de contorno representadas pelas equações (6) e (7) para o regime transiente foram mantidas.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA – CASO 3

Se a condutividade térmica descrita na equação (1) deixar de ser constante, a equação da condução de calor pode ser descrita como:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \left(r k(T) \frac{dT(r)}{dr} \right) \right) = 0 \quad a < r < b \quad (12)$$

Sendo $k(T)$ é uma função linear dependente da temperatura proposta por Özişik (1980) na forma:

$$k(T) = k_0(1 + \beta T(r)) \quad (13)$$

Mantendo-se as mesmas condições de contorno convectivas, a nova situação se expressa como:

$$-k(T)\frac{\partial T(r)}{\partial r} + h_1 T(r) = h_1 T_{\infty 1} \quad r = a \quad (14)$$

$$k(T)\frac{\partial T(r)}{\partial r} + h_2 T(r) = h_2 T_{\infty 2} \quad r = b \quad (15)$$

A situação representada para o Caso 3 será avaliada apenas para o regime permanente.

3 METODOLOGIA

A seguir serão apresentadas as descrições dos métodos analíticos e numéricos utilizados na resolução dos problemas propostos.

3.1 MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Durante os últimos dois séculos, diversos métodos foram desenvolvidos para a resolução de equações diferenciais parciais. O método da separação de variáveis é o método sistemático mais antigo, usado por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler, por volta de 1750, nas investigações sobre ondas e vibrações. Foi consideravelmente refinado e generalizado, e constitui-se um método de grande importância e de utilização freqüente nos dias de hoje. A investigação matemática da condução de calor principiou em torno de 1800, e continua a merecer atenção dos pesquisadores modernos (BOYCE; PRIMA, 1994 e HABERMAN, 1998).

Em muitos problemas físicos importantes existem duas ou mais variáveis independentes, de modo que os modelos matemáticos correspondentes envolvem equações diferenciais parciais. O método da separação de variáveis permite a resolução de equações diferenciais parciais, cuja característica essencial é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. A solução desejada da equação diferencial parcial se exprime então como uma soma, usualmente como uma série infinita, constituída pelas soluções das equações diferenciais ordinárias (ZILL; CULLEN, 2001).

A aplicação do método de separação de variáveis é indicada a problemas homogêneos com condições de contorno homogêneas, portanto quando problemas apresentam não homogeneidades nas condições de contorno é necessário a decomposição do problema em um ou mais problemas menores (BRAGA FILHO, 2004).

Os problemas representados pelas equações (4) e (11) não são homogêneos, o que implica que a resolução deve ser subdividida na forma:

$$T(r,t) = F(r) + G(r,t) \quad (16)$$

sendo a equação (16) representa a distribuição de temperatura, devendo ser a soma das soluções em regime permanente e em regime transiente.

A resolução de $F(r)$ é a solução em regime permanente e depende somente de r e agrupa as parcelas de não homogeneidades do problema. Fazendo o balanço da condição de contorno expressa pela equação (6) em $r=a$ e $t>0$, tem-se:

$$-\frac{\partial F(r)}{\partial r} - \frac{\partial G(r,t)}{\partial r} + H_1 F(r) + H_1 G(r,t) = H_1 T_{\infty 1} \quad (17)$$

Como para o regime permanente será avaliada apenas $F(r)$, tem-se:

$$-\frac{\partial F(r)}{\partial r} + H_1 F(r) = H_1 T_{\infty 1} \quad \text{em } r=a \quad (18)$$

e para o regime transiente:

$$-\frac{\partial G(r,t)}{\partial r} + H_1 G(r,t) = 0 \quad \text{em } r=a \text{ e } t>0 \quad (19)$$

Igualmente, o balanço para a condição de contorno convectiva externa da equação (7) em $r=b$ e $t>0$ é:

$$\frac{\partial F(r)}{\partial r} + \frac{\partial G(r,t)}{\partial r} + H_2 F(r) + H_2 G(r,t) = H_2 T_{\infty 2} \quad (20)$$

Como para o regime permanente será avaliada apenas $F(r)$, tem-se:

$$\frac{\partial F(r)}{\partial r} + H_2 F(r) = H_2 T_{\infty 2} \quad \text{em } r=b \quad (21)$$

e para o regime transiente:

$$\frac{\partial G}{\partial r} + H_2 G(r, t) = 0 \quad \text{em } r=b \text{ e } t>0 \quad (22)$$

Para o regime permanente a equação da condução de calor é expressa por (23):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF(r)}{dr} \right) = 0 \quad (23)$$

e as condições de contorno tem a forma das equações (18) e (21).

Para o regime transiente deve-se obter a solução $G(r, t)$ com as condições de contorno na forma das equações (19) e (22) agora homogêneas. A equação para $G(r, t)$ pode ser expressa na forma de (24):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G(r, t)}{\partial t} \quad (24)$$

Considerando que o problema se tornou homogêneo, o método de separação de variáveis pode ser aplicado e assume-se uma solução particular na forma do produto de duas funções como:

$$G(r, t) = R(r) \mathfrak{S}(t) \quad (25)$$

Sendo R será função apenas de r e $\mathfrak{S}$ será função apenas de t . A substituição da equação (25) na equação (24) leva a:

$$\frac{1}{R(r)} \left(\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha \mathfrak{S}(t)} \frac{d\mathfrak{S}(t)}{dt} \quad (26)$$

A separação da equação (26) só é possível se ambos os lados forem igualados à mesma constante:

$$\frac{1}{R(r)} \left(\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha \mathfrak{Z}(t)} \frac{d\mathfrak{Z}(t)}{dt} = -\lambda^2 \quad (27)$$

onde $-\lambda^2$ é uma constante de separação que deve ser escolhida de forma a satisfazer a situação física do problema. As equações separadas ficam:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + R(r)\lambda^2 = 0 \quad (28)$$

e:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} + \mathfrak{Z}(t)\alpha\lambda^2 = 0 \quad (29)$$

A resolução da equação (28) deverá ser substituída nas condições de contorno resultando em uma equação transcendental chamada de autofunção, cuja solução fornecerá um número infinito de raízes chamadas de autovalores atribuídos à constante λ^2 , sendo que cada autovalor representa uma solução particular da autofunção (HABERMAN, 1998).

Utilizando propriedades de funções ortogonais e satisfazendo a condição inicial, a solução é obtida pela soma das resoluções das equações (28) e (29) para um determinado número de autovalores adequadamente definidos na resolução.

3.2 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Sperandio, Mendes e Silva (2003) descreve o método das diferenças finitas como uma técnica para a obtenção da solução numérica de uma equação diferencial parcial, em que substitui as derivadas contínuas (e condições de fronteira e iniciais) pelas fórmulas das diferenças que envolvem somente valores discretos associados com posições da malha. Em toda solução numérica a equação diferencial parcial é substituída por uma aproximação discreta, ou seja, a solução numérica é conhecida

somente para um número finito de pontos no domínio físico, enquanto que a solução analítica deve satisfazer a equação diferencial parcial em cada ponto da região. A aproximação discreta resulta em um conjunto de equações algébricas que são calculadas para valores discretos desconhecidos. O conjunto finito de pontos em que se considera discretizado o domínio é chamado de malha e os pontos chamados de pontos nodais.

3.2.1 Discretização transiente da condução de calor

Özişik (1984) descreve a equação da condução de calor pelo esquema explícito, implícito e por Crank-Nicolson das diferenças finitas para a geometria de um cilindro vazado com raio interno a e raio externo b dividido em M intervalos iguais, no qual a dimensão de cada intervalo é dada pela equação (30) e sua representação é mostrada na Figura 2:

$$\Delta r = \frac{(b-a)}{M} \quad (30)$$

As discretizações para a geometria representada na Figura 2 da primeira e da segunda derivada ficam na forma de (31) e (32) (ÖZIŞIK, 1984 e FORTUNA. 2000):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_i = \frac{T_{i+1}^{m+\theta} - T_{i-1}^{m+\theta}}{2\Delta r} \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_i = \frac{T_{i+1}^{m+\theta} - 2T_i^{m+\theta} + T_{i-1}^{m+\theta}}{\Delta r^2} \quad (32)$$

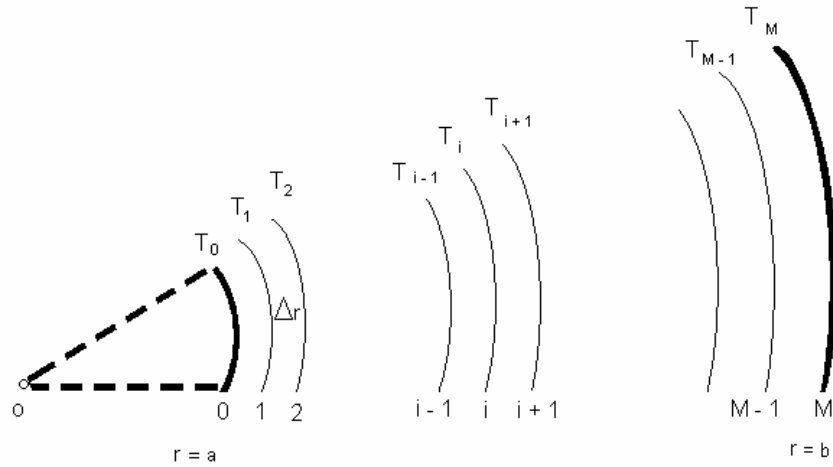


Figura 2 - Representação da nomenclatura de diferenças finitas para um cilindro vazado.

A discretização da derivada no tempo fica expressa na forma de (33) (ÖZİŞİK, 1984):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i = \frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta t} \quad (33)$$

Substituindo as equações (31), (32) e (33) na equação (4) da condução de calor:

$$\frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1}^{m+\theta} - T_{i-1}^{m+\theta}}{2\Delta r} + \frac{T_{i+1}^{m+\theta} - 2T_i^{m+\theta} + T_{i-1}^{m+\theta}}{\Delta r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta t} \quad (34)$$

sendo:

i define a localização dos pontos de resolução na direção radial;

m define o número de passos no tempo;

Δr é a distância entre os pontos de resolução na direção radial [m];

Δt é a dimensão de incremento de tempo [s];

M é o número de pontos nodais da malha;

θ é uma constante que define o esquema, sendo $\theta = 0$ o esquema explícito; $\theta = 1$ o esquema implícito e $\theta = 1/2$ o esquema Crank-Nicolson.

Fortuna (2000) faz a descrição dos esquemas citando que quando é utilizado o resultado de uma solução num instante anterior já conhecida para calcular a solução posterior desejada, o esquema de discretização é dito explícito, ou seja, quando as temperaturas desconhecidas T_i^{m+1} no tempo $m+1$ podem ser diretamente determinadas pelas temperaturas conhecidas no tempo anterior m .

A equação (34) discretizada para um ponto nodal interno com $\theta = 0$ para o esquema explícito é dada por:

$$T_i^{m+1} = T_{i-1}^m (B - A) + T_i^m (1 - 2B) + T_{i+1}^m (A + B) \quad (35)$$

sendo:

$$A = \frac{\alpha \Delta t}{2r_i \Delta r} \quad \text{e} \quad B = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \quad (36)$$

Quando é utilizado o resultado de uma solução num instante atual de tempo, o esquema de discretização da equação (34) é dito implícito com $\theta = 1$, sendo representado na equação (37):

$$T_i^m = T_{i-1}^{m+1} (A - B) + T_i^{m+1} (2B + 1) + T_{i+1}^{m+1} (-B - A) \quad (37)$$

A temperatura T_i^{m+1} é determinada pela solução simultânea das equações em todos os pontos nodais em cada intervalo de tempo.

O esquema proposto por Crank e Nicolson em 1947 é um esquema implícito alternativo no qual se mantém o lado direito da equação (34) na forma implícita e o lado direito da equação é resultante da média aritmética dos esquemas implícito e explícito. A equação (38) mostra o esquema de Crank-Nicolson para $\theta = 1/2$:

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta r} \left(\frac{T_{i+1}^{m+1/2}}{2r_i} - \frac{T_{i-1}^{m+1/2}}{2r_i} + \frac{T_{i+1}^{m+1/2}}{\Delta r} - \frac{2T_i^{m+1/2}}{\Delta r} + \frac{T_{i-1}^{m+1/2}}{\Delta r} \right) = T_i^{m+1} - T_i^m \quad (38)$$

Após rearranjada, o que pode ser visto no Apêndice B, a equação (38) toma a seguinte forma:

$$T_{i+1}^m (A + B) + T_i^m (1 - 2B) + T_{i+1}^m (A + B) = T_{i-1}^{m+1} (A - B) + T_i^{m+1} (1 + 2B) + T_{i+1}^{m+1} (-A - B) \quad (39)$$

Özişik (1984) descreve na Tabela 2 o critério de estabilidade e a ordem de erro para a os esquemas explícito, implícito e Crank-Nicolson:

Tabela 2 - Critérios de estabilidade dos esquemas explícito, implícito e Crank-Nicolson.

Esquema	Critério de estabilidade	Ordem de erro
Explícito	$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \leq \frac{1}{2}$	$O((\Delta r)^2, \Delta t)$
Implícito	Sempre estável	$O((\Delta r)^2, \Delta t)$
Crank-Nicolson	Sempre estável	$O((\Delta r)^2, (\Delta t)^2)$

Özişik (1984) também se refere aos critérios de convergência descrevendo-os na forma:

$$\left| \frac{T_i^{(m+1)} - T_i^{(m)}}{T_i^{(m+1)}} \right| \leq \varepsilon \quad \text{critério de convergência relativa}$$

O qual deve satisfazer todos os pontos nodais no domínio discretizado. Porém, também é recomendado o uso da norma Euclidiana para satisfazer o critério de convergência:

$$\|T - \tilde{T}\|_2 = \sqrt{|T_1 - \tilde{T}_1|^2 + |T_2 - \tilde{T}_2|^2 + \dots + |T_n - \tilde{T}_n|^2}$$

Onde:

T_1 é a temperatura no ponto um ;

$\tilde{T}_1$ é a temperatura no ponto nodal um na iteração seguinte;

T_n é a temperatura no ponto n ;

$\tilde{T}_n$ é a temperatura no ponto n na iteração seguinte.

3.2.2 Definição da malha

O tamanho da malha foi definido considerando-se inicialmente uma malha grosseira e a partir desta aproximação foi feito um refinamento. A Tabela 3 exemplifica o erro calculado para o Caso 1 nas fronteiras:

Tabela 3 - Erros relativos ao tamanho da malha aplicado ao Caso 1.

Número de pontos nodais da malha	Erro no ponto nodal zero [%]	Erro no ponto nodal M [%]
10 – 40	0,05925	0,02229
40 – 80	0,00274	0,01037
80 – 125	0,0065	0,00596
125 – 160	0,0024	0,00204
160 - 200	0,00015	0,00124

O cálculo do erro relativo mostrado na Tabela 3 é obtido pela equação (40):

$$Erro = \left(\frac{T_{na} - T_{np}}{T_{np}} \right) 100 \quad (40)$$

sendo:

Erro é o erro relativo [%];

T_{na} é a temperatura em um ponto nodal em uma simulação com x pontos nodais [°C];

T_{np} é a temperatura em um ponto nodal em uma simulação com aproximadamente $x+40$ pontos nodais [°C];

O critério de escolha para o tamanho da malha foi um erro relativo inferior a 10^{-2} visando não elevar os tempos computacionais.

3.2.3 Método de resolução de sistemas de equações lineares

A resolução de problemas de condução de calor pelo método de diferenças finitas resulta em sistemas de equações algébricas, que devem ser resolvidos por métodos diretos ou iterativos. Fortuna (2000) e Özişik (1984) descrevem as vantagens e desvantagens da utilização de cada método.

Os sistemas resultantes de problemas transientes na forma matricial levam a matrizes chamadas de tridiagonais, onde somente a diagonal central e as adjacentes possuem coeficientes diferentes de zero (FORTUNA, 2000).

Um método muito utilizado em conjunto com o método das diferenças finitas é o TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) ou método linha a linha ou método de Thomas (ÖZİŞİK, 1984).

Considerando a matriz tridiagonal representada na Figura 3, o método TDMA visa trabalhar apenas com os elementos diferentes de zero da matriz dos coeficientes.

$$P = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2 & A_2 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & A_3 & B_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_i & A_i & B_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n & A_n \end{bmatrix}$$

Figura 3 - Esquema de uma matriz tridiagonal.

Considerando um sistema na forma:

$$PT = D \quad (41)$$

A resolução do sistema descrito pela expressão (41) utilizando o método TDMA é feita expressando as linhas do sistema na seguinte forma:

$$A_i T_i + B_i T_{i+1} + C_i T_{i-1} = D_i \quad (42)$$

Para obedecer às condições do sistema, C_1 e B_n devem ser nulos. O sistema pode ser resolvido através da expressão (42) utilizando a relação expressa pela equação (43):

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (43)$$

sendo:

$$P_i = \frac{-B_i}{A_i + C_i P_{i-1}} \quad (44)$$

$$Q_i = \frac{D_i - C_i Q_{i-1}}{A_i + C_i P_{i-1}} \quad (45)$$

Como $C_1 = 0$, então:

$$P_1 = \frac{-B_1}{A_1} \quad \text{e} \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1}$$

Sendo possível a partir deles calcular todos os outros valores. Portanto deve-se começar pela última linha e ir regredindo até a primeira. Como $B_n = 0$, então $P_n = 0$ resultando em:

$$T_n = Q_n$$

Sendo possível, então o cálculo dos demais valores para a solução.

4 SOLUÇÕES PARA O REGIME PERMANENTE

Para a compreensão da resolução computacional, esclarecem-se algumas convenções do programa de computação simbólica Maple:

- O símbolo > indica que se trata de uma linha de comando executável no *Maple*;
- Cada expressão é atribuída a uma variável evitando assim a repetição da expressão;
- O símbolo := é um operador de atribuição significando que a expressão do lado direito será atribuída a variável posicionada no lado esquerdo.

4.1 RESOLUÇÃO DO CASO 1

A geometria descrita como Caso 1 referenciada pela equação (1) e pelas condições de contorno (2) e (3) terão a seguir suas resoluções analítica e numérica apresentadas com o software de computação simbólica Maple no regime permanente.

4.1.1 Resolução analítica – Caso 1 – regime permanente

Para a resolução em regime permanente, a equação diferencial da condução de calor (1) é definida e atribuída à variável F , onde *diff* representa derivada.

> $F := (1/r) * \text{diff}(r * \text{diff}(T(r), r), r) = 0;$

$$F := \frac{\left(\frac{d}{dr} T(r) \right) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} T(r) \right)}{r} = 0 \quad (46)$$

A seguir são definidas as condições de contorno e ambas atribuídas à variável CCP , onde D representa derivada.

> **CCP:= -D(T)(a)=H[1]*(T[infinity1]-T(a)), -D(T)(b)=H[2]*(T(b)-T[infinity2]);**

$$CCP := -D(T)(a) = H_1 (T_{\infty 1} - T(a)), -D(T)(b) = H_2 (T(b) - T_{\infty 2}) \quad (47)$$

A solução simbólica da equação da condução de calor é obtida com o comando *dsolve* utilizando as condições de contorno definidas pela equação (47) sendo o resultado novamente atribuído a variável *F*.

> **F:= dsolve({F,CCP},{T(r)});**

$$F := T(r) = - \frac{-\ln(a) H_1 a H_2 T_{\infty 2} b + H_1 T_{\infty 1} a + H_2 b \ln(b) H_1 T_{\infty 1} a + H_2 T_{\infty 2} b}{-H_1 a + H_2 b \ln(a) H_1 a - H_2 b - H_2 b \ln(b) H_1 a} + \frac{H_1 a H_2 b (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \ln(r)}{-H_1 a + H_2 b \ln(a) H_1 a - H_2 b - H_2 b \ln(b) H_1 a} \quad (48)$$

Com a definição de valores numéricos para o raio interno $a = 0.3$ m, raio externo $b = 0.5$ m e os parâmetros $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$, a solução de *F* é então concretizada com o comando *eval* que permite a substituição dos valores das temperaturas dos fluidos interno e externo:

> **F:= eval(F,{T[infinity2]=23, T[infinity1]=100});**

$$F := T(r) = 9.16325182 - 20.01997340 \ln(r) \quad (49)$$

A distribuição de temperatura em regime permanente é então atribuída a uma nova variável chamada *Per*, sendo este procedimento necessário para evitar conflitos com a função *T(r)* na resolução transiente.

> **Per:=9.16325182-20.01997340*ln(r);**

$$Per := 9.16325182 - 20.01997340 \ln(r) \quad (50)$$

O gráfico da distribuição da temperatura pode ser obtido com o comando *plot*.

