

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.007/23

Femtoscopia das interações entre núcleons e híperons charmosos e charmonium

Thiago Carvalho Peixoto

Orientador

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein

Dezembro de 2023

P379f Peixoto, Thiago Carvalho.
Femtoscopia das interações entre núcleons e híperons charmosos e charmonium / Thiago Carvalho Peixoto. – São Paulo, 2023
139 f.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Gastão Inácio Krein

1. Femtoscopia. 2. Hádrons. 3. Partículas (Física nuclear). I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

Dedico este trabalho aos meus filhos (José Miguel e Isabela) e à minha esposa (Rafaela), por me mostrarem toda a beleza e o real sentido da Vida; dedico também aos meus pais (Genilde e Veríssimo), por terem me educado para a Vida. Dedico a todos(as) alunos e estudantes, que são como velas pelas quais a luz do conhecimento jamais se apaga.

Agradecimentos

Agradeço à minha primeira família, meus pais (Genilde e Veríssimo) e meus irmãos (Jacqueline e Vinícius), pelo apoio, pelo incentivo, torcida, amor, confiança e liberdade; por serem grande parcela do que sou hoje.

Agradeço enormemente à minha esposa (Rafaela), pelo amor, compreensão, motivação e apoio, por sempre estar ao meu lado durante toda essa difícil jornada; definitivamente, sem ela não teria conseguido sequer dar o primeiro passo. Aos meus filhos, por me inspirarem a ser uma pessoa melhor, por serem as maiores graças que já recebi em minha vida e por não me deixarem esquecer o que realmente importa na vida. Agradeço ainda à minha sogra (Carmelita) por tantas vezes cuidar deles, possibilitando que eu trabalhasse melhor. Agradeço à minha tia (Josielma), que me acolheu em sua casa em São Paulo.

Agradeço ao IFT, por toda a estrutura material e por ter me possibilitado aprender com professores de excelente nível. Aos amigos feitos aqui no IFT; em especial, Kelvyn, Paulo, Fernando, Fagner, Tatiana, Nathaly, Pedro e Renato, pela ajuda, discussões, apoio, por me reanimarem tantas vezes em que acreditei que não conseguiria, por compartilharem comigo medos, angústias e alegrias. Guardarei carinhosamente nossa amizade. Agradeço também aos amigos de longa data; em particular, Cledson, Aquino, Yuri e Giordano, por fazerem parte de minha história e por sempre terem acreditado em minhas capacidades, muitas vezes até mais que eu mesmo acreditava. Agradeço aos demais amigos que contribuíram com palavras de incentivo e apoio, em particular, ao meu compadre Prof. Dr. Christiano Titoneli Santana.

Agradeço ao Prof. Dr. Mário Everaldo de Souza por me fazer acreditar que eu tinha condições de estudar Física Teórica e por alimentar minha curiosidade sobre a Física de Partículas, ainda durante a graduação.

Agradeço bastante ao meu Orientador, Prof. Dr. Gastão Krein, por acima de tudo sempre ter sido humano e humilde comigo, o que muitas vezes é raro no meio acadêmico. Agradeço pela paciência, pela disposição em discutir e explicar, por me ouvir, pela compreensão de minhas limitações e pela dedicação a este trabalho. Agradeço por não ter desistido de mim e por ter acreditado em minhas capacidades mais do que eu mesmo acreditei. Agradeço por ter me conduzido nessa jornada, como um farol que ilumina o desconhecido.

Por fim, agradeço a CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro, e ao Prof. Dr. Haidenbauer pela colaboração.

*“Ando devagar porque já tive pressa
E levo esse sorriso
Porque já chorei demais
Hoje me sinto mais forte
Mais feliz, quem sabe
Só levo a certeza
De que muito pouco sei
Ou nada sei”*

Almir Eduardo Melke Sater e Renato Teixeira De Oliveira
Trecho da música *“Tocando em frente”*.

Resumo

Nesta tese, estudamos a possibilidade de utilizar medidas de função de correlação de duas partículas a baixos momentos para deduzir restrições sobre os modelos de interação entre núcleons e hádrons com quarks charm. O trabalho foi dividido em duas partes; na primeira, avaliou-se a interação entre núcleons e bárions com charm; na segunda, estudou-se a interação entre núcleon e charmônio. Em ambos os casos, o formalismo de femtoscopia, amplamente utilizado no contexto de colisões relativísticas de íons pesados, foi utilizado para calcular as funções de correlação a partir dos potenciais de interação entre as partículas. Os potenciais foram extraídos da literatura de fenomenologia e de QCD na rede, estes últimos foram devidamente extrapolados para a massa física do pión com uso de teoria efetiva quiral. Procedendo dessa forma, foi possível comparar as funções de correlação previstas por alguns modelos de interação entre hádrons charmosos e núcleons. Os resultados mostram que a função de correlação exibe sensibilidade suficiente para distinguir entre os modelos utilizados, o que sugere ser possível utilizar medidas femtoscópicas em colisões de íons pesados para se obter experimentalmente informações sobre as interações entre as referidas partículas.

Palavras Chaves: Femtoscopia, Hádrons com charm, Núcleos exóticos.

Áreas do conhecimento: Física; Física de Hádrons; Física Nuclear; Física de Partículas.

Abstract

In this thesis, we study the possibility of using measurements of low momentum two-particle correlation function in order to deduce constraints on the interaction models between charmed hadrons and nucleons. The work is divided into two parts; in the first, the interaction between nucleons and charmed baryons is analyzed; in the second, the interaction between nucleon and charmonium is studied. In both cases, the femtoscopy formalism, widely used in the context of heavy ion relativistic collisions, was used to calculate the correlation functions from the interaction potentials between the particles. The potentials were extracted from the phenomenology and from lattice QCD literatures, the latter was properly extrapolated to the physical mass of the pion using effective chiral theory. Proceeding in this way, it was possible to compare the correlation functions provided by some models of interaction between charmed hadrons and nucleons. The results show that the correlation function exhibits sufficient sensitivity to distinguish between the models used. This suggests that it is possible to use femtoscopic measurements in heavy ion collisions to obtain, experimentally, information about the interactions between these particles.

Keywords: Femtoscopy, Charmed hadrons, Exotic nuclei.

Areas: Physics; Hadron Physics; Nuclear Physics; Elementary Particle Physics.

Índice

1	Introdução	1
2	A interação nuclear forte	7
2.1	Desenvolvimento histórico sobre os hádrons	7
2.2	A Cromodinâmica Quântica	15
2.2.1	Os regimes perturbativo e não-perturbativo da QCD	19
2.2.2	Simetrias aproximadas da QCD	20
2.3	Teoria Efetiva Quiral	26
3	Femtoscopia	29
3.1	Derivação de $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$	31
3.1.1	Derivação da amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$	32
3.1.2	Derivação das probabilidades $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$, $P_1(\mathbf{p}_a)$ e $P_1(\mathbf{p}_b)$	37
3.2	A função de onda $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ e a interação forte	42
3.3	Modelo de Lednicky-Lyuboshits (LL)	43
4	Femtoscopia da interação $Y_c N$	46
4.1	A interação $Y_c N$	47
4.1.1	Resultados numéricos para a interação $Y_c N$	50
4.2	Cálculo da função de correlação	54
4.2.1	Função de correlação sem interação coulombiana	54
4.2.2	A interação coulombiana	55
4.3	Predições para $C(k)$ da interação $Y_c N$	59
4.4	Conclusões	63
5	Femtoscopia da interação $J/\Psi N$	65
5.1	A Interação $J/\Psi N$	67
5.1.1	Teoria efetiva QNEFT	67
5.1.2	Modelos fenomenológicos	73
5.2	Predições para $C(k)$ da interação J/ψ -núcleon	76
5.3	Fórmula de LL para alcance efetivo grande	78
5.4	Conclusões	79

6	Conclusões e perspectivas	81
A	Convenções e notações	84
A.1	Espaço de Minkowski	84
A.2	Matrizes de Dirac	86
B	Resultados da seção 3.1	87
B.1	Derivação de $P^{(11)}$	88
B.2	Derivação de $P^{(22)}$	96
B.3	Derivação da fórmula de Koonin-Pratt no referencial de centro de massa	102
C	Ondas parciais, expansão de alcance efetivo e a equação de Lippmann-Schwinger	109
C.1	Amplitude de espalhamento: expansão em ondas parciais e defasagens	109
C.2	Aproximação de alcance efetivo	113
C.3	Equação de Lippmann-Schwinger	115
C.3.1	Decomposição em ondas parciais	116
C.4	Função de onda de espalhamento e a matriz K	118
D	Métodos numéricos para obter as funções de onda de espalhamento	121
D.1	Equação de Schrödinger	121
D.2	Equação de Lippmann-Schwinger	122
	Referências	126

Capítulo 1

Introdução

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria quântica de campos relativística que descreve a interação forte (força forte) [1, 2, 3]. Atualmente, ela é entendida como uma teoria fundamental; os graus de liberdade que a definem são os *quarks* e *glúons*, que, acredita-se, são partículas elementares. Ela estabeleceu-se como uma teoria bem definida entre os anos de 1972 e 1973, completando, portanto, 50 anos neste ano [4]. A QCD integra o modelo padrão das partículas e interações fundamentais, modelo que descreve também as interações eletromagnética e fraca — a interação fraca é responsável, entre outros efeitos, pelo decaimento do nêutron e as interações dos neutrinos com a matéria. Assim como as teorias que governam essas outras forças, a QCD é uma teoria de calibre, mas com grupo de simetria diferente, a saber $SU(3)$; os quarks aparecem na representação fundamental (de dimensão três) desse grupo e os glúons na representação adjunta (de dimensão oito). A carga conservada é denominada *cor* (*color*). Os quarks e glúons não são observados em detetores de partículas, a existência deles se manifesta através dos hádrons¹; diz-se que os quarks e glúons estão confinados no interior dos hádrons. Os exemplos mais conhecidos são o próton e o nêutron, os constituintes do núcleo atômico. Os hádrons podem ter spin semi-inteiro ou inteiro, chamados respectivamente de bárions e mésons. Atualmente, são conhecidos seis tipos (ou sabores) de quarks. Dois deles, os quarks *up* (*u*) e *down* (*d*), são muito leves, com massas de alguns MeV, e são os principais definidores dos números quânticos e outras propriedades do próton e do nêutron. Os outros sabores de quarks são muito mais pesados que os quarks *u* e *d*, são eles: *strange* (*s*), *charm* (*c*), *bottom* (*b*) e *top* (*t*). Esses quarks são produzidos em colisões a altas energias e estavam presentes no universo primitivo, porém decaem muito rapidamente nos quarks *u* e *d* devido à força fraca.

Todos os fenômenos envolvendo a força forte devem, em princípio, ser descritos

¹Wikipédia: hádron, do grego *hadrós*, que significa “forte”, “robusto”.

pela QCD. Esses fenômenos estão presentes na física nuclear, na astrofísica e na cosmologia. A QCD deve explicar a origem das massas dos prótons e nêutrons e as forças que os mantêm ligados no interior dos núcleos atômicos. Essas forças são entendidas como um fenômeno emergente da QCD, de forma análoga a como as forças intermoleculares e interatômicas decorrem das interações eletromagnéticas entre os núcleos atômicos e elétrons que compõem os átomos. A QCD também deve descrever as propriedades da matéria hadrônica em condições extremas de densidade contida em objetos estelares superdensos, como estrelas de nêutrons [5]. Em particular, a QCD deve esclarecer se essa matéria superdensa é formada por quarks e glúons desconfinados, ou por prótons, nêutrons e outros hádrons contendo quarks mais pesados ou, ainda, uma mistura de quarks, glúons e hádrons.

A QCD precisa também explicar como acontece a transição de quarks e glúons desconfinados em hádrons no Universo primitivo. Logo após o Big-Bang, o Universo era composto por quarks e glúons desconfinados (além de fótons, elétrons, etc), formando uma matéria extremamente quente e densa. À medida que o Universo se expande, essa matéria se esfria e os hádrons começam a se formar. Atualmente, estudos experimentais da matéria em condições extremas de temperatura são realizados em aceleradores, como no LHC do CERN, via colisões de íons pesados a energias relativísticas. Nestas colisões forma-se o plasma de quarks e glúons, um estado da matéria que se acredita seja similar àquele existente no Universo primitivo [6, 7, 8, 9, 10, 11].

A verificação experimental das previsões da QCD vem de diferentes fontes. Uma das principais fontes são processos de espalhamento e produção de partículas a altas energias. Esses processos podem ser estudados de maneira sistemática empregando teoria de perturbação, a qual está apoiada na liberdade assintótica da QCD [12, 13]. A liberdade assintótica afirma que os quarks e glúons interagem fracamente a distâncias relativas curtas, distâncias essas alcançadas em processos a altas energias que envolvem altos momentos transferidos. Esse fato possibilita o tradicional tratamento perturbativo em que observáveis são calculados sistematicamente como uma série de potências na constante de acoplamento da teoria. Estes processos caracterizam o chamado regime perturbativo da QCD. Até o presente, nenhuma discrepância entre teoria e experimento foi observada neste regime de altas energias [14]. Por outro lado, para fenômenos de baixas energias, em que o momento transferido é baixo, a teoria de perturbação tradicional

não se aplica, pois a interação torna-se forte [15, 16]. Neste regime de energias e momentos, acontecem prominentes fenômenos como o confinamento da carga de cor e a geração de massa dos hádrons. O estudo exige métodos teóricos que não empregam expansões na constante de acoplamento, entre outros, a QCD na rede (*Lattice QCD*) [17, 18], teorias de campos efetivas [19, 20, 21, 22] e métodos funcionais [23, 24, 25, 26, 27]. Apesar de algumas das previsões teóricas baseadas nesses métodos estarem de acordo com experimentos, nosso conhecimento do regime não perturbativo da QCD continua sendo muito limitado. Nesta tese focamos em dois problemas associados ao regime não perturbativo da QCD que, apesar de estarem presentes há muito tempo, ainda carecem de dados experimentais. Ambos problemas envolvem a interação entre núcleons e hádrons contendo o quark charm.

O interesse no estudo das interações entre núcleons e hádrons contendo quarks charm vem de longa data. Desde a época da descoberta desse quark, durante a assim chamada Revolução de Novembro na Física de Partículas [28], a espectroscopia de hádrons contendo quark e antiquark charm, tais como o J/Ψ e η_c e seus estados excitados — denominados *charmonium* — tem permitido um enorme avanço na nossa compreensão da QCD, principalmente para o desenvolvimento de modelos fenomenológicos e teorias de campos efetivas [4]. Com as descobertas realizadas ao longo da última década dos chamados *mésons exóticos XYZ*, esse interesse tem crescido enormemente. Esses hádrons são chamados exóticos porque a maioria deles não pode ser descrita como os bárions (três quarks) e mésons (quark e antiquark) tradicionais. Além dos mésons XYZ, mais recentemente houve a confirmação pela colaboração LHCb [29] da existência de hádrons pentaquark, formados por três quarks leves, um quark e um antiquark charm. Presentemente, nosso conhecimento sobre esses estados exóticos é muito limitado [30]; as principais conjecturas sobre a sua natureza e estrutura interna incluem: efeitos de limiar de energia, estruturas hadro-moleculares e estados compactos de multi-quarks [31, 32, 33, 34]. Um exemplo prominente é o $X(3872)$, provavelmente o méson exótico mais estudado desde sua descoberta em 2003. O fato de sua massa estar muito próxima ao limiar $D^{*0}\bar{D}^0$, inspirou interpretações de que ele seja um estado molecular, interpretações essas baseadas em estudos empregando modelos de quarks constituintes [35, 36] e métodos mais próximos à QCD, como as regras de soma da QCD [37], QCD na rede [38] e métodos funcionais [39].

Um outro foco de interesse em hádrons com quark charm é motivado pela

possibilidade de se produzirem em laboratório novas formas de matéria nuclear, uma matéria nuclear “exótica”, em que hádrons contendo charm, como os bárions $Y_c = (\Lambda_c, \Sigma_c)$ (híperons charmosos) e os mésons J/ψ e η_c (charmônios), são “implantados” em núcleos atômicos [40]. Conjecturas sobre a existência de estados nucleares contendo os bárions charmosos, os chamados hipernúcleos charmosos, têm uma longa história [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]; trabalhos mais recentes são os das Refs. [49, 50, 51, 52]. Apesar de não existirem dados experimentais sobre a interação desses bárions com núcleons, estudos teóricos baseados em modelos de trocas de mésons [42, 43, 44, 53, 54] e no modelo de quarks constituintes [55, 56, 50] predizem que essa interação é fortemente atrativa, o que em tese indica possibilidade de que esses hipernúcleos charmosos possam realmente existir. A possibilidade de que mésons charmônio possam formar estados ligados com núcleos atômicos foi sugerida na Ref. [57]. Após esse trabalho pioneiro, vários trabalhos seguiram-se empregando diferentes tipos modelos, cujas referências podem ser encontradas nos trabalhos de revisão das Refs. [58, 59]. O interesse na interação de mésons J/ψ e η_c com núcleons é também fortemente motivado pelo fato de que ela fornece informações sobre a anomalia do traço na QCD [60, 61, 62, 63], a qual é responsável pela geração de massa dos hádrons [64], principalmente daqueles contendo quarks leves. Essa informação está contida na amplitude frontal de espalhamento (*forward scattering amplitude*) charmônio-núcleon a baixas energias, a qual pode ser escrita como o produto da cromopolarizabilidade do charmônio e um elemento de matriz que envolve a distribuição de glúons no interior do núcleon [65, 66, 67, 68], o qual está relacionado à anomalia do traço.

Núcleos exóticos contendo hádrons charmosos podem ser produzidos em experimentos no *Japan Proton Accelerator Research Complex* (J-PARC) [69, 70], no *Thomas Jefferson National Accelerator Facility* (JLab) [71] e no *Facility for Antiproton Ion Research* (FAIR). Neste último, o experimento \bar{P} ANDA (*antiProton ANnihilation at DArmstadt*), fará uso de processos de aniquilação próton-antipróton tanto para produzir hádrons exóticos como investigar processos de espalhamento entre hádrons charmosos com hádrons contendo quarks leves [72, 73]. No JLab, experimentos recentes de fotoprodução extraíram informações sobre a interação J/ψ próton [74, 75] a baixas energias. Esses experimentos são os primeiros a extrair informações sobre a distribuição de glúons no interior do próton. Como será elaborado mais adiante nesta tese, com experimentos de eletro- e fotoprodução é impossível extrair a amplitude de espalhamento J/ψ -próton frontal devido a limitações cinemáticas, o que exige extrapolações e conjecturas que introduzem

incertezas consideráveis.

Uma alternativa aos tradicionais experimentos de espalhamento, como os no JLab e os previstos para o JPARC e o FAIR, é a técnica conhecida como femtoscopia. Essa técnica está baseada em medidas de funções de correlação de momentos de pares de hádrons, as quais carregam informações sobre partículas fortemente interagentes numa escala femtométrica [76, 77]. Essas funções de correlação de momentos, tradicionalmente empregadas para extrair informações sobre fontes emissoras de partículas², podem também ser empregadas para extrair propriedades das interações hádron-hádron a baixas energias [82, 83]. Medidas femtoscópicas envolvendo píons, cáons, núcleons vêm sendo utilizadas há bastante tempo [77, 84]. Também, mais recentemente, a femtoscopia tem sido utilizada para o estudo da interação de núcleons com híperons estranhos (como Λ e Σ) e mesmo híperon-híperon [85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95]. Também recentemente foram publicados os primeiros resultados da femtoscopia da interação entre o méson ϕ com núcleons [96, 97]. O méson ϕ é a contrapartida do méson J/ψ no setor estranho, i.e., formado por um par quark-antiquark estranho. Em vista desses desenvolvimentos, a possibilidade de medidas femtoscópicas das interações $Y_c N$ e $J/\psi N$ parece estar num horizonte muito próximo, ainda mais que resultados da femtoscopia de interações envolvendo hádrons charmosos já são uma realidade, como os envolvendo a interação de mésons D com núcleons [98].

Nesta tese apresentamos previsões para funções de correlação femtoscópicas com o objetivo de extrair informações sobre as interações $Y_c N$ e $J/\psi N$. Em ambos os casos, utilizamos resultados de simulações de QCD na rede e de modelos fenomenológicos disponíveis na literatura para essas interações a fim de obter as funções de correlação. A tese está organizada da seguinte forma. No próximo capítulo apresentamos os principais aspectos da interação forte. Apresentamos alguns desenvolvimentos históricos que levaram à formulação da QCD e discutimos alguns aspectos dessa teoria relevantes para o desenvolvimento dos nossos estudos. No Capítulo 3 descrevemos com algum detalhe o formalismo da femtoscopia com ênfase no formalismo para partículas diferentes, relevante para as interações $Y_c N$ e $J/\psi N$. Os Capítulos 4 e 5 apresentam nossas previsões, cujos

²Conforme mencionado na Ref. [77], na comunidade de íons pesados, é usual empregar a nomenclatura HBT (em referência aos trabalhos originais de Hanbury-Brown e Twiss [78, 79] de medidas de pares de fótons em astronomia) para se referir a qualquer tipo de análise de medidas relacionadas ao tamanho e à forma das funções de correlação entre duas partículas com pequeno momento relativo. Femtoscopia é um termo cunhado por Lednicky [80, 81] para denotar qualquer medida que forneça informações espaço-temporais em escala femtométrica.

resultados foram publicados em nas Refs. [99] e [100]. A tese se encerra com o Capítulo 6, onde fazemos um apanhado geral do trabalho e discutimos perspectivas de desenvolvimentos futuros. Os apêndices complementam o texto da tese, discutindo em maior detalhes tópicos relevantes para a compreensão do assunto.

Capítulo 2

A interação nuclear forte

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria quântica de campos que descreve as interações fortes; seus graus de liberdade fundamentais são os quarks e glúons e é parte do Modelo Padrão das Partículas Elementares. O estabelecimento da QCD se deu como resultado da busca por uma teoria capaz de descrever a chamada força nuclear forte que, entre outras coisas, é responsável por manter os núcleos atômicos coesos, equilibrando a repulsão coulombiana entre os prótons. Outro aspecto de extrema importância da QCD é que quase a totalidade da massa dos prótons e nêutrons advém de efeitos dinâmicos da interação entre os quarks e glúons. Assim, é necessário conhecê-la para entender a matéria de que somos feitos, por exemplo.

Neste capítulo, vamos fazer uma breve exposição sobre como o estudo dos hádrons contribuiu para o estabelecimento da QCD. A exposição não é um apanhado histórico detalhado nem será exaustiva. O objetivo é tão somente elencar alguns aspectos do estabelecimento da QCD que são importantes para os problemas estudados nesta tese. Em seguida, vamos discutir algumas simetrias aproximadas da QCD associadas aos problemas estudados. Finalmente, o capítulo se encerra com a apresentação de uma teoria efetiva quiral envolvendo os mésons pseudoescalares. Essa teoria efetiva desempenha papel fundamental tanto para o problema da interação Y_c -núcleon quanto para a interação quarkônio-núcleon.

2.1 Desenvolvimento histórico sobre os hádrons

O objetivo dessa seção é apontar os principais desenvolvimentos na construção do modelo de quarks; essa discussão está baseada na Ref. [101]. O artigo Review of Particle Physics da colaboração internacional Particle Data Group (PDG) [14] apresenta um capítulo que revisa o status atual do modelo de quarks, discutindo também os mésons exóticos X, Y, Z mencionados na Introdução.

Logo após a descoberta do nêutron em 1932, Heisenberg notou que sua massa era muito semelhante à do próton apesar de suas cargas elétricas serem diferentes. Para explicar essa similaridade, ele introduziu, em analogia ao spin, uma nova grandeza chamada *isospin*: propôs que estas duas partículas correspondem a estados com diferentes projeções do isospin de uma mesma partícula de isospin 1/2 chamada *núcleon* e sugeriu que a força nuclear forte é invariante sob rotações num espaço abstrato de isospin. Isso significa dizer que a força forte afeta prótons e nêutrons de maneira que respeita essa invariância e que o isospin de um sistema de núcleons é conservado.

Em 1935, Yukawa formulou uma teoria quântica de campos para descrever a força forte¹ em que a interação entre os núcleons seria mediada por bósons de spin 0. Como era sabido que o alcance da força forte é da ordem de 10^{-15} m, ele estimou a massa do bóson mediador em torno de 300 vezes a massa do elétron; por ter uma massa bem maior que a do elétron e ainda menor que a do próton, o bóson passou a ser chamado genericamente de *méson*. Em 1947, o grupo liderado por Cecil Powell detectou em raios cósmicos uma partícula com as características descritas por Yukawa, que passou a ser chamada de pión (méson π); de fato, há três estados de carga elétrica diferentes para o pión: π^+ , π^- e π^0 .

Na linguagem de teoria de grupos, a teoria de Yukawa traduz-se dizendo que a força forte possui o grupo SU(2) como grupo de simetria (simetria de isospin), os núcleons são descritos por campos que pertencem à representação fundamental (bidimensional – isospin 1/2) de SU(2) e os píons pertencem à representação adjunta (ou regular).

Nas décadas de 1950 e 1960, muitas outras partículas que interagem via força forte foram descobertas; elas foram genericamente chamadas de *hádrons* e classificadas em mésons – que são *bósons*, tais como os píons (π) e os káons (K) – e *bárions* – que são *férmions*, tais como o próton, o antipróton e o lâmbda (Λ). Foram descobertos também hádrons, chamados *estranhos*, com a peculiar característica de serem produzidos numa escala de tempo de 10^{-23} s e decaírem com vida média na escala de 10^{-10} s. Essa enorme diferença de escalas de tempo sugere que a interação forte é responsável pela criação destes hádrons, enquanto que a interação fraca determina o decaimento. Para explicar essa discrepância, foi atribuído aos hádrons um novo número quântico aditivo chamado *estranheza* e propôs-se

¹Naquela época, as únicas partículas conhecidas que interagiam via força forte eram o nêutron e o próton.

que a força forte conserva estranheza enquanto que a força fraca não. De fato, a produção de hádrons com estranheza não nula a partir de hádrons sem estranheza ocorre aos pares.

No início da década de 1960, haviam sido descobertos tantos hádrons que se fazia necessário um modo de organizá-los por suas propriedades. Por outro lado, conheciam-se apenas alguns poucos léptons (tais como elétron, pósitron, múon e neutrino), de modo que já se desconfiava que os hádrons deveriam ser compostos por partículas fundamentais. O primeiro passo para se conhecer tais constituintes foi a organização dos vários hádrons em padrões geométricos simples; essa organização foi proposta por Murray Gell-Mann em 1961 e ficou conhecida como *Eightfold-Way*.

Os oito bárions mais leves formam o *Octeto de Bárions de spin 1/2* e são dispostos como na Figura 2.1, em que as partículas numa mesma linha horizontal possuem mesma estranheza (s), as na mesma linha diagonal descendente têm mesma carga elétrica (q) em unidades da carga elementar e as numa mesma linha vertical possuem mesmo isospin.

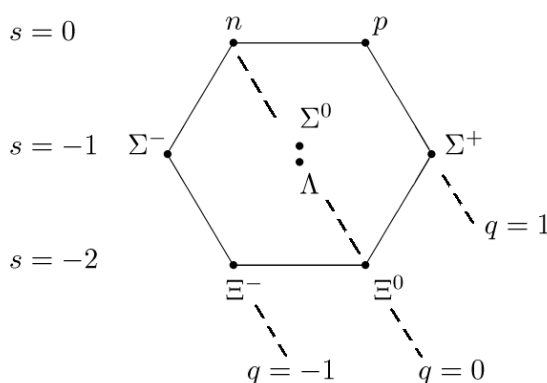


Figura 2.1: Octeto de bárions de spin 1/2.

Seguindo o mesmo critério, tanto os mésons de spin 0 quanto os de spin 1 são arranjados segundo um padrão hexagonal, formando para cada spin um *Noneto de mésons*² conforme a Figura 2.2. Por fim, os bárions de spin 3/2 mais leves formam um padrão triangular, conhecido como *Decuplete de Bárions*, como na Figura 2.3. A partícula Ω^- ainda não havia sido descoberta e Gell-Mann predisse suas propriedades – inclusive a massa – através dessa organização; poucos anos

²Quando essa organização foi proposta, o méson η' não havia sido descoberto e o padrão da Figura 2.2 era conhecido como octeto de mésons.

depois a partícula foi observada, o que forneceu grande confiabilidade ao Eightfold Way.

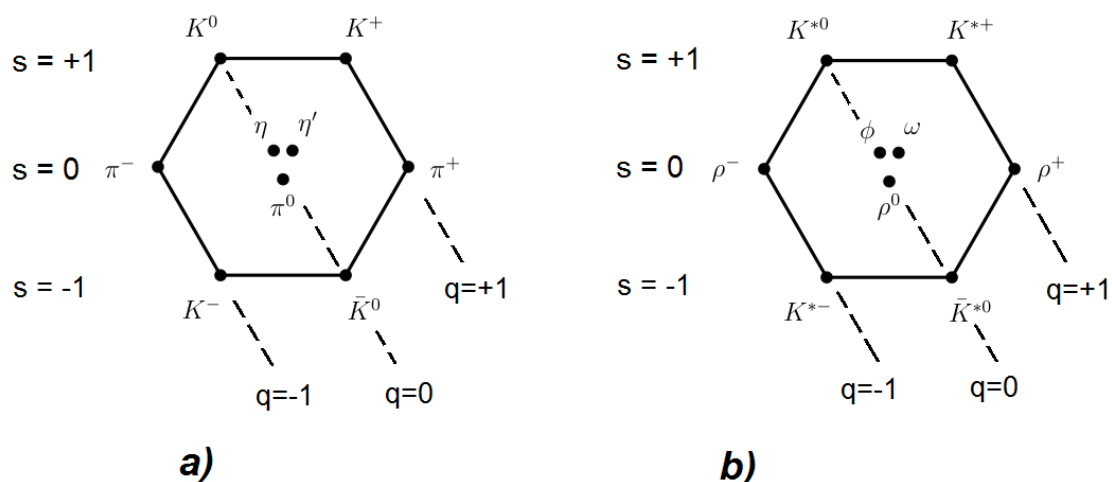


Figura 2.2: Nonetos de mésons: a), noneto de mésons de spin 0; b), noneto de mésons de spin 1.

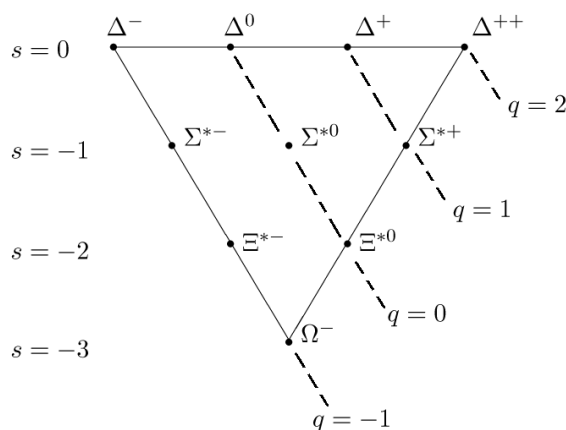


Figura 2.3: Decuplete de bárions

Os padrões das Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 descrevem multipletos do grupo SU(3); entretanto, não haviam sido observadas partículas formando um padrão de triplete, que corresponde à representação fundamental de SU(3). A partir disso, Gell-Mann e Zweig, independentemente, propuseram que os hádrons são compostos por partículas (antipartículas) fundamentais de spin 1/2, que passaram a ser chamadas *quarks* (q) (antiquarks (\bar{q})), da seguinte forma: cada bárion (antibárion) é constituído por três quarks (antiquarks) e cada méson é composto por um quark e um antiquark, estabelecendo o *modelo de quarks*.

Introduzindo três tipos de quarks – sabores *up* (u), *down* (d) e *strange* (s) – com as propriedades listadas na Tabela 2.1, é possível reproduzir os padrões geométricos do *Eightfold Way* identificando por quais quarks cada hádron é composto. Nesta³, n_B é o número bariônico, I_3 é a terceira componente do isospin, S é a estranheza e Q é a carga elétrica em unidades da carga elementar e ; os respectivos antiquarks – \bar{u} , \bar{d} e \bar{s} – possuem número bariônico n_B , carga elétrica Q e todos os números quânticos de sabor I_3 , S , B e T com o sinal oposto – ver Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Números quânticos de sabor e cargas elétricas dos quarks.

quark	Q (e)	n_B	I_3	S	C	B	T
u	$2/3$	$1/3$	$1/2$	0	0	0	0
d	$-1/3$	$1/3$	$-1/2$	0	0	0	0
s	$-1/3$	$1/3$	0	-1	0	0	0
c	$2/3$	$1/3$	0	0	1	0	0
b	$-1/3$	$1/3$	0	0	0	-1	0
t	$2/3$	$1/3$	0	0	0	0	1

A título de exemplo, a partícula Δ^{++} possui carga $Q = +2e$, estranheza $S = 0$ e isospin $I_3 = 3/2$, logo, deve ser composta por três quarks u . Vale notar que partículas diferentes podem ter o mesmo *conteúdo de quarks*; por exemplo, tanto a Σ^{*0} quanto a Λ possuem $Q = 0e$, $S = -1$ e $I_3 = 0$, tendo, então, conteúdo (uds). Contudo, deve-se lembrar que os sabores (u , d , s) são rótulos para determinados números quânticos, que são adicionados⁴ para se obter o número quântico total do bárion de modo semelhante a como dois spins $1/2$ são adicionados de modo a fornecer três estados ortogonais com spin total 1 ; no caso dos hádrons, diferentes combinações de sabor fornecem diferentes estados de sabor e cada partícula corresponde a uma determinada combinação linear desses estados. Ainda, além da composição dos sabores, deve-se levar em conta a adição dos spins para formar o estado de um dado hádron.

Em novembro de 1974, foi anunciada a descoberta de um novo méson extremamente pesado (cerca de três vezes mais pesado que o próton), eletricamente neutro e com a particularidade de ter um tempo de vida demasiado longo para sua massa: seu tempo de vida é cerca de três ordens de grandeza maior do que o tempo de vida típico de hádrons. Essa partícula foi descoberta independentemente

³Por completeza, apresentamos também as propriedades dos quarks *charm* (c), *bottom* (b) e *top* (t) e seus respectivos números quânticos de sabor C , B e T .

⁴Esses números quânticos são somados de acordo com as regras de adição ditadas pelo grupo $SU(3)$, que são similares às regras de adição de momento angular.

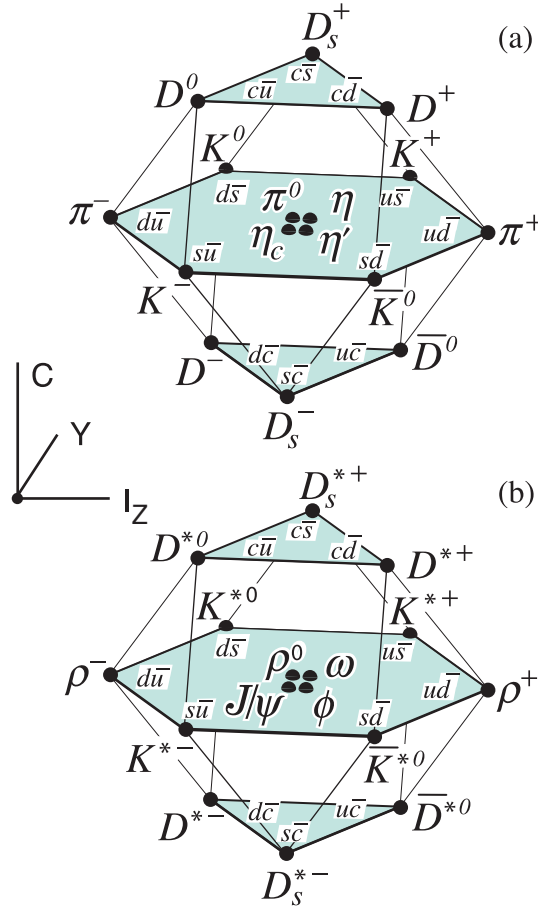


Figura 2.5: Multipletos de mésons de SU(4) de sabor. Em (a) estão os mésons pseudoescalares e em (b) os vetoriais. Fonte: [102]

b , de *bottom*, o méson úpsilon $Y = b\bar{b}$. Na década de 1980 foram descobertos os primeiros hádrons com número quântico b não nulo: os mésons $\bar{B}^0 = b\bar{d}$ e $B^- = b\bar{u}$ e o bárion $\Lambda_b^0 = ubd$. Atualmente, as interações fortes são descritas usando seis sabores de quarks: *charm* (c), *bottom* (b) e *top* (t), além dos três já mencionados acima (u , d e s) [101, 102]. A Tabela 2.1 lista os números quânticos (de sabor) aditivos associados a cada quark, além do valor da carga elétrica em unidades da carga elétrica elementar. Os números quânticos apresentados nesta tabela são os opostos para os respectivos antiquarks.

Apesar do sucesso em explicar o *Eightfold Way* e de prever novos hádrons, o modelo de quarks apresenta dois problemas importantes: o primeiro é o fato de nunca se ter detectado alguma partícula com carga fracionária, o segundo é que algumas partículas, de acordo com o modelo, parecem violar o princípio de exclusão de Pauli, o que será discutido logo abaixo. A primeira dificuldade é

contornada pela *hipótese de confinamento de cor*, segundo a qual a interação entre os quarks – seja qual for – ocorre de modo que eles são “confinados” a estados ligados, formando bárions e mésons.

Tão logo o modelo de quarks foi proposto, buscou-se calcular as propriedades dos hádrons postulando interações entre quarks, condizentes com a hipótese de confinamento, e resolvendo a equação de Schrödinger assim obtida – de modo semelhante ao que era feito em Física Nuclear. Alguns hádrons, como a partícula Δ^{++} – cujo conteúdo de quarks é (uuu) – parecia violar o princípio de exclusão de Pauli, segundo o qual o estado que descreve um sistema de férmions indistinguíveis deve ser *antissimétrico* com respeito à troca de quaisquer dois destes férmions.

Ocorre que o estado no qual a partícula Δ^{++} possui a componente do momento angular total $J_3 = 3/2$ requer que o momento angular orbital seja nulo e todos os spins estejam “alinhados”, ou seja, que tanto o estado referente aos graus de liberdade orbitais quanto o estado de spin sejam *simétricos*⁵; além disso, o estado referente aos graus de liberdade de sabor também é *simétrico* pela constituição do bárion. Dessa forma a Δ^{++} parece violar o princípio de exclusão de Pauli.

Para resolver esse problema, foi introduzido um grau de liberdade com ao menos três números quânticos – para tornar distinguíveis os três quarks que compõem a Δ^{++} . Esse novo grau de liberdade foi chamado de *carga de cor* e se assume que para cada sabor de quark há três cores possíveis: *red* (r), *green* (g) e *blue* (b); da mesma forma, para cada sabor de antiquark – \bar{u} , \bar{d} , \bar{s} , \bar{c} , \bar{b} , \bar{t} – há três possíveis *anticores* – *antired* (\bar{r}), *antigreen* (\bar{g}) e *antiblue* (\bar{b}). Entretanto, esses graus de liberdade não são observados nos hádrons, de modo que qualquer sistema hadrônico é indiferente a se as cores de todos os quarks forem alteradas entre si. Em termos de cores, a hipótese de confinamento dos quarks se expressa dizendo que *os estados físicos e observáveis num sistema de hádrons são singletos de cor*, ou seja, são invariantes sob transformações no espaço de cor [101, 2].

É importante salientar que as sugestões teóricas descritas acima são confirmadas experimentalmente [103, 2]. Espalhamentos núcleon-núcleon e lépton-núcleon a altas energias confirmam a estrutura interna de prótons e nêutrons; os experimentos mais bem conhecidos que confirmam a quantidade de cores ($N_c = 3$) são: o decaimento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, cuja largura de decaimento é proporcional a N_c^2 , e

⁵A hipótese de momento angular não nulo é inconsistente com a predição do momento magnético dos bárions.

aniquilação de elétron-pósitron de altas energias em hádrons, cuja seção de choque é proporcional a N_c [2, 104].

2.2 A Cromodinâmica Quântica

Uma vez estabelecida a ideia de que os hádrons possuem estrutura interna, procurou-se entender como os constituintes interagem e como essa dinâmica é responsável pelas propriedades observadas nas interações fortes.

Um jeito natural de estudar experimentalmente a estrutura interna de hádrons é fazer com que eles espalhem feixes formados por partículas sem estrutura, como léptons (elétrons, por exemplo) a altas energias; esse procedimento, quando se produz mais partículas, é chamado de *espalhamento profundamente inelástico*⁶. Experimentos desse tipo forneceram evidências experimentais para dois fatos muito importantes ao estabelecimento da QCD: os graus de liberdade de cor e a *liberdade assintótica* [2, 103]. O conceito de cor já foi introduzido na seção anterior, uma carga associada ao grupo SU(3). O conceito de liberdade assintótica será discutida a seguir.

No fim da década de 1960, tais experimentos indicavam uma lei de escalamento das funções de estrutura para a região de altos momentos transferidos a altas energias, o que permite alta resolução espaço-temporal [103, 2]. Através das funções de estrutura se expressam os fatores de forma magnético e elétrico do próton que, por sua vez, descrevem as seções de choque lépton-próton. Os fatores de forma descrevem a distribuição espacial da carga elétrica e do momento magnético no interior do próton. Tal escalamento ficou conhecido como *escalamento de Bjorken*, cuja interpretação é que *os constituintes dos núcleons se comportam como partículas pontuais essencialmente livres para altos momentos transferidos (curtas distâncias)*. Na era pré-QCD, estes constiuintes foram chamados de *pártons* e, posteriormente, identificados com os quarks e glúons da QCD [2].

Por outro lado, a não manifestação dos graus de liberdade de cor nos estados hadrônicos, isto é, a não observância de degenerescência de cor no espectro hadrônico, sugere que apenas estados de singlete são observáveis. Isto é, a interação entre os quarks e glúons possui uma simetria de cor associada ao grupo SU(3), mas as interações são tais que somente permite a formação de estados ligados com carga de cor nula.

⁶*Deep inelastic scattering*, em inglês.

