



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Samanta Bellei Teixeira

**Análise de flexibilidade para o problema de dimensionamento de
lotes com plantas flexíveis e custo de transporte**

São José do Rio Preto
2019

Samanta Bellei Teixeira

Análise de flexibilidade para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
Coorientador: Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto

São José do Rio Preto
2019

T266a Teixeira, Samanta Bellei

 Análise de flexibilidade para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte / Samanta Bellei Teixeira. -- São José do Rio Preto, 2019

 69 f. : il., tabs.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

 Orientador: Silvio Alexandre de Araujo

 Coorientador: Diego Jacinto Fiorotto

 1. Problema de dimensionamento de lotes. 2. Matemática aplicada. 3. Matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Samanta Bellei Teixeira

Análise de flexibilidade para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto
UNICAMP – Câmpus de Limeira
Coorientador

Prof^a. Dr^a. Mariá Cristina Vasconcelos Nascimento Rosset
Unifesp – São José dos Campos

Prof^a. Dr^a. Desiree Maldonado Carvalho
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
28 de agosto de 2019

Aos meus pais, Lucelaine e Alexandre.
Ao meu namorado Carlos Igor.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Foram 6 anos lutando com persistência para atingir o objetivo que estou alcançando, os primeiros anos de graduação foram de imenso aprendizado e muitas pessoas ainda me acompanham nesta caminhada. Os anos de pós-graduação foram difíceis e repleto de barreiras vencidas, mas por receber o apoio de pessoas como vocês posso ter certeza de que nada foi em vão. Por este motivo, gostaria de lhes agradecer.

Primeiramente à Deus e ao meu anjo da guarda, que sejam quem ou como forem, sempre me protegeram e ampararam nos momentos em que pensei em desistir. Obrigada por manterem minha família unida nos momentos difíceis que passei enquanto realizava este trabalho.

Ao meu professor Silvio Alexandre de Araujo pela ajuda e compreensão em todos esses anos de orientação. Obrigada por fazer parte de todas as minhas conquistas, sem o Senhor eu não poderia chegar onde cheguei.

Aos meus pais, Lucelaine e Alexandre, os quais devo toda a minha vida. Sem vocês eu não poderia ser a pessoa que sou hoje e muito menos ter forças para concluir mais essa etapa. Obrigada por serem tão importantes e presentes em toda a minha vida, eu amo vocês demais.

Ao meu namorado Carlos Igor, por toda ajuda e compreensão nos dias em que passou a noite acordado comigo para que eu pudesse organizar e digitar dados deste trabalho e de tantos outros que estive ao meu lado. Obrigada por acreditar em mim quando nem eu mesma acreditava, te amo.

Ao meu coorientador Diego Fiorotto, que mesmo longe sempre estava disposto a me auxiliar e mesmo sem tempo conseguia alguns minutos para poder esclarecer minhas dúvidas.

À Gislaine Melega, quase que um anjo nas últimas etapas da elaboração deste trabalho, me auxiliando todos os dias com dúvidas que eu nunca conseguiria resolver sem sua presença e ajuda. Obrigada por me proporcionar o conhecimento que me transmitiu.

Às amigas que a pós-graduação me proporcionou Caroline, Jennifer, Karina e Melka, por todos os conselhos, ajudas, materiais emprestados e todo o apoio em momentos que a desorientação tomava conta das minhas ideias. Obrigada meninas, por me ouvirem em tantos momentos difíceis. Sem vocês nem este trabalho poderia ser escrito.

Aos amigos da salinha André, Bruno, Fabricio e Paula, com quem tive a oportunidade de vivenciar momentos de muita alegria e descontração. Aos amigos desde a graduação Renan, Rubiana e Wesley, com quem sempre pude me apoiar em todos estes anos, em momentos difíceis e felizes.

Aos professores de graduação e pós-graduação, que sempre me transmitiram o melhor que puderam e me ajudaram a moldar a pessoa e a profissional que sou hoje.

Aos envolvidos em algumas etapas cruciais da minha vida acadêmica, como a Diretora Laurice que apostou muito em mim nos meus primeiros anos de Ensino Médio e me proporcionou estudar em uma escola de grande qualidade, a Professora e Vice-Diretora Gislaine que foi uma de minhas maiores inspirações como profissional e me auxiliou em minhas primeiras aulas em escola pública e, finalmente, a Diretora

Mara que me abriu as portas para que eu pudesse realizar estágios e ingressar nas primeiras aulas na escola onde comecei minha vida acadêmica. A essas mulheres devo uma grande parte de minhas conquistas, obrigada.

A todos os funcionários e colegas do IBILCE que contribuíram de forma direta ou indireta para que a elaboração deste trabalho fosse concluída. Em especial ao Thiago pela ajuda com os testes computacionais realizados no laboratório do DMAP e DCCE.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço imensamente.

“Não se chega a lugar nenhum sem os números.”

Hidden figures (Melfi, 2016)

RESUMO

O problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte consiste em definir quais plantas deverão ser flexíveis para produzir determinados itens e em determinar a quantidade de itens que deve ser produzida em cada planta e para quais clientes estes itens deverão ser entregues de forma a suprir as demandas predeterminadas, em um horizonte de tempo finito e dividido em períodos, levando em conta custos de produção, preparo, estoque, hora extra, flexibilidade e transporte. Neste trabalho é proposto um modelo matemático para este problema, além de uma análise computacional a fim de verificar se, com um orçamento de flexibilidade predefinido, pode-se oferecer as mesmas vantagens comparado ao orçamento de flexibilidade total. São analisados os casos de flexibilidade com plantas dedicada, plantas com flexibilidade total e algumas reduções deste nível de flexibilidade, como de 20%, 50% e 80% deste orçamento para investir em possíveis flexibilidades das plantas. Os resultados computacionais, para instâncias de tamanho pequeno indicam que é possível obter bons resultados com flexibilidade reduzida e que investir em flexibilidade é importante. Para instâncias de tamanho médio, a dificuldade em se resolver o modelo matemático não permitiu uma análise precisa sobre flexibilidade.

Palavras-chave: Problema de dimensionamento de lotes. Problema de transporte. Problemas integrados. Flexibilidade de plantas. Análise de flexibilidade.

ABSTRACT

The lot sizing problem with flexible plants and transport costs consists in defining which plants should be flexible to produce certain items and to determine the quantity of items that should be produced in each plant and to which customers these items should be delivered in order to meet predetermined demands, in a finite time horizon divided into time periods, taking into account production, setup, inventory, overtime, flexibility and transportation costs. In this work, we propose a mathematical model for this problem, in addition to a computational analysis, in order to determine if, with a lower flexibility budget, the same benefits can be achieved compared to the total flexibility budget. We analyze the cases of flexibility with dedicated plants, plants with total flexibility and some reductions of flexibility, such as 20%, 50% and 80% of this budget to invest in possible plant flexibility. The computational results for small instances indicate that it is possible to obtain good results with reduced flexibility and that investing in flexibility is important. For medium instances, the difficulty in solving the mathematical model has not allowed an accurate analysis of flexibility.

Keywords: Lot sizing problem. Transport problem. Integrated problems. Plant flexibility. Flexibility analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Produção e distribuição dos itens para os clientes	48
Figura 2 – Dispersão de plantas e clientes	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de preparo e produção nos períodos 1 e 2	43
Tabela 2 – Parâmetros de estoque e hora extra	43
Tabela 3 – Parâmetros de demanda	43
Tabela 4 – Custos de transporte	44
Tabela 5 – Variáveis de decisão sobre a flexibilidade e produção ou não do item na planta	45
Tabela 6 – Variável de decisão sobre a quantidade produzida	46
Tabela 7 – Variáveis referente ao tempo extra de capacidade para a produção dos itens no horizonte de planejamento	47
Tabela 8 – Conjunto de dados	51
Tabela 9 – Limitante Superior (Dedicado)	53
Tabela 10 – Limitante Superior (Total)	54
Tabela 11 – GAP	55
Tabela 12 – Tempo	56
Tabela 13 – Capacidade utilizada	57
Tabela 14 – Custos envolvidos em plantas dedicadas ($F_{max 1}$)	58
Tabela 15 – Custos envolvidos em plantas com flexibilidade de 20% ($F_{max 2}$)	58
Tabela 16 – Custos envolvidos em plantas com flexibilidade de 50% ($F_{max 3}$)	59
Tabela 17 – Custos envolvidos em plantas com flexibilidade de 80% ($F_{max 4}$)	60
Tabela 18 – Custos envolvidos em plantas com flexibilidade total ($F_{max 5}$)	60

LISTA DE SÍMBOLOS

T	Conjunto de períodos
d_t	Demanda no período t
hc_t	Custo unitário de estoque no período t
sc_t	Custo de preparo no período t
vc_t	Custo de produção no período t
x_t	Unidades produzidas no período t
y_t	Variável binária, indicando a produção ou não no período t
s_t	Quantidade estocada no período t
st_t	Tempo de preparo no período t
vt_t	Tempo de produção no período t
cap_t	Capacidade da máquina (em unidade de tempo) no período t
I	Conjunto de itens
d_{it}	Demanda do item i no período t
hc_{it}	Custo unitário de estoque do item i no período t
sc_{it}	Custo de preparo do item i no período t
vc_{it}	Custo de produção do item i no período t
x_{it}	Unidades produzidas do item i no período t
y_{it}	Variável binária, indicando a produção ou não do item i no período t
s_{it}	Quantidade estocada do item i no período t
st_{it}	Tempo de preparo do item i no período t
vt_{it}	Tempo de produção do item i no período t
P	Conjunto de máquinas
sc_{ijt}	Custo de preparo do item i na máquina/planta j no período t
vc_{ijt}	Custo de produção do item i na máquina/planta j no período t
x_{ijt}	Unidades produzidas do item i na máquina/planta j no período t
y_{ijt}	Variável binária, indicando a produção ou não do item i na máquina/planta j no período t
st_{ijt}	Tempo de preparo do item i na máquina/planta j no período t
vt_{ijt}	Tempo de produção do item i na máquina/planta j no período t

cap_{jt}	Capacidade da máquina/planta j (em unidade de tempo) no período t
J	Conjunto de plantas
d_{ijt}	Demanda do item i na planta j durante o período t
$h_{ci_{ij}}$	Custo unitário de estoque inicial para o item i na planta j
tp_{jlt}	Custo unitário de transferência de uma unidade de qualquer item da planta j para a planta l durante o período t
si_{ij0}	Quantidade de estoque inicial para o item i na planta j
wt_{ijlt}	Quantidade do item i a ser transferida da planta j para a planta l durante o período t
$cv1_{ijltk}$	Custo de produção, transferência e estoque total do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l dos períodos t até k
$ct1_{ijltk}$	Tempo necessário para a produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l dos períodos t até k
$co1_{ilt}$	Custo de estoque inicial para o item i na planta l , a fim de satisfazer a demanda do período 1 até o período t
$v1_{ijltk}$	Fração do plano de produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l dos períodos t até k
$vi1_{ilt}$	Fração do plano de estoque inicial para o item i na planta l , em que a demanda do item i na planta l é satisfeita pelos primeiros t períodos
$cv2_{ijltk}$	Custo de produção, transferência e estoque total do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l em um período posterior k
$ct2_{ijltk}$	Tempo necessário para a produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l em um período k
$co2_{ilt}$	Custo de estoque inicial para o item i na planta l , utilizado para satisfazer a demanda no período t

v_{2ijtk}	Fração do plano de produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l em um período posterior k
v_{i2ilt}	Fração do plano de estoque inicial para o item i na planta l , utilizada para satisfazer a demanda do período t
K	Conjunto de clientes
cap^P	Capacidade de produção de cada item
cap^V	Capacidade de cada veículo
cap^l_j	Capacidade da planta j
cap^{K_k}	Capacidade de estoque do cliente k
U_{kit}	Valor máximo de itens i que podem ser vendidos ao cliente k no período t
tc_{ijk}	Custo unitário de transporte do item i da planta j até o cliente k
cf_{jk}	Custo fixo para realizar o transporte da planta j até o cliente k
hk_{ik}	Custo unitário de estoque do item i no cliente k
ci_{ik}	Custo unitário de itens adicionais i para o cliente k
w_{kijt}	Número de unidades transportadas do item i da planta j até o cliente k no período t
h_{itk}	Quantidade em estoque do item i no cliente k no final do período t
v_{itk}	Quantidade adicional de itens i vendidos para o cliente k no período t
ve_{jtk}	Quantidade de veículos utilizados para transportar a produção da planta j para o cliente k no período t
I_j	Conjunto de itens i que podem ser produzidos pela máquina j
P_i	Conjunto de máquinas j que podem produzir o item i
sd_{itk}	Soma das demandas do item i dos períodos de t até k
bc_{it}	Custo de atraso do item i no período t
fc_{ij}	Custo para investir em flexibilidade para o item i na planta j
$Fmax$	Orçamento global para investir em flexibilidade
b_{it}	Quantidade atrasada do item i no período t
z_{ij}	Variável binária, indicando se a planta j é flexível para produzir o item i ou não

d_{kit}	Demanda do item i para o cliente k no período t
ec_{jt}	Custo unitário da utilização de hora extra na planta j no período t
sd_{it}	Soma das demandas do item i do período t até o final do horizonte de planejamento
tc_{ij}^k	Custo unitário de transporte para enviar a produção do item i da planta j para o cliente k
$Cost_{kijtl}$	Custo unitário da planta j para a produção do item i no período t para satisfazer a demanda no período l para o cliente k
x_{kijtl}	Número de unidades produzidas do item i na planta j no período t para satisfazer a demanda no período l para o cliente k
ov_{jt}	Número de unidades de hora extra utilizado na planta j no período t

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	O problema de dimensionamento de lotes	19
2.2	O problema de dimensionamento de lotes com máquinas/ plantas paralelas	22
2.3	Reformulações para o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas	28
2.4	O problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte	34
2.5	O problema de dimensionamento de lotes com flexibilidade de máquina	37
3	O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES COM PLANTAS FLEXÍVEIS E CUSTO DE TRANSPORTE	40
3.1	Modelagem matemática para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte	40
3.2	Exemplo numérico	42
4	ANÁLISE DE FLEXIBILIDADE	49
4.1	Geração de dados	49
4.2	Resultados computacionais	52
5	CONCLUSÕES OU CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

O gerenciamento em uma indústria, que tem por objetivo a conversão de matéria prima em produto final, deve seguir uma linha de qualidade eficaz, tendo a preocupação de atender uma demanda estabelecida com o menor custo possível. A decisão da melhor forma de se realizar a disposição dos recursos provenientes de uma indústria pode ser dividida em 3 tipos de planejamentos diferentes, que são: estratégico, tático e operacional (DE PAULA, 2015 [15]).

