

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

**CADEIAS DE PERIODICIDADE EM SISTEMAS
DINÂMICOS**

CARLOS EDUARDO DE PAULA ABREU

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO - SP

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Carlos Eduardo de Paula Abreu

Cadeias de periodicidade em sistemas dinâmicos

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos

**Rio Claro - SP
2025**

A162c Abreu, Carlos Eduardo De Paula
Cadeias de periodicidade em sistemas dinâmicos / Carlos Eduardo
De Paula Abreu. -- Rio Claro, 2025
131 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Rene Orlando Medrano Torricos

1. Caos. 2. Fractal. 3. Expoente de Incerteza. 4. Curvas Extremas. 5.
Espaço de Parâmetros. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Carlos Eduardo de Paula Abreu

Cadeias de periodicidade em sistemas dinâmicos

Tese de Doutorado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Jú-
lio de Mesquita Filho”, como parte
dos requisitos para obtenção do tí-
tulo de Doutor em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antônio Mihara
UNIFESP/Diadema (SP)

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Joelson Dayvison Veloso Hermes
IFSULDEMINAS/Inconfidentes (MG)

Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos
UNIFESP/Diadema (SP)

Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza
UFSJ/Divinópolis (MG)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 21 de fevereiro de 2025.

*Aos meus familiares, amigos e todas as pessoas que de alguma forma contribuíram com
mais esse sonho realizado.*

Agradecimentos

A Deus, por mais esta conquista, permitindo-me adquirir conhecimento e superar obstáculos. Ao meu orientador, Rene Orlando Medrano Torricos, que sempre esteve disposto a me auxiliar com as pesquisas, sem medir esforços. Aos meus pais, por todo o incentivo e por terem construído as bases que me encorajam e impulsionam a ser uma pessoa melhor. À minha irmã, Ana Cristina, pelo vínculo afetivo e pela compreensão da minha ausência durante este período. Aos meus avós paternos, que me ensinaram tanto na sua simplicidade, e aos meus avós maternos, que muito contribuíram para minha trajetória de vida, mas que já não estão entre nós. Aos meus tios e tias, pelos ensinamentos, apoio e convivência. À minha esposa, Juliana, e às minhas filhas, Ana Luiza e Isabela, por serem minha maior fonte de motivação e por entenderem os momentos em que não pude estar presente ao longo destes quatro anos. À minha cunhada, Elisa Maganha, que esteve presente em muitos momentos durante a minha jornada de construção do conhecimento e que, recentemente, partiu para um novo plano espiritual. À minha sogra e ao meu sogro, por cuidarem das minhas filhas e suprirem minha ausência nos momentos em que os estudos me impediram de estar presente. Aos amigos que, de alguma forma, contribuíram para esta formação. Um agradecimento especial aos que estiveram mais presentes, como Flávio, Valdir e, em especial, Joelson. Aos professores, pelos ensinamentos, formação e companheirismo. Ao Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro, pelo apoio e aprendizado. À UNESP - Câmpus de Rio Claro, pela oportunidade de realizar o doutorado. Ao IFSULDEMINAS - Câmpus Três Corações, pela concessão do afastamento, o que permitiu a conclusão deste doutorado.

Resumo

Ao lidar com sistemas dissipativos, pesquisas como o estudo do espaço de parâmetros tem permitido uma interpretação alternativa dos processos associados a comportamentos caóticos, revelando o importante papel que as estruturas de periodicidade desempenham nessas novas análises. A concentração dessas estruturas pode dificultar o controle e a previsão do comportamento do sistema dinâmico, já que a fronteira entre periodicidade e caoticidade pode ser muito complexa, gerando incertezas na escolha dos parâmetros para obter o estado desejado. Recentemente, descobriu-se que essas estruturas estão dispostas no espaço dos parâmetros ao longo de curvas chamadas de curvas extremas. Essas curvas são caracterizadas por órbitas que conectam extremos de mapas unidimensionais. Nesta tese, calculamos planos de parâmetros habitados por cascatas de periodicidade e, com o auxílio da teoria de curvas extremas, investigamos o grau de incerteza que elas introduzem na escolha de parâmetros. Para isso, avaliamos o Coeficiente de Incerteza, ou Expoente de Incerteza, ao longo das curvas extremas das cascatas nos mapas Logístico-Gauss, Logístico perturbado, Círculo e Hassell perturbado. Comparando nossos experimentos com os já realizados em outros estudos, obtivemos resultados expressivamente distintos. Quando se calcula o coeficiente de incerteza sobre as curvas extremas, verifica-se uma convergência dessa medida para valores muito baixos, indicando que as soluções assintóticas dessa região, divididas entre periódicas e caóticas, são altamente sensíveis na escolha dos parâmetros ao longo das cascatas de periodicidade. Não obstante, foi identificado que as curvas extremas delimitam regiões com diferentes níveis de complexidade e, adicionalmente, evidenciam uma significativa alteração no comportamento clássico da Escada do Diabo, introduzindo uma descontinuidade na escada em função do comportamento caótico presente nas cascatas. Por fim, examinamos o impacto nas estruturas de isoperiodicidade quando um ruído estocástico está presente no espaço de fases em mapas unidimensionais. Esse estudo foi estendido, possibilitando análises futuras em sistemas dinâmicos de maior complexidade.

Palavras-chave: Caos; Fractal; Expoente de Incerteza; Curvas Extremas; Espaço de Parâmetros.

Abstract

When dealing with dissipative systems, research on parameter space has provided an alternative interpretation of the processes associated with chaotic behaviors, revealing the important role that periodic structures play in these new analyses. The concentration of these structures can hinder the control and prediction of the dynamic system's behavior, as the boundary between periodicity and chaos can be highly complex, generating uncertainties in choosing parameters to achieve the desired state. Recently, it was discovered that these structures are arranged in parameter space along curves known as extreme curves. These curves are characterized by orbits that connect extrema of one-dimensional maps. In this thesis, we compute parameter planes populated by periodicity cascades and, with the aid of extreme curve theory, investigate the degree of uncertainty they introduce in parameter selection. To this end, we evaluate the Uncertainty Coefficient, or Uncertainty Exponent, along the extreme curves of cascades in the Logistic-Gauss map, Perturbed Logistic map, Circle map, and Perturbed Hassell map. Comparing our experiments with previous studies, we obtained significantly different results. When computing the uncertainty coefficient along extreme curves, we observe that this measure converges to very low values, indicating that the asymptotic solutions in this region, divided between periodic and chaotic states, are highly sensitive to parameter selection along the periodicity cascades. Moreover, it was identified that extreme curves delimit regions with different levels of complexity and, additionally, significantly alter the classical behavior of the Devil's Staircase, introducing a discontinuity in the staircase due to the chaotic behavior present in the cascades. Finally, we examine the impact on isoperiodicity structures when stochastic noise is present in the phase space of one-dimensional maps. This study has been extended, enabling future analyses in more complex dynamical systems.

Keywords: Chaos; Fractal; Uncertainty Exponent; Extreme Curves; Parameter Space.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Mapa de retorno das 100 iterações sucessivas do mapeamento Logístico, com a condição inicial $x_0 = 0,3$ e $R = 2,7$	27
1.2	Nas figuras apresentamos a evolução temporal x_n vs. n para o mapa Logístico que foram gerados com a condição inicial $x_0 = 0,3$ e 50 iterações, com quatro valores distintos de R	29
1.3	Convergência da dinâmica para uma órbita de período 2.	29
1.4	Mapa de retorno representando os dois pontos fixos P_1^* e P_2^* , que correspondem às interseções da função do mapeamento com a reta identidade. O mapeamento Logistic-like e suas iterações sucessivas, a partir da condição inicial $x_0 = 0,2$, evoluem para o ponto fixo P_2^* , para $R = 1,3$ e $\gamma = 5$	31
1.5	Análise gráfica mostrando a estabilidade do ponto fixo para $\gamma = 6$, condição inicial $x_0 = 0,4$ e $R = 1 + \frac{2}{\gamma}$. Observamos um ponto fixo neutro, que não é repulsor nem atrator.	33
1.6	Um ponto fixo repulsor é ilustrado, com condição inicial $x_0 = 0,1$ e $R = 2$	34
1.7	Diagrama de bifurcação para o mapa Logistic-like, para $x_0 = 0,1$ e $\gamma = 5$	35
1.8	Diagrama de bifurcação apresentando a sobreposição de dois diagramas que apresentam $\gamma = 6$ e condição inicial distintas, um com $x_0 = 0,1$ (preto) e o outro $x_0 = -0,1$ (vermelho).	36

1.9	Diagrama de bifurcação (parte superior) e o expoente de Lyapunov (parte inferior) referente ao mapa Logístico perturbado.	39
1.10	Espaço de parâmetros b vs. a do mapa Quártico, com a representação dos expoentes de Lyapunov λ indicada pela paleta de cores.	41
1.11	Espaço de parâmetros do mapa Quártico sem ruído (a) e com com ruído (b). Amplitude do ruído: $\Delta I = 10^{-2}$	43
1.12	Representação do espaço de parâmetros b vs. a do mapa Quártico, destacando as regiões de periodicidade conforme a escala de cores atribuída aos números inteiros.	45
1.13	Espaço de parâmetros do mapa do Círculo destacando as curvas superestáveis, em que a cor cinza representa a curva $\omega = -\frac{\sqrt{k^2-1}}{2\pi}$, enquanto a cor branca expressa a curva $\omega = \frac{\sqrt{k^2-1}}{2\pi}$	47
1.14	Espaço de parâmetros do mapa do Círculo. Curvas extremas $(1)_-$ e $(1)_+$, representadas pelas cores ciano e lilás, respectivamente.	49
2.1	(a) Cascata de periodicidade no plano de parâmetros Γ , destacada ao longo das curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} em verde. Sombras escuras representam dinâmica periódica ($\lambda < 0$), enquanto sombras amarelo-azul indicam comportamento caótico ($\lambda > 0$). (b) Ênfase em e_1^{23} cruzando a cascata através de todos os pontos de estabilidade, sequência $(S_i)_{i=1}^\infty$	57
2.2	Fração de parâmetros incertos $f(\varepsilon)$ em função da perturbação ε . Uma regressão de lei de potência $f(\varepsilon) = Ae^\alpha$ (curva vermelha) fornece o expoente de incerteza α ao longo da curva extrema e_1^{23} (a) e e_2^{32} (b).	59
2.3	(a) e (b) Plano de parâmetros Γ ilustrando as curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} (verde) e curvas paralelas distantes múltiplos positivos (azul) e negativos (rosa) de $\Delta\tilde{a} = 0,025$. Os painéis (c) e (e) mostram o expoente de incerteza α e (d) e (f) apresentam a dimensão exterior d_x estimada ao longo das curvas paralelas dentro de $\Delta\tilde{a}$ da curva e_1^{23} e e_2^{32} . Marcadores vermelhos indicam as singularidades em $\Delta\tilde{a} = 0$ e os marcadores pretos cercados estão em $\Delta\tilde{a} = \pm 10^{-2}, \pm 10^{-3}, \pm 10^{-4}, \pm 10^{-5}, \pm 10^{-6}$, e $\pm 10^{-7}$	61

2.4	(a), (b) e (c) Diagramas de bifurcação ao longo de curvas em $\Delta\tilde{a} = -0,02$, $\Delta\tilde{a} = 0$ (curva extrema e_2^{32}), e $\Delta\tilde{a} = 0,02$, respectivamente. (d), (e) e (f) Ampliação dos respectivos diagramas de bifurcação mostrados na primeira coluna. (g), (h) e (i) Expoentes de Lyapunov correspondentes aos diagramas de bifurcação da coluna do meio. As curvas coloridas correspondem ao valor de x da M -ésima iteração do ponto crítico $x_1^* = 0$, $F^M(0)$, em cada parâmetro. $M = 5$ (rosa), 6 (verde), 11 (amarelo), e 13 (ciano).	62
2.5	Espaço de parâmetros para o mapa Logístico perturbado, destacando a extrema e_3^{21} (preto), e_3^{12} (amarelo), e_2^{22} (marrom), e_2^{11} (ciano), e_1^{21} (laranja) e e_1^{12} (vermelho).	68
2.6	Ampliação da Fig. 2.5 na cascata de periodicidade evidenciando três curvas, são elas: extrema e_3^{21} (preto), reta (azul) e extrema perturbada $+0,001$ (vermelho).	68
2.7	(a) Espaço de parâmetros do mapa Logístico perturbado destacando várias curvas perturbadas a partir da curva extrema e_3^{21} . (b) Expoentes de incerteza referente ao mapa Logístico perturbado para a curva extrema e_3^{21} (ponto vermelho) e algumas perturbações da extrema (pontos pretos), com o erro representado pela barra.	69
2.8	Espaço de parâmetros para o mapa do Círculo, destacando em magenta a curva extrema e_1^{21} e em ciano a curva extrema e_1^{12}	70
2.9	Fração de parâmetros incertos $f(\varepsilon)$ em função da perturbação ε . Uma regressão de lei de potência, $f(\varepsilon) = A\varepsilon^\alpha$ (curva vermelha), determina o expoente de incerteza α ao longo da curva extrema e_1^{12} em (a) e e_1^{21} em (b).	70
2.10	Espaço de parâmetros do mapa do Círculo. Os coeficientes de incerteza foram medidos ao longo das retas coloridas de $a_1 = 1$ (branco) até $a_1 = 1,8$ (magenta).	71

2.11	Curvas de diferentes cores indicam a relação entre $f(\epsilon)$ e ϵ , destacando o valor de $\alpha = 0,406(7)$ na curva onde $a_1 = 1,6$ (curva vermelha). Estes resultados derivam das linhas mostradas na Fig. 2.10, onde a_1 varia no intervalo $(1; 1,8]$, em que o limite inferior é representado pela cor laranja e o limite superior pela cor preta.	72
2.12	(a) Espaço de parâmetros do mapa de Hassell perturbado, destacando a curva extrema e algumas de suas perturbações Δa_1 . (b) Expoente de incerteza das curvas destacadas em (a) , com a barra representando o erro. . . .	75
3.1	Os resultados do expoente de incerteza α das curvas do mapeamento Logístico perturbado Fig. 2.7b, são apresentados em função do valor absoluto do deslocamento Δa_1 . As cores vermelha e azul representam, respectivamente, os valores de α obtidos para $-\Delta a_1(\text{EIP-})$ e $\Delta a_1(\text{EIP+})$	79
3.2	(a) Espaço de parâmetros do mapa do Círculo, destacando a região onde a curva extrema e_1^{12} (preta) cruza as cascatas de periodicidade, bem como as curvas superior $\Delta a_1 = 0,05$ (verde) e inferior $\Delta a_1 = -0,05$ (vermelha). O gráfico (b) corresponde ao expoente de Lyapunov ao longo da curva superior, (c) à curva extrema e (d) à curva inferior.	82
3.3	[(a) - (c)] Histogramas do expoente de Lyapunov, onde o eixo x representa os valores de λ e o eixo y indica a frequência de ocorrência de λ . As Figs. (a) a (c) correspondem, respectivamente, ao histograma da curva extrema transladada $\Delta a_1 = 0,05$, da curva extrema e_1^{12} , e da curva extrema transladada $\Delta a_1 = -0,05$. Em (d) a sobreposição de (c) sobre (a).	83
3.4	Espaço de parâmetros do mapa do Círculo, destacando os pontos brancos posicionados sobre, acima e abaixo da curva extrema.	84
3.5	Mapa de retorno para cada um dos doze pontos brancos destacados na Fig. 3.4, com foco na crise quando o atrator caótico colide com o ponto fixo destacado em verde em (a). Todos os atratores estão apresentados por 200 pontos azuis, após um transiente de 10^4	85

- 4.1 Em (a), ilustramos o espaço de parâmetros do mapa do Círculo, onde a cor indica o número de rotação ρ , variando de amarelo a azul, conforme a escala de cores exibida. Em (b) e (c), apresentamos o número de rotação em função do parâmetro a_2 , representada para a reta $a_1 = 1$ e para a curva extrema e_1^{12} , respectivamente. 88
- 4.2 Na Fig. (a), representamos o espaço de parâmetros do mapa do Círculo, com a cor indicando o número de rotação ρ^* , que varia de amarelo a branco, de acordo com a escala de cores mostrada. As Figs. (b) e (c) exibem ρ^* em relação ao parâmetro a_2 para a reta $a_1 = 1$ (ciano) e para a curva extrema e_1^{12} (magenta), respectivamente. 89
- 4.3 (a) Representação da transição de ρ no plano de parâmetros calculada para o mapa Logístico-Gauss. Foram descartadas as 10^3 primeiras iterações, e as 10^2 subsequentes foram utilizadas para o cálculo. (b) e (c) Exibem o número de rotação ρ em função do parâmetro a_1 e a_2 , respectivamente, calculado para as curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} . Nessas condições, 10^4 iterações resultariam em retas constantes com valor $\rho = 0$ 90
- 4.4 (a) Cascatas de periodicidade no plano de parâmetros Γ ao longo das curvas extremas verde e_1^{23} e amarelo e_2^{32} . O sombreado preto-ciano representa dinâmica periódica ($\lambda < 0$), enquanto o sombreado branco indica comportamento caótico ($\lambda > 0$). Tanto e_1^{23} quanto e_2^{32} cruzam cascatas de periodicidade organizando Γ . (b) e (c) Representam ρ^* em função dos parâmetros. 91
- 4.5 (a) Apresenta o comportamento ampliado da Fig. 4.4(a), enquanto (b) é a ampliação do retângulo vermelho que está demarcado em (a). (c) Apresenta o comportamento ampliado da Fig. 4.4 (c), enquanto (d) é a ampliação do retângulo vermelho que está demarcado em (c). 92
- 5.1 Reflexo das perturbações no espaço de parâmetros na cascata ao longo da curva extrema e_1^{21} na cor preta. (a) $\Delta I = 0$, (b) $\Delta I = 10^{-4}$, (c) $\Delta I = 10^{-3}$ e (d) $\Delta I = 10^{-2}$ 96

5.2	Expoente de incerteza α na cascata de periodicidade ao longo da curva extrema e_1^{21} do mapa do Círculo para diversos valores de ΔI (a) $\Delta I = 0$ até (p) $\Delta I = 10^{-1}$, com o eixo x caracterizando ε e o eixo y expressando $f(\varepsilon)$ em escala logarítmica, com a reta vermelha expondo a regressão de lei de potência. As iterações e o transiente para cada figura foi de 10^5	98
5.3	Com α vs. $\log(\Delta I)$, agrupamos os resultados obtidos do α da Fig. 5.2. A linha tracejada indica o valor de α sem perturbação do mapeamento. . . .	100
5.4	Ajuste da curva quártica aos pontos obtidos da Fig. 5.2. Eixo ΔI foi substituído por $\log(\Delta I)$ e indicado pela potência de ΔI	102
5.5	Sobreposição dos gráficos apresentados na Fig. 5.2. O ruído varia desde $\Delta I = 0$ (curva em vermelho), indicando ausência de ruído, até o ruído máximo de $\Delta I = 10^{-1}$ (curva em preto).	103
5.6	Esboço do comportamento de ε_x vs. ΔI . Um ajuste em lei de potência fornece $a_3 = 1$	106
5.7	Sobreposição das curvas mostradas na Fig. 5.5 em uma única curva universal, após as transformações $f(\varepsilon) \rightarrow f(\varepsilon)/\Delta I^{a_1}$ e $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/\Delta I^{a_3}$	107
5.8	Sobreposição das curvas mostradas na Fig. 5.7 em uma única curva universal, após as transformações $f(\varepsilon) \rightarrow f(\varepsilon)/\Delta I^{a_1} + 0,1$ e $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/\Delta I^{a_3}$	108
5.9	Representação gráfica da curva padrão $f(x)$ e da regressão linear $\varphi(x)$. Os pontos pretos representam os dados medidos numericamente em torno de $f(x)$	109
5.10	Representação dos intervalos I_2 (verde) e I_3 (azul) com as suas inclinações correspondentes, incluindo a perturbação do mapeamento (vermelho). . .	113
5.11	Valores dos coeficientes a_1 (média aritmética) e a_2 (regressão linear), determinados a partir da análise gráfica apresentada na Fig. 5.10.	114

5.12	A curva azul, gerada pela Eq. 5.16, representa os resultados algébricos correspondentes a cada uma das perturbações ΔI que modelam o experimento. Essa curva é sobreposta à curva preta, que é resultado dos experimentos numéricos observados.	115
5.13	(a) e (b) Espaço de parâmetros dos mapas do Círculo e de Hénon, destacando a reta em estudo (ciano). A paleta de cores representam os valores do expoente de Lyapunov. (b) A cor salmão assinala a divergência do sistema.	118
5.14	Comparação do valor de α obtidos das retas dos mapeamentos: Círculo ($a_1 = 5$) e Hénon ($a_1 = 0,1$), considerando ruídos variando de $\Delta I = 10^{-15}$ a $\Delta I = 10^{-3}$	120

LISTA DE TABELAS

3.1	Tabela dos valores dos expoentes de incerteza em relação à perturbação Δa_1 .	78
-----	---	----

SUMÁRIO

Introdução	18
1 Fundamentos	25
1.1 Mapas unidimensionais em tempo discreto	25
1.2 O mapa Logístico e iterações do mapeamento	26
1.3 O mapa Logistic-like e a órbita do mapeamento	30
1.3.1 Análise de estabilidade do ponto fixo para o mapa Logistic-like . . .	32
1.4 Expoente de Lyapunov para o mapa Logístico perturbado	37
1.5 Espaço de parâmetros para o mapa Quártico	39
1.5.1 Ruído branco	41
1.5.2 Órbitas periódicas	43
1.6 Órbitas superestáveis, extremas e o mapa do Círculo	45
2 Expoente de incerteza em curvas extremas	50
2.1 Sobre a pesquisa	50
2.2 Expoente de Incerteza	51
2.3 Curvas extremas para o mapa Logístico-Gauss	54
2.3.1 Dimensão exterior	56
2.3.2 Dimensão fractal extrema	58

2.4	Dimensão fractal extrema para outros mapas	63
2.5	Dimensão fractal no mapa do Círculo	69
2.6	Dimensão fractal para o mapa Hassell perturbado	73
2.7	Conclusões parciais	75
3	Curvas Extremas: Fronteira entre Regiões de Complexidades Distintas	76
3.1	Coefficiente de incerteza na vizinhança das curvas extremas	76
3.2	Expoente de Lyapunov na vizinhança da curva extrema	79
3.3	Histograma	81
3.4	Crise interior	83
3.5	Conclusões parciais	85
4	Fronteira Fractal: Explorando a Escada do Diabo	86
4.1	Escada do diabo	86
4.2	Conclusões parciais	93
5	Perturbação randômica	94
5.1	Ruído branco	94
5.2	Impacto do Ruído no Espaço de Parâmetros ao Longo da Curva Extrema	95
5.3	Invariância de Escala Sob Perturbações: Análise nas Curvas Extremas	102
5.3.1	Invariância de Escala e a busca por uma Curva Universal	103
5.3.2	Cálculo da universalidade da curva	108
5.4	Um paralelo entre o mapa do Círculo (1D) e o mapa de Hénon (2D)	116
5.5	Conclusões parciais	120
	Considerações Finais e Perspectivas	121
	Referências Bibliográficas	123

INTRODUÇÃO

A teoria de sistemas dinâmicos iniciou com os trabalhos de mecânica celeste escrito por Johannes Kepler e também com os estudos sobre mecânica clássica realizados por Isaac Newton, ambos no século XVII. Posteriormente, o matemático francês Henri Poincaré, apresentou um novo olhar para os estudos de dinâmica não linear ao qual destacava as questões qualitativas e estabeleceu uma abordagem geométrica para analisar tais questões.

Foi com Poincaré, em 1889, ao estudar o problema dos três corpos, que se constatou pela primeira vez a existência de sistemas determinísticos com comportamento dinâmico intrinsecamente irregular. Ele demonstrou que, em geral, esse problema não possui uma solução analítica fechada e que pequenas variações nas condições iniciais podem levar a comportamentos caóticos, impossibilitando previsões precisas a longo prazo [1]. No entanto, em 1963, com o acesso ao computador e, conseqüentemente, maiores possibilidades de examinar os sistemas de equações não lineares, Edward Lorenz descobriu o movimento caótico através de um modelo de meteorologia cujas soluções do sistema não eram periódicas e nem entravam em equilíbrio por mais que se realizassem simulações.

Nesse momento, Lorenz observou a sensível dependência às condições iniciais em sistemas dessa natureza, ou seja, duas condições iniciais muito próximas em um sistema caótico podem se comportar de forma totalmente distintas durante a evolução do sistema [2]. Essas descobertas impulsionaram as pesquisas sobre o comportamento de sistemas não lineares, tanto no aspecto quantitativo, quanto no qualitativo.

Um sistema dinâmico não linear determinístico evolui temporalmente de forma contínua ou discreta [3]. Esta evolução é previsível, portanto determinístico, desde que todas as condições iniciais sejam conhecidas, mesmo que apresente alta sensibilidade às condições iniciais, o que pode dar a impressão de imprevisibilidade das trajetórias.

Sistemas em que as variáveis dependentes do tempo apresentam continuidade são representados por equações diferenciais e denominados fluxos. Quando as variáveis do tempo são funções recursivas discretas, são denominados mapas ou equações de diferença. A forma de representar essas equações é objeto de estudo e tem aplicações em diversas áreas, como Matemática, Física, Biologia, Química, Medicina e Engenharias [4, 5].