Essas ideias levaram à proposta de uma teoria de calibre para as interações fortes, a cromodinâmica quântica (QCD) [105]: as interações fortes são descritas por uma teoria de calibre com simetria SU(3) de cor, cada sabor de quark representado por campo de spin 1/2 que se transforma como triplete na representação fundamental, e os glúons aparecem na representação adjunta descritos por uma lagrangiana de Yang-Mills. A densidade de lagrangiana no espaço de Minkowski com métrica $\mathbf{g} = \text{diag}(+, -, -, -)$ é dada por⁷:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j) \psi_j \quad (2.1)$$

Vamos explicar cada um dos termos que aparece nesta lagrangiana. $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor de intensidade de campo e D_μ é a derivada covariante, ambos são dados em termos dos campos dos glúons A_μ^a por:

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.2)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a \equiv \partial_\mu - ig \mathbb{A}_\mu \quad (2.3)$$

onde g é a constante de acoplamento. As quantidades $T^a = \lambda^a/8$; $a = 1, \dots, 8$ são os geradores do grupo SU(3), com λ^a sendo as matrizes SU(3) de Gell-Mann.⁸ As matrizes T^a são matrizes hermiteanas que satisfazem as relações de comutação características da álgebra $\mathfrak{su}(3)$ associada ao grupo SU(3): $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$, em que f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo. Os campos ψ_j (e $\bar{\psi}_j = \psi_j^\dagger \gamma^0$) são espiniores de Dirac em que $j = 1, \dots, N_f$ é um índice de sabor, e m_j são as correspondentes massas. Os sabores conhecidos são $f = u, d, s, c, b, t$. Apesar de não estar explícito em (2.1), os campos ψ_j possuem índices A de cor ($\psi_j = \psi_j^A$; $A = r, g, b$):

$$\psi_j = \begin{pmatrix} \psi_j^r \\ \psi_j^g \\ \psi_j^b \end{pmatrix}$$

As matrizes 3×3 T^a possuem componentes rotuladas por esses índices de cor $T^a = (T^a)_{AB}$; $A, B = r, g, b$; elas atuam nos vetores coluna como o escrito acima.

⁷Quando conveniente para simplificar a notação, vamos empregar a convenção de Einstein de soma implícita sobre índices repetidos, como no caso dos índices espaço-temporais de Lorentz (μ, ν) . As convenções sobre as matrizes de Dirac γ^μ , $\mu = 0, \dots, 3$ estão definidas no Apêndice A.

⁸As matrizes T^a geram a álgebra e não o grupo - elas pertencem à álgebra e não ao grupo; contudo, é comum, tendo isso subentendido, dizer que geram o grupo.

Ou seja, os quarks estão na representação fundamental do grupo SU(3) enquanto que as matrizes T^a e, conseqüentemente, os glúons estão na representação adjunta. A constante de acoplamento g é universal na teoria, no sentido de que não depende de cor nem sabor.

Por completeza, resta ainda explicitar a simetria de calibre exigida para a lagrangiana da QCD. Por simetria, entende-se uma transformação sobre os campos que deixa a ação invariante; uma *transformação local de calibre* segundo o grupo SU(3) de cor é determinada por oito parâmetros reais e contínuos $\vec{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^8)$ e transforma os campos do seguinte modo:

$$\psi_j(x) \rightarrow \psi'_j(x) = [U(\vec{\theta}(x))] \psi_j(x) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\mu(x) \rightarrow \mathbb{A}'_\mu(x) &= [U(\vec{\theta}(x))] \mathbb{A}_\mu(x) [U(\vec{\theta}(x))]^{-1} \\ &\quad - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\vec{\theta}(x))] [U(\vec{\theta}(x))]^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que a dependência espaço-temporal dos parâmetros foi explicitada – é isso que significa a transformação ser local – e $U(\vec{\theta}(x))$ é uma matriz 3×3 dada por

$$U(\vec{\theta}(x)) = \exp[-iT^a \theta^a(x)] \quad (2.6)$$

A derivada covariante em (2.3) é assim chamada porque, em conseqüência de (2.4) e (2.5), satisfaz:

$$(D_\mu \psi_j(x)) \rightarrow (D_\mu \psi_j(x))' = [U(\vec{\theta}(x))] (D_\mu \psi_j(x)) \quad j = 1, \dots, N_f \quad (2.7)$$

Para encontrar como é transformado o tensor de intensidade de campo, é conveniente notar que (2.3) e (2.2) fornecem para cada sabor j :

$$[D_\mu, D_\nu] \psi_j(x) = -igT^a F_{\mu\nu}^a \psi_j(x) \quad (2.8)$$

além de que o fato de $(D_\mu \psi_j(x))$ ter a mesma transformação que o próprio $\psi_j(x)$ implica a seguinte lei de transformação:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi_j(x) \rightarrow ([D_\mu, D_\nu] \psi_j(x))' = [U(\vec{\theta}(x))] ([D_\mu, D_\nu] \psi_j(x)) \quad (2.9)$$

Omitindo a dependência de $\vec{\theta}$ em x e usando (2.8), a equação acima é escrita como:

$$\begin{aligned} ([D_\mu, D_\nu] \psi_j(x))' &\stackrel{(2.8)}{=} -ig T^a F'_{\mu\nu} [U(\vec{\theta})] \psi_j(x) \\ &= [U(\vec{\theta})] (-ig T^a F_{\mu\nu}^a \psi_j(x)) \\ &= -ig [U(\vec{\theta})] T^a F_{\mu\nu}^a \psi_j(x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow (T^a F'_{\mu\nu} [U(\vec{\theta})] - [U(\vec{\theta})] T^a F_{\mu\nu}^a) \psi_j(x) = 0 \quad (2.11)$$

cuja solução para $T^a F'_{\mu\nu}$ é:

$$T^a F'_{\mu\nu} = [U(\vec{\theta})] T^a F_{\mu\nu}^a [U(\vec{\theta})]^{-1} \quad (2.12)$$

esta última equação fornece a lei de transformação para o tensor de intensidade de campo. Fazendo uso da da relação de ortogonalidade entre os geradores:

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [T^a T^b] = \delta^{ab} \quad (2.13)$$

para escrever:

$$F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F_b^{\mu\nu} \text{Tr} [T^a T^b] = \frac{1}{2} \text{Tr} [(F_{\mu\nu}^a T^a) (F_b^{\mu\nu} T^b)] \quad (2.14)$$

obtendo-se:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \rightarrow (F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu})' &= \frac{1}{2} \text{Tr} [(F_{\mu\nu}^a T^a)' (F_b^{\mu\nu} T^b)'] \\ &\stackrel{(2.12)}{=} \frac{1}{2} \text{Tr} \left[[U(\vec{\theta})] T^a F_{\mu\nu}^a [U(\vec{\theta})]^{-1} [U(\vec{\theta})] T^b F_b^{\mu\nu} [U(\vec{\theta})]^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[T^a F_{\mu\nu}^a T^b F_b^{\mu\nu} [U(\vec{\theta})]^{-1} [U(\vec{\theta})] \right] \\ &\stackrel{(2.14)}{=} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \end{aligned}$$

de onde se conclui que o termo $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ é invariante de calibre

Usando (2.4) e (2.7) é imediato mostrar que os termos sob o somatório em (2.1) são invariantes de calibre. É importante salientar que isso não seria verdade caso, para um dado sabor, a cada cor correspondesse uma massa diferente.

2.2.1 Os regimes perturbativo e não-perturbativo da QCD

Mais acima comentamos sobre o fenômeno da liberdade assintótica, que é verificado experimentalmente e obtido da lagrangiana da QCD [102]. Isso faz com que a curtas distâncias (altos momentos transferidos) a interação entre os quarks se torne cada vez mais fraca e, portanto, seja possível tratar a teoria via uma expansão perturbativa na constante de acoplamento, ou seja, há um regime perturbativo para a QCD [59, 2, 103].

Por outro lado, quanto mais se aumentam as distâncias entre os quarks (ou quanto mais se diminui o momento transferido na interação em estudo), mais a constante de acoplamento aumenta, até se chegar numa situação em que um tratamento perturbativo na constante de acoplamento não mais seja possível – regime não-perturbativo da QCD. Em particular, este é o caso quando se deseja estudar interações entre hádrons, a formação de estados ligados de quarks e glúons, a origem das massas dos hádrons e confinamento de cor. Indicamos a referência [16] para detalhes sobre QCD não perturbativa e a referência [15] sobre Teoria Quântica de Campos num tratamento não perturbativo.

A escala de energia que “separa” esses regimes é conhecido como Λ_{QCD} [59]; a QCD é fortemente interagente a escalas cuja ordem de grandeza é de 1 GeV ou abaixo [102]. O valor de Λ_{QCD} surge diretamente da resolução da equação do grupo de renormalização para $\alpha_S = g^2/4\pi$ [14]; ele depende da quantidade de sabores dinamicamente ativos e do esquema de renormalização empregado [59, 14]. Em particular o PDG [14] lista os valores de Λ_{QCD} obtidos em QCD perturbativa (pQCD) com cálculos de até 4-loops no esquema de renormalização conhecido como esquema de subtração mínima modificado (modified minimal subtraction, \overline{MS} scheme), ver Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Escala Λ_{QCD} calculada usando 4-loops no esquema \overline{MS} de renormalização [14].

Número de Sabores	$\Lambda_{\overline{MS}}$ (MeV)
3	332
4	292
5	210
6	89

No regime não-perturbativo da QCD, usando QCD na rede (Lattice QCD) já são realizados cálculos das massas de alguns hádrons a partir da lagrangiana

da QCD [106], cálculos termodinâmicos da QCD [107] e, mais recentemente, cálculos envolvendo espalhamento de mésons [108]. Indicamos as referências [17] e [107] para entender como é feito um tratamento discreto de uma teoria quântica de campos. Contudo, frequentemente os cálculos usando QCD na rede são executados com massas dos quarks leves correspondentes a valores para a massa dos píons bem superiores aos valores experimentais [108, 106]. Outra dificuldade é que o chamado problema do sinal tem limitado o uso de QCD na rede para calcular propriedades termodinâmicas com potencial bariônico finito [109, 110]; nesse contexto, o uso de teorias efetivas baseadas na quebra de simetria quiral e incluindo a característica de confinamento de cor tem sido particularmente úteis [111, 112, 113, 114]. A referência [115] apresenta algumas teorias efetivas utilizadas em física de sabores.

2.2.2 Simetrias aproximadas da QCD

É importante destacar que a lagrangiana (2.1) é a mais geral obtida exigindo invariâncias de Poincaré e CPT (conjugação de carga, paridade e reversão temporal), simetria local $SU(3)$ e renormalizabilidade [116]. Estas simetrias são exatas, ou seja, são transformações que realmente deixam o sistema invariante. Entretanto, há certos tipos de transformações segundo as quais a QCD é “aproximadamente” invariante, ou seja, há simetrias que são quebradas mas são exatas num dado limite não tão distante da situação física – este é o significado do termo “aproximadamente”. Apesar de não serem manifestamente realizadas, por vezes é útil e esclarecedor pensar sobre tais transformações.

Além dessas simetrias aproximadas, há simetrias que são quebradas ao nível quântico. Apesar de serem (aproximadamente) realizadas no limite clássico, ao nível quântico elas não se realizam. Exemplos importantes são a anomalia do traço e a anomalia quiral. Nesta tese vamos considerar explicitamente somente a anomalia do traço, a qual é responsável pela maior parte da massa dos hádrons e motiva a femtosopia da interação J/ψ -núcleon.

A anomalia do traço

Os quarks são frequentemente classificados quanto aos valores de suas massas. Os quarks leves são os que possuem massa inferior à escala $\Lambda_\chi = 1 \text{ GeV}$ (quarks u, d e s); os pesados, com massas superiores a Λ_χ , são os quarks c, b, t . A Tabela 2.3 mostra os valores de massa (renormalizados no esquema \overline{MS}) dos quarks

segundo o PDG(2020) [14]; se vê que há uma grande diferença nas escalas de massas dos quarks. Em face do Teorema do Desacoplamento (*Decoupling Theorem*) de Appelquist e Carazzone, essa grande diferença de escala das massas dos quarks permite desacoplar a dinâmica do setor leve daquela do setor pesado de forma que os quarks pesados não são importantes para determinar as propriedades de hádrons com apenas quarks leves [59].

Tabela 2.3: Massas (renormalizadas) dos quarks segundo o PDG(2020) [14]. Os valores exibidos para os quarks leves são obtidos à escala $\mu = 2 \text{ GeV}$ no esquema \overline{MS} . Os valores para os quarks c e b são obtidos também no esquema \overline{MS} a escalas iguais às massas desses quarks. O valor da massa do quark t é a média de medidas de massa do quark top feitas no LHC e no Tevatron.

Quark	up (u)	down (d)	strange (s)	charm (c)	bottom (b)	top (t)
Massa (GeV)	0,00216	0,00467	0,0093	1,27	4,18	172,76

No limite de quarks leves sem massa e quarks pesados com massa infinita (nenhuma contribuição dos quarks pesados), classicamente a ação da QCD é invariante sob a transformação de escala nas coordenadas do espaço-tempo:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu \quad (2.15)$$

Pelo teorema de Noether, há uma densidade de corrente conservada que, para a transformação acima, é dada por

$$J^\mu(x) = T^{\mu\nu}(x)x_\nu \quad (2.16)$$

em que $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. A conservação dessa densidade de corrente e da energia implica em o tensor energia-momento ter traço nulo:

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu J^\mu(x) &= \underbrace{[\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)]}_{=0} x_\nu + T^{\mu\nu}(x) \partial_\mu x_\nu \\ &= T^\mu_\nu(x) \partial_\mu x^\nu = T^\mu_\nu(x) \delta^\nu_\mu = T^\mu_\mu(x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por outro lado, sendo $|h\rangle$ o estado de um hádron em repouso, é possível mostrar que $\langle h| T^\mu_\mu |h\rangle$ é proporcional à massa do hádron [64]. Desta forma, pela equação acima todos os hádrons formados pelos quarks leves teriam massa nula. Poder-se-

ia pensar que o fato de os quarks leves possuírem massa é o que faz os hádrons ter massa. No entanto, a contribuição da massa dos quarks, as quais são geradas pelo mecanismo de Higgs, contribuem muito pouco, menos de 10% [117]. A questão é que quando se quantiza a teoria, ela apresenta divergências ultravioletas (como em qualquer teoria quântica de campos relativística). Para regularizar tais divergências, é necessário introduzir uma escala de comprimento (ou massa) através de um regulador. Esse regularizador pode ser um cutoff ou, no caso da regularização dimensional, essa escala de massa é introduzida para acertar a dimensionalidade da lagrangiana (que precisa ter dimensão de massa igual a quatro). Devido à presença dessa escala de massa, a teoria perde sua invariância de escala e o traço do tensor energia-momento não é mais nulo [60, 61, 62, 63].

Considerando-se quarks leves com massa não nula ($m_q \neq 0$), pode-se mostrar [64] que a massa m_h de um hádron h composto por quarks leves na teoria quântica é dada por⁹ :

$$2m_h^2 = \langle h | T_\mu^\mu | h \rangle = \frac{\beta(\alpha_S)}{2\alpha_S} \langle h | F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} | h \rangle + \langle h | \bar{q} m_q q | h \rangle \quad (2.18)$$

em que β é a função que aparece nas equações do grupo de renormalização para a constante de acoplamento da QCD. Note-se que apenas o termo $\langle h | \bar{q} m_q q | h \rangle$ se anula no limite de quarks sem massa e que o primeiro termo só tem contribuições dos glúons. Portanto, mesmo no limite de quarks leves sem massa a dinâmica entre os glúons é responsável pela massa não nula observada para os hádrons. Esse fato é conhecido como *anomalia do traço da QCD*.

Em vista deste resultado, como as massas dos quarks leves são bem menores que Λ_χ é útil se considerar o termo que possui as massas dos quarks na lagrangiana da QCD como uma perturbação ao se estudar o espectro dos hádrons. Um modo mais prático de se fazer isso é através de uma teoria efetiva para a QCD que leve em conta o fato de que no limite de quarks sem massa a teoria apresenta uma simetria quiral, discutida na seção 2.2.2. Essa teoria, conhecida como teoria de perturbação quiral, será discutida brevemente na seção 2.3.

Portanto, a QCD exhibe uma simetria quiral aproximada no setor leve, pois as massas dos quarks leves não são nulas. Com isso, em vez de 8 bósons de Goldstone sem massa, espera-se que a quebra dinâmica da simetria quiral da QCD dê origem

⁹Estamos empregando a normalização relativística para os estados hadrônicos $|h\rangle$; na Ref. [59], foi empregada uma normalização tal que $m_h = \langle h | T_\mu^\mu | h \rangle$.

a 8 pseudo bósons de Goldstone que, no caso, são 8 mésons pseudoescalares com massas bem inferiores às dos demais hádrons. Além disso, como a massa do quark s é maior que as dos quarks u e d , espera-se que destes 8 os mais massivos sejam os mésons que contenham o quark s . De fato, as massas dos mésons pseudoescalares $\pi^0, \pi^\pm, K^0, \bar{K}^0, K^\pm$ e η são pequenas na escala hadrônica.

Simetria de sabor

Explicitando os índices de cor da representação fundamental, o segundo termo em (2.1) é escrito como:

$$\sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_j^A \left[\delta^{AB} i \gamma^\mu \partial_\mu + g (T_a)^{AB} \gamma^\mu A_\mu^a - m_j \delta^{AB} \right] \psi_j^B \quad (2.19)$$

Aqui se vê que o termo que descreve a interação entre quarks e glúons,

$$g \bar{\psi}_j^A (T_a)^{AB} \gamma^\mu A_\mu^a \psi_j^B \quad (2.20)$$

é diagonal no espaço de sabor, de forma que os números quânticos de sabor associados (isospin, estranheza...) serem conservados, o que não ocorreria caso o glúon fosse dependente do sabor. Isso significa que ao nível dos quarks, a interação entre os quarks mediada pelos glúons independe do sabor (e, obviamente da massa dos quarks).

Considere a seguinte transformação $SU(N_f)$ *global* de sabor:

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &\rightarrow \psi'_j(x) = U(\theta)_{jk} \psi_k(x) \\ \psi_j^\dagger(x) &\rightarrow \psi'^\dagger_j(x) = \psi_k^\dagger(x) \left(U(\theta)^\dagger \right)_{kj} \\ U(\theta)_{jk} &= (\exp [i\theta^a t^a])_{jk} \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que $\{\theta^a; a = 1, \dots, n\}$ são um conjunto de n parâmetros reais, contínuos e constantes e $\{t^a; a = 1, \dots, n\}$ são n geradores do grupo $SU(N_f)$ e $\{j, k = 1, \dots, N_f\}$ identificam o sabor. Esta transformação deixa invariante o campo dos glúons. Para mostrar a invariância (ou não) dos demais termos que dependem dos campos de quarks, é útil usar a notação $\psi^T = (\psi_1, \dots, \psi_j, \dots, \psi_{N_f})$ para

considerar todos os índices de sabor numa só equação matricial:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\mathbb{A})] \psi &\rightarrow \{\bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\mathbb{A})] \psi\}' = \bar{\psi}' [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\mathbb{A})] \psi' \\
&= \bar{\psi} (U^\dagger) [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\mathbb{A})] (U) \psi \\
&= \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\mathbb{A})] \psi
\end{aligned} \tag{2.22}$$

em que usou-se o fato de que a hermiticidade dos geradores torna a matriz $U(\theta)$ unitária, assim, o termo referente à derivada covariante é invariante; já o termo de massa:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \hat{m} \psi \rightarrow (\bar{\psi} \hat{m} \psi)' &= \bar{\psi} U^\dagger \hat{m} U \psi \\
&= \bar{\psi} \exp[-i\theta^a t^a] \hat{m} \exp[i\theta^a t^a] \psi \\
&= \bar{\psi} \hat{m} \psi + \bar{\psi} [\hat{m}, \exp(i\theta^a t^a)] \psi
\end{aligned}$$

é invariante apenas se a matriz de massa \hat{m} , cujos elementos são as massas dos respectivos sabores $(\hat{m})_{ij} = m_i \delta_{ij}$, comutar com a matriz $U = \exp(i\theta^a t^a)$. Para verificar, os parâmetros são feitos infinitesimais:

$$\begin{aligned}
[\hat{m}, \exp(i\theta^a t^a)]_{jk} &= \left[\hat{m}, \mathbf{I} + i\theta^a t^a + O(\theta^2) \right]_{jk} \\
&= i\theta^a [\hat{m}, t^a]_{jk} + O(\theta^2) \\
&= i\theta^a \left\{ m_j \delta_{jl} (t^a)_{lk} - (t^a)_{jl} m_l \delta_{lk} \right\} + O(\theta^2) \\
&= i\theta^a \{ m_j - m_k \} (t^a)_{jk} + O(\theta^2)
\end{aligned}$$

Portanto, o termo de massa é invariante se a matriz de massa for proporcional à identidade. Dessa forma, conclui-se que a simetria de sabor da QCD seria exata *apenas* se as massas dos quarks fossem idênticas.

Mesmo assim, quando se trabalha somente com os sabores mais leves (u , d e s) – setor leve da QCD – é útil pensar numa *simetria de sabor aproximada* em situações tais que a diferença entre as massas possam ser desprezadas.

Simetria quiral

Por simplicidade, consideremos o caso com apenas dois sabores (u e d), ou seja, faz-se $\{\psi_j(x); j = u, d\}$ em (2.1) e a lagrangiana se torna:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{j=\{u,d\}} \bar{\psi}_j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j) \psi_j \quad (2.23)$$

analisemos, agora, o efeito da seguinte transformação global $SU(2)$ quiral de sabor:

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &\rightarrow \psi'_j(x) = U(\beta)_{jk} \psi_k(x) \\ \psi_j^\dagger(x) &\rightarrow \psi_j^{\dagger'}(x) = \psi_k^\dagger(x) U(\beta)_{kj}^\dagger \\ U(\beta)_{jk} &= \left(\exp \left[i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right)_{jk} \end{aligned} \quad (2.24)$$

sobre a lagrangiana (2.23) em que γ_5 é uma matriz hermitiana que age sobre os espinores e anticomuta com todas as quatro matrizes de Dirac, $\{\tau^a; a = 1, 2, 3\}$ são as matrizes de Pauli e $\{\beta^a\}$ são constantes reais. Tal como acima, será usada a notação $\psi^T = (\psi_u, \psi_d)$.

Novamente, os termos envolvendo os glúons são invariantes. O termo cinético para os férmions também é invariante:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi &\rightarrow (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi)' = \psi'^{\dagger} \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi' \\ &= \psi^\dagger \left(\exp \left[-i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \gamma^0 \gamma^\mu \left(\exp \left[i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \partial_\mu \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \left(\exp \left[-i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \left(\exp \left[i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \partial_\mu \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned}$$

em que usou-se $(\exp[-i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5]) \gamma^\mu = \gamma^\mu (\exp[i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5])$ devido às relações de anticomutação. De modo semelhante, mostra-se a invariância de $\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$. Por fim, analisemos o termo de massa:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \hat{m} \psi &\rightarrow (\bar{\psi} \hat{m} \psi)' = \psi'^{\dagger} \gamma^0 \hat{m} \psi' \\ &= \psi^\dagger \left(\exp \left[-i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \gamma^0 \hat{m} \left(\exp \left[i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \psi \\ &= \bar{\psi} \left(\exp \left[i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \hat{m} \left(\exp \left[-i\beta^a \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \right] \right) \psi \end{aligned}$$

Tem-se, portanto, que o termo de massa viola a simetria quiral de (2.23). Assim, a simetria quiral na QCD seria exata apenas se os quarks fossem não massivos.

Anomalia axial

A lagrangiana da QCD ao nível clássico possui ainda duas simetrias globais $U(1)$. Uma dessas é vetorial e refere-se à conservação do número bariônico, que é também uma simetria quântica. A outra é uma simetria axial no limite em que as massas dos quarks se anula, mas ele é quebrada ao nível quântico. Essa quebra ao nível quântico é conhecida como anomalia axial. A anomalia axial é responsável pelo fato da massa do méson η' ser muito mais pesado que o méson η . Se essa simetria axial $U(1)$ fosse exata, η' também seria um bóson de Goldstone.

2.3 Teoria Efetiva Quiral

Um resultado conhecido como Teorema de Goldstone [118, 119, 120] estabelece que há um bóson sem massa para cada gerador de uma simetria de gauge global do hamiltoniano a qual não seja respeitada pelo estado fundamental (estado de vácuo) da teoria. Esses bósons são chamados bósons de Goldstone e carregam os mesmos números quânticos que são associados a cada gerador. Assim, considerando um limite em que as massas dos três quarks leves sejam nulas e os demais com massas infinitas, a QCD teria uma simetria $SU(3)$ quiral exata cuja quebra dinâmica daria origem a 8 bósons pseudoescalares sem massa. Na seção 2.2.2 discutimos a simetria quiral (aproximada) considerando apenas os sabores mais leves u e d ; contudo, argumentação semelhante pode ser feita incluindo o quark s , com a distinção de que as matrizes de Pauli (geradores da álgebra $su(2)$ de sabor) na Eq.2.24 devem ser trocadas pelas matrizes geradoras da álgebra $su(3)$. Como se trata de uma transformação $SU(3)$ quiral, ela pode ser decomposta em $SU(3)_R \times SU(3)_L$, pois os férmions left (levógero) e right (destrógero) se transformam com fases opostas.

Motivando-se pela discussão acima, pode-se construir uma teoria efetiva quiral respeitando a simetria (aproximada) de sabor e a simetria de Lorentz especial envolvendo esses mésons pseudoescalares e os quarks leves. Para tal [59, 121], os mésons são incorporados à teoria através de termos envolvendo a seguinte matriz especial unitária $U(x)$:

$$U(x) = e^{i\Phi(x)/f} \quad \text{em que} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \pi^0 + \eta/\sqrt{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \eta/\sqrt{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \bar{K}^0 & -2\eta/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

em que f é a constante de decaimento leptônico do bóson de Goldstone (usa-se a constante de decaimento leptônico do pión: $f_\pi = 93 \text{ MeV}$).

Sob uma transformação de $SU(3)_R \times SU(3)_L$ a matriz U acima se transforma como

$$U(x) \rightarrow U'(x) = LU(x)R^\dagger \quad (2.26)$$

em que L e R são as matrizes que determinam a transformação dos quarks left e right respectivamente:

$$q_L(x) \rightarrow q'_L(x) = Lq_L(x) \quad q_R(x) \rightarrow q'_R(x) = Rq_R(x) \quad (2.27)$$

A simetria quiral para os termos envolvendo os mésons é garantida usando combinações de $U(x)$ e de $\partial_\mu U(x)$ que sejam invariantes. O termo de mais baixa ordem nas derivadas e que contém apenas os bósons de Goldstone é:

$$\mathcal{L}_{bosons} = \frac{f^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U(x)\partial^\mu U^\dagger(x)] \quad (2.28)$$

Já o termo de massa dos quarks, que explicitamente quebra a simetria quiral, pode ser incluído notando-se que, caso a matriz de massa \hat{m}_q que se transforme segundo:

$$\hat{m}_q \rightarrow L\hat{m}_qR^\dagger \quad (2.29)$$

o termo $\bar{q}\hat{m}_qq$ seria invariante e, portanto, deve-se usar a lagrangiana mais geral envolvendo apenas U e \hat{m} que seja invariante sob as transformações 2.29 e 2.26 e expandir em potências de \hat{m} . O termo de menor ordem em \hat{m} é:

$$\mathcal{L}_{m_q-b} = B \text{Tr}[U^\dagger(x)\hat{m}_q + \hat{m}_qU(x)] \quad (2.30)$$

em que B é associado ao valor do condensado de quark, que é o valor esperado de vácuo dos bilineares de quark $\langle \bar{q}^f(x)q^f(x) \rangle$. É importante salientar que esse termo que envolve as massas dos quarks implicam que os quadrados das

massas dos pseudo-bósons de Goldstone sejam lineares nas massas dos quarks; especificamente no caso dos píons:

$$m_{\pi}^2 = B (m_u + m_d). \quad (2.31)$$

Esse resultado é conhecido como a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner [121].

Portanto, a lagrangiana de mais baixa ordem dessa teoria efetiva quirais é:

$$\mathcal{L} = \frac{f^2}{4} \text{Tr}[\partial_{\mu}U(x)\partial^{\mu}U^{\dagger}(x)] + B \text{Tr}[U^{\dagger}(x)\hat{m}_q + \hat{m}_qU(x)] \quad (2.32)$$

Para mais detalhes sobre a construção e o uso de teorias efetivas quirais para mésons e hádrons, indicamos o livro em [121].

Capítulo 3

Femtoscopia

Este capítulo se dedica a apresentar o formalismo de femtoscopia que empregaremos nos Capítulos 4 e 5. Como já explicado na Introdução, o objetivo é empregar esse formalismo para extrair informações sobre a interação entre dois hádrons a baixas energias a partir da medida de uma função de correlação dos momentos desses hádrons produzidos em colisões ultrarelativísticas pp , pA e AA ¹. Os pares de hádrons de interesse nesta tese são (p, Y_c) e $(p, J/\psi)$, onde p indica próton e $Y_c = \Lambda_c$ ou Σ_c .

Experimentalmente, mede-se a correlação entre os momentos \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b de dois hádrons h_a e h_b de massas M_a e M_b , respectivamente. Essa correlação é denotada por $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$. Ela é obtida como a razão entre o número de pares de hádrons h_a e h_b oriundos de uma mesma colisão, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$, e o número de pares desses mesmos hádrons produzidos individualmente em um evento, $\mathcal{B}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$, ou seja, a razão entre a probabilidade encontrar o hádron h_b com momento \mathbf{p}_b dado que o hádron h_a tenha sido encontrado com momento \mathbf{p}_a comparada com a probabilidade de tais hádrons serem encontrados independentemente com esses momentos. Os momentos \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b são os momentos das partículas no referencial do laboratório. Se não houver correlação entre os momentos dos hádrons, então $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = 1$. Para detalhes de como isso é feito experimentalmente, recomendamos as referências [77, 122].

A análise teórica das medidas experimentais é normalmente feita empregando a fórmula de Koonin-Pratt [123, 124]:

$$C(k) = \frac{\mathcal{A}(k)}{\mathcal{B}(k)} \approx \int d^3\mathbf{r} S(\mathbf{r}) |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 \quad (3.1)$$

onde $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ é a função de onda que descreve o par de partículas emitidas e $S(\mathbf{r})$

¹ p refere-se a próton, e A a um íon com número de massa A .

descreve a fonte de emissão e dá a probabilidade de produção de um par com posição relativa \mathbf{r} . Os momentos na Eq. (3.1) referem-se ao sistema centro de massa. Mais especificamente, os momentos no sistema laboratório \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b estão relacionados ao momento do centro de massa \mathbf{P} e momento relativo \mathbf{k} como²

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b, \quad \mathbf{k} = \frac{M_b \mathbf{p}_a - M_a \mathbf{p}_b}{M_a + M_b} \quad (3.2)$$

No referencial de centro de massa, $\mathbf{P} = 0$, e o momento relativo neste sistema de referência é dado por $\mathbf{k} = \mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b$. Note que o interesse é nas propriedades da interação a baixas energias, ou seja, baixos valores do momento relativo \mathbf{k} . Portanto, dada a função $S(\mathbf{r})$, pode-se inferir propriedades da função de onda relativa $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ e, por conseguinte, propriedades das interações entre os hádrons, asseguradas as condições para que a fórmula de Koonin-Pratt seja válida. Na prática, no entanto, a questão não é tão simples como sugere essa observação, pois múltiplos efeitos que influenciam as medidas experimentais precisam ser levados em conta para extrair uma correlação que seja genuinamente devida à interação entre as partículas.

O formalismo da femtoscopia é conceitualmente similar ao da interferometria HBT, mas adaptado para incluir peculiaridades inerentes às colisões ultrarelativísticas, tais como a inclusão de efeitos das interações entre os hádrons h_a e h_b de interesse. A referência [126] faz uma interessante revisão sobre o histórico do formalismo HBT desde os anos 1950 até a atualidade. HBT refere-se Hanbury Brown e Twiss, autores que por volta da metade dos anos 1950 propuseram empregar interferometria de fótons para medir diâmetros angulares de estrelas [127]. Em 1959 - sem conhecer o trabalho de Hanbury Brown e Twiss - Goldhaber, Goldhaber, Lee e Pais (GGLP) [128] estudaram o decaimento $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ com o intuito de descobrir a ressonância ρ^0 . Apesar de não terem obtido estatística suficiente para tal descoberta, perceberam uma correlação angular entre pares de píons idênticos associada à estatística de Bose-Einstein que descreve o par, o que se mostrou como uma contrapartida do efeito HBT em colisões de partículas a altas energias, sendo um precursor da atual femtoscopia.

O objetivo principal deste capítulo é apresentar a derivação da função de correlação $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ a partir de sua definição. A ênfase aqui será nas hipóteses e

²É importante mencionar que o momento relativo \mathbf{k} está definido de maneira diferente na Ref. [125]. Especificamente, para o caso de massas iguais, a Ref. [125] define o momento relativo como $\mathbf{q} = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b$, ao passo que aqui estamos empregando $\mathbf{k} = (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b)/2$.

aproximações que permitem expressar $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ em termos da fórmula de Koonin-Pratt, Eq. (3.1), que é o ponto de partida para os cálculos e resultados apresentados nos Capítulos 4 e 5. Também serão abordadas algumas das dificuldades experimentais que interferem na interpretação teórica dos dados experimentais.

3.1 Derivação de $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$

A derivação a seguir segue muito proximamente a Ref. [125]. Alguns detalhes mais elaborados da derivação aparecem no Apêndice (B). A função de correlação $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ de dois hádrons h_a e h_b de massas M_a e M_b é definida como a razão entre as seções de choque de emissão em coincidência e o produto das seções de choque de emissão independente de um único hádron:

$$C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \frac{E_a E_b d^6 N / (d^3 p_a d^3 p_b)}{(E_a d^3 N / d^3 p_a)(E_b d^3 N / d^3 p_b)} = \frac{P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)}{P_1(\mathbf{p}_a) P_1(\mathbf{p}_b)} \quad (3.3)$$

onde $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$, $P_1(\mathbf{p}_a)$ e $P_1(\mathbf{p}_b)$ são as correspondentes probabilidades de emissão. A presença das energias $E_{a,b} = \sqrt{\mathbf{p}_{a,b}^2 + M_{a,b}^2}$ enfatiza que $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ é invariante de Lorentz. É importante notar que, numa situação em que as partículas não estão correlacionadas, $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ fatoriza no produto das probabilidades de produção individuais e, portanto, $C = 1$. No que segue, vamos nos ater à derivação de $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$. Alguns detalhes mais elaborados da derivação serão relegados ao Apêndice (B).

A estratégia empregada pelos autores da Ref. [125] para derivar $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ está apoiada em duas suposições: (1) os hádrons h_a e h_b são emitidos independentemente e (2) a multiplicidade desses hádrons emitidos não é muito baixa. Essa última suposição permite empregar um tratamento estatístico para a emissão dos hádrons, em que a fonte de emissão de dois hádrons é descrita por uma matriz de densidade caracterizada por distribuições estatísticas. Portanto, a probabilidade $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ é dada pela média estatística da probabilidade quântica de se detetar em coincidência no tempo $t \rightarrow \infty$ os hádrons h_a e h_b com momentos \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b , sabendo-se que eles estavam num dado estado $|\psi_\gamma(t)\rangle$ ao serem emitidos da fonte (freeze-out). A Ref. [125] denota a amplitude de probabilidade quântica correspondente por $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$. A média estatística é calculada com uma matriz densidade (mais precisamente, por um operador de estado) caracterizando a fonte de emissão. A suposição de que os hádrons são emitidos independentemente

permite fatorizar essa matriz densidade no produto das matrizes de densidade referentes à emissão de cada hádron.

3.1.1 Derivação da amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$

Como dito acima, essa é a amplitude de probabilidade de detetar h_a e h_b com momentos \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b no tempo $t \rightarrow \infty$, sabendo-se que no momento da emissão eles estavam num estado $|\psi_\gamma(t)\rangle$:

$$A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t) | \psi_\gamma(t) \rangle \quad (3.4)$$

onde $|\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t)\rangle$ é o autoestado de momento linear de duas partículas no instante t . Vamos reescrever essa amplitude empregando o operador evolução temporal $\hat{U}_{ab}(t, t_0) = \exp[-i\hat{H}_{ab}(t - t_0)]$, em que \hat{H}_{ab} é o hamiltoniano que descreve o movimento de h_a e h_b e t_0 é algum tempo inicial, tal que $t_0 \geq \max(t_a, t_b)$, onde t_a e t_b são instantes de tempo que h_a e h_b são emitidos. Usando o operador evolução temporal, podemos reescrever a Eq. (3.4) como

$$\begin{aligned} A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t) | \hat{U}_{ab}(t, t_0) \psi_\gamma(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{U}_{ab}^\dagger(t, t_0) \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t) | \psi_\gamma(t_0) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{U}_{ab}(t_0, t) \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t) | \psi_\gamma(t_0) \rangle = \langle \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(t_0) | \psi_\gamma(t_0) \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $|\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(t_0)\rangle$ é dado por

$$|\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(t_0)\rangle = \hat{U}_{ab}(t_0, t) |\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{ab}(t_0-t)} |\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t)\rangle \quad (3.6)$$

Para escrever o primeiro termo da última linha da Eq. (3.5) usamos o fato que $\hat{U}_{ab}(t, t_0)$ é operador unitário e que $\hat{U}_{ab}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}_{ab}(t_0, t)$. Com esse passo, deslocamos a atuação do operador \hat{U}_{ab} no estado $|\psi_\gamma(t_0)\rangle$ dos hádrons emitidos no instante t_0 para o estado $|\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t)\rangle$. O resultado disso é que a amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ é determinada por quantidades definidas no instante da emissão t_0 . Notamos que enquanto $|\psi_\gamma(t_0)\rangle$ contém as interações dos hádrons h_a e h_b com todos os hádrons do sistema, o estado $|\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(t_0)\rangle$ contém somente as interações entre h_a e h_b .

Usando a representação de coordenadas para os estados $|\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t)\rangle$ e $|\psi_\gamma(t)\rangle$,

$$\langle \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b | \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t) \rangle = \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t), \quad \langle \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b | \psi_\gamma(t) \rangle = \psi_\gamma(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t) \quad (3.7)$$

podemos expressar a amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ como

$$A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x_a d^3x_b \left[e^{-i\hat{H}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)(t_0-t)} \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t) \right]^* \psi_\gamma(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t) \quad (3.8)$$

A função de onda $\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t)$ é o produto de duas ondas planas, uma referente ao centro de massa e outra ao movimento relativo:

$$\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t) = \Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, t) \phi_{\mathbf{k}}^{\text{out}}(\mathbf{r}, t) \quad (3.9)$$

com

$$\Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, t) = e^{-i(E_{\text{cm}}t - \mathbf{P} \cdot \mathbf{R})}, \quad \phi_{\mathbf{k}}^{\text{out}}(\mathbf{r}, t) = e^{-i(E_{\text{rel}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (3.10)$$

onde \mathbf{R} e \mathbf{r} são as coordenadas do centro de massa e relativa, conjugadas respectivamente aos momentos \mathbf{P} e \mathbf{k} definidos na Eq. (3.2), isto é:

$$\mathbf{R} = \frac{M_a \mathbf{x}_a + M_b \mathbf{x}_b}{M_a + M_b}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b \quad (3.11)$$

Em virtude da invariância translacional das interações entre os hádrons, o hamiltoniano $\hat{H}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)$ é da forma

$$\hat{H}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = \hat{H}_{\text{cm}}(\mathbf{R}) + \hat{H}_{\text{rel}}(\mathbf{r}) \quad (3.12)$$

O hamiltoniano relativo contém as interações entre os hádrons, incluindo a interação coulombiana no caso de hádrons eletricamente carregados.

Em vista de o hamiltoniano ser da forma na Eq. (3.12), o operador evolução temporal fatora no produto dos operadores evolução correspondentes ao centro de massa e ao sistema intrínseco, que depende somente das coordenadas relativas. Especificamente, temos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}_{\text{cm}}(\mathbf{R})(t_0-t)} \Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, t) &= e^{-iE_{\text{cm}}t} e^{-i\hat{H}_{\text{cm}}(\mathbf{R})(t_0-t)} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \\ &= e^{-iE_{\text{cm}}t} e^{-iE_{\text{cm}}(t_0-t)} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} = e^{-iE_{\text{cm}}t_0} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$e^{-i\hat{H}_{\text{rel}}(\mathbf{r})(t_0-t)} \phi_{\mathbf{k}}^{\text{out}}(\mathbf{r}, t) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t_0) = e^{-iE_{\text{rel}}t_0} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

onde $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ satisfaz a equação de autovalores

$$\hat{H}_{\text{rel}}(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{\text{rel}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

satisfazendo a condição de contorno assintótica

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.16)$$

Ou seja, na representação de coordenadas, temos que

$$\phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t_0) = \phi_{\mathbf{P}, \mathbf{k}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t_0) = e^{-iEt_0} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (3.17)$$

Substituindo esses resultados na Eq. (3.8), obtemos para a amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$:

$$A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = e^{iEt_0} \int d^3r d^3R e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \psi_\gamma(\mathbf{R} + M_b/M \mathbf{r}, \mathbf{R} - M_a/M \mathbf{r}; t_0) \quad (3.18)$$

onde $E = E_{\text{cm}} + E_{\text{rel}} = E_a + E_b$. Note que usamos o fato que o jacobiano da transformação de coordenadas $(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{r})$ é igual a um.

Notamos que temos outra autofunção do hamiltoniano relativo $\hat{H}_{\text{rel}}(\mathbf{r})$ com a mesma energia que a $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, a saber $\phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, mas essa última satisfaz uma condição de contorno com sinal invertido na exponencial na Eq. (3.16). Portanto, as autofunções $\phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ e $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ estão relacionadas como:

$$\phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{r}) \quad (3.19)$$

Precisamos agora ser específicos quanto aos tempos de emissão de cada hádron. Como t_0 é algum tempo inicial tal que $t_0 \geq \max(t_a, t_b)$, onde t_a e t_b são instantes de tempo que h_a e h_b são emitidos, precisamos contemplar situações em que eles não sejam emitidos simultaneamente. Para tratar as interações entre os hádrons h_a e h_b e de cada um deles com todos os outros do sistema do qual são emitidos, simplificações e aproximações precisam ser feitas, já que um tratamento rigoroso desse problema de muitos corpos não é possível no presente momento. A Ref. [125] simplifica a discussão considerando que quando um dos hádrons se desacopla do sistema, esse se propaga livremente até que o outro se desacople também; i.e., os dois hádrons são emitidos independentemente. Essa aproximação claramente não é válida a priori quando o hádron em questão possui carga elétrica, já que a interação coulombiana é de longo alcance e, portanto, está sempre presente durante o processo de desacoplamento. Essa questão ainda não foi resolvida até o momento. Por outro lado, a interação coulombiana entre os hádrons emitidos é levada em conta explicitamente através da função de onda relativa do par emitido.