O planejamento estratégico é um termo comum no âmbito da administração, visando resultados a longo prazo, auxiliando na definição dos objetivos e estratégias para alcançá-los, sendo parte crucial para o empreendedorismo. Planejar estrategicamente tem por objetivo determinar o uso, da melhor forma possível, dos recursos disponíveis na empresa, aumentando sua produtividade, podendo assim, obter um grande impacto na área financeira e evitar desperdícios de matéria prima.

O planejamento tático tem por enfoque o planejamento a médio prazo e o auxílio das atividades decorrentes dos vários departamentos da indústria. Tem a função de detalhar o planejamento estratégico predeterminado e atribuir as responsabilidades, objetivos e atividades que cada unidade deve desenvolver para a obtenção dos fins desejados.

O planejamento operacional está voltado para a realização das atividades determinadas anteriormente, relacionado com o que fazer e o como fazer para se alcançar os objetivos desejados. Tem o enfoque de realizações a curto prazo, visando a otimização dos meios, como matéria prima, e a maximização dos resultados esperados, bem como a minimização de prejuízos relacionados a desperdícios ou mal planejamento da linha de produção.

O problema de dimensionamento de lotes situa-se nos níveis tático/operacional e consiste em determinar a quantidade de itens a serem produzidos ao longo de um horizonte de tempo finito, onde é necessário que uma certa demanda predeterminada seja atendida utilizando-se uma única ou várias máquinas. Os custos envolvidos neste problema são de produção, estoque e preparação de máquinas. Geralmente tal problema tem origem econômica, onde o objetivo é reduzir gastos provenientes de uma má elaboração do planejamento de produção (ARAUJO E RANGEL, 2014 [3]).

Com a evolução dos processos produtivos, bem como, das pesquisas relacionadas, nos últimos anos as decisões referentes ao problema de

dimensionamento de lotes vêm sendo tomadas de maneira integrada à outras decisões que também são importantes para o meio industrial. O presente trabalho trata do problema de dimensionamento de lotes, o qual é integrado ao problema do transporte considerando a possibilidade de possuir plantas flexíveis com capacidade limitada. Há a produção de diversos itens que podem ser produzidos por qualquer uma das plantas. O transporte dos itens produzidos aos clientes é feito levando em consideração um custo referente aos valores dos paletes, contêiners, etc. e os custos dos transportes em si, como valor de combustível, cobranças de pedágios, etc.

Embora a flexibilidade do processo seja, no geral, uma decisão estratégica tipicamente analisada em um contexto com demanda estocástica, o estudo feito por Fiorotto *et al.* (2018) [25] mostra que a flexibilidade do processo pode ter um valor significativo em um ambiente de planejamento determinístico de curto prazo. Neste contexto, a decisão de configuração de flexibilidade torna-se uma decisão tático/operacional que é tomada no início do horizonte de planejamento quando a demanda é conhecida. Assim, a configuração de flexibilidade permanece fixa para o horizonte de planejamento atual. Esta é, portanto, uma situação diferente quando comparada com o cenário estocástico onde as decisões de flexibilidade devem ser tomadas sem conhecer a demanda exata. Tal situação ocorre, por exemplo, na indústria de semicondutores, onde as máquinas devem ser qualificadas antes de serem capazes de produzir certos produtos, e essas decisões de qualificação são reavaliadas periodicamente (JOHNZÉN *et al.*, 2011 [34]; ROWSHANNAHAD *et al.*, 2015 [51]). A qualificação de uma máquina para um produto específico pode ser uma tarefa muito cara e, portanto, é feita periodicamente (ROWSHANNAHAD *et al.*, 2015 [51]).

Flexibilidades totais e parciais podem ser eficazes com diferentes tipos de problemas, sendo utilizadas em diversos contextos industriais (FIOROTTO *et al.*, 2018 [25]). O impacto do uso de flexibilidade tende a diminuir a perda de vendas, normalmente ocasionada pelo excesso de demanda em consideração à capacidade de produção. Em problemas em que se permite atraso no atendimento da demanda este problema tende a ser menos frequente, pois a demanda pode ser atendida com um certo atraso pelos períodos posteriores, ocasionando custos de atrasos, que em muitos casos podem prejudicar o funcionamento das fábricas ou até mesmo a perda de clientes a longo prazo.

Este trabalho tem por finalidade propor um modelo integrado de dois problemas clássicos da literatura (dimensionamento de lotes e transporte), assim proporcionando uma nova perspectiva para a análise de flexibilidade com relação às análises já encontradas no meio literário. A intenção de estudar este aspecto do modelo proposto é analisar, por um lado, até que ponto ter uma flexibilidade total é vantajosa ou não perante uma flexibilidade reduzida e, por outro lado, considerando o caso em que não se tem flexibilidade (plantas dedicadas), até que ponto a adição de flexibilidade pode auxiliar no atendimento da demanda sem necessidade de hora extra da planta. Mais especificamente, será analisado o quão interessante se torna considerar que as plantas não produzam todos os itens e sim que esta escolha seja tomada a partir de uma variável de decisão propriamente definida para este contexto.

O trabalho está dividido da seguinte forma. O Capítulo 1 é destinado a introdução deste trabalho, no Capítulo 2 é realizada uma revisão sobre o problema de dimensionamento de lotes, algumas de suas principais reformulações, bem como do problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte, além de uma pequena revisão de autores que trabalharam com análises de flexibilidade. No Capítulo 3 é apresentada a definição do problema estudado neste trabalho, o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte, além de sua modelagem matemática e um exemplo numérico para a melhor assimilação do problema. É feita no Capítulo 4, uma análise sobre a flexibilidade das plantas e como isso interfere na solução ótima do problema em questão. Além disso, são apresentados os experimentos computacionais realizados e, em seguida, os resultados provenientes dos estudos feitos. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões obtidas pelas análises realizadas, além de ideias para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo é destinado à realização de uma revisão bibliográfica dos problemas relacionados a este trabalho. São apresentados os problemas de dimensionamento de lotes com várias plantas, juntamente com reformulações para este problema que tem como objetivo a melhoria computacional dos resultados obtidos levando em consideração redefinições de variáveis e parâmetros. É definido o problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte e algumas de suas várias extensões e utilizações, bem como a integração de outros problemas clássicos com este problema. São apresentados alguns métodos de solução e heurísticas já estudadas que surtiram um efeito positivo perante a eficiência computacional dos problemas em questão. Posteriormente, serão apresentados alguns autores que trabalharam com análises de flexibilidade em um horizonte de planejamento com único e vários períodos, sendo o objetivo destas análises avaliar quais são os limites necessários para se impor flexibilidade nas máquinas, de forma a se aproximar da flexibilidade total em termos de qualidade da solução. Comumente, estas análises são realizadas em um contexto de demanda estocástica, porém alguns estudos já estão considerando um ambiente de planejamento determinístico de curto prazo.

2.1 O problema de dimensionamento de lotes

Há, na literatura, muitos trabalhos que lidam com este tipo de problema, dentre eles o *Economic Order Quantity* (EOQ) em 1913 (HARRIS, 1990 [29]). As revisões de Karimi *et al.* (2003) [36] e Brahimi *et al.* (2006) [8] são de grande importância para o contexto científico. O problema possui várias características particulares, podendo se adequar a vários contextos industriais, bem como sistemas de produção monoestágio e multiestágio, número de itens, plantas, restrição de capacidade, custos de preparo, entre outros (BAHL *et al.*, 1987 [5]). Uma descrição mais detalhada destas características pode ser encontrada em Pochet e Wolsey (2006) [49].

A formulação matemática para o problema de dimensionamento de lotes que será exibida a seguir possui um horizonte de planejamento finito dividido em períodos, produção com uma única máquina, único item e sem limite de capacidade (WAGNER; WHITIN, 1958 [65]). Para isso são necessários os seguintes dados:

$T = \{1, \dots, m\}$ períodos;

d_t : demanda no período t ;

hc_t : custo unitário de estoque no período t ;

sc_t : custo de preparo no período t ;

vc_t : custo de produção no período t .

Variáveis de decisão:

x_t : unidades produzidas no período t ;

y_t : variável binária, indicando a produção ou não no período t ;

s_t : quantidade estocada no período t .

Formulação matemática do problema:

$$\min \sum_{t=1}^m (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t) \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$x_t + s_{t-1} - s_t = d_t \quad \forall t \in T \quad (2.2)$$

$$x_t \leq \sum_{\tau=t}^m d_{\tau} y_t \quad \forall t \in T \quad (2.3)$$

$$y_t \in \{0,1\}, x_t \geq 0, s_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.4)$$

A função objetivo (2.1) minimiza a soma dos custos de preparo, produção e estoque. O balanço do estoque é feito pelas restrições (2.2), onde a demanda de cada período é satisfeita pela produção no atual período somado ao estoque do período anterior e o que for excedido será guardado no estoque do período em que a demanda está sendo satisfeita. As restrições (2.3) garantem que a produção em um período pode ser efetiva apenas se há o preparo da máquina neste período. Finalmente, as restrições (2.4) são os domínios das variáveis.

Para a solução deste problema foi desenvolvido o algoritmo de Wagner e Whitin (1958) [65] que é fundamentado na propriedade de otimalidade no qual só se produz quando o nível de estoque for nulo, ou seja, a quantidade produzida em um determinado período deve ser igual a soma das demandas de um conjunto de períodos posteriores. O algoritmo resolve o problema otimamente em tempo polinomial. Atualmente já existem implementações mais eficazes, como podemos observar em Evans (1985) [21], entre outros.

Em alguns casos é inadmissível considerar a capacidade como sendo ilimitada, tendo necessidade de realizar a inclusão de uma nova restrição de capacidade, em

que é levado em consideração o tempo de preparo e produção que uma máquina leva para realizar o processo produtivo. Com isso, são necessários os seguintes dados:

st_t : tempo de preparo no período t ;

vt_t : tempo de produção no período t ;

cap_t : capacidade da máquina (em unidade de tempo) no período t .

Obtemos assim, a seguinte restrição de capacidade para o modelo:

$$st_t y_t + vt_t x_t \leq cap_t \quad \forall t \in T \quad (2.5)$$

A produção de vários itens durante o horizonte de planejamento é algo muito utilizado em diversos setores industriais. Portanto foi proposto por Trigeiro *et al.* (1989) [61] uma formulação que tem por finalidade incluir um novo índice nas variáveis de decisão e parâmetros, ampliando o número de restrições. Considere a formulação apresentada abaixo, com $I = \{1, \dots, n\}$ o conjunto de itens ou produtos.

Formulação matemática do problema com vários itens:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m (sc_{it} y_{it} + vc_{it} x_{it} + hc_{it} s_{it}) \quad (2.6)$$

Sujeito a:

$$x_{it} + s_{it-1} - s_{it} = d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^n (st_{it} y_{it} + vt_{it} x_{it}) \leq cap_t \quad \forall t \in T \quad (2.8)$$

$$x_{it} \leq \sum_{\tau=t}^m d_{i\tau} y_{i\tau} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.9)$$

$$y_{it} \in \{0,1\}, x_{it} \geq 0, s_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.10)$$

A formulação segue as mesmas características que a formulação (2.1) - (2.4) com a inclusão das restrições (2.5) que limitam a capacidade da máquina e considerando a produção de vários itens distintos.

Para resolver esse modelo, Trigeiro *et al.* (1989) [61] propõem uma heurística que, consiste em relaxar as restrições de capacidade (2.8) utilizando-se da relaxação Lagrangiana, obtendo assim vários subproblemas que podem ser decompostos em problemas com um único item sem restrição de capacidade. Estes problemas podem ser resolvidos pelo método de Wagner e Whitin (1958) [65], gerando limitantes inferiores para o problema original. Normalmente, este método fornece soluções infactíveis para o problema original, pois as restrições de capacidade podem ser violadas. Para obter uma solução factível para este problema os autores propõem uma

heurística de factibilização baseada na transferência de produção entre períodos, atualizando os multiplicadores de Lagrange utilizando-se o método do subgradiente.

Para o problema de dimensionamento de lotes sem tempo de preparo, Thizy e Wassenhove (1985) [58], propõem um método utilizando a relaxação Lagrangiana, partindo da solução obtida com os subproblemas, as variáveis de preparo são fixadas e o problema original é associado a um problema de transporte, gerando assim um limitante superior para o problema original. Este mesmo problema é estudado por Chen e Thizy (1990) [12], onde são analisados e comparados vários tipos de relaxações. A relaxação Lagrangiana é utilizada e são comparados os algoritmos de otimização do subgradiente e de geração de colunas, sendo o último apontado como o algoritmo com maiores vantagens para a resolução do problema.

Uma heurística Lagrangiana para resolver problemas com tempos de produção constantes foi proposta por Campbell e Mabert (1991) [9], onde para resolver problemas relaxados são consideradas todas as combinações dos períodos de produção, e estas são avaliadas e a solução com menor custo é escolhida.

Buscando satisfazer a condição de folgas complementares, Araujo e Arenales (2000) [2] apresentam uma nova proposta para a última fase da heurística desenvolvida por Trigeiro *et al.* (1989) [61].

Chen e Chun (2003) [13] desenvolveram um algoritmo de solução relaxando as variáveis binárias de preparo e o modelo restante é resolvido por um algoritmo iterativo, no qual é necessário arredondar para cima as variáveis de preparo com valores não nulos. Os multiplicadores de Lagrange são atualizados utilizando-se o método do subgradiente adaptado para problemas relaxados resolvidos com aproximação. Posteriormente a solução é melhorada com um procedimento de busca local.

Degraeve e Jans (2007) [16] apresentam uma reformulação para o problema proposto por Trigeiro *et al.* (1989) [61] e mostram que a decomposição proposta por Manne (1958) [40] fornece apenas um limitante inferior para o problema. Assim, os autores descrevem um algoritmo *Branch-and-Price* e utilizam combinações de métodos simplex com a atualização do subgradiente. É observado bons resultados com o algoritmo *Branch-and-Price*, sendo superior a outros procedimentos existentes.

2.2 O problema de dimensionamento de lotes com máquinas/plantas paralelas

O problema definido anteriormente considera uma única máquina para a produção total dos itens, o que não acontece em várias indústrias, pois pode-se ter um número maior de máquinas trabalhando simultaneamente, neste caso temos um problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas.

Este problema pode ser dividido em duas categorias, máquinas paralelas idênticas e não idênticas, de forma que para máquinas não idênticas os custos de preparo e produção podem ser distintos. Para a modelagem deste problema é preciso o acréscimo de mais um índice nos parâmetros e variáveis de decisão indicando o uso de uma ou outra máquina. Para sua modelagem é preciso definir o conjunto de máquinas $P = \{1, \dots, o\}$.