Com o avanço expressivo nos estudos de dinâmica nas décadas de 1960 e 1970, novas abordagens e conceitos fundamentais foram incorporados ao tratamento de sistemas dinâmicos, sejam eles conservativos ou dissipativos. Um dos focos centrais dessas investigações tornou-se o comportamento caótico, que pode emergir para diferentes valores dos parâmetros nos modelos analisados.

No tratamento de sistemas dissipativos, pesquisas como o estudo do espaço de parâmetros tem permitido novas interpretações de processos envolvendo comportamento caótico, onde estruturas de periodicidade desempenham um papel importante. Esses estudos têm se difundido nas últimas décadas e se tornado uma poderosa ferramenta na descrição de processos envolvendo sistemas com mais de um parâmetro.

Em 1963, Arnold iniciou esse processo mostrando quão rico e organizado é o espaço de parâmetros da família de mapas do círculo. Ele mostrou a existência de estruturas de periodicidade, conhecidas como línguas de Arnold [6], imersas em regiões de quase-periodicidade. Cada língua de Arnold está associada a um conjunto de infinitas estruturas auto-similares que chamamos genericamente de cascatas.

Duas ferramentas fundamentais neste estudo de sistemas dinâmicos são o cálculo dos expoentes de Lyapunov e a representação do espaço de parâmetros. Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de divergência ou convergência temporal entre trajetórias inicialmente próximas, indicando o grau de sensibilidade às condições iniciais que o sistema apresenta.

Um expoente positivo sugere caos, pois pequenas diferenças nas condições iniciais se amplificam exponencialmente ao longo do tempo. Por outro lado, um expoente de Lyapunov negativo indica que as trajetórias próximas convergem, o que é característico de regiões periódicas ou estáveis do sistema, onde as órbitas tendem a se estabilizar em ciclos limitados ou pontos fixos, refletindo um comportamento completamente previsível e ordenado. Uma terceira categoria dinâmica é o comportamento quase-periódico que ocorre quando o expoente de Lyapunov é nulo. É neste meio que estão imersas as línguas de Arnold.

A representação do espaço de parâmetros, por sua vez, mapeia os diferentes estados do sistema, revelando estruturas complexas como domínio de caos, periodicidade e quase-periodicidade.

Atualmente, são conhecidas outras estruturas de periodicidade, mas agora envolvidas por regiões de caoticidade, que também estão organizadas em cascatas no espaço de parâmetros [7–11]. A concentração dessas estruturas pode dificultar o controle e a previsão do comportamento do sistema dinâmico, já que a fronteira entre periodicidade e caoticidade pode ser muito complexa, gerando incertezas na escolha dos parâmetros para obter o estado desejado.

Em estudos recentes, observou-se que essas estruturas se organizam no espaço de parâmetros ao longo de curvas denominadas curvas extremas [12–14]. Essas curvas são caracterizadas por órbitas que conectam extremos de mapas unidimensionais. Foi em [12], com o objetivo de explicar a organização de estruturas periódicas no espaço de parâmetros, que se introduziu as órbitas extremas, onde mostrou-se que cascatas de conjuntos de periodicidade seguem essas curvas em qualquer escala do espaço de parâmetros.

Como as cascatas estão localizadas em um espaço de parâmetros multidimensional, é necessário ter ao menos dois parâmetros de controle. Esses parâmetros são essenciais para determinar a posição desses objetos auto-similares no espaço. Em geral, ao iniciar com uma condição inicial x_0 e iterar repetidamente o mapeamento, observa-se que, dependendo dos valores dos parâmetros, a dinâmica resultante pode convergir para pontos fixos, órbitas periódicas, quase-periódicas ou atratores caóticos.

Essas trajetórias, por sua vez, podem conter sequências de pontos críticos $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots\}$, onde cada um satisfaz $F'(x_i^*) = 0$, correspondendo a pontos extremos (máximos ou mínimos locais) do mapeamento. Além disso, qualquer par de pontos críticos, x_i^* e x_j^* , pode ser ligado por M iterações consecutivas do mapeamento, ou seja, $x_j^* = F^M(x_i^*)$, com $M \in \mathbb{N}$, $F^0 = \text{identidade}$ e $F \equiv F^1$. Essas trajetórias de comprimento M , que conectam pontos críticos no espaço de estados do mapeamento, são denominadas *M-órbitas extremas*, e os parâmetros correspondentes formam um conjunto de codimensão um conhecido como *curvas extremas* em espaços de parâmetros planares [12].

As curvas extremas estruturam o espaço de parâmetros revelando como as regiões de periodicidade imersas no caos são organizadas nesse espaço. Essas descobertas serviram como a principal motivação para o desenvolvimento desta pesquisa, na qual buscamos aprofundar essa análise.

Focamos em elaborar esses planos de parâmetros para identificar cascatas de periodicidade e, com o auxílio das curvas extremas, investigamos o grau de incerteza na escolha de parâmetros introduzido pelas cascatas. Para isso, utilizamos a medida de um parâmetro conhecido como expoente de incerteza α [15, 16], onde $\alpha \in [0, 1]$.

Quando $0 < \alpha < 1$, as soluções assintóticas do sistema, que podem ser periódicas ou caóticas, mostram diferentes níveis de sensibilidade à incerteza nos parâmetros. Especificamente, para $\alpha = 0$, dilatar a região estudada não melhora a precisão da medida, indicando que os atratores caóticos e periódicos estão homogeneamente entrelaçados em qualquer escala. Por outro lado, para $\alpha = 1$, ampliar a região estudada organiza claramente os atratores, distinguindo melhor entre as regiões caóticas e periódicas.

Grebogi et al. [15], em suas pesquisas da década de 80, encontraram que o coeficiente de incerteza para o mapa quadrático era $\alpha = 0,41(3)$, em que o número entre parênteses representa o erro apresentado na casa decimal imediatamente antes do parênteses, no caso, $\alpha \in [0,38; 0,44]$.

Mais tarde, Farmer [17] publicou que tanto para o mapa quadrático, quanto para o mapa do seno transcendental, os valores de α eram $0,45(4)$. Isso levou Farmer a conjecturar que o valor dessa constante era universal. Na década de 90, Hunt e Ott [18], mostraram por

meio de cálculos teóricos, descartando os atratores menores do processo de Feigenbaum, que o valor dessa constante era $\alpha = 0,51(3)$. Esse cálculo envolveu a exclusão dos estágios mais avançados da cascata de duplicação de período, limitando-se apenas aos atratores maiores, que são as órbitas periódicas de períodos mais baixos e os estados caóticos.

No entanto, em 2014, Joglekar, Ott e Yorke [19] realizaram essas medidas novamente para o mesmo mapa quadrático que eles já haviam realizado anteriormente, e demonstram, considerando uma probabilidade de estabilidade para o caos, que $\alpha \approx 0,39$ para elevadas ampliações do espaço dos parâmetros.

Em 2017, Medeiros et al. determinaram o valor de α para três diferentes sistemas de tempo contínuo: Rössler Oscillator $\alpha = 0,41(4)$, Morse Oscillator $\alpha = 0,40(4)$ e CO₂ Laser $\alpha = 0,40(4)$ [16].

Desafiando a crença de longa data, mostramos que o aumento da densidade das janelas periódicas ao longo das curvas extremas significa uma relação mais complexa entre os parâmetros associados ao comportamento periódico e caótico. Desta forma, a incerteza ocorre com maior intensidade ao longo das cascatas de periodicidade, sendo suprema nas curvas extremas e com valor de $\alpha = 0,232(2)$ [11, 20].

As curvas extremas foram identificadas como importantes divisores que segmentam o espaço em regiões de diferentes níveis de complexidade. Além disso, essas curvas revelaram uma alteração notável no comportamento tradicionalmente associado à Escada do Diabo, introduzindo características que desafiam a compreensão clássica desse fenômeno. Durante a análise do número de rotação ao longo dessas curvas, foi descoberta uma nova estrutura, denominada *Escada do Diabo Descontínua*.

Avaliamos o impacto nas estruturas de periodicidade devido à introdução de ruído no espaço de fases do mapa do Círculo, utilizando o expoente de incerteza como métrica tanto para a curva extrema quanto para uma curva adicional fora dessa região. Posteriormente, em uma curva qualquer fora da extrema, essa abordagem foi ampliada para o mapa de Hénon (2D), permitindo examinar como os princípios observados em sistemas unidimensionais podem ser adaptados e aplicados a contextos bidimensionais. Os resultados obtidos não apenas apontam para novas interpretações das dinâmicas desses sistemas,

mas também oferecem um ponto de partida promissor para análises futuras em sistemas mais complexos, contribuindo para o avanço no estudo da teoria de sistemas dinâmicos.

Assim, os resultados aqui relatados são geralmente demonstrados para a classe de mapas unidimensionais com pelo menos dois parâmetros de controle, sendo possível generalizações para outras classes de sistemas.

Enfatizamos que, ao longo das simulações numéricas realizadas neste trabalho, utilizamos algoritmos desenvolvidos em linguagem *Fortran*, devido à sua eficiência na execução de cálculos de alta precisão e desempenho em computação científica. Os dados obtidos a partir dessas simulações foram analisados e visualizados com o auxílio dos softwares *Gnuplot* e *Xmgrace*, ferramentas robustas e amplamente empregadas na geração de gráficos científicos de alta qualidade. Essas ferramentas permitiram representar os resultados de forma clara e detalhada, facilitando a interpretação e validação das análises realizadas.

Sobre este texto

O presente texto é resultado dos estudos realizados no Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), no período de março de 2020 a dezembro de 2024, sob a orientação do Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos.

Este texto está organizado em cinco capítulos, sendo que no primeiro apresentamos alguns conceitos fundamentais sobre dinâmica não linear e caos para sistemas dissipativos unidimensionais discretos que serviram de base para a análise dos mapeamentos Logístico, Logistic-like, Logístico perturbado, Quártico e do Círculo.

No segundo capítulo apresentamos os resultados principais de nossa pesquisa, e para tanto, destacamos o mapa Logístico-Gauss que, gerado da composição entre os mapas Logistic-like e Gauss, foi escolhido por ser atual e pela possibilidade de resgatar mapeamentos já conhecidos na literatura. Nesse capítulo apresentamos como se calcula o expoente de incerteza e o aplicamos a teoria de curvas extremas, onde foi possível obter resultados valiosos.

Os resultados das pesquisas para o coeficiente de incerteza ao longo de curvas extremas

foram realizados para os mapas Logístico-Gauss, Logístico perturbado, Círculo e Hassell perturbado, valendo-se dos mapeamentos estudados no capítulo 1. Encontramos que o coeficiente de incerteza, ao longo das curvas extremas, apresentam valores muito inferiores [$\alpha \approx 0,232(2)$] quando comparado aos medidos em outras direções [$\alpha \approx 0,40(1)$], valores típicos independente do sistema dinâmico unidimensional.

No terceiro capítulo, nos concentramos em analisar o fator de incerteza nas proximidades de curvas extremas e descobrimos que a curva extrema é o limite entre duas regiões no espaço dos parâmetros de complexidades distintas.

No quarto capítulo, identificamos uma alteração significativa no comportamento usualmente atribuído à Escada do Diabo, revelando características que desafiam a interpretação clássica desse fenômeno. Durante a análise do parâmetro $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n}$, ao longo dessas curvas, foi identificada uma nova estrutura, que denominamos por *Escada do Diabo Descontínua*.

No capítulo final, investigamos o impacto de perturbações uniformes, como o ruído branco, no comportamento de sistemas dinâmicos não lineares, com ênfase em suas implicações no espaço de parâmetros. Analisamos a influência do ruído sobre as propriedades desses sistemas e discutimos a invariância de escala, levantando hipóteses sobre a convergência do coeficiente de incerteza e a identificação de uma curva universal. Na sequência, comparamos o mapa do Círculo (1D) e o mapa de Hénon (2D), destacando as semelhanças e diferenças que emergem na presença de ruídos.

Por fim, exibimos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS

Nesse capítulo apresentaremos alguns conceitos de sistemas dinâmicos não lineares que darão embasamento para melhor compreensão da atual pesquisa. Os conceitos dizem respeito aos mapeamentos unidimensionais, percorrendo desde iterações do mapeamento e expoente de Lyapunov, até espaços de parâmetros e curvas extremas. Este percurso será descrito por mapeamentos distintos.

1.1 Mapas unidimensionais em tempo discreto

Geralmente, parte dos livros de Física destinados à dinâmica não linear e caos iniciam seus trabalhos utilizando as equações diferenciais como base para o desenvolvimento dos estudos. Isso ocorre, pois na disciplina de Física existe um contato muito grande com essas equações [21]. No entanto, para fins de simplicidade adotaremos os conceitos de mapa, pois através deles é possível obter comportamentos caóticos, o que para tempos contínuos exigiria no mínimo fluxo tridimensional [22].

Desta forma, concentramos nossos estudos em equações onde o tempo é uma variável discreta, ou seja, equações onde o tempo assume somente valores inteiros, essas equações são nomeadas por equações de diferença ou simplesmente mapa. Um mapa N -dimensional

pode ser generalizado por:

$$X_N(t+1) = F_N(x_1(t), \dots, x_N(t)). \quad (1.1)$$

Contudo, nesse capítulo, iremos nos ater aos mapas unidimensionais e escreveremos o mapeamento como:

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (1.2)$$

1.2 O mapa Logístico e iterações do mapeamento

O biólogo Robert May, em 1976, com o objetivo de modelar o crescimento populacional [23–25] apresentou o mapeamento Logístico que é descrito pela equação

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n). \quad (1.3)$$

Como a equação apresenta um formato simples e oferece complexidades fundamentais em dinâmica não linear [26], ela está entre os sistemas dinâmicos mais estudados, apresentando uma rica gama de comportamentos amplamente observados em sistemas dinâmicos reais, características que apoia a validade dos resultados obtidos no presente trabalho.

Dado um mapeamento unidimensional representado por $x_{n+1} = F(x_n)$ e um determinado valor inicial da variável x_0 , ao realizarmos uma aplicação (iteração) do mapa em uma condição inicial x_0 , obteremos $x_1 = F(x_0)$ e repetindo esse procedimento recursivamente, a próxima aplicação será $x_2 = F(x_1) = F(F(x_0))$. Desta forma, ao se realizar n aplicações teremos $x_n = F(\dots(F(x_0))) = F^n(x_0)$. Observe que F^n representa a n -ésima iteração de F avaliada sequencialmente em $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Ou seja, conhecido o valor de uma variável em um determinado instante x_n , obtemos o estado seguinte através de $F(x_n) = x_{n+1}$. Por exemplo, escrevendo o mapeamento Logístico com $R = 2,7$ em um determinado instante $x_0 = 0,3$, o estado seguinte será

$$x_1 = F(x_0) = Rx_0(1 - x_0) = 0,567. \quad (1.4)$$

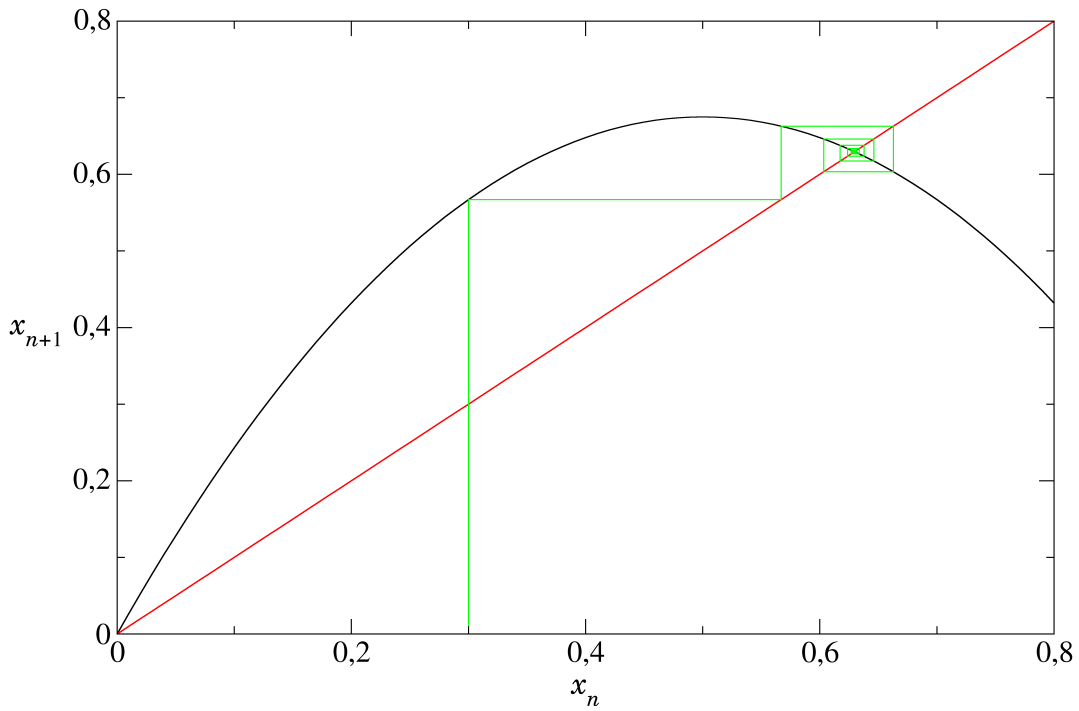


Figura 1.1: Mapa de retorno das 100 iterações sucessivas do mapeamento Logístico, com a condição inicial $x_0 = 0,3$ e $R = 2,7$.

Na sequência,

$$x_2 = F(x_1) = F(0,567) = 0,6628797. \quad (1.5)$$

E assim, sucessivamente, até encontrarmos o n -ésimo termo x_n .

Essa análise também pode ser representada geometricamente. Geralmente a apreciação gráfica dos mapeamentos pode nos auxiliar em diversos entendimentos no que se refere a teoria de sistemas dinâmicos, pois possibilita a visualização de sistemas complicados conduzindo a uma maior reflexão e, conseqüentemente, abrindo a compreensão nas mais diversas análises.

Desta forma, para a elaboração da Fig. 1.1, inicialmente, plotamos a função do mapeamento $F(x)$ e também a função identidade $y = x$ sobrepostas em um mesmo sistema cartesiano. A partir de um valor inicial x_0 , traçamos uma linha perpendicular ao eixo x até interceptar a função do mapeamento. Em seguida, desenhamos uma linha horizontal também em relação ao eixo x e em direção à reta identidade, ao cruzá-la, obtemos o valor de x_1 . Após tocar a reta $y = x$, traçamos novamente a linha vertical em busca da função do mapeamento, posteriormente, depois de interceptar a função do mapeamento, delinea-

mos a reta horizontal e procuramos novamente pela função identidade, onde encontramos x_2 . Seguindo com esse procedimento podemos iterar o mapa quantas vezes julgarmos necessário.

Esse tipo de gráfico é nomeado de mapa de retorno ou teia de aranha (cobweb). Observe que ao realizar 100 iterações para a condição inicial $x_0 = 0,3$ do mapeamento em questão, é visível que essas iterações tendem a convergir para um determinado valor, no caso $x = 0,62962962\dots$, que recebe o nome de ponto fixo e será estudado na próxima seção.

Outra forma de visualizar iterações sucessivas pode ser descrita simplesmente por um gráfico onde o eixo da abscissa é representado pela iteração n e o eixo das ordenadas pelo valor resultante dessa iteração x_n , ou seja, é um gráfico de x_n em função de n . Alguns exemplos são apresentados na Fig. 1.2 onde é possível observar que os valores que R assumem fazem com que a evolução temporal seja convergente a diferentes pontos fixos. Contudo, quando $R = 3,2$ o estado assintótico é periódico de período 2 e os valores a partir de um determinado n , ficam oscilando entre os números $0,51304450\dots$ e $0,79945549\dots$, como mostra a Fig. 1.3.

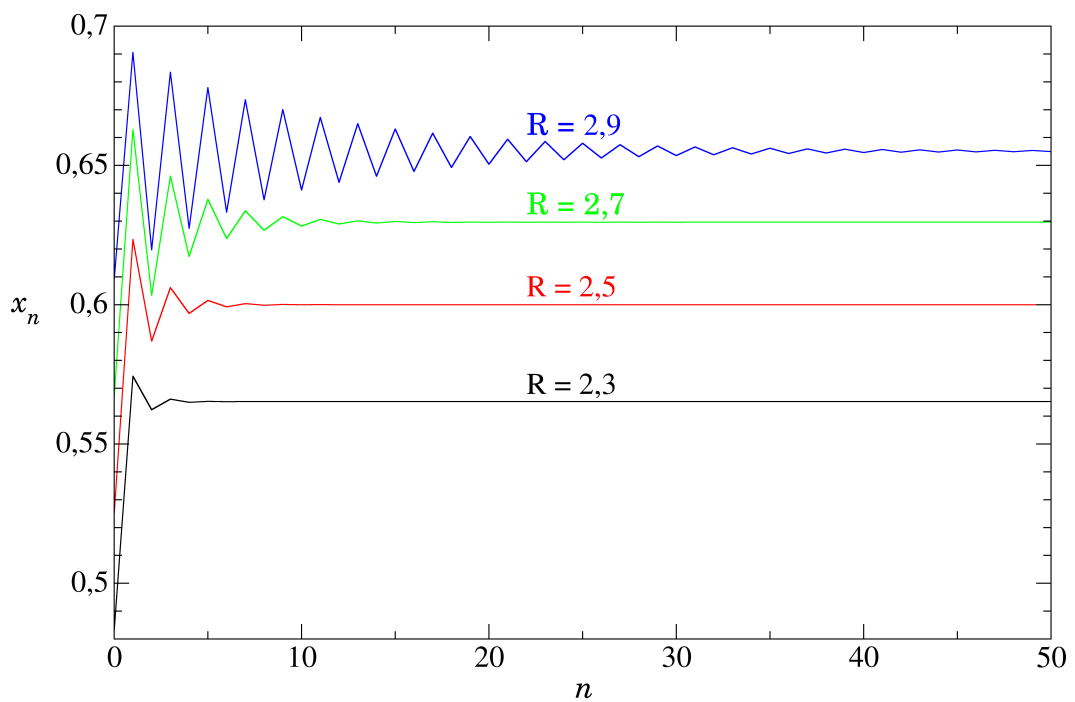


Figura 1.2: Nas figuras apresentamos a evolução temporal x_n vs. n para o mapa Logístico que foram gerados com a condição inicial $x_0 = 0,3$ e 50 iterações, com quatro valores distintos de R .

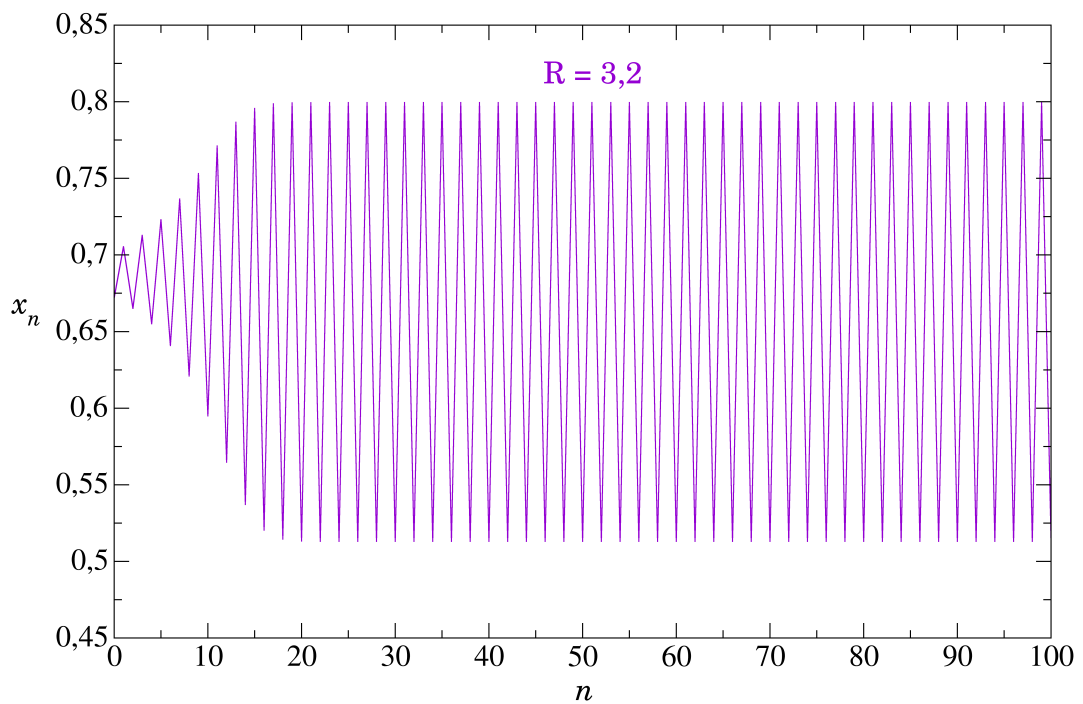


Figura 1.3: Convergência da dinâmica para uma órbita de período 2.

1.3 O mapa Logistic-like e a órbita do mapeamento

Nesta seção apresentaremos o estudo da órbita e do ponto fixo para o mapa Logistic-like

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (1.6)$$

que constitui uma generalização do mapa Logístico [27], onde x é a variável dinâmica e o índice n indica a iteração do mapeamento. Nos nossos estudos, consideramos os parâmetros de controle do sistema reais, com $R \in [0,4]$ e $\gamma > 0$.