4.1.2 Resolução numérica – Caso 1 – regime permanente

A resolução numérica do Caso 1 pelo uso do software Maple será feita utilizando o esquema de diferenças centrais. A equação da condução de calor (1) para o regime permanente é definida e atribuída a variável *ode*:

> **ode:= 1/r*diff(T(r),r)+diff(diff(T(r),r),r)=0;**

$$ode := \frac{\frac{d}{dr} T(r)}{r} + \left(\frac{d^2}{dr^2} T(r) \right) = 0 \quad (51)$$

São definidos os valores do raio interno $a = 0,3 \text{ m}$, do raio externo $b = 0,5 \text{ m}$ e o número de pontos nodais da malha representado por $M = 50$. A distância entre os pontos nodais no sentido radial definido pela equação (30) é:

> **Delta[r]:=(b-a)/M;**

$$\Delta_r := 0.004000000000$$

O valor do incremento radial é definido como:

> **R:=i->a+i*Delta[r];**

$$R := i \rightarrow a + i \Delta_r$$

É definida então a primeira derivada em relação à r na equação (52) e atribuída a variável rp :

> **rp := i->(T[i+1]-T[i-1])/2/Delta[r];**

$$rp := i \rightarrow \frac{1}{2} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{\Delta_r} \quad (52)$$

É definida a segunda derivada na equação (53) e atribuída a variável rpp :

> **rpp:=i->(T[i+1]-2*T[i]+T[i-1])/Delta[r]^2;**

$$rpp := i \rightarrow \frac{T_{i+1} - 2 T_i + T_{i-1}}{\Delta_r^2} \quad (53)$$

A equação geral na forma de diferenças finitas é então definida para os pontos nodais internos pela equação (54) e atribuída a variável $eddf$:

> **eddf:= 1/R(i)*rp(i)+rpp(i)=0;**

$$eddf := \frac{125.00000000 T_{i+1} - 125.00000000 T_{i-1}}{0.3 + 0.004000000000 i} + 62500.00000 T_{i+1} - 125000.0000 T_i + 62500.00000 T_{i-1} = 0 \quad (54)$$

A primeira condição de contorno é então deixada na forma de diferenças pela equação (55) e atribuída a variável $CC1p$:

> **CC1p:= rp(i)=H[1]*(T[infinity1]-T[0]);**

$$CC1p := -125.00000000 T_{i+1} + 125.00000000 T_{i-1} = H_1 (T_{\infty 1} - T_0) \quad (55)$$

A temperatura referenciada por T_{i-1} é isolada da equação (55) com o comando *solve*:

```
> T[f1]:=solve(CC1p,T[i-1]);
```

$$T_{f1} := T_{i+1} + 0.008000000000 H_1 T_{\infty 1} - 0.008000000000 H_1 T_0 \quad (56)$$

É feita a substituição da equação (56) na equação geral das diferenças finitas (54) para o ponto nodal zero:

```
> eq[0]:= subs(T[i-1]=T[f1],eddf);
```

$$eq_0 := \frac{-1.000000000 H_1 T_{\infty 1} + 1.000000000 H_1 T_0}{0.3 + 0.004000000000 i} + 125000.0000 T_{i+1} - 125000.0000 T_i + 500.0000000 H_1 T_{\infty 1} - 500.0000000 H_1 T_0 = 0$$

A referência ao ponto nodal zero é feita:

```
> eq[0]:= subs(i=0,eq[0]);
```

$$eq_0 := 496.6666667 H_1 T_{\infty 1} - 496.6666667 H_1 T_0 + 125000.0000 T_1 - 125000.0000 T_0 = 0$$

Um procedimento análogo é realizado para a segunda condição de contorno, se referenciando ao ponto nodal M :

```
> CC2p:=rp(i)=H[2]*(T[M]-T[infinity2]);
```

$$CC2p := -125.0000000 T_{i+1} + 125.0000000 T_{i-1} = H_2 (T_{50} - T_{\infty 2})$$

> **T[fM]:=solve(CC2p,T[i+1]);**

$$T_{fM} := T_{i-1} - 0.008000000000 H_2 T_{50} + 0.008000000000 H_2 T_{\infty 2}$$

> **eq[M]:= subs(T[i+1]=T[fM],eddf);**

$$eq_{50} := \frac{-1.0000000000 H_2 T_{50} + 1.0000000000 H_2 T_{\infty 2}}{0.3 + 0.004000000000 i} + 125000.0000 T_{i-1} - 500.0000000 H_2 T_{50} + 500.0000000 H_2 T_{\infty 2} - 125000.0000 T_i = 0$$

> **eq[M]:= subs(i=M,eq[M]);**

$$eq_{50} := -502.0000000 H_2 T_{50} + 502.0000000 H_2 T_{\infty 2} + 125000.0000 T_{49} - 125000.0000 T_{50} = 0$$

Os valores numéricos são fornecidos para os parâmetros $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$, para as temperaturas do fluido interno $T_{\infty 1} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ e do fluido externo $T_{\infty 2} = 23 \text{ }^\circ\text{C}$.

Através do comando *for* as equações para todos os pontos nodais são rearranjadas na forma de um sistema:

> **for i from 0 to 0 do eq[0]:=eval(eq[0]); end do;**

$$eq_0 := 125000.0000 T_1 + 4966.666667 - 125049.6667 T_0 = 0$$

> **for i from 1 to M-1 do eq[i]:=**

eval(ode,{r=R(i),diff(T(r),r)=rp(i),diff(diff(T(r),r),r)=rpp(i)}); end do;

$$eq_1 := 62911.18421 T_2 + 62088.81579 T_0 - 125000.0000 T_1 = 0$$

$$eq_2 := 62905.84416 T_3 + 62094.15584 T_1 - 125000.0000 T_2 = 0$$

⋮

$$eq_{48} := 62754.06504 T_{49} + 62245.93496 T_{47} - 125000.0000 T_{48} = 0$$

$$eq_{49} := 62752.01613 T_{50} + 62247.98387 T_{48} - 125000.0000 T_{49} = 0$$

> **for i from M to M do eq[M]:=eval(eq[M]); end do;**

$$eq_{50} := 125000.0000 T_{49} - 627000.0000 T_{50} + 0.1154600000 10^8 = 0$$

O comando *fsolve* encontra o valor da distribuição de temperatura e a seguir é mostrada a saída de resultados:

> **sol:= fsolve({seq(eq[i],i=0..M)},{seq(T[i],i=0..M)});**

$$\begin{aligned} sol := \{ & T_{18} = 28.95996658, T_{20} = 28.53401356, T_{22} = 28.11693502, T_2 = 32.73943353, \\ & T_4 = 32.22609894, T_8 = 31.23730675, T_6 = 31.72559871, T_{12} = 30.29506250, \\ & T_{10} = 30.76064163, T_{14} = 29.84006541, T_{40} = 24.70926480, T_{38} = 25.06048608, \\ & T_{34} = 25.78197288, T_{30} = 26.53043690, T_{28} = 26.91543091, T_{26} = 27.30797420, \\ & T_0 = 33.26627807, T_{50} = 23.04003910, T_5 = 31.97428476, T_{15} = 29.61638691, \\ & T_{41} = 24.53593815, T_{33} = 25.96648188, T_{47} = 23.52635736, T_1 = 33.00112276, \\ & T_9 = 30.99755554, T_{19} = 28.74585722, T_{35} = 25.59914889, T_{21} = 28.32438815, \\ & T_{29} = 26.72200844, T_{25} = 27.50717049, T_{27} = 27.11074044, T_{13} = 30.06627135, \\ & T_{11} = 30.52649863, T_7 = 31.47996403, T_3 = 32.48112093, T_{17} = 29.17639064, \\ & T_{23} = 27.91160963, T_{31} = 26.34068120, T_{39} = 24.88410522, T_{37} = 25.23843477, \\ & T_{43} = 24.19372288, T_{49} = 23.20083608, T_{45} = 23.85725933, T_{44} = 24.02478425, \\ & T_{46} = 23.69112467, T_{48} = 23.36293509, T_{36} = 25.41797942, T_{42} = 24.36409929, \\ & T_{32} = 26.15270724, T_{24} = 27.70836875, T_{16} = 29.39518000 \} \end{aligned}$$

A distribuição de temperatura é melhor visualizada através do comando *eval* tabelando as temperaturas com as respectivas posições como mostra o comando a seguir :

> **DFTable:=eval([seq([R(i),T[i]],i=0..M)],sol);**

```
DFTable := [[ 0.3, 33.26627807 ], [ 0.3040000000, 33.00112276 ],
[ 0.3080000000, 32.73943353 ], [ 0.3120000000, 32.48112093 ],
[ 0.3160000000, 32.22609894 ], [ 0.3200000000, 31.97428476 ],
[ 0.3240000000, 31.72559871 ], [ 0.3280000000, 31.47996403 ],
[ 0.3320000000, 31.23730675 ], [ 0.3360000000, 30.99755554 ],
[ 0.3400000000, 30.76064163 ], [ 0.3440000000, 30.52649863 ],
[ 0.3480000000, 30.29506250 ], [ 0.3520000000, 30.06627135 ],
[ 0.3560000000, 29.84006541 ], [ 0.3600000000, 29.61638691 ],
[ 0.3640000000, 29.39518000 ], [ 0.3680000000, 29.17639064 ],
[ 0.3720000000, 28.95996658 ], [ 0.3760000000, 28.74585722 ],
[ 0.3800000000, 28.53401356 ], [ 0.3840000000, 28.32438815 ],
[ 0.3880000000, 28.11693502 ], [ 0.3920000000, 27.91160963 ],
[ 0.3960000000, 27.70836875 ], [ 0.4000000000, 27.50717049 ],
[ 0.4040000000, 27.30797420 ], [ 0.4080000000, 27.11074044 ],
[ 0.4120000000, 26.91543091 ], [ 0.4160000000, 26.72200844 ],
[ 0.4200000000, 26.53043690 ], [ 0.4240000000, 26.34068120 ],
[ 0.4280000000, 26.15270724 ], [ 0.4320000000, 25.96648188 ],
[ 0.4360000000, 25.78197288 ], [ 0.4400000000, 25.59914889 ],
[ 0.4440000000, 25.41797942 ], [ 0.4480000000, 25.23843477 ],
[ 0.4520000000, 25.06048608 ], [ 0.4560000000, 24.88410522 ],
[ 0.4600000000, 24.70926480 ], [ 0.4640000000, 24.53593815 ],
[ 0.4680000000, 24.36409929 ], [ 0.4720000000, 24.19372288 ],
[ 0.4760000000, 24.02478425 ], [ 0.4800000000, 23.85725933 ],
[ 0.4840000000, 23.69112467 ], [ 0.4880000000, 23.52635736 ],
[ 0.4920000000, 23.36293509 ], [ 0.4960000000, 23.20083608 ],
[ 0.5000000000, 23.04003910 ]]
```

4.2 RESOLUÇÃO DO CASO 2

Considerando a analogia da resolução do Caso 1 com o Caso 2 serão mostradas apenas as etapas de resolução que apresentam relevância.

4.2.1. Resolução analítica - Caso 2 - regime permanente

Para a resolução no regime permanente do Caso 2 utilizando o software Maple, a única diferença aparece na definição da equação da condução de calor (10) com a inclusão do termo de geração interna de calor:

$$> \mathbf{F := (1/r)*diff(r*diff(T(r),r),r)+q[pto]/k=0;}$$

$$F := \frac{\left(\frac{d}{dr} T(r)\right) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} T(r)\right)}{r} + \frac{q_{pto}}{k} = 0 \quad (57)$$

A solução simbólica é mostrada pela equação (58) utilizando o comando *dsolve*. A potencialidade do software Maple na resolução de equações diferenciais é então demonstrada na solução expressa por (58):

$$> \mathbf{F:= dsolve(\{F,CCP\},\{T(r)\});}$$

$$\begin{aligned} F := T(r) = & \frac{1}{4} \frac{q_{pto} r^2}{k} - \frac{1}{4} b a (-2 H_2 q_{pto} a - H_1 H_2 b^2 q_{pto} + 4 H_2 H_1 T_{\infty 1} k \\ & + H_2 H_1 a^2 q_{pto} - 4 H_1 H_2 T_{\infty 2} k - 2 H_1 q_{pto} b) \ln(r) / (k \\ & (H_2 b - H_2 b H_1 a \ln(a) + H_1 a + H_1 a H_2 b \ln(b))) + \frac{1}{4} (-2 q_{pto} a^2 + 4 H_1 T_{\infty 1} k a \\ & + H_1 a^3 q_{pto} - 2 H_2 b \ln(b) q_{pto} a^2 + 4 a H_2 b \ln(b) H_1 T_{\infty 1} k + H_2 b \ln(b) H_1 a^3 q_{pto} \\ & + 2 q_{pto} b^2 - 2 q_{pto} b^2 H_1 a \ln(a) + 4 H_2 T_{\infty 2} k b - 4 H_2 T_{\infty 2} k b H_1 a \ln(a) + H_2 b^3 q_{pto} \\ & - H_2 b^3 q_{pto} H_1 a \ln(a)) / (k (H_2 b - H_2 b H_1 a \ln(a) + H_1 a + H_1 a H_2 b \ln(b))) \end{aligned} \quad (58)$$

Com a definição de valores numéricos para o raio interno $a = 0,3 \text{ m}$, raio externo $b = 0,5 \text{ m}$ e os parâmetros $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$, $k = 1 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$ e fonte de calor

$\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$, a solução de F é então obtida com o comando *eval* que permite a substituição dos valores das temperaturas dos fluidos interno e externo $T_{\infty 1}$ e $T_{\infty 2}$:

> **F:= eval(F,{T[infinity2]=23, T[infinity1]=100});**

$$F := T(r) = -250 r^2 + 29.44496087 \ln(r) + 106.1008017 \quad (59)$$

Atribuindo a solução expressa pela equação (59) a uma nova variável chamada de *Per*.

> **Per:=-250*r^2+29.44496087*ln(r)+106.1008017;**

$$Per := -250 r^2 + 29.44496087 \ln(r) + 106.1008017 \quad (60)$$

4.2.2 Resolução numérica - Caso 2 - regime permanente

De forma análoga ao Caso 1 será utilizado o esquema de diferenças centrais para a resolução do Caso 2.

A equação da condução de calor (10) é definida e atribuída a variável *ode*:

> **ode:= 1/r*diff(T(r),r)+diff(diff(T(r),r),r)+q[pto]/k=0;**

$$ode := \frac{\frac{d}{dr} T(r)}{r} + \left(\frac{d^2}{dr^2} T(r) \right) + \frac{q_{pto}}{k} = 0 \quad (61)$$

As condições de contorno são definidas de forma análoga ao Caso 1.

Dentre as diversas simulações realizadas será mostrada para os valores do raio interno $a = 0,3 \text{ m}$, do raio externo $b = 0,5 \text{ m}$, fonte de calor $\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$ e o número de pontos nodais da malha representado por $M = 50$.

O valor da distância entre os pontos nodais, a definição da primeira derivada e a definição da segunda derivada são feitas de forma análoga às definidas para o Caso 1, sendo então omitidas. A equação da condução de calor em forma de diferenças finitas é então definida:

> **eddf:= 1/R(i)*rp(i)+rpp(i)+q[pto]/k=0;**

$$\begin{aligned} eddf := & \frac{125.0000000 T_{i+1} - 125.0000000 T_{i-1}}{0.3 + 0.004000000000 i} + 62500.00000 T_{i+1} - 125000.00000 T_i \\ & + 62500.00000 T_{i-1} + \frac{1000}{k} = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Os próximos passos da resolução são idênticos aos do Caso 1, portanto não serão repetidos. Utilizando a mesma nomenclatura para as variáveis, a distribuição de temperatura obtida é com o comando *eval* que mostra a saída de resultados:

> **DFTable:=eval([seq([R(i),T[i]],i=0..M)],sol);**

```
DFTable := [ [ 0.3, 48.15057158 ], [ 0.3040000000, 47.93655654 ],
[ 0.3080000000, 47.70944367 ], [ 0.3120000000, 47.46936451 ],
[ 0.3160000000, 47.21644559 ], [ 0.3200000000, 46.95080867 ],
[ 0.3240000000, 46.67257098 ], [ 0.3280000000, 46.38184541 ],
[ 0.3320000000, 46.07874073 ], [ 0.3360000000, 45.76336185 ],
[ 0.3400000000, 45.43580993 ], [ 0.3440000000, 45.09618259 ],
[ 0.3480000000, 44.74457406 ], [ 0.3520000000, 44.38107536 ],
[ 0.3560000000, 44.00577439 ], [ 0.3600000000, 43.61875610 ],
[ 0.3640000000, 43.22010267 ], [ 0.3680000000, 42.80989352 ],
[ 0.3720000000, 42.38820555 ], [ 0.3760000000, 41.95511316 ],
[ 0.3800000000, 41.51068843 ], [ 0.3840000000, 41.05500113 ],
[ 0.3880000000, 40.58811888 ], [ 0.3920000000, 40.11010722 ],
[ 0.3960000000, 39.62102967 ], [ 0.4000000000, 39.12094786 ],
[ 0.4040000000, 38.60992160 ], [ 0.4080000000, 38.08800890 ],
[ 0.4120000000, 37.55526608 ], [ 0.4160000000, 37.01174784 ],
```

```
[ 0.4200000000, 36.45750729 ], [ 0.4240000000, 35.89259604 ],
[ 0.4280000000, 35.31706423 ], [ 0.4320000000, 34.73096062 ],
[ 0.4360000000, 34.13433261 ], [ 0.4400000000, 33.52722631 ],
[ 0.4440000000, 32.90968659 ], [ 0.4480000000, 32.28175708 ],
[ 0.4520000000, 31.64348029 ], [ 0.4560000000, 30.99489756 ],
[ 0.4600000000, 30.33604918 ], [ 0.4640000000, 29.66697438 ],
[ 0.4680000000, 28.98771138 ], [ 0.4720000000, 28.29829743 ],
[ 0.4760000000, 27.59876883 ], [ 0.4800000000, 26.88916096 ],
[ 0.4840000000, 26.16950834 ], [ 0.4880000000, 25.43984462 ],
[ 0.4920000000, 24.70020265 ], [ 0.4960000000, 23.95061446 ],
[ 0.5000000000, 23.19111134 ]]
```

4.3 RESOLUÇÃO DO CASO 3

4.3.1 Resolução analítica – Caso 3 – regime permanente

Para a resolução analítica do Caso 3 inicialmente é definido o perfil linear da condutividade térmica:

> **k := ko*(1+beta*T(r));**

$$k := k_0 (1 + \beta T(r)) \quad (63)$$

Em seguida a equação (12) da condução de calor em regime permanente é definida e atribuída a variável *heat*:

> **heat := 1/r*diff(r*k*diff(T(r),r),r)=0;**

heat :=

$$\frac{k_0 (1 + \beta T(r)) \left(\frac{d}{dr} T(r) \right) + r k_0 \beta \left(\frac{d}{dr} T(r) \right)^2 + r k_0 (1 + \beta T(r)) \left(\frac{d^2}{dr^2} T(r) \right)}{r} = 0$$

(64)

Com o comando *dsolve* a equação (64) é resolvida apresentando duas possíveis soluções:

> **heat:= dsolve(heat, T(r));**

$$\begin{aligned} \text{heat} := T(r) &= -\frac{1}{\beta}, T(r) = \frac{1}{2} \frac{-2 + 2 \sqrt{1 + 2 \beta _C1 \ln(r) + 2 \beta _C2}}{\beta}, \\ T(r) &= \frac{1}{2} \frac{-2 - 2 \sqrt{1 + 2 \beta _C1 \ln(r) + 2 \beta _C2}}{\beta} \end{aligned} \quad (65)$$

Para esta solução será utilizada a raiz positiva que é atribuída a variável *heat*:

> **heat:= 1/2*1/beta*(-2+2*(1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2));**

$$\text{heat} := \frac{1}{2} \frac{-2 + 2 \sqrt{1 + 2 \beta _C1 \ln(r) + 2 \beta _C2}}{\beta} \quad (66)$$

O comando *simplify* é utilizado para a simplificação da equação (66), onde a equação (67) mostra uma solução ainda não explorada para as condições de contorno convectivas:

> **heat:= simplify(%);**

$$\text{heat} := \frac{-1 + \sqrt{1 + 2 \beta _C1 \ln(r) + 2 \beta _C2}}{\beta} \quad (67)$$

Uma simplificação feita em relação à derivada de *heat*:

> **cond:= -_C1/r;**

$$\text{cond} := -\frac{_C1}{r} \quad (68)$$

A primeira condição de contorno é então definida:

> **cc1:= cond = h[1]*(heat-T[1]);**

$$cc1 := -\frac{C1}{r} = h_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 2 \beta \frac{C1}{r} \ln(r) + 2 \beta \frac{C2}{r}}}{\beta} - T_1 \right) \quad (69)$$

A expressão que contém a raiz quadrada na equação (69) é então isolada e atribuída a variável *termo1*:

> **termo1 := solve(cc1,(1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2));**

$$termo1 := -\frac{\beta \frac{C1}{r} - h_1 r - h_1 r T_1 \beta}{h_1 r} \quad (70)$$

As próximas etapas são realizadas de forma a eliminar a raiz quadrada da equação (70) sendo:

> **termo1 := termo1^2;**

$$termo1 := \frac{(\beta \frac{C1}{r} - h_1 r - h_1 r T_1 \beta)^2}{h_1^2 r^2} \quad (71)$$

> **termo1 := expand(termo1);**

$$termo1 := \frac{\beta^2 \frac{C1^2}{r^2}}{h_1^2 r^2} - \frac{2 \beta \frac{C1}{r}}{h_1 r} - \frac{2 \beta^2 \frac{C1}{r} T_1}{h_1 r} + 1 + 2 T_1 \beta + T_1^2 \beta^2 \quad (72)$$

> **termoraiz := (1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2);**

$$termoraiz := \sqrt{1 + 2 \beta_{-C1} \ln(r) + 2 \beta_{-C2}} \quad (73)$$

> **pot1 := termoraiz^2;**

$$pot1 := 1 + 2 \beta_{-C1} \ln(r) + 2 \beta_{-C2} \quad (74)$$

> **termofim := termo1-pot1;**

$$termofim := \frac{\beta_{-C1}^2}{h_1^2 r^2} - \frac{2 \beta_{-C1}}{h_1 r} - \frac{2 \beta_{-C1} T_1}{h_1 r} + 2 T_1 \beta + T_1^2 \beta^2 - 2 \beta_{-C1} \ln(r) - 2 \beta_{-C2} \quad (75)$$

Onde a variável *termofim* representa a primeira condição de contorno sem a presença da raiz quadrada. Substituindo o valor do raio interno *a*:

> **termofim1 := subs(r=a,termofim);**

$$termofim1 := \frac{\beta_{-C1}^2}{h_1^2 a^2} - \frac{2 \beta_{-C1}}{h_1 a} - \frac{2 \beta_{-C1} T_1}{h_1 a} + 2 T_1 \beta + T_1^2 \beta^2 - 2 \beta_{-C1} \ln(a) - 2 \beta_{-C2} \quad (76)$$

Um procedimento análogo será realizado para a segunda condição de contorno:

> **cc2:= cond = h[2]*(T[2]-heat);**

$$cc2 := -\frac{C1}{r} = h_2 \left(T_2 - \frac{-1 + \sqrt{1 + 2 \beta_{-C1} \ln(r) + 2 \beta_{-C2}}}{\beta} \right) \quad (77)$$