A formulação matemática do problema é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^o \sum_{t=1}^m (sc_{ijt}y_{ijt} + vc_{ijt}x_{ijt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m hc_{it}s_{it} \quad (2.11)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^o x_{ijt} + s_{ijt-1} - s_{ijt} = d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^n (st_{ijt}y_{ijt} + vt_{ijt}x_{ijt}) \leq cap_{jt} \quad \forall j \in P, t \in T \quad (2.13)$$

$$x_{ijt} \leq \sum_{\tau=t}^m d_{i\tau}y_{i\tau} \quad \forall i \in I, j \in P, t \in T \quad (2.14)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in P, t \in T \quad (2.15)$$

$$x_{ijt} \geq 0, s_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in P, t \in T \quad (2.16)$$

A função objetivo (2.11) minimiza os custos de preparo, produção e estoque. O balanceamento de estoque é realizado pelas restrições (2.12). As restrições (2.13) são restrições de capacidade, considerando o tempo de preparo e produção em cada máquina. As restrições (2.14) garantem que os custos e tempo de preparo sejam contabilizados apenas quando há a produção dos itens referidos. E, finalmente, as restrições (2.15) e (2.16) definem o domínio das variáveis.

Uma heurística para o problema com restrição de capacidade, máquinas não idênticas e único item foi proposta por Sabbag (1993) [52], no qual partindo de uma solução infactível é realizado uma busca por factibilidade onde se utiliza a transferência da quantidade de produção entre os períodos e máquinas. Toledo (1998)

[59] estendeu a propriedade de Wagner e Whitin (1958) [65] para a formulação do problema considerando várias máquinas e um único item, são caracterizados os pontos extremos do conjunto de soluções, o que permitiu generalizar o algoritmo proposto por Evans (1985) [21].

Ozdamar e Barbarosoglu (1999) [47] propõem um algoritmo híbrido onde os subproblemas são resolvidos por aproximação, tal algoritmo combina a relaxação Lagrangiana e *simulated annealing*. Neste artigo é aplicado a relaxação às restrições de capacidade, e em Ozdamar e Barbarosoglu (2000) [48] um processo semelhante é aplicado às restrições de balanceamento de estoque.

Toledo e Armentano (2006) [60] aplicam a relaxação Lagrangiana nas restrições de capacidade e propõem uma heurística Lagrangiana para encontrar a solução do problema, em que normalmente a solução inicial é inactível, assim é utilizado um método de deslocamento da produção para chegar na factibilidade da solução.

Jans (2009) [33] apresenta um novo modelo para o problema com máquinas paralelas utilizando-se a inclusão de novas restrições baseadas no problema do caminho mínimo (EPPEN; MARTIN, 1987 [19]) com o intuito de quebrar a simetria do problema. Testes computacionais foram realizados e uma melhoria significativa no tempo de solução foi obtida.

Fiorotto e Araujo (2014) [23] desenvolveram uma heurística Lagrangiana para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com vários itens, tempo de preparação e máquinas paralelas não relacionadas com o objetivo de obter boas soluções para este problema e bons limites inferiores para certificar a qualidade das soluções. Com base em uma reformulação forte do problema como um problema de caminho mínimo, a relaxação Lagrangiana é aplicada às restrições de demanda (restrição de fluxo) e o problema relaxado é decomposto por períodos e por máquinas. O método de otimização de subgradiente é usado para atualizar os multiplicadores de Lagrange. Resultados computacionais mostram que o método é eficiente, produz limites inferiores de boa qualidade e limites superiores competitivos.

Considerando o mesmo problema, Fiorotto *et al.* (2015) [24] aplicaram a decomposição de Dantzig-Wolfe para uma reformulação do problema. O objetivo é obter limites inferiores de alta qualidade. Além disso o problema foi resolvido aplicando dois métodos de solução que combinam a relaxação Lagrangiana e a decomposição de Dantzig-Wolfe de forma híbrida. Experiments computacionais utilizando conjuntos

de dados da literatura são apresentados e mostram que os métodos híbridos produzem limitantes inferiores de excelente qualidade e limites superiores competitivos, quando comparados com os limites produzidos por outros métodos da literatura.

Wu *et al.* (2018) [69] com o intuito de reduzir as emissões de carbono relacionadas ao consumo de energia da indústria manufatureira, introduziram restrições de emissão de carbono no problema de dimensionamento de lotes multi-item capacitado com máquinas paralelas não idênticas. O problema foi formulado como um modelo de programação inteira mista e foram propostos métodos de relaxação Lagrangeana e de geração de colunas para melhorar os limites inferiores. Além disso, foi aplicada uma heurística para resolver o problema sendo comparada com outras abordagens eficientes encontradas na literatura. Resultados computacionais indicam que tal heurística é computacionalmente competitiva e pode obter resultados superiores.

Problemas de dimensionamento de lotes com vários itens constituem ainda um problema que pode envolver várias plantas ou fábricas para a produção dos mesmos. O problema pode ser fragmentado em plantas independente ou dependentes entre si, utilizando-se de custos para a transferência, uma planta pode satisfazer a demanda de outra.

A formulação mostrada a seguir é a encontrada em Sambasivan e Schmidt (2002) [53], acrescida de variáveis de estoque inicial. Para a descrição da formulação são precisos os seguintes novos dados:

$J = \{1, \dots, r\}$: conjunto de plantas;

d_{ijt} : demanda do item i na planta j durante o período t ;

$h_{ci_{ij}}$: custo unitário de estoque inicial para o item i na planta j ;

tp_{jlt} : custo unitário de transferência de uma unidade de qualquer item da planta j para a planta l durante o período t ;

Variáveis de decisão:

si_{ij0} : quantidade de estoque inicial para o item i na planta j ;

wt_{ijlt} : quantidade do item i a ser transferida da planta j para a planta l , ($j \neq l$), durante o período t .

A formulação matemática do problema é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r hci_{ij} si_{ij0} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m \left(sc_{ijt} y_{ijt} + hc_{ijt} s_{ijt} + \sum_{l=1}^r tp_{jlt} wt_{ijlt} \right) \quad (2.17)$$

Sujeito a:

$$x_{ijt} + s_{ijt-1} - s_{ijt} + \sum_{s=1}^r wt_{isjt} - \sum_{l=1}^r wt_{ijlt} = d_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^n (st_{ijt} y_{ijt} + vt_{ijt} x_{ijt}) \leq cap_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.19)$$

$$x_{ijt} \leq \sum_{l=1}^r \sum_{\tau=t}^m d_{il\tau} y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.20)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.21)$$

$$x_{ijt} \geq 0, s_{ijt} \geq 0, s_{ij0} \geq 0, s_{ijr} = 0, wt_{ijlt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j, l \in J, j \neq l, t \in T \quad (2.22)$$

A função objetivo (2.17) minimiza a soma dos custos de preparo, estoque e transferência. As restrições (2.18) garantem o balanceamento de estoque, onde é preciso considerar a quantidade em estoque, o lote produzido no período juntamente com a quantidade possivelmente transferida e o que será transferido para outras plantas e deixado em estoque para os períodos posteriores, sempre visando atender a demanda exata em cada período. As restrições (2.19) são de capacidade. As restrições (2.20) são restrições de preparo, e por fim, tem-se em (2.21) e (2.22) o domínio das variáveis.

Um dos primeiros trabalhos que consideram o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas foi realizado por Bhatnagar *et al.* (1993) [7], onde o objetivo é coordenar os planos de produção, estoque e transferências de modo que o desempenho de empresas fosse melhorado. Devido ao problema ser de difícil solução, foram necessárias heurísticas a fim de obter bons limitantes para o problema.

Sambasivan e Schmidt (2002) [53] realizaram uma análise considerando valores de transferência nulos e a presença de apenas um armazém de estoque, assim, o modelo pode ser considerado como um problema de programação em máquinas paralelas, com cada planta sendo uma máquina, assim concluíram que a solução ótima considerando o planejamento da produção integrando as várias máquinas é equivalente a soma das soluções dos subproblemas que consideram uma única planta.

Utilizando o problema integrado com o problema de transporte entre as plantas, Matta e Miller (2004) [41] apresentam uma formulação de programação inteira mista na qual desenvolvem desigualdade válidas para fortalecer a relaxação linear aplicada ao modelo.

Sambasivan e Yahya (2005) [54] propuseram uma heurística baseada na relaxação Lagrangiana aplicada as restrições de capacidade utilizando o modelo apresentado em Sambasivan e Schmidt (2002) [53]. Os testes realizados permitiram concluir que tal heurística obtém boas soluções e o número de itens é o elemento que mais causa distorção no valor do GAP. Tendo como base o modelo apresentado por Sambasivan e Schmidt (2002) [53], Sambasivan e Yahya (2005) [54], utilizam uma heurística de aproximação Lagrangiana para um problema real de uma empresa de aço laminado, concluindo que a heurística empregada obtém boas soluções e que o número de itens interfere diretamente no GAP fornecido pela sua resolução.

Nascimento *et al.* (2010) [45] consideraram o modelo proposto por Sambasivan e Schmidt (2002) [53], no qual cada planta possui seu próprio estoque e propuseram uma heurística baseada na meta-heurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) que quando comparada aos resultados obtidos por Sambasivan e Yahya (2005) [54] se mostrou competitiva e com bons resultados.

Guimarães *et al.* (2012) [28] apresentam um modelo de programação inteira mista para um problema aplicado a uma empresa de bebidas, os resultados obtidos descrevem a interdependência dos planejamentos de produção e distribuição.

Em Melega *et al.* (2013) [42] é utilizado o estoque inicial visando evitar a infactibilidade do modelo, o que também é feito em Vanderbeck (1988) [62] com a permissão de atraso no atendimento da demanda, visto que não foi utilizado nenhum procedimento para evitar possíveis problemas infactíveis.

Carvalho e Nascimento (2016) [10] apresentam novas heurísticas Lagrangeanas focadas na resolução de problemas de dimensionamento de lotes de empresas compostas por múltiplas plantas, cada uma delas com um horizonte de planejamento finito dividido em períodos, no qual todas as fábricas produzem os mesmos itens e têm suas demandas a serem atendidas sem considerar atrasos. Para produzir seus itens, todas as fábricas têm uma única máquina com tempos e custos de preparação e uma capacidade limitada de produção, considerando que transferências de lotes de produção entre plantas e armazenamento de itens são permitidas. As heurísticas propostas além de resolver heurísticamente todas as

instâncias de *Benchmark*, superaram significativamente a melhor heurística da literatura.

Wu *et al.* (2017) [68] estudaram uma generalização do problema estudado em Toledo e Armentano (2006) [60] e Fiorotto *et al.* (2015) [24]. Foram propostas várias formulações matemáticas e suas decomposições Dantzig-Wolfe por itens e por períodos, e uma análise com relação a obtenção de limites inferiores e superiores. Com os valores da solução, foram construídos modelos lineares generalizados, que fornecem informações sobre os valores ideais, bem como informações sobre a probabilidade de uma variável de preparo obter um valor não nulo em um ponto ótimo. Em seguida, foi desenvolvido um método analítico de ramificação e seleção, que caracteriza a primeira pesquisa de uso de informações de probabilidade para melhorar a qualidade da solução. Este modelo é diferente de abordagens que usam valores de solução da relaxação linear como por exemplo, os estudos de Danna *et al.* (2005) [14], Fischetti *et al.* (2005) [27] e Pochet e Wolsey (2006) [49]. Foram realizados testes computacionais e as comparações com outros métodos indicam que o método de otimização é computacionalmente competitivo e pode obter melhores resultados.

Com o intuito de suprir lacunas com relação aos estudos do problema de dimensionamento de lotes capacitado com múltiplas plantas, Carvalho e Nascimento (2018) [11] apresentam um novo modelo matemático e um método *kernel search*, para resolver o problema. Através de experimentos computacionais, foi possível mostrar o excelente desempenho do método proposto para instâncias grandes, os experimentos também demonstram que o método *kernel search* superou os métodos de última geração para resolver o problema de dimensionamento de lotes capacitado com múltiplas plantas.

2.3 Reformulações para o problema de dimensionamento de lote com várias plantas

Com o objetivo de obter melhores limitantes inferiores aumentando a eficiência dos métodos de solução, a reformulação de problemas a partir da redefinição de variáveis de decisão e a inclusão de inequações válidas ao problema tem sido de grande eficiência no âmbito computacional. Há duas reformulações muito estudadas na literatura que se baseiam no problema do caminho mínimo (*Shortest Path - SP*)

apresentada por Eppen e Martin (1987) [19] e no problema de localização de facilidade (*Facility Location - FL*) apresentada por Krarup e Bilde (1977) [37].

A seguir são apresentadas as formulações baseadas nos problemas de caminho mínimo e localização de facilidade, respectivamente, com várias plantas. Para isso, devemos considerar os novos dados para cada formulação, mostrados a seguir.

Dados para o problema baseado no problema do caminho mínimo:

$cv1_{ijltk}$: custo total de produção, transferência e estoque do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l dos períodos t até k , com $k \geq t$, isto é,

$$cv1_{ijltk} = (vc_{ijt} + tp_{ilt}) \sum_{a=t}^k d_{ila} + \sum_{a=t+1}^k \sum_{b=t}^{a-1} hc_{ilb} d_{ila}$$

$ct1_{ijltk}$: tempo necessário para produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l dos períodos t até k , com $k \geq t$, isto é,

$$ct1_{ijltk} = vt_{ijt} \sum_{a=t}^k d_{ila}$$

$co1_{ilt}$: custo de estoque inicial para o item i na planta l , a fim de satisfazer a demanda do período 1 até o período t , isto é,

$$co1_{ilt} = \sum_{a=1}^t hci_{ilt} d_{ila} + \sum_{s=2}^t \sum_{u=1}^{a-1} hc_{ilu} d_{ils}$$

Variáveis de decisão:

$v1_{ijltk}$: fração do plano de produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l dos períodos t até k , com $k \geq t$;

$vi1_{ilt}$: fração do plano de estoque inicial para o item i na planta l , em que a demanda do item i na planta l é satisfeita pelos primeiros t períodos.

A formulação matemática para o problema de dimensionamento de lotes baseada no problema do caminho mínimo é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{t=1}^m co1_{ilt} vi1_{ilt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m sc_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^m cv1_{ijltk} v1_{ijltk} \quad (2.23)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^m v1_{ilk} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m v1_{ijltk} = 1 \quad \forall i \in I, l \in J \quad (2.24)$$

$$v1_{ilt-1} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{t-1} v1_{ijlkt-1} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=t}^m v1_{ijltk} \quad \forall i \in I, l \in J, t \in T, t \geq 2 \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^n st_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{k=t}^m ct1_{ijltk} v1_{ijltk} \leq cap_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.26)$$

$$\sum_{k=t}^m v1_{ijltk} \leq y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, l \in J, t \in T \quad (2.27)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.28)$$

$$v1_{ijltk} \geq 0, v1_{ilt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j, l \in J, t \in T, j \neq l \quad (2.29)$$

A função objetivo (2.23) minimiza custos de estoque inicial, preparo e produção, transferência e estoque. As restrições (2.24) e (2.25) são restrições associadas às restrições de fluxo para o problema de caminho mínimo, onde para cada item, um fluxo unitário é enviado a rede obrigando o atendimento da demanda sem atrasos. As restrições (2.26) são de capacidade e as restrições (2.27) asseguram que todo par $\{i,j\}$ fixo possa atender a demanda de qualquer planta dos períodos de t até k . Finalmente, as restrições (2.28) e (2.29) definem o domínio das variáveis.