Fisicamente, γ controla a não linearidade do sistema. Ele ajusta a forma da função que determina como a variável dinâmica x_n evolui a cada iteração. Quando $\gamma = 1$, o mapa se reduz ao mapa Logístico clássico, onde a dinâmica é quadrática e bem conhecida por sua capacidade de gerar comportamentos caóticos a partir de valores específicos de R .

Para $\gamma > 1$, a não linearidade da função é aumentada. Isso significa que a resposta do sistema ao valor atual de x_n é mais acentuada, levando a diferentes padrões de comportamento, como o aumento da sensibilidade a pequenas variações em x_n . Por outro lado, quando $\gamma < 1$, a evolução do sistema se suaviza, potencialmente reduzindo a complexidade dinâmica.

Em um mapa, a órbita a partir de um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ é a sequência de pontos $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_{n+1} = F^n(x_0)$. Quando essa órbita for constante, dada por $F(x_n) = x_n$, ela é denominada ponto fixo e adotaremos a seguinte notação

$$F(P^*) = P^*. \quad (1.7)$$

Por exemplo, para determinarmos os pontos fixos do mapeamento Logistic-like, temos

$$RP^*[1 - (P^*)^\gamma] = P^*, \quad (1.8)$$

$$P^* \left\{ R[1 - (P^*)^\gamma] - 1 \right\} = 0. \quad (1.9)$$

Que apresenta duas soluções, $P_1^* = 0$ e $P_2^* = \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. Esses pontos fixos podem ser

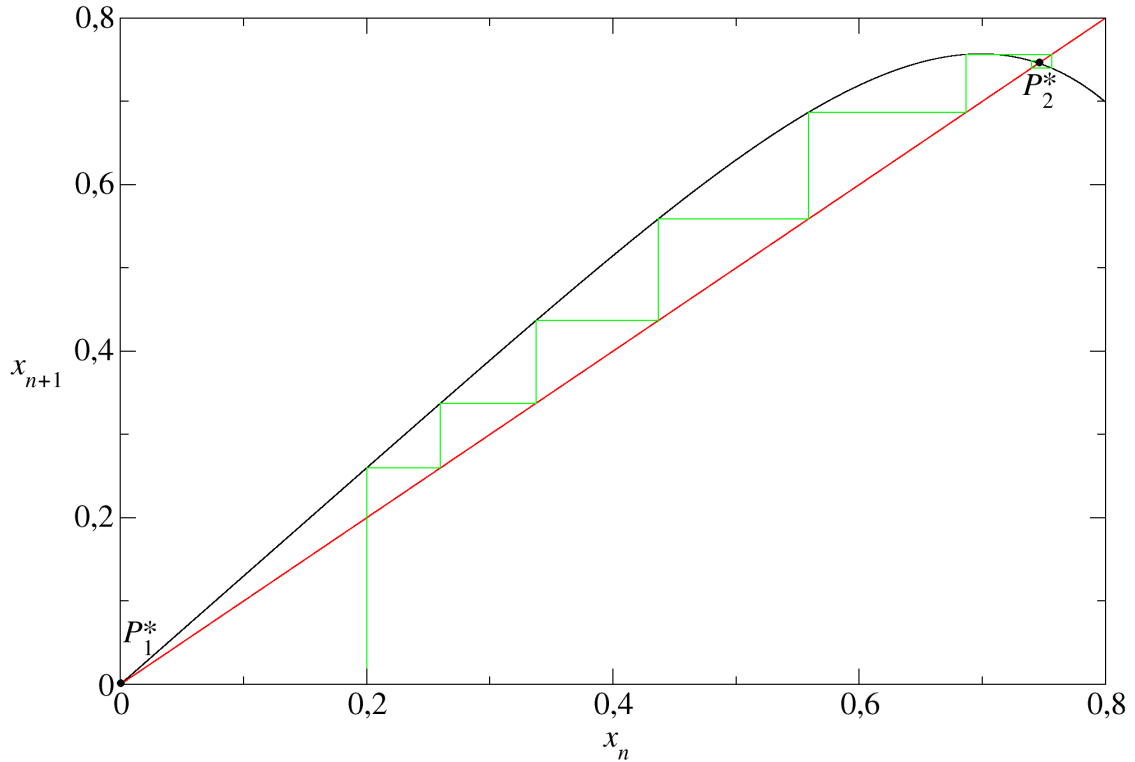


Figura 1.4: Mapa de retorno representando os dois pontos fixos P_1^* e P_2^* , que correspondem às intersecções da função do mapeamento com a reta identidade. O mapeamento Logistic-like e suas iterações sucessivas, a partir da condição inicial $x_0 = 0,2$, evoluem para o ponto fixo P_2^* , para $R = 1,3$ e $\gamma = 5$.

visualizados geometricamente. Na Fig. 1.4 as intersecções entre os gráficos $y = F(x)$ (cor preto) e $y = x$ (cor vermelho), representam os primeiros pontos fixos do mapeamento e, dada uma condição inicial, as linhas (cor verde) representam as sucessivas iterações. Observe que as iterações acumulam-se em um determinado valor 0,745822671, que é representado pelo segundo ponto fixo $\left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, com $R = 1,3$ e $\gamma = 5$.

Caso a órbita atender à condição $F^n(x_0) = x_0$, para algum $n > 0$, ela é chamada de órbita periódica ou cíclica de período n , e pode ser expressa da seguinte forma:

$$x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), F^n(x_0) = x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), F^n(x_0) = x_0, \dots \quad (1.10)$$

Por exemplo, $x_0 = 0$ encontra-se em um ciclo de período 2 para $F(x) = x^2 - 1$, uma vez que $F(0) = -1$ e $F(-1) = 0$. Assim, a órbita periódica é

$$0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots \quad (1.11)$$

Pontos fixos também são chamados de órbitas periódicas de período 1. Pode não ser uma tarefa simples encontrarmos analiticamente as equações que geram pontos periódicos de período maior que 2. Por exemplo, ciclos de período 6, dado um mapeamento de grau 2, implicaria em encontrar as raízes de uma equação de grau 64, já que somente após seis iterações um ciclo seria completo, ou seja, $F^6(x) - x = 0$.

1.3.1 Análise de estabilidade do ponto fixo para o mapa Logistic-like

Suponha que P_0^* seja um ponto fixo para $F(x)$. Então P_0^* é um ponto fixo atrativo e denominado assintoticamente estável, se $|F'(P_0^*)| < 1$. O ponto P_0^* é um ponto fixo repulsivo ou instável, se $|F'(P_0^*)| > 1$. Finalmente, se $|F'(P_0^*)| = 1$, o ponto fixo pode ser neutro, atrativo ou repulsivo a depender de uma análise de termos de segunda ordem do mapa.

Iremos verificar para o mapa Logistic-like a instabilidade dos pontos fixos P_1^* e P_2^* , calculados anteriormente. Para tal, devemos primeiramente derivar a função do mapeamento em relação a x , desta forma

$$F'(x) = R - (\gamma + 1)Rx^\gamma. \quad (1.12)$$

Fazendo a análise para o primeiro ponto fixo $P_1^* = 0$, obtemos

$$F'(P_1^*) = R. \quad (1.13)$$

Assim, para $|R| < 1$, ou seja, $-1 < R < 1$, o ponto fixo será atrator. Como nossos estudos consideram apenas valores positivos de R , P_1^* é um atrator assintoticamente estável se $R \in [0,1)$. Caso $R = 1$, dizemos que ele é neutro ou estável. Se $R > 1$, o ponto fixo será repulsor e dizemos que é instável. Note que, na Fig. 1.4, $P_1^* = 0$ é um ponto repulsor, uma vez que consideramos $R = 1,3$. O ponto fixo $P_2^* = \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, somente tem soluções negativas ($0 < R < 1$) se o expoente for um número racional com denominador ímpar. Ou seja, considerando $\gamma = p/q$ racional, P_2^* tem soluções negativas somente se p for ímpar.

De acordo com a Eq. 1.12,

$$F'(P_2^*) = -R\gamma + \gamma + 1. \quad (1.14)$$

Assim, para que P_2^* seja atrator

$$1 < R < 1 + \frac{2}{\gamma}. \quad (1.15)$$

Logo, $P_2^* < 0$ (quando existir) é sempre instável. por outro lado, P_2^* é assintoticamente estável quando $R \in \left(1, 1 + \frac{2}{\gamma}\right)$, estável ou neutro para $R = 1$ ou $R = 1 + \frac{2}{\gamma}$ e instável ou repulsor para qualquer outro valor de R . Na Fig. 1.4 consideramos $R = 1,3$ e $\gamma = 5$, então, P_2^* é um atrator.

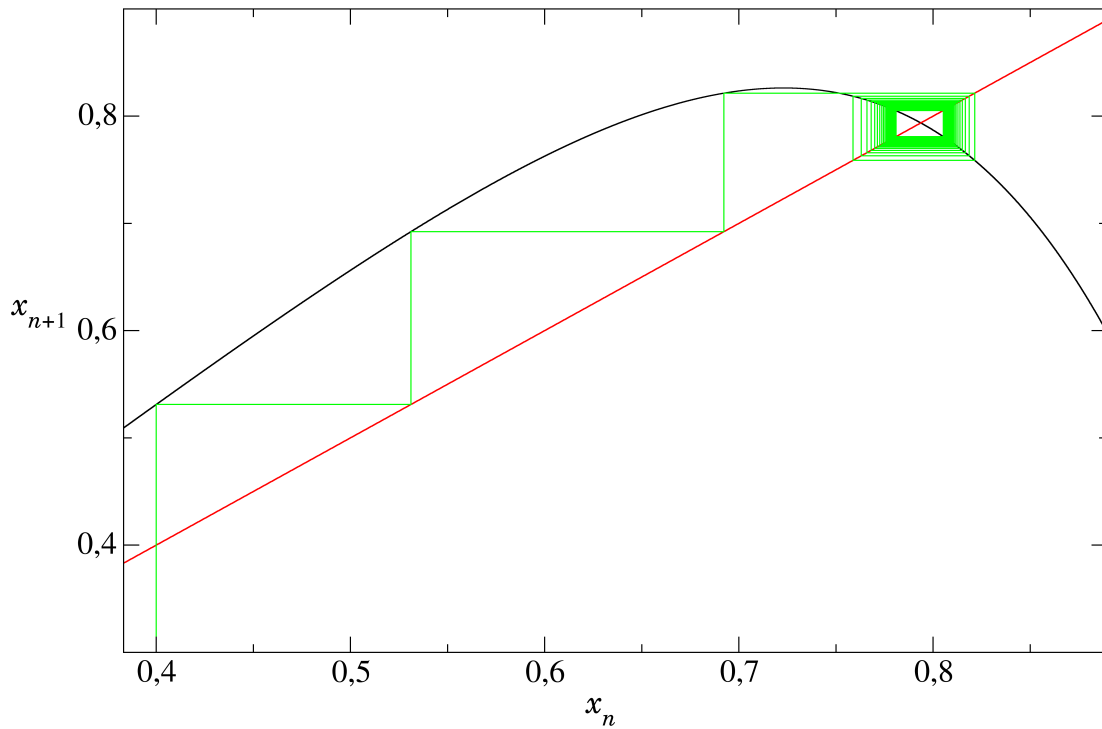


Figura 1.5: Análise gráfica mostrando a estabilidade do ponto fixo para $\gamma = 6$, condição inicial $x_0 = 0,4$ e $R = 1 + \frac{2}{\gamma}$. Observamos um ponto fixo neutro, que não é repulsor nem atrator.

As Figs. 1.5 e 1.6 apresentam duas situações distintas relacionadas ao comportamento do ponto fixo P_2^* : quando ele é neutro e quando ele é repulsor, respectivamente. Na Fig. 1.5, o ponto fixo P_2^* exibe um comportamento neutro. Nesse caso, a linha verde

representa a trajetória de uma órbita que mantém uma distância constante em relação ao ponto fixo. Observa-se que, embora a trajetória não convirja para P_2^* , ela também não se afasta significativamente dele, indicando a ausência de atração ou repulsão predominante, comportamento característico de um equilíbrio.

Já na Fig. 1.6, P_2^* se comporta como um ponto fixo repulsor. Neste caso, a linha verde ilustra uma trajetória que, ao se aproximar de P_2^* , é claramente repelida. Isso significa que o sistema apresenta uma dinâmica em que as proximidades de P_2^* são instáveis, impedindo que a órbita convergente permaneça próxima do ponto fixo. A repulsão resulta em um afastamento contínuo da órbita em relação ao ponto fixo, reforçando sua natureza instável.

Esses cenários ilustram como o comportamento de pontos fixos pode variar de acordo com as propriedades dinâmicas do sistema, influenciando diretamente a estabilidade e as características das órbitas nas proximidades desses pontos.

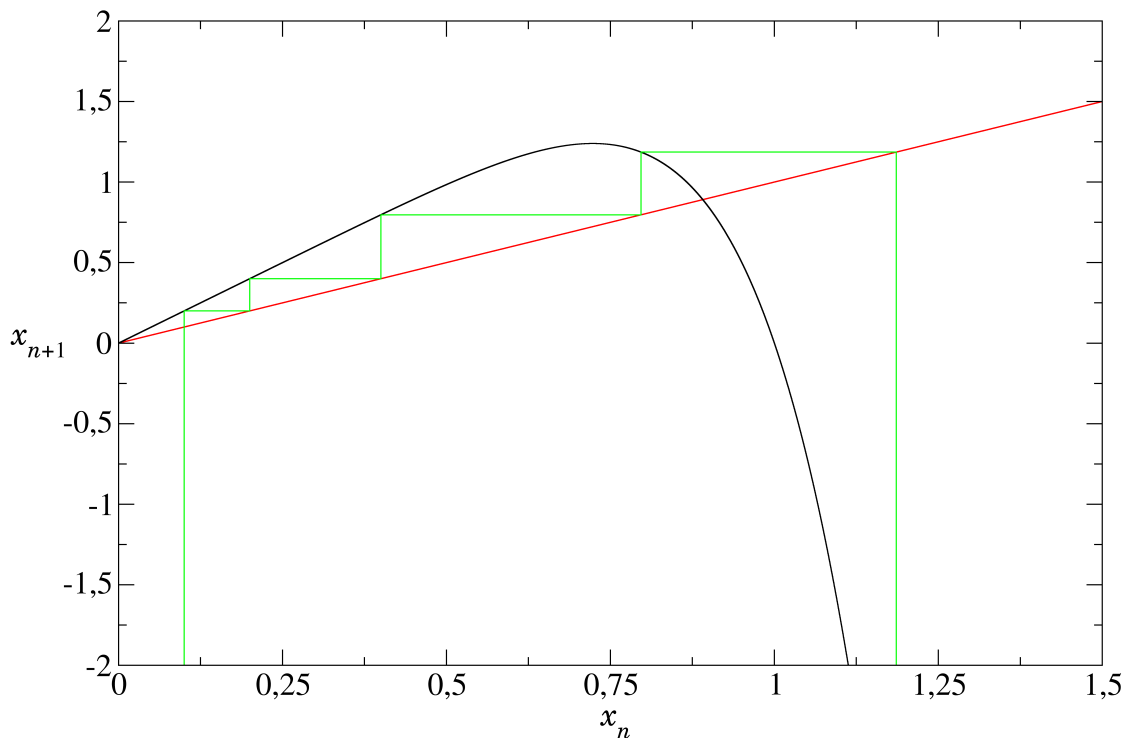


Figura 1.6: Um ponto fixo repulsor é ilustrado, com condição inicial $x_0 = 0,1$ e $R = 2$.

Também podemos analisar os pontos fixos de um mapeamento a partir de uma abordagem visual, representando x_n em função de R . Nesse método, o mapa é evoluído para cada valor fixo de R , e os últimos pontos da trajetória são apresentados. Antes disso, as primeiras iterações são descartadas, o que corresponde ao chamado tempo transitório

ou simplesmente transiente. Esse tempo transitório permite que as órbitas do sistema alcancem um comportamento estável, quando este existir.

Essa abordagem é conhecida como diagrama de bifurcação e fornece uma visão ampla do comportamento dinâmico da família de mapeamentos. Ele também revela como ocorre a transição para o caos, frequentemente caracterizada pela duplicação sucessiva de períodos. Apresentamos, a seguir, três diagramas de bifurcação para o mapa Logistic-like, com 100 iterações após um transiente de 1000 passos.

A Fig. 1.7 foi gerada com a condição inicial $x_0 = 0,1$ e $\gamma = 5$. Já a Fig. 1.8 apresenta a sobreposição de dois diagramas: o gráfico preto foi obtido com $\gamma = 6$ e $x_0 = 0,1$, enquanto o gráfico vermelho foi gerado com $\gamma = 6$ e $x_0 = -0,1$.

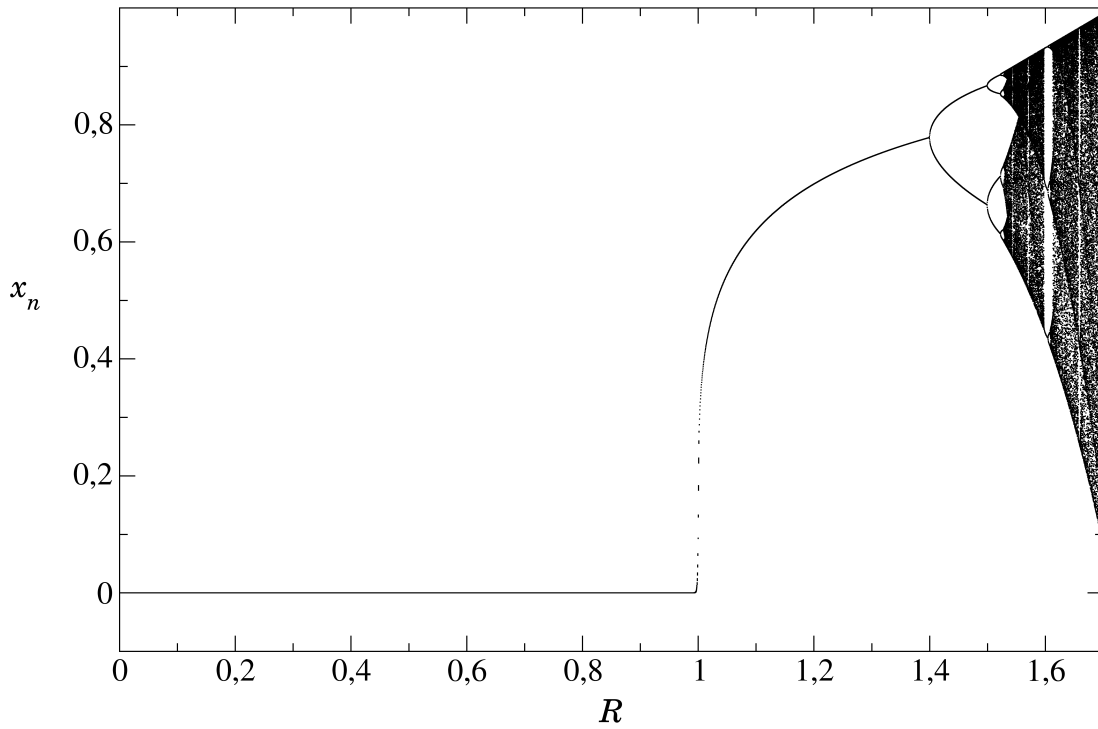


Figura 1.7: Diagrama de bifurcação para o mapa Logistic-like, para $x_0 = 0,1$ e $\gamma = 5$.

A distinção entre os três gráficos se deve à coexistência de dois atratores simétricos, a depender da condição inicial, particularmente quando γ é par. Nesse caso, o termo $x_n^{\gamma+1}$, decorrente da Eq. (1.6), preserva o sinal de x_n durante as iterações iniciais, pois $\gamma + 1$ é ímpar. Isso faz com que x_n mantenha o mesmo sinal de x_0 por uma quantidade considerável de iterações. Assim, para $x_0 > 0$, x_n permanece positivo e para $x_0 < 0$, x_n permanece negativo, ambos para valores moderados de R , onde as oscilações do sistema ainda não

são grandes o suficiente para alternar o sinal de x_n . No entanto, à medida que R aumenta, o comportamento dinâmico do sistema se torna mais complexo, ampliando as oscilações e permitindo que x_n explore tanto valores positivos quanto negativos, independentemente da condição inicial. Esse fenômeno reflete a transição do sistema para o regime caótico, onde a dependência do sinal inicial é perdida.

Portanto, as diferenças observadas nos gráficos sobrepostos são diretamente influenciadas pela relação entre o grau do polinômio dado pelo termo $x_n^{\gamma+1}$. Além disso, para todos os três diagramas, observa-se uma sequência de duplicações de período à medida que R aumenta. Ampliando certas regiões do diagrama, percebe-se que a figura resultante apresenta uma estrutura semelhante à figura original. Essas duas características são marcas da rota para o caos por meio de sucessivas duplicações de período [28].

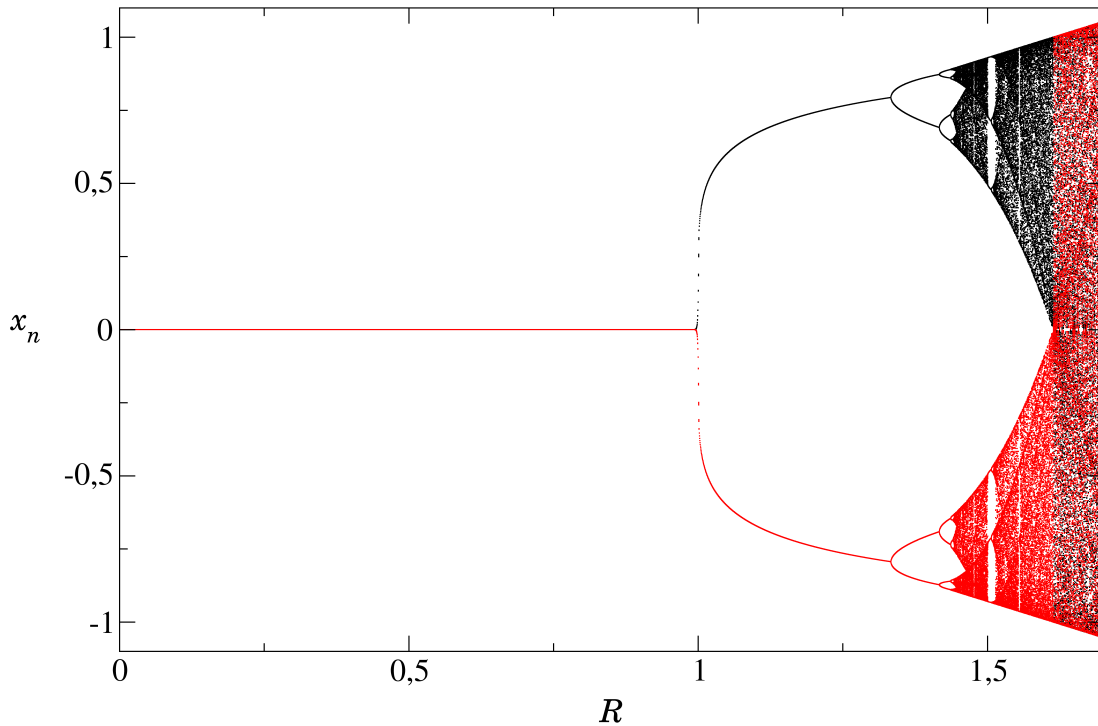


Figura 1.8: Diagrama de bifurcação apresentando a sobreposição de dois diagramas que apresentam $\gamma = 6$ e condição inicial distintas, um com $x_0 = 0,1$ (preto) e o outro $x_0 = -0,1$ (vermelho).

1.4 Expoente de Lyapunov para o mapa Logístico perturbado

Para estudar um sistema dinâmico é de suma importância que se discuta sobre sua caoticidade. Alexander M. Lyapunov, matemático russo, ao adotar duas condições iniciais próximas e as evoluir no tempo, desenvolveu um método de medida que é possível mensurar a sensibilidade entre essas duas condições iniciais através da taxa de distanciamento no tempo. A essa medida se deu o nome de expoente de Lyapunov λ e por meio dela foi possível o avanço dos estudos em sistemas dinâmicos no que se refere a sensibilidade às condições iniciais de um sistema. O cálculo do expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais em tempos discretos é dado por uma transformação $x_{n+1} = F(x_n)$ que é realizada por iterações do mapeamento e pode ser definida como

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (1.16)$$

com $n \rightarrow \infty$. Essa definição é resultante da seguinte aproximação

$$\epsilon(n) \approx \epsilon e^{\lambda n}, \quad (1.17)$$

em que $\epsilon(n)$ representa a distância entre duas condições iniciais após a n -ésima iteração do mapeamento e λ o expoente de Lyapunov. Assim, substituindo $\epsilon(n)$ obtemos

$$F^n(x + \epsilon) - F^n(x) \approx \epsilon e^{\lambda n}, \quad (1.18)$$

onde $F^n(x) = F(F(\dots F(x)))$ é função do mapeamento iterada n vezes. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação e desenvolvendo suas propriedades, alcançamos

$$\ln[F^n(x + \epsilon) - F^n(x)] \approx \ln[\epsilon e^{\lambda n}], \quad (1.19)$$

$$\ln[F^n(x + \epsilon) - F^n(x)] \approx \ln \epsilon + \ln[e^{\lambda n}], \quad (1.20)$$

$$\ln[F^n(x + \epsilon) - F^n(x)] - \ln \epsilon \approx \lambda n, \quad (1.21)$$

$$\ln \left[\frac{F^n(x + \epsilon) - F^n(x)}{\epsilon} \right] \approx \lambda n, \quad (1.22)$$

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left[\frac{F^n(x + \epsilon) - F^n(x)}{\epsilon} \right]. \quad (1.23)$$

Para ϵ tendendo a zero, temos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right|. \quad (1.24)$$

Utilizando a regra da cadeia $\frac{df^n(x)}{dx} = \prod_{i=0}^{n-1} F'(x_i)$, aplicando a regra do logaritmo da multiplicação e fazendo n tender a infinito, obtemos a equação do expoente de lyapunov

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (1.25)$$

conforme apresentado anteriormente.