Para a situação em que os dois hádrons são emitidos independentemente, a função de onda ψ_γ num dado instante de tempo t_a é dada pelo produto

$$\psi_\gamma(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t_a) = \psi_{\gamma_a}(\mathbf{x}_a, t_a) \psi_{\gamma_b}(\mathbf{x}_b, t_a) \equiv \psi_a(\mathbf{x}_a, t_a) \psi_b(\mathbf{x}_b, t_a) \quad (3.20)$$

onde γ_a e γ_b referem-se a conjuntos completos de números quânticos de cada hádron – como evidenciado nesta equação, daqui pra frente vamos escrever $\psi_{\gamma_{a,b}} = \psi_{a,b}$, para tornar a notação mais leve. Não precisamos (anti)simetrizar essa função de onda porque estamos lidando com hádrons distinguíveis.

Inicialmente, vamos supor que o hádron no estado ψ_b foi emitido primeiro, num instante de tempo $t_b < t_a$; i.e., esse hádron se propaga livremente de t_b até t_a , quando o outro é emitido. Nesta situação, podemos escrever ψ_b no instante t_a como

$$\psi_b(\mathbf{x}, t_a) = e^{-i\hat{h}_b(\mathbf{x})(t_a-t_b)} \psi_b(\mathbf{x}, t_b) \quad (3.21)$$

onde $\hat{h}_b(\mathbf{x})$ é o operador hamiltoniano do hádron b livre³. Usando isso na Eq. (3.20), a função de onda $\psi_\gamma(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t_a)$ é dada por

$$\psi_\gamma(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t_a) = \theta(t_a - t_b) \psi_a(\mathbf{x}_a, t_a) e^{-i\hat{h}_b(\mathbf{x}_b)(t_a-t_b)} \psi_b(\mathbf{x}_b, t_b) \quad (3.22)$$

Para computar a ação de $\hat{h}_b(\mathbf{x})$, vamos trabalhar no espaço dos momentos, em que expandimos ψ_a e ψ_b em ondas planas, que são as autofunções de $\hat{h}_a(\mathbf{x})$ ou de $\hat{h}_b(\mathbf{x})$, conforme o caso:

$$\psi_a(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k_a}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_a t)} \tilde{\psi}_a(\mathbf{k}_a, t), \quad \omega_a = \sqrt{M_a^2 + \mathbf{k}_a^2} \quad (3.23)$$

e similarmente para ψ_b . Notamos que essa exponencial no tempo foi introduzida por conveniência posterior, já que ela poderia ser absorvida pela $\tilde{\psi}_a(\mathbf{k}_a, t)$. Com

³Analogamente, $\hat{h}_a(\mathbf{x})$ é o operador hamiltoniano do hádron a livre, que é necessário quando $t_a < t_b$.

isso, podemos escrever a função de onda $\psi_\gamma(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t_a)$ como

$$\begin{aligned}
\psi_\gamma(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; t_a) &= \theta(t_a - t_b) \int \frac{d^3k_a d^3k_b}{(2\pi)^6} e^{-i\omega_a t_a - i\omega_b t_b - i\omega_b(t_a - t_b)} e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{x}_a + i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{x}_b)} \\
&\quad \times \tilde{\psi}_a(\mathbf{k}_a, t_a) \tilde{\psi}_b(\mathbf{k}_b, t_b) \\
&= \theta(t_a - t_b) \int \frac{d^3k_a d^3k_b}{(2\pi)^6} e^{-i(\omega_a + \omega_b)t_a} e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{x}_a + i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{x}_b)} \\
&\quad \times \tilde{\psi}_a(\mathbf{k}_a, t_a) \tilde{\psi}_b(\mathbf{k}_b, t_b)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, podemos escrever a amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ dada na Eq. (3.18) para essa primeira situação de $t_a > t_b$ como:

$$\begin{aligned}
A_\gamma^{(1)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= A_{\gamma_a, \gamma_b}^{(1)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = A_{ab}^{(1)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \\
&= \theta(t_a - t_b) e^{iEt_a} \int d^3r d^3R e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \int \frac{d^3k_a d^3k_b}{(2\pi)^6} e^{-i(\omega_a + \omega_b)t_a} \\
&\quad \times e^{i\mathbf{k}_a \cdot (\mathbf{R} + M_b/M\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k}_b \cdot (\mathbf{R} - M_a/M\mathbf{r})} \tilde{\psi}_a(\mathbf{k}_a, t_a) \tilde{\psi}_b(\mathbf{k}_b, t_b) \\
&= \theta(t_a - t_b) \int d^3r \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \int \frac{d^3k_a d^3k_b}{(2\pi)^3} e^{i(E - \omega_a - \omega_b)t_a} \delta(\mathbf{P} - \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b) \\
&\quad \times e^{i(M_b/M\mathbf{k}_a - M_a/M\mathbf{k}_b) \cdot \mathbf{r}} \tilde{\psi}_a(\mathbf{k}_a, t_a) \tilde{\psi}_b(\mathbf{k}_b, t_b)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Introduzindo as coordenadas $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b$, $\mathbf{q} = M_b/M\mathbf{k}_a - M_a/M\mathbf{k}_b$ e usando que $E = E_{\text{cm}} + E_{\text{rel}} = E_a + E_b$, o resultado acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
A_{ab}^{(1)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \theta(t_a - t_b) \int d^3r \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \int \frac{d^3Q d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\Omega(\mathbf{Q}, \mathbf{q})t_a} \delta(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \\
&\quad \times e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\psi}_a(M_a/M\mathbf{Q} + \mathbf{q}, t_a) \tilde{\psi}_b(M_b/M\mathbf{Q} - \mathbf{q}, t_b) \\
&= \theta(t_a - t_b) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q})t_a} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \\
&\quad \times \tilde{\psi}_a(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}, t_a) \tilde{\psi}_b(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}, t_b)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ é a transformada de Fourier de $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$:

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \tag{3.27}$$

e $\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q})$ é a diferença de energias:

$$\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = E_a - \omega_a(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}) + E_b - \omega_b(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}) \quad (3.28)$$

Na ausência de interação, $\Phi_{\mathbf{k}}(q) \sim \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k})$. Para interações suficientemente fracas, ao invés de ser uma função o delta, $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ é uma função fortemente concentrada em $\mathbf{q} \approx \mathbf{k}$. Essa característica da $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ sugere a aproximação de suavidade (*smoothness approximation*) [129, 125], que discutiremos na próxima subseção.

Agora, consideramos a situação em que o hádron no estado ψ_a é emitido primeiro, num instante $t_a < t_b$. Repetindo os passos acima, podemos escrever a amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ para esta segunda situação como:

$$\begin{aligned} A_{ab}^{(2)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \theta(t_b - t_a) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_b} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \\ &\quad \times \tilde{\psi}_a(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}, t_a) \tilde{\psi}_b(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}, t_b) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Portanto, a amplitude completa, que deve contemplar essas duas situações, é dada pela soma de $A_{ab}^{(1)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ e $A_{ab}^{(2)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$, a qual pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} A_{ab}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &\equiv A_{ab}^{(1)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) + A_{ab}^{(2)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\theta(t_a - t_b) e^{i\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_a} + \theta(t_b - t_a) e^{i\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_b} \right] \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \\ &\quad \times \tilde{\psi}_a(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}, t_a) \tilde{\psi}_b(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}, t_b) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Isto conclui a derivação da amplitude $A_\gamma(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$. A seguir, vamos empregar essa expressão para derivar a probabilidade $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ que entra na definição da função de correlação, Eq. (3.3).

3.1.2 Derivação das probabilidades $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$, $P_1(\mathbf{p}_a)$ e $P_1(\mathbf{p}_b)$

O cálculo de $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ envolve uma média estatística sobre as amplitudes de probabilidade quânticas de detetar no tempo $t \rightarrow \infty$ os hádrons h_a e h_b com momentos lineares \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b se, ao serem emitidos pela fonte, eles estavam no estado $|\psi_\gamma\rangle$. Essas amplitudes de probabilidade, inicialmente definidas em termos do overlap no detetor $\langle \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}^{\text{out}}(t) | \psi_\gamma(t) \rangle$, podem ser reescritas em termos de um overlap na fonte $\langle \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(t_0) | \psi_\gamma(t_0) \rangle$, como mostrado na Eq. (3.5). Portanto, a média estatística pode ser computada com uma matriz densidade referente à

fonte de emissão. Essa matriz de densidade corresponde a uma distribuição estatística dos tempos de emissão t_a e t_b e dos números quânticos γ_a e γ_b dos hádrons (e.g. degenerescências associadas ao spin e sabor dos hádrons). Portanto, se denotarmos por $\rho(ab, a'b')$ essa matriz densidade, em que os índices a, b, \dots indicam tanto $\gamma_a, \gamma_b, \dots$ como t_a, t_b, \dots , a probabilidade $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ é dada pela média sobre as amplitudes $A_{ab}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$:

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \sum_{ab, a'b'} \langle \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} | [\rho(ab, a'b') |\psi_{ab}\rangle \langle \psi_{a'b'}|] | \phi_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b} \rangle \\ &= \sum_{ab, a'b'} \rho(ab, a'b') A_{ab}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) A_{a'b'}^*(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que a soma-integral refere-se à soma sobre os números quânticos dos hádrons e a integral é sobre os tempos de emissão:

$$\sum_{ab, a'b'} = \sum_{\gamma_a \gamma_b; \gamma_{a'} \gamma_{b'}} \int dt_a dt_b dt_{a'} dt_{b'} \quad (3.32)$$

onde, por clareza e para evitar potenciais confusões, reintroduzimos os índices $\gamma_a, \gamma_b, \dots$ que representam os números quânticos dos hádrons.

Por consistência com a hipótese de emissão independente de h_a e h_b , é necessário supor que a matriz densidade $\rho(ab, a'b')$ fatoriza no produto

$$\rho(ab, a'b') = v_{aa'} \rho(t_a, t_{a'}) v_{bb'} \rho(t_b, t_{b'}) \quad (3.33)$$

Ao substituirmos essa expressão na Eq. (3.31), obtemos que P_2 é a soma de quatro termos, pois $A_{ab} = A_{ab}^{(1)} + A_{ab}^{(2)}$; especificamente, $P_2 = P^{(11)} + P^{(22)} + P^{(12)} + P^{(21)}$. No Apêndice B, obtivemos as expressões explícitas para as amplitudes $P^{(11)}$ e $P^{(22)}$. Como $M_a \neq M_b$, temos que as $P^{(11)} \neq P^{(22)}$ e a estrutura de cada uma delas é bem mais complexa que no caso de massas iguais. No entanto, uma pode ser obtida da outra fazendo a troca dos rótulos $a \leftrightarrow b$. As contribuições $P^{(12)}$ e $P^{(21)}$ anulam-se pela mesma razão que no caso de $M_a = M_b$. Portanto, podemos escrever $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ como:

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}' - \delta_M \mathbf{P}) \\ &\quad \times [S_{ab}(\mathbf{P}; \mathbf{q}, \mathbf{q}') + S_{ba}(\mathbf{P}; \mathbf{q}, \mathbf{q}')] \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $\delta M = (M_a - M_b)/2M$ e $S_{ab}(\mathbf{P}; \mathbf{q}, \mathbf{q}')$ é dada em termos da densidade de Wigner de uma partícula $\mathcal{S}(X, K)$, associada à fonte de emissão, como

$$S_{ab}(\mathbf{P}; \mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int d^4x d^4y \theta(y^0) e^{i(q-q') \cdot y} \times \mathcal{S}(x + y/2, (P + q + q')/2) \mathcal{S}(x - y/2, (P - q - q')/2) \quad (3.35)$$

com $q'^0 = P^0/2 - \omega_b(\mathbf{P}/2 - \mathbf{q}')$, $q^0 = P^0/2 - \omega_b(\mathbf{P}/2 - \mathbf{q})$, $P^0 = E_a + E_b$ com $\mathcal{S}(x, K)$ sendo dada por:

$$\mathcal{S}(x, K) = \int d^4z e^{iK \cdot z} \rho(x^0 + z^0/2, x^0 - z^0/2) \times \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a(\mathbf{x} + \mathbf{z}/2, x^0 + z^0/2) \psi_{a'}^*(\mathbf{x} - \mathbf{z}/2, x^0 - z^0/2) \quad (3.36)$$

A dependência da função S_{ab} com a energia e momento (q^0, \mathbf{q}) complica o uso prático da expressão acima e aproximações precisam ser feitas. Uma das aproximações amplamente empregada, que tem sido testada em algumas situações [77], é a aproximação conhecida como aproximação de suavidade [129, 125]. A fórmula de Koonin-Pratt é obtida no contexto de uma particular forma de aproximação de suavidade, a qual consiste de duas partes. A primeira tem como base o fato de que, quando a interação entre os hádrons emitidos não é muito forte, como nos casos estudados nesta tese, a função de onda relativa $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ é fortemente concentrada nos valores de momentos $\mathbf{q} \approx \mathbf{k}$. Portanto, deve ser uma boa aproximação calcular o integrando das funções S_{ab} substituindo os momentos \mathbf{q} e \mathbf{q}' por $\mathbf{k} + \delta_M \mathbf{P}$. Como $\delta_M = (M_a - M_b)/2M$, temos que $\mathbf{k} + \delta_M \mathbf{P} = (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b)/2$. Com isso, as combinações de quadrimomentos que aparecem nas funções de emissão S são substituídas por $(P + q + q')/2 \rightarrow p_a$ e $(P - q - q')/2 \rightarrow p_b$. Podemos agora integrar sobre \mathbf{q} e \mathbf{q}' na Eq. (3.34) para obter a seguinte expressão para $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$:

$$P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \int d^4y \theta(y^0) \int d^4x \left[|\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \mathcal{S}(x + y/2, p_a) \mathcal{S}(x - y/2, p_b) + |\phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \mathcal{S}(x - y/2, p_a) \mathcal{S}(x - y/2, p_b) \right] \quad (3.37)$$

Agora fazemos a troca de variável $y \rightarrow -y$ no segundo termo dessa integral e usamos o resultado da Eq. (3.19), i.e., $\phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{y}) = \phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{y})$, de maneira que podemos

reescrever $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ como:

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int d^3y |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \int d^4x \int dy^0 \left[\theta(y^0) + \theta(-y^0) \right] \\ &\quad \times \mathcal{S}(x + y/2, p_a) \mathcal{S}(x - y/2, p_b) \\ &= \int d^3y |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \int d^4x \int dy^0 \mathcal{S}(x + y/2, p_a) \mathcal{S}(x - y/2, p_b) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esta expressão ainda é complicada de ser usada na prática porque ela requer o conhecimento das funções de emissão para diferentes valores de energia e momento das partículas emitidas. A segunda parte da aproximação de suavidade consiste em substituir p_a e p_b pelo valor médio $(p_a + p_b)/2 = P/2$. Isto significa, em particular, que os momentos \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b que definem as energias $E_a = (\mathbf{p}_a^2 + M_a^2)^{1/2}$ e $E_b = (\mathbf{p}_b^2 + M_b^2)^{1/2}$ são substituídos por $(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)/2 = \mathbf{P}/2$. Portanto, no sistema do centro de massa, $\mathbf{P} = 0$, os quadrimomentos p_a e p_b que entram nas funções de emissão \mathcal{S} na Eq. (3.38) são substituídos por $p_a = (E_a(\mathbf{p}_a), \mathbf{p}_a) \rightarrow ((M_a + M_b)/2, \mathbf{0}) = (M/2, \mathbf{0})$ e $p_b = (E_b(\mathbf{p}_b), \mathbf{p}_b) \rightarrow ((M_a + M_b)/2, \mathbf{0}) = (M/2, \mathbf{0})$.

Para obtermos a fórmula de Koonin-Prat dada na Eq. (3.1), ainda precisamos derivar as probabilidades $P_1(\mathbf{p}_a)$ e $P_1(\mathbf{p}_b)$. Essas probabilidades referem-se às emissões de um único hádron; um vez obtida a $P_1(\mathbf{p}_a)$, obtemos a $P_1(\mathbf{p}_b)$ com $\mathbf{p}_a \rightarrow \mathbf{p}_b$. Em analogia com a média estatística da probabilidade de emissão de dois hádrons, Eq. (3.31), a média estatística da probabilidade de emissão de um hádron é dada por:

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{p}_a) &= \sum_{a,a'} \langle \phi_{\mathbf{p}_a} | [v_{aa'} \rho(t_a, t'_a) | \psi_a \rangle \langle \psi_{a'} |] | \phi_{\mathbf{p}_a} \rangle \\ &= \sum_{a,a'} v_{aa'} \rho(a, a') A_a(\mathbf{p}_a) A_{a'}^*(\mathbf{p}_a) \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $A_a(\mathbf{p}_a)$ é dada analogamente à Eq. (3.18):

$$A_a(\mathbf{p}_a) = e^{iE_a t_a} \int d^3x_a \phi_{\mathbf{p}_a}(\mathbf{x}_a) \psi_a(\mathbf{x}_a, t_a) \quad (3.40)$$

onde $\tilde{\psi}_a(\mathbf{x}_a, t_a)$ é a função de onda do hádron emitido no instante t_a e $\phi_{\mathbf{p}_a}(\mathbf{q})$ é uma onda plana:

$$\phi_{\mathbf{p}_a}(\mathbf{x}_a) = e^{i\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{x}_a} \quad (3.41)$$

Substituindo essas quantidades na Eq. (3.39), obtemos:

$$P_1(\mathbf{p}_a) = \int d^4x_a d^4x_{a'} e^{i\mathbf{p}_a \cdot (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{a'})} \rho(t_a, t_{a'}) \sum_{a,a'} v_{aa'} \psi_a(\mathbf{x}_a, t_a) \psi_{a'}(\mathbf{x}_{a'}, t_{a'}) \quad (3.42)$$

Fazendo a troca de variáveis $x_a - x_{a'} = z$ e $(x_a + x_{a'})/2 = x$, podemos expressar $P_1(\mathbf{p}_a)$ em termos da função de Wigner $\mathcal{S}(x, p_a)$:

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{p}_a) &= \int d^4x d^4z e^{ip_a \cdot z} \rho(x^0 + z^0/2, x^0 - z^0/2) \\ &\quad \times \sum_{a,a'} v_{aa'} \psi_a(\mathbf{x} + \mathbf{z}/2, x^0 + z^0/2) \psi_{a'}(\mathbf{x} - \mathbf{z}/2, x^0 + z^0/2) \\ &= \int d^4x \mathcal{S}(x, p_a) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando a aproximação de suavidade nas probabilidades $P_1(\mathbf{p}_a)$ e $P_1(\mathbf{p}_b)$, obtemos finalmente a fórmula de Koonin-Pratt no sistema do centro de massa dada na Eq. (3.1), com a função $S(\mathbf{r})$, que representa a fonte de emissão, dada por

$$S(\mathbf{r}) = \frac{\int d^4x \int dy^0 \mathcal{S}(x + y/2, M/2) \mathcal{S}(x - y/2, M/2)}{(\int d^4x \mathcal{S}(x, M/2))^2} \quad (3.44)$$

Uma questão que se coloca para o cálculo femtoscópico, via fórmula de Koonin-Pratt (3.1), da função de correlação é a parametrização utilizada para a função da fonte $S(\mathbf{r})$. Na tese da Ref. [122] foi feito um estudo sobre o impacto de diferentes parametrizações sobre a função de correlação. A conclusão desse estudo foi que diferentes formas afetam qualitativamente a forma de $C(k)$, mas não afeta o fato de que as correlações são mais intensas para valores baixos de k . Isso significa que as descrições dos dados experimentais com ou sem os efeitos da interação entre os hádrons devem mostrar diferenças significativas, se a interação for suficientemente forte. Recentemente, a Ref. [130] calculou funções de correlação para pares de bárions com estranheza $S = -2$ usando teoria efetiva quiral covariante. Ela comparou o efeito de diferentes parametrizações (gaussiana e Cauchy) para a função da fonte sobre a função de correlação e concluiu que os dados experimentais atuais não são sensíveis ao formato da fonte.

Em nossos estudos das interações $Y_c N$ e $J/\psi N$ vamos seguir a literatura, usando a parametrização gaussiana esférica para fonte de emissão $S(\mathbf{r}) = S_{12}(r)$,

a saber:

$$S(r) = \frac{1}{(4\pi R^2)^{3/2}} e^{-r^2/4R^2} \quad (3.45)$$

Na femtoscopia envolvendo hádrons leves, o valor de R é tipicamente $R = 1$ fm para colisões próton-próton e $R = 6$ fm para colisões AA [131]. No nosso estudo da interação $Y_c N$ variamos R entre 1 fm e 5 fm, motivados principalmente pela interação análoga no setor estranho, $Y N$. Para o caso da interação $J/\psi N$, variamos R entre 1 fm e 3 fm, já que o tamanho da fontes de emissão diminui com o aumento da massa dos hádrons emitidos [77]. É importante mencionar que o tamanho da fonte em femtoscopia não se refere à extensão de todo o sistema que emite partículas, que pode chegar a mais de 10 fm [76, 125].

3.2 A função de onda $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ e a interação forte

A função de onda relativa $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ que define a função de correlação $C(\mathbf{k})$ na Eq. (3.1) contém as informações sobre a interação entre os dois hádrons de interesse, no nosso caso as interações $Y_c N$ e $J/\psi N$. A função de correlação $C(k)$ é sensível às propriedades de $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ para baixos valores do momento relativo \mathbf{k} , momentos tipicamente correspondentes a energias relativas muito menores que as massas de repouso dos hádrons em questão. Para valores baixos do momento relativo, espera-se que somente a componente com momento angular orbital relativo nulo da $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ seja afetada pela interação. Essas interações também dependem dos spins dos hádrons, o que complica a obtenção de $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, como será visto nos próximos capítulos.

No caso do sistema $Y_c N$, a separação da componente com $l = 0$ de $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ deve levar em conta a presença da interação coulombiana entre os hádrons além, obviamente, da interação forte. A interação coulombiana é de longo alcance e requer um tratamento especial. Aqui vamos discutir somente os efeitos da interação forte. A interação coulombiana será discutida no próximo capítulo, onde vamos tratar do sistema $Y_c N$.

Na ausência de interação forte (e coulombiana) entre os hádrons, $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ seria uma onda plana, cuja componente com $l = 0$ é dada pela função de Bessel esférica $j_0(kr) = \sin(kr)/kr$. Como estamos supondo que interações nos sistemas $Y_c N$ e $J/\psi N$ ocorrem somente para $l = 0$, podemos escrever $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ como

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_0(k, r) + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - j_0(kr) \quad (3.46)$$

Na forma como foi escrita, fica explícita a separação da componente com $l = 0$, denotada $\phi_0(k, r)$, e a correspondente subtração da onda plana a sua componente com $l = 0$. Substituindo a Eq. (3.46) na fórmula de Koonin-Pratt, obtemos para uma fonte esfericamente simétrica normalizada a 1:

$$\begin{aligned} C(k) &= 4\pi \int dr r^2 S_{12}(r) |\phi_0(k, r) + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - j_0(kr)|^2 \\ &= 1 + 4\pi \int dr r^2 S_{12}(r) \left[|\phi_0(k, r)|^2 - |j_0(kr)|^2 \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

É importante notar que é necessário, em princípio, conhecer a função de onda $\phi_0(k, r)$ para todos os valores de r , i.e., para $0 \leq r \leq \infty$. Precisamos da $\phi_0(k, r)$ para todos valores de r porque os hádrons estão sempre sob o efeito da interação se a fonte de emissão não for muito extensa. Isso significa que $\phi_0(k, r)$ não é a função de onda assintótica de espalhamento. Lembramos que a função de onda assintótica de espalhamento difere da função de onda livre por uma fase δ_0 , o deslocamento de fase. Esse fato de precisarmos $\phi_0(k, r)$ em todo intervalo $0 \leq r \leq \infty$ complica consideravelmente a interpretação dos dados experimentais para $C(k)$. Complica porque, para conectar a $C(k)$ experimental com as propriedades da interação, precisamos resolver a equação de Schrödinger, ou de Lippmann-Schwinger, para um dado potencial para todos os valores de r . Uma simplificação nessa análise é supor que a função de onda $\phi_0(k, r)$ pode ser aproximada pela função de onda de espalhamento $\phi_0^{\text{as.}}(k, r)$. Essa aproximação é conhecida como aproximação, ou modelo, de Lednicky e Lyuboshits, que será discutida na próxima seção.

3.3 Modelo de Lednicky-Lyuboshits (LL)

A validade do modelo de Lednicky-Lyuboshits (LL) depende essencialmente de duas escalas de comprimento que determinam as propriedades de $C(k)$. Essas escalas são o raio R da fonte de emissão e o alcance efetivo r_0 da interação entre os dois hádrons. Quando $R \gtrsim r_0$, os dois hádrons não estão continuamente dentro do raio de ação da interação entre eles, que interagem espalhando-se um contra o outro. Portanto, a função de onda relativa é dada por $\phi_0^{\text{as.}}(k, r)$. A grande vantagem dessa aproximação é que $C(k)$ pode ser expressa em termos da amplitude de espalhamento que, para baixos valores de k , pode ser expressa em termos do comprimento de espalhamento a_0 e do alcance efetivo r_0 . Desta forma, a função de correlação $C(k)$ relaciona-se diretamente com as propriedades

da interação através desses dois números.

Como dito acima, se não houvesse interação entre os hádrons, a função de onda relativa assintótica $\phi_0^{\text{as.}}(k, r)$ seria dada por $\text{sen}(kr)/kr$. A interação entre os hádrons induz um deslocamento de fase $\delta_0(k) \equiv \delta_0$:

$$\phi_0^{\text{as.}}(k, r) = \frac{1}{kr} \text{sen}(kr + \delta_0) \quad (3.48)$$

Essa função pode ser reescrita em termos da amplitude de espalhamento para $l = 0$, $f_0(k)$. Para tal, lembramos que a componente com $l = 0$ da matriz S , $S_0(k)$, relaciona o deslocamento de fase δ_0 à amplitude de espalhamento $f_0(k)$ como [132]:

$$S_0(k) = e^{2i\delta_0} = 1 + 2ikf_0(k) \rightarrow f_0(k) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \text{sen}\delta_0 \quad (3.49)$$

Inicialmente, expressamos a Eq. (3.48) em termos de $S_0(k) = e^{2i\delta_0}$:

$$\begin{aligned} \phi_0^{\text{as.}}(k, r) &= \frac{1}{2ikr} \left(e^{ikr+i\delta_0} - e^{-ikr-i\delta_0} \right) = \frac{e^{-i\delta_0}}{2ikr} \left(-e^{-ikr} + e^{2i\delta_0} e^{ikr} \right) \\ &= \frac{e^{-i\delta_0}}{2ikr} \left[e^{ikr} - e^{-ikr} + 2ikf_0(k) e^{ikr} \right] \\ &= e^{-i\delta_0} \left[j_0(kr) + f_0(k) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

A seguir, tomamos o módulo quadrado dessa expressão:

$$|\phi_0^{\text{as.}}(k, r)|^2 = j_0^2(kr) + \frac{1}{r^2} |f_0(k)|^2 + j_0(kr) \frac{1}{r} \left[f_0^*(k) e^{-ikr} + f_0(k) e^{ikr} \right] \quad (3.51)$$

e substituímos o resultado na expressão para $C(k)$ na Eq. (3.47):

$$C(k) = 1 + 4\pi \int_0^\infty dr r^2 S_{12}(r) \left\{ \frac{1}{r^2} |f_0(k)|^2 + j_0(kr) \frac{1}{r} \left[f_0^*(k) e^{-ikr} + f_0(k) e^{ikr} \right] \right\} \quad (3.52)$$

Para prosseguir além desse ponto, precisamos da forma explícita da fonte $S_{12}(r)$. Usando a forma gaussiana dada na Eq. (3.45) e integrando sobre r , obtemos

$$C(k) = 1 + \frac{|f_0(k)|^2}{2R} + \frac{2\text{Re}f_0(k)}{\sqrt{\pi R}} F_1(2kR) - \frac{\text{Im}f_0(k)}{R} F_2(2kR) \quad (3.53)$$

em que foram introduzidas as funções $F_1(x)$ e $F_2(x)$ dadas por:

$$F_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x dt e^{-(x^2-t^2)} \quad (3.54)$$

$$F_2(x) = \frac{1}{x} \left(1 - e^{-x^2}\right) \quad (3.55)$$

A substituição de $\phi_0(k, r)$ por $\phi_0^{\text{as.}}(k, r)$ para todos os valores de r no integrando da Eq. (3.47) introduz erros quando pares de hádrons são emitidos a uma distância relativa menor que o alcance da interação. Uma maneira de corrigir esse erro foi introduzida por Lednicky e Lyuboshitz [83], os quais empregaram a teoria do alcance efetivo [133] para estimar a correção $|\phi_0(k, r) - \phi_0^{\text{as.}}(k, r)|^2$ para $r \simeq 0$. Essa correção introduz um fator multiplicativo no termo $|f_0(k)|^2/2R$ na Eq. (3.53), o que leva à formula de Lednicky-Lyuboshits (LL) para $C(k)$:

$$C(k) = 1 + \frac{|f_0(k)|^2}{2R} \left(1 - \frac{r_0}{2\sqrt{\pi R}}\right) + \frac{2\text{Re}f_0(k)}{\sqrt{\pi R}} F_1(2kR) - \frac{\text{Im}f_0(k)}{R} F_2(2kR) \quad (3.56)$$

onde r_0 é o alcance efetivo que, junto com o comprimento de espalhamento a_0 , parametriza a amplitude de espalhamento $f_0(k)$ para $k \rightarrow 0$ [133, 132]:

$$f_0(k) = \frac{1}{k \cot \delta_0 - ik} \xrightarrow{k \approx 0} \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2}r_0 k^2 - ik} \quad (3.57)$$

A expansão de $f_0(k)$ em termos de a_0 e r_0 é conhecida como a expansão de alcance efetivo (*effective range expansion*). Notamos que LL usam $1/f_0$ e d_0 em vez de $-1/a_0$ e de r_0 , respectivamente, nas expressões acima. Muitos autores seguem essa notação, incluindo experimentais das colaborações do RHIC e do LHC.

Com essa discussão do modelo de Lednicky e Lyuboshits finalizamos essa revisão sobre os aspectos principais da teoria da femtoscopia que vamos empregar nos próximos dois capítulos. Como mencionado acima, as contribuições devidas a interações dependentes dos spins dos hádrons e a interação coulombiana serão discutidas no contexto de cada sistema, $Y_c N$ e $J/\psi N$.

Capítulo 4

Femtoscopia da interação $Y_c N$

Conforme discutimos na Introdução, no momento a única forma de se extrair informações experimentais sobre a interação $Y_c N$ é através de medidas de funções de correlação femtoscópicas em experimentos de colisões pp , pA ou AA a altas energias no RHIC e LHC. Experimentos dedicados envolvendo colisões hadrônicas a baixas energias, previstos para os laboratórios FAIR e JPARC, possivelmente vão ter essa capacidade também, mas somente no final dessa década ou mais além ainda. No que segue, vamos apresentar as nossas previsões para a função de correlação $C(k)$ para o sistema $Y_c N$ [99]. As nossas previsões para $C(k)$ fazem uso de resultados para a interação $Y_c N$ advindos de simulações de QCD na rede [134, 135] e de modelos fenomenológicos [136, 56, 50].

Por razões técnicas, as simulações de QCD na rede das Refs. [134, 135] foram realizadas com massas dos quarks leves bem acima de seus valores físicos. Portanto, os resultados dessas simulações precisam ser extrapolados para valores físicos dessas massas¹. Haidenbauer e Krein [137] desenvolveram uma teoria de campos efetiva (*effective field theory* - EFT) quiral que permite fazer tais extrapolações. Discutimos detalhes dessa EFT na próxima seção. Essa EFT tem como parâmetros livres constantes de baixas energias (*low energy constants* - LEC). Essas LEC são ajustadas empregando os dados das simulações das Refs. [134, 135]. Na prática, não é a massa dos quarks que é empregada na extrapolação, mas sim a do pión. Essas massas estão relacionadas através da relação de Gell-Mann–Oakes-Renner, dada pela Eq. (2.31).

Consideramos modelos fenomenológicos empregando diferentes graus de liberdade para serem representativos de vários tipos de modelo na literatura. Espe-

¹Como vimos no Capítulo 2, por valores físicos das massas dos quarks deve-se entender que são aqueles extraídos de dados experimentais empregando um particular esquema teórico. As massas dos quarks leves tabuladas pelo Particle Data Group [14], e transcritas na Tabela 2.3, referem-se ao esquema \overline{MS} .

cificamente, empregamos o modelo da Ref. [136] que emprega troca de mésons, o da Ref. [56] que mistura quarks constituintes e troca de mesons e o da Ref. [50] que emprega quarks constituintes. Como explicamos mais adiante, as previsões desses modelos para as propriedades de baixas energias da interação $Y_c N$ podem ser simuladas empregando a teoria efetiva da Ref. [137]. Neste caso, em vez de empregar os dados da QCD da rede para fixar as LEC, são empregados os resultados para o comprimento de espalhamento e o alcance efetivo da interação $Y_c N$ preditos por esses modelos.

4.1 A interação $Y_c N$

Nesta seção vamos discutir a obtenção das expressões para a interação $Y_c N$ que serão utilizadas para o cálculo da correspondente função de correlação $C(k)$. A teoria efetiva para descrever a interação $Y_c N$ desenvolvida na Ref. [137] desempenha papel central na obtenção de nossas previsões para a função de correlação femtoscópica. Como dito acima, ela serve tanto para extrapolar dados de QCD na rede para valores físicos da massa do pión, como também para simular modelos fenomenológicos, i.e., para reproduzir as previsões desses modelos para os observáveis de baixa energia do espalhamento sem precisar dos detalhes desses modelos. Em vista disso, nessa seção vamos descrever com algum detalhe os passos principais do desenvolvimento dessa teoria efetiva.

A estratégia empregada na Ref. [137] é similar àquela empregada em trabalhos prévios [138, 139] sobre a interação YN , onde $Y = (\Lambda, \Sigma)$ indica híperons com estranheza. Os bárions Λ e Σ são eletricamente neutros, ao passo que Λ_c e Σ_c são carregados. Portanto, é necessário considerar os efeitos da interação coulombiana no nosso caso, já que são importantes a baixas energias. Esses efeitos coulombianos podem ser exatamente incorporados a essa teoria, como será visto na próxima seção.

Inicialmente, a teoria de perturbação quiral é empregada para construir um potencial $Y_c N$ como função da massa do pión. A parte de longo alcance desse potencial é dada pelo potencial da troca de um pión (*one pion exchange - OPE*). Esse potencial depende da massa do pión e de constantes de acoplamento, as quais também dependem das massas dos quarks. A parte de curto alcance do potencial é descrita por termos de contato, i.e., funções delta de Dirac e suas derivadas — no espaço dos momentos, eles são respectivamente constantes (independem

do momento) e potências do momento. Há termos de contato que dependem da massa do pión e outros que não dependem. Os únicos parâmetros livres do potencial são os coeficientes (LEC) que multiplicam esses termos de contato. Esse potencial é então empregado numa equação de Lippmann-Schwinger para calcular observáveis. A baixas energias, os observáveis de interesse são o comprimento de espalhamento e o alcance efetivo. Os termos de contato são então fixados ajustando-os, via *fitting*, aos dados de simulações de QCD na rede da interação $Y_c N$. A seguir, esses resultados de QCD na rede, obtidos para valores não físicos da massa do pión, são extrapolados para o limite físico empregando as previsões da EFT quiral. A equação de Lippmann-Schwinger envolve um propagador que depende das massas dos bárions (N e Y_c) envolvidos na interação, as quais dependem das massas dos quarks. Portanto, ao ajustar os dados da QCD na rede, essas massas precisam ser as mesmas que as empregadas na simulações. Da mesma forma, as constantes de acoplamento que entram no potencial OPE precisam ser extrapoladas para os valores da massa do pión empregados nas simulações.

Para descrever processos de baixas energias, somente as contribuições com momentos angulares mais baixos, onda S , são relevantes na decomposição em ondas parciais do potencial. Em vista disso, seguindo a Ref. [137], consideramos somente as contribuições² 1S_0 , 3S_1 e 3D_1 ; note-se, na equação abaixo, que a onda parcial D é considerada no potencial devido a transições de ou para onda S . Os termos de contato para o potencial (no espaço de momentos) podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
 V(^1S_0) &= \tilde{C}_{1S_0} + \tilde{D}_{1S_0} m_\pi^2 + (C_{1S_0} + D_{1S_0} m_\pi^2) (k^2 + k'^2) \\
 V(^3S_1) &= \tilde{C}_{3S_1} + \tilde{D}_{3S_1} m_\pi^2 + (C_{3S_1} + D_{3S_1} m_\pi^2) (k^2 + k'^2) \\
 V(^3D_1 - ^3S_1) &= C_{\epsilon_1} k'^2 \\
 V(^3S_1 - ^3D_1) &= C_{\epsilon_1} k^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que $k = |\mathbf{k}|$ e $k' = |\mathbf{k}'|$, com \mathbf{k} e \mathbf{k}' sendo respectivamente os momentos inicial e final dos bárions no referencial do centro de massa. As quantidades C_i, \tilde{C}_i, D_i e \tilde{D}_i

²Em notação espectroscópica, a letra indica o momento angular orbital: S, P, D para $L = 0, 1, 2$ respectivamente; o superíndice é a multiplicidade $(2S + 1)$ do spin total S e o subíndice é o momento angular total J .

são as LEC mencionadas acima. O potencial OPE é dado por

$$V_{BN \rightarrow B'N}^{OPE} = -f_{BB'\pi} f_{NN\pi} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} \mathcal{I}_{BN \rightarrow B'N} \quad (4.2)$$

em que B e B' denotam $Y_c = (\Lambda_c, \Sigma_c)$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ é o momento transferido, σ_i , $i = 1, 2, 3$ são as matrizes de Pauli e $\mathcal{I}_{BN \rightarrow B'N}$ são fatores de isospin, cujos valores podem ser encontrados na Tabela 1 da Ref. [138], na qual deve-se fazer as substituições $\Lambda \rightarrow \Lambda_c$ e $\Sigma \rightarrow \Sigma_c$. Devido à conservação de isospin $\mathcal{I}_{NN \rightarrow \Lambda_c N} = 0$. A Ref. [137] não emprega a aproximação de simetria $SU(4)$ de sabor, já que ela é fortemente quebrada porque a massa do quark charm c é muito maior que a dos quarks u , d e s . Se essa aproximação fosse adotada, as contribuições devidas a trocas dos mésons η e D teriam que ser consideradas em pé de igualdade com a troca de um pión. Como elas são de curto alcance devido aos altos valores das massas dos mésons η e D , os termos de contato incorporam seus efeitos. Ainda mais, as constantes de acoplamento $f_{BB'\pi}$ correspondentes aos vértices $\Lambda_c \Sigma_c \pi$ e $\Sigma_c \Sigma_c \pi$, não são iguais. Elas são dadas em termos da constante de decaimento eletrofraca do pión $F_\pi(m_\pi^2)$ e das constantes de acoplamento axial-vetorial $g_A^{BB'}(m_\pi^2)$ como:

$$f_{BB'\pi}(m_\pi^2) = \frac{g_A^{BB'}(m_\pi^2)}{2F_\pi(m_\pi^2)} \quad (4.3)$$

As simulações de QCD na rede da Ref. [140] obtiveram a dependência de F_π com m_π^2 , com $F_\pi = 93$ MeV sendo o valor físico, i.e., seu valor para $m_\pi = 138$ MeV. Os resultados de simulações de QCD na rede da Ref. [141] mostram que g_A^{NN} praticamente independe de m_π , enquanto que para $g_A^{\Sigma_c \Sigma_c}$ essa dependência é muito fraca. Por outro lado, não existem dados de QCD na rede para a dependência de $g_A^{\Lambda_c \Sigma_c}$ com m_π^2 . Por essas razões, a Ref. [137] usa para essas constantes seus valores físicos, a saber: $g_A^{NN} = 1.27$, $g_A^{\Sigma_c \Sigma_c} = 0.71$ e $g_A^{\Lambda_c \Sigma_c} = 0.74$.

Interações de contato quando substituídas em uma equação de Schrödinger ou Lippmann-Schwinger precisam ser regularizadas. Existem diferentes maneiras de regularizar essas interações [142]. A Ref. [137] emprega um esquema *cutoff*, em que as interações são efetivamente zeradas para valores de momentos p e p' acima de um certo valor Λ . Especificamente, os potenciais da Eq. (4.1) são multiplicados pela função regularizadora:

$$f(k', k) = e^{-(k'^4 - k^4)/\Lambda^4} \quad (4.4)$$

Motivados pelos estudos dos sistemas ΛN e ΣN nas Refs. [138, 139], os autores da Ref. [137] empregam para o cutoff Λ dois valores, $\Lambda = 500$ MeV e $\Lambda = 600$ MeV. A dependência dos resultados com o valor de Λ será discutida mais adiante, na seção sobre os resultados.

Esses são os passos principais da construção da teoria efetiva da Ref. [137] no que tange à interação forte. Na próxima seção vamos discutir o procedimento para se calcular a função de correlação, bem como a incorporação dos efeitos da interação coulombiana.

4.1.1 Resultados numéricos para a interação $Y_c N$

Como dito acima, empregamos as interações extraídas de simulações de QCD na rede e de modelos fenomenológicos. Os resultados de QCD na rede precisam ser extrapoladas para massas físicas dos quarks. Para tal, empregamos a teoria efetiva da Ref. [137]. Essa mesma teoria efetiva é empregada para simular os resultados de modelos fenomenológicos.