Dados para o problema baseado no problema de localização de facilidades:

$cv2_{ijltk}$: custo total de produção, transferência e estoque do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l em um período posterior k , com $k \geq t$, isto é,

$$cv2_{ijltk} = (vc_{ijt} + tp_{jt})d_{ilk} + \sum_{b=t}^{k-1} hc_{ib}d_{ilk}$$

$ct2_{ijltk}$: tempo necessário para a produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l em um período k , com $k \geq t$, ou seja,

$$ct2_{ijltk} = vt_{ijt}d_{ilk}$$

$co2_{ilt}$: custo de estoque inicial para o item i na planta l , utilizado para satisfazer a demanda no período t , isto é,

$$co2_{ilt} = hci_{ilt}d_{ilt} + \sum_{b=1}^{t-1} hc_{ib}d_{ilt}$$

Variáveis de decisão:

$v2_{ijltk}$: fração do plano de produção do item i , na planta j durante o período t , utilizado para satisfazer a demanda do item i na planta l em um período posterior k , com $k \geq t$;

$vi2_{ilt}$: fração do plano de estoque inicial para o item i na planta l , utilizada para satisfazer a demanda do período t .

A formulação matemática do problema baseada no problema de localização de facilidades é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{t=1}^m co2_{ilt} vi2_{ilt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m sc_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^m cv2_{ijltk} v2_{ijltk} \quad (2.30)$$

Sujeito a:

$$vi2_{ilk} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m v2_{ijltk} = 1 \quad \forall i \in I, l \in J, t \in T \quad (2.31)$$

$$\sum_{i=1}^n st_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{k=t}^m ct2_{ijltk} v2_{ijltk} \leq cap_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.32)$$

$$v2_{ijltk} \leq y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, l \in J, t \in T, l \neq t \quad (2.33)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.34)$$

$$v2_{ijltk} \geq 0, vi2_{ilt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j, l \in J, t \in T, l \neq t \quad (2.35)$$

A função objetivo (2.30) minimiza custos de estoque inicial, preparo e produção, transferência e estoque. As restrições (2.31) asseguram que a demanda de um item seja satisfeita com a produção em uma planta dos períodos t até k e o estoque disponível nesta planta. (2.32) são restrições de capacidade, já as restrições (2.33) asseguram que só é considerado o tempo e o custo de preparo quando há produção naquele período. Por fim, as restrições (2.34) e (2.35) definem o domínio das variáveis.

Chen e Thizy (1990) [12] desenvolveram heurísticas para a resolução do problema de dimensionamento de lotes com vários itens e sem tempo de preparo, foi provado que o problema é NP-difícil e foram realizadas análises dos limitantes referentes a reformulações e decomposição por itens e períodos do problema.

Alfieri *et al.* (2002) [1] desenvolveram procedimentos heurísticos baseados na relaxação linear aplicados nas reformulações do problema de dimensionamento de lotes. Os experimentos demonstraram que as reformulações são 60\% melhores que os comparados com o problema original, e a formulação por caminho mínimo, por sua

vez, se mostrou mais eficiente que a baseada pelo problema de localização de facilidade.

Em Suerie e Standtler (2003) [56] os autores propõem uma heurística de decomposição onde a abordagem é baseada em formulações estendidas com a utilização de inequações válidas, no qual foram empregados os métodos de *Branch-and-Cut* e *Cut-and-Branch* para a obtenção de soluções factíveis e foram obtidos bons resultados.

Jans e Degraeve (2004) [32] utilizaram a reformulação do problema baseado no problema do caminho mínimo para aplicar a técnica de relaxação Lagrangiana nas restrições de fluxo. Encontram-se assim, limitantes inferiores melhores resolvendo os subproblemas resultantes da decomposição, no qual equivalem ao problema da mochila de múltipla escolha. Para resolver tais subproblemas em cada nó, os autores desenvolveram um método de *Branch-and-Bound*.

Brahimi *et al.* (2006) [8] apresentam uma revisão dos trabalhos que utilizam o problema de dimensionamento de lotes com um único item, as reformulações do problema baseadas nos problemas de caminho mínimo e localização de facilidade e modelagens para o problema sem estoque, além de apresentarem extensões para o problema capacitado com um único item, inequações válidas e métodos de solução por aproximação e exatos.

Denizel e Sural (2006) [17] comparam as reformulações baseadas nos problemas de caminho mínimo e localização de facilidade com tempo de preparo e desenvolvem heurísticas baseadas na relaxação linear de tais reformulações, obtendo valores equivalentes para as funções objetivos e ainda 30% melhores quando comparadas à formulação original.

Denizel *et al.* (2008) [18] demonstram a equivalência das reformulações e como apontado por Alfieri *et al.* (2002) [1] e Denizel e Sural (2006) [17], a formulação baseada no problema do caminho mínimo se mostra mais rápida computacionalmente.

Sural *et al.* (2009) [57] trabalham com o problema com tempo de preparo tendo apenas custos de estoques envolvidos na função objetivo. Utilizam a relaxação Lagrangiana nas restrições de demanda do problema baseado no problema de localização de facilidade obtendo limitantes superiores pela decomposição por períodos fazendo uso do algoritmo do subgradiente. Para a melhoria da solução

utilizam ainda uma heurística baseada no método *Branch-and-Bound*, no qual os procedimentos se mostraram até 21% mais eficazes que os encontrados na literatura.

Para o problema de dimensionamento de lotes monoestágio sem restrição de capacidade e com substituição de itens, Lang e Domschke (2010) [38] desenvolveram uma formulação baseada no problema de localização de facilidades com inclusão de inequações válidas obtendo resultados computacionais melhores que os apresentados pelo problema original.

Wu *et al.* (2011) [67] mostram que as formulações fortes baseadas nos problemas de caminho mínimo e localização de facilidades produzem os mesmos limitantes inferiores, partindo disso foi desenvolvido um método de solução eficaz que se mostrou superior comparado a outras abordagens encontradas na literatura.

Silva e Toledo (2012) [55] propõem um modelo baseado no problema de localização de facilidades e o compara com o modelo proposto por Sambasivan e Schmidt (2002) [53], concluindo que o modelo apresenta melhores resultados.

Fiorotto e Araujo (2012) [22] e Jans (2009) [33] estenderam a formulação inicialmente proposta por Jans e Degraeve (2004) [32], para o caso com máquinas paralelas sem e com relação entre elas, respectivamente.

Melega *et al.* (2013) [42] propõem reformulações para o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas, baseadas no problema de caminho mínimo e localização de facilidades, além de propor um método de busca de limitantes utilizando relaxação Lagrangiana e por fim uma heurística de factibilidade. Para as reformulações foi observado uma melhoria de cerca de 12% no valor da relaxação e com relação a heurística Lagrangiana o resultado foi positivo, mostrando-se competitiva para todas as classes de dados utilizados, obtendo limitantes inferiores melhores em relação ao CPLEX para a maioria das configurações de dados.

Araujo *et al.* (2015) [4], para aumentar a eficiência dos métodos de solução, substituíram as restrições de entrada de fluxo e as de balanceamento pela soma das restrições de balanceamento de fluxo, propondo assim, uma formulação equivalente para (2.23) - (2.29), denominada reformulação baseada no problema de caminho mínimo transformada. Com o mesmo objetivo, além de reduzir o conjunto de soluções possíveis, Araujo *et al.* (2015) [4] substituíram as restrições de preparo por inequações de precedência (WOLSEY, 1989 [66]) para propor uma formulação equivalente para (2.30) - (2.35), denominando-se reformulação baseada no problema de localização de facilidades com restrição de precedência.

2.4 O problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte

Os custos com transporte de mercadoria representam uma parte importante na quantidade de gastos de uma empresa, porém este é, na sua grande parte, negligenciado quando as decisões relativas ao dimensionamento de lotes são tomadas. De modo geral, o problema de dimensionamento de lotes vem sendo limitado à custos de produção, preparo e estoque, o que muitas vezes não representa de forma real o que é empregado em diversas fábricas.

A seguir será apresentada uma formulação para o problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte proposta por Melo e Wolsey (2012) [43] que tem por objetivo determinar o cronograma de manufatura, transporte e estoque de produtos de modo a minimizar os custos totais desse processo de produção e distribuição, visando suprir a demanda de clientes, realizando a confecção e distribuição dos itens desejados, além de respeitar a capacidade de produção de cada planta existente no ciclo de produção que o problema envolve. Os custos de produção e transporte são compostos por custos fixos e custos variáveis. Para a formulação matemática do problema considere os seguintes novos dados:

$K = \{1, \dots, p\}$: conjunto de clientes;

cap^P : capacidade de produção de cada item;

cap^V : capacidade de cada veículo (ilimitado ou constante);

cap_j^I : capacidade da planta j ;

cap_k^K : capacidade de estoque do cliente k ;

U_{it}^k : valor máximo de itens i que podem ser vendidos ao cliente k no período t ;

tc_{ijk} : custo unitário de transporte do item i da planta j até o cliente k ;

cf_{jk} : custo fixo para realizar o transporte da planta j até o cliente k ;

hk_{ik} : custo unitário de estoque do item i no cliente k ;

ci_{ik} : custo unitário de itens adicionais i para o cliente k ;

Variáveis de decisão:

w_{ijt}^k : número de unidades transportadas do item i da planta j até o cliente k no período t ;

h_{itk} : quantidade em estoque do item i no cliente k no final do período t ;

v_{itk} : quantidade adicional de itens i vendidos para o cliente k no período t ;

ve_{jtk} : quantidade de veículos utilizados para transportar a produção da planta j para o cliente k no período t .

A formulação matemática do problema proposta em Melo e Wolsey (2012) [43] é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m (hc_{ij}s_{ijt} + vc_{ij}x_{ijt} + sc_{ij}y_{ijt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^p hk_{ik}h_{itk} + tc_{ijk}w_{ijt}^k + cf_{jk}ve_{jtk} - \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^p ci_{ik}v_{itk} \quad (2.36)$$

Sujeito a:

$$s_{ijt-1} + x_{ijt} = \sum_{k=1}^p w_{ijt}^k + s_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.37)$$

$$h_{it-1k} + \sum_{j=1}^r w_{ijt}^k = d_{it}^k + v_{itk} + h_{itk} \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (2.38)$$

$$x_{ijt} \leq cap^P y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.39)$$

$$\sum_{i=1}^n w_{ijt}^k \leq cap^V ve_{jtk} \quad \forall k \in K, j \in J, t \in T \quad (2.40)$$

$$\sum_{i=1}^n (st_{ij}y_{ijt} + vt_{ij}x_{ijt}) \leq cap_j^J \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.41)$$

$$\sum_{i=1}^n h_{itk} \leq cap_k^K \quad \forall k \in K, t \in T \quad (2.42)$$

$$0 \leq v_{itk} \leq U_{it}^k \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (2.43)$$

$$s_{ijt}, x_{ijt} \in \mathbb{R}_+^{n \times r \times x \times m}, h_{itk} \in \mathbb{R}_+^{n \times p \times x \times m}, w_{ijt}^k \in \mathbb{R}_+^{n \times r \times x \times p \times m} \quad (2.44)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\}, ve_{jtk} \in \mathbb{Z}_+^{n \times p \times x \times m} \quad (2.45)$$

A função objetivo (2.36) minimiza os custos de produção, transporte, preparo e estoque considerando plantas e clientes. As restrições (2.37) garantem o equilíbrio nas plantas, para que a quantidade transportada seja necessariamente a demanda solicitada pelos clientes e (2.38) são as restrições de equilíbrio para os clientes, onde a quantidade recebida deve ser igual a demanda requerida. As restrições (2.39) garantem que a produção só seja feita quando há preparação no período daquela planta. Já as restrições (2.40) determinam a quantidade de caminhões necessários para a realização do transporte da mercadoria até seu destino. Em (2.41) tem-se as

restrições de capacidade de produção, enquanto (2.42) fornecem limites para o estoque de determinado cliente no período. As restrições (2.43) limitam a quantidade de vendas adicionais. Por fim, as restrições (2.44) e (2.45) determinam o domínio das variáveis.

Baumol e Vinod (1970) [6] consideram custos e tempo de transporte, além das rotas e estoque dos produtos e propõem dois métodos de solução para o problema integrado com transporte. Erenguç *et al.* (1999) [20] apresentam uma revisão geral dos trabalhos que envolvem dimensionamento de lotes e distribuição de demanda, além de apresentarem modelos considerando três fases distintas da cadeia de suprimentos.

Para Vroblefski *et al.* (2000) [63] os custos logísticos são expressivos quando relacionados a problemas de produção e tendem a ser diretamente proporcionais ao montante de produtos transportados. Assim como Erenguç *et al.* (1999) [20], Rizk e Martel (2001) [50] realizam uma revisão geral sobre os problemas integrados, começando com trabalhos mais simples e acrescentando características como restrições de capacidade, estoque e integrando o problema com uma cadeia de suprimentos. Finalizando com um modelo que inclui múltiplas linhas de produção e entrega para os clientes da cadeia de suprimentos.

Em Lee *et al.* (2005) [39], os autores estudam o problema de dimensionamento de lotes com transporte e consideram que a capacidade de transporte está associada ao número de paletes (ou contêineres), onde o objetivo é minimizar os paletes utilizados propondo uma heurística baseada na representação do modelo como sendo um problema de fluxo de redes.

Norden e Velde (2005) [46] afirmam que os custos de transporte representam boa parte do custo dos produtos de uma empresa, com isso, propõem um modelo para um problema de uma empresa europeia que realiza a distribuição de seus produtos para seu armazém. Algum tempo depois o mesmo problema é estudado por Molina *et al.* (2009) [44] que propõem um método heurístico combinando relaxação Lagrangiana e Surrogate. Em testes computacionais foi demonstrado que as soluções das relaxações são equivalentes, porém no método utilizando a relaxação Lagrangiana/Surrogate os limitantes foram obtidos com um menor número de iterações.