> **termo2 := solve(cc2,(1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2));**

$$termo2 := \frac{\beta_{-C1} + h_2 r T_2 \beta + h_2 r}{h_2 r} \quad (78)$$

> **termo2 := termo2^2;**

$$termo2 := \frac{(\beta_{-C1} + h_2 r T_2 \beta + h_2 r)^2}{h_2^2 r^2} \quad (79)$$

> **termo2 := expand(termo2);**

$$termo2 := \frac{\beta_{-C1}^2}{h_2^2 r^2} + \frac{2 \beta_{-C1} T_2}{h_2 r} + \frac{2 \beta_{-C1}}{h_2 r} + T_2^2 \beta^2 + 2 T_2 \beta + 1 \quad (80)$$

> **termoraiz := (1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2);**

$$termoraiz := \sqrt{1 + 2 \beta_{-C1} \ln(r) + 2 \beta_{-C2}} \quad (81)$$

> **pot2 := termoraiz^2;**

$$pot2 := 1 + 2 \beta_{-C1} \ln(r) + 2 \beta_{-C2} \quad (82)$$

> **termofim2 := termo2-pot2;**

$$termofim2 := \frac{\beta_{-C1}^2}{h_2^2 r^2} + \frac{2 \beta_{-C1} T_2}{h_2 r} + \frac{2 \beta_{-C1}}{h_2 r} + T_2^2 \beta^2 + 2 T_2 \beta - 2 \beta_{-C1} \ln(r) - 2 \beta_{-C2} \quad (83)$$

> **termofim2 := subs(r=b,termofim2);**

termofim2 :=

$$\frac{\beta^2 _C1^2}{h_2^2 b^2} + \frac{2 \beta^2 _C1 T_2}{h_2 b} + \frac{2 \beta _C1}{h_2 b} + T_2^2 \beta^2 + 2 T_2 \beta - 2 \beta _C1 \ln(b) - 2 \beta _C2$$

(84)

Onde *termofim2* é a variável que representa a segunda condição de contorno sem a presença da raiz quadrada. Como o Maple não conseguiu resolver diretamente os valores das constantes *_C1* e *_C2*, serão adotados valores particulares para a solução. Definindo valores dos parâmetros conhecidos do problema:

> **a:= 0.3: b:= 0.5: beta := 1: h[1]:= 100: h[2]:= 10: ko:= 10: T[1]:= 100: T[2]:= 23:**

Isolando a constante *_C2* da primeira condição de contorno:

> **eq1 := solve(termofim1, _C2);**

$$eq1 := 0.0005555555555 _C1^2 - 2.162693862 _C1 + 5100.$$

(85)

Isolando a constante *_C2* da segunda condição de contorno:

> **eq2 := solve(termofim2, _C2);**

$$eq2 := 0.02000000000 _C1^2 + 5.493147180 _C1 + 287.5000000$$

(86)

Subtraindo a equação (86) da equação (85):

> **eq:= eq2-eq1;**

$$eq := 0.01944444444 _C1^2 + 7.655841042 _C1 - 4812.500000 \quad (87)$$

Através do comando *solve* o valor da constante *_C1* é determinado:

```
> _C1 := [solve(eq,_C1)];
```

$$_C1 := [338.1641369, -731.8931048] \quad (88)$$

Dois valores são apresentados e o valor positivo é desprezado, pois se for utilizado fornece uma distribuição de temperatura fisicamente incorreta. O valor negativo é então atribuído a constante *_C1*:

```
> _C1:=_C1[2];
```

$$_C1 := -731.8931048 \quad (89)$$

O valor da constante *_C2* é então determinado:

```
> _C2:= eq2;
```

$$_C2 := 6980.453795 \quad (90)$$

A solução para a equação da condução de calor é então encontrada:

```
> heat;
```

$$-1 + \sqrt{13961.90759 - 1463.786210 \ln(r)} \quad (91)$$

Os valores da distribuição de temperaturas pode ser mostrado com o comando *print*.

5 SOLUÇÕES PARA O REGIME TRANSIENTE

5.1 RESOLUÇÃO DO CASO 1

As mesmas considerações computacionais das soluções em regime permanente serão mantidas para as soluções do regime transiente.

5.1.1 Resolução analítica - Caso 1 - regime transiente

A solução para o problema descrito como Caso 1 é descrita no Apêndice A e tem a forma da equação (92):

$$T(r, t) = T_{\infty 2} + \left[\frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1})(\ln(r) - bH_2 - \ln(b))}{\left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{1}{N(\lambda_n)} R(\lambda_n, r) \int_a^b r' f(r') R(\lambda_n, r') dr' \quad (92)$$

Para o início da resolução em regime transiente com o software Maple será definida a equação diferencial (24) da condução de calor para o Caso 1 e atribuída a variável *heat*.

> **heat := diff(1/alpha*G(r,t),t)=diff(diff(G(r,t),r),r)+1/r*diff(G(r,t),r);**

$$heat := \frac{\frac{\partial}{\partial t} G(r, t)}{\alpha} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r, t) \right) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} G(r, t)}{r} \quad (93)$$

Para a resolução da equação (93) denominada *heat* será utilizado o método de separação de variáveis e o comando *subs* será usado para substituir $G(r, t)$ pelo produto

$R(r).T(t)$ visando separar a equação (93) em duas funções, sendo uma apenas em função do raio e outra apenas em função do tempo.

> **heat := subs(G(r,t) = R(r)*T(t),heat);**

$$heat := \frac{\frac{\partial}{\partial t} (R(r) T(t))}{\alpha} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} (R(r) T(t)) \right) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} (R(r) T(t))}{r} \quad (94)$$

A equação (94) é rearranjada de forma a redistribuir seus termos ficando o lado esquerdo da expressão apenas com os termos de $T(t)$ e o lado direito da expressão apenas com os termos de $R(r)$.

> **heat := heat/R(r)/T(t);**

$$heat := \frac{\frac{d}{dt} T(t)}{T(t) \alpha} = \frac{\left(\frac{d^2}{dr^2} R(r) \right) T(t) + \frac{\left(\frac{d}{dr} R(r) \right) T(t)}{r}}{R(r) T(t)} \quad (95)$$

O comando *expand* é utilizado para expandir os termos da equação (95):

> **heat := expand(%);**

$$heat := \frac{\frac{d}{dt} T(t)}{T(t) \alpha} = \frac{\frac{d^2}{dr^2} R(r)}{R(r)} + \frac{\frac{d}{dr} R(r)}{R(r) r} \quad (96)$$

O lado direito da equação (96) é então atribuído a variável *heatr* através do comando *rhs*.

> **heatr:= rhs(%);**

$$heatr := \frac{\frac{d^2}{dr^2} R(r)}{R(r)} + \frac{\frac{d}{dr} R(r)}{R(r) r} \quad (97)$$

E o lado esquerdo da equação (94) é atribuído à variável *heatt* através do comando *lhs*.

> heatt:=lhs(heat);

$$heatt := \frac{\frac{d}{dt} T(t)}{T(t) \alpha} \quad (98)$$

Os comandos do Maple permitiram a separação de *heat* em *heatr* e *heatt*, porém conforme as equações (A26) e (A27) do Apêndice A, ambos os membros da equação (96) devem ser igualados a mesma constante, no caso $-\lambda^2$. A seguir as equações (99) e (100) mostram as equações (97) e (98) redefinidas com a introdução da constante $-\lambda^2$.

> heatr := diff(R(r),r,r)+1/r*diff(R(r),r)+lambda^2*R(r)=0;

$$heatr := \left(\frac{d^2}{dr^2} R(r) \right) + \frac{\frac{d}{dr} R(r)}{r} + \lambda^2 R(r) = 0 \quad (99)$$

E:

> heatt := diff(T(t),t)/alpha+lambda^2*T(t);

$$heatt := \frac{\frac{d}{dt} T(t)}{\alpha} + \lambda^2 T(t) \quad (100)$$

As soluções em função do tempo da equação (100) e em função do raio da equação (99) são obtidas com o comando *dsolve*.

> **heatt := dsolve(heatt, T(t));**

$$heatt := T(t) = _C1 e^{(-\lambda^2 \alpha t)} \quad (101)$$

E:

> **heatr := dsolve(heatr, R(r));**

$$heatr := R(r) = _C1 \text{BesselJ}(0, \lambda r) + _C2 \text{BesselY}(0, \lambda r) \quad (102)$$

As constantes $_C1$ e $_C2$ da equação (102) são renomeadas, pois a solução de *heatt* expressa na equação (101) já possui uma constante chamada $_C1$:

> **heatr := subs(_C2=_C3, _C1=_C2, heatr);**

$$heatr := R(r) = _C2 \text{BesselJ}(0, \lambda r) + _C3 \text{BesselY}(0, \lambda r) \quad (103)$$

onde $\text{BesselJ}(0, \lambda r)$ representa uma função de Bessel de 1º tipo e ordem zero e $\text{BesselY}(0, \lambda r)$ representa uma função de Bessel de 2º tipo e ordem zero.

O valor da difusividade térmica $\alpha = 0,05 \text{ m}^2/\text{s}$ e dos parâmetros $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ são definidos e para a adequação das condições de contorno no regime transiente, encontra-se a derivada de *heatr* expressa na equação (104).

> **DR:=diff(heatr,r);**

$$DR := \frac{d}{dr} R(r) = -_C2 \text{BesselJ}(1, \lambda r) \lambda - _C3 \text{BesselY}(1, \lambda r) \lambda \quad (104)$$

Então a equação (104) é substituída na condição de contorno mostrada na equação (19) em $r = a$.

$$> \text{CCTa} := -DR + H[1] * \text{heatr} = 0;$$

$$\begin{aligned} CCTa := & \left(-\left(\frac{d}{dr} R(r) \right) + R(r) = -C2 \text{BesselJ}(1, \lambda r) \lambda + -C3 \text{BesselY}(1, \lambda r) \lambda \right. \\ & \left. + -C2 \text{BesselJ}(0, \lambda r) + -C3 \text{BesselY}(0, \lambda r) \right) = 0 \end{aligned} \quad (105)$$

Rearranjando a equação (105):

$$> \text{CCTa} := \text{subs}(r=a, CCTa);$$

$$\begin{aligned} CCTa := & (-\text{diff}(R(0.3), 0.3) + R(0.3) = -C2 \text{BesselJ}(1, 0.3 \lambda) \lambda \\ & + -C3 \text{BesselY}(1, 0.3 \lambda) \lambda + -C2 \text{BesselJ}(0, 0.3 \lambda) + -C3 \text{BesselY}(0, 0.3 \lambda)) = 0 \end{aligned} \quad (106)$$

Substituindo a equação (106) na condição de contorno mostrada na equação (22) em $r = b$.

$$> \text{CCTb} := DR + H[2] * \text{heatr} = 0;$$

$$\begin{aligned} CCTb := & \left(\left(\frac{d}{dr} R(r) \right) + 1000 R(r) = -C2 \text{BesselJ}(1, \lambda r) \lambda - C3 \text{BesselY}(1, \lambda r) \lambda \right. \\ & \left. + 1000 -C2 \text{BesselJ}(0, \lambda r) + 1000 -C3 \text{BesselY}(0, \lambda r) \right) = 0 \end{aligned} \quad (107)$$

Rearranjando a equação (107):

$$> \text{CCTb} := \text{subs}(r=b, CCTb);$$

$$\begin{aligned}
CCTb := & (\text{diff}(R(0.5), 0.5) + 1000 R(0.5) = -_C2 \text{BesselJ}(1, 0.5 \lambda) \lambda \\
& - _C3 \text{BesselY}(1, 0.5 \lambda) \lambda + 1000 _C2 \text{BesselJ}(0, 0.5 \lambda) \\
& + 1000 _C3 \text{BesselY}(0, 0.5 \lambda)) = 0
\end{aligned} \tag{108}$$

Renomeando os termos das equações (106) e (108) das condições de contorno.

$$> \mathbf{Uo := lambda*BesselJ(1,lambda*a)+H[1]*BesselJ(0,lambda*a);}$$

$$Uo := \lambda \text{BesselJ}(1, 0.3 \lambda) + \text{BesselJ}(0, 0.3 \lambda) \tag{109}$$

$$> \mathbf{So := lambda*BesselY(1,lambda*b)-H[2]*BesselY(0,lambda*b);}$$

$$So := \lambda \text{BesselY}(1, 0.5 \lambda) - 1000 \text{BesselY}(0, 0.5 \lambda) \tag{110}$$

$$> \mathbf{Wo := lambda*BesselY(1,lambda*a)+H[1]*BesselY(0,lambda*a);}$$

$$Wo := \lambda \text{BesselY}(1, 0.3 \lambda) + \text{BesselY}(0, 0.3 \lambda) \tag{111}$$

$$> \mathbf{Vo := lambda*BesselJ(1,lambda*b)-H[2]*BesselJ(0,lambda*b);}$$

$$Vo := \lambda \text{BesselJ}(1, 0.5 \lambda) - 1000 \text{BesselJ}(0, 0.5 \lambda) \tag{112}$$

Os autovalores podem ser encontrados pela equação transcendental conforme foi desenvolvida pelas equações (A46) até (A49) do Apêndice A.

$$> \mathbf{QC := Uo*So-Wo*Vo;}$$

$$\begin{aligned}
QC := & (\lambda \text{BesselJ}(1, 0.3 \lambda) + \text{BesselJ}(0, 0.3 \lambda)) \\
& (\lambda \text{BesselY}(1, 0.5 \lambda) - 1000 \text{BesselY}(0, 0.5 \lambda)) - \\
& (\lambda \text{BesselY}(1, 0.3 \lambda) + \text{BesselY}(0, 0.3 \lambda)) \\
& (\lambda \text{BesselJ}(1, 0.5 \lambda) - 1000 \text{BesselJ}(0, 0.5 \lambda))
\end{aligned} \tag{113}$$

Arbitrariamente é escolhido um valor para a constante $_C2$:

> $_C2 := S_0$;

$$_C2 := \lambda \text{BesselY}(1, 0.5 \lambda) - 1000 \text{BesselY}(0, 0.5 \lambda) \quad (114)$$

e conseqüentemente para a constante $_C3$ que fica como:

> $_C3 := -V_0$;

$$_C3 := -\lambda \text{BesselJ}(1, 0.5 \lambda) + 1000 \text{BesselJ}(0, 0.5 \lambda) \quad (115)$$

Com a determinação das constantes $_C2$ e $_C3$, a equação (103) fica:

> **heatr;**

$$R(r) = (\lambda \text{BesselY}(1, 0.5 \lambda) - 1000 \text{BesselY}(0, 0.5 \lambda)) \text{BesselJ}(0, \lambda r) + (-\lambda \text{BesselJ}(1, 0.5 \lambda) + 1000 \text{BesselJ}(0, 0.5 \lambda)) \text{BesselY}(0, \lambda r) \quad (116)$$

Então, os autovalores são determinados com o uso o comando *fsolve* para os primeiros 20 valores válidos, sendo justificado o uso deste valor no item 6.2.

> **lambdas:= seq(fsolve(QC=0 ,lambda=(n-1)*16..n*16),n=1..20);**

lambdas := 9.109297323, 23.95917466, 39.38911938, 54.93035436, 70.51057503,
86.10892150, 101.7172194, 117.3316324, 132.9501335, 148.5715589, 164.1951986,
179.8205993, 195.4474621, 211.0755845, 226.7048274, 242.3350937, 257.9663156,
273.5984454, 289.2314503, 304.8653078

Todas as equações devem ser transformadas em vetores formados de 20 elementos através do comando *seq* recebendo o mesmo nome acrescido da letra V.

**> UoV := [seq(lambdas[i]*BesselJ(1,lambdas[i]*a) +
H[1]*BesselJ(0,lambdas[i]*a), i = 1..20)];**

UoV := [3.773219528, 1.512816964, -9.128105562, -0.2879087407, 12.24007020,
-0.8022969096, -14.63402372, 1.956274925, 16.60357855, -3.198470093,
-18.26757936, 4.525911967, 19.68781149, -5.929001614, -20.90138258,
7.396442925, 21.93302321, -8.916773774, -22.80067218, 10.47892834]

**> SoV := [seq(lambdas[i]*BesselY(1,lambdas[i]*b)-
H[2]*BesselY(0,lambdas[i]*b),i=1..20)];**

SoV := [213.3660098, 225.0969683, -16.63418146, -152.2580602, -2.785764445,
121.7093868, 10.46141782, -103.9725757, -15.06457127, 91.96835216,
18.39459381, -83.08907875, -21.05126826, 76.12699584, 23.29275853,
-70.43787880, -25.24997694, 65.64344203, 26.99745038, -61.50553202]

**> WoV :=
[seq(lambdas[i]*BesselY(1,lambdas[i]*a)+H[1]*BesselY(0,lambdas[i]*a),i=1..20)];**

WoV := [2.637122322, -7.021304575, -0.8484958813, 10.80789395, -0.2534372536,
-13.50164457, 1.368651177, 15.66244234, -2.566270423, -17.46910982,
3.852064880, 19.00546162, -5.218692072, -20.31867820, 6.655399706,
21.43870557, -8.150701298, -22.38640212, 9.693291834, 23.17747825]

**> VoV := [seq(lambdas[i]*BesselJ(1,lambdas[i]*b)-
H[2]*BesselJ(0,lambdas[i]*b),i=1..20)];**

VoV := [305.2861018, -48.49960681, -178.9502602, 4.055963529, 134.5420108,
7.23223500, -111.8565849, -12.98641238, 97.46665050, 16.83875367,
-87.23236079, -19.78662033, 79.41710472, 22.21390458, -73.15125593,
-24.30136671, 67.94609744, 26.14657441, -63.50371944, -27.80768726]

A equação (116) renomeada para R também é transformada em vetor.

```
> R := [seq( (lambdas[i]*BesselY(1,.5*lambdas[i])-
1000*BesselY(0,.5*lambdas[i]))*BesselJ(0,lambdas[i]*r)+(-
lambdas[i]*BesselJ(1,.5*lambdas[i])+1000*BesselJ(0,.5*lambdas[
i]))*BesselY(0,lambdas[i]*r),i=1..20)];
```

```
R := [
213.3660098 BesselJ(0, 9.109297323 r) – 305.2861018 BesselY(0, 9.109297323 r)
,
225.0969683 BesselJ(0, 23.95917466 r) + 48.49960681 BesselY(0, 23.95917466 r)
, –16.63418146 BesselJ(0, 39.38911938 r)
+ 178.9502602 BesselY(0, 39.38911938 r),
–152.2580602 BesselJ(0, 54.93035436 r)
– 4.055963529 BesselY(0, 54.93035436 r),
–2.785764445 BesselJ(0, 70.51057503 r)
– 134.5420108 BesselY(0, 70.51057503 r),
121.7093868 BesselJ(0, 86.10892150 r) – 7.23223500 BesselY(0, 86.10892150 r),
10.46141782 BesselJ(0, 101.7172194 r) + 111.8565849 BesselY(0, 101.7172194 r)
, –103.9725757 BesselJ(0, 117.3316324 r)
+ 12.98641238 BesselY(0, 117.3316324 r),
–15.06457127 BesselJ(0, 132.9501335 r)
– 97.46665050 BesselY(0, 132.9501335 r),
91.96835216 BesselJ(0, 148.5715589 r) – 16.83875367 BesselY(0, 148.5715589 r)
,
18.39459381 BesselJ(0, 164.1951986 r) + 87.23236079 BesselY(0, 164.1951986 r)
, –83.08907875 BesselJ(0, 179.8205993 r)
+ 19.78662033 BesselY(0, 179.8205993 r),
–21.05126826 BesselJ(0, 195.4474621 r)
– 79.41710472 BesselY(0, 195.4474621 r),
76.12699584 BesselJ(0, 211.0755845 r) – 22.21390458 BesselY(0, 211.0755845 r)
,
23.29275853 BesselJ(0, 226.7048274 r) + 73.15125593 BesselY(0, 226.7048274 r)
, –70.43787880 BesselJ(0, 242.3350937 r)
+ 24.30136671 BesselY(0, 242.3350937 r),
–25.24997694 BesselJ(0, 257.9663156 r)
– 67.94609744 BesselY(0, 257.9663156 r),
65.64344203 BesselJ(0, 273.5984454 r) – 26.14657441 BesselY(0, 273.5984454 r)
,
26.99745038 BesselJ(0, 289.2314503 r) + 63.50371944 BesselY(0, 289.2314503 r)
, –61.50553202 BesselJ(0, 304.8653078 r)
+ 27.80768726 BesselY(0, 304.8653078 r)]
```

Conforme apresentado no apêndice A, a resolução do problema depende da determinação da integral de normalização definida na equação (A59) que pode ser obtida como:

```
> NNV:= [seq(int(r*R[i]^2,r=a..b),i=1..20)];
```

```
NNV := [ 1099.760221, 144.5759929, 52.88145409, 27.13159493, 16.47278213,  
11.06342155, 7.948001706, 5.991782725, 4.683733327, 3.766233790, 3.097994332,  
2.596279416, 2.210032299, 1.906361642, 1.663304237, 1.465741004, 1.302988688,  
1.167325120, 1.053056344, 0.9559094182 ]
```

Um perfil inicial parabólico é atribuído à variável f , sendo justificada a escolha deste perfil no item 6.2.1.

```
> f := -8850*r^2 + 6695*r - 1112;
```

$$f := -8850 r^2 + 6695 r - 1112 \quad (117)$$

Os coeficientes apresentados na equação (A83) do Apêndice A são definidos a seguir:

```
> cnn:= [seq(int(r*R[i]*(f-Per),r=a..b),i=1..20)];
```

```
cnn := [-865.9920447, -93.15228138, 6.497962179, -5.263653907, 1.674689411,  
-1.148533867, 0.6556753581, -0.4009106860, 0.3262623434, -0.1773584402,  
0.1880127984, -0.09036487785, 0.1195152354, -0.05049634552, 0.08147583306,  
-0.03007331228, 0.05852100045, -0.01873576810, 0.04376604669,  
-0.01204977261 ]
```

A variável $GG1$ representa a solução em regime transiente.

```
> GG1 := [seq(exp(-alpha*lambda[i]^2*t)*1/NNV[i]*R[i]*cnn[i],i=1..20)];
```

A solução final deve ser a soma de todas as soluções para os valores de λn válidos. Para isto uma nova variável é inicializada com zero e a soma será realizada com o comando *for* que cria um somatório.