Para simular os resultados de modelos fenomenológicos, empregamos as Eqs. (4.1) e (4.2), em que os coeficientes das interações de contato (LECs) e $\Lambda = 500 - 600$ MeV são ajustados para reproduzir o comprimento de espalhamento e o alcance efetivo previstos pelos modelos. Uma vez fixados os coeficientes LECs, pode-se resolver a equação de Lippmann-Schwinger para obter a função de onda $\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$. Como dito acima, empregamos os modelos de Vidaña et al. [136], Maeda et al. [56] e Garcilazo et al. [50]. Esses modelos são representativos de uma ampla variedade de modelos empregando ou graus de liberdade hadrônicos, ou de quarks e glúons ou misturando hádrons, quarks e glúons. A estratégia de empregar uma teoria efetiva para simular os resultados de modelos permite capturar as suas características essenciais no tocante a intensidade e alcance das interações. Desta forma, pode-se obter uma visão global sobre o impacto das propriedades desses potenciais nas funções de correlação, bem como avaliar eventuais diferenças entre eles. É importante notar que, dado o presente estágio do nosso conhecimento sobre a interação $Y_c N$, não é necessário (nem aqui se almeja) reproduzir exata e quantitativamente os resultados desses modelos fenomenológicos para se ter essa visão global.

A Tabela 4.1 mostra os valores do comprimento de espalhamento a e do alcance efetivo r correspondentes às varias interações. Os subíndices s e t indicam

Tabela 4.1: Comprimento de espalhamento (a) e alcance efetivo (r) da interação $Y_c N$ para os estados singlete 1S_0 (s) e tripleto 3S_1 (t). LQCD-e(500) e LQCD-e(600) indicam os potenciais extraídos de simulações de QCD na rede, extrapolados para $m_\pi = 140$ MeV e regularizados com a função $f(k', k)$ da Eq. (4.4) com $\Lambda = 500$ MeV e $\Lambda = 600$ MeV. Model A, CTNN-d e CQM indicam respectivamente os potenciais das Refs. [136], [56] e [50] — os números entre parênteses indicam os valores originais preditos por esses modelos.

Potencial	a_s (fm)	r_s (fm)	a_t (fm)	r_t (fm)
LQCD-e (500) [137]	-0.85	2.88	-0.81	3.50
LQCD-e (600) [137]	-1.01	2.61	-0.98	3.15
LQCD-e (500) [51]	-0.85	2.88	-0.79	3.58
LQCD-e (600) [51]	-1.01	2.61	-0.91	3.34
Model A [136]	-2.60 (-2.60)	2.67 (2.86)	-15.88 (-15.87)	1.64 (1.64)
CTNN-d [56]	5.31 (5.31)	1.20 (1.20)	5.01 (5.01)	1.20 (1.20)
CQM [50]	-0.87 (-0.86)	4.55 (5.64)	-2.31 (-2.31)	2.81 (2.97)

respectivamente os valores para os estados singlete 1S_0 e tripleto 3S_1 de spin.

As quatro primeiras linhas, indicadas por LQCD-e, mostram os resultados da QCD na rede que foram devidamente extrapolados para o limite físico da massa do pión empregando a EFT descrita acima, em que os termos de contato foram regularizados com a função regularizadora $f(k', k)$ dada na Eq. (4.4), parametrizada em termos do parâmetro Λ . Os valores de $\Lambda = 500$ MeV e $\Lambda = 600$ MeV estão indicados respectivamente por LQCD-e(500) e LQCD-e(600). Nestes resultados estão incluídos aqueles obtidos na Ref. [51], os quais usam os resultados mais recentes de QCD na rede da Ref. [135]. Esses novos dados permitem incluir o canal $\Sigma_c N$ diretamente. No estudo original da Ref. [137], esse canal entrava somente de maneira indireta via OPE ao se resolver a equação de Lippmann-Schwinger, i.e., $V_{\Lambda_c N \rightarrow \Lambda_c N} \sim V_{\Lambda_c N \rightarrow \Sigma_c N}^{\text{OPE}} G_{\Sigma_c N} V_{\Sigma_c N \rightarrow \Lambda_c N}^{\text{OPE}}$, onde $G_{\Sigma_c N}$ é a função de Green (propagador) do estado intermediário $\Sigma_c N$.

As outras três linhas na tabela, Model A, CTNN-d e CQM, mostram os resultados simulados pela EFT para os potenciais fenomenológicos das Refs. [136], [56], e [50]. Os números entre parênteses indicam os valores originais preditos por esses modelos — claramente, a EFT reproduz razoavelmente bem esses valores originais. Nota-se também que os valores de a e r correspondentes aos modelos efetivos são bastante diferentes entre si, mostrando que se tratam de dinâmicas bem distintas e que a femtoscopia pode discriminá-los. Detalhes das hipóteses

empregadas pelos modelos são encontrados nas respectivas referências indicadas na Tabela 4.1.

A seguir, mostramos os deslocamentos de fase (*phase shifts*) δ correspondentes aos casos discutidos acima. Por completeza, antes de mostrar os nossos resultados obtidos para os diferentes potenciais fenomenológicos, mostramos na Figura 4.1 os deslocamentos de fase obtidos na Ref. [137] correspondentes às extrapolações de dados de QCD na rede [134].

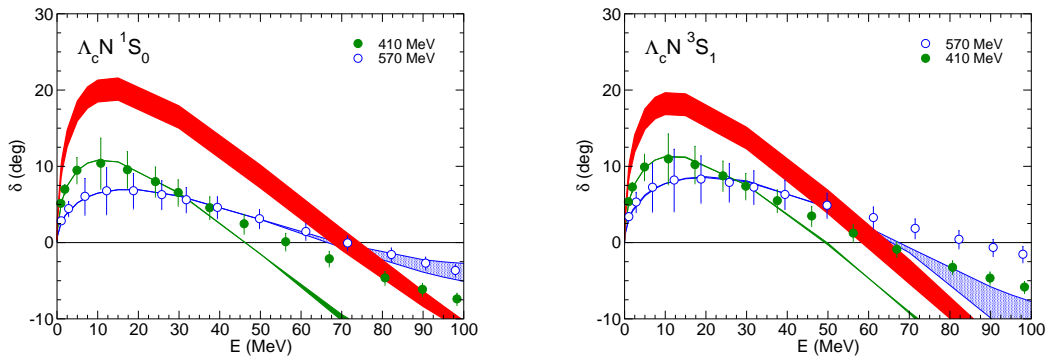


Figura 4.1: Deslocamentos de fase (*phase shifts*) como função da energia do centro de massa obtidos na Ref. [137] correspondentes à extrapolação de dados da QCD na rede pela colaboração HAL [134]. Os dados da rede são para $m_\pi = 570$ MeV e $m_\pi = 410$ MeV e os obtidos por [137] para $m_\pi = 138$ MeV são os das bandas em vermelho. As larguras das curvas representam a dependência dos resultados (fit e extrapolações) com Λ , que foi variado entre $\Lambda = 500$ MeV e $\Lambda = 600$ MeV.

Uma primeira observação é que a EFT é capaz de reproduzir muito bem os resultados para $m_\pi = 570$ MeV em todo o intervalo de energias considerado, mas para $m_\pi = 410$ MeV essa reprodução quase que perfeita acontece somente para energias até aproximadamente $E = 40$ MeV. Uma segunda observação refere-se à sensibilidade do ajuste dos dados de QCD na rede em relação ao parâmetro Λ que entra na função regularizadora $f(k', k)$ da Eq. (4.4), a saber: o ajuste praticamente independe do valor de Λ , como pode ser visto pela larguras quase imperceptíveis das linhas verde e azul. As bandas em vermelho indicam os resultados extrapolados para $m_\pi = 138$ MeV; a largura das bandas indica a variação em Λ . Não mostramos os efeitos produzidos pela inclusão direta do canal $\Sigma_c N$, usando os resultados mais recentes de QCD na rede [135], porque eles são muito pequenos, como mostrado na Ref. [51]. Por fim, não se percebem grandes alterações no comportamento da desfasagem em ambos os canais, sendo as diferenças mais

perceptivas com o aumento da energia.

Os resultados para os deslocamentos de fase correspondentes aos potenciais fenomenológicos e ao da LQCD devidamente extrapolados para a massa física do pión (LQCD-e) simulados com a EFT apresentada na Seção 4.1 são mostrados na Figura 4.2.

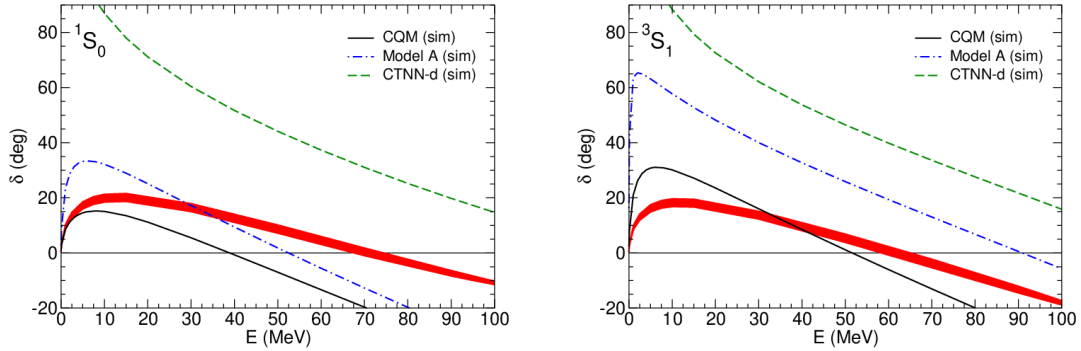


Figura 4.2: Deslocamentos de fase como função da energia do centro de massa correspondentes aos potenciais fenomenológicos Model A [136], CTNN-d [56] e CQM [50] simulados com a EFT da Ref. [137]. A banda vermelha representa os resultados de QCD na rede extrapolados para $m_\pi = 138$ MeV (LQCD-e) mostrados na Figura 4.1.

À primeira vista, percebe-se a semelhança de que os três modelos efetivos simulados e o LQCD-e fornecem defasagens essencialmente decrescentes com o aumento da energia do centro de massa; de fato, para o intervalo apresentado, a defasagem obtida pelo CNTT-d é decrescente, enquanto que as obtidas pelos demais assumem um pico num baixo valor de momento e, então, decrescem. Olhando mais atentamente, vê-se que o modelo CTNN-d da Ref. [56] prevê, em ambos os canais, uma interação significativamente mais atrativa que os demais modelos. De fato, este modelo fornece uma energia de ligação $\Lambda_c N$ comparável à do deutério [56]. O Modelo A na Ref. [136], deduzido de um potencial YN via troca de méson a partir de uma simetria $SU(4)$, fornece uma interação respectivamente moderada e fortemente atrativa nos canais de singleto e tripleto, sendo o resultado para o canal de singleto mais próximo do obtido para o LQCD-e. O modelo de quark constituinte (QCM) derivado por Garcilazo et al. em [50] notadamente é o que melhor se aproxima dos resultados da rede já extrapolados, sendo ligeiramente menos atrativo que o LQCD-e para o canal 1S_1 e um pouco mais atrativo para o 3S_1 . É importante mencionar que, levando-se em conta as atuais incertezas

no cálculos via LQCD [134, 135] e na extrapolação, a Ref. [137] estima ser da ordem de ± 0.3 fm nos valores dos comprimentos de espalhamento $\Lambda_c N$, pode-se afirmar que o modelo CQM em [50] fornece previsões bem semelhantes às da rede. Por fim, destaca-se que os resultados apresentados nestes gráficos não consideram a interação coulombiana, pois o efeito desta não é significativo quando a interação entre os hádrons é pouco atrativa [137, 51], como é o caso aqui. A largura da banda ocorre em razão do intervalo de valores adotados para o *cutoff* Λ ($500 \text{ MeV} \leq \Lambda \leq 600 \text{ MeV}$) o que é necessário para regularizar a equação de Lippmann-Schwinger, como discutido acima.

4.2 Cálculo da função de correlação

No Capítulo 3 demos ênfase à função de correlação para partículas não idênticas considerando apenas a interação forte; porém, aqui, precisamos incluir também o efeito da interação coulombiana. Nas próximas subseções apresentaremos o desenvolvimento para o cálculo da função de correlação com e sem a interação coulombiana em conformidade com a expansão em ondas parciais. As expressões apresentadas a seguir foram as realmente utilizadas para obter os resultados exibidos em seguida e que foram publicados em [99].

4.2.1 Função de correlação sem interação coulombiana

O ponto de partida para o cálculo da função de correlação no referencial de centro de massa ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$) é a fórmula de Koonin-Pratt válida aproximadamente [123, 143], a qual é a expressão dada na Eq. (3.1), repetida aqui para completeza e mais fácil leitura:

$$C(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} S(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})|^2 \quad (4.5)$$

em que $S(\mathbf{r})$ é a função da fonte e $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ é a função de onda que descreve o par de partículas; \mathbf{r} é a posição relativa de uma partícula à outra e $\mathbf{k} = (M_2\mathbf{p}_1 - M_1\mathbf{p}_2)/(M_1 + M_2)$ com M_1 e M_2 representando as massas dos hádrons, ver capítulo anterior.

Sabendo que para os casos de interesse, baixas energias, as correlações se dão por interação da parte com momento angular $l = 0$ da função de onda, as modificações são significativas apenas nas ondas S , que denotaremos por $\psi_0(k, r)$,

durante o espalhamento, de forma a se escrever [144]:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \psi_0(k, r) - j_0(kr) \quad (4.6)$$

em que j_0 é a função de Bessel esférica de índice 0, que corresponde à componente de momento angular nulo da função de onda não interagente. Como exposto no capítulo anterior, costuma-se considerar uma fonte gaussiana, estática e esfericamente simétrica, de forma que substituindo (4.6) em (4.5) se obtém:

$$C(k) = 1 + 4\pi \int_0^\infty dr r^2 S(r) [|\psi_0(k, r)|^2 - |j_0(kr)|^2] \quad (4.7)$$

o problema, então, consiste em determinar ψ_0 .

A função $\psi_0(k, r)$ é determinada a partir da equação de Lippmann-Schwinger, que é mais apropriada para potenciais não locais, como os apresentados na seção anterior e utilizados neste trabalho. A equação de Lippmann-Schwinger é desenvolvida em ondas parciais na seção C.3 e pode ser resolvida numericamente. Uma vez obtida $\psi_0(k, r)$, imediatamente se tem a função de correlação via (4.7) e conhece-se $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, cujo comportamento assintótico ($r \rightarrow \infty$) determina as defasagens, como exposto no Apêndice C.

4.2.2 A interação coulombiana

A interação coulombiana precisa ser levada em conta no cálculo da função de onda relativa $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ que entra na fórmula de Koonin-Pratt – a Eq. (4.5) com ψ substituída por ϕ . Na ausência da interação forte, a função $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ seria dada pela função de onda de espalhamento de Coulomb, a qual denotamos $\phi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r})$. Como a interação coulombiana é de longo alcance, não se pode tomar somente a contribuição de onda S para $\phi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r})$. No entanto, ainda precisamos isolar de $\phi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r})$ essa contribuição, pois ela precisa ser levada em conta quando se calcula a contribuição de onda S da interação forte.

Vamos denotar por $\phi_0^{SC}(k, r)$ a contribuição de onda S para $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ contendo os efeitos da interação forte e da interação coulombiana simultaneamente. Dessa forma, a função de onda relativa $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ poder ser escrita como

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_0^{SC}(k, r) + \phi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r}) - \phi_0^C(k, r) \quad (4.8)$$

onde $\phi_0^C(k, r)$ é a contribuição de onda S da função de onda de Coulomb, $\phi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r})$.

Portanto, precisamos da decomposição em ondas parciais da função de onda de espalhamento de Coulomb [145]:

$$\phi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\sigma_l} \frac{F_l(\eta, kr)}{kr} P_l(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \quad (4.9)$$

onde σ_l é o deslocamento de fase de Coulomb e η o parâmetro de Sommerfeld, dados por:

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l+1+i\eta) = \frac{1}{2i} [\ln \Gamma(l+1+i\eta) - \ln \Gamma(l+1-i\eta)] \quad (4.10)$$

$$\eta = \frac{\mu c^2 \alpha}{\hbar c k}, \quad \mu = \frac{m_p m_{\Lambda_c}}{m_p + m_{\Lambda_c}}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (4.11)$$

em que $\Gamma(z)$ é a função gamma de Euler. A função $F_l(\eta, \rho)$, com $\rho = kr$, é a função *regular* de Coulomb, a qual pode ser escrita em termos de funções especiais. Apesar de não entrar explicitamente na Eq. (4.9), precisamos também da função *irregular* de Coulomb $G_l(\eta, \rho)$, que é necessária para obter o comportamento assintótico da função de onda, como será discutido logo abaixo. Próximo da origem, elas se comportam como $F_l(\eta, \rho \rightarrow 0) \sim \rho^{l+1}$ e $G_l(\eta, \rho \rightarrow 0) \sim \rho^{-l}$. Expressões convenientes para $F_l(\eta, \rho)$ e $G_l(\eta, \rho)$, que podem ser facilmente implementadas no software Mathematica [146], são dadas em termos da função de Whitakker com argumento e índice imaginários $W_{\mp i\eta, l+1/2}(\mp 2i\rho)$ [147]:

$$F_l(\eta, \rho) = \frac{1}{2i} [H_l^{(+)}(\eta, \rho) - H_l^{(-)}(\eta, \rho)] \quad (4.12)$$

$$G_l(\eta, \rho) = \frac{1}{2} [H_l^{(+)}(\eta, \rho) + H_l^{(-)}(\eta, \rho)] \quad (4.13)$$

onde

$$H_l^{(\pm)}(\eta, \rho) = e^{\pi(\eta \mp il)/2 \pm i\sigma_l} W_{\mp i\eta, l+1/2}(\mp 2i\rho) \quad (4.14)$$

Portanto, substituindo (4.8) e (4.9) em (4.5), usando a simetria esférica da função

de fonte gaussiana e fazendo as integrais nas coordenadas angulares, encontramos:

$$C(k) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 S(r) \left\{ |\phi_0^{SC}(k, r)|^2 + \frac{1}{(kr)^2} \left[\sum_{l=0}^\infty (2l+1) |F_l(\eta, kr)|^2 - |F_0(\eta, kr)|^2 \right] \right\} \quad (4.15)$$

Notamos que se recuperam as expressões do capítulo anterior quando a interação coulombiana é desconsiderada, pois, para $\eta = 0$ temos que [147]:

$$\frac{1}{\rho} F_l(0, \rho) = j_l(\rho) \quad \text{e} \quad \sum_{l=0}^\infty (2l+1) j_l^2(\rho) = 1 \quad (4.16)$$

Precisamos ainda discutir uma questão técnica extremamente importante referente à obtenção da função de onda $\phi_0^{SC}(k, r)$, que contém os efeitos tanto da interação forte quanto da de Coulomb. Como o potencial de Coulomb $V_C(r) \sim 1/r$ é de longo alcance, i.e., $\lim_{r \rightarrow \infty} r V_C(r) \neq 0$, os procedimentos para obter numericamente funções de onda de espalhamento para potências de curto alcance não são aplicáveis. Para obter $\phi_0^{SC}(k, r)$ para o nosso caso, adaptamos o método de Vincent e Phatak [148]. Inicialmente, obtemos a função de onda $\phi_0^{SC}(k, r)$ considerando o potencial $V(r)$:

$$V(r) = [V_S(r) + V_C(r)] \theta(R - r) \quad (4.17)$$

onde θ é a função degrau de Heaviside, com R sendo suficientemente grande tal que os efeitos do potencial da interação forte, $V_S(r)$, já são desprezíveis. Para r muito maior que o alcance de $V_S(r)$, a função $\phi_0^{SC}(k, r)$ tem a mesma dependência funcional em r que a função de Coulomb $\phi_0^C(k, r)$. A forma assintótica de $\phi_0^C(k, r)$ é dada por [145]

$$\begin{aligned} \phi_0^C(k, r \rightarrow \infty) &\simeq \frac{1}{kr} \left[\cos \delta_l^C F_l(\eta, kr) + \text{sen } \delta_l^C G_l(\eta, kr) \right] \\ &= \frac{1}{kr} e^{-i\delta_l^C} \left[F_l(\eta, kr) + e^{i\delta_l^C} \text{sen } \delta_l^C H_l^{(+)}(kr) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde δ_l^C é o deslocamento de fase correspondente. Portanto, podemos parametrizar o comportamento assintótico de $\phi_0^{SC}(k, r)$, a menos de uma irrelevante fase

global, como

$$\phi_0^{\text{SC}}(k, r \rightarrow \infty) \simeq \frac{1}{kr} \left[F_l(\eta, kr) + A(k) H_l^{(+)}(kr) \right] \quad (4.19)$$

Uma fase global é irrelevante porque para calcular a função de correlação precisamos somente do módulo-quadrado da função de onda. O coeficiente $A(k)$ é determinado igualando em $r = R$ a função de onda calculada numericamente, que denotamos por $\phi_0^{\text{SC num}}(k, r)$, e a forma assintótica dada pela Eq. (4.19), ou seja:

$$A(k) = \frac{(kR)\phi_0^{\text{SC num}}(k, R) - F_0(kR)}{H^{(+)}(kR)} \quad (4.20)$$

Então, a função de onda $\phi_0^{\text{SC}}(k, r)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \phi_0^{\text{SC}}(k, r) &= \phi_0^{\text{SC num}}(k, r) \theta(R - r) \\ &+ \frac{1}{kr} \left[F_l(\eta, kr) + A(k) H_l^{(+)}(kr) \right] \theta(r - R) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Em geral, para obter $\phi_0^{\text{SC num}}(k, r)$ pode-se usar ou a equação de Schrödinger ou a equação de Lippmann-Schwinger. No nosso caso, em que o potencial V_S é não local e dado no espaço dos momentos, é mais conveniente usar a equação de Lippmann-Schwinger. Neste caso, precisamos da transformada de Fourier da parte $V_C(r) \theta(R - r)$ do potencial na Eq. (4.17):

$$\begin{aligned} V_C(k) &= \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} V_C(r) \theta(R - r) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{\alpha}{r} \theta(R - r) \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^R dr r^2 \frac{\alpha}{r} \int_{-1}^{+1} dx e^{ikrx} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\alpha}{k^2} (1 - \cos kR) \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde α está definido na Eq. (4.11). Esta expressão para o potencial de Coulomb é empregada na equação de Lippmann-Schwinger. Para $r > R$, o potencial é puramente coulombiano e então podemos empregar a forma assintótica para fazer o *matching* em $r = R$ como explicado acima.

O método numérico empregado para resolver a equação Lippmann-Schwinger está explicado no Apêndice D. A seguir, mostramos os resultados numéricos para os observáveis da interação $Y_c N$ obtidas com a QCD na rede e com modelos fenomenológicos. Na seção subsequente, apresentamos as previsões para a função

de correlação femtoscópica $C(k)$ empregando esses resultados para a interação $Y_c N$.

4.3 Predições para $C(k)$ da interação $Y_c N$

Nesta seção apresentamos nossas predições para a função de correlação $C(k)$ para o sistema $Y_c N$. Para calcular $C(k)$, precisamos da função de onda $\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$, a qual é determinada pela interação $Y_c N$. Na Figura 4.3 são exibidos os gráficos das funções de correlação para $Y_c - N$ utilizando o mesmo potencial LQCD-e que gerou a Figura 4.2, agora com ênfase para os efeitos da interação coulombiana e da largura da fonte gaussiana. Os valores de largura da fonte gaussiana são motivados pelos sugeridos por grupos experimentais, tais como como $R \approx 1,2$ fm para a correlação entre Λ e p obtido em colisões próton-próton a 7 TeV pela colaboração ALICE [90] e $R = 2,5$ fm ou 5 fm para correlação entre Ω e p em colisões Au-Au a 200 GeV pela colaboração STAR [91].

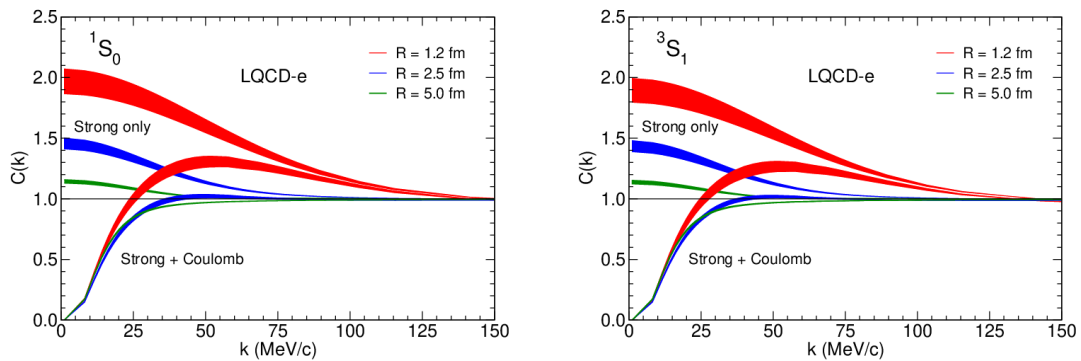


Figura 4.3: Função de correlação para a interação $Y_c - N$ utilizando o potencial dado por (4.1) com parâmetros inferidos da LQCD com a devida extrapolação para a massa física do pión feita em [137] com ênfase para os efeitos da interação coulombiana e da largura da fonte gaussiana. À esquerda está o gráfico correspondente ao canal 1S_0 e à direita o correspondente ao canal 3S_1 . Essas figuras foram empregadas por nós na Ref. [100].

Destas figuras, vê-se que as funções de correlação para um mesmo valor de largura da fonte são semelhantes quando se comparam ambos os canais, na verdade, são praticamente idênticas considerando-se a incerteza gerada pela variação do *cutoff* Λ . Por causa da interação coulombiana no par $\Lambda_c p$, ocorre uma

importante redução na função de correlação para baixos momentos, um efeito muito bem conhecido e documentado em medidas de correlação para pares de prótons [90]. Contudo, a atração por causa da interação hadrônica entre Λ_c e p aqui utilizada é bem inferior à que ocorre na interação entre prótons; conseqüentemente, a redução na função de correlação é percebida ainda para momentos maiores e, portanto, o máximo da função de correlação ocorre em momentos com valores maiores. Desta forma, a redução do sinal devido à interação forte causada pela interação coulombiana é mais importante para fontes gaussianas mais estreitas, como se vê na Figura 4.3.

Do ponto de vista experimental, valores típicos de largura da fonte gaussiana em colisões de íons pesados são entre 3 fm e 5 fm [85, 91] e de 1,2 fm em colisões pp [90]. Portanto, a detecção experimental de um sinal como o da Figura 4.3 é esperada para colisões próton-próton, enquanto que seria bem mais difícil para colisões de íons pesados.

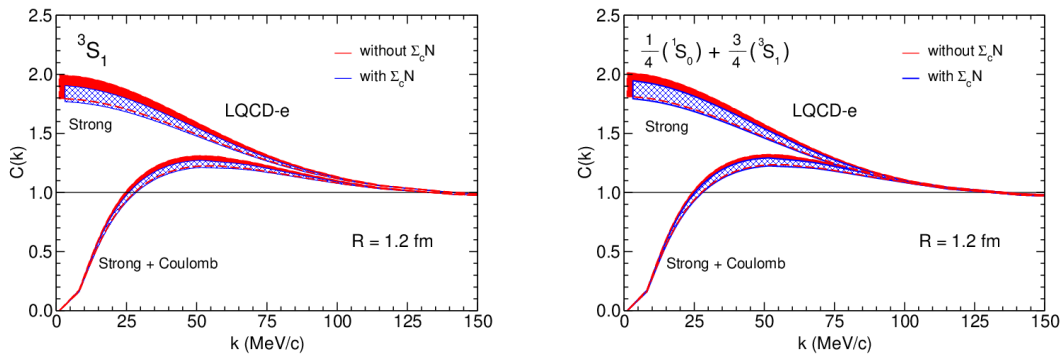


Figura 4.4: Função de correlação para $\Lambda_c p$ e para $\Lambda_c n$ utilizando o potencial dado por (4.1) com parâmetros inferidos da LQCD com a devida extrapolação para a massa física do píon feita por [137] e uma fonte gaussiana de largura 1,2 fm com ênfase para o efeito da presença de uma interação direta $\Sigma_c N$ [51] (faixa hachurada) ou sua ausência [137] (faixa preenchida). À esquerda está o gráfico correspondente ao canal 3S_1 e à direita o correspondente à média nos spins. Essas figuras foram empregadas por nós na Ref. [100].

O potencial descrito em (4.1) aqui utilizado não inclui uma interação $\Sigma_c N$ direta, enquanto que [51] inclui; tal interação afeta aquela que ocorre entre Λ_c e N via um acoplamento entre os canais $\Lambda_c N - \Sigma_c N$, especialmente no canal 3S_1 [135]; desta forma, investigamos o efeito desta interação direta sobre a correlação entre

Λ_c e p e os resultados para $R = 1,2$ fm são exibidos na Figura 4.4. Desta figura, percebe-se que a inclusão da interação direta $\Sigma_c N$ não altera significativamente a função de correlação, sendo seu efeito essencialmente diminuir ligeiramente a incerteza gerada pela variação do *cutoff* Λ .

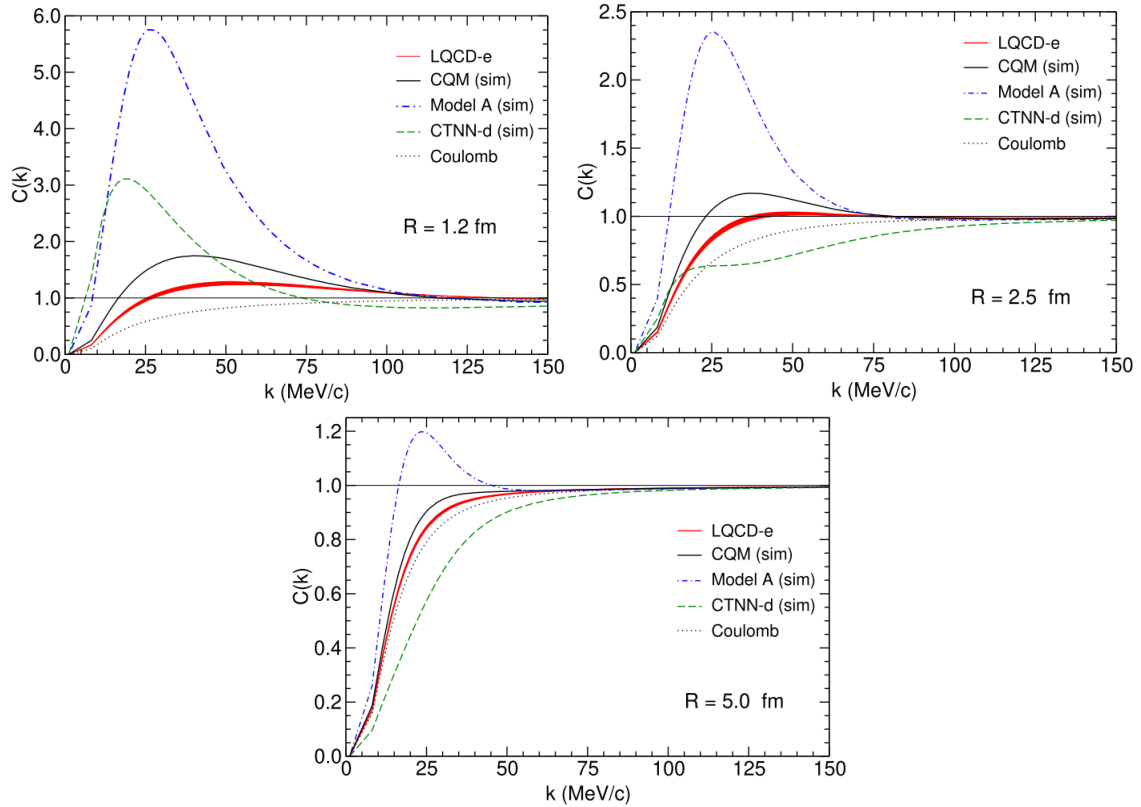


Figura 4.5: Média sobre os estados de spin das funções de correlação $\Lambda_c - p$ incluindo a interação coulombiana para três valores de raio (R) da fonte gaussiana para a interação LQCD-e (faixa) e as dos seguintes modelos simulados com a teoria efetiva da Ref. [137]: CQM [50] (linha sólida), Modelo A [136] (tracejada-pontilhada), modelo CTNN-d [56] (tracejada), além da interação puramente coulombiana (pontilhada). Essas figuras foram empregadas por nós na Ref. [100].

Também calculamos as funções de correlação, incluindo o efeito da interação coulombiana, para os potenciais fenomenológicos (simulados com a teoria efetiva da Ref. [137]) CQM [50], Modelo A [136] e modelo CTNN-d [56] e as comparamos com as inferidas da QCD na rede devidamente extrapoladas para massa física do pión (LQCD-e) apresentadas acima; essa comparação é exibida na Figura 4.5 para os valores de largura da fonte $R = 1.2$ fm, 2.5 fm e 5.0 fm. Para se aproximar da situação experimental, estes gráficos apresentam as funções de correlação obtidas fazendo-se médias sobre os estados de spin; nesse sentido, cabe destacar

que o estado de tripleto possui maior peso (3 para 1) na média, considerando uma distribuição puramente estatística. Nesta figura também são apresentadas as correlações que se obtém considerando somente o efeito da interação coulombiana.

Imediatamente se percebe que os diferentes potenciais fornecem funções de correlação entre Λ_c e próton bem diferentes, reforçando a expectativa de que os modelos possam ser experimentalmente testados via medidas de função de correlação. Além disso, rapidamente nota-se que as correlações são maiores para fontes menores, o que é esperado, dado o curto alcance da interação forte, e parece favorecer colisões p-p para o estudo experimental. Percebe-se também que o comportamento para momento linear muito próximo de zero é dominado pela interação coulombiana.

Tendo em mente os gráficos da Figura 4.2, percebe-se que, em geral, interações mais atrativas fornecem correlações mais intensas; de fato, o pico da correlação obtida com o modelo CQM é significativamente maior que o obtido a partir do modelo inferido da QCD na rede, ainda que aquele seja apenas ligeiramente mais atrativo que este (no estado de tripleto). Neste sentido, é interessante notar que a função de correlação do modelo mais fortemente atrativo (o CTNN-d), o qual suporta estado ligado, exhibe um comportamento, quando se varia o tamanho da fonte, que é diferente daquele das demais interações, sendo o CTNN-d o único dentre estes a fornecer valores de correlação inferiores aos da interação puramente coulombiana com o aumento da fonte. Este comportamento característico pode ser uma relevante assinatura para confirmar ou descartar experimentalmente a existência de estados ligados.

Atualmente, as medidas experimentais de função de correlação não costumam resolver a dependência com o spin, de modo a se esperar uma dominância da correlação obtida para o estado de tripleto sobre as medidas experimentais, considerando-se uma distribuição puramente estatística. Neste sentido, é interessante analisar o primeiro gráfico da Figura 4.5 relacionando-o com os valores de comprimento de espalhamento listados na Tabela 4.1, em particular, os do estado de tripleto, por terem mais peso no cálculo da média sobre os spins.

Da Tabela 4.1 se vê que os valores de $|a|$ para o estado de tripleto decrescem na seguinte ordem: Modelo A, CTNN-d, CQM e LQCD-e, assim como ocorre com as correlações para valores de momento linear baixos e intermediários para $R = 1.2$ fm, como mostra a Figura 4.5. Desta, se vê que o aumento da fonte

mantém as funções de correlação com o mesmo ordenamento entre Modelo A, CQM e LQCD-e, ao passo que a correlação obtida pelo modelo CTNN-d se torna cada vez menor, chegando a ser inferior à obtida com a interação puramente coulombiana, conforme destacado anteriormente. Isso parece indicar uma preponderância do comprimento de espalhamento sobre o comportamento geral da função de correlação, o que é de se esperar, já que na expansão de alcance efetivo a amplitude de espalhamento a baixas energias é dominada pelo comprimento de espalhamento.

Nesse sentido, vale destacar que, pela Tabela 4.1, percebe-se que a maior discrepância nos valores de comprimento de espalhamento (a) entre os estados singleto e tripleto ocorre no Modelo A, sendo nele o efeito mais acentuado do estado de tripleto sobre a média (nos estados de spin) da função de correlação. Na Figura 4.5, por sua vez, observa-se que as funções de correlação obtidas pelo Modelo A são bem superiores às obtidas pelos demais, sendo ainda considerável quando $R = 5.0$ fm, mesmo este sendo um modelo menos atrativo que o CTNN-d - ver Figura 4.2. Desta forma, certamente um experimento com moderada estatística já seria suficiente para distinguir entre o Modelo A e modelos menos atrativos, como o CQM ou os inferidos de simulações da QCD na rede.

4.4 Conclusões

A seguir, apresentamos as principais conclusões que se pode extrair das nossas predições. Inicialmente, consideremos os resultados mostrados na Figura 4.3, os quais comparam o efeito de inserir ou não a interação coulombiana sobre a função de correlação obtida via LQCD-e para alguns valores de tamanho da fonte gaussiana. Desses resultados se conclui que: (i) não se notam diferenças significativas entre as correlações obtidas em cada canal para um dado tamanho da fonte e para um dado conjunto de interação (somente forte ou forte incluindo coulombiana); (ii) a interação coulombiana causa uma importante diminuição para baixos momentos na função de correlação referente ao par $\Lambda_c p$ em relação ao par $\Lambda_c n$, como não poderia deixar de ser, pois o nêutron não tem carga elétrica. Esta redução é mais significativa para fontes menores e (iii) as correlações mais intensas e, possivelmente, mais fáceis de se medir experimentalmente, são obtidas com fontes menores, sugerindo que o estudo experimental da interação entre núcleon e bárion com charm através de medidas de função de correlação seja feito usando colisões pp , que fornecem fontes menores.

A partir da Figura 4.4, que compara o efeito de se inserir ou não uma interação direta $\Sigma_C - N$, percebe-se que a inclusão desse canal não altera significativamente as funções de correlação obtidas em ambos os canais, sendo seu efeito essencialmente o de diminuir ligeiramente a incerteza gerada pela variação do *cutoff* Λ .

Por fim, os gráficos da Figura 4.5 comparam, para alguns valores de tamanho de fonte, as funções de correlação obtidas pelos modelos fenomenológicos e pelos dados de QCD na rede e a correlação obtida para uma interação exclusivamente coulombiana. Os resultados referem-se a uma média sobre os estados de spin, simulando uma situação mais próxima do que ocorre experimentalmente, já que a separação de estados com diferentes spin não é tarefa fácil em femtoscopia. A partir desses resultados, conclui-se que: (i) os modelos fornecem funções de correlação bem diferentes, de modo a se esperar que alguns deles possam ser descartados; (ii) as maiores correlações são obtidas com fontes menores, favorecendo colisões p-p, fato já conhecido em outros estudos femtoscópicos; (iii) o comportamento da função de correlação para valores de momento linear muito próximos de zero é dominado pela interação coulombiana; (iv) o modelo CTNN-d é o mais atrativo e possui um comportamento bem diferente dos demais, o que pode indicar uma assinatura de uma interação atrativa a ponto de gerar estado ligado; (v) as correlações obtidas com o Modelo A são maiores que as derivadas do modelo CNTT-d, ainda que o modelo CNTT-d seja mais atrativo que o Modelo A e (vi) as correlações obtidas com o Modelo A são suficientemente intensas mesmo para fontes maiores.

Capítulo 5

Femtoscopia da interação $J/\Psi N$

São várias as motivações para se estudar a interação $J/\Psi N$, conforme discutimos na Introdução. Reiterando, uma das principais é a possibilidade de acessar o elemento de matriz relacionado à anomalia do traço na QCD [60, 61, 62, 63], responsável pela maior parte da massa dos hádrons [64]. A conexão com a interação $J/\psi N$ se dá através da amplitude frontal de espalhamento (*forward scattering amplitude*), a qual pode ser escrita como o produto da cromopolarizabilidade do charmônio e um elemento de matriz envolvendo distribuição de glúons no interior do núcleon [65, 66, 67, 68]. Conforme também mencionado na Introdução, experimentos recentes no JLab [74, 75] mediram propriedades da interação $J/\psi N$ a baixas energias. No entanto, esses experimentos são de fotoprodução, $\gamma + p \rightarrow p + J/\psi$, o que implica que eles não acessam espalhamentos frontais, i.e., pequenos ângulos espalhamento. Isto ocorre porque o momento transferido mínimo acessível nesses processo é considerável, a saber $\sqrt{-t} = -2k^2(1 - \cos\theta) \simeq 1.5 \text{ GeV}$, em que k é o momento relativo do sistema $J/\psi p$ e θ é o ângulo de espalhamento (no sistema centro de massa). Essa impossibilidade requer extrapolações e conjecturas que introduzem incertezas consideráveis. Além dessa impossibilidade, há outra, de natureza teórica, que é a inaplicabilidade da hipótese de *vector-meson dominance* (VMD)¹ para mésons vetoriais pesados como o J/ψ [149].

A femtoscopia, por outro lado, pode acessar amplitudes de espalhamento hádron-hádron a baixíssimos momentos transferidos, conforme discutido mais recentemente na Ref. [93]. Por essas razões, a femtoscopia parece ser a técnica ideal para acessar a distribuição de glúons no interior dos núcleons, responsáveis pela origem da maior parte de suas massas.

A conexão entre essa distribuição de glúons no interior de um hádron leve (como o núcleon) e a amplitude de espalhamento frontal desse hádron com um

¹VMD refere-se ao fato que o fóton no processo de fotoprodução se transforma num méson vetorial, no caso o J/Ψ .

quarkônio pesado é mais transparente na aproximação baseada na expansão multipolar da QCD, empregada desde a década de 1980. Esta expansão está apoiada na suposição de que num processo de espalhamento a baixíssimos momentos transferidos, os glúons do interior do hádron leve não resolvem a estrutura interna do quarkônio pesado, já que esses glúons são *soft*, com comprimentos de onda grandes, da ordem do tamanho do hádron leve. Como o tamanho de um quarkônio pesado é muito menor que o de um hádron leve, esse quarkônio pode ser pensado como um dipolo cromoeletrico (análogo a um dipolo elétrico, porém, de carga de cor). Assim, a estrutura interna do quarkônio é parametrizada pela polarizabilidade cromoeletrica α_Q e a correspondente lagrangiana de interação pode ser escrita como [150, 151]:

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2} \alpha_Q \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad (5.1)$$

em que $\vec{\mathbf{E}}$ é o campo cromoeletrico de glúons.