Melo e Wolsey (2012) [43] introduzem duas formulações para o problema de dimensionamento de lotes com custos de transporte. A formulação inicial fornece

limitantes fracos visto que há a necessidade de um aprimoramento para a obtenção de resultados satisfatórios. Assim, a formulação estendida, que fornece limitantes aprimorados, porém com complexidade computacional elevada, é uma forma de melhorar soluções iniciais já levantadas. Os autores desenvolvem uma heurística híbrida que utiliza a formulação estendida para fornecer boas ligações e fixar variáveis para que a formulação inicial restrita à essas fixações obtenha uma solução heurística. Para instâncias de porte médio, o método heurístico híbrido fornece soluções boas e até melhores que as encontradas pelo otimizador MIP com um tempo de execução maior.

2.5 O problema de dimensionamento de lotes com flexibilidade de máquina

Utilizar limitantes para o uso da flexibilidade em problemas de dimensionamento de lotes é uma questão importante em alguns contextos industriais visto que, considerar a flexibilidade total das máquinas pode gerar gastos extras quando há um custo envolvido nesta situação. Por outro lado, considerar flexibilidade em problemas em que se utiliza máquinas dedicadas (cada máquina produz apenas um tipo de item), também pode trazer benefícios, reduzindo atrasos e a utilização de hora extra. Poucas pesquisas sobre o assunto foram feitas até o momento.

O modelo a seguir é proposto em Fiorotto *et al.* (2018) [25] em que a possibilidade de investir em flexibilidade é utilizada. Para a formulação deste modelo é preciso definir os seguintes dados:

I_j : conjunto de itens i que podem ser produzidos pela máquina j ;

P_i : conjunto de máquinas j que podem produzir o item i ;

sd_{itk} : soma das demandas do item i dos períodos de t até k ($k \geq t$);

bc_{it} : custo de atraso do item i no período t ;

fc_{ij} : custo para investir em flexibilidade para o item i na máquina j ;

$Fmax$: orçamento global para investir em flexibilidade.

Variáveis de decisão:

b_{it} : quantidade atrasada do item i no período t ;

z_{ij} : variável binária, indicando se a máquina j é flexível para produzir o item i ou não.

A formulação matemática do problema é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^o \sum_{t=1}^m (sc_{ijt}y_{ijt} + vc_{ijt}x_{ijt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m (hc_{it}s_{it} + bc_{it}b_{it}) \quad (2.46)$$

Sujeito a:

$$s_{it-1} + b_{it} + \sum_{j=1}^o x_{ijt} = d_{it} + s_{it} + b_{it-1} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.47)$$

$$x_{ijt} \leq \min \left\{ \frac{(cap_{jt} - st_{ijt})}{vt_{ijt}}, sd_{i1m}y_{ijt} \right\} \quad \forall i \in I, j \in P, t \in T \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^n (st_{ijt}y_{ijt} + vt_{ijt}x_{ijt}) \leq cap_{jt} \quad \forall j \in P, t \in T \quad (2.49)$$

$$y_{ijt} \leq z_{ij} \quad \forall i \in I, j \in P, t \in T \quad (2.50)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^o fc_{ij}z_{ij} \leq Fmax \quad (2.51)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\}, z_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in P, t \in T \quad (2.52)$$

$$x_{ijt} \geq 0, s_{it} \geq 0, s_{i0} = 0, s_{im} = 0, b_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in P, t \in T \quad (2.53)$$

A função objetivo (2.46) minimiza os custos de preparo, produção, estoque e atraso. As restrições (2.47) são restrições de balanceamento do estoque, visando satisfazer a demanda e suprir os eventuais atrasos de períodos anteriores. As restrições (2.48) garantem o preparo da máquina para a realização da produção, enquanto garantir que a capacidade de cada máquina não seja excedida fica por conta das restrições (2.49). As restrições (2.50) garantem que a máquina seja preparada para a produção de um item apenas se esta for flexível para a produção de tal, enquanto as restrições (2.51) limitam os gastos para a inclusão de flexibilidade nas máquinas. Finalmente, o domínio das variáveis é definido pelas restrições (2.52) e (2.53).

Jordan e Graves (1995) [35] foi o primeiro artigo a considerar a eficácia da utilização de uma quantidade limitada de flexibilidade, mostrando que uma configuração encadeada de produtos e plantas pode ter um desempenho muito eficaz quando comparado ao caso com flexibilidade total em termos de rendimento e uso da capacidade. O conceito de encadeamento é uma das configurações de flexibilidade parcial mais utilizadas para estudos na literatura, em particular, para estudos em indústrias automotivas (GRAVES E TOMLIN, 2003 [27]).

Jans e Degraeve (2004) [31] discutem um problema com flexibilidade parcial aplicado à indústria de pneus, onde nem todos os pneus podem ser produzidos em todos os tipos de aquecedores. Xiao *et al.* (2015) [64] propõem uma heurística lagrangiana para o problema com máquinas paralelas capacitadas com escalonamento, onde nem todas as máquinas são capazes de produzir todos os itens.

Em Fiorotto *et al.* (2018) [25] é analisado o valor da flexibilidade do processo no contexto de um problema de dimensionamento de lote determinístico de curto prazo, onde a decisão de flexibilidade é tomada no início do horizonte de planejamento. Para realizar as análises, os autores propõem dois modelos, um modelo para determinar a melhor cadeia longa, dado que existem muitas configurações alternativas de cadeia longa com um custo total diferente e outro modelo de otimização que considera a possibilidade de investir em flexibilidade e determina a melhor configuração de flexibilidade com um determinado orçamento disponível. Os resultados computacionais obtidos mostram que quase todos os benefícios da flexibilidade do processo são obtidos ao adicionar limite na quantidade de ligações a serem realizadas, a menos de capacidades muito apertadas e apenas para cenários homogêneos. Entretanto é possível observar que em casos de capacidades muito apertadas a inclusão de apenas 50% das ligações entre máquinas e produtos é o suficiente para obter melhores resultados quando comparados aos casos que consideram flexibilidade total. Ainda assim, com algumas análises mais aprofundadas é possível afirmar que a heterogeneidade do custo de estoque, a heterogeneidade da demanda e a presença de tempos de preparo têm impacto significativo na flexibilidade.

3 O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES COM PLANTAS FLEXÍVEIS E CUSTO DE TRANSPORTE

Este capítulo é destinado à definição dos parâmetros e variáveis e, para a apresentação da modelagem proposta para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte. Além disso, será apresentado um exemplo para facilitar a compreensão do modelo proposto, bem como ilustrar como devem ser interpretados os resultados fornecidos a partir deste exemplo.

3.1 Modelagem matemática para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte

Produzir vários itens em um horizonte de planejamento finito é comum em diversos contextos industriais, no qual minimizar gastos referentes a produção, estoque e preparação é o enfoque principal. O transporte de determinada produção pode afetar diretamente na rentabilidade de uma indústria, desta forma algumas preferem realizar, por si só, o transporte do produto final até o seu cliente, podendo gerar uma economia significativa com o fornecimento do produto e controle. Observa-se que esta economia pode ser alcançada a partir de modelos que auxiliam nas tomadas de decisão de fluxo do produto a ser entregue de fornecedor para cliente.

Investir em flexibilidade é disponibilizar a possibilidade de uma planta produzir um determinado item ou não, tal decisão é tomada no início do horizonte de planejamento e determina a forma com que a produção e o transporte serão direcionados durante todos os períodos que compõem o horizonte de planejamento.

O modelo matemático proposto une dois aspectos relevantes e impactantes quando pensamos no lucro de uma indústria, a produção e o transporte de seus itens confeccionados.

A seguir será proposto um modelo matemático para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte.

Para a formulação matemática do problema considere os seguintes dados:

$I = \{1, \dots, n\}$: conjunto de itens;

$J = \{1, \dots, r\}$: conjunto de plantas;

$K = \{1, \dots, p\}$: conjunto de clientes;

$T = \{1, \dots, m\}$: conjunto de períodos;

d_{it}^k : demanda do item i para o cliente k no período t ;
 hc_{it} : custo unitário de estoque do item i no período t ;
 ec_{jt} : custo unitário da utilização de hora extra na planta j no período t ;
 sc_{ijt} : custo de preparo da planta j para o item i no período t ;
 vc_{ijt} : custo de produção da planta j para o item i no período t ;
 st_{ijt} : tempo de preparo da planta j para o item i no período t ;
 vt_{ijt} : tempo de produção da planta j para o item i no período t ;
 sd_{it} : soma das demandas do item i do período t até o final do horizonte de planejamento;
 cap_{jt} : capacidade (em unidade de tempo) da planta j no período t ;
 fc_{ij} : custo de flexibilidade do item i na planta j ;
 $Fmax$: quantidade de ligações disponíveis para investir em flexibilidade;
 tc_{ij}^k : custo unitário de transporte para enviar a produção do item i da planta j para o cliente k ;
 $Cost_{ijtl}^k = vc_{ijt} + tc_{ij}^k + \sum_{s=t+1}^l hc_{is}$: custo unitário da planta j para a produção, estoque e transporte do item i no período t para satisfazer a demanda do cliente k no período l .

Variáveis de decisão:

y_{ijt} : variável binária, indicando a produção ou não do item i na planta j no período t ;
 z_{ij} : variável binária, indicando se a planta j é flexível para produzir ou não o item i ;
 x_{ijtl}^k : número de unidades produzidas do item i na planta j no período t para satisfazer a demanda do cliente k no período l , com $t \leq l$;
 ov_{jt} : número de unidades de hora extra utilizados na planta j no período t .

A formulação matemática do problema é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m sc_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^p Cost_{ijtl}^k x_{ijtl}^k + \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m ec_{jt} ov_{jt} \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^l x_{ijtl}^k = d_{il}^k \quad \forall i \in I, t \in T, k \in K \quad (3.2)$$

$$x_{ijtl}^k \leq sd_{it} y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t, l \in T, k \in K \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(st_{ijt} y_{ijt} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^m vt_{ijtl} x_{ijtl}^k \right) \leq cap_{jt} + ov_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (3.4)$$

$$y_{ijt} \leq z_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r fc_{ij} z_{ij} \leq Fmax \quad (3.6)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\}, z_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (3.7)$$

$$x_{ijtl}^k \geq 0, ov_{jt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t, l \in T, k \in K \quad (3.8)$$

A função objetivo (3.1) minimiza custos de preparação, transporte, produção, estoque e hora extra. As restrições (3.2) asseguram que toda a demanda seja satisfeita no horizonte de planejamento. Em seguida, as restrições (3.3) garantem a preparação da planta antes da efetiva produção, já as restrições (3.4) são as restrições de capacidade do problema e considera a possibilidade de utilização de hora extra a um certo custo. As restrições (3.5) garantem que a planta possa produzir um item apenas se ela for flexível para tal produção. Nas restrições (3.6) é garantido que o orçamento disponível para investir em flexibilidade não seja extrapolado. Finalmente, as restrições (3.7) e (3.8) definem o domínio das variáveis.

Pela definição da variável de produção, o modelo não aceita a possibilidade de estoque e atraso no último período, o que pode deixar algumas instâncias ineficazes pelo fato de não ter uma capacidade suficiente, portanto a inclusão de uma variável de hora extra ov_{jt} soluciona o problema de infactibilidade com instâncias de capacidade reduzida. O uso desta variável, entretanto, gera um custo extra proveniente do não cumprimento da restrição (3.4) com a capacidade disponível.

3.2 Exemplo numérico

Nesta seção, apresenta-se um exemplo numérico a fim de facilitar a compreensão do problema.

Para a formulação (3.1)-(3.8) vamos considerar um exemplo pequeno com $|I| = 3$, $|J| = 3$, $|K| = 4$ e $|T| = 2$, e os parâmetros serão apresentados nas Tabelas 1, 2, 3 e 4. Para este exemplo a capacidade é considerada constante em todas as plantas e igual a 160, com um total de capacidade disponível igual a 960, o orçamento para investir em flexibilidade é $Fmax = 4$ e o custo de flexibilidade fc_{ij} constante igual a 1.

Tabela 1 – Parâmetros de preparo e produção nos períodos 1 e 2

Item	Planta	sc	vc	st	vt
1	1, 2 e 3	1000	0	40	1
2	1, 2 e 3	600	0	50	1
3	1, 2 e 3	400	0	20	1

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 2 – Parâmetros de estoque e hora extra

Item	Período	hc	ec
1	1 e 2	5	300
2	1 e 2	3	300
3	1 e 2	2	300

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 3 – Parâmetros de demanda

Item/Período/Cliente	d	Item/Período/Cliente	d
1,1,1	108	2,2,1	89
1,1,2	117	2,2,2	0
1,1,3	0	2,2,3	0
1,1,4	80	2,2,4	102
1,2,1	107	3,1,1	117
1,2,2	92	3,1,2	107
1,2,3	99	3,1,3	110
1,2,4	91	3,1,4	78
2,1,1	0	3,2,1	86
2,1,2	0	3,2,2	120
2,1,3	0	3,2,3	0
2,1,4	105	3,2,4	119

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 4 – Custos de transporte

Item/Planta/Cliente	tc	Item/Planta/Cliente	tc
1,1,1	0,265800677	2,2,3	0,098407316
1,1,2	0,222182657	2,2,4	0,273411777
1,1,3	0,277852478	2,3,1	0,162996932
1,1,4	0,145968300	2,3,2	0,242258126
1,2,1	0,066000000	2,3,3	0,069971422
1,2,2	0,265580496	2,3,4	0,278111488
1,2,3	0,098407316	3,1,1	0,265800677
1,2,4	0,273411777	3,1,2	0,222182657
1,3,1	0,162996932	3,1,3	0,277852478
1,3,2	0,242258126	3,1,4	0,145968300
1,3,3	0,069971422	3,2,1	0,066000000
1,3,4	0,278111488	3,2,2	0,265580496
2,1,1	0,265800677	3,2,3	0,098407316
2,1,2	0,222182657	3,2,4	0,273411777
2,1,3	0,277852478	3,3,1	0,162996932
2,1,4	0,145968300	3,3,2	0,242258126
2,2,1	0,066000000	3,3,3	0,069971422
2,2,2	0,265580496	3,3,4	0,278111488

Fonte: Elaborado pela autora

Nas Tabelas 1 e 2 encontram-se os valores utilizados para custos de preparo, produção, estoque e hora extra, além dos tempos de preparo e produção e as demandas utilizadas se encontram na Tabela 3.

Os custos de transporte disponíveis Tabela 4 foram obtidos conforme será mostrado na Seção 4.1 utilizando-se das 3 primeiras plantas e dos 4 primeiros clientes.

Os valores ótimos para as variáveis y_{ijt} e z_{ij} são apresentados na Tabela 5 e a Tabela 6 mostra os valores não nulos da variável x_{ijtl}^k , onde indica quais itens serão

produzidos em cada planta e em que momento será realizado o transporte para os clientes. O valor ótimo da função objetivo é 294499,53.