Se λ assumir valores negativos, $\epsilon(n) \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow \infty$, as condições iniciais tendem a percorrer a mesma trajetória após n iteradas. Caso $\lambda = 0$ a distância entre essas condições se mantém constante, pois $\epsilon(n) = \epsilon$ para quaisquer valores de n suficientemente grande. Da mesma forma, podemos inferir que se λ apresentar valores positivos, as condições iniciais irão se afastar de forma exponencial a medida que $n \rightarrow \infty$.

Assim, se duas condições iniciais, tão próximas quanto se queira, se distanciam exponencialmente com o decorrer do tempo ($\lambda > 0$), o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais, uma característica do caos. Se a distância entre as órbitas se mantém constante $\lambda = 0$, o sistema pode estar em um ponto de bifurcação ou o comportamento pode ser quase-periódico. No entanto, se a distância entre as órbitas convergir de forma exponencial para zero, sejam pontos fixos ou órbitas periódicas, o sistema apresentará $\lambda < 0$.

Para visualizarmos as regiões de periodicidade e caoticidade iremos calcular o expoente de Lyapunov para o mapa Logístico perturbado

$$x_{n+1} = x_n R(1 + b_n \epsilon)(1 - x_n), \quad (1.26)$$

em que b_n e $R > 0$ são parâmetros de controle de tal forma que o primeiro controla a

amplitude da perturbação ε e o segundo o próprio sistema [29, 30]. Para uma condição inicial x_0 , temos que b_0 pode ser 1 ou -1, e assim definimos $b_n = (-1)^n$ ou $b_n = (-1)^{n+1}$. Caso $\varepsilon = 0$ recuperamos o mapa Logístico original de Robert May.

Na Fig. 1.9, é apresentada a comparação entre o diagrama de bifurcação e o expoente de Lyapunov para o mapa Logístico perturbado, com condição inicial $x_0 = 0,1$, descartando as 1 000 primeiras iterações e considerando as 100 iterações subsequentes. Verifica-se uma janela periódica entre $R = 0$ e a linha tracejada azul, onde $\lambda < 0$. Bifurcações de duplicação de período ocorrem quando $\lambda = 0$. À direita da linha tracejada azul concentra-se a região de comportamento caótico onde $\lambda > 0$. Em síntese, podemos entender que a linha tracejada azul é uma espécie de fronteira local entre a região de periodicidade e caótica.

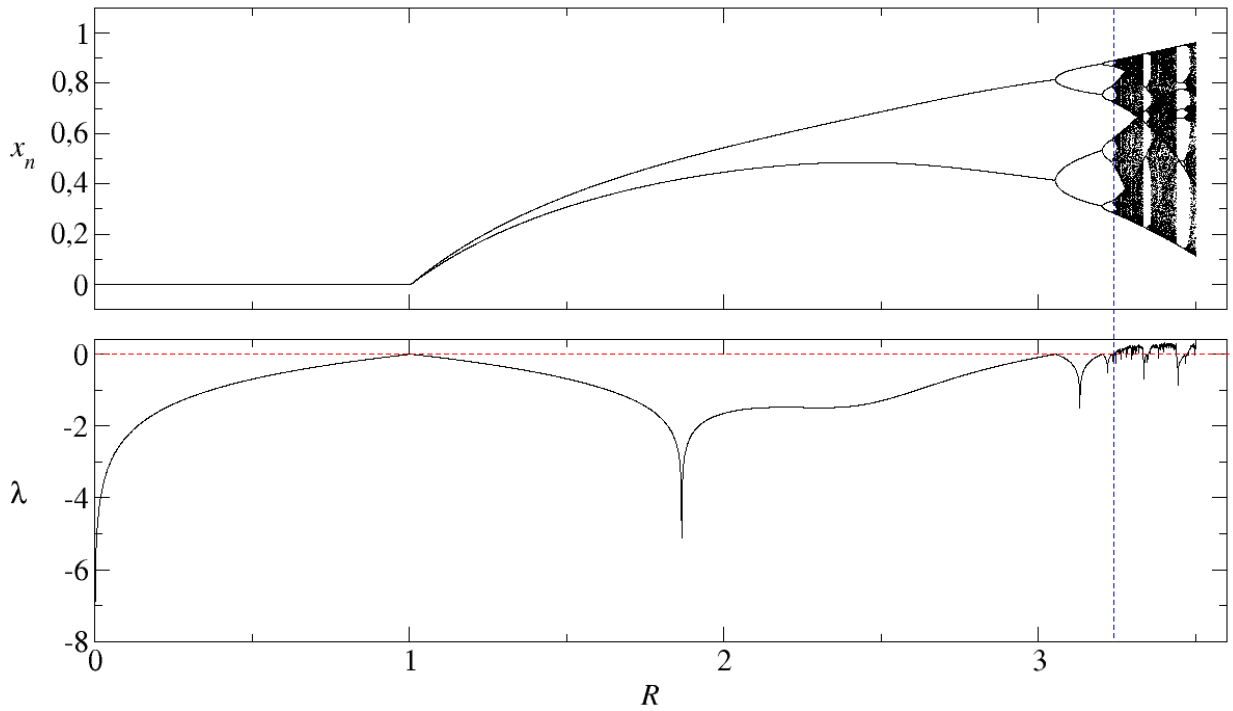


Figura 1.9: Diagrama de bifurcação (parte superior) e o expoente de Lyapunov (parte inferior) referente ao mapa Logístico perturbado.

1.5 Espaço de parâmetros para o mapa Quártico

Os mapas dinâmicos polinomiais, como o mapa Quártico [31], fazem parte de uma ampla classe de sistemas que exibem uma rica variedade de comportamentos dinâmicos.

Eles podem ser usados para modelar fenômenos em áreas como física, química e biologia, e são amplamente estudados em sistemas dinâmicos não lineares devido à sua riqueza de comportamento que ele apresenta. Um exemplo notável dessa classe de mapas é o mapa Quártico, descrito pela Eq.:

$$x_{n+1} = b - (a - x_n^2)^2. \quad (1.27)$$

Este mapa, introduzido inicialmente para o estudo de estabilidade das estruturas de periodicidade [8], foi também explorado no contexto de sistemas dinâmicos com múltiplos atratores, como demonstrado em [32], que investigaram comportamentos coletivos emergentes e a coexistência de múltiplos atratores em sistemas não lineares.

O comportamento do mapa Quártico é governado pelos parâmetros de controle a e b . A sondagem desses parâmetros revela estruturas entrelaçadas no espaço de parâmetros, onde regiões caóticas e periódicas coexistem, conectadas por transições abruptas. A análise dessas regiões pode ser feita através do cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Para gerar o espaço de parâmetros do mapa Quártico, adotamos 10^3 por 10^3 sequências de pontos igualmente espaçados nos intervalos $b \in [1,2; 1,6]$ e $a \in [0,4; 1,2]$, com a condição inicial $x_0 = 10^{-1}$. Após descartar um transiente de 10^5 iterações, o expoente de Lyapunov é calculado nas próximas 10^5 iterações, utilizando a fórmula:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|.$$

A Fig. 1.10 apresenta o espaço de parâmetros b vs. a , onde a barra de cores representa os expoentes de Lyapunov, com uma paleta que vai de amarelo para preto (periódico, $\lambda < 0$) e de branco para azul (caótico, $\lambda > 0$). A cor salmão indica a região onde ocorreu divergência.

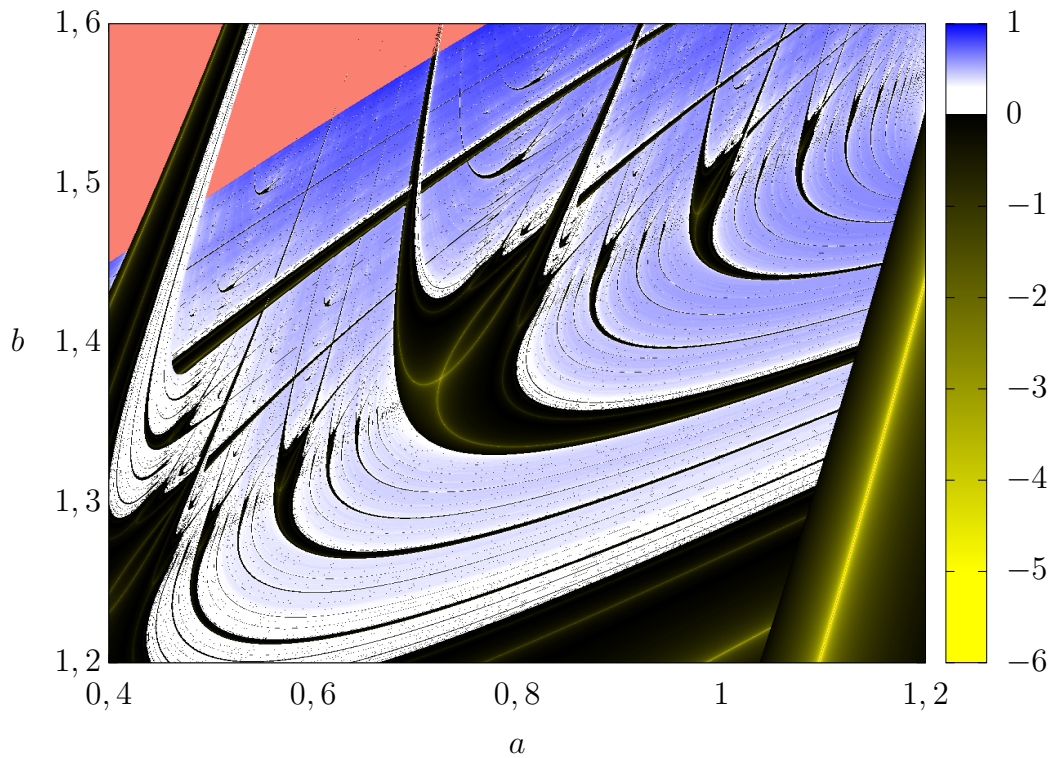


Figura 1.10: Espaço de parâmetros b vs. a do mapa Quártico, com a representação dos expoentes de Lyapunov λ indicada pela paleta de cores.

1.5.1 Ruído branco

Na Física, o conceito de *ruído branco* refere-se a uma perturbação caracterizada pela distribuição de energia uniforme ao longo de todo o espectro de frequências. Em termos práticos, aplicar ruído branco a um sistema significa introduzir uma perturbação cuja densidade espectral de potência é constante em todas as frequências do espectro. A analogia com o termo “branco” provém da luz branca, que é composta por uma mistura de todas as cores do espectro visível. Esse tipo de perturbação é amplamente utilizado em experimentos para representar um sinal de ruído aleatório, sem correlação entre diferentes frequências.

Quando se introduz ruído branco em um sistema observa-se variações imprevisíveis no comportamento do sistema. Isso ocorre porque o ruído amplia o espectro de estados e trajetórias possíveis, sendo um fenômeno particularmente importante em sistemas dinâmicos não lineares. O uso do ruído branco tem relevância em diversas aplicações, como na análise estatística de sistemas dinâmicos, na investigação da resposta de sistemas a

distúrbios internos e externos, e em estudos que envolvem sensoramento remoto, entre outros [33–37].

Nos últimos anos, a pesquisa sobre o impacto de pequenas perturbações e ruídos em sistemas dinâmicos não lineares tem se intensificado. Essas influências podem resultar em comportamentos extremamente complexos, como o caos induzido pelo ruído, no qual o sistema exibe comportamento caótico devido à presença do ruído, mesmo que, na ausência de perturbação, o sistema apresente comportamento regular [38]. Além disso, o ruído tem sido utilizado como uma ferramenta no controle do caos, uma técnica que visa manipular a dinâmica caótica para alcançar a estabilidade ou outros objetivos desejados [39, 40]. O sucesso dessas técnicas depende, em grande parte, do tipo de mapeamento considerado e da natureza do ruído introduzido. Mais informações sobre essas técnicas podem ser encontradas em trabalhos como [41–44].

Estudos focados no impacto do ruído em sistemas dinâmicos, inclusive no contexto de mapas unidimensionais, mostram que essas perturbações podem alterar profundamente a dinâmica do sistema. Efeitos como multiestabilidade, bifurcações e transições para o comportamento caótico são frequentemente observados. Essas questões são discutidas em diversos estudos, como os de [45–48], que abordam tanto aspectos teóricos quanto aplicações práticas do ruído branco em sistemas dinâmicos não lineares.

Para analisar os efeitos de uma perturbação causada por ruído no espaço de parâmetros, aplicamos uma perturbação uniforme ao mapa Quártico (Eq. 1.27) e examinamos as consequências no espaço de parâmetros. Essas perturbações são geradas a partir de uma sequência de ruídos aleatórios pertencentes ao intervalo ΔI , aplicados a cada iteração do mapeamento. Ao final de cada iteração, a perturbação é somada à variável dinâmica do sistema, conforme a equação:

$$x_{n+1} = b - (a - (x_n + r_n)^2)^2, \quad (1.28)$$

onde r_n é o número aleatório no intervalo $[-\Delta I, \Delta I]$.

O intervalo ΔI representa a amplitude da perturbação. Por exemplo, uma amplitude de 10^{-2} , corresponde a valores aleatórios dentro do intervalo $[-10^{-2}, 10^{-2}]$.

Para uma melhor visualização dos efeitos do ruído, aplicamos a perturbação $\Delta I = 10^{-2}$ ao mapa Quártico (1.10) e apresentamos a comparação entre os dois na Fig. 1.11, onde (a) mostra o mapa sem perturbação e (b) apresenta o mapa perturbado.

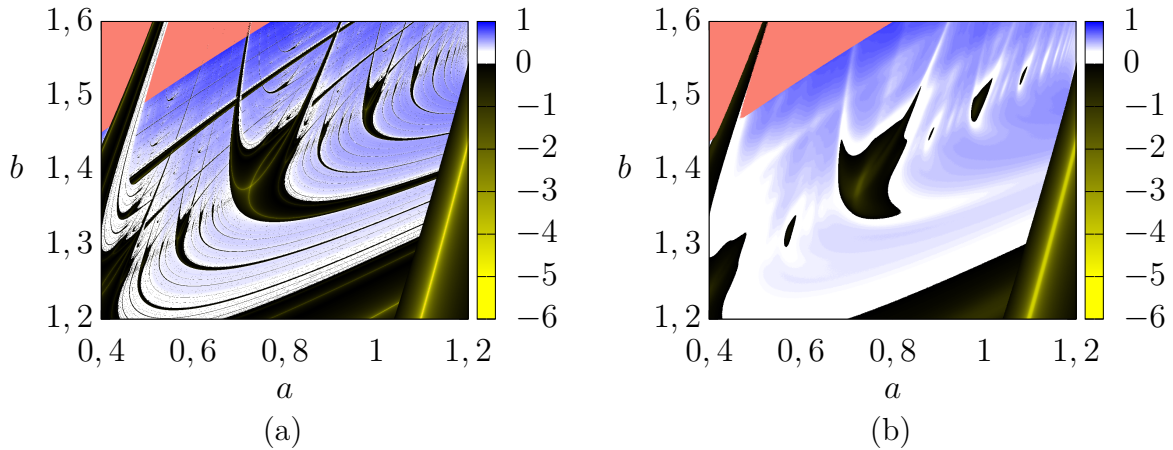


Figura 1.11: Espaço de parâmetros do mapa Quártico sem ruído (a) e com com ruído (b). Amplitude do ruído: $\Delta I = 10^{-2}$.

Observa-se que a introdução do ruído provoca uma diluição das regiões de estabilidade periódica no meio caótico, resultando na redução das áreas de periodicidade (regiões em preto) e na consequente expansão das regiões caóticas no espaço de parâmetros, invadindo áreas anteriormente periódicas à medida que a intensidade da perturbação aumenta.

1.5.2 Órbitas periódicas

O mapa Quártico, descrito pela Eq. (1.27), faz parte de uma classe mais abrangente de mapas polinomiais. Ele exibe uma diversidade rica de comportamentos dinâmicos, que variam de acordo com a escolha dos parâmetros a e b . O estudo detalhado do espaço de parâmetros deste mapa é essencial para compreender a complexa organização dos atratores e as transições entre estados periódicos e caóticos. Ao explorar diferentes regiões do espaço de parâmetros a e b , é possível identificar uma distinção clara entre zonas de periodicidade, associadas aos períodos das órbitas. Isso difere da Fig. 1.10, que foi construída com base no cálculo do expoente de Lyapunov.

Para construir o espaço de parâmetros que evidencia as regiões com órbitas periódicas, utilizamos $10^3 \times 10^3$ sequências de pontos igualmente espaçados nos parâmetros a e b ,

variando nos intervalos $[0,4; 1,2]$ e $[1,2; 1,6]$, respectivamente. Para cada par (a, b) , geramos uma sequência dinâmica a partir de uma condição inicial $x_0 = 0,1$ e descartamos as primeiras 10^5 iterações, referente ao comportamento transiente da dinâmica. Em seguida avaliamos a cada iteração se a condição $|(x_{n+k} - x_n) < 10^{-8}|$ é atendida, registrando o número k de iterações necessárias para isso, como sendo o período da órbita.

Na Fig. 1.12 a coloração do espaço de parâmetros é feita com base no período das órbitas periódicas encontradas. Para cada ponto (a, b) , onde o período foi calculado é atribuída uma cor correspondente a essa periodicidade. As regiões de períodos curtos, como 1, 2, 3 e 4 foram identificadas com as cores marrom, preto, verde e rosa, nesta ordem, enquanto que regiões com períodos 5, 6, 7 e 8 recebem cores, ciano, azul, laranja e vermelho. Em contrapartida, regiões com períodos maiores que 8, incluindo as regiões caóticas, onde não há periodicidade definida, marcamos com a cor branca.

A análise detalhada desse espaço de parâmetros permite a visualização de estruturas complexas, como a emergência de janelas periódicas imersas em zonas caóticas. Essas janelas são particularmente interessantes por formarem ilhas de estabilidade regular em meio à irregularidade caótica.

O estudo de órbitas periódicas não só ajuda a identificar regiões estáveis de comportamento periódico, mas também nos permitem uma percepção sobre como a dinâmica muda com pequenas variações nos parâmetros de controle. No espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos não lineares, em geral, as janelas de estados periódicos são alinhadas seguindo as rotas de adição de períodos configurando sequências de um número de um número de infinitas janelas periódicas [49]. Mapas polinomiais como o mapa Quártico são frequentemente usados para modelar sistemas complexos. Compreender a estrutura desse espaço de parâmetros é, portanto, essencial para prever e controlar o comportamento de sistemas reais que exibem características não lineares semelhantes.

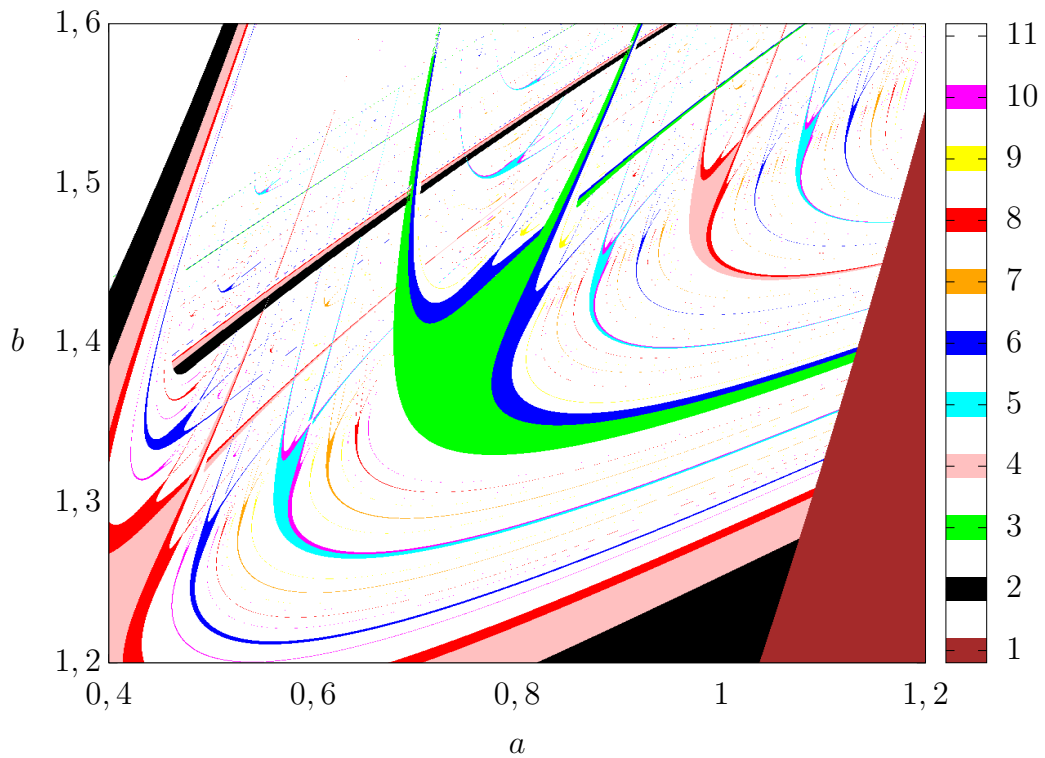


Figura 1.12: Representação do espaço de parâmetros b vs. a do mapa Quártico, destacando as regiões de periodicidade conforme a escala de cores atribuída aos números inteiros.

1.6 Órbitas superestáveis, extremas e o mapa do Círculo

O mapa do Círculo, assim como o mapa Logístico, aparenta ser de uma simplicidade enganosa, revelando um comportamento dinâmico rico e complexo. Em termos gerais, um mapa unidimensional do Círculo é um mapa transcendental expresso pela equação:

$$F(x) = x_{n+1} = x_n + \omega + g(x_n) \quad \text{mod } 1, \quad (1.29)$$

em que o ângulo x é normalizado no intervalo $[0, 1)$, ω representa a frequência natural do mapa e $g(x_n)$ é a componente não linear [50].

Com o objetivo de compreender a dinâmica de um rotor, Vladimir Arnold introduziu uma versão desse mapa com dois parâmetros, o mapa seno:

$$x_{n+1} = x_n + \omega - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad \text{mod } 1, \quad (1.30)$$

onde o parâmetro k controla a amplitude de oscilação [51].

Dada a complexidade desses sistemas, o expoente de Lyapunov se torna uma ferramenta essencial para distinguir entre comportamentos periódicos e caóticos. Essa análise é particularmente útil no estudo das órbitas periódicas superestáveis e extremas, cujas curvas podem ser determinadas no espaço de parâmetros do mapa do Círculo. A seguir definiremos mais formalmente o que são órbitas periódicas superestáveis e extremas.

Seja x_n um ponto próximo a p , que pertence a uma órbita periódica de período M (onde $p = F^M(p)$, $M > 0$) de uma aplicação discreta $x_{n+1} = F(x_n)$, e seja $\delta_n = x_n - p$ a distância entre eles. Se a órbita é estável, após M iterações, $\delta_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Definimos uma órbita periódica de período M como superestável se $F^M(p_i) = p_i$ e $(F^M)'(p_i) = 0$, para $i = 1, \dots, M$. Enquanto as trajetórias de uma órbita periódica estável são atraídas de forma linear com a distância $\mathcal{O}(\delta)$, em uma órbita periódica superestável, essa atração é significativamente mais rápida, sendo da ordem quadrática $\mathcal{O}(\delta^2)$.

As órbitas extremas são órbitas que conectam x_i^* e x_j^* , após n iterações de F , tais que: $F^n(x_i^*) = x_j^*$ e $(F^n)'(x_{i,j}^*) = 0$, com $i = 1, \dots, M$ [12]. No espaço de parâmetros, uma curva superestável ou extrema é definida como sendo o conjunto de parâmetros para o qual uma órbita superestável ou extrema específica ocorre.

Como uma aplicação da teoria de curvas superestáveis e extremas vamos apresentar um exemplo utilizando o mapa do Círculo dado pela Eq. (1.30). Fazendo $F'(x_n) = 0$, temos

$$\frac{d}{dx} \left[x^* + \omega - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x^*) \right] = 0, \quad (1.31)$$

$$\cos(2\pi x^*) = \frac{1}{k}, \quad (1.32)$$

resultando nas soluções

$$x_{\pm}^* = \pm \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{k} \right) + q, \quad (1.33)$$

com $q \in \mathbb{Z}$.

Para o caso de uma órbita de período-1 superestável $x_{\pm}^* = F(x_{\pm}^*)$, temos

$$x_{\pm}^* = x_{\pm}^* + \omega - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_{\pm}^*), \quad (1.34)$$

$$\omega = \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_{\pm}^*). \quad (1.35)$$

Considerando a Eq. (1.33) com $q = 0$, obtemos que $\sin(2\pi x_{\pm}^*) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2}$, logo

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{2\pi}, \quad (1.36)$$

que representam duas curvas superestáveis no espaço dos parâmetros $k \times \omega$, uma para ω positivo e outra para ω negativo. De acordo com a Eq. (1.36) ambas as curvas se unem em $(\omega, k) = (0, 1)$ e as representamos no espaço dos parâmetros conforme mostra a Fig. 1.13.