Usando a anomalia do traço da QCD, o campo cromoeletrico pode ser expresso em termos do tensor energia-momento da QCD T_μ^μ , e a amplitude de espalhamento frontal a ângulo zero, f_0 , pode ser escrita na aproximação de Born como [152]:

$$f_0 = \alpha_Q \frac{1}{8\pi(m_Q + m_h)} \frac{16\pi^2}{9} \frac{1+C}{2} m_Q \langle h | T_\mu^\mu | h \rangle \quad (5.2)$$

onde $C \gtrsim 1$. Como vimos anteriormente, a função de correlação femtoscópica $C(k)$ para $k \simeq 0$ na aproximação de Lednicky é proporcional a f_0 e, portanto, no caso da interação quarkônio-hádron leve, proporcional a $\langle h | T_\mu^\mu | h \rangle$.

Nosso interesse é no caso de charmônio, $Q = J/\psi$, e hádron leve, $h = p$, o único hádron estável no universo (o nêutron só é estável no interior de um núcleo atômico ou de uma estrela de nêutrons). A preferência pelo J/ψ é devida a sua produção em colisões de altas energias presentemente feitas no LHC ser muito mais abundante do que, por exemplo, a de um bottomônio. Também, a preferência ao J/ψ frente ao charmônio η_c é devida a sua muito mais fácil identificação porque seu decaimento predominante é um decaimento leptônico. Há de se lembrar que o resultado da Eq. (5.2) depende da aplicabilidade da expansão multipolar em ordem mais baixa, que para o J/ψ pode ser questionável, e da aproximação de Lednicky, que também pode não ser válida, como será discutido mais adiante.

As nossas previsões para as funções de correlação farão uso de resultados para

a interação $J/\psi N$ obtidos com simulações de QCD na rede, extrapoladas para o limite físico das massas dos quarks através do uso de uma teoria de campos efetiva, a *quarkonium-nucleon effective field theory* (QNEFT) desenvolvida na Ref. [68]. Além desses resultados, vamos ainda empregar dois modelos fenomenológicos, os das Ref. [153, 154]. Ambos abordam a interação $J/\psi N$ dentro de uma perspectiva hádron-charmônio [155], em que um charmônio interage como um objeto compacto no interior de um hádron. O modelo da Ref. [153] considera o núcleon como sendo um poço esférico. Apesar de muito simples, este modelo permite solução analítica, o que é bom para guiar nossa intuição. O modelo da Ref. [154] é um modelo quiral de sóliton (*chiral quark soliton model*), χQSM . O modelo usa a anomalia do traço para obter um potencial $J/\psi N$ em termos do tensor energia-momento relacionado aos glúons no interior dos núcleons.

5.1 A Interação $J/\Psi N$

A QNEFT foi construída acoplando um quarkônio (estado ligado de um quark e antiquark de um mesmo sabor, pode ser um charmônio ou bottomônio no setor de quarks pesados) a um dubleto de núcleon e um tripleto de píons em acordo com as simetrias quiral, de isospin, de spin de quarks pesados (*heavy-quark spin symmetry*) e CPT (conjugação de carga, paridade e reversão temporal). A teoria é não relativística no setor dos núcleons e quarkônio, adequada para interações com valores de momento transferido bem menores que as massas das partículas envolvidas, mas é relativística no setor dos píons. Como a dinâmica da interação entre núcleon e quarkônio ocorre numa escala de energia inferior à massa do pión, pode-se integrar a dinâmica na escala da massa do pión e fazer a correspondência com uma teoria efetiva de mais baixa energia, denominada *potential quarkonium-nucleon EFT* (pQNEFT) [68], na qual o quarkônio interage com o núcleon via interações de contato e um potencial do tipo van der Waals.

5.1.1 Teoria efetiva QNEFT

A densidade lagrangiana da teoria efetiva QNEFT é dada por uma soma de vários termos. A seguir, cada termo é apresentado usando unidades naturais, $\hbar = c = 1$, como de costume nesta tese. Os termos dominantes (*leading order*) da

densidade lagrangiana que envolvem apenas os píons é dada por:

$$\mathcal{L}^\pi = \frac{F^2}{4} \left(\langle u_\mu u^\mu \rangle_f + \langle \chi_+ \rangle_f \right) \quad (5.3)$$

em que $\langle \dots \rangle_f$ significa o traço sobre os índices de sabor e:

$$\begin{aligned} u_\mu &= i\{u^\dagger, \partial_\mu u\}; \quad \chi_+ = u^\dagger \chi u^\dagger + u \chi^\dagger u \quad \text{e} \\ u^2 &= e^{i\Phi/F} \text{ com } \Phi = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que $\chi = 2B\hat{m}\mathbb{I}$, sendo \hat{m} a média das massas dos quarks u e d . No limite de simetria de isospin, que é utilizado em [68], tem-se $\hat{m} = m_u = m_d$ e $2B\hat{m} = m_\pi^2$, que nada mais é do que a relação de Gell-Mann–Oakes–Renner discutida anteriormente.

A Ref. [68] limitou-se a estados de onda S do quarkônio, os quais podem então ocorrer em estados singleto ou tripleto de spin. Como termos de interação com o quarkônio que dependam do spin são suprimidos pela massa do quark pesado, esses dois estados são então tratados como degenerados e descritos através de um campo ϕ caracterizado por $J^{PC} \equiv 0^{-+}$. Para tal campo, o termo cinético (não relativístico) na densidade lagrangiana é dado por:

$$\mathcal{L}^\phi = \phi^\dagger \left(i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2\hat{m}_\phi} \right) \phi \quad (5.5)$$

em que \hat{m}_ϕ é a massa nua do quarkônio.

Como o quarkônio é invariante sob a simetria quiral, as interações entre os píons e o campo ϕ são dadas por:

$$\mathcal{L}^{\phi-\pi} = \frac{F^2}{4} \phi^\dagger \phi \left(c_{d0} \langle u_0 u_0 \rangle_f + c_{di} \langle u_i u^i \rangle_f + c_m \langle \chi_+ \rangle_f \right) \quad (5.6)$$

em que c_{d0} , c_{di} e c_m são entendidos como constantes de baixa energia (*low energy constants*) da teoria efetiva. Para o caso do charmônio, os valores dessas constantes podem ser obtidos a partir da anomalia do traço da QCD, especificamente [68]:

$$c_{d0} = -\frac{4\pi^2 \alpha_{J/\psi}}{b} \kappa_1, \quad c_{di} = -\frac{4\pi^2 \alpha_{J/\psi}}{b} \kappa_2, \quad c_m = -\frac{12\pi^2 \alpha_{J/\psi}}{b} \quad (5.7)$$

em que $b = (11N_c - 2N_f)/3$, $N_c = 3$ é o número de cores e $N_f = 3$ é a quantidade de sabores de quarks ativos na escala do quarkônio e $\alpha_{J/\psi}$ é a cromopolarizabilidade do J/ψ . Os parâmetros κ_1 e κ_2 são dados por: $\kappa_1 = 2 - 9\kappa/2$ e $\kappa_2 = 2 + 3\kappa/2$ em que um valor de $\kappa = 0.186(9)$ pode ser obtido de decaimentos $\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ [156]. Ainda é necessário especificar o valor da cromopolarizabilidade $\alpha_{J/\psi}$, que será discutido mais adiante.

Os núcleons (N) formam um dubleto de isospin e os termos cinético (não relativístico) e de interação com píons são dados por:

$$\mathcal{L}^N = N^\dagger \left(iD_0 + \frac{\mathbf{D}^2}{2\hat{m}_N} \right) N - \frac{g_A}{2} N^\dagger \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} N \quad (5.8)$$

em \hat{m}_N é a massa nua do núcleon, a derivada covariante é definida por $D_\mu N = \partial_\mu N + \Gamma_\mu N$ com $\Gamma_\mu = \frac{1}{2}[u^\dagger, \partial_\mu u]$ e $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli.

Por fim, a interação entre o núcleon e o quarkônio é dada pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\phi-N} = & -c_0 N^\dagger N \phi^\dagger \phi - d_m \langle \chi_+ \rangle_f N^\dagger N \phi^\dagger \phi - d_1 \nabla(N^\dagger N) \cdot \nabla(\phi^\dagger \phi) \\ & - d_2 (N^\dagger \overleftrightarrow{\mathbf{D}} N) \cdot (\phi^\dagger \overleftrightarrow{\nabla} \phi) - d_3 (\mathbf{D} N^\dagger) \cdot (\mathbf{D} N) \phi^\dagger \phi - d_4 N^\dagger N (\nabla \phi^\dagger) \cdot (\nabla \phi) \end{aligned} \quad (5.9)$$

em que $\overleftrightarrow{\nabla}$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$ denotam $\overleftarrow{\nabla} - \overrightarrow{\nabla}$ e $\overleftarrow{\mathbf{D}} - \overrightarrow{\mathbf{D}}$ respectivamente.

A densidade lagrangiana da teoria QNEFT é, portanto, a soma das expressões apresentadas acima. Note-se que, neste nível, os píons são graus de liberdade ativos, pois há termos cinéticos para eles e há termos de interação entre núcleon e quarkônio que são mediados por píons. Além disso, apenas o termo cinético dos píons é relativístico pois essa lagrangiana efetiva descreve uma dinâmica que ocorre numa escala de energia da ordem da massa do pión, que é bem menor que a massa das demais partículas envolvidas.

A densidade lagrangiana da teoria efetiva QNEFT descreve a dinâmica entre píons, quarkônio e núcleon numa escala de energia da ordem da massa do pión usando as simetrias quiral (aproximada), CPT, rotacional (e de Lorentz para os píons) com termos até $\mathcal{O}(m_\pi^3/\Lambda_\chi^3)$, em que $\Lambda_\chi \sim 1$ GeV é a escala característica da quebra dinâmica da simetria quiral. Contudo, a dinâmica entre o núcleon e o quarkônio se dá numa escala de energia $E \sim m_\pi^2/\Lambda_\chi \ll m_\pi$. Portanto, os

graus de liberdade de píons podem ser integrados da teoria, gerando uma nova lagrangiana efetiva em que os graus de liberdade dinamicamente ativos são apenas os do núcleon e do quarkônio, cuja interação é descrita por potenciais e termos de contato com as constantes de baixa energia redefinidas. A teoria assim obtida é chamada *potential quarkonium nucleon effective field theory* (pQNEFT)[68] e sua densidade lagrangiana é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{pQNEFT} = & N^\dagger \left(i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m_N} \right) N + \phi^\dagger \left(i\partial_0 + \frac{1}{2m_\phi} \nabla^2 \right) \phi - C_0 N^\dagger N \phi^\dagger \phi \\
& - D_1 \nabla(N^\dagger N) \cdot \nabla(\phi^\dagger \phi) - D_2 (N^\dagger \overleftrightarrow{\nabla} N) \cdot (\phi^\dagger \overleftrightarrow{\nabla} \phi) \\
& - D_3 (\nabla N^\dagger) \cdot (\nabla N) \phi^\dagger \phi - D_4 N^\dagger N (\nabla \phi^\dagger) \cdot (\nabla \phi) \\
& - \int d^3r (N^\dagger N)(t, \mathbf{x}_1) V(r) (\phi^\dagger \phi)(t, \mathbf{x}_2)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

em que $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ e m_N e m_ϕ são as massas físicas do núcleon e do quarkônio respectivamente. Essas massas precisam ser extrapoladas para os valores empregados em simulações de QCD na rede. Para tal, a Ref. [68] usa expressões obtidas pela teoria de perturbação quiral, mais especificamente as Eqs. [9] e [10] daquela referência. As constantes C_0, D_1, D_2, D_3 e D_4 se relacionam com as constantes da teoria QNEFT por [68]:

$$\begin{aligned}
C_0 &= c_0 + 4m_\pi^2 d_m + \frac{g_A^2 m_\pi^2}{F^2} \frac{9c_0}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_\pi^2}{v^2} \right) + \frac{2}{3} \right] + \frac{g_A^2 m_\pi^3}{F^2} \frac{3}{64\pi} (5c_{di} - 3c_m) \\
D_1 &= d_1 + \frac{g_A^2 m_\pi}{F^2} \frac{1}{256\pi} (23c_{di} - 5c_m) \\
D_j &= d_j; \quad j = 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{5.11}$$

em que v é uma escala de renormalização (que é tomado igual a m_π , escala natural no presente contexto). O potencial V é de longo alcance, do tipo van der Waals e

independente de modelo, dado por:

$$V(r) = \frac{3}{128\pi^2} \frac{g_A^2}{F^2} \frac{e^{-2m_\pi r}}{r^6} \left\{ c_{di} \left[6 + m_\pi r (2 + m_\pi r) \times (6 + m_\pi r (2 + m_\pi r)) \right] + c_m m_\pi^2 r^2 (1 + m_\pi r)^2 \right\} \quad (5.12)$$

em que $g_A = 1.27$ é a carga axial do núcleon, $F = 93$ MeV é a constante de decaimento do pión e m_π é a massa física do pión. Esse potencial fica determinado pelo valor da cromopolarizabilidade $\alpha_{J/\psi}$ que aparece nas constantes de baixa energia c_{di} e c_m . A cromopolarizabilidade é o único parâmetro não cujo valor não está bem restringido experimentalmente. Não obstante, os autores da Ref. [68] obtiveram $\alpha_{J/\psi} = 0.24$ GeV⁻³ fazendo um ajuste de $V(r)$ ao potencial $J/\psi N$ de simulações de QCD na rede da colaboração HALQCD [157].

Note-se que os termos de contato são muito semelhantes aos do QNEFT, mas com as constantes redefinidas segundo as Eq. (5.11), e com um termo de potencial $V(r)$ dado pela Eq. (5.12).

Pode-se usar a teoria efetiva pQNEFT para calcular a amplitude de espalhamento entre o núcleon e o quarkônio numa onda S e, usando a expansão de alcance efetivo – *effective range expansion* (ERE), o comprimento de espalhamento a_0 e o alcance efetivo r_0 são calculados na Ref. [68] em função dos parâmetros da teoria QNEFT e de uma escala de renormalização ν :

$$a_0 = \frac{\mu}{2\pi} \left[c_0 + 4d_m m_\pi^2 + \frac{9g_A^2 m_\pi^2 c_0}{64\pi^2 F^2} \left(\ln \left(\frac{m_\pi^2}{\nu^2} \right) + \frac{2}{3} \right) + \frac{3g_A^2}{64\pi F^2} m_\pi^3 (5c_{di} - 3c_m) \right] \quad (5.13)$$

$$r_0 = \frac{8\pi}{\mu c_0^2} \left[(d_1 + d_2) + \frac{g_A^2}{256\pi F^2} m_\pi (23c_{di} - 5c_m) \right] \quad (5.14)$$

em que μ é a massa reduzida das massas físicas do núcleon e do quarkônio.

Usando valores de a_0 calculados via QCD na rede (ou obtidos experimentalmente) é possível usar a Eq. (5.13) para obter valores para parâmetros da teoria QNEFT que aparecem nesta equação. A referência [158] obteve o valor de a_0 (ver Tabela 5.1) para as interações do núcleon com η_c e com J/Ψ usando a fórmula de Lüscher para a defasagem (*phase shift*) (PSF) e também usando a *Leading Large L expansion* (LLE). Os autores da Ref. [68], notando que as respectivas incertezas são

maiores que o valor estimado para o segundo termo entre colchetes na Eq. (5.13), obtiveram valores correspondentes para c_0 usando apenas o primeiro termo da Eq. (5.13), conforme mostra a Tabela 5.1 abaixo.

Método	Canal	a_0 (fm)	c_0 (GeV^{-2})
PSF	η_c	-0.70(66)	-31(29)
	J/Ψ	-0.71(48)	-31(21)
LLE	η_c	-0.39(14)	-17(6)
	J/Ψ	-0.39(14)	-17(6)

Tabela 5.1: Valores de comprimento de espalhamento (a_0) calculados na Ref. [158] via os métodos PSF e LLE para a interação entre núcleon e charmônio e respectivos valores do parâmetro c_0 da teoria QNEFT calculados na Ref. [68] usando a Eq. (5.13). Os valores de a_0 referentes a J/Ψ correspondem a uma média sobre os spins.

Os autores da Ref. [159] também calcularam o comprimento de espalhamento (a_0) usando QCD na rede aplicando o método PSF, cujos valores estão na Tabela 5.2. Como as incertezas são maiores que o valor estimado dos termos na Eq. (5.13) que dependem da massa do pión, os autores da Ref. [68] calcularam os respectivos valores de c_0 , também indicados na Tabela 5.2, usando apenas o primeiro termo da Eq. (5.13). Na Ref. [159], também foram calculados os valores para o alcance efetivo ($r_0 \sim 1$ fm) com incertezas relativas grandes; comparando esse valor com o termo principal da Eq. (5.14), os autores da Ref. [68] obtiveram $(d_1 + d_2) = 13 \text{ GeV}^{-4}$ para o canal η_c e $(d_1 + d_2) = 26 \text{ GeV}^{-4}$ para o canal J/Ψ , também com grande incerteza relativa.

Canal	a_0 (fm)	c_0 (GeV^{-2})
η_c	-0.25(5)	-8(2)
J/Ψ	-0.35(6)	-12(3)

Tabela 5.2: Valores de comprimento de espalhamento (a_0) obtidos na Ref. [159] via o método PSF considerando $m_\pi = 640$ MeV e respectivos valores do parâmetro c_0 extrapolados pela teoria QNEFT usando a Eq. (5.13). Os valores de a_0 referentes a J/Ψ correspondem a uma média sobre os spins.

Enquanto as simulações nas Refs. [158] e [159] foram feitas no âmbito da *quenched Lattice QCD*, a Ref. [160] usa simulações de *full QCD*, cujos valores estão na Tabela 5.3. A partir destes valores, os autores da Ref. [68] calcularam os respectivos valores para os parâmetros c_0 e d_m apresentados na Tabela 5.3 usando a Eq. (5.13).

Canal	a_0 (fm)	c_0 (GeV^{-2})	d_m (GeV^{-2})
η_c	-0.18(9)	-9.7 (1.2)	14.7(4.8)
J/Ψ	-0.40(80)	-12(18)	-100(80)

Tabela 5.3: Valores de comprimento de espalhamento (a_0) obtidos na Ref. [160] usando *full QCD* e respectivos valores dos parâmetros c_0 e d_m da teoria QNEFT usando a Eq. (5.13). Os valores de a_0 referentes a J/Ψ correspondem a uma média sobre os spins.

A Ref. [152] calcula o comprimento de espalhamento e a seção de choque para o espalhamento elástico de núcleons e J/Ψ próximos ao limiar de energia usando expansão em multipolos na QCD e teoremas de baixa energia da QCD. A Ref. [68], identificando a expressão para a amplitude de espalhamento da Ref. [152] com o termo de primeira ordem da amplitude calculada com a QNEFT, obtiveram a seguinte estimativa para o termo c_0 :

$$c_0 = -\frac{4\pi^2}{9} (1 + C) \alpha_{J/\psi} m_N \quad (5.15)$$

em que $\alpha_{J/\psi}$ é a cromopolarizabilidade do J/ψ e C é uma constante indeterminada $C \gtrsim 1$ [152]; de fato, esta referência sugere usar $C = 1$. Quanto ao valor de $\alpha_{J/\psi}$, essa mesma referência argumenta em favor de uma estimativa de $\alpha_{J/\psi} \approx 2 \text{ GeV}^{-3}$ e informa que essa estimativa é significativamente superior à de $\alpha_{J/\psi} \approx 0.6 \text{ GeV}^{-3}$ feita na Ref. [65] usando essencialmente um modelo coulombiano (referente à carga de cor) para a função de onda do charmônio. Por outro lado, os autores da Ref. [68] conseguem escrever uma expressão para o potencial $V(r)$ dado pela Eq. (5.12) na qual a cromopolarizabilidade é o único parâmetro livre e, comparando o potencial obtido via teoria QNEFT com cálculos de QCD na rede para esse potencial, obtém através de um *fitting* um valor para a cromopolarizabilidade do J/ψ de $\alpha_{J/\psi} = 0.24 \text{ GeV}^{-3}$. Por fim, desses valores de $\alpha_{J/\psi}$ são obtidos valores de c_0 via Eq. (5.15) e, utilizando o termo dominante na Eq. (5.13), valores de comprimento de espalhamento a_0 . A Tabela 5.4 abaixo sumariza esses valores.

5.1.2 Modelos fenomenológicos

O primeiro modelo que consideramos é o das Refs. [161, 154], o qual está baseado na anomalia do traço e um modelo de quarks solitônico. O ponto de partida é a derivação de um potencial $J/\Psi N$ a partir da densidade lagrangiana

$\alpha_{J/\psi}(\text{GeV}^{-3})$	Referência	$c_0(\text{GeV}^{-2})$	$a_0(\text{fm})$
2	[152]	-16.5	-0.37
0.24	[68]	-2.0	-0.05
0.6	[65]	-4.9	-0.11

Tabela 5.4: Valores de comprimento de espalhamento (a_0) e do parâmetro c_0 da teoria QNEFT calculados respectivamente pelo primeiro termo da Eq. (5.13) e pela Eq. (5.15) para valores de cromopolarizabilidade $\alpha_{J/\psi}$ obtidos por cada uma das referências indicadas.

da Eq. (5.1), a qual define um potencial efetivo $V_{ef}(r)$ entre um quarkônio pesado e um bárion leve, sendo expresso por [161, 154]:

$$V_{ef}(r) = -\alpha_{J/\psi} \frac{4\pi^2}{b} \frac{g_c^2}{g_s^2} \left[v \rho_E(r) - 3p(r) \right] \quad (5.16)$$

$$v = 1 + \zeta_s \frac{b g_s^2}{8\pi^2} \quad (5.17)$$

em que $b = \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right)$, g_c é a constante de acoplamento forte renormalizada numa escala μ_c associada ao quarkônio pesado, enquanto que g_s é a mesma constante de acoplamento, mas renormalizada numa escala μ_s associada ao bárion e ζ_s é a fração da energia do bárion carregada pelos glúons à escala μ_s . Ainda, $\rho_E(r)$ e $p(r)$ são respectivamente a densidade de energia e a pressão dentro do bárion. Essas quantidades são dados por elementos de matriz do tensor energia-momento $T_{00}(r)$ e T_{μ}^{μ} no estado do núcleon. Esses elementos de matriz são calculados empregando funções de onda do modelo χQSM da Ref. [162]. Nós escaneamos os perfis dados na Fig. 1 dessa referência. De posse desse potencial, resolvemos a equação de Schrödinger para obter as funções de onda, o comprimento de espalhamento e o alcance efetivo; o método numérico empregado está descrito no Apêndice D.1.

Um outro modelo que utilizamos para calcular a função de correlação e comparar os resultados é o de poço potencial esférico utilizado na Ref. [153]. Esta referência usou a aproximação de poço potencial esférico para a interação entre o núcleon e o quarkônio em estados de pentaquarks. Conforme já dito acima, a aproximação de poço esférico é útil por possuir solução analítica. Esse potencial é

escrito como:

$$V_{\text{poço}}(r) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \frac{\alpha_{J/\psi}}{R_N^3} m_N & \text{para } r < R_N \\ 0 & \text{para } r > R_N \end{cases} \quad (5.18)$$

em que R_N e m_N são o raio e a massa do núcleon. As expressões para a_0 e r_0 são dadas por:

$$a_0 = \left(1 - \frac{\tan \gamma}{\gamma}\right) R_N \quad (5.19)$$

$$r_0 = \left[1 + \frac{3\gamma - \gamma(3 + \gamma^2)}{3\gamma(\gamma - \tan \gamma)^2}\right] \quad (5.20)$$

onde $\gamma = R_N \sqrt{\mu_{J/\psi N} V_0 / \hbar^2}$, em que V_0 é a profundidade do poço, $V_0 = (2\pi/3)\alpha_{J/\psi} m_N / R_N^3$, e $\mu_{J/\psi N}$ a massa reduzida $\mu_{J/\psi N} = m_N m_{J/\psi} / (m_N + m_{J/\psi})$. Usamos essas expressões para validar nosso código que resolve a equação de Schrödinger numericamente.

Ambos os potenciais dependem da cromopolarizabilidade $\alpha_{J/\psi}$, que não é bem determinada nem experimental nem teoricamente. Portanto, empregamos os seguintes valores, que cobrem um amplo intervalo comumente usado na literatura: $\alpha_{J/\psi} = 2 \text{ GeV}^{-3}$ [152, 163], 1.60 GeV^{-3} [161], 0.54 GeV^{-3} [164], 0.24 GeV^{-3} [68]. Os resultados para os parâmetros comprimento de espalhamento (a_0) e alcance efetivo (r_0) calculados para cada um dos modelos fenomenológicos, poço finito e χ SQM, para cada um desses valores de cromopolarizabilidade estão mostrados na Tabela 5.5 [100].

$\alpha_{J/\psi}$ (GeV^{-3})	Poço finito		χ SQM	
	a_0 (fm)	r_0 (fm)	a_0 (fm)	r_0 (fm)
2.00	-0.68	1.59	-0.42	1.86
1.60	-0.47	1.86	-0.30	2.25
0.54	-0.12	4.50	-0.08	6.00
0.24	-0.05	9.46	-0.03	13.05

Tabela 5.5: Valores de comprimento de espalhamento (a_0) e de alcance efetivo (r_0) para os potenciais de poço finito com $R_N = 1 \text{ fm}$ e de χ SQM, Eqs. (5.18) e (5.16) respectivamente, para vários valores de $\alpha_{J/\psi}$.

Esta tabela exhibe o fato bem conhecido de que o alcance efetivo r_0 pode ser

muito diferente do alcance real do potencial quando este é bem maior que $|a_0|$. Neste último caso, a aproximação de alcance efetivo para a amplitude de espalhamento (f_0) no modelo de Lednicky para calcular a função de correlação pode ser problemática, conforme discutiremos ao final desse capítulo. Em outro contexto, esse problema também foi apontando na Ref. [165].

5.2 Predições para $C(k)$ da interação J/ψ -núcleon

Nesta seção apresentamos resultados para a função de correlação $J/\Psi N$. Publicamos esses resultados na Ref. [100]. Os resultados foram calculados a partir de dados de simulações de QCD na rede, devidamente extrapolados para a massa física do pión empregando a QNEFT, e dos potenciais fenomenológicos descritos acima. Os cálculos de função de correlação apresentados aqui têm como ponto de partida a fórmula de Koonin-Pratt, dada pela Eq. 3.47. Novamente, empregamos uma fonte gaussiana de um único parâmetro, como no capítulo anterior.

Iniciamos apresentando resultados para $C(k)$ empregando a interação $J/\psi N$ obtida de dados da QCD na rede extrapolados para o limite físico com a QNEFT. Dadas as incertezas dos dados, os valores extrapolados de a_0 e r_0 encontram-se nos seguintes intervalos: $-0.71 \text{ fm} \leq a_0 \leq -0.35 \text{ fm}$ e $1.29 \text{ fm} \leq r_0 \leq 1.35 \text{ fm}$. Esses valores de a_0 e de r_0 , bem como o alcance da força de van der Waals, $1/2m_\pi \simeq 0.7 \text{ fm}$, e sua intensidade para $r = 1/2m_\pi$, aproximadamente 3 MeV, justificam o uso da fórmula de Lednicky-Lyuboshits (LL). Uma análise mais explícita sobre a aplicabilidade da fórmula de LL será feita mais para o fim deste capítulo. Vamos apresentar resultados para tamanhos da fonte de emissão $R = 1 \text{ fm}$ (colisões pp) e $R = 3 \text{ fm}$ (colisões pA e AA). Conforme discutido no Capítulo 3, esperam-se fontes de emissão menores na femtoscopia envolvendo o J/ψ do que no caso de hádrons leves.

Os resultados para a função de correlação $J/\psi N$ calculados usando a fórmula LL são exibidos na Figura 5.1. Como os valores de r_0 são muito estáveis frente às diferentes situações discutidas acima, optamos tomar $r_0 = 1.3 \text{ fm}$ e apresentar os gráficos de função de correlação para valores de a_0 variando entre -0.70 fm e -0.05 fm . O emprego de valores mais baixos para a_0 são motivados pela Eq. (5.15, que parametriza o termo de contato c_0 da QNEFT em termos da cromopolarizabilidade $\alpha_{J/\psi}$. Um valor baixo de $\alpha_{J/\psi}$ leva a um valor baixo para a_0 . Valores baixos para a_0 foram obtidos em um estudo que emprega as regras de soma da

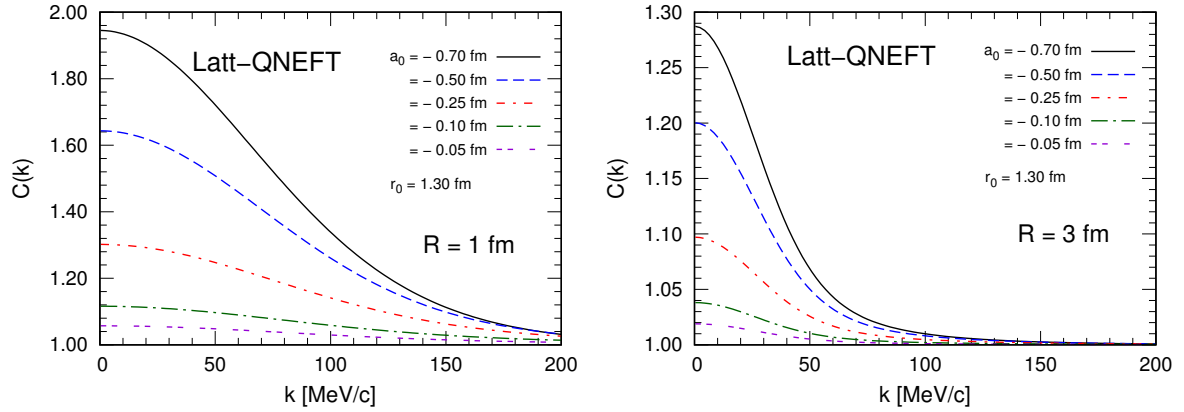


Figura 5.1: Função de correlação para $J/\psi N$ calculada com a Eq. (3.56) para dois valores de raio da fonte R . Os valores de a_0 e r_0 são de simulações de QCD na rede [158, 159, 160, 157] extrapolados para a massa física do pión com QNEFT [68]. Essas figuras foram empregadas por nós na Ref. [100].

QCD [164]. Os resultados da Figura 5.1 apresentam a tendência esperada: a correlação é maior quando o raio da fonte é menor. Tal fato, por si só, indicaria que experimentalmente colisões pp seriam preferidas; por outro lado, colisões com íons pesados originam maior taxa de produção.

Esses gráficos também revelam que as intensidades das correlações são consideravelmente fracas para $R = 3$ fm; especificamente $C(0) \simeq 1.04$ para $a_0 = -0.10$ fm e $C(0) \simeq 1.02$ para $a_0 = -0.05$ fm. Por outro lado, para $R = 1$ fm, as correlações são bem mais intensas, compatíveis com os extraídos para o sistema similar no setor estranho, ϕN [97]. Para os valores maiores de a_0 , as correlações são significativamente intensas.

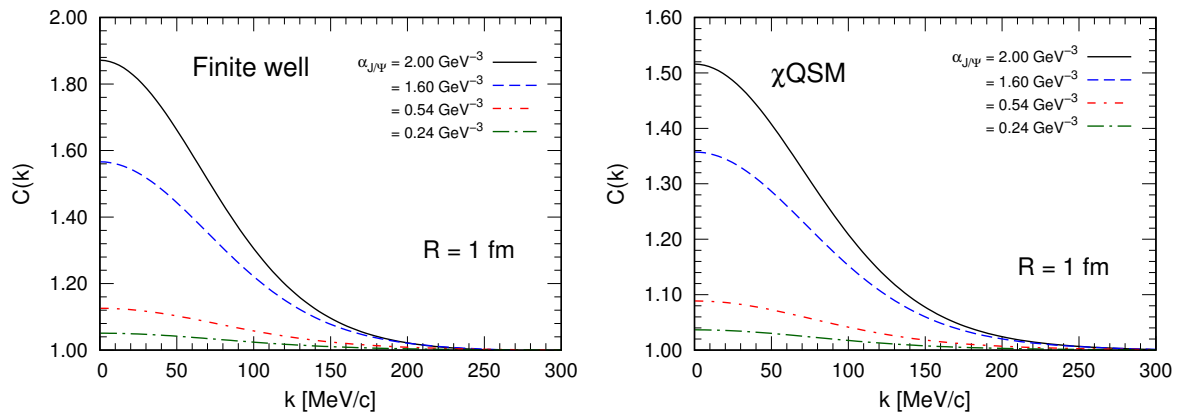


Figura 5.2: Função de correlação correspondente aos potenciais das Eqs. (5.18)(esquerda) e (5.16)(direita). Essas figuras foram empregadas por nós na Ref. [100].

A Figura 5.2 mostra os resultados para a função de correlação calculados com as interações $J/\psi N$ previstas pelos modelos fenomenológicos. Como se verifica, os resultados são bem semelhantes aos obtidos com a QNEFT mostrados na Figura 5.1. Isso é compreensível frente ao que já foi mencionado em relação aos valores de a_0 , que não são muito diferentes dos extraídos da QCD na rede. Os valores de $C(k)$ para o modelo χSQM são um pouco menores do que para o modelo de poço esférico. Não mostramos os resultados para tamanho de fonte $R = 3$ fm porque eles seguem o mesmo padrão dos da Figura 5.1.

5.3 Fórmula de LL para alcance efetivo grande

Conforme revelado pela Tabela 5.5, o valor do alcance efetivo r_0 pode ser muito maior que o alcance real do potencial quando este é bem maior que o comprimento de espalhamento $|a_0|$. O valor do alcance efetivo somente é comparável ao valor do alcance real do potencial quando a_0 é muito maior que o alcance real. A seguir mostramos a função de correlação $C(k)$ calculada com a função de onda exata $\psi_0(k, r)$ para o poço esférico e a aproximação de Lednicky que expressa $C(k)$ em termos da amplitude de espalhamento $f_0(k)$. A amplitude de espalhamento é dada em termos do deslocamento de fase $\delta_0(k)$ como mostrado na Eq. (3.49):

$$\begin{aligned} f_0(k) &= \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \text{sen}\delta_0 = \frac{1}{k} \frac{\text{sen}\delta_0}{\cos\delta_0 - i \sin\delta_0} \\ &= \frac{1}{k \cot\delta_0 - ik} \end{aligned} \quad (5.21)$$

O deslocamento de fase para o poço esférico é dado por

$$\delta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{k}{k_0} \tan k_0 R_N \right) - k R_N \quad (5.22)$$

onde $k_0 = \sqrt{k^2 + 2\mu_{J/\psi N} V_0}$, em que V_0 é a profundidade do poço e $\mu_{J/\psi N}$ a massa reduzida, definidos mais acima. Uma aproximação adicional consiste em usar a *effective range expansion* (ERE) para $f_0(k)$, definida na Eq. (3.57), que repetimos aqui para uma leitura mais fácil:

$$f_0(k) = \frac{1}{k \cot\delta_0 - ik} \xrightarrow{k \approx 0} \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 - ik} \quad (5.23)$$

A Figura 5.3 mostra a função de correlação obtida usando a função de onda do par e a fórmula LL para o caso do poço finito com $R_N = 1$ fm e um alcance efetivo $r_0 = 4.5$ fm. Usamos a fórmula LL com $f_0(k)$ sem aproximação e empregando a ERE para ela.

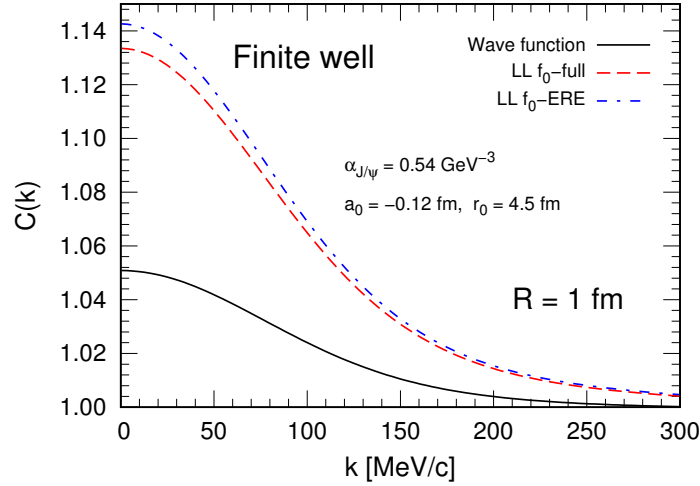


Figura 5.3: Função de correlação para $J/\psi N$ obtida usando a função de onda do par e a fórmula LL para o caso do poço finito com $R_N = 1$ fm e um alcance efetivo $r_0 \gg R_N$.

A figura mostra claramente o erro que se pode cometer ao usar a fórmula LL para extrair valores de a_0 e r_0 de dados experimentais se r_0 for muito maior que o alcance real da interação. Neste sentido, deve-se colocar sob suspeição a extração dos valores dessas quantidades para a interação ϕN nas Refs. [96, 97] que encontraram valores para r_0 que variam entre 7 fm e 14 fm para correspondentes valores de $a_0 \sim 1$ fm, que é o valor que se espera para o alcance real dessa interação. Deve-se, portanto, ter esse fato em mente quando da extração femtoscópica dessas quantidades para a interação $J/\psi N$. Essa situação deve ser melhorada à medida que se conhecer melhor o valor da polarizabilidade do charmônio $\alpha_{J/\psi}$ que, como o nome diz, é uma propriedade do charmônio e, portanto, deve ser determinado de maneira independente de qualquer experimento femtoscópico.

5.4 Conclusões

A femtoscopia oferece uma oportunidade única para se obterem informações sobre a anomalia do traço da QCD ao permitir acessar correlações $J/\psi N$ a baixos

momentos transferidos. Conforme dito reiteradamente, esse fato faz da femtoscopia uma técnica complementar aos experimentos de eletro e fotoprodução, já que esses últimos estão sujeitos a limitações cinemáticas que os impedem acessar espalhamentos $J/\psi N$ frontais. É a amplitude de espalhamento frontal que está relacionada com o elemento de matriz associado à anomalia do traço.

Nossas previsões foram baseadas em dados de QCD na rede e modelos fenomenológicos. Os dados de QCD na rede indicam um cenário otimista, principalmente no caso em que o valor do comprimento de espalhamento a_0 não for muito pequeno (em módulo). O valor de a_0 depende crucialmente do termo de contato c_0 , o qual não pode ser determinado com muita precisão com os dados disponíveis atualmente. No caso dos modelos fenomenológicos, o valor de a_0 depende do valor da cromopolarizabilidade do J/ψ , a qual não é bem conhecida presentemente. Nossos resultados indicam que esse valor precisa ser um tanto maior que $\alpha_{J/\psi} > 0.24 \text{ GeV}^{-3}$ para que se tenha uma correlação suficientemente forte para ser mensurável presentemente no LHC.

Os dados da QCD na rede, devidamente extrapolados para o limite físico das massas dos quarks através da QNEFT, fornecem um valor para o alcance efetivo r_0 da ordem do alcance real da interação, que é aproximadamente $1/2m_\pi$. Os potenciais fenomenológicos fornecem valores bem menores, para valores baixos de $\alpha_{J/\psi}$. O nosso estudo acima indica que neste último caso, o emprego da fórmula LL é questionável e deve ser usada com extrema precaução na extração experimental de a_0 e r_0 .

Por fim, é importante mencionar que, apesar da interação $J/\psi N$ ser atrativa (comprimento de espalhamento negativo na nossa convenção, Eq. (3.57)), nenhum desses potenciais formam estados ligados $J/\psi N$. Porém, um potencial de poço finito com $R_N = 1 \text{ fm}$ e $\alpha_{J/\psi} > 4.4 \text{ GeV}^{-3}$ gera estado ligado numa onda S ($L = 0$); contudo, tal valor de cromopolarizabilidade é ao menos o dobro do maior valor comumente utilizado na literatura. Por outro lado, em um meio nuclear a situação é diferente, pois mesmo que a interação $J/\Psi N$ seja fraca demais para formar estado ligado, efeitos coletivos são importantes [59, 166, 167, 168] e podem levar a um estado nuclear exótico.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Nesta tese estudamos a possibilidade de utilizar a femtosopia para extrair informações sobre as interações entre híperons charmosos $Y_c = (\Lambda_c, \Sigma_c)$ e mésons charmônio ($J/\psi, \eta_c$) com núcleons. São várias as motivações físicas para o estudo. Uma delas é a possibilidade de se produzir em laboratório matéria nuclear exótica, em que híperons charmosos e mésons charmônio formam estados ligados com núcleos atômicos [40]. Até a presente data, não existem dados experimentais sobre a existência dessa nova forma de matéria nuclear, apesar de estudos teóricos indicarem uma forte possibilidade para tal. Uma motivação particularmente importante para o nosso conhecimento sobre como funciona a QCD é que a interação de mésons J/ψ e η_c com núcleons fornece informações sobre a anomalia do traço na QCD, a qual é responsável pela geração de massa dos hádrons, principalmente daqueles contendo quarks leves. Outra razão ainda, não menos importante, é que o entendimento dessas interações podem ajudar a esclarecer a natureza dos mésons exóticos XYZ e pentaquarks com charm, cujo conhecimento a respeito é presentemente muito limitado [30].

Tanto a interação $Y_c N$ quanto a $J/\psi N$ podem ser estudadas experimentalmente através dos tradicionais experimentos de espalhamento. Laboratórios como JPARC e FAIR, esse último ainda em construção, têm projetos para medir essas interações. No JLab, experimentos recentes de fotoprodução produziram alguns resultados para a interação $J/\psi N$. A femtosopia oferece uma alternativa a esses experimentos tradicionais e vem sendo empregada corriqueiramente para estudar interações hádron-hádron. Em particular, para a interação J/ψ , a femtosopia oferece informação complementar à obtida através dos experimentos de fotoprodução, já que ela pode acessar a amplitude de espalhamento para momentos transferidos praticamente zero, e pequenos ângulos de espalhamento. É precisamente essa última característica que permite ela acessar o elemento de matriz que fornece a distribuição de glúons no interior do próton. Esse elemento de

matriz está associado à anomalia do traço do tensor-energia momento da QCD, responsável pela maior parte da massa dos hádrons contendo quarks leves.