Tabela 5 – Variáveis de decisão sobre a flexibilidade e produção ou não do item na planta

Item/Planta	z	Item/Planta/Período	y
1,1	1	1,1,1	1
		1,1,2	1
1,2	0	1,2,1	0
		1,2,2	0
1,3	0	1,3,1	0
		1,3,2	0
2,1	0	2,1,1	0
		2,1,2	0
2,2	0	2,2,1	0
		2,2,2	0
2,3	1	2,3,1	1
		2,3,2	0
3,1	0	3,1,1	0
		3,1,2	0
3,2	1	3,2,1	1
		3,2,2	1
3,3	1	3,3,1	0
		3,3,2	1

Fonte: Elaborado pela autora

Neste exemplo foram realizados 6 preparos para produção e a capacidade utilizada neste horizonte de planejamento foi de 1917, sendo este valor obtido utilizando a capacidade total mais os valores obtidos com a variável de hora extra, disponível na Tabela 7. O modelo chegou a uma solução ótima para o exemplo com um tempo de 24,4 segundos.

Tabela 6 – Variável de decisão sobre quantidade produzida

Item/Planta/Período/Período/Cliente	x
1,1,1,1,1	108
1,1,1,1,2	117
1,1,1,1,4	80
1,1,2,2,1	107
1,1,2,2,2	92
1,1,2,2,3	99
1,1,2,2,4	91
2,3,1,1,4	105
2,3,1,2,1	89
2,3,1,2,4	102
3,2,1,1,1	117
3,2,1,1,2	107
3,2,1,1,3	110
3,2,1,1,4	78
3,2,2,2,1	20
3,2,2,2,2	120
3,3,2,2,1	66
3,3,2,2,4	119

Fonte: Elaborado pela autora

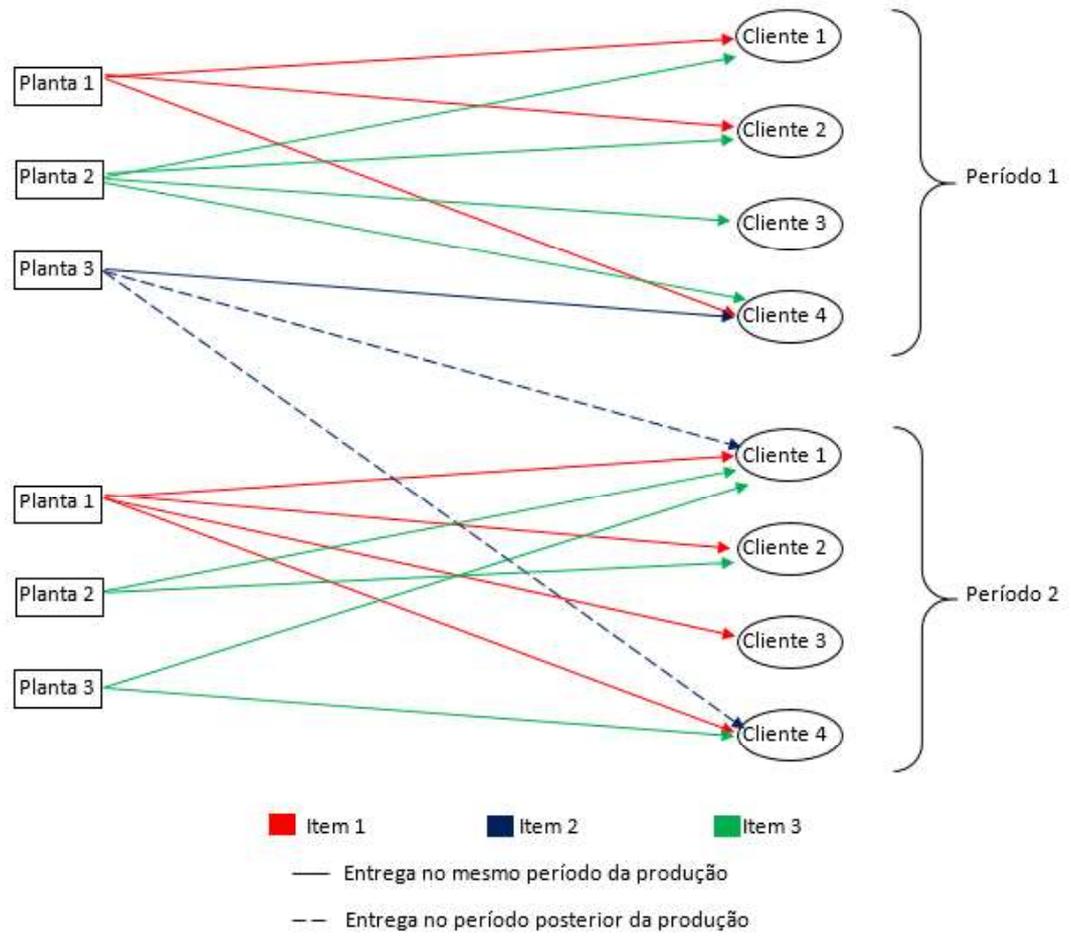
Tabela 7 – Variáveis referente ao tempo extra de capacidade para a produção dos itens no horizonte de planejamento

Planta/Período	ov
1,1	185
1,2	269
2,1	272
2,2	0
3,1	286
3,2	45

Fonte: Elaborado pela autora

A Figura 1 mostra um esquema de como será realizada a distribuição dos itens produzidos entre as plantas e os clientes em cada período. O item 1 deve ser produzido apenas pela planta 1 nos dois períodos, enquanto o item 2 deve ser produzido unicamente no período 1 pela planta 3 e o item 3 deve ser produzido no primeiro período pela planta 2 e no segundo período pelas plantas 2 e 3. O estoque será utilizado para o item 2 na planta 3, onde o transporte da demanda deste item deve ser realizado apenas no período posterior da sua produção, sendo necessário o armazenamento, já para os demais itens sua produção e entrega são realizados no mesmo período.

Figura 1 – Produção e distribuição dos itens para os clientes



Fonte: Elaborado pela autora.

4 ANÁLISE DE FLEXIBILIDADE

Neste capítulo, inicialmente, descreveremos a maneira como os dados serão gerados, para, posteriormente, apresentarmos os resultados computacionais que nos permitirão analisar o impacto da flexibilidade das plantas na solução do problema em si.

4.1 Geração de dados

A geração dos dados utilizados nos testes deste trabalho consiste na adaptação de um conjunto de dados utilizado em Fiorotto *et al.* (2018) [25], o qual foi adaptado de um conjunto de dados padrão proposto por Trigeiro *et al.* (1989) [61].

Os dados utilizados consistem em 20 instâncias iniciais, F1-F20 que se caracteriza por conter 6 itens e 15 períodos. Já o conjunto F1-F20 (4 itens) foi obtido a partir da redução dos dados das instâncias iniciais F1-F20 logo após estas passarem pelas adaptações impostas pelo modelo, mostradas a seguir.

A partir das instâncias iniciais foi preciso utilizar-se da geração de dados para complementar elementos que estariam em falta para os dados exigidos no modelo proposto neste trabalho. Foi acrescentado o conjunto de clientes com 12 elementos, fixo para todas as instâncias, e o número de plantas é considerado igual ao número de itens para cada conjunto de dados.

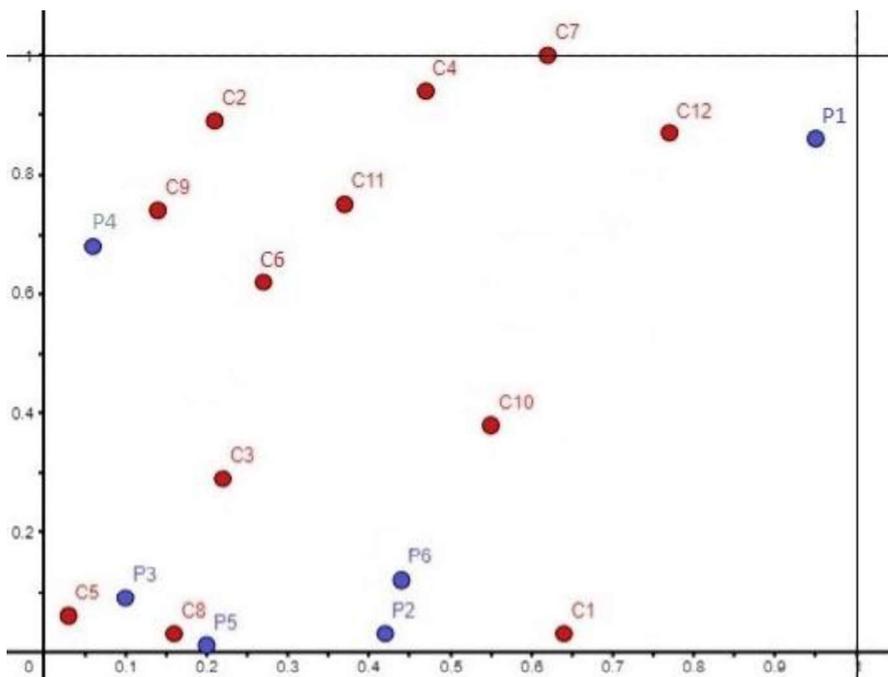
Os demais parâmetros são herdados das instâncias originais e são dados da seguinte forma: tempo de produção vt_{ijt} fixo a uma unidade de tempo, custo unitário de estoque hc com variação de 1 a 5 unidades monetárias, custo de preparação sc_{ijt} variando de 400 a 1000 unidades monetárias, tempo de preparação st_{ijt} variando entre 10 e 50 unidades e custo de produção vc_{ijt} nulos. Além disso, são utilizados cinco níveis de capacidade, 80, 90, 100, 110 e 120, sendo estas disponíveis para cada planta envolvida no processo de produção.

Foram acrescentados, além disso, custos de flexibilidade fc_{ij} fixos iguais a uma unidade monetária para todos os itens em todas as plantas, os custos extras de *overtime* ec_{jt} foram utilizados com um valor fixo de 300, sendo este valor 100 vezes a média do custo de estoque. A demanda d_{it}^k precisou ser complementada, visto que seria necessária uma quantidade maior de demanda para cada item, pois no modelo

proposto a demanda é solicitada por diversos clientes, não um único apenas. Assim, a demanda seguiu os mesmos processos de geração que o descrito por Trigeiro *et al.* (1989) [61], onde para cada item, a demanda média foi de 100 por período, gerada a partir de uma distribuição uniforme, para simular na prática a tendência da demanda 25% das demandas em cada um dos 4 primeiros períodos foram anuladas aleatoriamente.

Por fim, foram utilizados os custos de transporte tc_{ij}^k calculados a partir das localizações das plantas e clientes, onde um par ordenado limitado entre 0 e 1 em um quadrado no plano cartesiano com área de 1 cm^2 é gerado de forma uniforme para cada planta e cliente, como mostrado na Figura 2, sendo P1 - P6 plantas e C1-C12 os clientes envolvidos nas intâncias, assim é calculada a distância euclidiana entre cada planta e cada cliente e o valor final é obtido multiplicando cada distância por um escalar $\beta = 0,3$ (MELO E WOLSEY, 2012 [43]).

Figura 2 – Dispersão de plantas e clientes



Fonte: Elaborado pela autora.

O enfoque das análises está voltado para os valores escolhidos para o parâmetro $Fmax$, que consiste no orçamento total disponível para investir em flexibilidade. Um dos casos analisados será considerado com plantas dedicadas, ou seja, cada planta deverá produzir apenas um item, assim este $Fmax$ deve ser igual ao número de plantas e itens, e para comparativos serão utilizados valores como 100%,

80%, 50% e 20%, onde 100% significa que todas as plantas produzem todos os itens, ou seja, flexibilidade total, enquanto os demais valores são percentuais calculados sobre esse maior orçamento para flexibilidade, reduzindo assim o nível de flexibilidade, por exemplo, no caso de 80% tomando como base a flexibilidade total, considera-se que apenas 80% dos *links* podem ser utilizados.

Foram gerados um total de 1000 instâncias, no qual suas características são apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8 – Conjunto de dados

Flexibilidade	Capacidade	Conjuntos	Quantidade
Fmax 1 = Dedicada	80	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	90	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	100	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	110	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	120	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
Fmax 2 = 20%	80	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	90	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	100	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	110	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	120	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
Fmax 3 = 50%	80	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	90	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	100	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	110	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	120	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
Fmax 4 = 80%	80	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	90	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	100	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	110	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	120	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias

Flexibilidade	Capacidade	Conjuntos	Quantidade
Fmax 5 = Total	80	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	90	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	100	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	110	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
	120	F1-F20 (4 itens) e F1-F20	40 instâncias
Total			1000 instâncias

Fonte: Elaborado pela autora

4.2 Resultados computacionais

Os dados foram processados utilizando o *solver* CPLEX 12.6 com interface do *software* Visual Studio 2012 em linguagem algébrica C. O computador utilizado para a realização das análises possui sistema operacional Windows 10 Pro de 64 bits, processador Intel(R) Core(TM) i7-4770 CPU @ 3.40GHz e memória RAM de 16,0 GB. Os critérios de parada foram o GAP igual ou inferior a 0,1% ou tempo limite de uma hora (3600 segundos).

A Tabela 9 apresenta os limitantes superiores e permite avaliar a porcentagem de diferença entre o valor obtido pela configuração dedicada com as demais configurações de flexibilidade analisadas. Esta análise deve ser feita em conjunto com a Tabela 11, que mede a qualidade das soluções. É nítido a melhoria dos valores nas instâncias de 4 itens, no qual todos os níveis de flexibilidade, 20%, 50%, 80% e flexibilidade total, obtiveram resultados eficientemente melhores, sendo com 80% da flexibilidade o melhor valor obtido, com 94,58%, redução de 5,42% em média com relação a plantas dedicadas, enquanto a flexibilidade total alcançou o valor de 94,59%, obtendo uma redução de 5,41% nos limitantes superiores.

A melhoria a partir dos níveis de capacidade superiores a 100 para instâncias com 6 itens é visível, sendo, em média, melhor em todos os níveis de flexibilidade. Uma análise importante a ser considerada é que para dados com capacidades de 80 e 90, será inevitavelmente necessário investir em flexibilidade, visto que o uso de hora extra pode interferir no valor das soluções. Apesar disso, observa-se que para tais

níveis de capacidade todas as configurações de flexibilidades abordadas para instâncias de 6 itens encontraram soluções piores do que a configuração de plantas dedicadas. Isso ocorre porque para configurações diferentes da dedicada, o *solver* CPLEX não consegue encontrar boas soluções para estes níveis de capacidade (veja Tabela 11).

É importante ressaltar que todos os níveis de capacidade e flexibilidade, exceto com 80% da flexibilidade e 80 de capacidade para instâncias com 4 itens, que apresentou um aumento de apenas 0,04% com relação a plantas dedicadas, foram tão bons ou melhores do que quando consideramos que cada planta possa produzir apenas um item. Indicando que a flexibilidade pode reduzir gastos indesejáveis quando é permitido a utilização desta ferramenta em diferentes instâncias de pequeno porte.