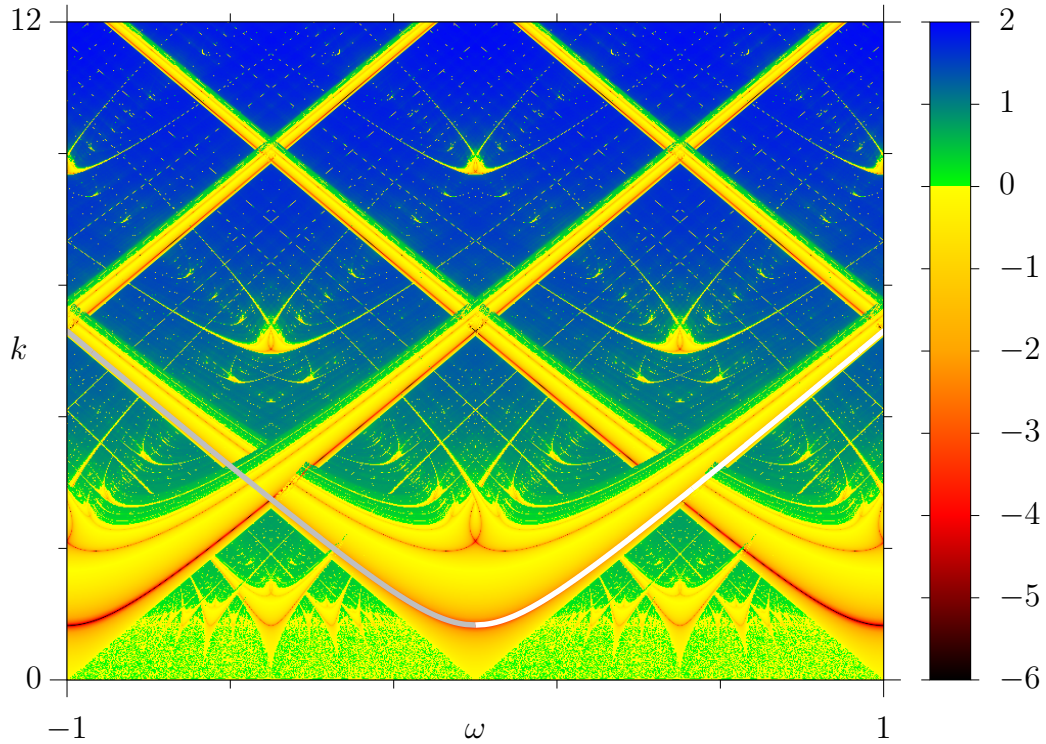


Figura 1.13: Espaço de parâmetros do mapa do Círculo destacando as curvas superestáveis, em que a cor cinza representa a curva $\omega = -\frac{\sqrt{k^2-1}}{2\pi}$, enquanto a cor branca expressa a curva $\omega = \frac{\sqrt{k^2-1}}{2\pi}$.

Por outro lado, o caso de uma órbita extrema de período-1 em que $x_+^* = F(x_-^*)$ e

$x_-^* = F(x_+^*)$ resulta em

$$\omega = \mp \left[\frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{k} \right) - \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{2\pi} \right]. \quad (1.37)$$

As equações (1.37) descrevem curvas no espaço de parâmetros chamadas curvas extremas, indicadas por $(1)_+$ e $(1)_-$, cujo numeral retrata o número de iterações da órbita extrema e o sinal em subscrito a origem da órbita. Por exemplo, ao identificarmos a curva extrema $(1)_-$, queremos ilustrar que após a primeira iteração do mapeamento (1.30) obtivemos $F(x_-^*) = x_+^*$. Então, para representarmos essa curva no espaço dos parâmetros κ *vs.* ω para o mapa do Círculo consideramos 10^3 por 10^3 sequências de pontos igualmente espaçados nos intervalos $\kappa \in [0, 12]$ e $\omega \in [-1, 1]$. Para cada combinação de (ω, κ) , consideramos $x_0 = 10^{-1}$ como condição inicial. Logo depois, calculamos o expoente de Lyapunov para as próximas 10^4 iterações após ignorar um tempo transitório de 10^4 iterações. Como já visto, o Lyapunov, é calculado pela fórmula (1.25).

As órbitas extremas, quando visualizadas no espaço de parâmetros, recebem o nome de curvas extremas e desempenham um papel crucial na organização das regiões de periodicidade e caos. As estruturas de periodicidade estão ao longo das curvas extremas, conforme podemos observar na Fig. 1.14.

Ao observar o espaço de parâmetros, as curvas extremas revelam uma estrutura intrincada e hierárquica, onde regiões de periodicidade se apresentam de forma organizada. Muitas vezes, as curvas extremas se interceptam, marcando pontos onde ocorrem órbitas superestáveis. Nesses pontos de interseção, as órbitas periódicas apresentam estabilidade reforçada, formando marcos importantes na análise do sistema dinâmico.

As curvas extremas também tendem a organizar cascatas de periodicidade, que exibem uma sequência de regiões com períodos crescentes, muitas vezes seguindo padrões auto-similares. À medida que essas curvas se entrelaçam no espaço de parâmetros, elas ajudam a definir claramente as fronteiras entre as zonas de comportamento caótico e periódico, evidenciando a natureza complexa e rica do sistema.

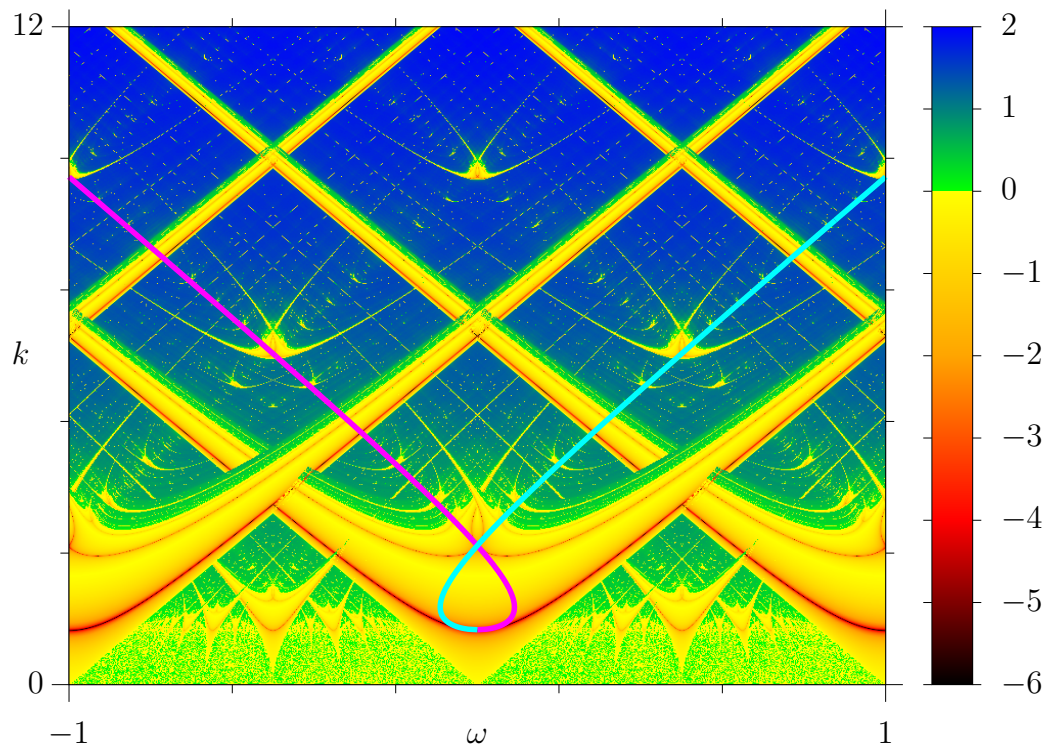


Figura 1.14: Espaço de parâmetros do mapa do Círculo. Curvas extremas $(1)_-$ e $(1)_+$, representadas pelas cores ciano e lilás, respectivamente.

CAPÍTULO 2

EXPOENTE DE INCERTEZA EM CURVAS EXTREMAS

Até este ponto, realizamos uma revisão dos conceitos fundamentais que sustentam nossas pesquisas. Neste capítulo, avançamos em nossas análises explorando diferentes mapeamentos, buscando não apenas abranger uma ampla gama de comportamentos dinâmicos mas também identificar, em alguns casos, a manifestação de uma possível universalidade.

2.1 Sobre a pesquisa

Empregamos uma classe de mapas unidimensionais para explorar fronteiras, no espaço de parâmetros, de estruturas auto-similares de comportamento periódico, cascatas de periodicidade e parâmetros que levam ao caos. Nos espaços de parâmetros bidimensionais desses mapas, calculamos numericamente o expoente de incerteza e a dimensão fractal exterior ao longo de *curvas extremas*. Observamos que ambas as medidas assumem valores ao longo dessas curvas que diferem significativamente daqueles previamente relatados na literatura para curvas de parâmetros arbitrárias, que se acreditava serem universais. Além disso, mostramos que a mudança dos valores do coeficiente de incerteza e da dimensão

fractal ocorre de maneira abrupta perto das curvas extremas, sendo uma transição singular. Atribuímos essa diferença a uma maior densidade de janelas periódicas ao longo das curvas extremas, o que modifica a geometria do conjunto fractal resultando numa medida de dimensão fractal extrema.

2.2 Expoente de Incerteza

A incerteza pode ser vista como um erro ao realizar uma medida específica. Por exemplo, ao tentar identificar um ponto exato em uma curva dentro de um espaço de parâmetros, sempre haverá um erro associado, gerando incerteza na localização de um estado periódico ou de um caótico. Especificamente, estamos interessados em investigar como a incerteza na determinação de um parâmetro varia em diferentes escalas e como isso afeta a condução do sistema a um comportamento desejado.

Devido à complexidade da fronteira fractal que separa os estados de ordem e caos, surge uma incerteza. Embora essas duas dinâmicas sejam profundamente contrastantes, elas frequentemente se entrelaçam de maneira complexa nos espaços de parâmetros dos sistemas. Em geral, os conjuntos de parâmetros associados a atratores caóticos não são contínuos, mas são densos o suficiente para apresentar medida positiva de Lebesgue, conforme descrito por Jakobson [52]. Próximos a esses conjuntos caóticos, encontramos janelas periódicas contínuas, onde o comportamento periódico é estável [53]. Como resultado, os parâmetros que levam a atratores caóticos formam conjuntos fractais chamados de “fractais gordos”. Esses conjuntos indicam que, com uma pequena variação nos parâmetros do sistema, a dinâmica caótica pode ser substituída por um comportamento periódico estável [18].

Janelas periódicas estão distribuídas em várias escalas do espaço de parâmetros e podem se agrupar nas chamadas cascatas de periodicidade. Essas cascatas são compostas por um número infinito de estruturas de periodicidade, com características de auto-similaridade, distribuídas densamente pelo espaço de parâmetros. Nas cascatas, a distribuição das janelas periódicas segue regras de escalonamento. Essas regras podem estar relacionadas ao tamanho das janelas [54], ao período [55], ou a outras medidas topológicas associadas às suas órbitas periódicas [49, 56].

Consideráveis esforços têm sido dedicados à caracterização da complexidade que surge da auto-similaridade das janelas periódicas no contexto de mapas unidimensionais, onde apenas um único parâmetro de bifurcação está disponível. Grebogi et al. desenvolveram uma abordagem para determinar a “dimensão exterior” [15] desses conjuntos por meio de uma estimativa do chamado “expoente de incerteza” [57]. Eles obtiveram $\alpha = 0,413(5)$ para o expoente de incerteza. Além disso, Farmer propôs uma abordagem alternativa para também caracterizar a estrutura entrelaçada de periodicidade e caos, encontrando expoentes de incerteza de $\beta = 0,45(4)$ para os mapas quadrático e senoidal [17]. Ele conjecturou que esse expoente poderia ser universal entre mapas unidimensionais até certa ordem de seus máximos. Subsequentemente, Hunt et al. [18] estimaram teórica e numericamente o expoente de incerteza apenas para os “grandes” atratores caóticos do mapa quadrático, ou seja, excluindo o “pequeno” atrator caótico que aparece via o cenário de Feigenbaum. Essa abordagem resulta em um valor diferente para o expoente de incerteza, $\gamma = 0,51(3)$. Tal discrepância entre γ e α foi abordada por Joglekar et al., demonstraram, considerando uma probabilidade de estabilidade para o caos, que $\alpha \approx 0,39$ para elevadas ampliações do espaço de parâmetros [19].

Nos espaços de parâmetros planares, onde dois parâmetros de bifurcação estão disponíveis, cascatas de janelas periódicas auto-similares podem se manifestar de duas maneiras principais: i) Alinhadas em direções específicas, dando origem a cascatas de periodicidade que se acumulam em uma região de parâmetros correspondente ao comportamento periódico [49, 58, 59]. ii) Centros de periodicidade, caracterizados por sequências em espiral infinitas emanando de um único ponto no espaço de parâmetros, correspondente a uma bifurcação homoclínica [60–62]. Tal organização não trivial de janelas periódicas foi encontrada em espaços de dois parâmetros de várias classes de sistemas dinâmicos, tanto em experimentos computacionais [7, 63–70] quanto em experimentos laboratoriais [9, 71, 72]. Nesse contexto, Medeiros et al. estimaram o expoente de incerteza α para três diferentes sistemas de tempo contínuo contendo cascatas de periodicidade em seus espaços de parâmetros planares. Eles encontraram os valores de α para todos os sistemas no intervalo $\alpha = 0,40(4)$, corroborando a conjectura de universalidade desse expoente até

mesmo em outra classe de sistemas dinâmicos [16].

Neste trabalho, apresentamos evidências que desafiam a longa crença na universalidade dessa conjectura. Para avançar nessa análise, consideramos a classe de mapas unidimensionais genericamente descritos pela seguinte equação:

$$x_{n+1} = F(x_n; a), \quad (2.1)$$

onde F é suficientemente suave e pelo menos bimodal, a variável $x \in \mathbb{R}$ representa os estados do sistema e o vetor $a \in \mathbb{R}^N$ representa os $N \geq 2$ parâmetros de controle.

Para assegurar a uniformidade em nossos estudos, optamos por adotar a padronização descrita na Eq. 2.1 para todos os mapeamentos considerados a seguir. Nessa padronização, os parâmetros do sistema são representados por $a_1, a_2, a_3, \dots$, que desempenham um papel essencial na caracterização do comportamento dinâmico. A análise desses parâmetros é realizada em seções bidimensionais, especificadas por (a_2, a_1) , o que não apenas facilita a interpretação por parte do leitor, mas também permite uma análise mais clara e acessível.

No espaço de parâmetros determinamos as curvas extremas ao longo das cascatas para diferentes mapas e medimos os expoentes de incerteza correspondentes e obtivemos $\alpha \approx 0,23$. Surpreendentemente, a transição desses valores para os encontrados anteriormente na literatura ocorre de forma abrupta nas proximidades das curvas extremas. Além disso, obtemos a dimensão fractal singular dos conjuntos de parâmetros de fronteira entre as estruturas de periodicidade e o caos.

Dado que as inúmeras estruturas de periodicidade estão distribuídas ao longo das curvas extremas, é natural supor que a incerteza nesses pontos seja consideravelmente elevada. Por essa razão, direcionamos nosso foco para a medida do coeficiente de incerteza ao longo dessas curvas nas cascatas de periodicidade.

Para conduzir essa análise, selecionamos um valor aleatório φ ao longo da curva extrema e o perturbamos para os valores $\varphi - \varepsilon$ e $\varphi + \varepsilon$, mantendo-os na mesma curva. Em seguida, calculamos o expoente de Lyapunov λ para cada um dos três parâmetros: $\varphi - \varepsilon$, φ e $\varphi + \varepsilon$.

Classificamos φ como “incerto” se, para um desses três valores, o atrator for periódico ($\lambda < 0$) e, para pelo menos um dos outros dois valores, o atrator for caótico ($\lambda > 0$), ou

vice-versa. Caso os três valores resultem em atratores idênticos, periódicos ou caóticos, φ é considerado “certo” para aquele ε .

Este processo é repetido para um grande número de valores de $\varphi > 0$, e, para cada ε no intervalo $1 \times 10^{-12} \leq \varepsilon \leq 1 \times 10^{-2}$, calculamos $f(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N_i(\varepsilon)}{N(\varepsilon)}$, com $N_i(\varepsilon)$ representando o total de φ incertos, pelo total $N(\varepsilon)$ de φ analisados. Espera-se que esta fração de incerteza, dado um número suficientemente grande de parâmetros sorteados, apresente uma relação exponencial com ε , conforme proposto em [57].

Para a análise dos resultados, elaboramos gráficos dos expoentes de incerteza, representando $f(\varepsilon)$ em função de ε utilizando uma escala logarítmica. Esse tipo de escala é escolhido porque o comportamento dos dados segue uma lei de potência do tipo $f(\varepsilon) \approx k\varepsilon^\alpha$, onde α é o expoente de incerteza e k é a constante de proporcionalidade. A utilização da escala logarítmica facilita a visualização da relação de potência entre as variáveis, evidenciando com mais clareza a dependência de $f(\varepsilon)$ em relação a ε , especialmente para valores pequenos de ε . A inclinação da reta no gráfico log-log fornece uma estimativa direta do valor de α , permitindo uma análise precisa da sensibilidade do sistema às variações nos parâmetros perturbados. Esse comportamento de lei de potência é frequentemente observado em sistemas dinâmicos não lineares, indicando uma estrutura fractal subjacente nos conjuntos de parâmetros estudados. Este e demais análises deste estudo serão apresentados a seguir.

2.3 Curvas extremas para o mapa Logístico-Gauss

Para o presente estudo, utilizamos o mapeamento Logístico-Gauss apresentado em [13]. Este mapa possui três parâmetros, a saber, δ , γ e β , enquanto o espaço de parâmetros é analisado em duas dimensões. É importante ressaltar que os estudos apresentados para o mapa Logístico-Gauss também foram realizados para o mapa do Círculo, Hassel perturbado e Logístico perturbado. No entanto, apresentaremos aqui, em detalhes, os resultados obtidos especificamente para o mapa Logístico-Gauss.

O mapeamento Logístico-Gauss, em essência, foi usado para descrever o surgimento da adição de cascatas de período através da formação de órbitas extremas [14]. Neste mapa,

calcularemos analiticamente duas dessas órbitas, e apresentaremos o expoente de incerteza calculado sobre essas curvas e na sua vizinhança.

O mapa Logístico-Gauss é representado pela seguinte equação:

$$F(x; a_1, a_2, a_3) = \exp \{ -a_1 [x(1 - x^{a_2})]^2 \} + a_3, \quad (2.2)$$

com a condição inicial x_0 , e os parâmetros a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ [13, 14].

Como os nossos conjuntos fractais extremos propostos residem no espaço de parâmetros multidimensional dos mapeamentos, agora especificamos a localização de tais objetos fractais. Em geral, começando de uma condição inicial x_0 , as iterações sucessivas da Eq. (2.2) geram trajetórias que, dependendo dos parâmetros a , eventualmente se aproximam de uma solução, como um ponto fixo, uma órbita periódica ou um atrator caótico.

No entanto, mesmo antes de convergir, essas trajetórias podem conter sequências de pontos críticos $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots\}$, cada um satisfazendo $F'(x_i^*) = 0$, associados a pontos extremos (máximos ou mínimos locais) do mapeamento da Eq. (2.2). Um par de pontos críticos, x_i^* e x_j^* , pode ser conectado por M iterações sucessivas do mapeamento, ou seja, $x_j^* = F^M(x_i^*)$, com $M \in \mathbb{N}$, $F^0 = \text{identidade}$ e $F \equiv F^1$. Essas trajetórias de M iterações que conectam pontos críticos no espaço de estados do mapeamento são chamadas de *órbitas M -extremas*, e seus correspondentes parâmetros $e_M^{ij} = \{a \in \mathbb{R}^N | x_j^* = F^M(x_i^*, a)\}$ formam os conjuntos de codimensão um que chamamos de *curvas extremas*. Nesse contexto, i representa um ponto crítico e também o domínio de F após M iterações, enquanto j é outro ponto crítico que corresponde à imagem de F [12]. As curvas extremas abrigam os conjuntos fractais singulares de interesse neste trabalho.

Como o mapa Logístico-Gauss é unidimensional com três parâmetros de controle, vamos calcular as curvas extremas e_M^{ij} , em uma secção bidimensional $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, mantendo $a_3 = 0,1$ constante. Assim, a partir da Eq. (2.2), obtemos a sequência de pontos críticos:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = (1 + a_2)^{-\frac{1}{a_2}}, \quad \text{e} \quad x_3^* = 1. \quad (2.3)$$

Se a_2 for um número racional com numerador par, surgem dois pontos críticos adicionais,

$x_4 = -x_2$ e $x_5 = -x_3$. Em seguida, resolvendo a equação $x_3^* = F(x_2^*, a)$, obtém-se a curva extrema e_1^{23} :

$$a_1 = -\frac{\ln(0,9)(a_2 + 1)^{2+2/a_2}}{a_2^2}. \quad (2.4)$$

Da mesma forma, obtemos a função de e_2^{32} :

$$a_1 = -\frac{\ln[(1 + a_2)^{-\frac{1}{a_2}} - 0,1]}{1,21(1 - 1,1^{a_2})^2}. \quad (2.5)$$

Para associar as curvas extremas com as cascatas de periodicidade que ocorrem em Γ , em cada par de parâmetros (a_1, a_2) , estimamos o expoente de Lyapunov do mapeamento prescrito na Eq. (2.2). Assim, na Fig. 2.1, mostramos Γ com a codificação de cores representando a amplitude de λ . Sombras escuras indicam dinâmica periódica ($\lambda < 0$), e sombras amarelo-azul indicam dinâmica caótica ($\lambda > 0$). As curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} são traçadas em verde no painel (a). Em (b), destacamos uma cascata de janelas periódicas ao longo de e_1^{23} . Observe que essa curva atravessa todas as janelas periódicas, cruzando pontos correspondentes ao centro de estabilidade, onde duas curvas brancas superestáveis se cruzam [8, 73]. Portanto, se uma órbita periódica estável contém órbitas extremas em sua extensão, ela é uma órbita superestável do centro de estabilidade da estrutura. Essas órbitas ocorrem, na Fig. 2.1(b), para parâmetros indicados como $S_1, S_2, \dots, S_\infty$, por toda essa sequência de janelas periódicas, ao longo da curva extrema e_1^{23} . Para além disso, a curva intersecta todos os centros de estabilidade das demais infinitas janelas periódicas, que forma a cascata de periodicidade. O mesmo acontece para e_2^{32} .

2.3.1 Dimensão exterior

A organização auto-similar das cascatas de periodicidade visualizada na Fig. 2.1 indica a existência de conjuntos fractais embutidos na seção de parâmetros Γ . No entanto, os conjuntos de parâmetros que levam a comportamentos caóticos ou periódicos possuem volume não nulo. Portanto, sua dimensão é a mesma que a dimensão euclidiana do espaço em que estão inseridos, ou seja, um número inteiro.

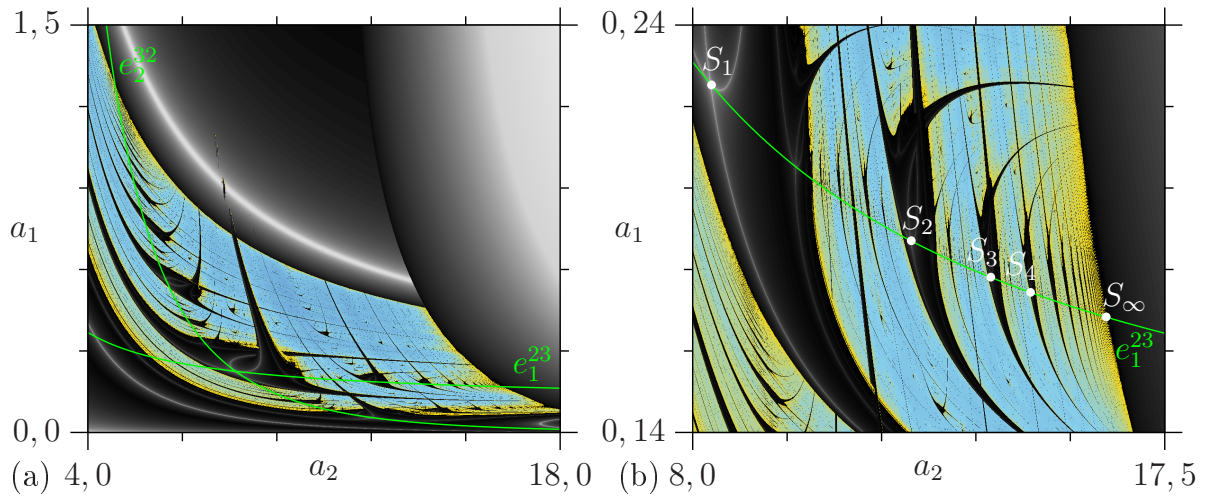


Figura 2.1: (a) Cascata de periodicidade no plano de parâmetros Γ , destacada ao longo das curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} em verde. Sombras escuras representam dinâmica periódica ($\lambda < 0$), enquanto sombras amarelo-azul indicam comportamento caótico ($\lambda > 0$). (b) Ênfase em e_1^{23} cruzando a cascata através de todos os pontos de estabilidade, sequência $(S_i)_{i=1}^{\infty}$.