> **GGT :=0;**

> **for f from 1 to 20 do GGT := GGT+GG1[f] end do;**

> **print(GGT);**

```

-0.7874371415 e(-4.148964886 t) (
  213.3660098 BesselJ(0, 9.109297323 r) - 305.2861018 BesselY(0, 9.109297323 r)
) - 0.6443136202 e(-28.70210252 t) (
  225.0969683 BesselJ(0, 23.95917466 r) + 48.49960681 BesselY(0, 23.95917466 r)
) + 0.1228779029 e(-77.57513630 t) (-16.63418146 BesselJ(0, 39.38911938 r)
+ 178.9502602 BesselY(0, 39.38911938 r)) - 0.1940045884 e(-150.8671915 t) (
-152.2580602 BesselJ(0, 54.93035436 r)
- 4.055963529 BesselY(0, 54.93035436 r)) + 0.1016640297 e(-248.5870596 t) (
-2.785764445 BesselJ(0, 70.51057503 r)
- 134.5420108 BesselY(0, 70.51057503 r)) - 0.1038136224 e(-370.7373181 t) (
121.7093868 BesselJ(0, 86.10892150 r) - 7.23223500 BesselY(0, 86.10892150 r))
+ 0.08249562373 e(-517.3196360 t) (
10.46141782 BesselJ(0, 101.7172194 r) + 111.8565849 BesselY(0, 101.7172194 r)
) - 0.06691008408 e(-688.3355980 t) (-103.9725757 BesselJ(0, 117.3316324 r)
+ 12.98641238 BesselY(0, 117.3316324 r)) + 0.06965860792 e(-883.7869000 t) (
-15.06457127 BesselJ(0, 132.9501335 r)
- 97.46665050 BesselY(0, 132.9501335 r)) - 0.04709172348 e(-1103.675406 t) (
91.96835216 BesselJ(0, 148.5715589 r) - 16.83875367 BesselY(0, 148.5715589 r)
) + 0.06068855467 e(-1348.003162 t) (
18.39459381 BesselJ(0, 164.1951986 r) + 87.23236079 BesselY(0, 164.1951986 r)
) - 0.03480552875 e(-1616.772396 t) (-83.08907875 BesselJ(0, 179.8205993 r)
+ 19.78662033 BesselY(0, 179.8205993 r)) + 0.05407850168 e(-1909.985522 t) (
-21.05126826 BesselJ(0, 195.4474621 r)
- 79.41710472 BesselY(0, 195.4474621 r)) - 0.02648833485 e(-2227.645118 t) (

```

$$\begin{aligned}
& 76.12699584 \text{ BesselJ}(0, 211.0755845 r) - 22.21390458 \text{ BesselY}(0, 211.0755845 r) \\
&) + 0.04898432364 e^{(-2569.753938 t)} (\\
& 23.29275853 \text{ BesselJ}(0, 226.7048274 r) + 73.15125593 \text{ BesselY}(0, 226.7048274 r) \\
&) - 0.02051748037 e^{(-2936.314882 t)} (-70.43787880 \text{ BesselJ}(0, 242.3350937 r) \\
& + 24.30136671 \text{ BesselY}(0, 242.3350937 r)) + 0.04491289985 e^{(-3327.330999 t)} (\\
& -25.24997694 \text{ BesselJ}(0, 257.9663156 r) \\
& - 67.94609744 \text{ BesselY}(0, 257.9663156 r)) - 0.01605017127 e^{(-3742.805466 t)} (\\
& 65.64344203 \text{ BesselJ}(0, 273.5984454 r) - 26.14657441 \text{ BesselY}(0, 273.5984454 r) \\
&) + 0.04156097339 e^{(-4182.741592 t)} (\\
& 26.99745038 \text{ BesselJ}(0, 289.2314503 r) + 63.50371944 \text{ BesselY}(0, 289.2314503 r) \\
&) - 0.01260555905 e^{(-4647.142795 t)} (-61.50553202 \text{ BesselJ}(0, 304.8653078 r) \\
& + 27.80768726 \text{ BesselY}(0, 304.8653078 r))
\end{aligned}$$

(118)

Valores de tempo são fornecidos e novas funções podem ser definidas como mostra os comandos a seguir.

> **GGT1:= eval(GGT, t=1):**

> **GGT15 := eval(GGT, t=1.5):**

O comando *plot* pode ser utilizado para mostrar os gráficos dos valores da distribuição de temperatura no valor do tempo desejado, sendo a solução transiente sempre somada à solução em regime permanente.

Os valores das funções em regime permanente e transiente podem ser visualizados com o uso do comando *for* e do comando *print*.

> **for r from 0.3 by 0.02 to 0.5 do print(GGT2+Per); end do;**

33.30042390

32.00846727

30.79377627

29.64748073
 28.56218603
 27.53167164
 26.55066172
 25.61464799
 24.71975081
 23.86260871
 23.04028962

5.1.2 Resolução numérica – Caso 1 – regime transiente

Serão apresentadas a seguir as resoluções numéricas nos esquemas explícito e Cranck-Nicolson para o Caso 1.

5.1.2.1 Resolução numérica – Caso 1 – regime transiente – esquema Cranck-Nicolson

Para a resolução numérica em regime transiente do Caso 1 foi utilizado o esquema de Crank Nicolson, em que a discretização é apresentada no Apêndice B e pela equação (39):

São definidos valores para o raio interno $a = 0,3 \text{ m}$, raio externo $b = 0,5 \text{ m}$ e número de pontos da malha representado por $M = 80$.

O intervalo espacial é atribuído a Δ_{ri} :

```
> Delta[ri] := (b-a)/M;
```

```
 $\Delta_{ri} := 0.002500000000$ 
```

O incremento radial é atribuído a variável R :

```
> R := a+i*Delta[ri];
```

$$R := 0.3 + 0.002500000000 i$$

O perfil inicial de temperatura é formado pela solução analítica em regime transiente obtido pela equação (118) calculada no tempo igual a zero somado à solução em regime permanente expressa na equação (50).

Os comandos a seguir fornecem a matriz denominada *DT0* com o perfil inicial:

```
> T0:= linalg[matrix](M+1,1): j:=1:
> for r from a by Delta[ri] to b do T0[j,1] := eval(GGT0(r)+Per): j:=j+1: end
do:
> DT0:= seq([R(i),T0[i+1,1]], i=0..M);

DT0 := [0.3, 102.8574717], [0.3025000000, 103.6464489],
        [0.3050000000, 105.8352330], [0.3075000000, 108.9973299],
        [0.3100000000, 112.5883417], [0.3125000000, 116.1150226],
        [0.3150000000, 119.2670360], [0.3175000000, 121.9660224],
        [0.3200000000, 124.3235814], [0.3225000000, 126.5374673],
        :
        [0.4750000000, 71.37458440], [0.4775000000, 67.15276957],
        [0.4800000000, 62.75503343], [0.4825000000, 58.13766040],
        [0.4850000000, 53.30739236], [0.4875000000, 48.33069842],
        [0.4900000000, 43.31896433], [0.4925000000, 38.39402680],
        [0.4950000000, 33.64698623], [0.4975000000, 29.10654252],
        [0.5000000000, 24.72977709]
```

A seguir serão definidos valores iniciais para a difusividade térmica $\alpha = 0,05 \text{ m}^2/\text{s}$, para o intervalo de tempo $\Delta t = 0,001 \text{ s}$, para a condutividade térmica $k = 1 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$, para o coeficiente de transferência de calor do fluido interno $h_1 = 1 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$, para o coeficiente de transferência de calor do fluido externo $h_2 = 1.000 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$, a temperatura do fluido interno $T_{\infty 1} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$ e para a temperatura do fluido externo $T_{\infty 2} = 23 \text{ } ^\circ\text{C}$:

Valores para a simplificação da discretização serão definidos conforme a equação (B4) do Apêndice B:

```
> B := (alpha*Delta[t])/(2*Delta[ri]^2);
```

```
B := 40.00000000
```

O valor do parâmetro A expresso na equação (B4) depende do incremento radial, portanto os comandos a seguir definem uma forma matricial de representação e são atribuídos a variável DA .

```
> inc:=0.3: A:= linalg[matrix](M+1,1):
```

```
> for j from 1 to M+1 do A[j,1]:= (alpha*Delta[t])/(4*inc*Delta[ri]): inc :=  
inc+Delta[ri]: end do:
```

```
> DA:= seq([R(i),A[i+1,1]], i=0..M);
```

```
DA := [ 0.3, 0.1666666667 ], [ 0.3025000000, 0.1652892562 ],  
      [ 0.3050000000, 0.1639344262 ], [ 0.3075000000, 0.1626016260 ],  
      [ 0.3100000000, 0.1612903226 ], [ 0.3125000000, 0.1600000000 ],  
      [ 0.3150000000, 0.1587301587 ], [ 0.3175000000, 0.1574803150 ],  
      [ 0.3200000000, 0.1562500000 ], [ 0.3225000000, 0.1550387597 ],  
      :  
      [ 0.4750000000, 0.1052631579 ], [ 0.4775000000, 0.1047120419 ],  
      [ 0.4800000000, 0.1041666667 ], [ 0.4825000000, 0.1036269430 ],  
      [ 0.4850000000, 0.1030927835 ], [ 0.4875000000, 0.1025641026 ],  
      [ 0.4900000000, 0.1020408163 ], [ 0.4925000000, 0.1015228426 ],  
      [ 0.4950000000, 0.1010101010 ], [ 0.4975000000, 0.1005025126 ],  
      [ 0.5000000000, 0.1000000000 ]
```

São definidas duas constantes denominadas C e Z para a simplificação dos cálculos nas condições de contorno conforme as expressões (B11) e (B17):

```
> C:= (h[1]*2*Delta[ri])/k;
```

```
C := 0.005000000000
```

```
> Z:=(h[2]*2*Delta[ri])/k;
```


$Z := 5.000000000$

A matriz no nível de tempo m é atribuída a variável $Bn1$ é definida pelos comandos a seguir:

```
> Bn1:= linalg[matrix](M+1,M+1);
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to M+1 do Bn1[i,j]:=0; end do; end do;
> Bn1[1,1]:=eval(1+2*B-C*A[1,1]+C*B); Bn1[1,2] := -2*B;
> for i from 2 to M do Bn1[i,i-1] := A[i,1]-B; Bn1[i,i]:= 1+2*B; Bn1[i,i+1] :=
-A[i,1]-B; end do;
> Bn1[M+1,M] := -2*B; Bn1[M+1,M+1]:= 1+2*B+B*Z+Z*A[M+1,1];
```

A matriz no nível de tempo $m+1$ é atribuída a variável An é definida pelos comandos a seguir:

```
> An:= linalg[matrix](M+1,M+1);
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to M+1 do An[i,j]:=0; end do; end do;
> An[1,1]:=1-2*B+C*A[1,1]-C*B; An[1,2] := 2*B;
> for i from 2 to M do An[i,i-1] := B-A[i,1]; An[i,i]:= 1-2*B; An[i,i+1] :=
A[i,1]+B; end do;
> An[M+1,M] := 2*B; An[M+1,M+1]:= 1-2*B-A[M+1,1]*Z-B*Z;
```

As condições de contorno expressas pelas equações (B12) e (B18) são definidas:

```
> cc1n:=T[infinity1]*(2*C*B-2*A[1,1]*C);
ccnn:=T[infinity2]*(2*A[M+1,1]*Z+2*B*Z);
```

A matriz formada pelas condições de contorno é construída:

```
> CC:= linalg[matrix](M+1,1);
```

```
> for j from 1 to M+1 do for p from 1 to 1 do CC[j,p]:=0; end do; end do;
> CC[1,1]:=cc1n; CC[M+1,1]:=ccnn;
```

Para a implementação do algoritmo de linhas a matriz com as condições de contorno é preparada:

```
> DDD:= linalg[matrix](M+1,1);
> DDD:=evalm(An &* T0 +CC):
```

A matriz dos coeficientes tem seus elementos separados em outras matrizes:

```
> AAA:= linalg[matrix](M+1,1);
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to M+1 do if(i=j) then
AAA[i,1]:=Bn1[i,j]:else print(): end if: end do: end do:

> CCC:= linalg[matrix](M+1,1);
> for i from 2 to M+1 do for j from 1 to M+1 do if(i=j) then CCC[1,1]:=0:
CCC[i,1]:=Bn1[i,j-1]:else print(): end if: end do: end do:

> BBB:= linalg[matrix](M+1,1);
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to M do if(i=j) then
BBB[i,1]:=Bn1[i,j+1]:BBB[M+1,1]:=0: else print(): end if: end do: end do:
```

O algoritmo de linhas é então implementado para 1.000 iterações e o valor da distribuição de temperatura é atribuído a variável *TTT*:

```
> TTT:= linalg[matrix](M+1,1);
> for ite from 1 to 1000 do
> P[1]:=evalf(-BBB[1,1]/AAA[1,1]):
> Q[1]:= evalf(DDD[1,1]/AAA[1,1]):
```

```

> for i from 2 to M+1 do P[i]:=-BBB[i,1]/(AAA[i,1]+CCC[i,1]*P[i-1]): end
do:
> for i from 2 to M+1 do Q[i]:=(DDD[i,1]-CCC[i,1]*Q[i-
1))/(AAA[i,1]+CCC[i,1]*P[i-1]):end do:
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to 1 do MPQ[i,j]:=P[i]:end do:end do:
> for i from 1 to M+1 do for j from 2 to 2 do MPQ[i,j]:=Q[i]:end do:end do:
> TTT[M+1,1]:= MPQ[M+1,2]:
> j:=M:
> for i from 1 to M do TTT[j,1]:= MPQ[j,2]+TTT[j+1,1]*MPQ[j,1]: j:= j-1:
end do:
> DDD:=evalm(An &* TTT+CC):
> end do:

```

Com a alteração da variável M o número de pontos nodais pode ser alterado.

5.1.2.2 Resolução numérica – Caso 1 – regime transiente – esquema explícito

Para a resolução numérica do Caso 1 pelo esquema explícito serão considerados os mesmos parâmetros utilizados na resolução pelo esquema Crank-Nicolson, porém partindo-se da equação (35) e tendo que se considerar o critério de estabilidade mostrado na Tabela 2, o que levou a uma escolha do intervalo de tempo de $\Delta t = 0,00003$ s sendo calculado a seguir:

```

> Fo:= (alpha*Delta[t])/(Delta[ri]^2);

```

```

Fo := 0.2400000000

```

O valor do parâmetro B mostrado pela expressão (36) é então definido:

```

> B := (alpha*Delta[t])/(Delta[ri]^2):

```

Dois parâmetros adicionais para facilitar os cálculos são incluídos e denominados de C e DD , conforme é mostrado a seguir:

```
> C:= (H[1]*2*Delta[ri]):
```

```
> DD:=(H[2]*2*Delta[ri]):
```

Para a definição do parâmetro A da expressão (36) é necessário fazer uma manipulação de forma que os valores sejam armazenados em uma matriz, pois variam de acordo com a posição como é mostrado a seguir:

```
> inc:=0.3:
```

```
> A:= linalg[matrix](M+1,1):
```

```
> for j from 1 to M+1 do A[j,1]:= (alpha*Delta[t])/(2*inc*Delta[ri]); inc :=  
inc+Delta[ri]: end do:
```

O perfil inicial de temperatura é obtido de forma análoga ao desenvolvimento feito pelo esquema Crank-Nicolson. A matriz com as temperaturas conhecidas é então definida conforme os procedimentos a seguir e chamada de An :

```
> An:= linalg[matrix](M+1,M+1):
```

```
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to M+1 do An[i,j]:=0; end do; end do;
```

```
> An[1,1]:=1-2*B+C*A[1,1]-C*B: An[1,2] := 2*B:
```

```
> for i from 2 to M do An[i,i-1] := B-A[i,1]: An[i,i]:= 1-2*B: An[i,i+1] :=  
A[i,1]+B: end do:
```

```
> An[M+1,M] := 2*B: An[M+1,M+1]:= 1-2*B-A[M+1,1]*DD-B*DD:
```

A matriz para as condições de contorno é definida a seguir:

```
> cc1n:=T[infinity1]*(C*B-A[1,1]*C):
```

```
cc6n:=T[infinity2]*(A[M+1,1]*DD+B*DD):
```

```
> CC:= linalg[matrix](M+1,1):
```

```
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to 1 do CC[i,j]:=0: end do: end do:
> CC[1,1]:=cc1n: CC[M+1,1]:=cc6n:
```

A primeira distribuição de temperatura é determinada pela seguinte expressão:

```
> T1:=evalm(An &* T0+CC);
```

Para as demais distribuições de temperatura, a expressão acima deve ser colocada em uma estrutura de repetição para um número determinado de iterações:

```
> Tant:=T1;
> for i from 1 to 1000 do Tant:=evalm(An &* Tant+CC); end do:
```

O comando *print* pode ser usado para a visualização dos valores obtidos pela distribuição de temperatura.

5.2 RESOLUÇÃO DO CASO 2

5.2.1 Resolução analítica – Caso 2 – regime transiente

A resolução analítica para o Caso 2 no regime transiente é idêntica à solução para o Caso 1, pois o termo geração interna de calor é levado para a resolução em regime permanente.

5.2.2 Resolução numérica – Caso 2 – regime transiente

Para a resolução numérica do Caso 2 foi definida uma malha com 80 pontos nodais. Os mesmos passos de resolução do Caso 1 são seguidos sendo fornecido o valor da fonte de calor, que dentre as simulações realizadas será apresentada aqui com o valor $\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$.

Para a definição do perfil inicial foram utilizadas as equações (118) e (60) referentes à resolução em regime transiente calculada no tempo igual a zero e a

resolução em regime permanente. Os valores encontrados foram atribuídos à variável $DT0$:

```
> DT0:= seq([R(m),T0[m+1,1]], m=0..M);

DT0 := [0.3, 102.8576786 ], [0.3025000000, 103.6465940 ],
        [0.3050000000, 105.8352328 ], [0.3075000000, 108.9971874 ],
        [0.3100000000, 112.5881414 ], [0.3125000000, 116.1148808 ],
        [0.3150000000, 119.2670342 ], [0.3175000000, 121.9661605 ],
        [0.3200000000, 124.3237787 ], [0.3225000000, 126.5376089 ],
        :
        [0.4750000000, 71.37463299 ], [0.4775000000, 67.15337467 ],
        [0.4800000000, 62.75588628 ], [0.4825000000, 58.13821419 ],
        [0.4850000000, 53.30717572 ], [0.4875000000, 48.32966833 ],
        [0.4900000000, 43.31768351 ], [0.4925000000, 38.39348213 ],
        [0.4950000000, 33.64798752 ], [0.4975000000, 29.10881550 ],
        [0.5000000000, 24.73100749 ]
```

As matrizes dos coeficientes nos tempo $m+1$ e m são definidas de forma análoga ao Caso 1. A diferença aparece na criação da matriz que contém as condições de contorno com a inclusão do termo de geração interna de calor, sendo:

```
> cc1n:=T[infinity1]*(2*C*B-2*A[1,1]*C);
ccnn:=T[infinity2]*(2*A[M+1,1]*Z+2*B*Z);

cc1n := 39.83333333
ccnn := 9223.000000

> CC:= linalg[matrix](M+1,1):
> for i from 1 to M+1 do for j from 1 to 1 do
CC[i,j]:=q*Delta[t]*alpha; end do; end do;
> CC[1,1]:=cc1n+g*Delta[t]*alpha;
CC[M+1,1]:=ccnn+q*Delta[t]*alpha;

CC1,1 := 40.33333333
CC81,1 := 9223.500000
```

```
> DT0:= seq([R(m),CC[m+1,1]], m=0..M);
```

```
DT0 := [0.3, 40.33333333 ], [0.3025000000, 0.5000 ], [0.3050000000, 0.5000 ],
        [0.3075000000, 0.5000 ], [0.3100000000, 0.5000 ], [0.3125000000, 0.5000 ],
        [0.3150000000, 0.5000 ], [0.3175000000, 0.5000 ], [0.3200000000, 0.5000 ],
        [0.3225000000, 0.5000 ], [0.3250000000, 0.5000 ], [0.3275000000, 0.5000 ],
        [0.3300000000, 0.5000 ], [0.3325000000, 0.5000 ], [0.3350000000, 0.5000 ],
        ⋮
        [0.4875000000, 0.5000 ], [0.4900000000, 0.5000 ], [0.4925000000, 0.5000 ],
        [0.4950000000, 0.5000 ], [0.4975000000, 0.5000 ], [0.5000000000, 9223.500000 ]
```

A implementação do método TDMA é feita de forma análoga ao Caso 1.

6 RESULTADOS

Serão apresentados os resultados provenientes do perfil inicial de temperatura, do número de autovalores utilizados e os resultados provenientes das simulações para os regimes permanente e transiente.

6.1 RESULTADOS PARA O REGIME PERMANENTE

Serão apresentados os resultados obtidos para o regime permanente para os casos 1, 2 e 3. A Tabela 4 mostra os valores dos parâmetros usados para os casos 1 e 2.

Tabela 4 - Valores das propriedades usadas nas soluções do Caso 1.

Propriedade	Valor	Unidade
Temperatura do fluido externo	23	°C
Temperatura do fluido interno	100	°C
Condutividade térmica	1	W/m °C
Raio interno	0,3	m
Raio externo	0,5	m

6.1.1 Resolução analítica e numérica – Caso 1

A distribuição de temperatura mostrada na Figura 4 foi obtida a partir da equação (50) da resolução analítica, onde $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$. O perfil de temperatura apresentado tem um comportamento logaritmo característico das soluções cilíndricas com condições de contorno convectivas presentes no estudo de cilindros maciços (INCROPERA; WITT, 1985).