Tabela 9 – Limitante Superior (Dedicado)

Item	Capacidade	Fmax 1	Fmax 2	Fmax 3	Fmax 4	Fmax 5
4	80	100	100,00	99,96	100,04	99,99
	90	100	99,98	89,19	88,99	89,18
	100	100	99,78	85,76	85,56	85,53
	110	100	99,74	99,34	99,15	99,12
	120	100	99,74	99,35	99,15	99,12
Média		100	99,85	94,72	94,58	94,59
6	80	100	102,21	104,59	101,18	101,00
	90	100	105,45	93,84	89,39	90,85
	100	100	89,17	88,74	88,59	88,58
	110	100	99,63	99,26	98,53	99,16
	120	100	99,62	99,27	99,17	99,18
Média		100	99,22	97,14	95,37	95,75

Fonte: Elaborado pela autora

O mesmo conceito da Tabela 9 é abordado na Tabela 10 na qual porcentagem é calculada, agora, a partir dos valores obtidos no processamento das instâncias onde

todas as plantas produzem todos os itens, ou seja, nas instâncias onde as plantas possuem flexibilidade total.

Para instâncias com 4 itens, o nível de 80% da flexibilidade se mostra melhor, sendo 0,01% menor, e para todos os seus níveis de capacidade a diferença é inferior ou igual a 0,05% a mais do que quando considerado a flexibilidade total. Além disso, com metade da flexibilidade a diferença, em média, é de apenas 0,14% superior, o que vale lembrar que o GAP neste caso é 0,4% maior do que para o caso com flexibilidade total das plantas, indicando que poderíamos obter uma melhoria ainda maior quando os GAPs se equipararem.

Quando comparamos as demais reduções de flexibilidade com a possibilidade de termos todas as plantas produzindo todos os itens (flexibilidade total), podemos notar uma igualdade ou até uma melhora quando consideramos 80% da flexibilidade, ou até mesmo apenas 50% dela, levando em consideração os valores obtidos de GAP.

Ainda é possível identificar uma pequena diferença entre os limitantes superiores médios para as instâncias com 6 itens e com flexibilidade reduzida, de forma que os valores para níveis com 20% e 50% são maiores que o da flexibilidade total, mas a diferença é menor do que 5% em relação a flexibilidade total. Além disso, com nível reduzido de 80% de flexibilidade total o resultado é ainda mais promissor, sendo 0,41% menor que o limitante superior obtido com o caso de flexibilidade total. Vale ressaltar novamente, que é importante analisar o valor do GAP obtido, pois este nos dirá se, com os critérios de parada, o valor pode ser melhorado ou não, sendo assim, para GAPs altos este valor com um tempo maior de processamento e métodos de soluções convenientes pode ser reduzido.

Tabela 10 – Limitante Superior (Total)

Item	Capacidade	Fmax 1	Fmax 2	Fmax 3	Fmax 4	Fmax 5
4	80	100,01	100,01	99,97	100,05	100
	90	112,13	112,10	100,01	99,78	100
	100	116,92	116,67	100,27	100,04	100
	110	100,89	100,63	100,22	100,03	100
	120	100,89	100,63	100,23	100,04	100
Média		106,17	106,01	100,14	99,99	100

Item	Capacidade	Fmax 1	Fmax 2	Fmax 3	Fmax 4	Fmax 5
6	80	99,01	101,19	103,55	100,18	100
	90	110,08	116,08	103,29	98,40	100
	100	112,89	100,66	100,18	100,01	100
	110	100,85	100,47	100,10	99,36	100
	120	100,83	100,45	100,10	100,00	100
Média		104,73	103,77	101,35	99,59	100

Fonte: Elaborado pela autora

Nas Tabelas 11 e 12 são mostrados o GAP e o tempo de processamento, respectivamente, médios de cada conjunto de dados por nível de capacidade. Essas duas tabelas em conjunto mostram que o modelo é de difícil solução quando se considera níveis de flexibilidade diferentes da dedicada.

Para as 500 instâncias de 4 itens a diferença entre os GAPs com 50% e 80% da flexibilidade e a flexibilidade total é igual ou inferior que 0,4%. Sendo provada a otimalidade em todos os níveis de capacidade com apenas 20% da flexibilidade e para níveis de 110 e 120 de capacidade, a otimalidade é provada para todas as porcentagens de flexibilidade. O restante obteve soluções factíveis para todos os dados estudados. Já para as 500 instâncias com 6 itens, foi possível provar a otimalidade para algumas instâncias, especialmente para níveis de capacidade iguais a 110 e 120.

Tabela 11 – GAP

Item	Capacidade	Fmax 1	Fmax 2	Fmax 3	Fmax 4	Fmax 5
4	80	0,00	0,05	1,07	1,09	1,03
	90	0,00	0,01	12,73	11,06	11,15
	100	0,00	0,05	0,88	1,06	0,67
	110	0,00	0,01	0,05	0,03	0,05
	120	0,00	0,01	0,05	0,03	0,06
Média		0,00	0,03	2,95	2,65	2,59

Item	Capacidade	Fmax 1	Fmax 2	Fmax 3	Fmax 4	Fmax 5
6	80	0,00	3,75	5,75	3,12	2,91
	90	0,00	29,52	27,13	21,70	23,41
	100	0,00	2,20	2,20	2,09	1,91
	110	0,00	0,09	0,11	0,10	0,09
	120	0,00	0,09	0,14	0,10	0,10
Média		0,00	7,13	7,07	5,42	5,68

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 12 – Tempo

Item	Capacidade	Fmax 1	Fmax 2	Fmax 3	Fmax 4	Fmax 5
4	80	0,14	200,74	2870,68	2797,64	2787,87
	90	0,16	196,87	3600,00	3600,00	3600,00
	100	0,15	15,41	2836,08	2889,07	2321,31
	110	0,15	4,40	57,29	26,32	11,06
	120	0,15	4,39	93,43	80,93	14,25
Média		0,15	84,36	1891,50	1878,79	1746,90
6	80	0,30	3600,00	3562,44	3497,47	3404,96
	90	0,27	3600,00	3600,00	3600,00	3600,00
	100	0,27	3600,00	3600,00	3600,00	3600,00
	110	0,27	689,10	1014,49	612,75	352,51
	120	0,28	887,30	1096,50	921,28	723,85
Média		0,28	2475,28	2574,69	2446,30	2336,26

Fonte: Elaborado pela autora

A Tabela 13 é composta pela percentagem da capacidade utilizada levando como base a capacidade média disponível em cada conjunto de dados. Os valores acima de 100% estão relacionados à utilização de hora extra no período da produção dos insumos, visto que em casos com capacidade reduzida, a capacidade utilizada é superior à disponível no período em questão.

A capacidade e os custos de hora extra estão diretamente ligados ao alto valor dos limitantes superiores, sendo estes prejudicados quando consideramos baixos níveis de capacidade já que são utilizados valores altos para hora extra, sendo assim, juntamente com o GAP, fatores que interferem na solução do problema quando comparado aos casos com plantas dedicadas e com flexibilidade total.

Tabela 13 – Capacidade utilizada

Item	Capacidade	Fmax 1	Fmax 2	Fmax 3	Fmax 4	Fmax 5
4	80	114,60	114,60	114,58	114,57	114,58
	90	101,86	101,86	101,99	101,99	102,00
	100	91,68	91,68	91,73	91,73	91,74
	110	83,34	83,34	83,34	83,34	83,34
	120	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40
Média		93,57	93,57	93,61	93,61	93,61
6	80	114,30	114,30	114,63	114,34	114,32
	90	101,60	101,66	101,90	101,83	101,84
	100	91,44	91,48	91,48	91,49	91,49
	110	83,13	83,13	83,13	83,13	83,13
	120	76,20	76,20	76,20	76,20	76,20
Média		93,33	93,35	93,47	93,40	93,40

Fonte: Elaborado pela autora

As Tabelas 14, 15, 16, 17 e 18 são compostas pelas porcentagens que os custos de preparo, hora extra (*overtime*), transporte e estoque assumem na solução obtida em cada conjunto de dados, com valores disponíveis de flexibilidade sendo com plantas dedicadas, 20%, 50%, 80% e flexibilidade total, respectivamente.

Tabela 14 – Custos envolvidos em plantas dedicadas (*Fmax 1*)

Item	Capacidade	Preparo	Overtime	Transporte	Estoque
4	80	1,33	98,18	0,46	0,03
	90	6,67	88,83	2,31	2,19
	100	62,47	13,75	21,67	2,11
	110	74,24	0,00	25,76	0,00
	120	74,24	0,00	25,76	0,00
Média		43,79	40,15	15,19	0,87
6	80	1,39	98,11	0,47	0,03
	90	7,33	87,82	2,45	2,40
	100	65,39	10,82	21,89	1,89
	110	74,92	0,00	25,08	0,00
	120	74,92	0,00	25,08	0,00
Média		44,79	39,35	14,99	0,86

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 15 – Custos envolvidos em plantas dedicadas (*Fmax 2*)

Item	Capacidade	Preparo	Overtime	Transporte	Estoque
4	80	1,33	98,18	0,46	0,03
	90	6,67	88,85	2,29	2,19
	100	62,60	13,78	21,50	2,11
	110	74,44	0,00	25,56	0,00
	120	74,44	0,00	25,56	0,00
Média		45,75	40,16	15,71	0,91

Item	Capacidade	Preparo	Overtime	Transporte	Estoque
6	80	1,37	98,04	0,45	0,13
	90	7,13	88,23	2,30	2,34
	100	74,09	0,00	24,19	1,72
	110	75,20	0,00	24,80	0,00
	120	75,21	0,00	24,79	0,00
Média		46,60	37,25	15,31	0,84

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 16 – Custos envolvidos em plantas dedicadas ($F_{max} 3$)

Item	Capacidade	Preparo	Overtime	Transporte	Estoque
4	80	1,34	98,06	0,45	0,15
	90	7,91	87,05	2,49	2,55
	100	73,80	0,00	24,44	1,76
	110	74,74	0,00	25,26	0,00
	120	74,73	0,00	25,27	0,00
Média		46,50	37,02	15,58	0,89
6	80	1,56	97,10	0,41	0,93
	90	8,68	84,40	2,43	4,48
	100	74,53	0,00	23,85	1,62
	110	75,48	0,00	24,52	0,00
	120	75,47	0,00	24,53	0,00
Média		47,14	36,30	15,15	1,41

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 17 – Custos envolvidos em plantas dedicadas (F_{max} 4)

Item	Capacidade	Preparo	Overtime	Transporte	Estoque
4	80	1,35	97,90	0,44	0,30
	90	7,92	86,92	2,44	2,72
	100	74,08	0,00	24,27	1,65
	110	74,88	0,00	25,12	0,00
	120	74,88	0,00	25,12	0,00
Média		46,62	36,97	15,48	0,93
6	80	1,43	97,14	0,43	1,00
	90	8,94	84,87	2,56	3,64
	100	74,74	0,00	23,72	1,54
	110	75,39	0,00	24,61	0,00
	120	75,55	0,00	24,45	0,00
Média		47,21	36,40	15,15	1,24

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 18 – Custos envolvidos em plantas dedicadas (F_{max} 5)

Item	Capacidade	Preparo	Overtime	Transporte	Estoque
4	80	1,34	97,97	0,44	0,25
	90	7,91	87,10	2,43	2,57
	100	74,15	0,00	24,24	1,61
	110	74,90	0,00	25,10	0,00
	120	74,91	0,00	25,09	0,00
Média		46,64	37,01	15,46	0,89

Item	Capacidade	Preparo	Overtime	Transporte	Estoque
6	80	1,44	97,19	0,43	0,95
	90	8,90	85,02	2,51	3,57
	100	74,72	0,00	23,71	1,57
	110	75,55	0,00	24,45	0,00
	120	75,54	0,00	24,46	0,00
Média		47,23	36,44	15,11	1,22

Fonte: Elaborado pela autora

Em todos os casos é evidente a interferência dos custos de hora extra em qualquer que seja o valor disponível para a flexibilidade, sendo este um dos grandes pontos que, quando reduzidos significativamente, pode oferecer bons resultados com relação aos limitantes superiores obtidos.

A tendência é que quanto maior o nível de flexibilidade menor será a parcela de custo relacionada ao *overtime*. No entanto, a dificuldade de se encontrar boas soluções novamente atrapalhou a análise precisa desta característica.

5 CONCLUSÕES OU CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho propõe-se um modelo matemático para o problema de dimensionamento de lotes com plantas flexíveis e custo de transporte. É apresentado um exemplo para a compreensão do modelo e auxiliar na interpretação dos resultados obtidos. Por fim, foi realizado uma análise com relação à flexibilidade das plantas, onde o objetivo, por um lado, é mostrar que com valores reduzidos de capacidade pode-se obter os mesmos benefícios que os valores obtidos considerando a flexibilidade total das plantas, na qual todas as plantas são habilitadas para produzir todos os itens. Por outro lado, pretende-se mostrar que em casos com configurações dedicadas (sem flexibilidade) pode ser importante investir em flexibilidade de forma a reduzir custos com *overtime*. Foram analisados um total de 1000 instâncias adaptadas da literatura, onde os testes computacionais foram obtidos a partir da utilização do pacote CPLEX 12.6 para todos os níveis de flexibilidade envolvidos com critérios de parada de GAP igual ou inferior a 0,1% ou tempo limite de 3600 segundos.

Houve uma nítida melhoria dos valores obtidos a partir dos níveis de capacidade superiores a 100 para instâncias com 6 itens e uma melhor performance em todos os níveis de capacidade para instâncias com 4 itens, comparado ao caso de plantas dedicadas. Em comparação ao caso com flexibilidade total, o modelo se mostra competitivo, inclusive sendo equiparado quando utilizado 50% de sua flexibilidade total disponível e sendo melhor com apenas 80% desta flexibilidade.

A dificuldade de resolução do modelo dificultou uma análise precisa sobre flexibilidade, pois não foi possível comparar diretamente os casos em que o valor do GAP foi muito diferente. Pode-se concluir, com base nas análises feitas anteriormente que com maiores níveis de capacidade o modelo se mostra satisfatório com baixos níveis de flexibilidade comparado aos casos com plantas dedicadas e com flexibilidade total das mesmas, possibilitando menores valores para os limitantes superiores, o que gera um custo reduzido para instâncias com apenas 20%, 50% ou 80% da flexibilidade disponível, sendo assim, o modelo proposto neste trabalho possibilita, de maneira eficiente, a viabilidade de diferentes usos dos níveis de flexibilidade, se adequando de forma conveniente aos aspectos disponíveis no âmbito industrial.