Para caracterizar a incerteza na escolha dos parâmetros em diferentes escalas das cascatas, diversas abordagens foram propostas na literatura [15, 17, 18]. Focamos no conceito de “dimensão exterior” apresentado em [15], no qual a incerteza na escolha de parâmetros é atribuída a uma geometria fractal nas fronteiras entre os conjuntos de parâmetros que resultam em comportamentos periódicos ou caóticos. Em nossa discussão, essa fractalidade reflete a dimensão exterior do conjunto fractal caótico ao longo de curvas específicas.

Introduzindo melhor esse conceito, considere uma região $\mathcal{B}$ do conjunto caótico e estenda essa região por uma quantidade arbitrariamente pequena ε . Chamaremos essa região estendida de $\mathcal{B}(\varepsilon)$. A dimensão exterior d_x é dada por [15]:

$$d_x = D - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln V[\mathcal{B}(\varepsilon) - \mathcal{B}]}{\ln \varepsilon}, \quad (2.6)$$

onde D é a dimensão unitária das curvas e $V[\mathcal{B}(\varepsilon) - \mathcal{B}]$ é o volume restante (exterior) excluindo o volume do conjunto original $\mathcal{B}$.

De acordo com [15], $V[\mathcal{B}(\varepsilon) - \mathcal{B}]$ pode ser estimado calculando a fração de incertos $f(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N_i(\varepsilon)}{N(\varepsilon)}$, para perturbações de tamanho ε . Desta forma, o volume $V[\mathcal{B}(\varepsilon) - \mathcal{B}]$, que representa o volume exterior ao conjunto $\mathcal{B}$ após uma extensão de raio ε , pode ser relacio-

nado a $f(\varepsilon)$, desde que $N(\varepsilon)$ seja representativo em cada escala ε . Mais especificamente, escolhemos um ponto $\varphi = (a_1, a_2)$ de forma aleatória na curva extrema de interesse [Eqs. (2.4) ou (2.5)] e perturbamos φ considerando uma distância ε em ambas as direções da curva para obter os pontos φ_- e φ_+ .

Subsequentemente, avaliamos o expoente de Lyapunov λ para cada valor de parâmetro φ_- , φ , e φ_+ . Se nesses três valores de parâmetro identificarmos um atrator caótico ($\lambda > 0$) e outro periódico ($\lambda < 0$), registramos o parâmetro central φ como “incerto” para o valor particular da perturbação ε . Caso contrário, φ é considerado “certo”.

Repetimos este procedimento para um grande número de valores de $\varphi > 0$, e calculamos a fração de parâmetros incertos $f(\varepsilon)$ para cada perturbação ε no intervalo $10^{-12} \leq \varepsilon \leq 10^{-3}$. Espera-se que a fração $f(\varepsilon)$ esteja correlacionada com ε segundo uma lei de potência, $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha$, onde o expoente α é dado por $\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$. Portanto, $f(\varepsilon)$ se aproxima de $V[\mathcal{B}(\varepsilon) - \mathcal{B}]$ à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, a dimensão exterior d_x na Eq. (2.6) é determinada por:

$$d_x = D - \alpha, \quad (2.7)$$

onde α é o expoente de incerteza, também conhecido como “codimensão exterior”, que pode ser estimado a partir do gráfico log-log de $f(\varepsilon)$ em função de ε [15].

2.3.2 Dimensão fractal extrema

Agora, demonstramos a existência de conjuntos fractais singulares ao longo das cascatas de periodicidade no espaço de parâmetros do mapa na Eq.(2.2). Para isso, começamos estimando o expoente de incerteza α das cascatas de periodicidade ao longo das curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} . Assim, na Fig. 2.2, obtemos a fração de parâmetros incertos $f(\varepsilon)$ em função de ε para parâmetros ao longo das curvas e_1^{23} [Fig. 2.2(a)] e e_2^{32} [Fig. 2.2(b)]. Ajustando uma função de lei de potência, encontramos $\alpha = 0,232(2)$ e $\alpha = 0,235(1)$ para as curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} , respectivamente.

Esses valores do expoente de incerteza são significativamente diferentes dos observados anteriormente na literatura para mapas unidimensionais em geral ($\alpha \approx 0,41$) [15, 17, 19], ou considerando apenas a incerteza de grandes atratores ($\beta \approx 0,51$) [18, 19], e fluxos de

tempo contínuo ($\alpha \approx 0,41$) [16]. Curiosamente, os valores do expoente de incerteza α encontrados aqui contradizem a crença de que os valores acima seriam universais para mapas unidimensionais para uma dada ordem de seus máximos [17, 19]. Além disso, valores mais baixos de α indicam uma maior sensibilidade a pequenas mudanças nos parâmetros nessas curvas.

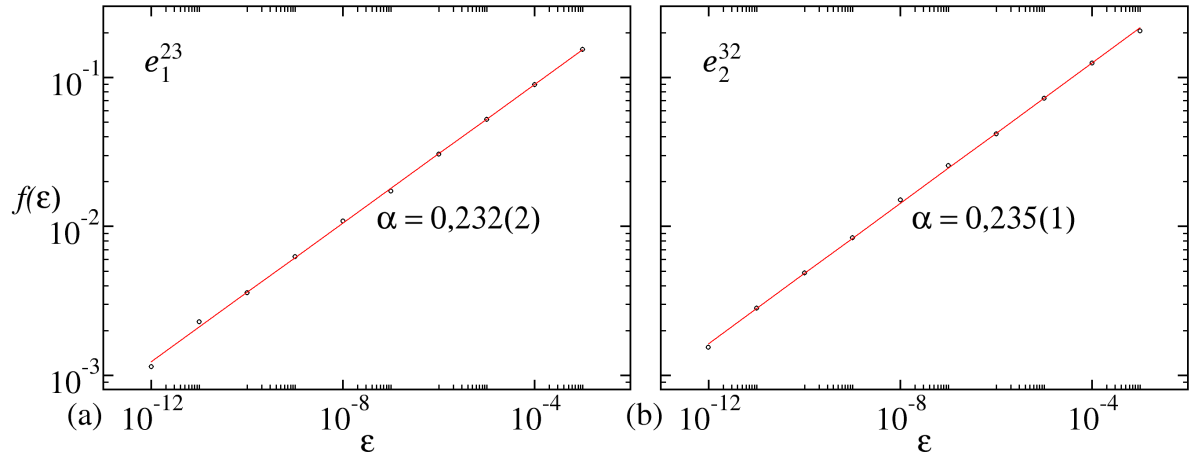


Figura 2.2: Fração de parâmetros incertos $f(\varepsilon)$ em função da perturbação ε . Uma regressão de lei de potência $f(\varepsilon) = Ae^\alpha$ (curva vermelha) fornece o expoente de incerteza α ao longo da curva extrema e_1^{23} (a) e e_2^{32} (b).

Dada a diferença significativa entre o expoente de incerteza ao longo das curvas extremas e os valores tipicamente observados na literatura, investigamos os valores desse expoente nas proximidades das curvas extremas, buscando as transições para os valores típicos de α . Assim, na Fig. 2.3, calculamos α ao longo de curvas paralelas às curvas extremas. Para isso, uma vez que os eixos dos espaços de parâmetros nas Figs. 2.3(a) e (b) possuem tamanhos diferentes, aplicamos a seguinte transformação espacial para normalizar esses espaços:

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$$

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x - x_m}{\Delta x}, \frac{y - y_m}{\Delta y} \right),$$

onde x_m e x_M são, respectivamente, os valores mínimos e máximos de x no eixo das abscissas, com tamanho $\Delta x = x_M - x_m$. O mesmo vale para o eixo y nas ordenadas. Aplicando $T(a_1, a_2)$ nas Eqs. (2.4) e (2.5), representamos as curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32}

no espaço normalizado $[0, 1] \times [0, 1]$ e determinamos curvas paralelas distantes $\Delta\tilde{a} \in [-0,1; 0,1]$ da curva extrema. Aplicando a inversa da transformação T^{-1} nas curvas paralelas, plotamos algumas curvas paralelas no sistema de coordenadas original, e as representamos em azul e rosa nas Figs. 2.3 (a) e (b).

Em seguida medimos o expoente de incerteza ao longo das curvas paralelas a e_1^{23} [Fig. 2.3(c)] e a e_2^{32} [Fig. 2.3(e)], e empregamos a Eq. (2.7) para calcular as respectivas dimensões d_x [veja Figs. 2.3 (d) e 2.3 (f)]. Nas proximidades das curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} , observamos que o expoente de incerteza α , e consequentemente a dimensão exterior d_x , sofrem transições abruptas, assumindo valores singulares exclusivamente ao longo das curvas extremas localizadas em $\Delta\tilde{a} = 0$ (marcadores vermelhos). Para as curvas paralelas, α e d_x assumem os valores típicos previamente encontrados na literatura.

Os resultados apresentados na Fig. 2.3 mostram que as cascatas de periodicidade exibem características distintas ao longo das curvas extremas, o que dá origem às singularidades observadas. Para elucidar essas características, lembramos primeiro que as curvas extremas intersectam as janelas periódicas em todas as escalas ao longo da cascata de periodicidade em seu centro de estabilidade [como visto na sequência $(S_i)_{i=1}^\infty$ na Fig. 2.1]. Esses centros de estabilidades atuam como base estrutural para as janelas periódicas, organizando sua extensão e sendo interligados pelas curvas extremas. Por outro lado, qualquer curva deslocada, mesmo muito próxima da curva extrema, pode eventualmente contornar janelas periódicas em escalas menores dentro do espaço de parâmetros. Como resultado, a densidade aumentada de janelas periódicas ao longo das curvas extremas indica uma relação mais intrincada entre parâmetros associados a comportamento periódico e caótico. Isso leva a uma diminuição do expoente de incerteza α . Além disso, a maior densidade de janelas periódicas também povoa mais densamente a curva unidimensional em uma determinada escala, resultando na dimensão fractal das fronteiras mais próxima da unidade. Para ilustrar melhor a densidade aumentada de janelas periódicas, na Fig. 2.4, apresentamos diagramas de bifurcação do mapa Eq. (2.2) juntamente com seus respectivos expoentes de Lyapunov.

Nos diagramas de bifurcação das Figs. 2.4(a)-2.4(c), a dinâmica de x ao longo da

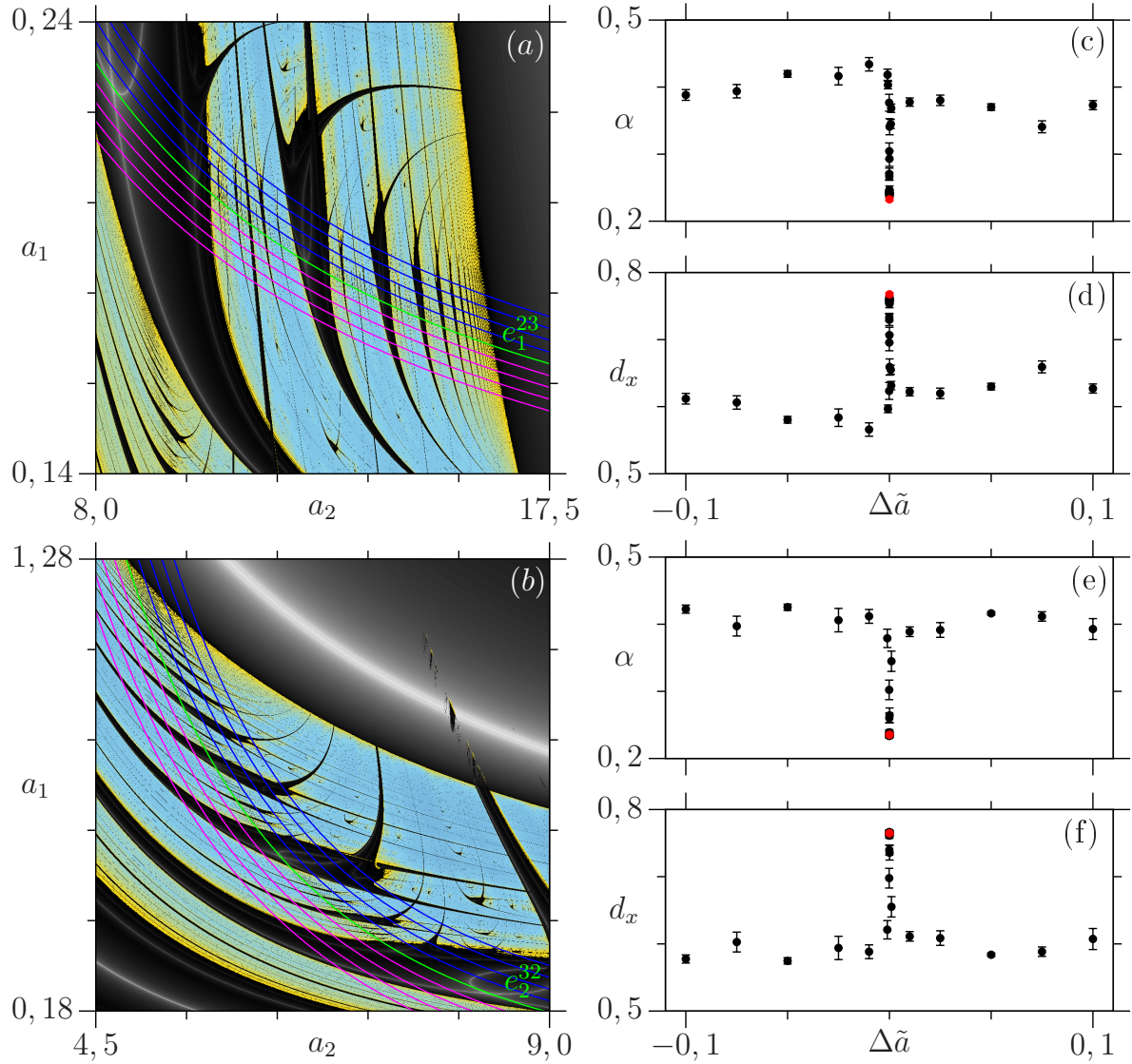


Figura 2.3: (a) e (b) Plano de parâmetros Γ ilustrando as curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} (verde) e curvas paralelas distantes múltiplos positivos (azul) e negativos (rosa) de $\Delta\tilde{a} = 0,025$. Os painéis (c) e (e) mostram o expoente de incerteza α e (d) e (f) apresentam a dimensão exterior d_x estimada ao longo das curvas paralelas dentro de $\Delta\tilde{a}$ da curva e_1^{23} e e_2^{32} . Marcadores vermelhos indicam as singularidades em $\Delta\tilde{a} = 0$ e os marcadores pretos cercados estão em $\Delta\tilde{a} = \pm 10^{-2}, \pm 10^{-3}, \pm 10^{-4}, \pm 10^{-5}, \pm 10^{-6},$ e $\pm 10^{-7}$

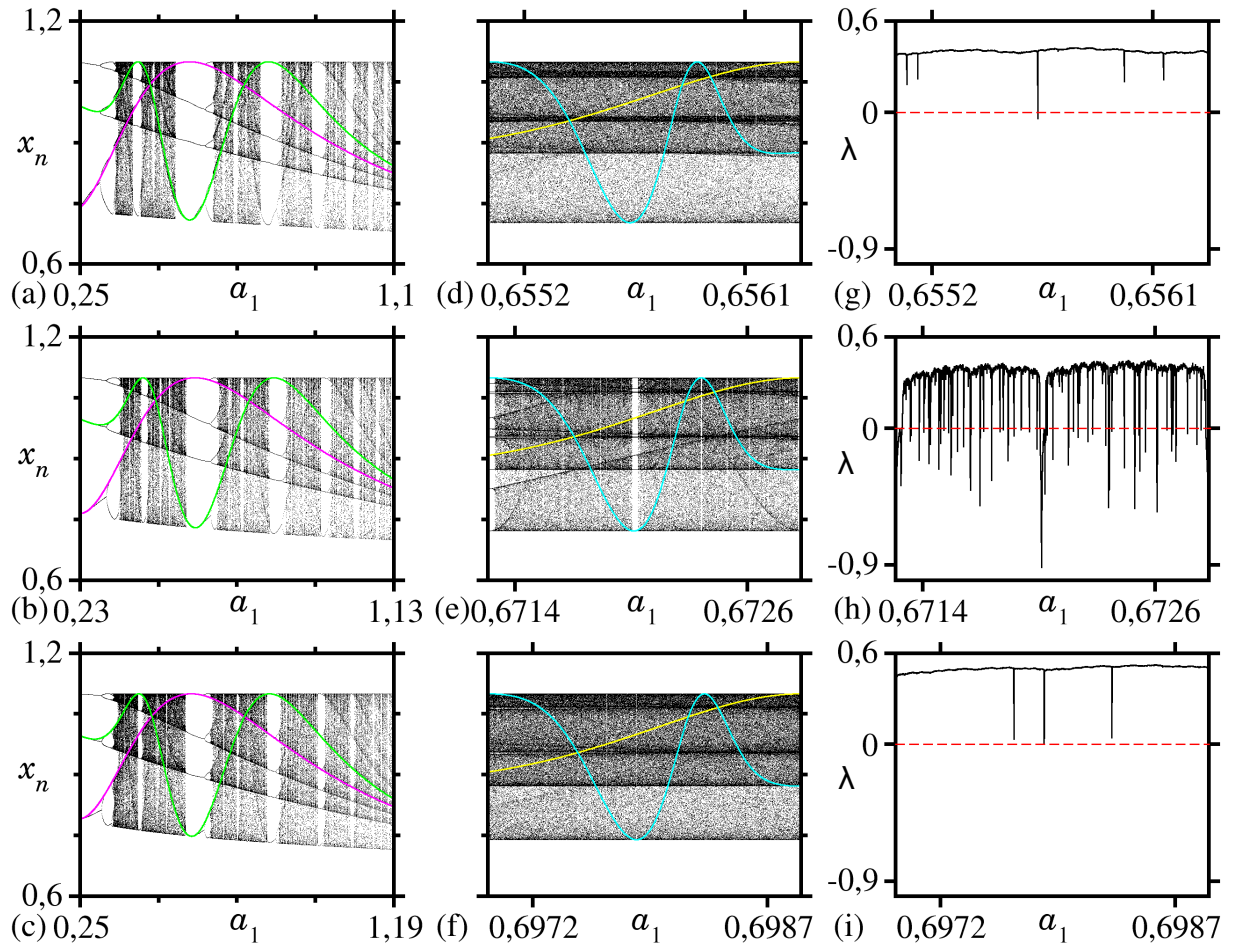


Figura 2.4: (a), (b) e (c) Diagramas de bifurcação ao longo de curvas em $\Delta\tilde{a} = -0,02$, $\Delta\tilde{a} = 0$ (curva extrema e_2^{32}), e $\Delta\tilde{a} = 0,02$, respectivamente. (d), (e) e (f) Ampliação dos respectivos diagramas de bifurcação mostrados na primeira coluna. (g), (h) e (i) Expoentes de Lyapunov correspondentes aos diagramas de bifurcação da coluna do meio. As curvas coloridas correspondem ao valor de x da M -ésima iteração do ponto crítico $x_1^* = 0$, $F^M(0)$, em cada parâmetro. $M = 5$ (rosa), 6 (verde), 11 (amarelo), e 13 (ciano).

curva extrema e_2^{32} [Fig. 2.4(b)] parece semelhante à das curvas deslocadas para baixo e para cima nas Fig. 2.4(a) e Fig. 2.4(c), respectivamente. No entanto, ao observar mais de perto, como demonstrado nos diagramas de bifurcação ampliados nas Figs. 2.4(d)-2.4(f), a densidade aumentada de janelas periódicas ao longo da curva extrema torna-se evidente. Essa maior densidade de janelas periódicas pode ser visualizada com facilidade ao examinar os expoentes de Lyapunov nas Figs. 2.4(g)-2.4(i). Notavelmente, os expoentes de Lyapunov ao longo da curva extrema [Fig. 2.4(h)] assumem valores negativos com mais frequência, em contraste com as curvas deslocadas. As curvas coloridas em todos os diagramas de bifurcação da Fig. 2.4 estabelecem uma correspondência entre os intervalos de parâmetros usados para as curvas extremas e deslocadas nas ampliações, garantindo a comparação entre as medidas nesta figura. Essas curvas correspondem à M -ésima iteração do ponto crítico $x^* = 0$, denotada como $F^M(0)$ em cada parâmetro. Nas curvas rosa, verde, amarela e ciano, M assume os valores 5, 6, 11 e 13, respectivamente.

2.4 Dimensão fractal extrema para outros mapas

Agora, aplicamos a mesma técnica do expoente de incerteza às curvas extremas de três outros modelos dinâmicos. Dois deles já foram abordados anteriormente: o mapa Logístico perturbado [12] e o mapa do Círculo [50]. A novidade reside na aplicação dessa técnica ao mapa Hassell perturbado [74]. Esses três modelos são amplamente reconhecidos na literatura por contribuições fundamentais ao estudo de sistemas dinâmicos não lineares. O mapa Logístico, por exemplo, é amplamente utilizado para descrever o crescimento populacional, sendo uma das referências mais clássicas para ilustrar bifurcações e o surgimento do caos. O mapa do Círculo, por sua vez, é essencial para compreender fenômenos de ressonância e a dinâmica em sistemas periódicos com uma variável angular, enquanto o mapa de Hassell é aplicado no estudo de populações ecológicas, levando em conta interações mais complexas entre indivíduos. Em todos esses casos, ao aplicar a técnica das curvas extremas, obtivemos resultados semelhantes aos encontrados para o mapa Logístico-Gauss, reforçando a generalidade e a robustez das nossas abordagens.

Para o mapa Logístico perturbado

$$F(x; a_1, a_2) = x_{n+1} = x_n a_2 (1 + b_n a_1) (1 - x_n), \quad (2.8)$$

em que $b_n = (-1)^n$ ou $b_n = (-1)^{n+1}$, ou seja, b_n fica alternando a cada iteração de -1 para 1 ou vice-versa. Para esse mapa, órbitas de período M são obtidas quando $x_{n+M} = x_n$ e $b_{n+M} = b_n$.

Para M ímpar,

$$|b_{n+M} - b_n| = 2,$$

enquanto para M par, tem-se $b_{n+M} - b_n = 0$. Dessa forma, a Eq. 2.8 apresenta exclusivamente órbitas periódicas de período par, conforme descrito em [12]. Existem, portanto, duas funções distintas que se relacionam dependendo do valor inicial b_0 , que pode ser $b_0 = -1$ ou $b_0 = 1$. A cada iteração ímpar, o extremo de uma função conecta-se ao extremo da outra, enquanto nas iterações pares, essa conexão ocorre com a própria função. Assim, em iterações ímpares, verifica-se um acoplamento entre as funções, enquanto em iterações pares, as funções permanecem desacopladas.

Confeccionamos o espaço de parâmetros na Fig. 2.5, com a_1 vs. a_2 , consideramos 2×10^3 por 2×10^3 sequências de pontos igualmente espaçados nos intervalos $a_2 \in [1,5; 4]$ e $a_1 \in [-0,1; 0,5]$. Em cada combinação de (a_2, a_1) , utilizamos $x_0 = 10^{-1}$ como condição inicial e calculamos o expoente de Lyapunov para as próximas 10^5 iterações após ignorar um tempo transitório de 10^5 iterações. A paleta de cores apresentada muda de cinza para branco em regiões periódicas, enquanto muda de verde para azul em regiões caóticas. A cor salmão indica a região onde ocorreu divergência.

Procuramos pela derivada das funções para encontrar as curvas extremas, desta forma a derivada de x_{n+1} em relação a x_n é obtida usando a regra do produto:

$$\frac{d}{dx_n} (x_n a_2 (1 + b_0 a_1) (1 - x_n)) = x_n (-a_2 (1 + b_0 a_1)) + a_2 (1 + b_0 a_1) (1 - x_n).$$

$$\frac{d}{dx_n} (x_n a_2 (1 + b_0 a_1) (1 - x_n)) = a_2 (1 + b_0 a_1) (1 - 2x_n).$$

Agora, igualamos a derivada a zero:

$$a_2(1 + b_0 a_1)(1 - 2x_n) = 0.$$

Como $a_2(1 + b_0 a_1) \neq 0$ (a menos que $a_2 = 0$, que é a solução trivial do mapa fora de interesse), podemos simplificar a equação para:

$$1 - 2x_n = 0,$$

o que resulta em

$$x_n = \frac{1}{2}.$$

Portanto, independentemente de b_0 ser -1 ou 1 , os pontos críticos são $x_1^* = \frac{1}{2}$ e $x_2^* = \frac{1}{2}$. Observe que apesar dos pontos críticos serem iguais, os extremos são distintos por não pertencerem a mesma função, vejamos:

$$F(x_1^*; a) = \frac{a_2 - a_1 a_2}{4} \quad (2.9)$$

e

$$F(x_2^*; a) = \frac{a_2 + a_1 a_2}{4}. \quad (2.10)$$

Em seguida, resolvendo as equações $x_2^* = F(x_1^*, a)$ e $x_1^* = F(x_2^*, a)$ obtemos duas curvas extremas, que nomearemos por e_1^{12} e e_1^{21} , a depender se $b_0 = -1$ e $b_0 = 1$, respectivamente.