Essa teve contou com quatro capítulos principais. O Capítulo 2 foi dedicado a um breve apanhado sobre o desenvolvimento histórico da física de hádrons que levou à QCD e a uma revisão sobre os aspectos desta teoria de particular interesse para este trabalho. No Capítulo 3, revisamos o formalismo da femtoscopia. As derivações mais longas foram colocadas em apêndices. O Capítulo 4 tratou da femtoscopia da interação $Y_c N$. Ele iniciou discutindo uma teoria efetiva quiral para extrapolar, para o limite físico da massa dos quarks, dados de QCD na rede e para simular modelos fenomenológicos que empregamos para obter as funções de correlação. Também explicamos como a interação coulombiana foi introduzida no cálculo das funções de onda de espalhamento. Apresentamos as nossas previsões e discutimos suas implicações para extração experimental de propriedades associadas a essa interação. O Capítulo 5 tratou da femtoscopia da interação $J/\psi N$. A estrutura desse capítulo é similar à do anterior: revisamos brevemente uma teoria efetiva para extrapolar dados de QCD na rede e modelos efetivos para calcular as funções de correlação, apresentamos e discutimos nossas previsões. Ainda argumentamos sobre potenciais problemas no emprego da fórmula de Lednicky e Lyuboshits para extrair informações sobre interações hádron-hádron quando o alcance efetivo for muito maior que o alcance físico da interação.

Uma conclusão geral do trabalho é que, dado o nosso conhecimento teórico e fenomenológico atual sobre as interações $Y_c N$ e $J/\psi N$, são promissoras as perspectivas de que a femtoscopia possa trazer informações sobre essas interações. Nossas previsões indicam que as funções de correlação exibem clara sensibilidade à interação forte. Ela pode também discriminar modelos e com isso melhorar nossa compreensão de como a QCD realmente funciona no regime não perturbativo. Obviamente, há aspectos experimentais que não foram aqui abordados e que devem ser levados em conta numa situação prática, como tamanho e formato da função da fonte, a resolução experimental do momento relativo do par de partículas, correlações de origem não femtoscópicas e taxas de produção das partículas em questão.

Como perspectivas de futuros desenvolvimentos, cabe mencionar que a femtoscopia da interação $J/\psi N$ pode revelar mais do que o elemento de matriz associado à origem da massa do próton; ela pode também determinar a extensão da distri-

buição de glúons no interior do próton, como mostrado em um estudo prospectivo recente [169]. Para tal, é necessário extrair elementos de matriz do tensor energia-momento em estados hadrônicos em movimento, i.e., estados iniciais e finais com momentos diferentes. Esses elementos de matriz fornecem fatores de forma gravitacionais [170, 171]. Como esses elementos de matriz não podem ser medidos empregando a força gravitacional, pois ela é fraca demais dadas as condições experimentais atuais, a femtoscopia é uma alternativa real. O estudo da Ref. [169] foi feito empregando o formalismo da expansão multipolar da QCD [150, 151], cuja aplicabilidade para o J/ψ não está assegurada. O emprego de uma teoria como a QNEFT é uma perspectiva promissora que deverá ser explorada seriamente.

Outra perspectiva é o estudo da interação J/ψ -píon. Píons são produzidos em profusão em colisões pp , pA e AA a altas energias. Como tal, a probabilidade de que eles se espalhem em mésons J/ψ é bastante alta. Apesar de estimativas recentes [169] indicarem que os valores das funções de correlação J/ψ -píon sejam muito pequenos, mesmo a momentos relativos próximos de zero, as estatísticas mais altas previstas para os próximos runs do LHC num futuro próximo exigem previsões mais precisas para essa interação.

Por fim, a femtoscopia das interações entre outras partículas charmosas, como as entre mésons D , também oferece oportunidades muito promissoras, como indicam estudos recentes [172, 173, 174]. A femtoscopia da interação DD^* é importante no contexto dos mésons exóticos, em particular para o méson $X(3872)$, talvez um dos exóticos mais debatidos desde sua descoberta em 2003.

Apêndice A

Convenções e notações

Neste apêndice serão expostas as convenções utilizadas nesta tese sobre o Espaço de Minkowski e sobre as matrizes de Dirac.

A.1 Espaço de Minkowski

No espaço de Minkowski o quadrivetor de posição *contravariante*, denotado por índice superior, é:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}) \quad (\text{A.1})$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo e \vec{x} é o vetor de posição usual. A partir deste, define-se o quadrivetor de posição *covariante*, denotado por índice inferior:

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{x}) \quad (\text{A.2})$$

e forma-se a quantidade *escalar de Lorentz*:

$$(ct)^2 - \vec{x}^2 = x_\mu x^\mu \equiv x^2 \quad (\text{A.3})$$

em que foi introduzida a convenção de Einstein de somar sobre índices repetidos.

As componentes do vetor covariante são obtidas através de um tensor métrico com componentes $g_{\mu\nu}$ que podem ser dispostos numa matriz \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}) = \mathbf{g}^{-1} \quad (\text{A.4})$$

A Eq. (A.2) é escrita como:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \quad (\text{A.5})$$

e a quantidade invariante na Eq. (A.3) é expressa como:

$$x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \quad (\text{A.6})$$

De um modo geral, um quadrivetor contravariante a^μ é uma lista de quatro componentes:

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a}) \quad (\text{A.7})$$

que possui a quantidade $(a^0)^2 - \vec{a}^2$ invariante sob transformações de Lorentz. Uma matriz de transformação Λ é uma transformação de Lorentz se satisfaz:

$$\Lambda \mathbf{g} \Lambda^T = \mathbf{g} \quad (\text{A.8})$$

Sendo a e b dois quadrivetores, a métrica induz um *produto escalar* $a \cdot b$:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu \quad (\text{A.9})$$

essa quantidade é invariante sob transformações de Lorentz, sendo chamada *escalar de Lorentz*.

O operador gradiente quadrimensional

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \vec{\nabla} \right) \quad (\text{A.10})$$

é um vetor covariante. O vetor contravariante associado é:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{A.11})$$

A partir destes, forma-se o operador d'Alembertiano:

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla^2 \quad (\text{A.12})$$

que é um operador escalar.

A.2 Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac são definidas pela álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \equiv \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta} \mathbf{1}_4; \quad \alpha, \beta = 0, \dots, 3 \quad (\text{A.13})$$

em que $\mathbf{1}_4$ é a matriz identidade 4x4. Quando necessário, escolhemos a seguinte representação para os cálculos nesta dissertação:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \sigma_k \\ -\sigma_k & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}; \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{A.14})$$

em que $\mathbf{1}_2$ denota a matriz identidade 2x2 e σ^k denota as matrizes de Pauli, dadas por:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

facilmente verifica-se que as matrizes de Pauli satisfazem:

$$\{\sigma_k, \sigma_l\} = 2\delta_{kl} \mathbf{1}_2, \quad [\sigma_k, \sigma_l] = 2i\epsilon_{k,l,m} \sigma_m \quad (\text{A.16})$$

Apêndice B

Resultados da seção 3.1

Neste apêndice serão demonstrados alguns resultados intermediários utilizados no Capítulo 3. Iniciamos mostrando alguns resultados sobre a cinemática de duas partículas. Na subseção 3.1.1, a energia total E do par de partículas foi aproximada pela soma de dois termos, $E_{CM}(\mathbf{P}, M)$ e $E_{rel}(\mathbf{k}, \mu)$. O primeiro é a energia do centro de massa, que depende apenas do momento total \mathbf{P} e da massa total $M = M_a + M_b$, o segundo é a energia do movimento relativo, que depende do momento relativo \mathbf{k} e da massa reduzida μ . Especificamente:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{M_a^2 + \mathbf{p}_a^2} + \sqrt{M_b^2 + \mathbf{p}_b^2} \\ &= M_a \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}_a^2}{M_a^2}} + M_b \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}_b^2}{M_b^2}} \\ &\approx E_{CM}(\mathbf{P}, M) + E_{rel}(\mathbf{k}, \mu) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

o que será explicado a seguir.

Considerando as partículas em movimento não relativístico, i.e. $|\mathbf{p}_i|/M_i < 1$ ($i = a, b$), é possível expandir as raízes em série de Taylor e tomar apenas os termos dominantes:

$$\begin{aligned} E &= M_a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}_a^2}{M_a^2} \right) + M_b \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}_b^2}{M_b^2} \right) + \mathcal{O}(\mathbf{p}_a^4, \mathbf{p}_b^4) \\ &= M + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}_a^2}{M_a} + \frac{\mathbf{p}_b^2}{M_b} \right) + \mathcal{O}(\mathbf{p}_a^4, \mathbf{p}_b^4) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Para deixar essa expressão com a forma na Eq. (B.1), é necessário escrever \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b em termos de \mathbf{P} e \mathbf{k} . Relembrando a definição destes últimos - Eq. (3.2):

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b, \quad \mathbf{k} = \frac{M_b \mathbf{p}_a - M_a \mathbf{p}_b}{M_a + M_b} \quad (\text{B.3})$$

resolve-se para os momentos das partículas, encontrando-se:

$$\mathbf{p}_a = \frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_b = \frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{k} \quad (\text{B.4})$$

de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p}_a^2}{M_a} &= \frac{M_a}{M^2} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{M_a} \mathbf{k}^2 + \frac{2}{M} \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} \\ \frac{\mathbf{p}_b^2}{M_b} &= \frac{M_b}{M^2} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{M_b} \mathbf{k}^2 - \frac{2}{M} \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{p}_a^2}{M_a} + \frac{\mathbf{p}_b^2}{M_b} \right] &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_a}{M^2} + \frac{M_b}{M^2} \right) \mathbf{P}^2 + \left(\frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b} \right) \mathbf{k}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2M} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{k}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo este resultado na Eq. (B.2), tem-se:

$$E = M + \frac{1}{2M} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{k}^2 + \mathcal{O} \left(\sum_{n=0}^4 |\mathbf{k}|^n |\mathbf{P}|^{4-n} \right) \quad (\text{B.6})$$

de onde, relembando a Eq. (B.1), encontra-se:

$$E_{CM} \approx M + \frac{1}{2M} \mathbf{P}^2, \quad E_{rel} \approx \frac{1}{2\mu} \mathbf{k}^2 \quad (\text{B.7})$$

como se queria mostrar.

B.1 Derivação de $P^{(11)}$

No texto da Seção. 3.1.2, comentamos que a probabilidade P_2 é escrita como a soma de quatro termos: $P_2 = P^{(11)} + P^{(22)} + P^{(12)} + P^{(21)}$. Nesta subseção calculamos o termo $P^{(11)}$, que é dado por:

$$P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \sum_{ab, a'b'} \rho(ab, a'b') A_{ab}^{(1)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) A_{a'b'}^{(1)*}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \quad (\text{B.8})$$

Lembrando da Eq. (3.32) e substituindo as Eqs. (3.26) e (3.33) na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P^{(11)} &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \int dt_a dt_b dt_{a'} dt_{b'} \theta(t_a - t_b) \theta(t_{a'} - t_{b'}) \\
&\times e^{i[\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_a - \Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}') t_{a'}]} \sum_{aa'} v_{aa'} \rho(t_a, t_{a'}) \tilde{\psi}_a(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}, t_a) \tilde{\psi}_{a'}^*(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}', t_{a'}) \\
&\times \sum_{bb'} v_{bb'} \rho(t_b, t_{b'}) \tilde{\psi}_b(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}, t_b) \tilde{\psi}_{b'}^*(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}', t_{b'}) \quad (B.9)
\end{aligned}$$

para obter a expressão indicada no capítulo, vamos reescrever os termos que aparecem nessa expressão. A seguir, é indicado separadamente como cada termo será reescrito.

Introduzindo a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}
X^0 &= (t_a + t_{a'})/2 & e & & Y^0 &= (t_b + t_{b'})/2 \\
x^0 &= t_a - t_{a'} & & & y^0 &= t_b - t_{b'}
\end{aligned} \quad (B.10)$$

cujo módulo do determinante jacobiano é 1 e relembando a Eq. (3.28), a fase $[\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_a - \Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}') t_{a'}]$ fica:

$$\begin{aligned}
\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_a - \Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}') t_{a'} &= X^0 \left[\omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) - \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) \right. \\
&- \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) \left. \right] + x^0 \left[E_a + E_b - \frac{1}{2} \left(\omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) + \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) \right. \right. \\
&\left. \left. + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) \right) \right] \quad (B.11)
\end{aligned}$$

As funções $\tilde{\psi}$ são reescritas usando a transformada de Fourier inversa (ver Eq. (3.23)):

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_a(\mathbf{k}_a, t) &= \int d^3z e^{-i[\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{z} - \omega_a(\mathbf{k}_a)t]} \psi_a(\mathbf{z}, t) \\
\tilde{\psi}_b(\mathbf{k}_b, t) &= \int d^3z e^{-i[\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{z} - \omega_b(\mathbf{k}_b)t]} \psi_b(\mathbf{z}, t) \quad (B.12)
\end{aligned}$$

com as transformações correspondentes para $\tilde{\psi}_a^*(\mathbf{k}_a, t)$ e $\tilde{\psi}_b^*(\mathbf{k}_b, t)$.

A função θ em Eq. (B.9) é a função degrau, que pode ser representada por uma

integral como:

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{\omega + i\epsilon} e^{-i\omega t} = \theta^*(t) \quad (\text{B.13})$$

Fazendo essas substituições na Eq. (B.9) e reagrupando os termos no expoente, encontra-se:

$$\begin{aligned} P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{\omega + i\epsilon} \frac{1}{\omega' - i\epsilon} \\ &\times \int d^4 X d^4 Y e^{i \left\{ \left[\omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) + \omega' - \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) - \omega \right] (X^0 - Y^0) - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \right\}} \\ &\times \int d^4 x e^{i \left[\left(E_a + E_b - \frac{\omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) + \omega' + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) + \omega}{2} \right) x^0 - \left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_a}{M} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{x} \right]} \\ &\times \rho \left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2} \right) \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a \left(X + \frac{x}{2} \right) \psi_{a'}^* \left(X - \frac{x}{2} \right) \\ &\times \int d^4 y e^{i \left[\frac{\omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) + \omega' + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) + \omega}{2} y^0 - \left(-\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_b}{M} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{y} \right]} \\ &\times \rho \left(Y^0 + \frac{y^0}{2}, Y^0 - \frac{y^0}{2} \right) \sum_{bb'} v_{bb'} \psi_b \left(Y + \frac{y}{2} \right) \psi_{b'}^* \left(Y - \frac{y}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Esta expressão pode ser reescrita usando a seguinte mudança de variáveis para as integrais em ω e ω' :

$$\omega = -q^0 - \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) \quad \text{e} \quad \omega' = -q'^0 - \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) \quad (\text{B.15})$$

obtendo-se:

$$\begin{aligned}
P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \frac{1}{-q^0 - \omega_b(\frac{M_b}{M}\mathbf{P} - \mathbf{q}) + i\epsilon} \\
&\times \frac{1}{-q'^0 - \omega_b(\frac{M_b}{M}\mathbf{P} - \mathbf{q}') - i\epsilon} \int d^4 X d^4 Y e^{i(q-q') \cdot (X-Y)} \int d^4 x e^{i(E_a + E_b + \frac{q^0 + q'^0}{2})x^0} \\
&e^{-i(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_a}{M}\mathbf{P}) \cdot \mathbf{x}} \rho\left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2}\right) \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a\left(X + \frac{\mathbf{x}}{2}\right) \psi_{a'}^*\left(X - \frac{\mathbf{x}}{2}\right) \\
&\times \int d^4 y e^{i\left[\left(-\frac{q^0 + q'^0}{2}\right)y^0 - \left(-\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_b}{M}\mathbf{P}\right) \cdot \mathbf{y}\right]} \rho\left(Y^0 + \frac{y^0}{2}, Y^0 - \frac{y^0}{2}\right) \\
&\times \sum_{bb'} v_{bb'} \psi_b\left(Y + \frac{\mathbf{y}}{2}\right) \psi_{b'}^*\left(Y - \frac{\mathbf{y}}{2}\right) \tag{B.16}
\end{aligned}$$

onde tratamos X, Y, q e q' como quadrivetores com métrica $diag(+, -, -, -)$, ou seja, usamos:

$$(q - q') \cdot (X - Y) = (q^0 - q'^0)(X^0 - Y^0) - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \tag{B.17}$$

Caso as massas das partículas fossem iguais, os termos $M_a/M\mathbf{P}$ e $M_b/M\mathbf{P}$ seriam $\mathbf{P}/2$. Para evidenciar as diferenças entre as expressões obtidas aqui e as obtidas na Ref. [125], que considera partículas idênticas, introduzimos um parâmetro δ_M através de:

$$M_a/M = \frac{1}{2} + \delta_M; \quad M_b/M = \frac{1}{2} - \delta_M \quad \Rightarrow \delta_M = \frac{M_a - M_b}{2M} \tag{B.18}$$

Além disso, lembrando que $P^0 = E_a + E_b$ e implementando a seguinte mudança de variáveis

$$Q^0 = q^0 + \frac{P^0}{2}; \quad Q'^0 = q'^0 + \frac{P^0}{2}; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q} \tag{B.19}$$

a Eq. (B.16) se torna:

$$\begin{aligned}
P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q'}{(2\pi)^4} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}') \frac{1}{\frac{P^0}{2} - Q^0 - \omega_b(\frac{\mathbf{P}}{2} - \delta_M \mathbf{P} - \mathbf{Q}) + i\epsilon} \\
&\times \frac{1}{\frac{P^0}{2} - Q'^0 - \omega_b(\frac{\mathbf{P}}{2} - \delta_M \mathbf{P} - \mathbf{Q}') - i\epsilon} \int d^4 X d^4 Y e^{i(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} \\
&\times \int d^4 x e^{i\left[\left(\frac{P^0}{2} + \frac{Q^0 + Q'^0}{2}\right)x^0 - \left(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2} + \frac{\mathbf{P}}{2} + \delta_M \mathbf{P}\right) \cdot \mathbf{x}\right]} \rho\left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2}\right) \\
&\times \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a\left(X + \frac{x}{2}\right) \psi_{a'}^*\left(X - \frac{x}{2}\right) \int d^4 y e^{i\left[\left(\frac{P^0}{2} - \frac{Q^0 + Q'^0}{2}\right)y^0 - \left(-\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2} + \frac{\mathbf{P}}{2} - \delta_M \mathbf{P}\right) \cdot \mathbf{y}\right]} \\
&\times \rho\left(Y^0 + \frac{y^0}{2}, Y^0 - \frac{y^0}{2}\right) \sum_{bb'} v_{bb'} \psi_b\left(Y + \frac{y}{2}\right) \psi_{b'}^*\left(Y - \frac{y}{2}\right) \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Caso não houvesse os termos $\pm \delta_M \mathbf{P}$, as fases nas integrais em x e em y seriam $\exp\{i(\frac{P}{2} + \frac{Q^0 + Q'^0}{2}) \cdot x\}$ e $\exp\{i(\frac{P}{2} - \frac{Q^0 + Q'^0}{2}) \cdot y\}$. Porém, é possível reescrevê-las dessa forma absorvendo os termos $\delta_M \mathbf{P}$ nas variáveis de integração \mathbf{Q} e \mathbf{Q}' através da seguinte mudança de variáveis:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \delta_M \mathbf{P}; \quad \mathbf{q}' = \mathbf{Q}' + \delta_M \mathbf{P}; \quad q^0 = Q^0 \quad q'^0 = Q'^0 \tag{B.21}$$

com a qual a Eq. (B.20) fica:

$$\begin{aligned}
P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}' - \delta_M \mathbf{P}) \\
&\times \frac{1}{\frac{P^0}{2} - q^0 - \omega_b(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}) + i\epsilon} \frac{1}{\frac{P^0}{2} - q'^0 - \omega_b(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}') - i\epsilon} \int d^4 X d^4 Y e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} \\
&\times \int d^4 x e^{i\left[\left(\frac{P^0}{2} + \frac{q^0 + q'^0}{2}\right)x^0 - \left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2}\right) \cdot \mathbf{x}\right]} \rho\left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2}\right) \\
&\times \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a\left(X + \frac{x}{2}\right) \psi_{a'}^*\left(X - \frac{x}{2}\right) \int d^4 y e^{i\left[\left(\frac{P^0}{2} - \frac{q^0 + q'^0}{2}\right)y^0 - \left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2}\right) \cdot \mathbf{y}\right]} \\
&\times \rho\left(Y^0 + \frac{y^0}{2}, Y^0 - \frac{y^0}{2}\right) \sum_{bb'} v_{bb'} \psi_b\left(Y + \frac{y}{2}\right) \psi_{b'}^*\left(Y - \frac{y}{2}\right) \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Esta expressão se torna mais concisa usando a definição da densidade de Wigner

de uma partícula da fonte, $\mathcal{S}(X, \kappa)$ [125]:

$$\mathcal{S}(X, \kappa) = \int d^4x e^{i\kappa \cdot x} \rho\left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2}\right) \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a\left(X + \frac{x}{2}\right) \psi_{a'}^*\left(X - \frac{x}{2}\right) \quad (\text{B.23})$$

de maneira que a função $P^{(11)}$ fica expressa por:

$$\begin{aligned} P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}' - \delta_M \mathbf{P}) \\ &\times \frac{1}{\frac{P^0}{2} - q^0 - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}\right) + i\epsilon} \frac{1}{\frac{P^0}{2} - q'^0 - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}'\right) - i\epsilon} \int d^4X d^4Y e^{i(q-q') \cdot (X-Y)} \\ &\times \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Escrita desta forma, fica evidente que tomando as massas iguais, ou seja, fazendo $\delta_M = 0$, a expressão acima se torna idêntica à da Eq.(47-a) de [125] - com a ressalva de que em [125] as funções $\Phi_{\mathbf{k}}$ são devidamente simetrizadas, pois ela lida com partículas idênticas, enquanto que aqui as $\Phi_{\mathbf{k}}$ não são simetrizadas por estarmos interessados em partículas distintas.

A expressão na Eq. (B.24) pode ser reescrita fazendo as integrais nas componentes 0 utilizando o teorema dos resíduos. Para isso, nota-se que, como as funções $\mathcal{S}(X, K)$ são analíticas em K - ver Eq. (B.23), o integrando na Eq. (B.24) possui polos em:

$$q^0 = q_P^0 \equiv \frac{P^0}{2} - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}\right) + i\epsilon \quad \text{e} \quad q'^0 = q'_P{}^0 \equiv \frac{P^0}{2} - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}'\right) - i\epsilon \quad (\text{B.25})$$

que estão, respectivamente, nos semiplanos superior e inferior dos planos complexos de q^0 e q'^0 (pois $\epsilon \rightarrow 0^+$). Usando a Eq. (B.25), escrevendo os denominadores como $-(q^0 - q_P^0)$ e $-(q'^0 - q'_P{}^0)$ e explicitando as integrais nas componentes 0 de q e q' , a Eq. (B.24) fica:

$$\begin{aligned} P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}' - \delta_M \mathbf{P}) \int d^4X d^4Y e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^0}{2\pi} \frac{e^{iq^0(X^0-Y^0)}}{q^0 - q_P^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq'^0}{2\pi} \frac{e^{-iq'^0(X^0-Y^0)}}{q'^0 - q'_P{}^0} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Consideremos a integral em q'^0 na expressão acima:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq'^0}{2\pi} \frac{e^{-iq'^0(X^0-Y^0)}}{q'^0 - q'_{\text{P}}{}^0} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) \quad (\text{B.27})$$

que pode ser calculada usando o teorema dos resíduos. Para isso, busca-se um caminho em formato de semi-circunferência de raio R' em que o módulo do integrando se anule no limite $R' \rightarrow \infty$, de modo que a integral ao longo do trecho em forma de arco seja nula neste limite. Com isso, a integral no caminho fechado formado pelo arco junto com a reta real se torna igual à integral no eixo real. O cálculo da integral no caminho fechado é feito facilmente usando o teorema dos resíduos.

Encontra-se o caminho adequado notando-se que, escrevendo $q'^0 = R'e^{i\varphi'}$, tem-se:

$$\left| e^{-iq'^0(X^0-Y^0)} \right| = \left| e^{-iR'[\cos(\varphi')+i\sin(\varphi')](X^0-Y^0)} \right| = e^{R'\sin(\varphi')(X^0-Y^0)} \quad (\text{B.28})$$

que, no limite $R' \rightarrow \infty$, vai a zero quando:

- $(X^0 - Y^0) > 0$ e $\sin(\varphi') < 0$:

o contorno fecha o semi-círculo pelo semi-plano inferior (parte imaginária negativa), envolvendo o polo no sentido horário; a integral no contorno fechado é não nula e igual à integral na reta real ¹.

OU

- $(X^0 - Y^0) < 0$ e $\sin(\varphi') > 0$:

o contorno fecha o semi-círculo pelo semi-plano superior (parte imaginária positiva), não envolvendo o polo; a integral no contorno fechado é nula e igual à integral na reta real.

Nota-se portanto, que a integral I somente não se anula quando $X^0 - Y^0 > 0$, ou

¹A igualdade entre a integral no caminho fechado e a na reta real ocorre porque o módulo do integrando vai a zero no arco que fecha o caminho; porém, analisamos acima apenas um fator do integrando. Ocorre que esse fator possui um decrescimento exponencial, de forma que o módulo do integrando somente não iria a zero no arco caso o produto das funções \mathcal{S} crescessem ao menos tão rápido quanto $R'e^{R'}$.

seja: $I \propto \theta(X^0 - Y^0)$. Usando o teorema dos resíduos, encontra-se:

$$I = \theta(X^0 - Y^0)(-i)e^{-iq'^0(X^0 - Y^0)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q + q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q + q'}{2}\right) \quad (\text{B.29})$$

$$\text{com } q'^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}'\right)$$

A integral:

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^0}{2\pi} \frac{e^{iq^0(X^0 - Y^0)}}{q^0 - q_p^0} I \quad (\text{B.30})$$

na Eq. (B.26), com I dado pela Eq. (B.27), é calculada de forma semelhante. O caminho em forma de arco que fecha o contorno para aplicar o teorema dos resíduos é encontrando notando-se que, escrevendo $q^0 = Re^{i\varphi'}$, tem-se:

$$\left| e^{iq^0(X^0 - Y^0)} \right| = \left| e^{iR[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)](X^0 - Y^0)} \right| = e^{-R\sin(\varphi)(X^0 - Y^0)} \quad (\text{B.31})$$

que, no limite $R \rightarrow \infty$, vai a zero quando:

- $(X^0 - Y^0) > 0$ e $\sin(\varphi') > 0$:

o contorno fecha o semi-círculo pelo semi-plano superior, envolvendo o polo no sentido anti-horário; a integral no contorno fechado é não nula e igual à integral na reta real.

OU

- $(X^0 - Y^0) < 0$ e $\sin(\varphi') < 0$:

o contorno fecha o semi-círculo pelo semi-plano inferior, não envolvendo o polo; a integral no contorno fechado é nula e igual à integral na reta real.

Desta forma, usando o teorema de resíduos, encontra-se:

$$\mathcal{I} = ie^{iq^0(X^0 - Y^0)} I$$

$$\mathcal{I} = \theta(X^0 - Y^0)e^{i(q^0 - q'^0)(X^0 - Y^0)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q + q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q + q'}{2}\right) \quad (\text{B.32})$$

$$\text{com } q'^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}'\right) \quad \text{e} \quad q^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}\right)$$

Substituindo a Eq. (B.32) na Eq. (B.26) e reagrupando as exponenciais, chega-se

a:

$$P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}' - \delta_M \mathbf{P})$$

$$\int d^4 X d^4 Y \theta(X^0 - Y^0) e^{i(q-q') \cdot (X-Y)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) \quad (\text{B.33})$$

com $q'^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}'\right)$ e $q^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_b\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}\right)$

B.2 Derivação de $P^{(22)}$

O termo $P^{(22)}$ é dado por:

$$P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \sum_{ab, a'b'} \rho(ab, a'b') A_{ab}^{(2)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) A_{a'b'}^{(2)*}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \quad (\text{B.34})$$

Lembrando da Eq. (3.32) e substituindo as Eqs. (3.29) e (3.33) na equação acima, obtém-se:

$$P^{(22)} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \int dt_a dt_b dt_{a'} dt_{b'} \theta(t_b - t_a) \theta(t_{b'} - t_{a'})$$

$$\times e^{i[\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_b - \Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}') t_{b'}]} \sum_{aa'} v_{aa'} \rho(t_a, t_{a'}) \tilde{\psi}_a(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}, t_a) \tilde{\psi}_{a'}^*(M_a/M\mathbf{P} + \mathbf{q}', t_{a'})$$

$$\times \sum_{bb'} v_{bb'} \rho(t_b, t_{b'}) \tilde{\psi}_b(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}, t_b) \tilde{\psi}_{b'}^*(M_b/M\mathbf{P} - \mathbf{q}', t_{b'}) \quad (\text{B.35})$$

Novamente, usamos a mudança de variáveis da Eq. (B.10) de modo que, relembando a Eq. (3.28), a fase $[\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_b - \Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}') t_{b'}]$ fica:

$$\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}) t_b - \Omega(\mathbf{P}, \mathbf{q}') t_{b'} = Y^0 \left[\omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) - \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) \right.$$

$$\left. - \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) \right] + y^0 \left[E_a + E_b - \frac{1}{2} \left(\omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) + \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q}' \right) + \omega_b \left(\frac{M_b}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) \right) \right] \quad (\text{B.36})$$

Os produtos $\tilde{\psi}_a \tilde{\psi}_a^*$ e $\tilde{\psi}_b \tilde{\psi}_b^*$ e as funções θ são calculadas como na seção anterior - ver Eqs. (B.12) e (B.13). Fazendo essas substituições na Eq. (B.35) e reagrupando os termos nos expoentes, tem-se:

$$\begin{aligned}
P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{\omega + i\epsilon} \frac{1}{\omega' - i\epsilon} \\
&\times \int d^4 X d^4 Y e^{i \left\{ \left[\omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) + \omega - \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) - \omega' \right] (X^0 - Y^0) - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \right\}} \\
&\times \int d^4 x e^{i \left[\left(\frac{\omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) + \omega' + \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) + \omega}{2} \right) x^0 - \left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_a}{M} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{x} \right]} \\
&\times \rho \left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2} \right) \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a \left(X + \frac{x}{2} \right) \psi_{a'}^* \left(X - \frac{x}{2} \right) \\
&\times \int d^4 y e^{i \left[\left(E_a + E_b - \frac{\omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) + \omega' + \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) + \omega}{2} \right) y^0 - \left(-\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_b}{M} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{y} \right]} \\
&\times \rho \left(Y^0 + \frac{y^0}{2}, Y^0 - \frac{y^0}{2} \right) \sum_{bb'} v_{bb'} \psi_b \left(Y + \frac{y}{2} \right) \psi_{b'}^* \left(Y - \frac{y}{2} \right) \tag{B.37}
\end{aligned}$$

Usando a seguinte mudança de variáveis para as integrais em ω e ω' :

$$\omega = q^0 - \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) \quad \text{e} \quad \omega' = q'^0 - \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) \tag{B.38}$$

a expressão para $P^{(22)}$ se torna:

$$\begin{aligned}
P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \frac{1}{q^0 - \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) + i\epsilon} \\
&\times \frac{1}{q'^0 - \omega_a \left(\frac{M_a}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q}' \right) - i\epsilon} \int d^4 X d^4 Y e^{i(q - q') \cdot (X - Y)} \int d^4 x e^{i \left(\frac{q^0 + q'^0}{2} \right) x^0} \\
&e^{-i \left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_a}{M} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{x}} \rho \left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2} \right) \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a \left(X + \frac{x}{2} \right) \psi_{a'}^* \left(X - \frac{x}{2} \right) \\
&\times \int d^4 y e^{i \left[\left(E_a + E_b - \frac{q^0 + q'^0}{2} \right) y^0 - \left(-\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{M_b}{M} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{y} \right]} \rho \left(Y^0 + \frac{y^0}{2}, Y^0 - \frac{y^0}{2} \right) \\
&\sum_{bb'} v_{bb'} \psi_b \left(Y + \frac{y}{2} \right) \psi_{b'}^* \left(Y - \frac{y}{2} \right) \tag{B.39}
\end{aligned}$$

onde novamente X, Y, q e q' são quadrivetores com métrica $diag(+, -, -, -)$.

Seguindo os passos que fizemos na derivação de Eq. (B.24), a Eq. (B.39) é reescrita lembrando que $P^0 = E_a + E_b$, reescrevendo M_a/M e M_b/M em termos do parâmetro δ_M definido na Eq. (B.18) e usando a seguinte mudança de variáveis de integração:

$$Q^\mu = (q^0 - P^0/2, \mathbf{q} + \delta_M \mathbf{P}) \quad ; \quad Q'^\mu = (q'^0 - P^0/2, \mathbf{q}' + \delta_M \mathbf{P}) \quad (\text{B.40})$$

a Eq. (B.39) se torna:

$$\begin{aligned} P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = & \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q'}{(2\pi)^4} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}' - \delta_M \mathbf{P}) \frac{1}{\frac{P^0}{2} + Q^0 - \omega_a(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}) + i\epsilon} \\ & \times \frac{1}{\frac{P^0}{2} + Q'^0 - \omega_a(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}') - i\epsilon} \int d^4 X d^4 Y e^{i(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} \\ & \times \int d^4 x e^{i[(\frac{P^0}{2} + \frac{Q^0 + Q'^0}{2})x^0 - (\frac{\mathbf{P}}{2} + \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) \cdot \mathbf{x}]} \rho\left(X^0 + \frac{x^0}{2}, X^0 - \frac{x^0}{2}\right) \\ & \times \sum_{aa'} v_{aa'} \psi_a\left(X + \frac{\mathbf{x}}{2}\right) \psi_{a'}^*\left(X - \frac{\mathbf{x}}{2}\right) \int d^4 y e^{i[(\frac{P^0}{2} - \frac{Q^0 + Q'^0}{2})y^0 - (\frac{\mathbf{P}}{2} - \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) \cdot \mathbf{y}]} \\ & \times \rho\left(Y^0 + \frac{y^0}{2}, Y^0 - \frac{y^0}{2}\right) \sum_{bb'} v_{bb'} \psi_b\left(Y + \frac{\mathbf{y}}{2}\right) \psi_{b'}^*\left(Y - \frac{\mathbf{y}}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Novamente, usando a definição da função de Wigner $\mathcal{S}(X, \kappa)$, Eq. (B.23), a Eq. (B.41) é escrita como:

$$\begin{aligned} P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = & \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q'}{(2\pi)^4} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}' - \delta_M \mathbf{P}) \\ & \times \frac{1}{\frac{P^0}{2} + Q^0 - \omega_a(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}) + i\epsilon} \frac{1}{\frac{P^0}{2} + Q'^0 - \omega_a(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}') - i\epsilon} \\ & \times \int d^4 X d^4 Y e^{i(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q + Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q + Q'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Note-se que Eq. (B.42) se torna idêntica à Eq. (47-b) de [125] quando as massas das partículas são iguais ($\delta_M = 0$), feitas as devidas ressalvas quanto à simetrização das funções $\Phi_{\mathbf{k}}$.

Tal como fizemos na seção anterior, aplicaremos o teorema dos resíduos para calcular as integrais em Q^0 e Q'^0 na Eq. (B.42). Inicialmente, nota-se que o integrando

possui polos em:

$$Q^0 = Q_P^0 \equiv \omega_a \left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q} \right) - \frac{P^0}{2} - i\epsilon \quad \text{e} \quad Q'^0 = Q'_P{}^0 \equiv \omega_a \left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}' \right) - \frac{P^0}{2} + i\epsilon \quad (\text{B.43})$$

que estão, respectivamente, nos semiplanos inferior e superior dos planos complexos de Q^0 e Q'^0 (pois $\epsilon \rightarrow 0^+$). Usando a Eq. (B.43) e explicitando as integrais em Q^0 e Q'^0 , a Eq. (B.42) se torna:

$$\begin{aligned} P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = & \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}' - \delta_M \mathbf{P}) \int d^4 X d^4 Y e^{-i(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ^0}{2\pi} \frac{e^{iQ^0(X^0 - Y^0)}}{Q^0 - Q_P^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ'^0}{2\pi} \frac{e^{-iQ'^0(X^0 - Y^0)}}{Q'^0 - Q'_P{}^0} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Tomemos a integral em Q'^0 na expressão acima:

$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ'^0}{2\pi} \frac{e^{-iQ'^0(X^0 - Y^0)}}{Q'^0 - Q'_P{}^0} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right) \quad (\text{B.45})$$

Tal como antes, para resolver via teorema dos resíduos, procura-se por caminhos em forma de semi-circunferência em que o integrando vá a zero quando o raio do caminho vai a infinito. Escrevendo $Q'^0 = R' e^{i\varphi'}$, tem-se

$$\left| e^{-iQ'^0(X^0 - Y^0)} \right| = \left| e^{-iR'[\cos(\varphi') + i\sin(\varphi')](X^0 - Y^0)} \right| = e^{R' \sin(\varphi')(X^0 - Y^0)} \quad (\text{B.46})$$

cujo valor vai a zero, quando $R' \rightarrow \infty$, se: (i) $X^0 - Y^0 > 0$ e $\sin(\varphi') < 0$ [o contorno fecha o caminho pelo semi-plano inferior, não engloba o polo $Q'_P{}^0$; a integral no caminho fechado é nula, assim como a integral na reta real]; OU (ii) $X^0 - Y^0 < 0$ e $\sin(\varphi') > 0$ [o contorno é pelo semi-plano superior, engloba o polo e a integral no caminho fechado, assim como na reta real, é não nula]. Isso implica $I' \propto \theta(Y^0 - X^0)$; usando o teorema dos resíduos, encontra-se:

$$I' = \theta(Y^0 - X^0) i e^{-iQ'^0(X^0 - Y^0)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right) \quad (\text{B.47})$$

$$\text{com} \quad Q'^0 = \omega_a \left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}' \right) - \frac{P^0}{2}$$

A integral:

$$\mathcal{I}' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ^0}{2\pi} \frac{e^{iQ^0(X^0-Y^0)}}{Q^0 - Q_p^0} I' \quad (\text{B.48})$$

na Eq. (B.44), com I' dado pela Eq. (B.45) é calculada de maneira parecida. Para realizar esta integração, escreve-se $Q^0 = Re^{i\varphi}$ e nota-se que:

$$\left| e^{iQ^0(X^0-Y^0)} \right| = \left| e^{iR[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)](X^0-Y^0)} \right| = e^{-R\sin(\varphi)(X^0-Y^0)} \quad (\text{B.49})$$

que, fazendo $R \rightarrow \infty$, vai a zero quando: (i) $X^0 - Y^0 > 0$ e $\sin(\varphi) > 0$ [o contorno é fechado pelo semi-plano superior, o polo não é englobado e a integral no caminho fechado - e na reta real - é nula]; OU (ii) $X^0 - Y^0 < 0$ e $\sin(\varphi) < 0$ [o contorno é fechado pelo semi-plano inferior, o polo é englobado e a integral no caminho fechado - e na reta real - é não nula]. Novamente, o resultado é proporcional a $\theta(Y^0 - X^0)$; aplicando o teorema dos resíduos:

$$\mathcal{I}' = \theta(Y^0 - X^0) e^{i(Q^0-Q'^0)(X^0-Y^0)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right) \quad (\text{B.50})$$

$$\text{com } Q'^0 = \omega_a\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}'\right) - \frac{P^0}{2} \text{ e } Q^0 = \omega_a\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}\right) - \frac{P^0}{2}$$

Substituindo este resultado na Eq. (B.44) e reagrupando as exponenciais, chega-se a:

$$P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}' - \delta_M \mathbf{P}) \quad (\text{B.51})$$

$$\int d^4X d^4Y \theta(Y^0 - X^0) e^{i(Q-Q') \cdot (X-Y)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right)$$

$$\text{com } Q'^0 = \omega_a\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}'\right) - \frac{P^0}{2} \text{ e } Q^0 = \omega_a\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{Q}\right) - \frac{P^0}{2}.$$

É possível reescrever Eq. (B.51) de forma mais semelhante à Eq. (B.33) fazendo as seguintes trocas de variáveis de integração $X \rightleftharpoons Y$, $Q \rightarrow -Q$ e $Q' \rightarrow -Q'$ (incluindo as componentes 0). Com isso, escreve-se:

$$P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(-\mathbf{Q} - \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{Q}' - \delta_M \mathbf{P}) \quad (\text{B.52})$$

$$\int d^4X d^4Y \theta(X^0 - Y^0) e^{i(Q-Q') \cdot (X-Y)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right)$$

com $Q'^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_a \left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{Q}' \right)$ e $Q^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_a \left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{Q} \right)$.

Por fim, lembra-se que a função $\Phi_{\mathbf{k}}$ é a transformada de Fourier de $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ [Eq. (3.27)], que é autoestado do hamiltoniano $\hat{H}_{rel}(\mathbf{r})$ [Eq. (3.15)], o qual descreve a dinâmica intrínseca do par. Como $\hat{H}_{rel}(\mathbf{r})$ depende apenas da coordenada relativa e como a escolha de qual partícula é rotulada como a ou b é arbitrária, $\hat{H}_{rel}(\mathbf{r})$ – assim como seus autoestados – é invariante por paridade, que troca posições e momentos pelos respectivos vetores opostos, de modo que, como já indicado no texto do Capítulo 3, tem-se $\phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{r})$. Em termos das funções $\Phi_{\mathbf{k}}$, essa relação implica:

$$\begin{aligned} \Phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{q}) &= \int d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \int d^3r e^{-i(-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Usando esse fato e trocando as variáveis de integração \mathbf{Q} e \mathbf{Q}' por \mathbf{q} e \mathbf{q}' respectivamente, a Eq. (B.52) se escreve como:

$$\begin{aligned} P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \Phi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{q} + \delta_M \mathbf{P}) \Phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{q}' + \delta_M \mathbf{P}) \\ &\int d^4X d^4Y \theta(X^0 - Y^0) e^{i(q-q')\cdot(X-Y)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

com $q'^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_a \left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}' \right)$ e $q^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_a \left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q} \right)$.