A ideia de analisar a flexibilidade de um modelo matemático vem acoplado à diversas outras análises de aspectos relacionados ao modelo que podem ser

realizadas, como por exemplo, a que nível o custo de hora extra pode interferir no limitante superior nos diferentes níveis de flexibilidade, bem como os custos de estoque e a homogeneidade da demanda. Inclusive é interessante levar em consideração a utilização de atraso no modelo, sendo assim dispensável o uso de hora extra, neste caso a definição da variável de produção x_{ijt}^k deve ser modificada possibilitando o atraso e o estoque no último período do horizonte de planejamento, o que pode ser interessante para a análise de custos variáveis para atraso.

O uso de hora extra é algo muito importante para garantir a factibilidade das instâncias utilizadas nestes testes, além disso, investir em flexibilidade pode trazer benefícios significativos perante os custos envolvidos de *overtime* em casos com plantas dedicadas, porém os altos valores obtidos de GAP impossibilitaram a análise concreta de alguns dados processados, por este motivo é necessário desenvolver métodos de solução para obter uma melhoria destes valores, possibilitando uma análise consistente das 1000 instâncias analisadas neste trabalho, além de instâncias de grande porte, fazendo com que estes valores não sejam de grande impacto para a solução encontrada pelo *solver* utilizado.

REFERÊNCIAS

- [1] ALFIERI, A.; BRANDIMARTE, P.; D'ORAZIO, S. Lp-based heuristics for the capacitated lot-sizing problem: The interaction of model formulation and solution algorithm. **International Journal of Production Research**, v. 40, p. 441-458, 2002.
- [2] ARAUJO, S. A. de; ARENALES, M. N. Problema de dimensionamento de lotesmonoestágio com restrição de capacidade: Modelagem, métodos de resolução e resultados computacionais. **Pesquisa Operacional**, v. 20, p. 287-306, 2000.
- [3] ARAUJO, S. A. de; RANGEL, S. Matemática Aplicada ao Planejamento da Produção e Logística. **SBMAC** - São Carlos, SP, 2014.
- [4] ARAUJO, S. A. de; DE REYCK, B.; DEGRAEVE, Z.; FRAGNOS, I.; JANS, R. Period Decompositions for the Capacitated Lot Sizing Problem with Setup Times. **IN-FORMS Journal on Computing**, v. 27, p. 431-448, 2015.
- [5] BAHL, H. C.; RITZMAN, L. P.; GUPTA, J. N. D. Determining lot sizes and resource requirements: a review. **Operations Research**, v. 35, p. 329-345, 1987.
- [6] BAUMOL, W. J.; VINOD, H. D. An inventory theoretic model of freight transport demand. **Management Science**, v. 16, p. 413-421, 1970.
- [7] BHATNAGAR, R.; CHANDRA, P.; GOYAL, S. K. Models for multi-plant coordination. **European Journal of Operational Research**, v. 67, p. 141-160, 1993.
- [8] BRAHIMI, N.; DAUZERE-PERES, S.; NAJID, N. M.; NORDLI, A. Single item lot sizing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 168, p. 1-16, 2006.
- [9] CAMPBELL, G. M.; MABERT, V. A. Cyclical schedules for capacitated lot sizing with dynamic demands. **Management Science**, v. 37, p. 409-427, 1991.
- [10] CARVALHO, D. M.; NASCIMENTO, M. C. V. Lagrangian heuristics for the capacitated multi-plant lot-sizing problem with multiple periods and items. **Computers and Operations Research**, v. 71, p. 137-148, 2016.
- [11] CARVALHO, D. M.; NASCIMENTO, M. C. V. A kernel search to the multi-plant capacitated lot-sizing problem with setup carry-over. **Computers and Operations Research**, v. 100, p. 43-53, 2018.49
- [12] CHEN, W.; THIZY, J. Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem. **Annals of Operations Research**, v. 26, p. 29-72, 1990.
- [13] CHEN, H.; CHU, C. A lagrangian relaxation approach for supply chain planning with order/setup costs and capacity constraints. **Journal of Systems Science and Systems Engineering**, v. 12, p. 98-110, 2003.

- [14] DANNA, E.; ROTHBERG, C.; LE PAPE, C. Exploring relaxation induced neighborhoods to improve MIP solution. **Mathematical programming**, Series A, v. 102, p. 71-90, 2005.
- [15] DE PAULA, G. B. Planejamento Estratégico, Tático e Operacional. O Guia completo para sua empresa garantir os melhores resultados! **Treasy**, 23 de agosto de 2015. Disponível em: <<https://www.treasy.com.br/blog/planejamento-estrategico-tatico-e-operacional/>>. Acesso em: 11 de junho de 2019.
- [16] DEGRAEVE, Z.; JANS, R. A. A new dantzig-wolfe reformulation and branch-and-price algorithm for the capacitated lot-sizing problem with setup times. **Operations Research**, v. 55, p. 909-920, 2007.
- [17] DENIZEL, M.; SURAL, H. On alternative mixed integer programming formulations and lp-based heuristics for lot sizing with setup times. **Journal of the Operational Research Society**, v. 57, p. 389-399, 2006.
- [18] DENIZEL, M.; ALTEKIN, F. T.; SURAL, H.; STANDLER, H. Equivalence of the LP relaxations of two strong formulations and capacitated lot-sizing problem with setup times. **OR Spectrum**, v. 30, p. 773-785, 2008.
- [19] EPPEN, G. D.; MARTIN, R. K. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. **Operations Research**, v. 35, p. 832-848, 1987.
- [20] ERENGUÇ, S. S.; SIMPSON, N. C.; VALHARIA, A. J. Integrated production/distribution planning in supply chains? An invited review. **European Journal of Operational Research**, v. 115, p. 219-236, 1999.
- [21] EVANS, J. R. An efficient implementation of the wagner-whitin algorithm for dynamic lot-sizing. **Journal of Operations Management**, v. 5, p. 229-235, 1985.
- [22] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. Relaxação lagrangiana aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas: Limitantes inferiores. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 13, p. 13-24, 2012.
- [23] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. Reformulation and a Lagrangian heuristic for lot sizing problem on parallel machines. **Annals of Operations Research**, v. 217, p.213-231, 2014.
- [24] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A.; JANS, R. Hybrid methods for lot sizing on parallel machines. **Computers e Operations Research**, v. 63, p. 136-148, 2015.
- [25] FIOROTTO, D. J.; JANS, R.; ARAUJO, S. A. Process flexibility and the chaining principle in lot sizing problems. **International Journal of Production Economics**, v.204, p. 244-263, 2018.
- [26] FISCHETTI, M.; GLOVER, F.; LODI, A. The feasibility pump. **Mathematical Programming**, v. 104, p. 91-104, 2005.
- [27] GRAVES, S. C.; TOMLIN, B. T. Process flexibility in supply chains. **Management Science**, v. 49, p. 907-919, 2003.

- [28] GUIMARAES, L.; KLABJAN, D.; ALMADA-LOBO, B. Annual production budget in the beverage industry. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 25, p. 229-241, 2012.
- [29] HARRIS, F. W. How many parts to make at once. **Operations Research**, v. 38, p. 947-950, 1990.
- [30] HIDDEN Figures. Direção de Theodore Melfi. Produção de Donna Gigliotti, Peter Chernin, Jenno Topping, Pharrell Williams, Theodore Melfi. Estados Unidos: Fox 2000 Pictures, Chernin Entertainment, Levantine Films, TSG Entertainment, 2016, 1 filme. (127 min.).
- [31] JANS, R.; DEGRAEVE, Z. An industrial extension of the discrete lot sizing and scheduling problem. **IIE Transactions**, v. 36, p. 47-58, 2004.
- [32] JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Improved lower bounds for the capacitated lot-sizing problem with setup times. **Operations Research Letters**, v. 32, p. 185-195, 2004.
- [33] JANS, R. Solving lot-sizing problems on parallel identical machines using symmetry-breaking constraints. **INFORMS Journal on Computing**, v. 21, p. 123-136, 2009.
- [34] JOHNSÉN, C.; DAUZÈRE-PÉÉÈS, S.; VIALLETTELLE, P. Flexibility measures for qualification management in wafer fabs. **Production Planning Control**, v. 22, p.81-90, 2011.
- [35] JORDAN, W. C.; GRAVES, S. C. Principles on the benefits of manufacturing process flexibility. **Management Science**, v. 41, p. 577-594, 1995.
- [36] KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot-sizing problem: a review of models and algorithms. **Omega**, v. 31, p. 365-378, 2003.
- [37] KRARUP, J.; BILDE, O. Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem. In: **Annals of Discrete Mathematics**. [S.l.: s.n], v. 1, p.79-97, 1977.
- [38] LANG, J.; DOMSCHKE, W. Efficient reformulations for dynamic lot-sizing problems with product substitution. **OR Spectrum**, v. 32, p. 263-291, 2010.
- [39] LEE, W. S.; HAN, J. H.; CHO, S. J. A heuristic for a multi-product dynamic lot-sizing and shipping problem. **International Journal of Production Economics**, v. 98, p.204-214, 2005.
- [40] MANNE, A. S. Programming of economic lot sizes. **Management Science**, v. 4, p. 115-135, 1958.
- [41] MATTA, R. de; MILLER, T. Production and inter-facility transportation scheduling for a process industry. **European Journal of Operational Research**, v. 158, p. 72-88, 2004.

- [42] MELEGA, G. M.; FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. d. Formulações Fortes para o Problema de Dimensionamento de Lotes com Várias Plantas. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 14, p. 305-318, 2013.
- [43] MELO, R. A.; WOLSEY, L. A. MIP formulation and heuristics for two-level production-transportation problems. **Computers and Operations Research**, v. 39, p. 2776-2786, 2012.
- [44] MOLINA, F.; SANTOS, M. O.; TODELO, F. M. B.; ARAUJO, S. A. An approach lagrangian/surrogate relaxation for lot sizing with transportation costs. **Pesquisa Operacional**, v. 29, p. 269-288, 2009.
- [45] NASCIMENTO, M. C.; RESENDE, M. G.; TOLEDO, F. M. Grasp heuristic with path relinking for the multi-plant capacitated lot-sizing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 200, p. 747-754, 2010.
- [46] NORDEN, L.; VELDE, S. Multi-product lot sizing with a transportation capacity reservation contract. **European Journal of Operational Research**, v. 165, p. 127-138, 2005.
- [47] OZDAMAR, L.; BARBAROSOGLU, G. Hybrid heuristics for the multi-stage capacitated lot sizing and loading problem. **The Journal of the Operational Research Society**, v. 50, p. 810-825, 1999.
- [48] OZDAMAR, L.; BARBAROSOGLU, G. An integrated lagrangean relaxation-simulated annealing approach to the multi-level multi-item capacitated lot-sizing problem. **International Journal of Production Economics**, v. 68, p. 319-331, 2000.
- [49] POCHET, Y.; WOLSEY, L. Production Planning By Mixed Integer Programming. [S.l.]: **New York**: Springer Verlag, 2006.
- [50] RIZK, N.; MARTEL, A. Supply chain flow planning methods: a review of the lot-sizing literature. In: **Working Paper DT-2001-AM-1**, Université Laval, QC, Canada, 2001.
- [51] ROWSHANNAHAD, M.; DAUZÈRE-PÉEÈS, S.; CASSINI, B. Capacitated qualification management in semi conductor manufacturing. **Omega**, v. 54, p. 50-59, 2015.
- [52] SABBAG, Z. **Planejamento da produção em máquinas paralelas sob restrições de capacidade**. Dissertação (Mestrado) - FEE-Unicamp, Campinas, 1993.
- [53] SAMBASIVAN, M.; SCHMIDT, C. P. A heuristic procedure for solving multi-plant, multi-item, multi-period capacitated lot-sizing problems. **Asia-Pacific Journal of Operation Research**, v. 19, p. 87-105, 2002.
- [54] SAMBASIVAN, M.; YAHYA, S. A lagrangean-based heuristic for multi-plant, multi-item, multi-period capacitated lot-sizing problems with inter-plant transfers. **Computers and Operations Research**, v. 32, p. 537-555, 2005.

- [55] SILVA, D. H.; TOLEDO, F. M. Dimensionamento de lotes com múltiplas plantas: comparação entre dois modelos. In: **Anais CLAIO/SBPO**, 2012.
- [56] SUERIE, C.; STADTLER, H. The capacitated lot-sizing problem with linked lot sizes. **Management Science**, v. 49, p. 1039-1054, 2003.
- [57] SURAL, H.; DENIZEL, M.; WASSENHOVE, L. N. V. Lagrangean relaxation based heuristics for lot sizing with setup times. **European Journal of Operational Research**, v. 194, p. 51-63, 2009.
- [58] THIZY, J. M.; WASSENHOVE, L. N. V. Lagrangean relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem: A heuristic implementation. **IIE Transactions**, v. 17, p. 308-313, 1985.
- [59] TOLEDO, F. M. B. **Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas**. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- [60] TOLEDO, F. M. B.; ARMENTANO, V. A. A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. **European Journal of Operational Research**, v. 175, p. 1070-1083, 2006.
- [61] TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. **Management Science**, v. 35, p. 353-366, 1989.
- [62] VANDERBECK, F. Lot-sizing with start-up times. **Management Science**, v. 44, p. 1409-1425, 1988.
- [63] VROBLEFSKI, M.; RAMESH, R.; ZIONTS, S. Efficient lot sizing under a differential transportation cost structure for serially distributed warehouses. **European Journal of Operational Research**, v. 127, p. 574-593, 2000.
- [64] XIAO, J.; YANG, H.; ZHANG, C.; ZHENG, L.; GUPTA, J. N. D. A hybrid Lagrangian-simulated annealing-based heuristic for the parallel machine capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup times. **Computers and Operations Research**, v. 63, p. 72-82, 2015.
- [65] WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot sizing model. **Management Science**, v. 5, p. 89-96, 1958.
- [66] WOLSEY, L. Uncapacitated lot-sizing problems with start-up costs. **Operational Research**, v. 37, p. 741-747, 1989.
- [67] WU, T.; SHI, L.; GEUNES, J.; AKARTUNALI, K. An optimization frame work for solving capacitated multi-level lot-sizing problems with backlogging. **European Journal of Operational Research**, v. 214, p. 428-441, 2011.
- [68] WU, T.; ZHANG, C.; LIANG, Z. Analytics branching and selection for the capacitated multi-item lot-sizing problem with non-identical machines. **INFORMS Journal on Computing**, v. 30, p. 236-258, 2017.

[69] WU, T.; XIAO, F.; ZHANG, C.; HE, Y.; LIANG, Z. The green capacitated multi-item lot sizing problem with parallel machines. **Computers and Operations Research**, v. 98, p. 149-164, 2018.