Assim, obtemos a expressão que descreve as órbitas extremas de período 1:

$$a_1 = \frac{2 - a_2}{a_2 b_0},$$

em que

$$e_1^{12} : a_1 = \frac{a_2 - 2}{a_2} \quad \text{e} \quad e_1^{21} : a_1 = \frac{2 - a_2}{a_2}. \quad (2.11)$$

Para determinar as curvas extremas de período 2, que correspondem a curvas superestáveis devido ao fato de M ser par, garantindo que o ponto crítico retorne a si mesmo após duas iterações do mapeamento, analisamos a segunda iterada da função. Para isso,

consideramos b_n para a primeira iteração e $-b_n$ para a segunda iteração:

$$x_{n+2} = x_{n+1}a_2(1 + (-b_n)a_1)(1 - x_{n+1}),$$

$$x_{n+2} = (x_na_2(1 + b_na_1)(1 - x_n)a_2(1 - b_na_1)(1 - (x_na_2(1 + b_na_1)(1 - x_n))).$$

Agora, substituindo $a_2(1 + b_na_1) = u$ e $a_2(1 - b_na_1) = v$, obtemos

$$x_{n+2} = x_nuv \left((1 - x_n) - x_nu(1 - x_n)^2 \right).$$

Substituindo, $x_n = x_{n+2} = \frac{1}{2}$ e isolando v :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \right),$$

$$v = \frac{2}{u - \frac{u^2}{4}}.$$

Dessa forma, as curvas e_2^{11} e e_2^{22} são obtidas variando u na equação $v = \frac{2}{u - \frac{u^2}{4}}$. Como $u = a_2(1 + b_na_1)$ e $v = a_2(1 - b_na_1)$, as expressões para a_2 e a_1 são dadas por $a_2 = \frac{u+v}{2}$ e $a_1 = \frac{u-v}{b_n(u+v)}$, respectivamente.

Para descobrirmos as curvas extremas e_3^{12} e e_3^{21} , calculamos a terceira iterada do mapeamento:

$$x_{n+3} = (x_na_2(1 + b_na_1)(1 - x_n) \cdot a_2(1 - b_na_1)(1 - x_na_2(1 + b_na_1)(1 - x_n)) \\ \cdot a_2(1 + b_na_1)(1 - (x_na_2(1 + b_na_1)(1 - x_n) \cdot a_2(1 - b_na_1)(1 - x_na_2(1 + b_na_1)(1 - x_n))))).$$

Com $u = a_2(1 + b_na_1)$ e $v = a_2(1 - b_na_1)$, encontramos

$$x_{n+3} = u^2vx_n \left[(1 - x_n) - x_nu(1 - x_n)^2 \right] \left[1 - uvx_n(1 - x_n) + x_n^2u^2(1 - x_n)^2 \right].$$

Substituindo $x_{n+3} = x_n = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = u^2v \cdot \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}u \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[1 - uv \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \right],$$

$$1 = 2u \left[\frac{uv}{4} - \frac{u^2v}{16} \right] \left[1 - \left(\frac{uv}{4} - \frac{u^2}{16} \right) \right].$$

Agora, substituímos $q = \frac{uv}{4} - \frac{u^2v}{16}$ na equação, o que resulta em

$$u = \frac{1}{2q(1-q)}.$$

Por outro lado, como $q = \frac{uv}{4} - \frac{u^2v}{16}$, temos que v é

$$v = \frac{16q}{4u - u^2}.$$

Logo, as curvas extremas e_3^{12} e e_3^{21} são obtidas alterando q , para calcular u e v , e então substituí-los em

$$a_2 = \frac{u+v}{2} \text{ e } a_1 = \frac{u-v}{b_n(u+v)}.$$

Essas seis curvas estão representadas no espaço dos parâmetros da Fig. 2.5.

A Fig. 2.6 nos apresenta a região onde foi calculado o expoente de incerteza para a curva extrema e_3^{21} , uma reta com início e fim sobre a mesma curva extrema e uma curva paralela a e_3^{21} com perturbação $\Delta\tilde{a} = 0,001$.

Para a curva extrema e_3^{21} , a reta e a curva perturbada, obtivemos, respectivamente, os seguintes expoentes de incerteza: 0,23037, 0,29371 e 0,35268. Inicialmente, chamou-nos a atenção o fato de a reta apresentar um expoente de incerteza menor que o da curva perturbada. No entanto, ao analisarmos mais detalhadamente, percebemos que, nesse caso específico, a reta coincide com a curva extrema tanto no início quanto no final, o que não ocorre com a curva perturbada 0,001. Como resultado, a reta, que deveria fornecer valores em torno de 0,40, foi influenciada pela presença da curva extrema, alterando os resultados. Esse comportamento, portanto, corrobora nossos argumentos.

Na Fig. 2.7a, apresentamos a curva extrema e_3^{21} juntamente com 42 perturbações, sendo 21 positivas e 21 negativas. Essas perturbações, representadas pela letra Δa_1 , foram aplicadas no parâmetro a_1 . Já na Fig. 2.7b, são exibidos os expoentes de incerteza correspondentes a cada uma das curvas mostradas na Fig. 2.7a, com o expoente de incerteza denotado por α .

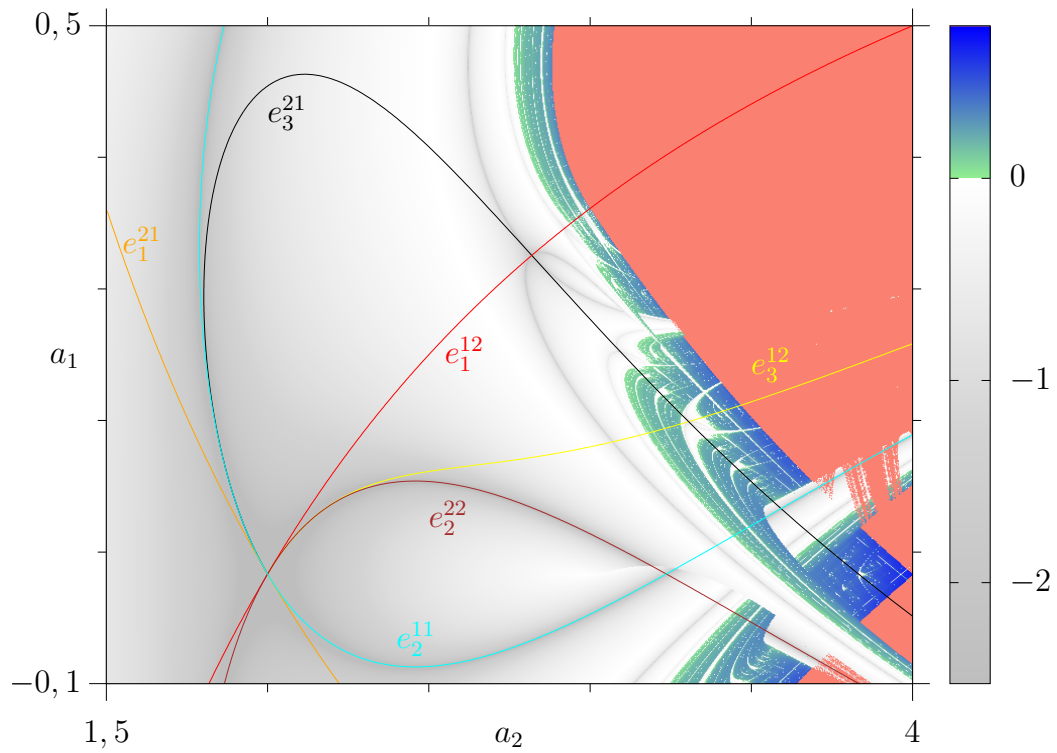


Figura 2.5: Espaço de parâmetros para o mapa Logístico perturbado, destacando a extrema e_3^{21} (preto), e_3^{12} (amarelo), e_2^{22} (marrom), e_2^{11} (ciano), e_1^{21} (laranja) e e_1^{12} (vermelho).

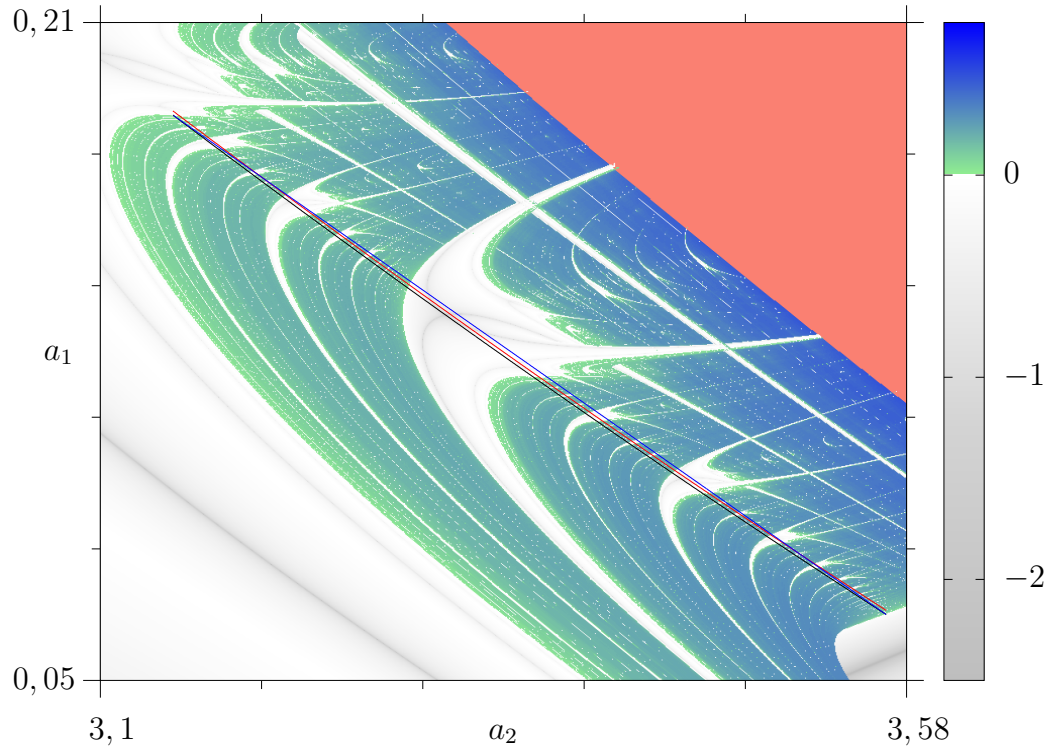


Figura 2.6: Ampliação da Fig. 2.5 na cascata de periodicidade evidenciando três curvas, são elas: extrema e_3^{21} (preto), reta (azul) e extrema perturbada $+0,001$ (vermelho).

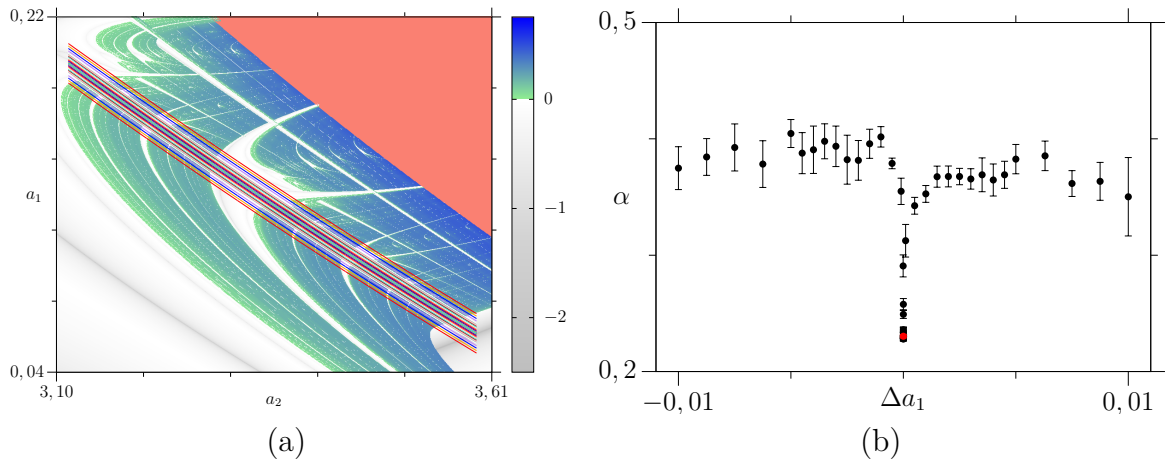


Figura 2.7: (a) Espaço de parâmetros do mapa Logístico perturbado destacando várias curvas perturbadas a partir da curva extrema e_3^{21} . (b) Expoentes de incerteza referente ao mapa Logístico perturbado para a curva extrema e_3^{21} (ponto vermelho) e algumas perturbações da extrema (pontos pretos), com o erro representado pela barra.

2.5 Dimensão fractal no mapa do Círculo

Em estudos prévios, determinamos os pontos críticos para o mapa do Círculo, resultando nas equações (1.33) e nas curvas extremas de uma iteração, descritas pela Eq.(1.37). Agora, com a padronização dos mapas, os pontos críticos passam a ser denotados por:

$$x_1^* = -\frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{a_1} \right) \quad \text{e} \quad x_2^* = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{a_1} \right), \quad (2.12)$$

enquanto as curvas extremas são:

$$e_1^{21} = \left[\frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{a_1} \right) - \frac{\sqrt{a_1^2 - 1}}{2\pi} \right] \quad \text{e} \quad e_1^{12} = - \left[\frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{a_1} \right) - \frac{\sqrt{a_1^2 - 1}}{2\pi} \right]. \quad (2.13)$$

Analizamos os valores do expoente de incerteza calculados para o mapa do Círculo nas curvas extremas e_1^{12} e e_1^{21} , com destaque para a região das cascatas de periodicidade, conforme ilustrado na Fig. 2.8.

Para as curvas e_1^{12} e e_1^{21} , verificamos os valores do expoente de incerteza, encontrando $\alpha = 0,235(1)$ e $\alpha = 0,235(2)$, respectivamente. Esses valores são consistentes com as nossas hipóteses, uma vez que $\alpha \approx 0,23$, conforme evidenciado na Fig. 2.9

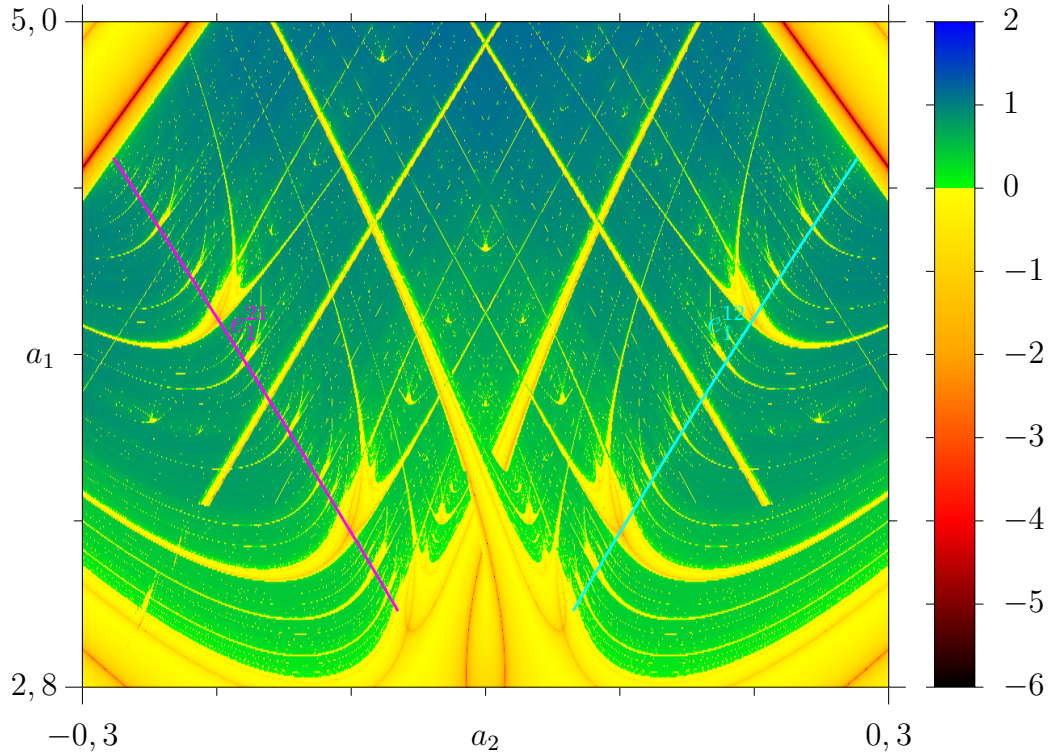


Figura 2.8: Espaço de parâmetros para o mapa do Círculo, destacando em magenta a curva extrema e_1^{21} e em ciano a curva extrema e_1^{12} .

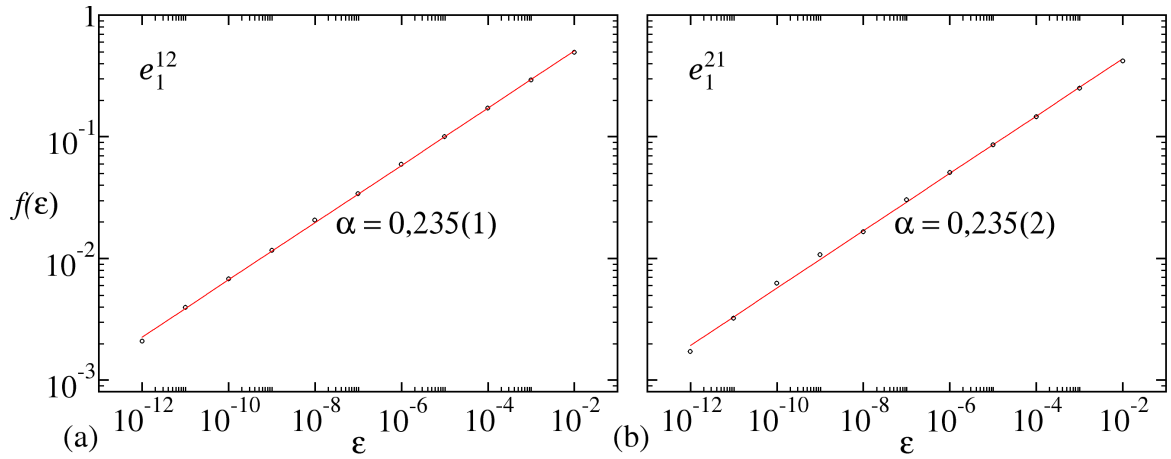


Figura 2.9: Fração de parâmetros incertos $f(\varepsilon)$ em função da perturbação ε . Uma regressão de lei de potência, $f(\varepsilon) = A\varepsilon^\alpha$ (curva vermelha), determina o expoente de incerteza α ao longo da curva extrema e_1^{12} em (a) e e_1^{21} em (b).

Também calculamos o expoente de incerteza para retas com o parâmetro a_1 constante no intervalo $a_1 \in [1; 1,8]$, conforme mostra as retas coloridas na Fig. 2.10. O interesse desta medida está fundamentada no fato de que a reta $a_1 = 1$ é a fronteira entre comportamentos quase-periódicos e caóticos. Os resultados da análise mostram que os valores de α tendem a zero à medida que a_1 se aproxima de 1 (veja Fig. 2.11), indicando que as regiões próximas

a $a_1 = 1$ são regiões muito homogêneas independentemente da escala observada.

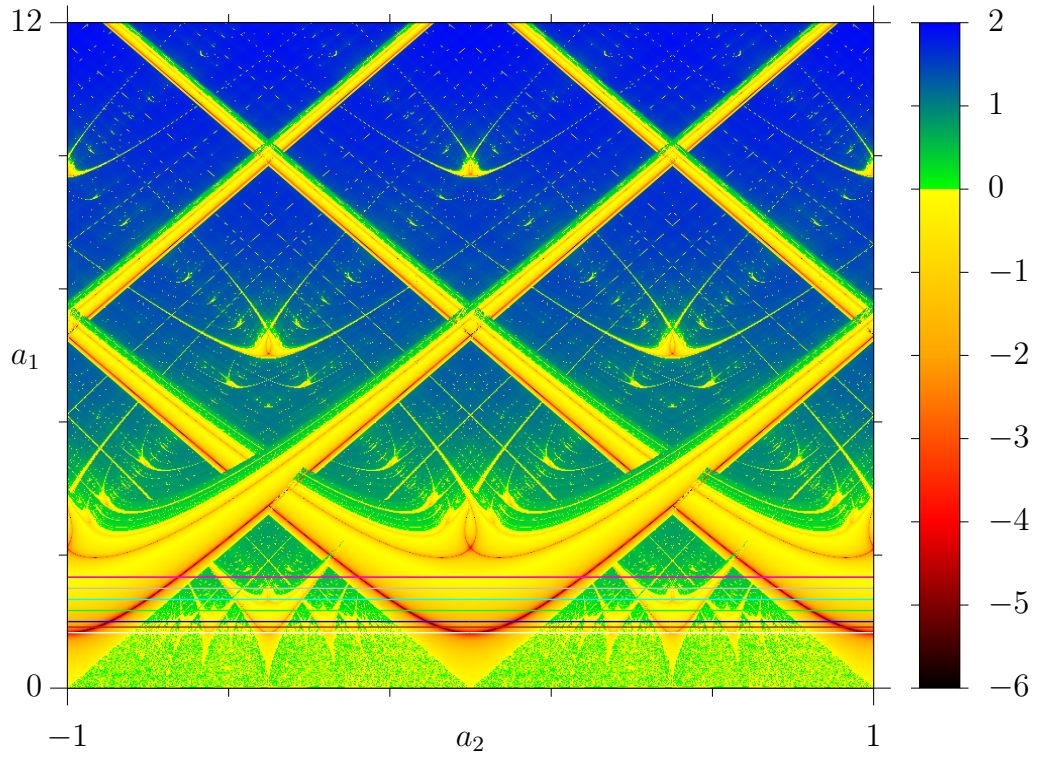


Figura 2.10: Espaço de parâmetros do mapa do Círculo. Os coeficientes de incerteza foram medidos ao longo das retas coloridas de $a_1 = 1$ (branco) até $a_1 = 1,8$ (magenta).

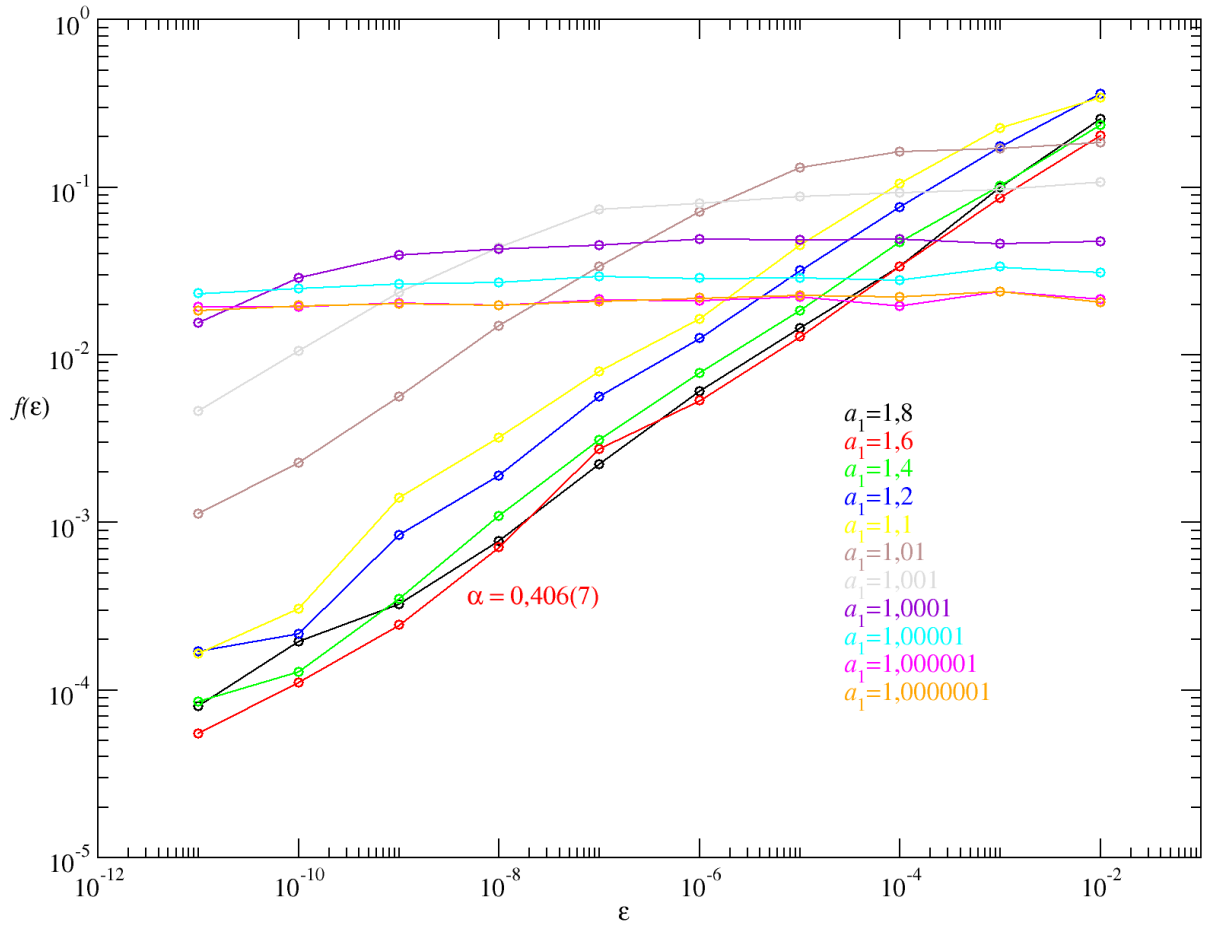


Figura 2.11: Curvas de diferentes cores indicam a relação entre $f(\epsilon)$ e ϵ , destacando o valor de $\alpha = 0,406(7)$ na curva onde $a_1 = 1,6$ (curva vermelha). Estes resultados derivam das linhas mostradas na Fig. 2.10, onde a_1 varia no intervalo $(1; 1,8]$, em que o limite inferior é representado pela cor laranja e o limite superior pela cor preta.