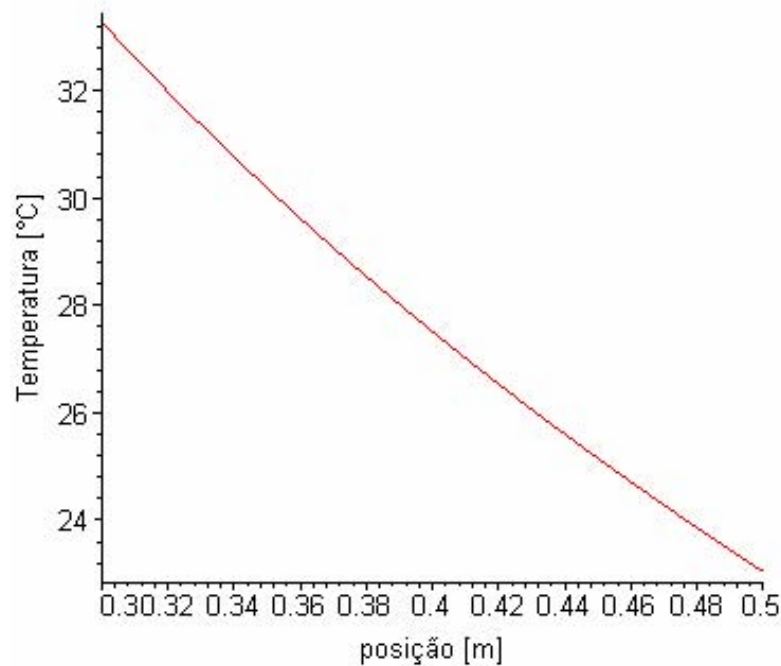


Figura 4 - Distribuição de temperatura – Caso 1 – regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$.

Para as mesmas condições da Figura 4, a Tabela 5 mostra a distribuição de temperatura para resolução numérica e os erros relativos relacionados à resolução analítica. Verifica-se que o erro relativo ao longo do cilindro permaneceu abaixo de 1×10^{-2} .

6.1.2 Resolução analítica e numérica – Caso 2

A distribuição de temperatura mostrada na Figura 5 foi obtida a partir da equação (60) da resolução analítica e com valores para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$. O perfil de temperatura apresentado tem um comportamento característico das soluções na presença de geração interna de calor com condições de contorno convectivas em cilindros maciços (INCROPERA; WITT, 1985).

Tabela 5 – Distribuições de temperatura e erros relativos ao Caso 1 no regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$.

Posição [m]	Temperatura [°C] resolução analítica	Temperatura [°C] resolução numérica	Erro relativo [%]
0,30	33,26675	33,26377	0,00895
0,32	31,97469	31,97212	0,00803
0,34	30,76099	30,75879	0,00715
0,36	29,61668	29,61483	0,00624
0,38	28,53425	28,53272	0,00536
0,40	27,50736	27,50613	0,00447
0,42	26,53059	26,52963	0,00361
0,44	25,59926	25,59856	0,00273
0,46	24,70933	24,70888	0,00895
0,48	23,85729	23,85707	0,00803
0,50	23,04003	23,04003	0,00001

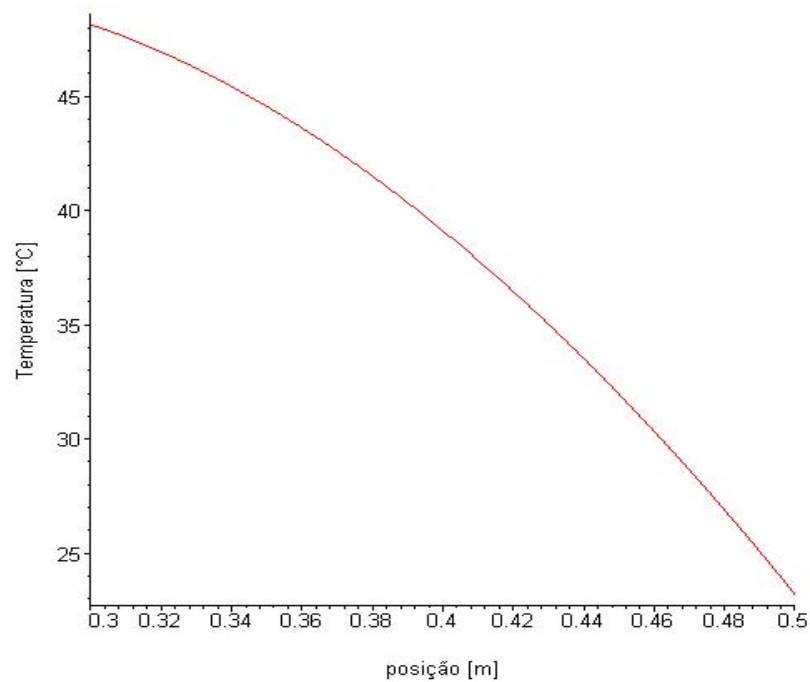


Figura 5 - Distribuição de temperatura – Caso 2 – regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$.

Para as mesmas condições da Figura 5, a Tabela 6 mostra a distribuição de temperatura para resolução numérica e os erros relativos relacionados à resolução analítica, onde se verifica a concordância entre as resoluções analítica e numérica, onde o erro relativo ao longo do cilindro permaneceu abaixo de 1×10^{-2} .

Tabela 6 – Distribuições de temperatura e erros relativos ao Caso 2 no regime permanente para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 1.000 \text{ W/m}^3$.

Posição [m]	Temperatura [°C] resolução analítica	Temperatura [°C] resolução numérica	Erro relativo [%]
0,30	48,14986	48,15057	0,00147
0,32	46,95020	46,95080	0,00127
0,34	45,43529	45,43580	0,00112
0,36	43,61832	43,61875	0,00098
0,38	41,51032	41,51068	0,00086
0,40	39,12065	39,12094	0,00074
0,42	36,45728	36,45750	0,00060
0,44	33,52706	33,52722	0,00047
0,46	30,33594	30,33604	0,00033
0,48	26,88910	26,88916	0,00022
0,50	23,19111	23,19111	0,00001

6.1.3 Resolução analítica – Caso 3

Todas as distribuições de temperatura simuladas para resolução analítica do Caso 3 utilizaram um mesmo conjunto de valores para as propriedades envolvidas no problema que são mostradas na Tabela 7.

Para a simulação no regime permanente do problema referenciado por Caso 3 foram realizadas simulações variando-se os valores dos parâmetros h_1 e h_2 , porém a solução só é satisfatória para uma determinada faixa de valores em função da presença da raiz quadrada que envolve a solução apresentada na equação (91). A Figura 6 mostra as simulações realizadas.

Tabela 7- Valores das propriedades usadas nas soluções do Caso 3.

Propriedade	Valor	Unidade
Condutividade térmica na temperatura de referência	1	W/m °C
Temperatura de referência	100	°C
Temperatura do fluido interno	100	°C
Temperatura do fluido externo	23	°C
Coeficiente de expansão térmica	1	°C ⁻¹
Raio interno	0,3	m
Raio externo	0,5	m

Pode ser observado na Figura 6 o comportamento esperado da intensificação do coeficiente h_2 promovendo uma diminuição na distribuição de temperatura.

6.2 RESULTADOS PARA O REGIME TRANSIENTE

Entre os resultados apresentados para o regime transiente estão a definição do perfil inicial de temperatura em função do número de autovalores da solução e as distribuições de temperatura para soluções analíticas e numéricas dos casos 1 e 2.

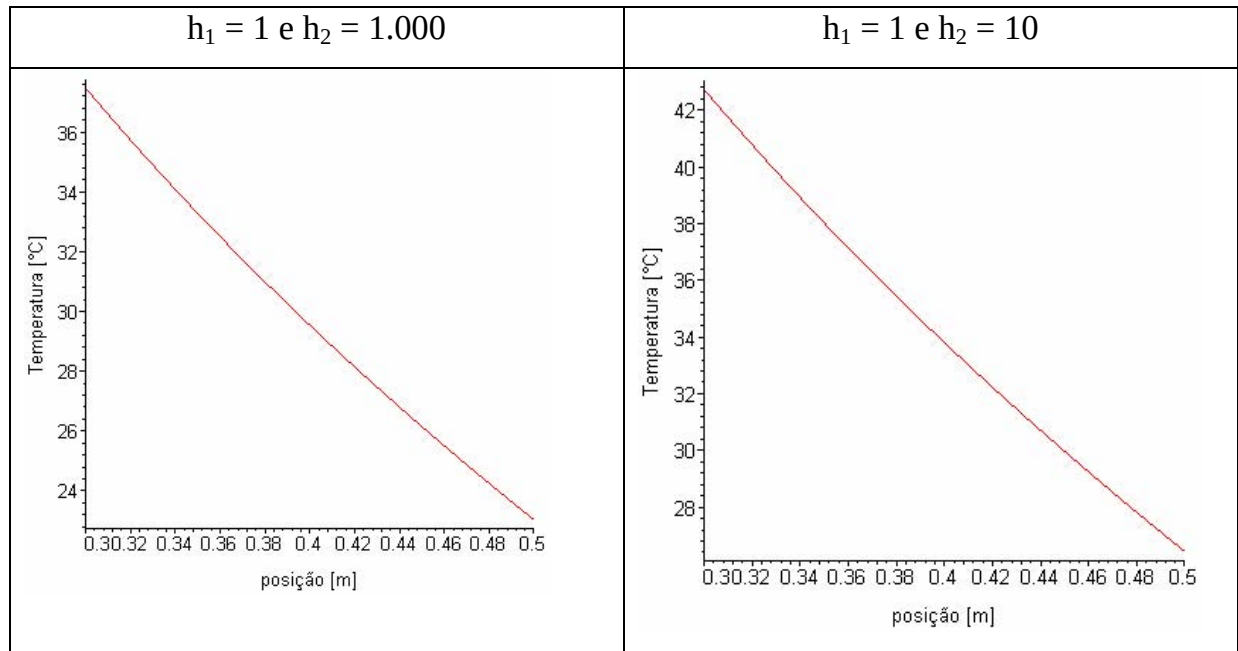


Figura 6 - Distribuições de temperatura – resolução analítica - Caso 3.

6.2.1 Definição do perfil inicial de temperatura – Caso 1

Para a definição do perfil inicial de temperaturas, foram analisados: o perfil inicial constante, o perfil inicial linear e o perfil inicial parabólico. As Figuras 7, 8 e 9 mostram as distribuições de temperatura em tempos igual a $0,01$ s onde as perturbações provenientes das funções de Bessel podem ser melhor observadas para os primeiros autovalores com os perfis iniciais constante, linear e parabólico, sendo usados nesta demonstração valores para o Caso 1 com $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$. A comparação entre as Figuras 7, 8 e 9 juntamente com os valores apresentados pela Tabela 8 conduzem a escolha do perfil parabólico utilizado nas soluções apresentadas.

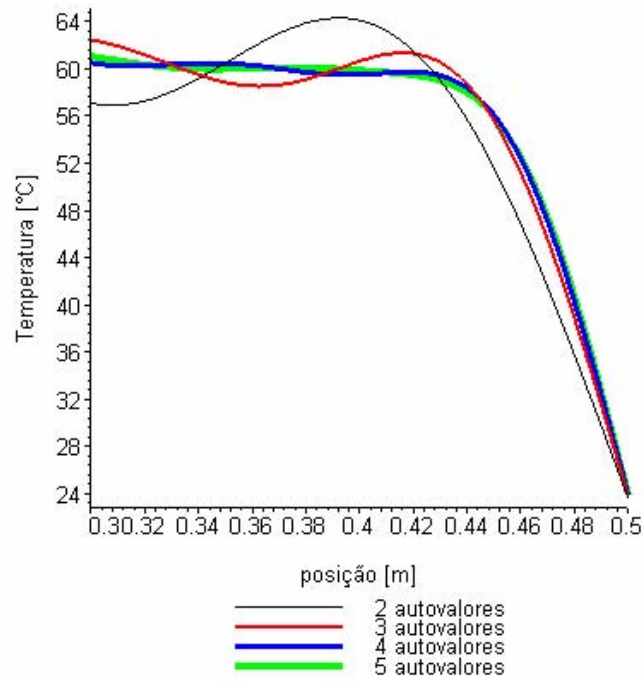


Figura 7 - Distribuições de temperatura com variação no número de autovalores e perfil inicial constante para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$.

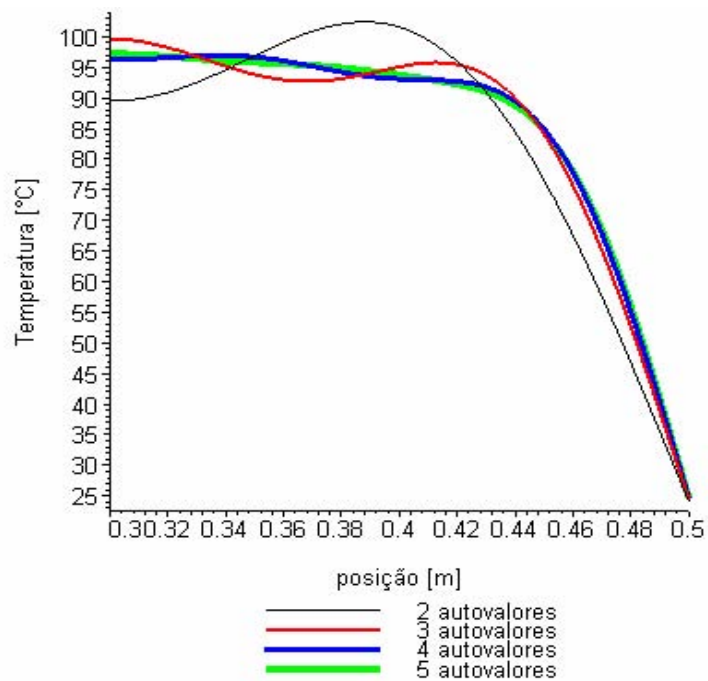


Figura 8 - Distribuições de temperatura com variação de número de autovalores e perfil inicial linear para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$.

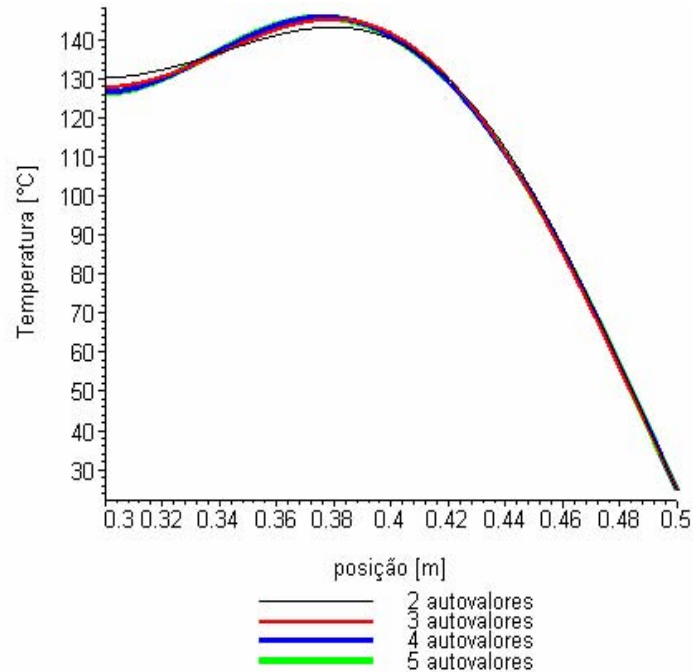


Figura 9 - Distribuições de temperatura com variação de número de autovalores e perfil inicial parabólico para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$.

A Tabela 8 mostra os maiores erros relativos encontrados ao longo do cilindro vazado entre as simulações para os perfis constante, linear e parabólico em relação ao número de autovalores usados para o Caso 1. Verifica-se o lento decréscimo do erro para os perfis constante e linear em relação ao perfil parabólico.

O perfil parabólico foi o escolhido por apresentar um erro relativo menor em função do número de autovalores em relação aos demais perfis simulados, além de não comprometer o tempo de processamento.

Serão apresentadas nos itens a seguir as distribuições de temperatura provenientes das simulações realizadas para os casos 1 e 2. Para cada caso serão apresentadas as considerações da geometria do cilindro vazado, sendo H_1 e H_2 os parâmetros variantes de cada simulação. Será apresentado também o tempo computacional de cada simulação.

Tabela 8 - Valores dos erros relativos em função dos autovalores e perfil inicial para $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 0,01 \text{ s}$.

Nº de autovalores	Perfil inicial constante – maior erro [%] em $a \leq r \leq b$	Perfil inicial linear - maior erro [%] em $a \leq r \leq b$	Perfil inicial parabólico – maior erro [%] em $a \leq r \leq b$
2 - 3	21,75816	25,89825	4,80856
3 - 4	14,39631	17,65557	7,10870
4 - 5	11,69399	13,44491	2,9545
5 - 6	8,75971	9,82881	1,78348
6 - 7	7,97603	9,06031	1,42076
7 - 8	6,49517	7,13449	0,87255
8 - 9	6,03806	6,81707	0,81035
9 - 10	5,18407	5,75364	0,49532
10 - 11	4,84633	5,45142	0,58189
11 - 12	4,25202	4,68424	0,30731
12 - 13	4,03778	4,53072	0,48188
13 - 14	3,61334	3,98389	0,25565
14 - 15	3,45209	3,86669	0,46058
15 - 16	3,13396	3,45743	0,16809
16 - 17	3,00751	3,36426	0,28542
17 - 18	2,76031	3,04663	0,09671
18 - 19	2,65798	2,97021	0,23808
19 - 20	2,46047	2,71669	0,06896

6.2.2 Resultados do caso 1

Todas as distribuições de temperatura simuladas para resolução analítica e numérica do Caso 1 utilizaram um mesmo conjunto de valores para as propriedades envolvidas no problema que são mostradas na Tabela 9.

Tabela 9 - Valores das propriedades usadas nas soluções do Caso 1.

Propriedade	Valor	Unidade
Difusividade térmica	0,05	m ² /s
Temperatura do fluido externo	23	°C
Temperatura do fluido interno	100	°C
Condutividade térmica	1	W/m °C
Raio interno	0,3	m
Raio externo	0,5	m

A seguir serão apresentadas as simulações da resolução analítica e numérica do Caso 1.

6.2.2.1 Resolução analítica - Caso 1

Para o Caso 1 foram realizadas simulações para diversos valores dos parâmetros H_1 e H_2 . As Figuras 10 e 11 mostram as distribuições de temperatura para diversos valores simulados no tempo de 10 s.

Na Figura 10 é observada a influência do parâmetro H_2 sobre o perfil de temperatura, onde tende a diminuir o gradiente de temperatura entre a superfície externa e o fluido externo. Na Figura 11 com o aumento do parâmetro interno H_1 , a tendência é oposta, diminuindo o gradiente de temperatura entre a superfície interna e o fluido interno.

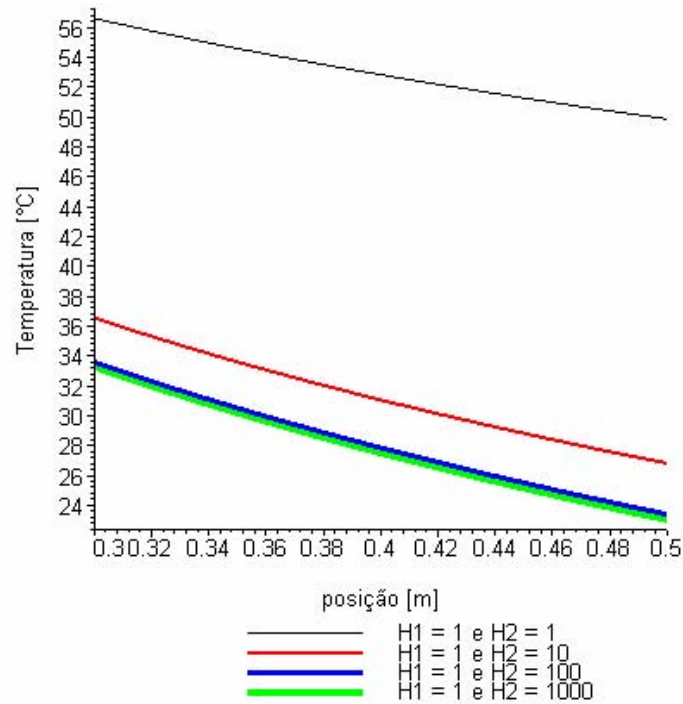


Figura 10 - Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_2 .

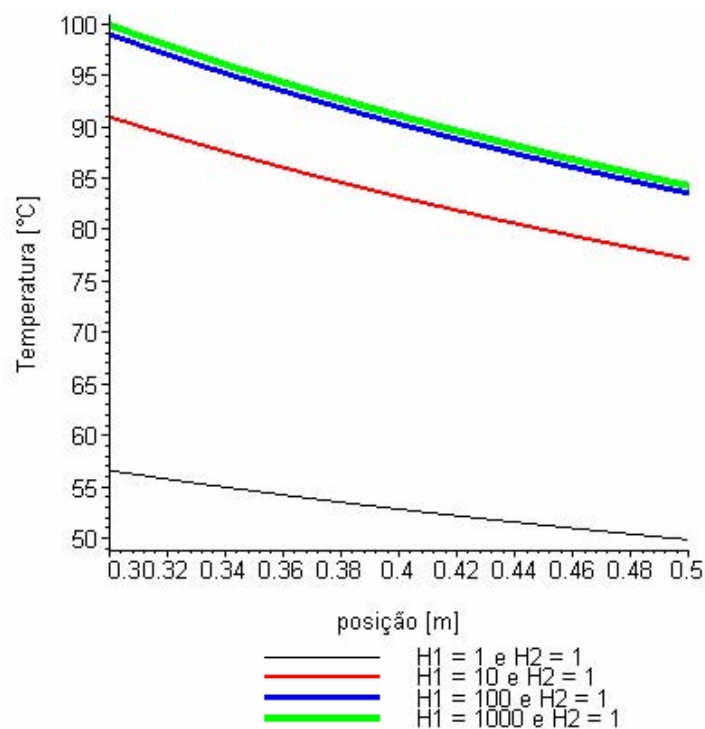


Figura 11 - Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_1 .

As simulações apresentadas nas Figuras 10 e 11 utilizaram um perfil inicial de temperatura parabólico e um número de 20 autovalores na solução.

O tempo necessário para atingir o regime permanente na posição $r = 0,4 \text{ m}$ da geometria é mostrado na Figura 12, sendo as distribuições de temperatura avaliadas para os três perfis iniciais.