Note-se que a Eq. (B.54) pode ser obtida fazendo a troca dos rótulos $a \leftrightarrow b$ na Eq. (B.33) e vice-versa; de fato, fazendo essa troca tem-se $\delta_M \rightarrow -\delta_M$, $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ e $\omega_a \leftrightarrow \omega_b$; ou seja, uma expressão recai na outra trocando os rótulos das partículas, o que é fisicamente esperado já que essa rotulagem é arbitrária e um observável deve ser indiferente à escolha feita. Caso as partículas fossem idênticas, as expressões coincidiriam²; para constatar isso, basta perceber que δ_M seria nulo e fazer uso da propriedade $\Phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \Phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{q})$ e, então, usar o fato de que tanto $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ como $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ possuem paridade bem definida, de forma que $\Phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{q})$ é o produto de uma fase por $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ e, portanto, $\Phi_{\mathbf{k}}^*(-\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(-\mathbf{q}') = \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}')$. Ainda, é importante mencionar que, mesmo tendo escrito $P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ na Eq. (B.33) e $P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ na Eq. (B.54), em ambas o resultado se apresenta como função do

²Com a ressalva de que no caso de partículas idênticas as funções $\Phi_{\mathbf{k}}$ seriam apropriadamente simetrizadas a depender de se seriam bósons ou férmions.

momento total \mathbf{P} e do momento relativo \mathbf{k} .

B.3 Derivação da fórmula de Koonin-Pratt no referencial de centro de massa

A Eq. (3.3) define a função de correlação $C(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ em termos das probabilidades de emissão de 2 partículas P_2 e de 1 partícula P_1 ; na Seção 3.1.2, mostrou-se ser possível escrever $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = P^{(11)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) + P^{(22)}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ e estes últimos foram calculados neste apêndice, sendo dados respectivamente pelas Eqs. (B.33) e (B.54). Nesta seção, usaremos isso como ponto de partida para obter a fórmula de Koonin-Pratt no referencial de centro de massa das partículas emitidas.

Substituindo³ $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ nas Eqs. (B.33) e (B.54) e somando-as, encontra-se que a probabilidade $P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ no referencial do centro de massa torna-se uma função apenas do momento linear relativo \mathbf{k} , Eq. (3.2), dada por:

$$\begin{aligned}
P_2(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \equiv P_2(\mathbf{k}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \int d^4X d^4Y \theta(X^0 - Y^0) \\
&e^{i(q-q') \cdot (X-Y)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) + \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}') \\
&+ \int d^4X d^4Y \theta(X^0 - Y^0) e^{i(Q-Q') \cdot (X-Y)} \mathcal{S}\left(X, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(Y, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right)
\end{aligned} \tag{B.55}$$

com⁴:

$$\begin{aligned}
q^0 &= \frac{P^0}{2} - \omega_b(\mathbf{q}); \quad q'^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_b(\mathbf{q}'); \quad Q^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_a(\mathbf{Q}); \quad Q'^0 = \frac{P^0}{2} - \omega_a(\mathbf{Q}'); \\
P^0 &= E_a(\mathbf{k}) + E_b(-\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M_a^2} + \sqrt{\mathbf{k}^2 + M_b^2} \quad \text{e } \mathbf{P} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{B.56}$$

³No referencial do centro de massa, o momento total $\mathbf{P} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b$ é nulo e o momento relativo \mathbf{k} , Eqs. (3.2) e (B.4), se torna $\mathbf{k} = \mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b$.

⁴Foi utilizado o fato de que $\omega_a(-\mathbf{k}) = \omega_a(\mathbf{k})$ e $\omega_b(-\mathbf{k}) = \omega_b(\mathbf{k})$.

Introduzindo a seguinte mudança de variáveis:

$$X = x + \frac{y}{2}, Y = x - \frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{X+Y}{2}, y = X - Y \quad (\text{B.57})$$

cujo módulo do determinante jacobiano é 1, encontra-se:

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{k}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \int d^4x d^4y \theta(y^0) e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot \mathbf{y}} e^{-i(q'^0 - q^0)y^0} \\ &\mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) + \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}') \\ &\int d^4x d^4y \theta(y^0) e^{-i(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}') \cdot \mathbf{y}} e^{-i(Q'^0 - Q^0)y^0} \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \\ &\mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

em que são feitas as substituições definidas na Eq. (B.56).

Os termos $q'^0 - q^0$ e $Q'^0 - Q^0$ são escritos em função de ω_a e ω_b respectivamente através da Eq. (B.56). Aplicando a estes termos a aproximação não relativística, tem-se:

$$\begin{aligned} q'^0 - q^0 &= \omega_b(\mathbf{q}) - \omega_b(\mathbf{q}') = \sqrt{\mathbf{q}^2 + M_b^2} - \sqrt{\mathbf{q}'^2 + M_b^2} = \frac{\mathbf{q}^2 - \mathbf{q}'^2}{2M_b} + \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^4, |\mathbf{q}'|^4) \\ \therefore q'^0 - q^0 &\approx \frac{1}{2M_b} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}') = -\frac{1}{M_b} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \left(-\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

e, de forma semelhante:

$$\begin{aligned} Q'^0 - Q^0 &= \omega_a(\mathbf{Q}) - \omega_a(\mathbf{Q}') = \sqrt{\mathbf{Q}^2 + M_a^2} - \sqrt{\mathbf{Q}'^2 + M_a^2} \\ \therefore Q'^0 - Q^0 &\approx -\frac{1}{M_a} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \cdot \left(-\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Substituindo estas duas últimas equações na Eq. (B.58), e lembrando-se da

Eq. (B.56), encontra-se:

$$\begin{aligned}
P_2(\mathbf{k}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') \int d^4x d^4y \theta(y^0) e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot \mathbf{y}} \\
&e^{-i[-\frac{1}{M_b}(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (-\frac{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}{2})]y^0} \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{P}{2} + \frac{q+q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, \frac{P}{2} - \frac{q+q'}{2}\right) + \\
&+ \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}') \int d^4x d^4y \theta(y^0) e^{-i(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}') \cdot \mathbf{y}} \\
&e^{-i[-\frac{1}{M_a}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}') \cdot (-\frac{\mathbf{Q}+\mathbf{Q}'}{2})]y^0} \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{P}{2} + \frac{Q+Q'}{2}\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, \frac{P}{2} - \frac{Q+Q'}{2}\right) \quad (\text{B.61})
\end{aligned}$$

Aproximações adicionais são feitas para avançar a partir desse ponto [125]. A primeira consiste em usar o fato de que as funções $\Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q})$ e $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}')$ possuem pico em torno de $\mathbf{q} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{q}' = \mathbf{k}$ respectivamente⁵. Desta forma, os termos $(\mathbf{q} + \mathbf{q}')/2$, que aparecem na fase e nos argumentos das funções \mathcal{S} , são substituídos por $\mathbf{k}/2$ na primeira integral; similarmente, $(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}')/2$ é substituído por $\mathbf{k}/2$ na segunda. Contudo, os termos do tipo $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$ não são substituídos por $\mathbf{0}$. Os efeitos dessa aproximação são: (i) tornar a fase linear na diferença dos momentos integrados, permitindo reconhecer as integrais em \mathbf{q} e \mathbf{q}' (ou em \mathbf{Q} e \mathbf{Q}') como as transformadas de Fourier inversas e (ii) tornar os argumentos das funções \mathcal{S} dependentes apenas de \mathbf{k} (pois $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ no referencial do CM) e das massas de ambas as partículas.

Explicitamente, essa aproximação consiste em fazer, na Eq. (B.61), as seguintes substituições⁶:

$$\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} \approx \mathbf{k} \quad \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2} \approx \mathbf{k} \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned}
e^{-i[-\frac{1}{M_b}(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (-\frac{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}{2})]y^0} &\approx e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\frac{\mathbf{k}}{M_b})y^0} \\
e^{-i[-\frac{1}{M_a}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}') \cdot (-\frac{\mathbf{Q}+\mathbf{Q}'}{2})]y^0} &\approx e^{-i(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}') \cdot (\frac{\mathbf{k}}{M_a})y^0} \quad (\text{B.63})
\end{aligned}$$

⁵Sendo $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ uma componente de Fourier com pico em $\mathbf{q} = \mathbf{k}$, entende-se que o valor médio de \mathbf{q} é \mathbf{k} e de forma correspondente para quando o argumento é \mathbf{q}' .

⁶Note-se que, definindo $\mathbf{k} = (\mathbf{q} + \mathbf{q}')/2$ e $\mathbf{d} = (\mathbf{q} - \mathbf{q}')/2$, escreve-se $\mathbf{q} = \mathbf{k} + \mathbf{d}$ e $\mathbf{q}' = \mathbf{k} - \mathbf{d}$. Fazendo uma expansão de $(\omega_b(\mathbf{q}) + \omega_b(\mathbf{q}'))/2$ em série de Taylor em torno de $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, encontra-se $(\omega_b(\mathbf{q}) + \omega_b(\mathbf{q}'))/2 = \omega_b(\mathbf{k}) + \mathcal{O}(d)$. Portanto, desprezando termos quadráticos em \mathbf{d} , essa aproximação reescreve a média aritmética de $\omega_b(\mathbf{q})$ e $\omega_b(\mathbf{q}')$ como a função ω_b avaliada na média entre \mathbf{q} e \mathbf{q}' .

$$\begin{aligned} \frac{q^0 + q'^0}{2} \stackrel{\text{Eq. (B.56)}}{=} \frac{P^0 - \omega_b(\mathbf{q}') - \omega_b(\mathbf{q})}{2} &\approx \frac{P^0}{2} - \omega_b(\mathbf{k}) \\ \frac{Q^0 + Q'^0}{2} \stackrel{\text{(B.56)}}{=} \frac{P^0 - \omega_a(\mathbf{Q}') - \omega_a(\mathbf{Q})}{2} &\approx \frac{P^0}{2} - \omega_a(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

de forma que, nos argumentos das funções \mathcal{S} na Eq. (B.61), tem-se (lembrando que estamos usando o referencial do centro de massa):

$$\left(\frac{P^0}{2} + \frac{q^0 + q'^0}{2}, \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} \right) = (P^0 - \sqrt{\mathbf{k}^2 + M_b^2}, \mathbf{k}) = (E_a(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = p_a^\mu \quad (\text{B.65})$$

$$\left(\frac{P^0}{2} - \frac{q^0 + q'^0}{2}, -\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} \right) = (\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_b^2}, -\mathbf{k}) = (E_b(-\mathbf{k}), -\mathbf{k}) = p_b^\mu \quad (\text{B.66})$$

$$\left(\frac{P^0}{2} + \frac{Q^0 + Q'^0}{2}, \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2} \right) = (P^0 - \sqrt{\mathbf{k}^2 + M_a^2}, \mathbf{k}) = (E_b(\mathbf{k}), \mathbf{k}) \quad (\text{B.67})$$

$$\left(\frac{P^0}{2} - \frac{Q^0 + Q'^0}{2}, -\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2} \right) = (\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_a^2}, -\mathbf{k}) = (E_a(-\mathbf{k}), -\mathbf{k}) \quad (\text{B.68})$$

e, portanto, a Eq. (B.61) fica:

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{k}) &= \int d^4x d^4y \theta(y^0) \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, (E_a(\mathbf{k}), \mathbf{k})\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, (E_b(-\mathbf{k}), -\mathbf{k})\right) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\ &\int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (y + \frac{\mathbf{k}}{M_b} y^0)} + \int d^4x d^4y \theta(y^0) \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, (E_b(\mathbf{k}), \mathbf{k})\right) \\ &\mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, (E_a(-\mathbf{k}), -\mathbf{k})\right) \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}') e^{-i(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}') \cdot (y + \frac{\mathbf{k}}{M_a} y^0)} \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Relembrando a Eq. 3.27, percebe-se que:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (y + \frac{\mathbf{k}}{M_b} y^0)} &= \left| \phi_{\mathbf{k}}\left(y + \frac{\mathbf{k}}{M_b} y^0\right) \right|^2 \\ \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{Q}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q}') e^{-i(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}') \cdot (y + \frac{\mathbf{k}}{M_a} y^0)} &= \left| \phi_{\mathbf{k}}\left(y + \frac{\mathbf{k}}{M_a} y^0\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

de modo que a Eq. (B.69) se escreve como:

$$\begin{aligned}
P_2(\mathbf{k}) &= \\
&= \int d^4x d^4y \theta(y^0) \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, (E_a(\mathbf{k}), \mathbf{k})\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, (E_b(-\mathbf{k}), -\mathbf{k})\right) \left| \phi_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{y} + \frac{\mathbf{k}}{M_b} y^0\right) \right|^2 \\
&+ \int d^4x d^4y \theta(y^0) \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, (E_b(\mathbf{k}), \mathbf{k})\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, (E_a(-\mathbf{k}), -\mathbf{k})\right) \left| \phi_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{y} + \frac{\mathbf{k}}{M_a} y^0\right) \right|^2
\end{aligned} \tag{B.71}$$

é interessante notar que, com as definições feitas na Eq. (B.4), o primeiro termo recai no segundo e vice-versa se os rótulos das partículas são trocados, ou seja, a expressão para a correlação independe da escolha (arbitrária) que é feita para rotular as partículas.

Seguindo [125], a forma de implementar a aproximação de suavidade é substituir p_a e p_b pela sua média $P/2$ nos argumentos das funções \mathcal{S} . Como nossos cálculos estão sendo feitos no referencial do centro de massa, temos:

$$\frac{P}{2} = \frac{p_a + p_b}{2} = \left(\frac{E_a(\mathbf{k}) + E_b(-\mathbf{k})}{2}, \mathbf{0} \right) = \left(\frac{P^0}{2}, \mathbf{0} \right) \tag{B.72}$$

$$p_a = (E_a(\mathbf{k}), \mathbf{k}) \approx \frac{P}{2} \quad e \quad p_b = (E_b(-\mathbf{k}), -\mathbf{k}) \approx \frac{P}{2} \tag{B.73}$$

ou seja, no referencial do centro de massa, a aproximação de suavidade é implementada fazendo $\mathbf{k} \approx \mathbf{0}$ e substituindo E_a e E_b pela média $P^0/2$ nos argumentos das funções na Eq. (B.71), a qual se torna:

$$\begin{aligned}
P_2(\mathbf{k}) &= \\
&= \int d^4x d^4y \theta(y^0) \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, (P^0/2, \mathbf{0})\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, (P^0/2, \mathbf{0})\right) |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \\
&+ \int d^4x d^4y \theta(y^0) \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, (P^0/2, \mathbf{0})\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, (P^0/2, \mathbf{0})\right) |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2
\end{aligned} \tag{B.74}$$

Esta expressão é simplificada pelo comportamento do integrando quanto à transformação $\mathbf{y} \rightarrow -\mathbf{y}$. $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})$, por ser autoestado de um hamiltoniano que só depende da posição relativa entre as coordenadas, possui paridade bem definida, de forma que $|\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2$ é invariante pela transformação $\mathbf{y} \rightarrow -\mathbf{y}$. Imediatamente nota-se que os produtos das funções \mathcal{S} também é invariante sob esta transformação. Por outro lado, como y é uma variável muda e a referida transformação possui

módulo jacobiano igual a 1, aplicando essa mudança de variáveis ao segundo termo da Eq. (B.74) e fazendo uso da Eq. (B.72), tem-se (no referencial do centro de massa):

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{k}) &= \int d^4y d^4x [\theta(y^0) + \theta(-y^0)] \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{P}{2}\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, \frac{P}{2}\right) |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \\ P_2(\mathbf{k}) &= \int d^4y d^4x \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{P}{2}\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, \frac{P}{2}\right) |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Definindo a chamada função de distribuição de distância relativa da fonte, que fornece a distribuição de distância espaço-temporal relativa y entre as partículas com momento médio $P/2$:

$$D(y, P) = \int d^4x \mathcal{S}\left(x + \frac{y}{2}, \frac{P}{2}\right) \mathcal{S}\left(x - \frac{y}{2}, \frac{P}{2}\right) \quad (\text{B.76})$$

chega-se à seguinte expressão final para a probabilidade P_2 no referencial do centro de massa das partículas e usando aproximação de suavidade:

$$P_2(\mathbf{k}) = \int d^3y |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \int dy^0 D(y, P) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}}. \quad (\text{B.77})$$

Retomando a tarefa de calcular a função de correlação, dada por Eq. (3.3), deve-se calcular os termos $P_1(\mathbf{p}_a)$ e $P_1(\mathbf{p}_b)$ no referencial do centro de massa aplicando a aproximação de suavidade que foi utilizada para P_2 . As probabilidades P_1 são definidas a partir da função de Wigner [125] $\mathcal{S}(X, \kappa)$ - (B.23) - por:

$$P_1(\mathbf{p}_a) P_1(\mathbf{p}_b) = \int d^4x \mathcal{S}(x, p_a) \int d^4y \mathcal{S}(y, p_b) \quad (\text{B.78})$$

aplicando a aproximação de suavidade, Eq. (B.73), e usando o referencial do centro de massa, Eq. (B.72), o produto das probabilidades P_1 que aparece no denominador da Eq. (3.3) fica:

$$P_1(\mathbf{p}_a) P_1(\mathbf{p}_b) = \int d^4x \mathcal{S}(x, P/2) \int d^4y \mathcal{S}(y, P/2) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}} \quad (\text{B.79})$$

A Eq. (B.79) pode ser reescrita em termos da função D , Eq. (B.76). Para isso, é feita a seguinte mudança de variáveis:

$$x = X + Y/2 \quad \text{e} \quad y = X - Y/2 \quad (\text{B.80})$$

cujo determinante jacobiano é 1, de forma que se obtém:

$$P_1(\mathbf{p}_a)P_1(\mathbf{p}_b) = \int d^4Y \int d^4X \mathcal{S}(X + Y/2, P/2) \mathcal{S}(X - Y/2, P/2) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}} \\ \stackrel{\text{Eq. (B.76)}}{=} \int d^4Y D(Y, P) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}} \quad (\text{B.81})$$

A expressão para a função de correlação C no referencial de centro de massa e usando a aproximação de suavidade é obtida substituindo as Eqs. (B.77) e (B.81) na Eq. 3.3; com isso, tem-se:

$$C(\mathbf{k}) = \frac{\int d^3y |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 \int dy^0 D(y, P) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}}}{\int d^4Y D(Y, P) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}}} \quad (\text{B.82})$$

Definindo a chamada função da fonte $S(\mathbf{y})$, que pode ser interpretada como uma função normalizada de distribuição da separação espacial \mathbf{y} entre as partículas no referencial de centro de massa e no âmbito da aproximação de suavidade, como:

$$S(\mathbf{y}) = \frac{\int dy^0 D(y, P)}{\int d^4Y D(Y, P)} \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}} \quad (\text{B.83})$$

a função de correlação se escreve como:

$$C(\mathbf{k}) = \int d^3y |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|^2 S(\mathbf{y}) \quad (\text{B.84})$$

que é a fórmula de Koonin-Pratt, Eq. (3.1), para a função de correlação no referencial de centro de massa.

Apêndice C

Ondas parciais, expansão de alcance efetivo e a equação de Lippmann-Schwinger

Na seção 3.2, usamos uma expressão para a função de onda que descreve o par de partículas interagindo fortemente (uma interação de curto alcance), dada pela Eq. (3.46). Este apêndice discute os principais resultados bem conhecidos de livros-texto sobre a teoria de espalhamento em mecânica quântica não-relativística, tendo como base as referências [175, 176, 177, 178]. Vamos discutir a expansão em ondas parciais (DOP) (*partial wave decomposition*) da função de onda de espalhamento e a expansão em alcance efetivo (*effective range expansion (ERE)*) da amplitude de espalhamento. A seguir, discutimos a equação de Lippmann-Schwinger para a matriz-T e sua decomposição em ondas parciais. Finalizamos obtendo a relação entre a da matriz-T (através da matriz-K) e a função de onda de espalhamento.

C.1 Amplitude de espalhamento: expansão em ondas parciais e defasagens

Resolver problema de espalhamento elástico por um potencial de curto alcance esfericamente simétrico $V(r)$ consiste em determinar a função de onda $\psi_k(\mathbf{r})$ satisfazendo:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) \right] \psi_k(\mathbf{r}) = E\psi_k(\mathbf{r}) \quad (\text{C.1})$$

para uma energia $E = k^2/2\mu$, onde μ é a massa reduzida das partículas (estamos empregando o sistema de referência centro de massa). A função de onda $\psi_k(\mathbf{r})$

satisfaz a chamada *condição de contorno de espalhamento*:

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \psi_k(\mathbf{r}) \rightarrow \psi_k^+(\mathbf{r}) = A \left[e^{ikz} + f_k(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad (\text{C.2})$$

a qual consiste na superposição entre a onda plana incidente e uma onda esférica espalhada que emerge do centro espalhador. A função $f_k(\theta)$, chamada *amplitude de espalhamento*, pode ser experimentalmente obtida a partir da seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega$ via:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(k; \theta) = |f_k(\theta)|^2 \quad (\text{C.3})$$

Devido à invariância rotacional em torno do eixo Oz, f_k depende apenas do ângulo θ definido entre \hat{z} e \hat{r} . Em vista disso, podemos expandir f_k nos polinômios de Legendre $P_l(x)$, $x = \cos \theta$, os quais formam um conjunto completo e ortogonal para funções definidas no intervalo $x \in [-1, 1]$:

$$f_k(\theta, \phi) = f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(k) P_l(\cos(\theta)) \quad (\text{C.4})$$

$$\Rightarrow f_l(k) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f_k(\theta) P_l(\cos(\theta)) d(\cos(\theta)) \quad (\text{C.5})$$

Essa expansão define a *expansão em ondas parciais para a amplitude de espalhamento*.

A seguir, vamos mostrar como obter essa amplitude de espalhamento a partir da função de onda de espalhamento. A simetria esférica do potencial pode ser usada para simplificar a resolução da equação de Schrödinger dada na Eq. (C.1), pois, nesse caso, o momento angular orbital se conserva e suas autofunções, os harmônicos esféricos, podem ser usadas como base para escrever a função de onda, ou seja, a função de onda pode ser *decomposta em ondas parciais* com números quânticos l bem definidos. Dessa forma, a função de onda se escreve como:

$$\psi_k(r, \theta, \phi) = \sum_{l, m_l} \frac{U_l(r)}{r} Y_l^{m_l}(\theta, \phi); \quad l = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad m_l = \{-l, -l+1, \dots, l\} \quad (\text{C.6})$$

Essa expansão se torna ainda mais simples usando a simetria rotacional em torno do eixo Oz, o que permite manter apenas os termos independentes de ϕ , ou seja, aqueles em que $m_l = 0$. Como os harmônicos esféricos tornam-se os polinômios

de Legendre, i.e., $Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{(2l+1)/(4\pi)} P_l(\cos(\theta))$, podemos escrever:

$$\psi_k(r, \theta) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos(\theta)) \quad (\text{C.7})$$

em que u_l são soluções da equação de Schrödinger radial:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] u_l(r) = E_l u_l(r) \quad (\text{C.8})$$

com a condição de contorno $u_l(r) \propto r^{l+1}$ para $r \rightarrow 0$, de modo que $u_l(r=0) = 0$.

Como estamos considerando um problema de espalhamento onde, experimentalmente, os detectores são colocados muito longe do centro espalhador, é interessante comparar o comportamento assintótico para $r \rightarrow \infty$ da solução de onda plana (partícula livre) com o da função $u_l(r)$ ¹. O comportamento assintótico de $u_l(r)$ para $r \rightarrow \infty$ é obtido percebendo que neste limite o potencial (de curto alcance) $V(r)$ é nulo e o potencial centrífugo $l(l+1)/2\mu r^2$ é desprezível, de modo que a solução da Eq. (C.8) é dada por

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow u_l(r) \rightarrow a_l \sin(kr + \Delta_l(k)); \quad k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (\text{C.9})$$

onde $\Delta_l(k)$ incorpora os efeitos do potencial. Por sua vez, a onda plana $\exp(ikz) = \exp(ikr \cos(\theta))$ se expande nos polinômios de Legendre, tal como na Eq. (C.4), obtendo-se:

$$e^{ikr \cos(\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos(\theta)) \quad (\text{C.10})$$

em que $j_l(kr)$ são as funções de Bessel esféricas. Com isso, o comportamento assintótico da onda plana fica determinado pelo das funções j_l , que é:

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow j_l(kr) \propto \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi) \quad (\text{C.11})$$

A semelhança entre as Eqs. (C.11) e (C.9) motiva a definir $\Delta_l = -l\pi/2 + \delta_l$, de modo que o comportamento assintótico de $u_l(r)$ fica:

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow u_l(r) \rightarrow a_l \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(k)); \quad k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (\text{C.12})$$

¹Como vimos, em femtosopia, precisamos da função de onda de espalhamento em todo o intervalo $0 \leq r < \infty$. O comportamento assintótico entra na aproximação de Lednicky para a função de correlação.

o que define a *defasagem* (*phase-shift*) $\delta_l(k)$ em cada onda parcial.

É possível escrever a amplitude $f(\theta)$ em termos das defasagens, já que ambas são determinadas pelo comportamento assintótico $r \rightarrow \infty$ da função de onda. Substituindo as Eq. (C.10) e (C.4) na Eq. (C.2), encontra-se:

$$\psi^+(r, \theta) = A \sum_l R_l(r) P_l(\cos(\theta)); \quad R_l(r) = (2l + 1) i^l j_l(kr) + f_l \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{C.13})$$

Usando a Eq. (C.11), tem-se:

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow i^l j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{2ikr} [e^{ikr} + (-1)^{l+1} e^{-ikr}] \quad (\text{C.14})$$

de modo que

$$\begin{aligned} R_l(r) &= \frac{2l + 1}{2ikr} [e^{ikr} + (-1)^{l+1} e^{-ikr}] + f_l \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= \frac{2l + 1}{2ikr} \left[\left(1 + \frac{2ik}{2l + 1} f_l\right) e^{ikr} + (-1)^{l+1} e^{-ikr} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Por outro lado, este comportamento assintótico deve ser o mesmo que o obtido da Eq. (C.7). Fazendo uso da Eq. (C.12), $\psi_k(r, \theta)$ segue:

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \psi_k(r) \rightarrow \sum_l \frac{(-i)^l e^{-i\delta_l} a_l}{2ir} [e^{ikr} e^{2i\delta_l} + (-1)^{l+1} e^{-ikr}] P_l(\cos(\theta)) \quad (\text{C.16})$$

que deve coincidir com a Eq. (C.13). Para isso ocorrer, usando a Eq. (C.15), deve-se ter:

$$e^{2i\delta_l} = 1 + \frac{2ik}{2l + 1} f_l \Rightarrow f_l = \frac{(e^{2i\delta_l} - 1)}{2ik} (2l + 1) = \frac{2l + 1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) \quad (\text{C.17})$$

que, quando substituída na Eq. (C.4) fornece a *decomposição em ondas parciais da amplitude de espalhamento* em termos das defasagens:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l + 1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos(\theta)) \quad (\text{C.18})$$

C.2 Aproximação de alcance efetivo

Nesta seção, discutiremos o comportamento da amplitude de espalhamento a baixas energias ($k \rightarrow 0$) e exporemos a aproximação de alcance efetivo para potenciais de curto alcance, isto é, potenciais tais que $V(r \geq R) = 0$ para algum valor finito do alcance R .

Classicamente, sendo um potencial de curto alcance, a partícula erra o potencial espalhador a menos que o parâmetro de impacto b seja tal que $b \leq R$, de forma que o momento angular da partícula (em relação ao centro espalhador) deve ter intensidade $L \leq Rp$, em que p é a intensidade do momento linear dela, para que o espalhamento ocorra. Para baixas energias, p é pequeno e, classicamente, apenas partículas incidentes com baixo momento angular sofrem influência do centro espalhador. Seguindo uma argumentação semi-clássica, essa relação se tornaria $\sqrt{l(l+1)} \leq kR$, de modo a se esperar que apenas ondas parciais com pequeno l sejam relevantes a baixas energias.

Quanticamente, a partícula incidente é descrita pela onda plana dada pela Eq. (C.10), cujo comportamento a baixas energias é obtido a partir daquele das funções esféricas de Bessel $j_l(kr)$, à qual se associa uma probabilidade de se encontrar a partícula num ângulo sólido infinitesimal $d\Omega$ em torno da direção (θ, ϕ) entre uma distância r e $r + dr$ da origem (centro espalhador) dada por:

$$r^2 j_l(kr)^2 |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 dr d\Omega \quad (\text{C.19})$$

Para entender como o potencial afeta cada onda parcial, deve-se analisar o comportamento dessa amplitude para pequenas distâncias do centro espalhador, isto é, para $r \sim 0$. Isso é feito usando o fato de que [179]:

$$x^2 j_l(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^{2l+2}}{[(2l+1)!!]^2} \quad (\text{C.20})$$

Tem-se, então, que essa probabilidade varia como r^{2l+2} e, portanto, cresce mais lentamente a partir de zero com o aumento² de l , isto é, ondas parciais com menores l são mais afetadas pelo potencial de curto alcance.

Em particular[179], $x^2 j_l(x)^2$ se mantém próxima de zero para $x \lesssim \sqrt{l(l+1)}$, isto significa que a onda parcial l muito pouco penetra uma região delimitada por

²Além disso, note-se que aumentando l o denominador aumenta rapidamente.

$kr \lesssim \sqrt{l(l+1)}$. Portanto, sendo o potencial de curto alcance, para baixas energias ($k \sim 0$), apenas a onda S ($l = 0$) penetra a região onde o efetivo do potencial é importante. Assim, para discutir o espalhamento a baixas energias, basta tomar a componente $l = 0$ nas decomposições em ondas parciais apresentadas nesta seção. Obviamente, à medida que se aumenta a energia, mais ondas parciais são necessárias para descrever o espalhamento acuradamente.

Pela argumentação acima, considerando baixas energias, nos interessa o comportamento da componente $f_0(k)$ da amplitude de espalhamento para $k \sim 0$. A Eq. (C.17) implica em:

$$\begin{aligned} f_0(k) &= \frac{e^{2i\delta_0(k)} - 1}{2ik} = e^{i\delta_0(k)} \left[\frac{e^{i\delta_0(k)} - e^{-i\delta_0(k)}}{2ik} \right] = \frac{1}{k} e^{i\delta_0(k)} \sin \delta_0(k) \\ &= \frac{1}{k} \frac{\sin \delta_0(k)}{\cos \delta_0(k) - i \sin \delta_0(k)} \\ &= \frac{1}{k \cot \delta_0(k) - ik} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

A expansão de alcance efetivo para $f_0(k)$ é obtida expandindo o termo $k \cot \delta_0(k)$ em série de Taylor:

$$k \cot \delta_0(k) \approx -\frac{1}{a} + k \frac{d}{dk} \{k \cot \delta_0(k)\}|_{k=0} + \frac{k^2}{2} \frac{d^2}{dk^2} \{k \cot \delta_0(k)\}|_{k=0} + \dots \quad (\text{C.22})$$

É possível mostrar [175] que o termo linear em k na expansão é nulo. Definindo-se o alcance efetivo do potencial, r_0 , como:

$$r_0 = \frac{d^2}{dk^2} \{k \cot[\delta_0(k)]\}|_{k=0} \quad (\text{C.23})$$

a amplitude $f_0(k)$ é escrita como:

$$f_0(k) = \frac{1}{-\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 - ik} \quad (\text{C.24})$$

que é a expressão para $f_0(k)$ na aproximação de alcance efetivo .

C.3 Equação de Lippmann-Schwinger

Para potenciais não locais, como os da teoria efetiva para a interação $Y_c N$, é mais conveniente empregar a equação de Lippmann-Schwinger, ao invés da da equação de Schrödinger. Nesta seção, apresentaremos brevemente a derivação dessa equação. Esta seção faz uso das referências [175, 176, 177, 178] e das notas pessoais oferecidas pelo Prof. Gastão Krein [180].

É conveniente escrever a equação de Schrödinger que descreve o espalhamento em termos do *ket* $|\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle$ em vez da função de onda $\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r})$ ³:

$$\left[\hat{H}_0 + V(r)\right]|\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle = E|\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle; \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}; \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (\text{C.25})$$

cuja solução pode ser escrita via função de Green na forma:

$$|\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle = |\phi_{\mathbf{k}}\rangle + \hat{G}^{\pm}(k^2) \hat{V} |\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle; \quad \hat{G}^{\pm}(k^2) = \frac{1}{k^2/2\mu - \hat{H}_0 \pm i\epsilon} \quad (\text{C.26})$$

onde $|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$ são autoestados de \hat{H}_0 com autovalores $E = k^2/2\mu$. Para abreviar a notação não é explicitamente escrito que ϵ tende a zero por valores positivos. As $|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$ formam um conjunto completo e possuem as ondas planas como sua representação no espaço de coordenadas:

$$\langle \mathbf{r} | \phi_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C.27})$$

Daqui pra frente são utilizadas unidades naturais em que $\hbar = 1$.

Nesse contexto, define-se o *operador de transição* $\hat{T}^{\pm}(k^2)$ através de:

$$\hat{V} |\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle = \hat{T}^{\pm}(k^2) |\phi_{\mathbf{k}}\rangle \quad (\text{C.28})$$

de forma que, aplicando \hat{V} à esquerda na Eq. (C.26), fazendo uso da Eq. (C.28) e utilizando o fato de que os autoestados $|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$ formam um conjunto completo, tem-se:

$$\hat{T}^{\pm}(k^2) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}^{\pm}(k^2) \hat{T}^{\pm}(k^2) \quad (\text{C.29})$$

³A função de onda $\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r})$ é entendida como uma projeção do *ket* $|\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle$ sobre um elemento da base $|\mathbf{r}\rangle$: $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi_{\mathbf{k}}^{\pm} \rangle$. Os índices \pm indicam as condições de contorno assintóticas: (+) de partícula divergindo do centro espalhador e (-) partícula convergindo para ele.

Esta equação define uma equação integral para os elementos de matriz do operador de transição, por exemplo, entre autoestados $|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$. Para obtê-la, tomam-se os elementos de matriz de cada membro da equação entre $\langle\phi_{\mathbf{p}}|$ e $|\phi_{\mathbf{p}'}\rangle$ e utiliza-se a decomposição espectral de \hat{G}^{\pm} :

$$\hat{G}^{\pm}(k^2) = \frac{1}{k^2/2\mu - \hat{\mathbf{p}}^2/2\mu \pm i\epsilon} \int d^3q |\phi_{\mathbf{q}}\rangle \langle\phi_{\mathbf{q}}| = \int d^3q \frac{|\phi_{\mathbf{q}}\rangle \langle\phi_{\mathbf{q}}|}{(k^2 - q^2)/2\mu \pm i\epsilon} \quad (\text{C.30})$$

obtendo-se a referida equação integral, que é a chamada *equação de Lippmann-Schwinger para o operador de transição no espaço de momentos*:

$$T^{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; k^2) = V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \int d^3q \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) T^{\pm}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu \pm i\epsilon} \quad (\text{C.31})$$

Aqui foram introduzidas as seguintes notações para os elementos de matriz do operador de transição e do potencial:

$$T^{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; k^2) = \langle\phi_{\mathbf{p}}|\hat{T}^{\pm}(k^2)|\phi_{\mathbf{p}'}\rangle, \quad V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \langle\phi_{\mathbf{p}}|\hat{V}|\phi_{\mathbf{p}'}\rangle \quad (\text{C.32})$$

A relevância do operador de transição no contexto da femtosopia é evidente quando se percebe a relação entre a função de onda espalhada e os elementos de matriz $T^{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; k^2)$. Esta relação é obtida aplicando-se $\langle\mathbf{r}|$ à esquerda na Eq. (C.26) e utilizando as Eqs. (C.30), (C.28) e (C.32), obtendo-se:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \int d^3q \frac{\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) T^{\pm}(\mathbf{q}, \mathbf{k}; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu \pm i\epsilon} \quad (\text{C.33})$$

de modo que o problema de obter a função de onda espalhada pode ser entendido como um de obter os elementos de matriz do operador de transição no espaço dos momentos.

C.3.1 Decomposição em ondas parciais

Conforme já salientado, devido à invariância rotacional do potencial espalhador, é calculacionalmente conveniente fazer a decomposição em ondas parciais (DOP) da função de onda e, dada a relação da Eq. (C.33), dos elementos de matriz do operador de transição. Isso é feito nesta subseção.

A decomposição de uma função em ondas parciais consiste em decompô-la em autoestados de partícula livre com momento angular bem definido, isto é, estados

$|klm\rangle$ que satisfazem (aqui \hbar é explicitado) [181]:

$$\hat{\mathbf{L}}^2|klm\rangle = l(l+1)\hbar^2|klm\rangle \quad (\text{C.34})$$

$$\hat{L}_z|klm\rangle = m\hbar|klm\rangle \quad (\text{C.35})$$

$$\hat{H}_0|klm\rangle = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu}|klm\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}|klm\rangle \quad (\text{C.36})$$

Tal como a Ref. [181], usamos a seguinte representação no espaço de coordenadas:

$$\langle \mathbf{r}|klm\rangle = i^l j_l(kr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{C.37})$$

onde $j_l(x)$ são as funções de Bessel esféricas e Y_{lm} são os harmônicos esféricos. As relações de ortogonalidade e completude são:

$$\langle klm|k'l'm'\rangle = \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2} \delta(k-k') \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{C.38})$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} dk k^2 |klm\rangle \langle klm| = 1 \quad (\text{C.39})$$

Usando as relações acima, pode-se escrever a decomposição em ondas parciais para cada termo na Eq. (C.33). A DOP da onda plana, Eq. (C.27), é obtida da identidade [181]:

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) |klm\rangle \quad (\text{C.40})$$

que, usando a Eq. (C.37), implica:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l 4\pi i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{C.41})$$

Essa estrutura motiva escrever a DOP para a função de onda de espalhamento (emergente) $\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r})$:

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l 4\pi i^l \psi_l^+(k,r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{C.42})$$

A invariância rotacional da interação implica em

$$\langle plm|\hat{T}^+(k^2)|p'l'm'\rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} T_l^+(p,p';k^2) \quad (\text{C.43})$$

a qual, usando a Eq. (C.40), permite escrever a DOP de $T^+(\mathbf{q}, \mathbf{k}; k^2)$ como:

$$\begin{aligned}
 T^+(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; k^2) &= \langle \phi_{\mathbf{p}} | \hat{T}^+(k^2) | \phi_{\mathbf{p}'} \rangle = \langle \mathbf{p} | \hat{T}^+(k^2) | \mathbf{p}' \rangle \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}') \langle plm | \hat{T}^+(k^2) | p'l'm' \rangle \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}') T_l^+(p, p'; k^2)
 \end{aligned} \tag{C.44}$$

Usando as Eqs. (C.41), (C.42) e (C.44) na Eq. (C.33) e fazendo uso da ortogonalidade dos harmônicos esféricos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l 4\pi i^l \psi_l^+(k, r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l 4\pi i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\
 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dq q^2 \frac{1}{(k^2 - q^2)/2\mu \pm i\epsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l 4\pi i^l j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) T_l^+(q, k; k^2) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})
 \end{aligned} \tag{C.45}$$

a qual, em virtude da completeza dos harmônicos esféricos, implica:

$$\psi_l^+(k, r) = j_l(kr) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dq q^2 j_l(qr) \frac{1}{(k^2 - q^2)/2\mu \pm i\epsilon} T_l^+(q, k; k^2) \tag{C.46}$$

Esta é a DOP da Eq. (C.33). Através desta, o problema de encontrar as componentes $\psi_l^+(k, r)$ da função de onda de espalhamento se traduz em o de se determinarem as componentes da matriz de transição $T_l^+(q, k; k^2)$.

C.4 Função de onda de espalhamento e a matriz K

Do ponto de vista calculacional, é mais fácil obter a função de onda de espalhamento a partir da chamada *matriz K*, em lugar da matriz de transição T^+ , conforme explicaremos a seguir.

Uma maneira prática de se definir a matriz K é a partir da relação entre suas componentes em ondas parciais, $K_l(p, p'; k^2)$, a as componentes $T_l^+(p, p'; k^2)$ (definidas anteriormente), via a chamada equação de Heitler – Eq. (10) em [182]:

$$T_l^+(p, p'; k^2) = K_l(p, p'; k^2) - \frac{2\mu ik K_l(p, k; k^2) K_l(k, p'; k^2)}{1 + 2\mu ik K_l(k, k; k^2)} \tag{C.47}$$

a qual, quando tomada com os momentos *on-shell* ($p' = p = k$) e com as definições $K_l(k^2) \equiv K_l(k, k; k^2)$ e $T_l^+(k^2) \equiv T_l^+(p, p'; k^2)$, fornece:

$$T_l^+(k^2) = \frac{K_l(k^2)}{1 + 2\mu ik K_l(k^2)} = -\frac{1}{2\mu k} e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) \quad (\text{C.48})$$

que, resolvendo para $K_l(k^2)$, implica:

$$K_l(k^2) = \frac{T_l^+(k^2)}{1 - 2\mu ik T_l^+(k^2)} = -\frac{1}{2\mu k} \tan \delta_l(k) \quad (\text{C.49})$$

note-se que as componentes *on-shell* das matrizes K e T^+ são determinadas pelas defasagens $\delta_l(k)$.