Na Figura 12 a partir de aproximadamente 2 s o regime permanente é atingido, porém a Tabela 10 mostra que os tempos exatos, onde não ocorrem alterações nas casas decimais. A Tabela 10 também mostra os valores dos tempos computacionais para os três perfis em análise utilizando 20 autovalores e $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$:

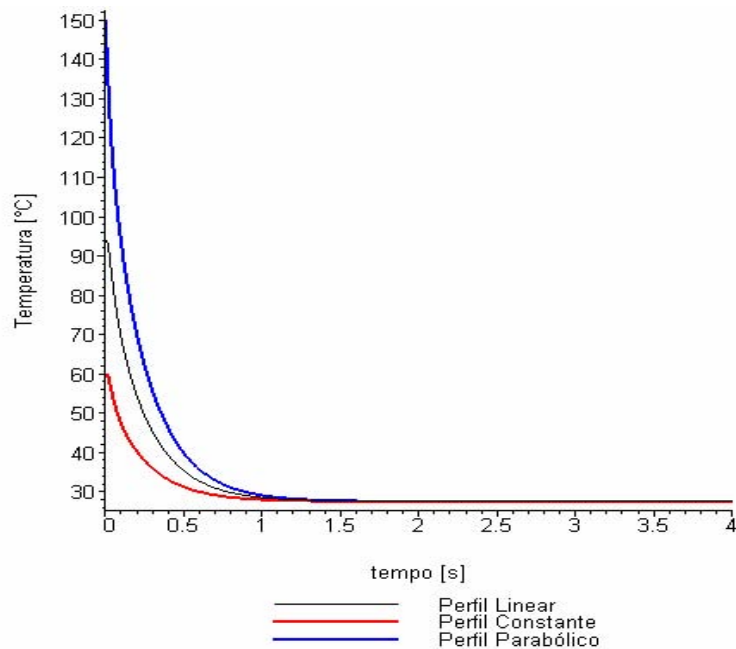


Figura 12 - Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico utilizando 20 autovalores na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$.

Deve ser considerado que a situação analisada exigia um número maior de autovalores na solução para os perfis constante e linear como pode ser observado na Tabela 8 que mostra os valores dos erros relativos para os perfis em análise. Porém quando o tempo para se atingir o regime permanente for muito longo apenas o primeiro autovalor é relevante na solução (BRAGA FILHO, 2004).

Tabela 10 – Valores obtidos de tempo com perfis linear, constante e parabólico com $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$.

Perfil Inicial	Representação	Tempo para atingir o regime permanente [s]	Tempo de execução [s]
Linear	$-40r + 110$	5,8	177,9
Constante	60	5,6	160,7
Parabólico	$-8850r^2 + 6695r - 1112$	5,8	162,7

A Figura 13 mostra as distribuições de temperatura para alguns tempos apresentando a tendência de se atingir o regime permanente.

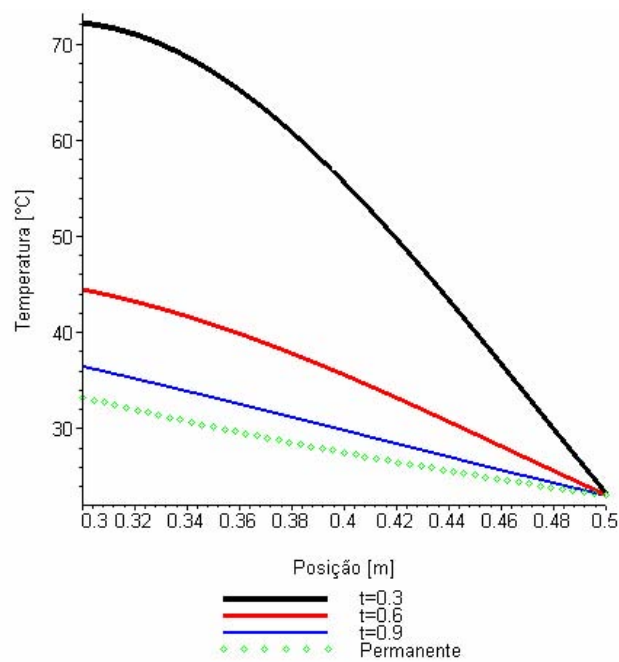


Figura 13 - Distribuições de temperatura para alguns valores de tempo com perfil inicial parabólico utilizando 20 autovalores com $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$.

6.2.2.2 Resolução numérica – Caso 1– esquema Crank-Nicolson

A Tabela 11 mostra alguns dos valores obtidos da distribuição de temperatura e os erros relativos provenientes da simulação numérica pelo esquema Crank-Nicolson. Para a simulação foi utilizada uma malha com 80 pontos nodais e um intervalo de tempo igual a $0,001s$ e os seguintes valores: $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $t = 1 \text{ s}$, resultantes de 1.000 iterações:

Os erros apresentados mostram uma boa concordância entre as resoluções analítica e numérica, porém o numero de iterações foi razoavelmente pequeno. O perfil inicial não interfere na resolução, portanto foi utilizada a função em tempo zero proveniente da resolução com perfil parabólico.

Tabela 11 - Valores das distribuições de temperatura obtidos pela resolução analítica e numérica e erros relativos no $t = 1 \text{ s}$.

Posição [m]	Temperatura [°C] resolução analítica	Temperatura [°C] resolução numérica	Erro relativo [%]
0,30	35,40027	35,39945	0,00229
0,32	34,11473	34,11381	0,00268
0,34	32,83844	32,83756	0,00265
0,36	31,56830	31,56750	0,00253
0,38	30,30399	30,30327	0,00237
0,40	29,04745	29,04683	0,00211
0,42	27,80249	27,80198	0,00181
0,44	26,57433	26,57394	0,00144
0,46	25,36920	25,36895	0,00098
0,48	24,19400	24,19387	0,00052
0,50	23,05586	23,05586	0,00001

6.2.2.3 Distribuição de temperatura – Caso 1 – comparação entre o esquema Crank-Nicolson e o esquema explícito

Foram simuladas para as mesmas condições do Caso 1 no tempo de 1 s com $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ e $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ no esquema explícito. A Tabela 12 mostra os valores das temperaturas analíticas, temperaturas provenientes da simulação numérica explícita e o erro relativo encontrado, onde foram necessárias 100.000 iterações utilizando um intervalo de tempo de 0,00001 s.

Tabela 12 - Valores dos erros relativos pelo esquema explícito – Caso 1 no $t = 1 \text{ s}$.

Posição [m]	Temperatura [°C] esquema explícito	Temperatura [°C] resolução analítica	Erro relativo [%]
0,3	35,40044	35,40027	0,00048
0,32	34,11492	34,11473	0,00056
0,34	32,83863	32,83844	0,00058
0,36	31,56849	31,56830	0,00060
0,38	30,30417	30,30399	0,00059
0,4	29,04762	29,04745	0,00058
0,42	27,80263	27,80249	0,00050
0,44	26,57443	26,57433	0,00038
0,46	25,36928	25,36920	0,00031
0,48	24,19404	24,19400	0,00016
0,50	23,05586	23,05586	0,00001

Da comparação entre as Tabelas 11 e 12 verifica-se que os erros obtidos a partir da simulação pelo esquema de Crank-Nicolson são superiores aos obtidos pelo esquema explícito, porém possui a vantagem de gastar menos tempo computacional e um número menor de iterações.

6.2.3 Resultados do Caso 2

Todas as distribuições de temperatura simuladas para resolução analítica e numérica do Caso 2 utilizaram um mesmo conjunto de valores para as propriedades envolvidas no problema que são mostradas na Tabela 9, sendo que os parâmetros variantes são H_1 , H_2 e o valor do termo de geração interna de calor $\dot{q}$.

A seguir serão apresentadas as simulações da resolução analítica e numérica do Caso 2.

6.2.3.1– Resolução analítica - Caso 2

A Figura 14 mostra o gráfico com a distribuição de temperatura proveniente de simulações para diversos valores do parâmetro H_2 e para o termo de geração interna de calor $\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3$ no tempo de 10 s. O valor de $\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3$ é relativamente pequeno e conduziu a uma solução muito similar a Figura 10.

A Figura 15 mostra o gráfico com a distribuição de temperatura proveniente de simulações para diversos valores do parâmetro H_2 e para o termo de geração interna de calor $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$ no tempo de 10 s. Em relação a Figura 14 verifica-se que $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$ já afeta sensivelmente o perfil de temperatura.

A influência do coeficiente de convecção externo em retirar calor do cilindro é o comportamento esperado e a validade da solução encontrada para o Caso 2 em regime transiente. Incropera e Witt (1985), apresenta um perfil de temperatura para um cilindro maciço sujeito à condição de contorno convectiva semelhante ao da Figura 15.

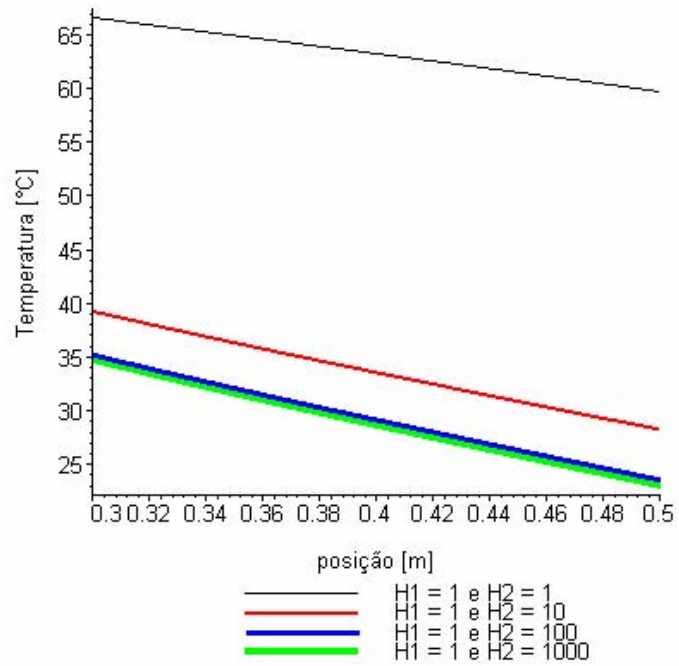


Figura 14 – Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_2 , $t = 10\text{ s}$ e $\dot{q} = 100\text{ W/m}^3$.

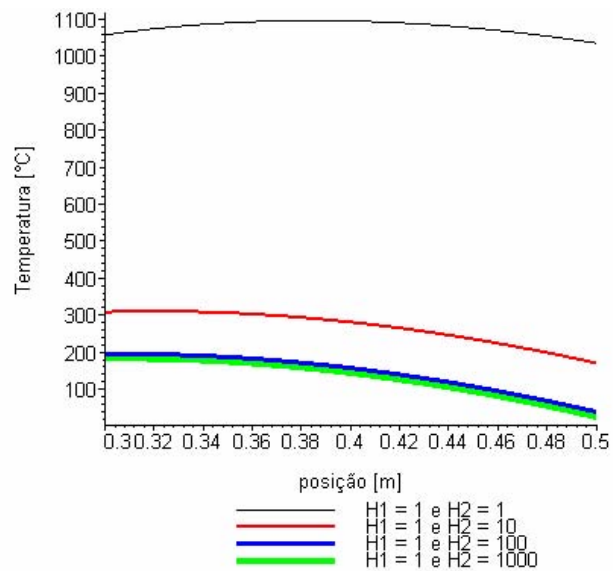


Figura 15 - Distribuições de temperatura com variações do parâmetro H_2 , $t = 10\text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000\text{ W/m}^3$.

As Figuras 16, 17 e 18 mostram a influência do número de autovalores na solução para o Caso 2. Com os parâmetros $H_1 = 100 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$, o tempo para se atingir o regime permanente é curto, ou seja, aproximadamente 2 s e a partir de 5 autovalores, não se apresentam mais interferências em relação ao número de autovalores nas simulações.

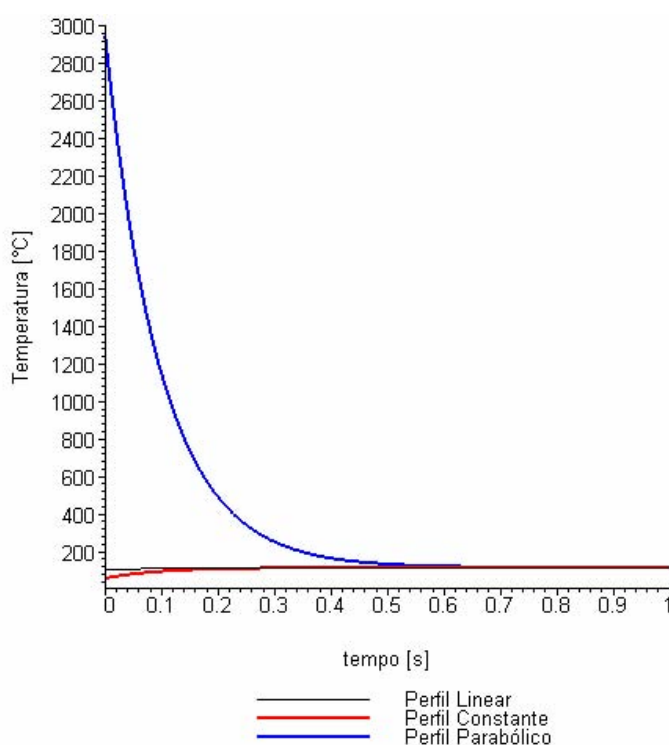


Figura 16 - Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico e 2 autovalores na solução usando parâmetros $H_1 = 100 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$.

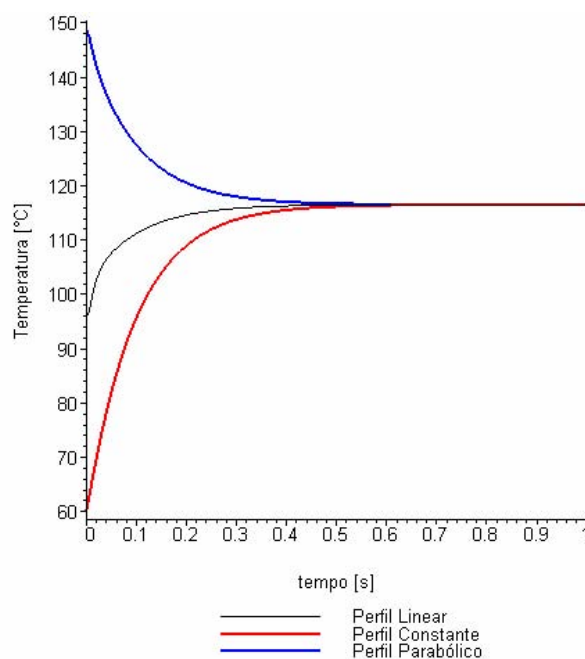


Figura 17 - Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico e 5 autovalores na solução usando parâmetros $H_1 = 100 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$.

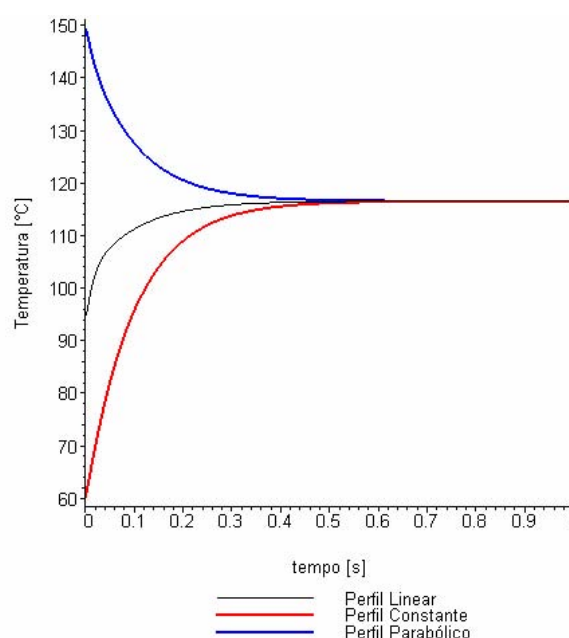


Figura 18 - Distribuições de temperatura em função do tempo com perfil inicial linear, constante e parabólico e 10 autovalores na solução com os parâmetros $H_1 = 100 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ na posição $r = 0,4 \text{ m}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$.

A Figura 19 mostra as distribuições de temperatura para alguns valores de tempos com $\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3$ apresentando a tendência de se atingir o regime permanente.

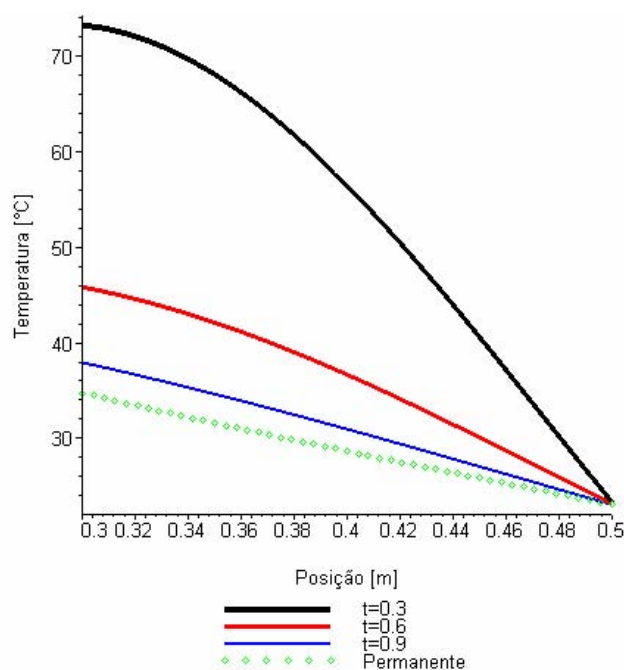


Figura 19 - Distribuições de temperatura com alguns valores de tempo com perfil inicial parabólico e 20 autovalores na solução usando parâmetros $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$ e $\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3$.

6.2.3.2 Resolução numérica - Caso 2

A Tabela 13 mostra os valores obtidos da distribuição de temperatura e o erro relativo provenientes da simulação numérica pelo esquema Crank-Nicolson para os seguintes valores: $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$, $t = 1 \text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$. Observa-se a boa concordância entre as duas soluções dentro do erro permitido de 1×10^{-2} .

Tabela 13 - Valores das distribuições de temperatura obtidos pela resolução analítica e numérica e erros relativos no $t = 1\text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000\text{ W/m}^3$ – Caso 2.

Posição [m]	Temperatura [°C] resolução analítica	Temperatura [°C] resolução numérica	Erro relativo [%]
0,3	181,76927	181,77382	0,00250
0,32	181,40015	181,40398	0,00211
0,34	177,18401	177,18729	0,00187
0,36	169,33246	169,33523	0,00163
0,38	158,02236	158,02467	0,00145
0,40	143,40304	143,40490	0,00130
0,42	125,60159	125,60304	0,00115
0,44	104,72708	104,72814	0,00101
0,46	80,873743	80,874436	0,00085
0,48	54,123561	54,123906	0,00063
0,50	24,548304	24,548946	0,00261

A Figura 20 mostra o gráfico com o comparativo das distribuições de temperaturas com resoluções analítica e numérica para $H_1 = 1\text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000\text{ m}^{-1}$, $t = 1\text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000\text{ W/m}^3$. Observa-se a perfeita concordância entre os casos numérico e analítico para a condição analisada.

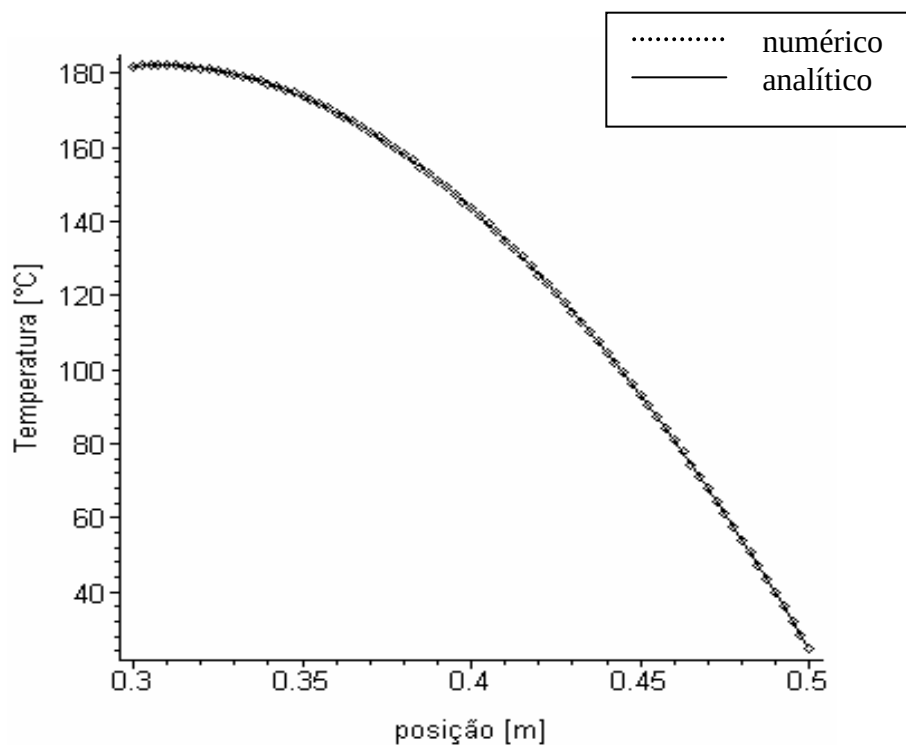


Figura 20 - Distribuições de temperatura – analítico-numérico – Caso 2 - $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$, $t = 1 \text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$.

A Tabela 14 mostra a simulação $H_1 = 1 \text{ m}^{-1}$, $H_2 = 1.000 \text{ m}^{-1}$, $t = 2 \text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$, com o comparativo das distribuições de temperaturas com resoluções analítica e numérica e os erros relativos. Novamente observa-se a boa concordância entre os valores obtidos pelas resoluções analítica e numérica.

Tabela 14 - Valores das distribuições de temperatura obtidos pela resolução analítica e numérica e erros relativos no $t = 2 \text{ s}$ e $\dot{q} = 10.000 \text{ W/m}^3$ – Caso 2.

Posição [m]	Temperatura [°C] resolução analítica	Temperatura [°C] resolução numérica	Erro relativo [%]
0,3	182,09271	182,09715	0,00243
0,32	181,72457	181,72838	0,00209
0,34	177,49895	177,50220	0,00183
0,36	169,62831	169,63105	0,00161
0,38	158,29065	158,29292	0,00143
0,4	143,63651	143,63834	0,00127
0,42	125,79441	125,79583	0,00112
0,44	104,87489	104,87593	0,00098
0,46	80,973776	80,974451	0,00083
0,48	54,174605	54,174937	0,00061
0,50	24,550702	24,549051	0,00672

6.3 TEMPOS COMPUTACIONAIS

Os tempos de cada simulação realizada foram calculados na execução de um microcomputador AMD Sempron (tm) 2300+, 1,58 GHz e 256 MB de RAM para as resoluções analíticas e resoluções numéricas.

A Tabela 15 mostra os tempos de cada simulação utilizados nas resoluções analíticas. Para o regime transiente a função é calculada em uma única etapa no tempo dado, não dependendo do regime permanente, como é o caso da resolução numérica. Os valores de tempo considerados na Tabela 15 incluem os cálculos com 20 autovalores na solução e a realização de apenas um gráfico, pois o comando *plot* do software Maple é um dos mais lentos na execução da planilha. Observou-se que o comportamento não linear do Caso 3 provoca um aumento elevado de 700% no tempo computacional em relação aos outros casos avaliados no regime permanente.

Tabela 15 - Tempos de processamento utilizados nas simulações analíticas.

Caso	Tempo [s]	
	Regime Permanente	Regime Transiente
1	0,2	149,2
2	0,2	149,2
3	1,6	--

A Tabela 16 mostra os tempos de cada simulação utilizados nas resoluções numéricas.

Tabela 16 - Tempos de processamento utilizados nas simulações numéricas.

Caso	Tempo [s]	Esquema	Tempo [s] - Regime Permanente	Tempo [s] - Regime Transiente
1	0,9	explícito	---	5217,1
1	0,9	Crank-Nicolson	---	43,5
1	--	Diferenças centrais	0,2	---
2	--	Diferenças centrais	0,2	---
2	4	Crank-Nicolson	---	150,2
1(*)	210	Crank-Nicolson	---	12640,4

Os valores de tempo considerados na Tabela 16 incluem cálculos com malhas de 50 pontos nodais para solução permanente e 80 pontos nodais para a solução transiente. Na Tabela 16 o caso descrito como 1(*) foi entre as simulações realizadas o de maior tempo computacional, pois os parâmetros H_1 e H_2 eram igual a $0,01 \text{ m}^{-1}$ e o necessitou-se de um tempo maior para atingir o regime permanente.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dando continuidade aos trabalhos de Aziz (2006) todas as soluções analíticas e numéricas propostas em relação à geometria do cilindro vazado com condições de contorno convectivas em regime permanente e transiente pelo software Maple foram concluídas.

Para os Casos 1 e 2 a resolução analítica no regime permanente foi obtida de forma direta, dispensando totalmente os algebrismos envolvidos na resolução manual. O problema transiente para estes casos permitiu um estudo satisfatório do perfil inicial e do número de autovalores envolvidos na solução, onde o método de resolução proposto foi plenamente implementado. Os resultados obtidos foram plenamente satisfatórios, coerentes com a situação física de cada problema apresentado.

Para as resoluções numéricas, a resolução pelo software Maple apresentou bons tempos computacionais não dificultando a implementação do método numérico das diferenças finitas em seus vários esquemas, além de exigir pouco conhecimento de programação de computadores. Os resultados para ambos os casos foram amplamente satisfatórios e compatíveis com as resoluções numéricas.

Apesar dos CAS de modo geral resolverem o algebrismo de problemas que envolvem equações diferenciais observou-se na resolução do Caso 3 que em determinadas situações o problema é resolvido praticamente passo a passo, pois o software não é habilitado na tomada de decisões, sendo indispensável o conhecimento teórico e o acompanhamento da solução.

8 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se o emprego desta metodologia em problemas da área de Transferência de Calor utilizando geometrias mais complexas, assim como o emprego de outros métodos analíticos e numéricos de solução.

Sugere-se também o desenvolvimento de uma interface para a entrada de dados e visualização de resultados.

Fica também proposta a implementação da resolução numérica e da resolução em regime transiente do problema referenciado como Caso 3, assim como a implementação de outros modelos de condutividade térmica variável.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, F. E. Solução de equações diferenciais acopladas pela técnica de transformada integral e computação simbólica. **Dissertação de mestrado**. Fortaleza, 1996.

ARAUZO, I., CAMPO, A., CORTÉS, C. Quick estimate of the heat transfer characteristics of annular fins of hyperbolic profile with the power series method: Applied Thermal Engineering. **Elsevier Science**, v. 25. p. 623-634, 2004.

ARPACI, V. S. **Conduction heat transfer**, United States of America. Addison-Wesley, 1966.

AZIZ, A. Heat conduction with Maple. **Edwards**. Washington. 2006.

BARTON, S. Use of program Maple for solving Fourier's equation: Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications. **Elsevier Science**, v. 30 n° 8. p. 4859-4862, 1997.

BRAGA FILHO, W. **Transmissão de calor**, Pioneira Thompson Learning. São Paulo, 2004.

BOYCE, W. E., PRIMA, R. C. D. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**, 5. ed. Rio de Janeiro. LTC, 1994.

CAMPBELL, S., MACKI, J. W. Maple, Control of the temperature at one end of a rod: Pergamon. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier Science, v. 32, p. 825-842, 2000.

CAMPO, A., RODRÍGUEZ, F. Approximate analytic temperature solution for uniform annular fins by adapting the power series method: Int. Comm. Heat Mass Transfer. Pergamon. **Elsevier Science**, v. 25 n° 6. p. 809-2252, 1998.

CARLAW, H. S., JAEGER, J. C. **Conduction of heat in solids**, 2. ed. Oxford. Oxford University Press, 1976.

CARMO FILHO, G. P., RIBEIRO, J. W., GONÇALVES, D. H. Programação simbólica e teoria de Ausubel no aprendizado de métodos numéricos. **World Congress on Engineering and Technology Education**, , p. 1590-1594, mar. 2004.

CHONACKY, N., WINCH, D. Maple, Mathematica, and Matlab: The 3M's without the tape. **Computing in Science and Engineering**, Copublished by the IEEE, p. 8-16, jan. 2005 (a).

CHONACKY, N., WINCH, D. The 3M's for instruction, part 2: Maple, Mathematica, and Matlab. **Computing in Science and Engineering**, Copublished by the IEEE, p. 14-23, jul. 2005 (b).

COHEN, J. S. Computer algebra and symbolic computation. Elementary algorithms **Library of Congress Cataloging-in-Publications Data**. Canadá. 2002.

CUNHA, F. G. M. **Abordagem analítico-numérica da transferência de calor e massa sob efeito da pressão**, Dissertação de mestrado. Fortaleza, 2002.

FORTUNA, A. A. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. Editora da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2000.

FRANKEL, J. I. Residual-minimization least-squares method for inverse heat conduction, *Computers Math. Applic.* Pergamon. **Elsevier Science**, v. 32 n° 4. p. 117-130, 1996.

HABERMAN, R. **Elementary applied partial differential equations**, 3. ed. Upper Saddle River. Prentice Hall, 1998.

HEARN, C. A. **Computer Algebra**, Paris. The Rand Corporation. 1997.

INCROPERA, F. P., WITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e massa**, 3. ed. Rio de Janeiro. LTC, 1985.

JAGER, B., ASCH, B. V. Symbolic solutions for a class of partial differential equations: J. Symbolic Computation. **Academic Press Limited**, nº 22. p. 459-468, 1996.

LOPEZ, R.J. A new apprenticeship in applied mathematics: **Frontiers in Education Conference**, Copublished by the IEEE, Session 8D4. p. 559-564, 1993.

LÜ, X., TERVOLA, P., VILJANEN, M. An efficient analytical solution to transient heat conduction in a one-dimensional hollow composite cylinder: **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 38. p. 10145-10155, 2005.

LÜ, X., TERVOLA, P., VILJANEN, M. Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder: Int. Journal of Heat and Mass Transfer. **Elsevier Science**, v. 49. p. 341-348, 2006 (a).

LÜ, X., LU, T., VILJANEN, M. A new analytical method to simulate heat transfer process in buildings: Applied Thermal Engineering. **Elsevier Science**, v. 26. p. 1901-1909, 2006 (b).

MALAGUTTI, P. L. A., NASCIMENTO, J. C. Equações diferenciais aplicadas – resoluções numéricas no ambiente Maple V: **Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Cobenge. p. 64-69, 2001.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**, Rio de Janeiro. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 2. ed. 2004.

MARIANI, V. C. **Maple: fundamentos e aplicações**. Ed. LTC, 2005.

MIKHAILOV, M. D., COTTA, R. M. Temperature oscillations in a slug tube flow: Int. Comm. Heat Mass Transfer. **Pergamon**, v. 24. p. 575-578, 1997.

MUNIZ, A. R., MARZAC, L. D. F. Uso do software Maple no ensino de Transferência de calor: **Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Cobenge. p. 470-478, 2001.

ÖZIŞIK, M. N. **Finite Difference methods in heat transfer**, CRC Press, 1984.

ÖZIŞIK, M. N. **Heat conduction**, John Wiley & Sons Inc., 1980.

PORTELA, A., CHARAFI, A. **Finite elements using Maple: a symbolic programming approach**, Springer, Berlin. 2002.

SANTOS, G. H., MENDES, N. Analysis of numerical methods and simulation time step effects on the prediction of building thermal performance: Applied Thermal Engineering. **Elsevier Science**, v. 24. p. 1129-1142, 2003.

SPERANDIO, D. MENDES, J. T., SILVA, L. H. M. **Cálculo numérico – características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**, São Paulo. Prentice Hall, 2003.

SUBRAMANIAN, V. R., WHITE, R. E. Symbolic solution for boundary value problem using Maple: Elsevier Science. **Computers and Chemical Engineering**, v. 24, p. 2504-2416, 2000.

TAYLOR, R. Engineering Computing with Maple: solution of PDEs via the method of lines: **CACHE News**, nº 48. p. 5-8, 1999.

ZILL, D. G., CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**, 3. ed. São Paulo. v. 2. Pearson Education do Brasil, 2001.

WESTER, M. J. **Computer Algebra Systems: A Practical Guide**, Chichester. John Wiley & Sons, 1999.

WINKLER, F. **Computer Algebra – Problems and Developments**, John Wiley & Sons, 1995.

YANG, C. Y. A sequential method to estimate the strength of the heat source based on symbolic computation: Int. J. Heat Mass Transfer. **Elsevier Science**, v. 41 n° 14. p. 2245-2252, 1998.

APÊNDICE A - Resolução Analítica – Caso 1

No capítulo 3 foi descrita a metodologia realizada para a solução do problema chamado de Caso 1 descrito pela equação (4) da condução de calor. Conforme descrito, a solução é dependente das resoluções do problema em regime permanente e em regime transiente.

Partindo-se da equação (16) para a resolução no regime permanente $F(r)$ toma a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0 \quad (A1)$$

E as condições de contorno são descritas pelas equações (18) e (21). A integração da equação (A1) fornece:

$$r \frac{\partial F}{\partial r} = C_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \quad (A2)$$

A solução fica:

$$F(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (A3)$$

Substituindo a equação (A3) para a condição de contorno (18) em $r = a$:

$$-k \frac{C_1}{a} + h_1 C_1 \ln(a) + h_1 C_2 = h_1 T_{\infty 1} \quad (A4)$$

Substituindo a equação (A3) para a condição de contorno (21) em $r = b$:

$$k \frac{C_1}{b} + h_2 C_1 \ln(b) + h_2 C_2 = h_2 T_{\infty 2} \quad (A5)$$

Rearranjando a equação (A4):

$$-k \frac{C_1}{a} + h_1 (C_1 \ln(a) + C_2 - T_{\infty_1}) = 0 \quad (\text{A6})$$

Então:

$$-\frac{C_1}{a} + \frac{h_1}{k} (C_1 \ln(a) + C_2 - T_{\infty_1}) = 0 \quad (\text{A7})$$

Usando a relação expressa na equação (8):

$$-\frac{C_1}{aH_1} + C_1 \ln(a) + C_2 - T_{\infty_1} = 0 \quad (\text{A8})$$

Para a segunda condição de contorno, a equação (A5) é rearranjada na forma:

$$k \frac{C_1}{b} + h_2 (C_1 \ln(b) + C_2 - T_{\infty_2}) = 0 \quad (\text{A9})$$

Portanto:

$$\frac{C_1}{b} + \frac{h_2}{k} (C_1 \ln(b) + C_2 - T_{\infty_2}) = 0 \quad (\text{A10})$$

Usando a relação expressa na equação (8) para a segunda condição de contorno:

$$\frac{C_1}{bH_2} + C_1 \ln(b) + C_2 - T_{\infty_2} = 0 \quad (\text{A11})$$

Igualando a equação (A8) com a equação (A11):

$$\frac{C_1}{aH_1} + \frac{C_1}{bH_2} - C_1 \ln(a) + C_1 \ln(b) + T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = 0 \quad (\text{A12})$$

Rearranjando a equação (A12):

$$C_1 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{bH_2} \right) + C_1 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = 0 \quad (\text{A13})$$

Portanto:

$$C_1 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{bH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right) = T_{\infty 2} - T_{\infty 1} \quad (\text{A14})$$

Isolando a constante C_1 :

$$C_1 = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{\left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \quad (\text{A15})$$

Substituindo a equação (A15) na equação (A11):

$$\frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1})}{bH_2 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} + \frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) \ln(b)}{\left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} + C_2 - T_{\infty 2} = 0 \quad (\text{A16})$$

Isolando a constante C_2 da equação (A16):

$$C_2 = T_{\infty 2} - \left(\frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1})(1 + bH_2 \ln(b))}{bH_2 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right) \quad (\text{A17})$$

Substituindo a equação (A17) e a equação (A15) na equação (A3):

$$F(r) = \left(\frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) \ln(r)}{\left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right) + T_{\infty 2} - \left(\frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1})(1 + bH_2 \ln(b))}{bH_2 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right) \quad (A18)$$

$$F(r) = T_{\infty 2} + \left(\frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1})(bH_2 \ln(r) - 1 - bH_2 \ln(b))}{bH_2 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right) \quad (A19)$$

$$F(r) - T_{\infty 2} = \left(\frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})(-bH_2 \ln(r) + bH_2 \ln(b) + 1)}{bH_2 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right) \quad (A20)$$

$$\frac{F(r) - T_{\infty 2}}{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}} = \left(\frac{1 + bH_2 \ln\left(\frac{b}{r}\right)}{bH_2 \left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right) \quad (A21)$$

Onde a equação (A21) representa a distribuição de temperatura em regime permanente.

Para determinar a solução no regime transiente $G(r, t)$ parte-se da equação diferencial da condução de calor na forma da equação (24) com as condições de contorno na forma das equações (19) e (22).

A condição inicial expressa pela equação (9) também sofrerá alterações na forma:

$$f(r) = f(r)' \quad \text{onde} \quad f(r)' = f(r) - F(r) \quad (A22)$$

Para a resolução da equação (24) será adotado o método da separação de variáveis admitindo-se que $G(r,t)$ possa ser representada pelo produto de duas funções na forma:

$$G(r,t) = R(r)\mathfrak{S}(t) \quad (\text{A23})$$

onde R é função somente do raio e $\mathfrak{S}$ é função somente do tempo t . Separando-se a equação (24) em duas equações diferenciais ordinárias, a solução final pode ser encontrada pela soma das soluções individuais.

Substituindo a equação (A23) na equação (24), tem-se:

$$\mathfrak{S} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha} R \frac{d\mathfrak{S}}{dt} \quad (\text{A24})$$

Rearranjando a equação (A24):

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha \mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{dt} \quad (\text{A25})$$

A separação da equação (A25) em duas equações só é possível se ambos os lados forem iguais a uma mesma constante.

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha \mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -\lambda^2 \quad (\text{A26})$$

O sinal negativo escolhido para a constante λ^2 assegura que a solução $\mathfrak{S}(t)$ decairá com o tempo.

Então a função dependente apenas do tempo da equação (A26) terá a forma:

$$\frac{1}{\alpha \mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -\lambda^2 \quad (\text{A27})$$

Rearranjando a equação (A27):

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -\lambda^2 \alpha \mathfrak{S} \quad (\text{A28})$$

Ou:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} + \lambda^2 \alpha \mathfrak{S} = 0 \quad (\text{A29})$$

E a função dependente apenas do raio na equação (A26) terá a forma:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = -\lambda^2 \quad (\text{A30})$$

Ou:

$$\frac{1}{rR} \left(\frac{dR}{dr} + r \frac{d^2 R}{dr^2} \right) = -\lambda^2 \quad (\text{A31})$$

$$\frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{d^2 R}{dr^2} = -\lambda^2 R \quad (\text{A32})$$

$$\frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{d^2 R}{dr^2} + \lambda^2 R = 0 \quad (\text{A33})$$

A equação (A33) representa um problema de autovalor, devido ao fato de ter soluções para somente certos valores do parâmetro de separação $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ o qual são chamados autovalores. As soluções das equações (A29) e (A33) são:

$$\mathfrak{I}(t) = C_1 e^{-\lambda^2 \alpha} \quad (\text{A34})$$

e

$$R(r) = C_2 J_0(\lambda, r) + C_3 Y_0(\lambda, r) \quad (\text{A35})$$

onde J_0 é uma função de Bessel de 1º tipo e ordem zero e Y_0 é uma função de Bessel de 2º tipo e ordem zero e C_1 , C_2 e C_3 são constantes.

Como:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -\lambda C_2 J_1(\lambda, r) - \lambda C_3 Y_1(\lambda, r) \quad (\text{A36})$$

e:

$$-\frac{\partial R}{\partial r} = \lambda C_2 J_1(\lambda, r) + \lambda C_3 Y_1(\lambda, r) \quad (\text{A37})$$

Substituindo a equação (A37) na condição de contorno convectiva da equação (19) com $r=a$:

$$\lambda C_2 J_1(\lambda, a) + \lambda C_3 Y_1(\lambda, a) + H_1 C_2 J_0(\lambda, a) + H_1 C_3 Y_0(\lambda, a) = 0 \quad (\text{A38})$$

Substituindo a equação (A36) na condição de contorno convectiva da equação (22) com $r=b$:

$$-\lambda C_2 J_1(\lambda, b) - \lambda C_3 Y_1(\lambda, b) + H_2 C_2 J_0(\lambda, b) + H_2 C_3 Y_0(\lambda, b) = 0 \quad (\text{A39})$$

Rearranjando a equação (A38) e a equação (A39):

$$C_2(\lambda J_1(\lambda, a) + H_1 J_0(\lambda, a)) + C_3(\lambda Y_1(\lambda, a) + H_1 Y_0(\lambda, a)) = 0 \quad (\text{A40})$$

$$C_2(-\lambda J_1(\lambda, b) + H_2 J_0(\lambda, b)) + C_3(-\lambda Y_1(\lambda, b) + H_2 Y_0(\lambda, b)) = 0 \quad (\text{A41})$$

Renomeando os termos da equação (A40) e da equação (A41):

$$U_0 = \lambda J_1(\lambda, a) + H_1 J_0(\lambda, a) \quad (\text{A42})$$

$$S_0 = -\lambda Y_1(\lambda, b) + H_2 Y_0(\lambda, b) \quad (\text{A43})$$

$$W_0 = \lambda Y_1(\lambda, a) + H_1 Y_0(\lambda, a) \quad (\text{A44})$$

$$V_0 = -\lambda J_1(\lambda, b) + H_2 J_0(\lambda, b) \quad (\text{A45})$$

Então as equações (A40) e (A41) podem ser reescritas como:

$$C_2 U_0 + C_3 W_0 = 0 \quad (\text{A46})$$

$$C_2 V_0 + C_3 S_0 = 0 \quad (\text{A47})$$

Rearranjando a equação (A46) e a equação (A47) na forma de sistema:

$$\begin{pmatrix} U_0 & W_0 \\ V_0 & S_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A48})$$

Tem-se que:

$$U_0 S_0 = V_0 W_0 \quad (\text{A49})$$

Onde a solução da equação (A49) fornecerá os autovalores, ou seja, os possíveis valores dos λ para os quais a solução existe. Rearranjando a equação (A49):

$$\frac{U_0}{V_0} = \frac{W_0}{S_0} \quad ou \quad \frac{S_0}{W_0} = \frac{V_0}{U_0} \quad (A50)$$

Da equação (A46) e da equação (A47) tem-se:

$$C_3 = C_2 \frac{V_0}{S_0} \quad (A51)$$

Arbitrariamente escolhe-se:

$$C_2 = S_0 \quad (A52)$$

Substituindo a equação (A52) na equação (A51):

$$C_3 = -V_0 \quad (A53)$$

Substituindo a equação (A52) e a equação (A53) na equação (A35):

$$R(r) = S_0 J_0(\lambda, r) - V_0 Y_0(\lambda, r) \quad (A54)$$

As soluções da equação (A54) são chamadas de autofunções. Quando λ não é um autovalor, ou seja, $\lambda \neq \lambda_n$, o problema apresenta solução trivial, que significa que $R = 0$ se $\lambda \neq \lambda_n$.

Então a solução geral da equação (A29) e da equação (A35) é:

$$G(r, t) = S_0 J_0(\lambda_n, r) - V_0 Y_0(\lambda_n, r) \left(C_1 e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \right) \quad (A55)$$

A solução completa da equação (A55) é obtida pela superposição linear na forma:

$$G(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (S_0 J_0(\lambda_n, r) - V_0 Y_0(\lambda_n, r)) (C_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t}) \quad (\text{A56})$$

onde (A56) satisfaz tanto a equação diferencial quanto as condições de contorno, mas não necessariamente a condição inicial.