Tendo definido a matriz K em termos de T^+ , apresentaremos como as componentes $\psi_l^+(k, r)$ na Eq. (C.46) se escrevem em função das componentes da matriz K . Para isso, utiliza-se a seguinte identidade envolvendo o valor principal de uma função:

$$\frac{1}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} = \text{P} \frac{1}{k^2 - q^2} - i\pi \delta(k^2 - q^2) \quad (\text{C.50})$$

que, com k^2, k e q positivos, implica:

$$\frac{1}{(k^2 - q^2)/2\mu \pm i\epsilon} = \text{P} \frac{1}{(k^2 - q^2)/2\mu} - i\pi 2\mu \frac{1}{2k} \delta(k - q) \quad (\text{C.51})$$

Substituindo a Eq. (C.51) na Eq. (C.46), tem-se:

$$\begin{aligned} \psi_l^+(k, r) &= j_l(kr) + \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty dq q^2 j_l(qr) \frac{1}{(k^2 - q^2)/2\mu} T_l^+(q, k; k^2) \\ &\quad - 2\mu ik j_l(kr) T_l^+(k^2) \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Porém, a Eq. (C.47) acarreta:

$$\begin{aligned} T_l^+(q, k; k^2) &= K_l(q, k; k^2) - \frac{2\mu ik K_l(q, k; k^2) K_l(k^2)}{1 + 2\mu ik K_l(k^2)} = \frac{K_l(q, k; k^2)}{1 + 2\mu ik K_l(k^2)} \\ &= K_l(q, k; k^2) e^{i\delta_l(k)} \cos \delta_l(k) \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

Na última passagem usaram-se as Eqs. (C.48) e (C.49) combinadas para escrever $1/[1 + 2\mu ik K_l(k^2)]$ em termos da defasagem $\delta_l(k)$. Substituindo as Eqs. (C.53) e

(C.48) na Eq. (C.52), chega-se a:

$$\begin{aligned}\psi_l^+(k, r) &= j_l(kr) \left[1 + ie^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) \right] \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty dq q^2 j_l(qr) \frac{K_l(q, k; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu} e^{i\delta_l(k)} \cos \delta_l(k) \\ &= e^{i\delta_l(k)} \cos \delta_l(k) \left[j_l(kr) + \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty dq q^2 j_l(qr) \frac{K_l(q, k; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu} \right]\end{aligned}$$

onde empregamos que $1 + ie^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) = e^{i\delta_l(k)} \cos \delta_l(k)$. Deste resultado, podemos finalmente escrever:

$$\psi_l^+(k, r) = e^{i\delta_l(k)} \cos \delta_l(k) \psi_l^P(k, r) \quad (\text{C.54})$$

em que

$$\psi_l^P(k, r) = j_l(kr) + \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty dq q^2 j_l(qr) \frac{K_l(q, k; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu} \quad (\text{C.55})$$

A Eq. (C.54) fornece a relação procurada entre as componentes em ondas parciais da função de onda de espalhamento e da matriz K *half-off-shell*; de forma que o problema de calcular a função de onda se traduz no de calcular as componentes K_l . Por outro lado, a partir das Eqs. (C.47) e (C.31), se obtém a seguinte equação de Lippmann-Schwinger para as componentes K_l :

$$K_l(p, p'; k^2) = V_l(p, p') + \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty dq q^2 \frac{V_l(p, q) K_l(q, p'; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu} \quad (\text{C.56})$$

cuja resolução permite determinar a função de onda de espalhamento.

Apêndice D

Métodos numéricos para obter as funções de onda de espalhamento

Neste apêndice são explicados os métodos numéricos que empregamos para resolver as equações de Schrödinger e de Lippmann-Schwinger.

D.1 Equação de Schrödinger

Nesta seção, explicamos como a função de onda é calculada numericamente a partir da equação de Schrödinger seguindo a Ref. [183]. A equação a ser resolvida é a equação radial:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2Mr^2} - E \right) u_l(r) = 0 \quad (\text{D.1})$$

com as condições de contorno:

$$u_l(0) = 0 \quad \text{e} \quad u_l(r) \rightarrow kr[\cos(\delta_l)j_l(kr) - \sin(\delta_l)n_l(kr)], \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (\text{D.2})$$

em que j_l e n_l são as funções esféricas de Bessel regular e irregular respectivamente. As funções $u_l(r)$ são obtidas resolvendo numericamente as Eqs. (D.1) sujeitas às condições dadas na Eq. (D.2).

Para o cálculo das defasagens, importa o comportamento assintótico. Sendo um potencial de curto alcance, existe um valor r_{max} tal que $V(r \geq r_{max}) \approx 0$, de forma que para $r \geq r_{max}$ a função $u_l(r)$ segue o comportamento assintótico dado pela Eq. (D.2). Portanto, integrando numericamente a Eq. (D.1) para um valor $r > r_{max}$, denotado por $r^{(1)}$, tem-se:

$$u_l^{(1)} \equiv u_l(r^{(1)}) = Akr^{(1)}[\cos(\delta_l)j_l(kr^{(1)}) - \sin(\delta_l)n_l(kr^{(1)})] \quad (\text{D.3})$$

Esta equação isoladamente não permite calcular a defasagem, pois A é outra incógnita. Continuando a integração numérica da Eq. (D.1) até um valor $r^{(2)} > r^{(1)}$, obtém-se:

$$u_l^{(2)} \equiv u_l(r^{(2)}) = Akr^{(2)}[\cos(\delta_l)j_l(kr^{(2)}) - \sin(\delta_l)n_l(kr^{(2)})] \quad (D.4)$$

As Eqs. (D.3) e (D.4) formam um sistema que permite obter a defasagem δ_l . Dividindo-se cada uma delas por $\cos(\delta_l)$ e dividindo as equações assim obtidas uma pela outra, encontra-se uma equação cuja única incógnita é $\tan(\delta_l)$, para a qual a solução é:

$$\tan(\delta_l) = \frac{Gj_l(kr^{(1)}) - j_l(kr^{(2)})}{Gn_l(kr^{(1)}) - n_l(kr^{(2)})}; \quad G \equiv \frac{r^{(1)}u_l^{(2)}}{r^{(2)}u_l^{(1)}} \quad (D.5)$$

A defasagem é determinada a menos de um múltiplo inteiro de π . Isto conclui a explicação de como se calcula a função de onda a partir da equação de Schrödinger.

D.2 Equação de Lippmann-Schwinger

Nesta seção explicamos a implementação numérica para resolver a equação de Lippmann-Schwinger a fim de obter a função de onda e as defasagens, tendo como base o capítulo 30 da Ref. [178] e as notas pessoais oferecidas pelo Prof. Gastão Krein [180]. Partimos das seguintes expressões:

- Equação de Lippmann-Schwinger para $K_l(p, p'; k^2)$:

$$K_l(p, p'; k^2) = V_l(p, p') + \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty dq q^2 \frac{V_l(p, q)K_l(q, p'; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu} \quad (D.6)$$

em que P denota o valor principal.

- Equação para encontrar as defasagens:

$$K_l(k^2) = \frac{T_l^{(+)}(k^2)}{1 - 2\mu ik T_l^{(+)}(k^2)} = -\frac{1}{2\mu k} \tan \delta_l(k) \quad (D.7)$$

- Função de onda, satisfazendo condições de contorno estacionárias, em ter-

mos do elemento de matriz semi-off-shell $K_l(q, k; k^2)$:

$$\psi^P(k, r) = j_l(kr) + \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty dq q^2 j_l(qr) \frac{K_l(q, k; k^2)}{(k^2 - q^2)/2\mu} \quad (D.8)$$

O objetivo é calcular numericamente $K_l(p, p'; k^2)$ usando a Eq. (D.6) e, com isso, usar a Eq. (D.7) para calcular as defasagens e a Eq. (D.8) para calcular a função de onda. Antes de proceder à explicação da implementação numérica, é interessante explicar sobre o cálculo do valor principal das integrais que aparecem nas equações em que estamos interessados. Isso é feito percebendo-se que:

$$P \int_0^\infty dq \frac{1}{k^2 - q^2} = 0 \quad (D.9)$$

Com isso, o valor principal de uma integral genérica, em que $f(q)$ não tenha polos, do tipo

$$I(k) = P \int_0^\infty dq \frac{f(q)}{k^2 - q^2} \quad (D.10)$$

pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} I(k) &= P \int_0^\infty dq \frac{f(q)}{k^2 - q^2} - f(k) P \int_0^\infty dq \frac{1}{k^2 - q^2} = P \int_0^\infty dq \frac{f(q) - f(k)}{k^2 - q^2} \\ &= \int_0^\infty dq \frac{f(q) - f(k)}{k^2 - q^2} \end{aligned} \quad (D.11)$$

em que na última linha não mais se usa o símbolo P pois não há mais a singularidade em $q = k$.

Retornando ao problema de interesse, para tornar a notação mais leve, o subíndice l em V_l e K_l será removido deste ponto em diante. Com isso e escrevendo a Eq. (D.6) para $p' = k$ — com $K_l(p, k; k^2) = K(p, k)$ — e utilizando a Eq. (D.11), tem-se

$$K(p, k) = V(p, k) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{q^2 V(p, q) K(q, k) - k^2 V(p, k) K(k, k)}{(k^2 - q^2)/(2\mu)} \quad (D.12)$$

O primeiro passo para uma implementação numérica é discretizar as equações, transformando em matriciais discretas as Eqs. (D.6) (D.8). Para tanto, o domínio no espaço dos momentos é discretizado considerando uma lista de N pontos

$k_j, j = 1, \dots, N$, de modo a aproximar a integral por uma quadratura de Gauss, em que k_j são os pontos de Gauss com respectivos pesos w_j :

$$\int_0^\infty dk F(k) \approx \sum_{i=j}^N w_j F(k_j) \quad (\text{D.13})$$

Com isso, a Eq. (D.12) se escreve como:

$$\begin{aligned} K(p, k) = V(p, k) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{w_j k_j^2 V(p, k_j) K(k_j, k)}{(k^2 - k_j^2)/(2\mu)} \\ - \frac{2}{\pi} k^2 V(p, k) K(k, k) \sum_{j=1}^N \frac{w_j}{(k^2 - k_j^2)/(2\mu)} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Esta equação possui $N + 1$ incógnitas: N elementos de matriz $K(p_j, k)$ semi-*on-shell* e o elemento de matriz *on-shell* $K(k, k)$. Pode-se escrevê-la como um sistema de $N + 1$ equações a $N + 1$ incógnitas $K_i \equiv K(k_i, k)$ usando uma lista de $N + 1$ pontos em que o último ponto corresponde ao momento observado k , isto é, fazendo:

$$p = p_i = \begin{cases} k_j, & j = 1, \dots, N \text{ (pontos de Gauss)} \\ k, & i = N + 1 \text{ (momento observável k)} \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

Com isso, obtém-se:

$$K_i = V_i + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{w_j k_j^2 V_{ij} K_j}{(k^2 - k_j^2)/(2\mu)} - \frac{2}{\pi} k^2 V_i K_{N+1} \sum_{j=1}^N \frac{w_j}{(k^2 - k_j^2)/(2\mu)} \quad (\text{D.16})$$

em que $V_i = V(p_i, k)$.

Este sistema pode ser escrito na forma matricial $A x = b$ definindo um vetor com componentes D_i

$$D_i = \begin{cases} + \frac{2}{\pi} \frac{w_i k_i^2}{(k^2 - k_i^2)/(2\mu)}, & i = 1, \dots, N \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{w_j k^2}{(k^2 - k_j^2)/(2\mu)}, & i = N + 1 \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

de forma que a Eq. (D.16) se escreve como:

$$\begin{aligned} K &= V + D V K \longrightarrow K - D V K = V \longrightarrow (1 - D V) K = V \\ &\longrightarrow F K = V, \quad F = 1 - D V \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} (1 - D V)_{ij} K_j = V_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{N+1} F_{ij} K_j = V_i, \quad F_{ij} = \delta_{ij} - D_j V_{ij} \quad (\text{D.19})$$

Numericamente, é mais eficiente resolver esse sistema pelo método de eliminação de Gauss do que pelo cálculo da matriz inversa, isto é, por: $K = F^{-1} V$. Uma vez obtido os K_i , $\psi_l^P(k, r)$ e $\psi_l^{(+)}(k, r)$ são obtidos diretamente, pois a Eq. (D.8) escrita no espaço de momentos discretizado fica:

$$\psi_l^P(r) \rightarrow \psi_{N+1}^P(r) = j_{N+1}(r) + \sum_{i=1}^{N+1} j_i(r) D_i K_{i(N+1)} \quad (\text{D.20})$$

em que $j_i(r) = j(k_i r)$. Com isso, o problema de determinar numericamente as funções de onda via equação de Lippmann-Schwinger fica resolvido.

Referências

- [1] J. Campbell, J. Huston, and F. Krauss, *The Black Book of Quantum Chromodynamics : a Primer for the LHC Era*. Oxford University Press, 2018.
- [2] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*. World Scientific, 2010.
- [3] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum chromodynamics*. Springer, 2007.
- [4] F. Gross *et al.*, “50 Years of Quantum Chromodynamics,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 83, p. 1125, 2023.
- [5] J. B. Kogut and M. A. Stephanov, *The Phases of Quantum Chromodynamics*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] C.-Y. Wong, *Introduction to high-energy heavy ion collisions*. World Scientific, 1994.
- [7] R. Vogt, *Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions*. Elsevier, 2007.
- [8] B. V. Jacak and B. Muller, “The exploration of hot nuclear matter,” *Science*, vol. 337, pp. 310–314, 2012.
- [9] E. Shuryak, “Strongly coupled quark-gluon plasma in heavy ion collisions,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 89, p. 035001, 2017.
- [10] R. Pasechnik and M. Šumbera, “Phenomenological Review on Quark–Gluon Plasma: Concepts vs. Observations,” *Universe*, vol. 3, no. 1, p. 7, 2017.
- [11] P. Braun-Munzinger, V. Koch, T. Schäfer, and J. Stachel, “Properties of hot and dense matter from relativistic heavy ion collisions,” *Phys. Rept.*, vol. 621, pp. 76–126, 2016.
- [12] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 1343–1346, 1973.
- [13] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 1346–1349, 1973.
- [14] P. A. Zyla *et al.*, “Review of particle physics,” *PTEP*, vol. 2020, no. 8,

- p. 083C01, 2020.
- [15] F. Strocchi, *An Introduction to Non-Perturbative Foundations of Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2013.
- [16] E. Shuryak, *Nonperturbative Topological Phenomena in QCD and Related Theories*, vol. 977 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2021.
- [17] I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994.
- [18] C. Gattringer and C. B. Lang, *Quantum chromodynamics on the lattice*, vol. 788 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2010.
- [19] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [20] A. V. Manohar and M. B. Wise, *Heavy quark physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [21] S. Scherer and M. R. Schindler, *A Primer for Chiral Perturbation Theory*, vol. 830. Springer Berlin, Heidelberg, 2012.
- [22] C. P. Burgess, *Introduction to Effective Field Theory*. Cambridge University Press, 2020.
- [23] R. Alkofer and L. von Smekal, “The Infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states,” *Phys. Rept.*, vol. 353, p. 281, 2001.
- [24] H. Gies, “Introduction to the functional RG and applications to gauge theories,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 852, pp. 287–348, 2012.
- [25] A. Bashir, L. Chang, I. C. Cloet, B. El-Bennich, Y.-X. Liu, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, “Collective perspective on advances in Dyson-Schwinger Equation QCD,” *Commun. Theor. Phys.*, vol. 58, pp. 79–134, 2012.
- [26] I. C. Cloet and C. D. Roberts, “Explanation and Prediction of Observables using Continuum Strong QCD,” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 77, pp. 1–69, 2014.
- [27] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou, “The Gluon Mass Generation Mechanism: A Concise Primer,” *Front. Phys. (Beijing)*, vol. 11, no. 2, p. 111203, 2016.

- [28] F. Close, "A November revolution: The birth of a new particle," *CERN Cour.*, vol. 44N10, pp. 25–26, 2004.
- [29] R. Aaij *et al.*, "Model-independent evidence for $J/\psi p$ contributions to $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi p K^-$ decays," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, no. 8, p. 082002, 2016.
- [30] S. Godfrey and S. L. Olsen, "The Exotic XYZ Charmonium-like Mesons," *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 58, pp. 51–73, 2008.
- [31] A. Esposito, A. Pilloni, and A. D. Polosa, "Multiquark Resonances," *Phys. Rept.*, vol. 668, pp. 1–97, 2017.
- [32] R. F. Lebed, R. E. Mitchell, and E. S. Swanson, "Heavy-Quark QCD Exotica," *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 93, pp. 143–194, 2017.
- [33] A. Ali, J. S. Lange, and S. Stone, "Exotics: Heavy Pentaquarks and Tetraquarks," *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 97, pp. 123–198, 2017.
- [34] F.-K. Guo, C. Hanhart, U.-G. Meißner, Q. Wang, Q. Zhao, and B.-S. Zou, "Hadronic molecules," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, no. 1, p. 015004, 2018.
- [35] L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa, and V. Riquer, "Diquark-antidiquarks with hidden or open charm and the nature of $X(3872)$," *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 014028, 2005.
- [36] E. S. Swanson, "The New heavy mesons: A Status report," *Phys. Rept.*, vol. 429, pp. 243–305, 2006.
- [37] R. D. Matheus, F. S. Navarra, M. Nielsen, and C. M. Zanetti, "Understanding the $X(3872)$ with QCD sum rules," *EPJ Web Conf.*, vol. 3, p. 03025, 2010.
- [38] S. Prelovsek and L. Leskovec, "Evidence for $X(3872)$ from DD^* scattering on the lattice," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 192001, 2013.
- [39] G. Eichmann, C. S. Fischer, W. Heupel, N. Santowsky, and P. C. Wallbott, "Four-Quark States from Functional Methods," *Few Body Syst.*, vol. 61, no. 4, p. 38, 2020.
- [40] G. Krein, "Charmed hypernuclei and nuclear-bound charmonia," *AIP Conf. Proc.*, vol. 2130, no. 1, p. 020022, 2019.
- [41] A. Tyapkin, "On the evidence to existence of charmed particles," *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 19, p. 181, 1975.
- [42] C. B. Dover and S. H. Kahana, "Possibility of Charmed Hypernuclei," *Phys.*

- Rev. Lett.*, vol. 39, pp. 1506–1509, 1977.
- [43] H. Bando and M. Bando, “ ${}^5\text{He}(\Lambda(c))$ and ${}^9\text{Be}(\Lambda(c))$ Charmed Nuclei Versus ${}^5\text{He}(\Lambda)$ and ${}^9\text{Be}(\Lambda)$ Hypernuclei,” *Phys. Lett. B*, vol. 109, pp. 164–166, 1982.
- [44] H. Bando and S. Nagata, “FLAVOR NUCLEI ONE BOSON EXCHANGE POTENTIALS,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 69, pp. 557–564, 1983.
- [45] S. A. Bunyatov, V. V. Lyukov, N. I. Starkov, and V. A. Isarev, “Charmed nuclei,” *Sov. J. Part. Nucl.*, vol. 23, pp. 253–282, 1992.
- [46] K. Tsushima and F. C. Khanna, “ $\Lambda(c)^+$ and $\Lambda(b)$ hypernuclei,” *Phys. Rev. C*, vol. 67, p. 015211, 2003.
- [47] K. Tsushima and F. C. Khanna, “Study of $\Lambda(c)^+$, $\Sigma(c)$, $\Xi(c)$ and $\Lambda(b)$ hypernuclei in the quark meson coupling model,” *J. Phys.*, vol. G30, pp. 1765–1786, 2004.
- [48] V. B. Kopeliovich and A. M. Shunderuk, “Strange and Heavy Flavoured Hypernuclei in Chiral Soliton Models,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 33, no. 3, pp. 277–281, 2007.
- [49] C. E. Fontoura, F. Krmpotić, A. P. Galeão, C. De Conti, and G. Krein, “Non-mesonic weak decay of charmed hypernuclei,” *J. Phys.*, vol. G45, no. 1, p. 015101, 2018.
- [50] H. Garcilazo, A. Valcarce, and T. F. Caramés, “Charmed baryon–nucleon interaction,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 79, no. 7, p. 598, 2019.
- [51] J. Haidenbauer, A. Nogga, and I. Vidaña, “Predictions for charmed nuclei based on $Y_c N$ forces inferred from lattice QCD simulations,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 56, no. 7, p. 195, 2020.
- [52] H. Güven, K. Bozkurt, E. Khan, and J. Margueron, “Ground state properties of charmed hypernuclei within a mean field approach,” *Phys. Rev. C*, vol. 104, no. 6, p. 064306, 2021.
- [53] Y.-R. Liu and M. Oka, “ $\Lambda_c N$ bound states revisited,” *Phys. Rev.*, vol. D85, p. 014015, 2012.
- [54] B. F. Gibson, G. Bhamathi, C. B. Dover, and D. R. Lehman, “BINDING ENERGY ESTIMATES FOR CHARMED FEW BODY SYSTEMS,” *Phys. Rev. C*, vol. 27, pp. 2085–2089, 1983.

- [55] F. Froemel, B. Julia-Diaz, and D. O. Riska, “Bound states of double flavor hyperons,” *Nucl. Phys. A*, vol. 750, pp. 337–356, 2005.
- [56] S. Maeda, M. Oka, A. Yokota, E. Hiyama, and Y.-R. Liu, “A model of charmed baryon–nucleon potential and two- and three-body bound states with charmed baryon,” *PTEP*, vol. 2016, no. 2, p. 023D02, 2016.
- [57] S. J. Brodsky, I. A. Schmidt, and G. F. de Teramond, “NUCLEAR BOUND QUARKONIUM,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, p. 1011, 1990.
- [58] A. Hosaka, T. Hyodo, K. Sudoh, Y. Yamaguchi, and S. Yasui, “Heavy Hadrons in Nuclear Matter,” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 96, pp. 88–153, 2017.
- [59] G. Krein, A. W. Thomas, and K. Tsushima, “Nuclear-bound quarkonia and heavy-flavor hadrons,” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 100, pp. 161–210, 2018.
- [60] M. S. Chanowitz and J. R. Ellis, “Canonical Anomalies and Broken Scale Invariance,” *Phys. Lett. B*, vol. 40, pp. 397–400, 1972.
- [61] D. Z. Freedman, I. J. Muzinich, and E. J. Weinberg, “On the Energy-Momentum Tensor in Gauge Field Theories,” *Annals Phys.*, vol. 87, p. 95, 1974.
- [62] J. C. Collins, A. Duncan, and S. D. Joglekar, “Trace and Dilatation Anomalies in Gauge Theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 16, pp. 438–449, 1977.
- [63] N. K. Nielsen, “The Energy Momentum Tensor in a Nonabelian Quark Gluon Theory,” *Nucl. Phys. B*, vol. 120, pp. 212–220, 1977.
- [64] M. Shifman, A. Vainshtein, and V. Zakharov, “Remarks on higgs-boson interactions with nucleons,” *Physics Letters B*, vol. 78, no. 4, pp. 443 – 446, 1978.
- [65] A. B. Kaidalov and P. E. Volkovitsky, “Heavy quarkonia interactions with nucleons and nuclei,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, pp. 3155–3156, 1992.
- [66] M. E. Luke, A. V. Manohar, and M. J. Savage, “A QCD Calculation of the interaction of quarkonium with nuclei,” *Phys. Lett.*, vol. B288, pp. 355–359, 1992.
- [67] D. Kharzeev, “Quarkonium interactions in QCD,” *Proc. Int. Sch. Phys. Fermi*, vol. 130, pp. 105–131, 1996.
- [68] J. Tarrús Castellà and G. Krein, “Effective field theory for the nucleon-

- quarkonium interaction," *Phys. Rev.*, vol. D98, no. 1, p. 014029, 2018.
- [69] H. Fujioka *et al.*, "Extension of the J-PARC Hadron Experimental Facility - summary report," *arXiv e-prints*, 2017.
- [70] H. Noumi, "Strange and Charm Hadron Physics at J-PARC in Future," *JPS Conf. Proc.*, vol. 17, p. 111003, 2017.
- [71] K. Hafidi, S. Joosten, Z. E. Meziani, and J. W. Qiu, "Production of Charmonium at Threshold in Hall A and C at Jefferson Lab," *Few Body Syst.*, vol. 58, no. 4, p. 141, 2017.
- [72] U. Wiedner, "Future Prospects for Hadron Physics at PANDA," *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 66, pp. 477–518, 2011.
- [73] E. Tomasi-Gustafsson, "The $\bar{\text{P}}\text{ANDA}$ experiment at FAIR: The world facility for QCD studies," *Hyperfine Interact.*, vol. 239, no. 1, p. 30, 2018.
- [74] A. Ali *et al.*, "First Measurement of Near-Threshold J/ψ Exclusive Photoproduction off the Proton," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 123, no. 7, p. 072001, 2019.
- [75] B. Duran *et al.*, "Determining the gluonic gravitational form factors of the proton," *Nature*, vol. 615, no. 7954, pp. 813–816, 2023.
- [76] U. Heinz, D. Regensburg, and B. V. Jacak, "Two-particle correlations in relativistic heavy-ion collisions," *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 49, no. 1, pp. 529–579, 1999.
- [77] M. A. Lisa, S. Pratt, R. Soltz, and U. Wiedemann, "FEMTOSCOPY IN RELATIVISTIC HEAVY ION COLLISIONS: Two Decades of Progress," *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 55, pp. 357–402, 2005.
- [78] R. Hanbury-Brown and R. Twiss, "A new type of interferometer for use in radio astronomy," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 45, p. 663–682, 1956.
- [79] R. H. Brown and R. Twiss, "Correlation between photons in two coherent beams of light," *Nature*, vol. 177, p. 27–29, 1956.
- [80] R. Lednicky and V. L. Lyuboshits, "Final state interaction effect on correlations in narrow particles pairs," in *Proc. Particle Correlations and Interferometry in Nuclear Collisions, CORINNE 90, Nantes, France* (D. Ardouin, ed.), World Scientific, 1990.

- [81] R. Lednicky, "Progress in correlation femtoscopy," in *32nd International Symposium on Multiparticle Dynamics, Alushta, Crimea, Ukraine* (A. Sissakuian, G. Kozlov, and E. Kolganova, eds.), World Scientific, 2002.
- [82] S. E. Koonin, "Proton Pictures of High-Energy Nuclear Collisions," *Phys. Lett. B*, vol. 70, pp. 43–47, 1977.
- [83] R. Lednicky and V. Lyuboshits, "Final State Interaction Effect on Pairing Correlations Between Particles with Small Relative Momenta," *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 35, p. 770, 1982.
- [84] S. S. Padula and S. Pratt, eds., *Particle correlations and femtoscopy. Proceedings, 2nd Workshop, WPCF 2006, Sao Paulo, Brazil, September 9-11, 2006*, vol. 37, 2007.
- [85] J. Adams *et al.*, "Proton - lambda correlations in central Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ -GeV," *Phys. Rev. C*, vol. 74, p. 064906, 2006.
- [86] G. Agakishiev *et al.*, "Lambda-p femtoscopy in collisions of Ar+KCl at 1.76 AGeV," *Phys. Rev. C*, vol. 82, p. 021901, 2010.
- [87] T. Anticic *et al.*, "Proton - Lambda Correlations in Central Pb+Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$ GeV," *Phys. Rev. C*, vol. 83, p. 054906, 2011.
- [88] L. Adamczyk *et al.*, " $\Lambda\Lambda$ Correlation Function in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, no. 2, p. 022301, 2015.
- [89] J. Adamczewski-Musch *et al.*, "The Λp interaction studied via femtoscopy in p + Nb reactions at $\sqrt{s_{NN}} = 3.18$ GeV," *Phys. Rev. C*, vol. 94, no. 2, p. 025201, 2016.
- [90] S. Acharya *et al.*, "p-p, p- Λ and Λ - Λ correlations studied via femtoscopy in pp reactions at $\sqrt{s} = 7$ TeV," *Phys. Rev. C*, vol. 99, no. 2, p. 024001, 2019.
- [91] J. Adam *et al.*, "The Proton- Ω correlation function in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}=200$ GeV," *Phys. Lett. B*, vol. 790, pp. 490–497, 2019.
- [92] D. Lemos de Souza, *Femtoscopy with strange particles in pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 8.16$ TeV at CMS*. PhD thesis, Sao Paulo, IFT, 2021.
- [93] L. Fabbietti, V. M. Sarti, and O. V. Doce, "Study of the strong interaction among hadrons with correlations at the lhc," *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 71, no. 1, pp. 377–402, 2021.

- [94] C. A. Bernardes, “Recent results on femtoscopic correlations with the CMS experiment,” *PoS*, vol. ICHEP2022, p. 475, 2022.
- [95] R. Pradhan, “Results of femtoscopic correlations at CMS,” *EPJ Web Conf.*, vol. 276, p. 03003, 2023.
- [96] E. Chizali, “First measurement of the ϕ –proton correlation function with ALICE in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV,” bachelorarbeit, Technische Universität München, München, Germany, 2019.
- [97] S. Acharya *et al.*, “Experimental Evidence for an Attractive p- ϕ Interaction,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, no. 17, p. 172301, 2021.
- [98] S. Acharya *et al.*, “First study of the two-body scattering involving charm hadrons,” *Phys. Rev. D*, vol. 106, no. 5, p. 052010, 2022.
- [99] J. Haidenbauer, G. Krein, and T. Peixoto, “Femtoscopic correlations and the $\Lambda_c N$ interaction,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 56, no. 7, p. 184, 2020.
- [100] G. Krein and T. Peixoto, “Femtосcopy of the Origin of the Nucleon Mass,” *Few Body Syst.*, vol. 61, no. 4, p. 49, 2020.
- [101] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Physics textbook, Wiley, 2008.
- [102] M. e. a. Tanabashi, “Review of particle physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 030001, Aug 2018.
- [103] J. Collins, *Foundations of Perturbative QCD*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology volume 32, Cambridge University Press, 1 ed., 2011.
- [104] F. E. S. Algarin, “Dressed perturbation theory for the quark propagator,” mestrado, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2013.
- [105] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, “Advantages of the Color Octet Gluon Picture,” *Phys. Lett. B*, vol. 47, pp. 365–368, 1973.
- [106] S. Dürr, Z. Fodor, J. Frison, C. Hoelbling, R. Hoffmann, S. D. Katz, S. Krieg, T. Kurth, L. Lellouch, T. Lippert, K. K. Szabo, and G. Vulvert, “Ab initio determination of light hadron masses,” *Science*, vol. 322, no. 5905, pp. 1224–1227, (2008).

- [107] C. E. DeTar and U. M. Heller, "QCD thermodynamics from the lattice," *Eur. Phys. J. A*, vol. **41**, pp. 405–437, (2009).
- [108] A. J. Woss, C. E. Thomas, J. J. Dudek, R. G. Edwards, and D. J. Wilson, " b_1 resonance in coupled $\pi\omega$, $\pi\phi$ scattering from lattice QCD," *Phys. Rev. D*, vol. 100, no. 5, p. 054506, 2019.
- [109] K. Kashiwa, Y. Mori, and A. Ohnishi, "Application of the path optimization method to the sign problem in an effective model of QCD with a repulsive vector-type interaction," *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 11, p. 114005, 2019.
- [110] P. de Forcrand, "Simulating QCD at finite density," *PoS*, vol. LAT2009, p. 010, 2009.
- [111] N. Weiss, "Effective potential for the order parameter of gauge theories at finite temperature," *Phys. Rev. D*, vol. **24**, pp. 475–480, (1981).
- [112] N. Weiss, "Wilson line in finite-temperature gauge theories," *Phys. Rev. D*, vol. **25**, pp. 2667–2672, (1982).
- [113] C. Ratti, M. A. Thaler, and W. Weise, "Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model," *Phys. Rev. D*, vol. **73**, p. 014019, (2006).
- [114] X. Li, W.-J. Fu, and Y.-X. Liu, "Thermodynamics of 2+1 Flavor Polyakov-Loop Quark-Meson Model under External Magnetic Field," *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 7, p. 074029, 2019.
- [115] T. Mannel, "Effective Field Theories in Flavor Physics," *Springer Tracts Mod. Phys.*, vol. 203, pp. 1–175, 2004.
- [116] L. F. Cheng, P. T. Li, *Gauge theory of elementary particles physics*. New York: Oxford University Press, 1984.
- [117] J. M. Alarcón, "Brief history of the pion–nucleon sigma term," *Eur. Phys. J. ST*, vol. 230, no. 6, pp. 1609–1622, 2021.
- [118] J. Goldstone, "Field theories with "superconductor"solutions," *Il Nuovo Cimento*, vol. **XIX**, (1961).
- [119] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, "Broken symmetries," *Phys. Rev.*, vol. **127**, pp. 965–970, (1962).
- [120] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics vol.2*, vol. 2. Londres: IOP, 2004.

- [121] S. Scherer and M. Schindler, *A Primer for Chiral Perturbation Theory*. Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [122] O. W. Arnold, *Study of the hyperon-nucleon interaction via femtoscopy in elementary systems with HADES and ALICE*. PhD thesis, Munich, Tech. U., 2017. Presented on 2017-07-17.
- [123] S. Koonin, “Proton Pictures of High-Energy Nuclear Collisions,” *Phys. Lett. B*, vol. 70, pp. 43–47, 1977.
- [124] S. Pratt, “Pion Interferometry for Exploding Sources,” *Physical Review Letters*, vol. 53, pp. 1219–1221, sep 1984.
- [125] D. Anchishkin, U. Heinz, and P. Renk, “Final state interactions in two-particle interferometry,” *Physical Review C - Nuclear Physics*, vol. 57, no. 3, pp. 1428–1439, 1998.
- [126] S. S. Padula, “HBT interferometry: Historical perspective,” *Braz. J. Phys.*, vol. 35, pp. 70–99, 2005.
- [127] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, “A New type of interferometer for use in radio astronomy,” *Phil. Mag. Ser. 7*, vol. 45, pp. 663–682, 1954.
- [128] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W.-Y. Lee, and A. Pais, “Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process,” *Phys. Rev.*, vol. 120, pp. 300–312, 1960.
- [129] S. Pratt, T. Csorgo, and J. Zimanyi, “Detailed predictions for two pion correlations in ultrarelativistic heavy ion collisions,” *Phys. Rev. C*, vol. 42, pp. 2646–2652, 1990.
- [130] Z.-W. Liu, K.-W. Li, and L.-S. Geng, “Strangeness $S = -2$ baryon-baryon interactions and femtoscopic correlation functions in covariant chiral effective field theory*,” *Chin. Phys. C*, vol. 47, no. 2, p. 024108, 2023.
- [131] S. Acharya *et al.*, “Kaon femtoscopy in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 2.76$ TeV,” *Phys. Rev. C*, vol. 96, no. 6, p. 064613, 2017.
- [132] M. L. Bellac, F. Mortessagne, and G. G. Batrouni, *Equilibrium and non-equilibrium Statistical Thermodynamics*. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [133] H. Bethe, “Theory of the Effective Range in Nuclear Scattering,” *Phys. Rev.*,

- vol. 76, pp. 38–50, 1949.
- [134] T. Miyamoto *et al.*, “ $\Lambda_c N$ interaction from lattice QCD and its application to Λ_c hypernuclei,” *Nucl. Phys. A*, vol. 971, pp. 113–129, 2018.
- [135] T. Miyamoto, “Coupled-channel $\Lambda_c N - \Sigma_c N$ interaction from lattice QCD,” *PoS*, vol. Hadron2017, p. 146, 2018.
- [136] I. Vidaña, A. Ramos, and C. E. Jiménez-Tejero, “Charmed nuclei within a microscopic many-body approach,” *Phys. Rev. C*, vol. 99, p. 045208, Apr 2019.
- [137] J. Haidenbauer and G. Krein, “Scattering of charmed baryons on nucleons,” *Eur. Phys. J.*, vol. A54, no. 11, p. 199, 2018.
- [138] H. Polinder, J. Haidenbauer, and U.-G. Meissner, “Hyperon-nucleon interactions: A Chiral effective field theory approach,” *Nucl. Phys.*, vol. A779, pp. 244–266, 2006.
- [139] J. Haidenbauer, S. Petschauer, N. Kaiser, U. G. Meissner, A. Nogga, and W. Weise, “Hyperon-nucleon interaction at next-to-leading order in chiral effective field theory,” *Nucl. Phys. A*, vol. 915, pp. 24–58, 2013.
- [140] S. Dürr *et al.*, “Lattice QCD at the physical point meets SU(2) chiral perturbation theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 11, p. 114504, 2014.
- [141] C. Alexandrou, K. Hadjiyiannakou, and C. Kallidonis, “Axial charges of hyperons and charmed baryons using $N_f = 2 + 1 + 1$ twisted mass fermions,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, no. 3, p. 034502, 2016.
- [142] E. Epelbaum, H.-W. Hammer, and U.-G. Meissner, “Modern Theory of Nuclear Forces,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, pp. 1773–1825, 2009.
- [143] S. Pratt, “Pion interferometry for exploding sources,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 1219–1221, Sep 1984.
- [144] A. Ohnishi, K. Morita, K. Miyahara, and T. Hyodo, “Hadron–hadron correlation and interaction from heavy–ion collisions,” *Nuclear Physics A*, vol. 954, pp. 294 – 307, 2016. Recent Progress in Strangeness and Charm Hadronic and Nuclear Physics.
- [145] A. Messiah, *Quantum Mechanics, vol. I*. Noth Holland, 1961.
- [146] W. R. Inc., “Mathematica.” Champaign, IL.

- [147] "Nist digital library of mathematical functions." "<http://dlmf.nist.gov/33.2>.
- [148] C. M. Vincent and S. C. Phatak, "Accurate momentum-space method for scattering by nuclear and Coulomb potentials," *Phys. Rev. C*, vol. 10, pp. 391–394, 1974.
- [149] Y.-Z. Xu, S. Chen, Z.-Q. Yao, D. Binosi, Z.-F. Cui, and C. D. Roberts, "Vector-meson production and vector meson dominance," *Eur. Phys. J. C*, vol. 81, no. 10, p. 895, 2021.
- [150] M. E. Peskin, "Short Distance Analysis for Heavy Quark Systems. 1. Diagrammatics," *Nucl. Phys. B*, vol. 156, pp. 365–390, 1979.
- [151] G. Bhanot and M. E. Peskin, "Short Distance Analysis for Heavy Quark Systems. 2. Applications," *Nucl. Phys. B*, vol. 156, pp. 391–416, 1979.
- [152] A. Sibirtsev and M. B. Voloshin, "The Interaction of slow J/ψ and ψ' with nucleons," *Phys. Rev.*, vol. D71, p. 076005, 2005.
- [153] J. Ferretti, E. Santopinto, M. Naeem Anwar, and M. Bedolla, "The baryoquarkonium picture for hidden-charm and bottom pentaquarks and LHCb $P_c(4380)$ and $P_c(4450)$ states," *Phys. Lett. B*, vol. 789, pp. 562–567, 2019.
- [154] M. I. Eides, V. Y. Petrov, and M. V. Polyakov, "Pentaquarks with hidden charm as hadroquarkonia," *Eur. Phys. J. C*, vol. 78, no. 1, p. 36, 2018.
- [155] S. Dubynskiy and M. Voloshin, "Hadro-charmonium," *Physics Letters B*, vol. 666, no. 4, pp. 344–346, 2008.
- [156] J. Z. e. a. Bai, " $\psi(2s) \rightarrow \pi^+ \pi^- j/\psi$ decay distributions," *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 032002, Jul 2000.
- [157] T. Kawanai and S. Sasaki, "Charmonium-nucleon potential from lattice QCD," *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 091501, 2010.
- [158] K. Yokokawa, S. Sasaki, T. Hatsuda, and A. Hayashigaki, "First lattice study of low-energy charmonium-hadron interaction," *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 034504, 2006.
- [159] T. Kawanai and S. Sasaki, "Charmonium-nucleon interaction from lattice QCD with a relativistic heavy quark action," *PoS*, vol. LATTICE2010, p. 156, 2010.

- [160] L. Liu, H.-W. Lin, and K. Orginos, “Charmed Hadron Interactions,” *PoS*, vol. LATTICE2008, p. 112, 2008.
- [161] M. V. Polyakov and P. Schweitzer, “Determination of J/ψ chromoelectric polarizability from lattice data,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, no. 3, p. 034030, 2018.
- [162] K. Goeke, J. Grabis, J. Ossmann, M. Polyakov, P. Schweitzer, A. Silva, and D. Urbano, “Nucleon form-factors of the energy momentum tensor in the chiral quark-soliton model,” *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 094021, 2007.
- [163] M. Voloshin, “Charmonium,” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 61, pp. 455–511, 2008.
- [164] A. Hayashigaki, “ J/ψ nucleon scattering length and in-medium mass shift of J/ψ in QCD sum rule analysis,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 101, pp. 923–935, 1999.
- [165] J. Haidenbauer, “Coupled-channel effects in hadron–hadron correlation functions,” *Nucl. Phys. A*, vol. 981, pp. 1–16, 2019.
- [166] K. Tsushima, D. Lu, G. Krein, and A. Thomas, “ J/Ψ -nuclear bound states,” *Phys. Rev. C*, vol. 83, p. 065208, 2011.
- [167] G. Krein, A. W. Thomas, and K. Tsushima, “ J/Ψ mass shift in nuclear matter,” *Phys. Lett. B*, vol. 697, pp. 136–141, 2011.
- [168] G. Krein, “ J/Ψ in nuclear matter,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 422, p. 012012, 2013.
- [169] G. a. Krein, “Femtoscopic of the Matter Distribution in the Proton,” *Few Body Syst.*, vol. 64, no. 3, p. 42, 2023.
- [170] H. Pagels, “Energy-Momentum Structure Form Factors of Particles,” *Phys. Rev.*, vol. 144, pp. 1250–1260, 1966.
- [171] D. E. Kharzeev, “Mass radius of the proton,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, no. 5, p. 054015, 2021.
- [172] I. M. Silvério, S. S. Padula, and G. a. I. Krein, “Study of D^0 meson interactions via femtoscopic correlations,” *SciPost Phys. Proc.*, vol. 10, p. 019, 2022.
- [173] Y. Kamiya, T. Hyodo, and A. Ohnishi, “Femtoscopic study on DD^* and $D\bar{D}^*$ interactions for T_{cc} and $X(3872)$,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 58, no. 7, p. 131, 2022.
- [174] J. M. Torres-Rincon, A. Ramos, and L. Tolos, “Femtoscopic of D mesons and

- light mesons upon unitarized effective field theories," *Phys. Rev. D*, vol. 108, no. 9, p. 096008, 2023.
- [175] A. de Toledo Piza, *Mecânica quântica*. EDUSP, 2009.
- [176] M. L. Bellac, *Quantum physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [177] L. Landau and E. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Course of Theoretical Physics, Elsevier Science, 1981.
- [178] R. H. Landau, M. J. Páez, and C. C. Bordeianu, *Computational Physics - Problem Solving with Computers*. Wiley, 2007.
- [179] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics, 2 Volume Set*. Wiley, 1992.
- [180] G. Krein, "Scattering wave function and the t and k matrices." 2020.
- [181] R. H. Landau, *Quantum mechanics. A second course in quantum theory*. Wiley, 2004.
- [182] E. F. Redish and K. Stricker-Bauer, "Off-energy-shell behavior of realistic potential models," *Phys. Rev. C*, vol. 36, pp. 513–532, Aug 1987.
- [183] S. Koonin and D. Meredith, *Computational Physics: Fortran Version*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1990.