A aplicação da condição inicial leva:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (S_0 J_0(\lambda_n, r) - V_0 Y_0(\lambda_n, r)) \quad \text{em } a < r < b \quad (\text{A57})$$

O resultado é a representação de uma função arbitrária representada na equação (A57) definida em termos das autofunções. Os coeficientes C_n podem ser determinados pelo uso da ortogonalidade das autofunções dadas por:

$$\int_a^b r R(\lambda_n, r) R(\lambda_m, r) dr = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N(\lambda_n) & m = n \end{cases} \quad (\text{A58})$$

A condição acima tem o seguinte significado físico: se duas soluções do problema de autovalor, uma com autovalor λ_m e outra com autovalor λ_n , forem multiplicadas e integradas sobre o domínio $r = a$ até $r = b$, a integral resultante é nula se $\lambda_m \neq \lambda_n$ e é igual a constante N se $\lambda_m = \lambda_n$.

A determinação da integral de normalização ou norma é:

$$N(\lambda_n) = \int_a^b r R^2(\lambda_n, r) dr \quad (\text{A59})$$

$$N(\lambda_n) = \int_a^b r (S_0 J_0(\lambda_n, r) - V_0 Y_0(\lambda_n, r))^2 dr \quad (\text{A60})$$

$$N(\lambda_n) = S_0^2 \int_a^b r J_0^2(\lambda_n, r) dr - 2S_0 V_0 \int_a^b r J_0(\lambda_n, r) Y_0(\lambda_n, r) dr + V_0^2 \int_a^b r Y_0^2(\lambda_n, r) dr \quad (A61)$$

Utilizando o aplicativo Maple para a resolução do primeiro termo da equação (A61) tem-se:

$$S_0^2 \int_a^b r J_0^2(\lambda_n, r) dr = S_0^2 \left(\frac{b^2}{2} J_0^2(\lambda_n, b) + \frac{b^2}{2} J_1^2(\lambda_n, b) \right) - S_0^2 \left(\frac{a^2}{2} J_0^2(\lambda_n, a) + \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n, a) \right) \quad (A62)$$

Para a resolução do segundo termo da equação (A61) tem-se:

$$\begin{aligned} -2S_0 V_0 \int_a^b r J_0(\lambda_n, r) Y_0(\lambda_n, r) dr &= -2S_0 V_0 \left(\frac{b^2}{2} J_0(\lambda_n, b) Y_0(\lambda_n, b) + \frac{b^2}{2} J_1(\lambda_n, b) Y_1(\lambda_n, b) \right) + \\ &+ 2S_0 V_0 \left(\frac{a^2}{2} J_0(\lambda_n, a) Y_0(\lambda_n, a) + \frac{a^2}{2} J_1(\lambda_n, a) Y_1(\lambda_n, a) \right) \end{aligned} \quad (A63)$$

para a resolução do terceiro termo da equação (A61) tem-se:

$$V_0^2 \int_a^b r Y_0^2(\lambda_n, r) dr = V_0^2 \left(\frac{b^2}{2} Y_0^2(\lambda_n, b) + \frac{b^2}{2} Y_1^2(\lambda_n, b) \right) - V_0^2 \left(\frac{a^2}{2} Y_0^2(\lambda_n, a) + \frac{a^2}{2} Y_1^2(\lambda_n, a) \right) \quad (A64)$$

Somando-se a equação (A62), a equação (A63) e a equação (A64):

$$\begin{aligned}
N(\lambda_n) = & S_0^2 \left(\frac{b^2}{2} J_0^2(\lambda_n, b) + \frac{b^2}{2} J_1^2(\lambda_n, b) \right) - S_0^2 \left(\frac{a^2}{2} J_0^2(\lambda_n, a) + \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n, a) \right) + \\
& V_0^2 \left(\frac{b^2}{2} Y_0^2(\lambda_n, b) + \frac{b^2}{2} Y_1^2(\lambda_n, b) \right) - V_0^2 \left(\frac{a^2}{2} Y_0^2(\lambda_n, a) + \frac{a^2}{2} Y_1^2(\lambda_n, a) \right) - \\
& 2S_0V_0 \left(\frac{b^2}{2} J_0(\lambda_n, b)Y_0(\lambda_n, b) + \frac{b^2}{2} J_1(\lambda_n, b)Y_1(\lambda_n, b) \right) + \\
& 2S_0V_0 \left(\frac{a^2}{2} J_0(\lambda_n, a)Y_0(\lambda_n, a) + \frac{a^2}{2} J_1(\lambda_n, a)Y_1(\lambda_n, a) \right)
\end{aligned} \tag{A65}$$

Reagrupando a equação (A65) tem-se:

$$\begin{aligned}
N(\lambda_n) = & \frac{b^2}{2} (S_0^2 J_0^2(\lambda_n, b) + V_0^2 Y_0^2(\lambda_n, b) - 2S_0V_0 J_0(\lambda_n, b)Y_0(\lambda_n, b)) \\
& + \frac{b^2}{2} (S_0^2 J_1^2(\lambda_n, b) + V_0^2 Y_1^2(\lambda_n, b) - 2S_0V_0 J_1(\lambda_n, b)Y_1(\lambda_n, b)) - \\
& \frac{a^2}{2} (S_0^2 J_0^2(\lambda_n, a) + V_0^2 Y_0^2(\lambda_n, a) - 2S_0V_0 J_0(\lambda_n, a)Y_0(\lambda_n, a)) - \\
& \frac{a^2}{2} (S_0^2 J_1^2(\lambda_n, a) + V_0^2 Y_1^2(\lambda_n, a) - 2S_0V_0 J_1(\lambda_n, a)Y_1(\lambda_n, a))
\end{aligned} \tag{A66}$$

Rearranjando a equação (A66):

$$\begin{aligned}
N(\lambda_n) = & \frac{b^2}{2} (S_0 J_0(\lambda_n, b) - V_0 Y_0(\lambda_n, b))^2 \\
& + \frac{b^2}{2} (S_0 J_1(\lambda_n, b) - V_0 Y_1(\lambda_n, b))^2 - \\
& \frac{a^2}{2} (S_0 J_0(\lambda_n, a) - V_0 Y_0(\lambda_n, a))^2 - \\
& \frac{a^2}{2} (S_0 J_1(\lambda_n, a) - V_0 Y_1(\lambda_n, a))^2
\end{aligned} \tag{A67}$$

Renomeando os termos da equação (A67):

$$A_1 = (S_0 J_1(\lambda_n, b) - V_0 Y_1(\lambda_n, b))^2 \quad (\text{A68a})$$

$$A_2 = (S_0 J_1(\lambda_n, a) - V_0 Y_1(\lambda_n, a))^2 \quad (\text{A68b})$$

$$A_3 = (S_0 J_0(\lambda_n, b) - V_0 Y_0(\lambda_n, b))^2 \quad (\text{A68c})$$

$$A_4 = (S_0 J_0(\lambda_n, a) - V_0 Y_0(\lambda_n, a))^2 \quad (\text{A68d})$$

Então:

$$N(\lambda_n) = \frac{b^2}{2} A_1 - \frac{a^2}{2} A_2 + \frac{b^2}{2} A_3 - \frac{a^2}{2} A_4 \quad (\text{A69})$$

A relação Wronskiana para a função de Bessel abaixo pode ser usada:

$$J_0(\lambda, r)Y_1(\lambda, r) - Y_0(\lambda, r)J_1(\lambda, r) = \frac{2}{\pi\lambda r} \quad (\text{A70})$$

Utilizando a equação (A43) e a equação (A45) na equação (A68a):

$$A_1 = \left(\frac{-\lambda_n Y_1(\lambda_n, b)J_1(\lambda_n, b) + H_2 Y_0(\lambda_n, b)J_1(\lambda_n, b) + \lambda_n J_1(\lambda_n, b)Y_1(\lambda_n, b) -}{H_2 J_0(\lambda_n, b)Y_1(\lambda_n, b)} \right)^2 \quad (\text{A71})$$

Rearranjando a equação (A71):

$$A_1 = (H_2 Y_0(\lambda_n, b)J_1(\lambda_n, b) - H_2 J_0(\lambda_n, b)Y_1(\lambda_n, b))^2 \quad (\text{A72})$$

Utilizando as equações (A68) na equação (A70):

$$A_1 = \left(\frac{2H_2}{\pi\lambda_n b} \right)^2 \quad (\text{A73})$$

De Özışık (1980), tem-se:

$$A_2 = \frac{V_0^2}{U_0^2} \left(\frac{2H_1}{\pi\lambda_n a} \right)^2 \quad (\text{A74})$$

$$A_3 = \left(\frac{2}{\pi b} \right)^2 \quad (\text{A75})$$

$$A_4 = \frac{V_0^2}{U_0^2} \left(\frac{2}{\pi a} \right)^2 \quad (\text{A76})$$

Portanto, a norma fica:

$$N(\lambda_n) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{2H_2}{\pi\lambda_n b} \right)^2 - \frac{a^2}{2} \frac{V_0^2}{U_0^2} \left(\frac{2H_1}{\pi\lambda_n a} \right)^2 + \frac{b^2}{2} \left(\frac{2}{\pi b} \right)^2 - \frac{a^2}{2} \frac{V_0^2}{U_0^2} \left(\frac{2}{\pi a} \right)^2 \quad (\text{A77})$$

Rearranjando a equação (A77):

$$N(\lambda_n) = \frac{2H_2^2}{\pi^2 \lambda_n^2} - \frac{2H_1^2 V_0^2}{U_0^2 \pi^2 \lambda_n^2} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{2V_0^2}{\pi^2 U_0^2} \quad (\text{A78})$$

Portanto:

$$N(\lambda_n) = \frac{2U_0^2 (H_2^2 + \lambda_n^2) - 2V_0^2 (H_1^2 + \lambda_n^2)}{U_0^2 \pi^2 \lambda_n^2} \quad (\text{A79})$$

Chamando de:

$$B_1 = H_1^2 + \lambda_n^2 \quad \text{e} \quad B_2 = H_2^2 + \lambda_n^2 \quad (\text{A80})$$

E substituindo na equação (A79):

$$N(\lambda_n) = \frac{2U_0^2 B_2 - 2V_0^2 B_1}{U_0^2 \pi^2 \lambda_n^2} \quad (\text{A81})$$

$$\frac{1}{N(\lambda_n)} = \frac{U_0^2 \pi^2 \lambda_n^2}{2U_0^2 B_2 - 2V_0^2 B_1} \quad (\text{A82})$$

Os coeficientes C_n são encontrados pela aplicação de $\int_a^b r R(\lambda_n, r) dr$ em ambos os lados da equação (A57) e pelo uso da propriedade de ortogonalidade definida na equação (A58) sendo:

$$C_n = \frac{1}{N(\lambda_n)} \int_a^b r R(\lambda_n, r) f(r) dr \quad (\text{A83})$$

A substituição da equação (A83) leva a solução para a distribuição de temperatura como mostrado abaixo:

$$G(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{1}{N(\lambda_n)} R(\lambda_n, r) \int_a^b r' f(r') R(\lambda_n, r') dr' \quad (\text{A84})$$

Como $T(r, t) = F(r) + G(r, t)$ tem-se:

$$T(r, t) = F(r) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{1}{N(\lambda_n)} R(\lambda_n, r) \int_a^b r' f(r') R(\lambda_n, r') dr' \quad (\text{A85})$$

Portanto:

$$T(r,t) = T_{\infty_2} + \left[\frac{(T_{\infty_2} - T_{\infty_1})(\ln(r) - bH_2 - \ln(b))}{\left(\frac{1}{aH_1} + \frac{1}{aH_2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{1}{N(\lambda_n)} R(\lambda_n, r) \int_a^b r' f(r') R(\lambda_n, r') dr' \quad (\text{A86})$$

onde a equação (A86) é a distribuição de temperaturas para o Caso 1.

APÊNDICE B – Resolução Numérica pelo Esquema de Crank-Nicolson

Para a determinação da solução numérica do problema descrito como Caso 1 pelo método numérico das diferenças finitas usando o esquema de Crank-Nicolson parte-se da equação (4) da condução de calor unidimensional em coordenadas cilíndricas discretizada na forma da equação (38).

Para o esquema de Crank-Nicolson considera-se $\theta = 1/2$, onde:

$$T^{m+1/2} = \frac{1}{2}T^m + \frac{1}{2}T^{m+1} \quad (B1)$$

Substituindo a expressão (B1) na equação (38):

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha \Delta t}{2r_i \Delta r} \left(\frac{1}{2}T_{i+1}^m + \frac{1}{2}T_{i+1}^{m+1} - \frac{1}{2}T_{i-1}^m - \frac{1}{2}T_{i-1}^{m+1} \right) + \\ & \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left(\frac{1}{2}T_{i+1}^m + \frac{1}{2}T_{i+1}^{m+1} - T_i^m - T_i^{m+1} + \frac{1}{2}T_{i-1}^m + \frac{1}{2}T_{i-1}^{m+1} \right) = T_i^{m+1} - T_i^m \end{aligned} \quad (B2)$$

Rearranjando a equação (B2):

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha \Delta t}{4r_i \Delta r} (T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1} - T_{i-1}^m - T_{i-1}^{m+1}) + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta r^2} (T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1} - 2T_i^m - 2T_i^{m+1} + T_{i-1}^m + T_{i-1}^{m+1}) = \\ & T_i^{m+1} - T_i^m \end{aligned} \quad (B3)$$

Chamando de:

$$A = \frac{\alpha \Delta t}{4r_i \Delta r} \text{ e } B = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta r^2} \quad (B4)$$

e substituindo as expressões de (B4) na equação (B3):

$$\begin{aligned}
& AT_{i+1}^m + AT_{i+1}^{m+1} - AT_{i-1}^m - AT_{i-1}^{m+1} + BT_{i+1}^m + BT_{i+1}^{m+1} - 2BT_i^m - 2BT_i^{m+1} + \\
& BT_{i-1}^m + BT_{i-1}^{m+1} = T_i^{m+1} - T_i^m
\end{aligned} \tag{B5}$$

Rearranjando a equação (B5), então a equação para um ponto nodal interno fica:

$$T_{i+1}^m(A+B) + T_{i+1}^{m+1}(A+B) + T_{i-1}^m(-A+B) + T_{i-1}^{m+1}(B-A) + T_i^m(1-2B) + T_i^{m+1}(-1-2B) = 0$$

ou:

$$T_{i-1}^m(B-A) + T_i^m(1-2B) + T_{i+1}^m(A+B) = T_{i-1}^{m+1}(A-B) + T_i^{m+1}(1+2B) + T_{i+1}^{m+1}(-A-B) \tag{B6}$$

As condições de contorno também devem ser discretizadas e colocadas na forma de diferenças finitas. A primeira condição de contorno descrita na equação (6) fica:

$$T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1} - T_{i-1}^m - T_{i-1}^{m+1} = \frac{h_1}{k} 4\Delta r \left(\frac{1}{2} T_0^m + \frac{1}{2} T_0^{m+1} - T_{\infty 1} \right) \tag{B7}$$

Rearranjando a equação (B7) tem-se:

$$T_{i-1}^m + T_{i-1}^{m+1} = T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1} - T_0^m \frac{h_1}{k} 2\Delta r - T_0^{m+1} \frac{h_1}{k} 2\Delta r + \frac{h_1}{k} 4\Delta r T_{\infty 1} \tag{B8}$$

Reagrupando os termos da equação (B5):

$$T_{i+1}^m(A+B) + T_{i+1}^{m+1}(A+B) + (T_{i-1}^m + T_{i-1}^{m+1})(B-A) + T_i^m(1-2B) + T_i^{m+1}(-1-2B) = 0 \tag{B9}$$

Substituindo a equação (B8) na equação (B9):

$$T_{i+1}^m(A+B) + T_{i+1}^{m+1}(A+B) + \left(T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1} - T_0^m \frac{h_1}{k} 2\Delta r - T_0^{m+1} \frac{h_1}{k} 2\Delta r + \frac{h_1}{k} 4\Delta r T_{\infty 1} \right) (B-A) + T_i^m(1-2B) + T_i^{m+1}(-1-2B) = 0 \quad (\text{B10})$$

Chamando de:

$$C = \frac{h_1}{k} 2\Delta r \quad (\text{B11})$$

E rearranjando a equação (B10):

$$T_{i+1}^m(2B) + T_{i+1}^{m+1}(2B) + T_0^m(CA - CB) + T_{\infty 1}(2CB - 2CA) + T_i^m(1-2B) + T_i^{m+1}(-1-2B) = 0$$

ou como $i = 0$:

$$T_{i+1}^m(CA - 2B + 1 - CB) + T_{i+1}^m(2B) + T_{\infty 1}(2CB - 2CA) = T_i^{m+1}(1 + 2B + BC - CA) + T_{i+1}^{m+1}(-2B) \quad (\text{B12})$$

A equação (B12) é a equação para o ponto nodal zero.

Um procedimento análogo é realizado para a segunda condição de contorno, onde a discretização da equação (7) fornece:

$$T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1} - T_{i-1}^m - T_{i-1}^{m+1} = \frac{h_2}{k} 4\Delta r \left(T_{\infty 2} - \frac{1}{2} T_M^m - \frac{1}{2} T_M^{m+1} \right) \quad (\text{B13})$$

Então:

$$T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1} = T_{i-1}^m + T_{i-1}^{m+1} - T_M^m \frac{h_2}{k} 2\Delta r - T_M^{m+1} \frac{h_2}{k} 2\Delta r + \frac{h_2}{k} 4\Delta r T_{\infty 2} \quad (\text{B14})$$

Reagrupando os termos da equação (B5):

$$(T_{i+1}^m + T_{i+1}^{m+1})(A + B) + T_{i-1}^m(B - A) + T_{i-1}^{m+1}(B - A) + T_i^m(1 - 2B) + T_i^{m+1}(-1 - 2B) = 0 \quad (\text{B15})$$

Substituindo a equação (B14) na equação (B15), tem-se:

$$\left(T_{i-1}^m + T_{i-1}^{m+1} - T_M^m \frac{h_2}{k} 2\Delta r - T_M^{m+1} \frac{h_2}{k} 2\Delta r + \frac{h_2}{k} 4\Delta r T_{\infty 2} \right) (A + B) + T_{i-1}^m(B - A) + T_{i-1}^{m+1}(B - A) + T_i^m(1 - 2B) + T_i^{m+1}(-1 - 2B) = 0 \quad (\text{B16})$$

Chamando de:

$$Z = \frac{h_2}{k} 2\Delta r \quad (\text{B17})$$

E rearranjando a equação (B16):

$$T_{i-1}^m(2B) + T_{i-1}^{m+1}(2B) + T_{\infty 2}(2ZA + 2ZB) + T_M^m(-ZA - ZB) + T_i^m(1 - 2B) + T_i^{m+1}(-1 - 2B - ZA - ZB) = 0$$

ou como $i = M$:

$$T_{i-1}^m(2B) + T_{i-1}^{m+1}(1 - 2B - ZA - ZB) + T_{\infty 2}(2ZA + 2ZB) = T_{i-1}^{m+1}(-2B) + T_i^{m+1}(1 + 2B + ZA + ZB) \quad (\text{B18})$$

A equação (B18) é a equação para o ponto nodal M.

As equações (B6), (B12) e (B18) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (1+CA-2B-CB) & 2B & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (B-A) & (1-2B) & (A+B) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B-A) & (1-2B) & (A+B) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (B-A) & (1-2B) & (A+B) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2B & (1-2B-ZA-ZB) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^{m+1} \\ T_1^{m+1} \\ T_2^{m+1} \\ \vdots \\ T_{M-1}^{m+1} \\ T_M^{m+1} \end{bmatrix} \\
& = \\
& \begin{bmatrix} (2B+1-CA+CB) & -2B & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (A-B) & (1+2B) & (-A-B) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A-B) & (1+2B) & (-A-B) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (A-B) & (1+2B) & (-A-B) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2B & (1+2B+ZA+ZB) \end{bmatrix} \cdot \\
& \begin{bmatrix} T_0^m \\ T_1^m \\ T_2^m \\ \vdots \\ T_{M-1}^m \\ T_M^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{\infty 1}(2CB-2CA) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_{\infty 2}(2ZA+2ZB) \end{bmatrix} \tag{B19}
\end{aligned}$$

A resolução do sistema (B19) fornece a distribuição de temperatura pelo esquema Crank-Nicolson.

APÊNDICE C – Resumo dos comandos utilizados do software Maple

A seguir serão mostradas as descrições dos comandos utilizados do software Maple durante o trabalho e suas funcionalidades (MARIANI, 2005; PORTELA e CHARIFI, 2002):

restart: Este comando limpa a memória interna e deve ser usado sempre que a execução de uma planilha for reinicializada.

with: Este comando é usado para ativar uma biblioteca externa do Maple.

diff: Este comando calcula a derivada parcial de uma função $f(x)$ com respeito a x .

dsolve: É um comando capaz de resolver diversos tipos de problemas que envolvem equações diferenciais ordinárias, que incluem: sistemas de equações diferenciais ordinárias, problemas com condições iniciais ou de fronteira, soluções em séries de potência ou séries numéricas.

eval: Este comando calcula uma expressão em um determinado ponto.

plot: Este comando faz o gráfico de uma ou mais funções.

solve: Este comando resolve uma equação ou um sistema de equações em função de uma ou mais variáveis.

subs: Este comando permite substituir uma sub-expressão em uma expressão.

for: Este comando possibilita a execução de uma repetição de um ou mais comandos fornecendo-se o passo inicial, o passo final e o valor do incremento.

fsolve: Este comando tem função semelhante ao comando *solve*, porém permite os cálculos com uma aritmética de ponto flutuante.

seq: Este comando é usado para construir uma sequência de valores.

simplify: Este comando é usado para a simplificação de regras em uma expressão.

expand: Este comando é usado para distribuir produtos como somas.

rhs: Este comando retorna o lado direito de uma expressão.

lhs: Este comando retorna o lado esquerdo de uma expressão.

int: Este comando calcula uma integral definida ou indefinida de uma expressão.

exp: Este comando calcula a função exponencial.

matrix: Este comando faz a representação de uma matriz bidimensional.

inverse: Este comando calcula a inversão de uma matriz.

evalm: Este comando faz cálculos com expressões envolvendo matrizes como somas e produtos.

if: Este comando é usado na tomada de decisões.