Nesta análise, verificamos como o expoente de incerteza é importante ao nos revelar como a complexidade das estruturas de periodicidade aumenta quando a_1 se aproxima de 1. Essa transição é caracterizada por mudanças significativas no comportamento do sistema, que podem ser visualizadas no espaço de parâmetros dentro do intervalo estudado. Essas alterações se refletem diretamente nos valores do expoente de incerteza α , indicando que, conforme a_1 se aproxima de 1, há uma tendência ao aumento da incerteza no sistema. Essa dinâmica resulta em uma redução no expoente de incerteza, como também observado em Abreu et al. [11].

Essas observações estão alinhadas com análises clássicas e contemporâneas, como as realizadas por Grebogi et al. [15, 57], que destacam a relevância da dimensão exterior e da sensibilidade final nos sistemas dinâmicos, além de trabalhos que abordam a dependência

sensível dos parâmetros [16, 17]. No contexto de cascatas de periodicidade, conforme discutido em [11], a dinâmica do sistema manifesta estruturas fractais extremas, refletindo a interação entre ordem e caos no espaço de parâmetros.

Por outro lado, ao analisarmos o comportamento do expoente de incerteza nas proximidades das curvas extremas, constatamos que, à medida que nos afastamos dessas curvas, o valor do expoente de incerteza tende a se aproximar de 0,40. Esse comportamento indica uma menor incerteza no sistema, sugerindo que a dinâmica se torna menos imprevisível e complexa à medida que nos distanciamos das regiões de comportamento extremo.

Essas observações são de grande importância para o entendimento de sistemas dinâmicos não lineares, uma vez que estudar os pontos críticos e as curvas extremas permite identificar os parâmetros que influenciam a estabilidade do sistema. Além disso, compreender como o comportamento do expoente de incerteza varia em diferentes condições é essencial para descrever a dinâmica de transição entre estados ordenados e caóticos. Essa transição é fundamental em diversas áreas da ciência, onde os sistemas passam por fases de alta complexidade e imprevisibilidade para estados mais controláveis e estáveis.

Portanto, a análise dos expoentes de incerteza não só confirma a coerência dos resultados experimentais e teóricos, mas também serve como uma ferramenta para identificar as fronteiras entre regimes distintos. O aprofundamento dessa análise pode levar a uma melhor compreensão dos fenômenos subjacentes que regulam a presença de caos em sistemas dinâmicos e a maneira como esses comportamentos podem ser modulados para aplicações práticas em campos como física, engenharia e ciências computacionais.

2.6 Dimensão fractal para o mapa Hassell perturbado

O mapa de Hassell é descrito pela seguinte equação:

$$x_{n+1} = \frac{a_1 x_n}{(1 + a_3 x_n)^{a_4}}, \quad (2.14)$$

onde x_n é a variável dinâmica, e a_1 , a_3 e a_4 são parâmetros de controle do sistema. Este mapeamento é amplamente utilizado para descrever dinâmicas populacionais, especialmente

em estudos de populações de insetos, conforme apresentado em [75]. Quando a Eq. 2.14 é expandida em série de Taylor nas proximidades de um ponto fixo, ela pode ser reescrita como:

$$x_{n+1} = a_1 x_n (1 - a_3 a_4 x_n), \quad (2.15)$$

e, dessa forma, o modelo apresenta propriedades similares ao mapa Logístico convencional, conforme discutido em [76].

Segundo [29], é possível introduzir diferentes tipos de perturbações no mapa Logístico, tais como perturbações aditivas, paramétricas, ou ambas. Com base nesses princípios, o mapa de Hassell perturbado é definido por:

$$F(x, a_1, a_2, a_3, a_4) = x_{n+1} = \frac{a_1 x_n (1 + b_n a_2)}{(1 + a_3 x_n)^{a_4}}, \quad (2.16)$$

onde a_1 , a_2 , a_3 e a_4 são parâmetros de controle do mapa, com a_2 controlando a amplitude da perturbação paramétrica e $b_n = -1$ ou $b_n = 1$, dependendo do valor de n . Observa-se que o mapa de Hassell original é recuperado quando $a_2 = 0$. Para nossos estudos fixamos os parâmetros $a_3 = 1$ e $a_4 = 6$.

Na Fig. 2.12a, representamos o espaço de parâmetros para o mapa Hassell perturbado, onde ilustramos a curva extrema e algumas de suas perturbações Δa_1 no intervalo de -9 até 9. Esse espaço foi gerado utilizando os parâmetros a_1 vs. a_2 , com 10^3 por 10^3 sequências de pontos igualmente espaçados nos intervalos $a_1 \in [0, 200]$ e $a_2 \in [0, 1]$. Para cada combinação de (a_1, a_2) , utilizamos $x_0 = 10^{-1}$ como condição inicial. Após descartar um período transitório de 10^5 iterações, calculamos o expoente de Lyapunov para as próximas 10^5 iterações.

Já na Fig. 2.12b, apresentamos os resultados obtidos para o expoente de incerteza ao longo da curva extrema e das curvas paralelas a ela apresentadas na Fig. 2.12a. Em todos os casos, é possível observar que o valor de α , representado pelo círculo vermelho, é menor em comparação aos valores obtidos em sua vizinhança (círculo preto). Além disso, o comportamento crítico à medida que nos aproximamos da curva extrema é novamente

evidenciado, com o expoente de incerteza atingindo $\alpha = 0,23159$ sobre a curva extrema.

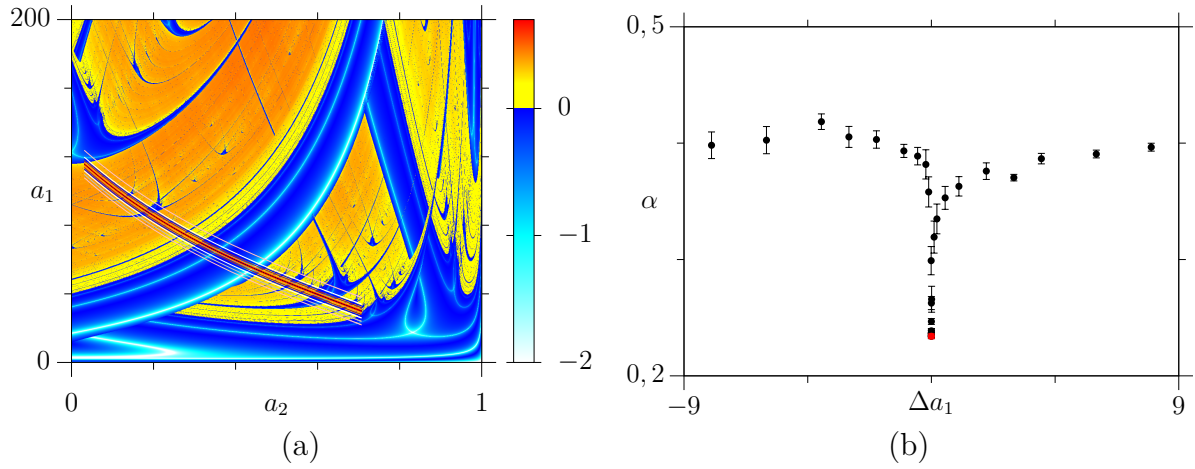


Figura 2.12: (a) Espaço de parâmetros do mapa de Hassell perturbado, destacando a curva extrema e algumas de suas perturbações Δa_1 . (b) Expoente de incerteza das curvas destacadas em (a), com a barra representando o erro.

2.7 Conclusões parciais

Exploramos diversos mapeamentos, incluindo Logístico-Gauss, Círculo, Logístico perturbado e Hassel perturbado, com o objetivo de identificar padrões e analisar a influência das curvas extremas na dinâmica dos sistemas. O expoente de incerteza é investigado em diferentes contextos, onde os valores tradicionais da literatura, $\alpha \approx 0,40$, foram reproduzidos para distintas curvas dentro do espaço de parâmetros. Mostramos que as curvas extremas estruturam esse espaço de maneira singular, com $\alpha \approx 0,23$, indicando que a transição entre ordem e caos ocorre de forma distinta do que era tradicionalmente assumido na literatura.

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em [11, 20] e exibidos em formato de pôster na XXII Conference on Non-Equilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics - MEDYFINOL 2024, onde receberam premiação.

CAPÍTULO 3

CURVAS EXTREMAS: FRONTEIRA ENTRE REGIÕES DE COMPLEXIDADES DISTINTAS

Neste capítulo, dedicamo-nos a uma análise nas proximidades das chamadas curvas extremas. Descobrimos que essas curvas desempenham um papel crucial na organização do espaço de parâmetros, atuando como fronteiras que separam regiões com diferentes níveis de complexidade dinâmica. De fato, uma curva extrema pode ser entendida como uma linha limítrofe entre duas zonas, cada uma caracterizada por comportamentos distintos no sistema, mas ambas variando entre ordem e caos.

3.1 Coeficiente de incerteza na vizinhança das curvas extremas

Ao explorarmos minuciosamente o comportamento do expoente de incerteza próximo às curvas extremas no espaço de parâmetros dos mapas Logístico-Gauss, Logístico perturbado, Círculo e Hassell perturbado, identificamos um comportamento peculiar que nos revelou

outro importante papel desempenhado pelas curvas extremas. Observamos que essas curvas atuam como divisores naturais, separando regiões com diferentes padrões dinâmicos.

Para verificar essa propriedade usamos os resultados obtidos do expoente de incerteza α para o mapa Logístico perturbado Eq. 2.8. Ao investigarmos a dimensão fractal nas cascatas de periodicidade, quantificamos a incerteza nas proximidades das curvas extremas e observamos padrões consistentes que ressaltam a importância dessas curvas na compreensão da dinâmica global de sistemas não lineares. Verificamos que o expoente de incerteza de duas curvas paralelas, resultado de duas perturbações de mesma amplitude mas em direções opostas à curva extrema, é consistentemente distinto uma da outra sendo que, conforme mostra a Tabela 3.1, as curvas submetidas a perturbações negativas permanecem ligeiramente acima das curvas com perturbações positivas.

Esse resultado nos revela que a curva extrema atua como uma fronteira, separando o espaço de parâmetros em duas regiões distintas, cada uma com diferentes níveis de complexidade dinâmica. Esse comportamento foi verificado em todos os quatro mapeamentos nos quais identificamos a dimensão fractal. No entanto, para fins de ilustração, utilizamos os resultados obtidos para o mapa Logístico perturbado, conforme mostrado anteriormente na Fig. 2.7a, e os sintetizamos na Tabela 3.1. Na tabela, EIP+ refere-se ao expoente de incerteza para perturbação positiva, EIP- ao expoente de incerteza para perturbação negativa, e os valores em vermelho indicam os relacionados à curva extrema. As perturbações descritas na Tabela 3.1 podem ser visualizadas na Fig. 2.7a.

Tabela 3.1: Tabela dos valores dos expoentes de incerteza em relação à perturbação Δa_1 .

Δa_1	EIP+	EIP-
0,0	0,23037	0,23037
0,01	0,35021	0,37482
0,00875	0,36345	0,38442
0,0075	0,36164	0,39257
0,00625	0,3854	0,37832
0,005	0,3826	0,40455
0,0045	0,36913	0,38765
0,004	0,36464	0,39062
0,0035	0,36914	0,39788
0,003	0,36553	0,39361
0,0025	0,36764	0,38209
0,002	0,36769	0,38154
0,0015	0,36756	0,39584
0,001	0,35268	0,40173
0,0005	0,3425	0,37896
0,0001	0,31244	0,35489
0,00001	0,23037	0,29083
0,000001	0,23365	0,24919
0,0000001	0,22793	0,23587
0,00000001	0,22969	0,23084
0,000000001	0,22828	0,25779
0,0000000001	0,22856	0,23451

Com os dados da tabela anterior, confeccionamos a Fig. 3.1 em que a ordenada representa os valores dos expoentes de incerteza e as perturbações $|\Delta a_1|$ são representadas pelo eixo das abscissas. A EPI+ aparece na cor azul, enquanto a EIP- aparece na cor vermelha,

com as barras representando o erro de cada α .

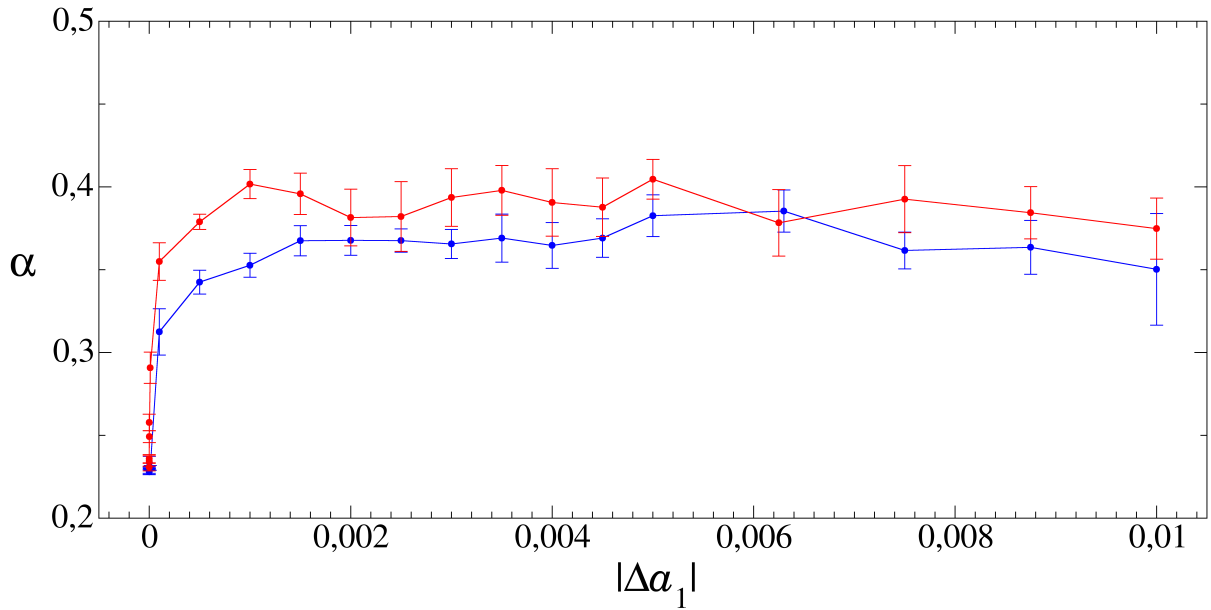


Figura 3.1: Os resultados do expoente de incerteza α das curvas do mapeamento Logístico perturbado Fig. 2.7b, são apresentados em função do valor absoluto do deslocamento Δa_1 . As cores vermelha e azul representam, respectivamente, os valores de α obtidos para $-\Delta a_1(\text{EIP-})$ e $\Delta a_1(\text{EIP+})$.

3.2 Expoente de Lyapunov na vizinhança da curva extrema

A análise do espaço de parâmetros oferece uma visão abrangente das possíveis dinâmicas do sistema, principalmente através da análise dos diagramas 2D dos expoentes de Lyapunov, revelando-nos detalhes mais específicos das mudanças de comportamento conforme um parâmetro é ajustado. Isso inclui a identificação de padrões de comportamento periódico, caótico ou estável, permitindo uma análise de como o sistema responde às variações nos parâmetros que o definem.

Com base nesse princípio e no mapa do Círculo, investigamos mais detalhadamente as proximidades da curva extrema e_1^{12} , utilizando o diagrama do expoente de Lyapunov (λ) em relação ao parâmetro a_2 . Para isso, examinamos não apenas a curva extrema, mas também duas curvas que foram transladadas Δa_1 em relação ao parâmetro a_1 . Denominamos de curva superior a curva perturbada por $\Delta a_1 = 0,05$ [Fig. 3.2(a), curva verde] e de curva

inferior a curva perturbada por $\Delta a_1 = -0,05$ [Fig. 3.2(a), curva vermelha]. Essa abordagem possibilitou a comparação das três curvas quanto à estabilidade ou instabilidade do sistema em distintas regiões do espaço de parâmetros.

As Figs. 3.2 [(b), (c), (d)], que mostram λ em função de a_2 , foram geradas com a análise de 10^5 pontos igualmente espaçados em a_2 . Para o cálculo do expoente de Lyapunov λ , foi considerado um tempo transiente de 10^3 iterações, seguido pela avaliação das 10^3 iterações subsequentes, evidenciando mudanças significativas na distribuição das regiões de estabilidade e caos.

Na Fig. 3.2(c), que ilustra o diagrama de Lyapunov ao longo da curva extrema (preto), o sistema revelou diversas regiões de alta estabilidade, onde os valores de λ alcançaram até -7. Ao perturbar a curva extrema em $\Delta a_1 = \pm 0,05$ (conforme mostrado nas Figs. 3.2[(b), (d)]), observamos uma tendência das regiões de periodicidade de alta estabilidade se contraírem, tornando-se menos proeminentes e uma notável redução nos valores de expoente de Lyapunov abaixo de zero, indicando uma presença mais marcante de caos nessas áreas.

Os picos negativos dos expoentes de Lyapunov, que correspondem a órbitas superestáveis, estão presentes numa quantidade três vezes superior ao longo da curva perturbada positivamente (verde) do que ao longo da curva perturbada negativamente (vermelha) e da curva extrema (preta), conforme mostra a Fig. 3.2. No entanto, os picos têm módulo maior ao longo da curva extrema, o que indica maior robustez diante de oscilações no parâmetro. A perturbação positiva gera uma curva paralela em uma região onde ela cruza três vezes as curvas superestáveis principais (curvas vermelhas em meio às estruturas de periodicidade amarelas) de cada estrutura. Ao passo que, quando a perturbação é negativa, ela cruza apenas uma vez. Note que a curva extrema é exatamente a fronteira entre essas duas regiões. Outra distinção entre as regiões superior e inferior da curva extrema está na própria estrutura de periodicidade (região amarela), que exibe três ramificações acima da curva extrema, enquanto abaixo dela há apenas uma.

Portanto, torna-se nitidamente evidente que as duas regiões do espaço de parâmetros, delimitadas pela curva extrema, exibem características dinâmicas notavelmente distintas.

A curva extrema atua como uma fronteira definidora, marcando a transição entre essas complexidades contrastantes.

3.3 Histograma

Para a curva extrema e_1^{12} e suas duas translações $\Delta a_1 = \pm 0,05$, previamente ilustradas na Fig. 3.2(a), realizamos a plotagem dos histogramas dos valores do expoente de Lyapunov com o intuito de distinguir as diferentes regiões sob análise. Para tal, construímos os histogramas correspondentes a cada uma das três curvas e registramos todos os pontos identificados como incerto. Vale ressaltar que um ponto incerto é definido quando se seleciona um valor φ (neste contexto, φ foi determinado de forma equidistante ao longo das curvas) e se introduz uma perturbação que gera os valores $\varphi - \varepsilon$ e $\varphi + \varepsilon$, mantendo-os na mesma curva. Em seguida, calculamos o expoente de Lyapunov λ para os três parâmetros: $\varphi - \varepsilon$, φ e $\varphi + \varepsilon$. Consideramos o ponto φ como “incerto” quando, para um desses três valores, o atrator se mostra periódico ($\lambda < 0$) e, em pelo menos um dos outros dois valores, o atrator é caótico ($\lambda > 0$), ou vice-versa.

No histograma da Fig. 3.3, registramos os valores de λ para φ incerto. O intervalo de λ , de -1 a 1, foi dividido em 2000 subintervalos. Os cálculos do expoente de Lyapunov foram realizados descartando as primeiras 10^4 iterações e considerando as 10^4 iterações subsequentes. A distribuição dos pontos sobre as curvas iniciou com $\varepsilon = 10^{-2}$, utilizando 4 000 pontos; para $\varepsilon = 10^{-3}$, foram considerados 8 000 pontos, e assim sucessivamente, até $\varepsilon = 10^{-12}$, com 44 000 pontos. A cada redução de uma ordem de grandeza em ε (10^{-1}), foram adicionados 4 000 novos pontos para análise.

A análise dos histogramas revela que a curva extrema central e_1^{12} (b) apresenta um número significativamente maior de pontos incertos em comparação com as curvas transladas. Especificamente, a curva extrema contém 10 797 valores de λ classificados como incertos, enquanto as curvas transladas apresentam números menores: 4698 para $\Delta a_1 = 0,05$ (a) e 3 090 para $\Delta a_1 = -0,05$ (c). Esses dados sugerem que a curva central é a região de maior complexidade, refletindo uma alta concentração de pontos com comportamento incerto.

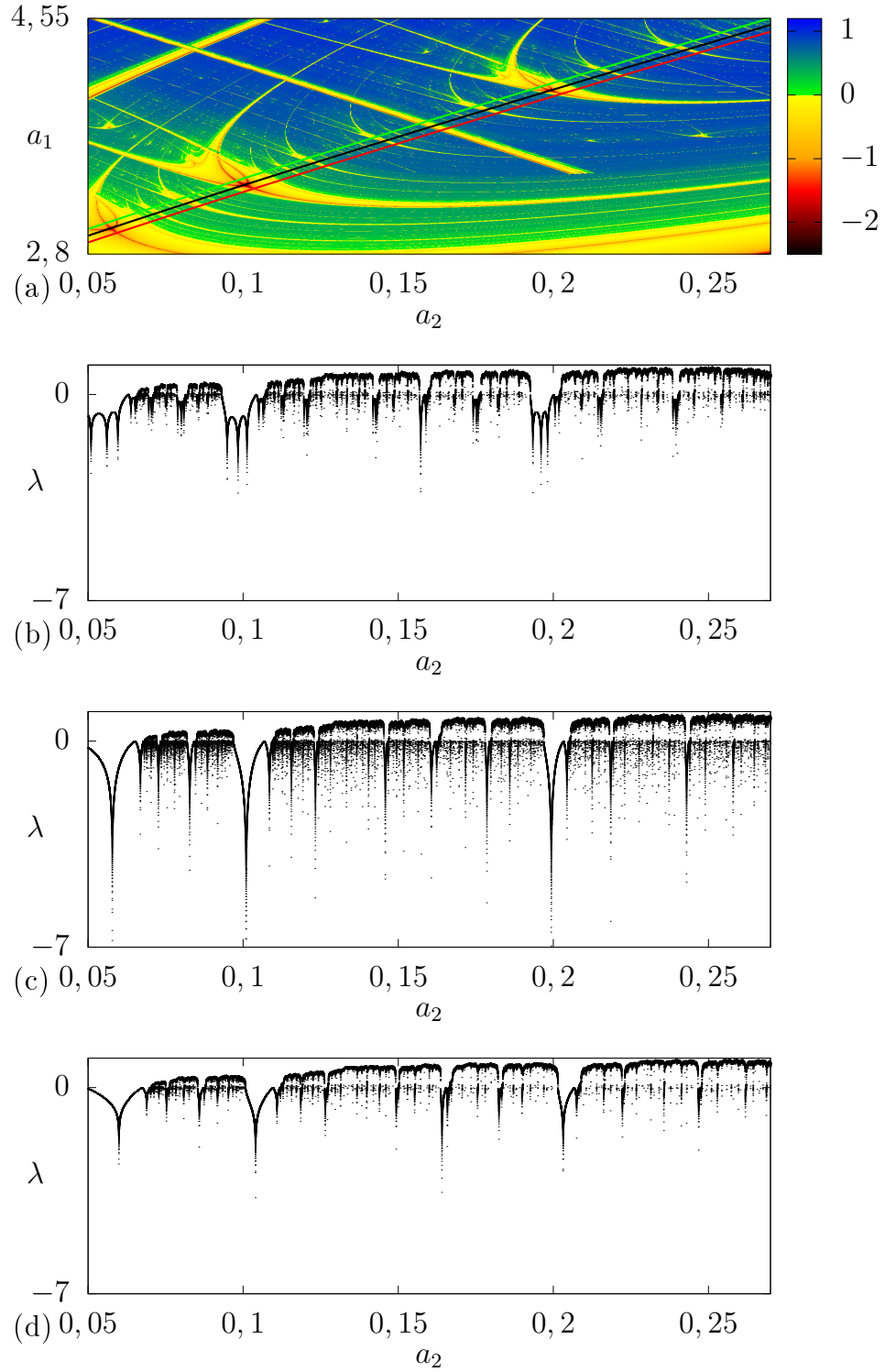


Figura 3.2: (a) Espaço de parâmetros do mapa do Círculo, destacando a região onde a curva extrema e_1^{12} (preta) cruza as cascatas de periodicidade, bem como as curvas superior $\Delta a_1 = 0,05$ (verde) e inferior $\Delta a_1 = -0,05$ (vermelha). O gráfico (b) corresponde ao expoente de Lyapunov ao longo da curva superior, (c) à curva extrema e (d) à curva inferior.

Essas variações destacam a sensibilidade do sistema a pequenas alterações nos parâmetros, evidenciando que translações em direções opostas provocam efeitos assimétricos na distribuição dos valores de λ . Esse comportamento reforça a distinção entre as regiões demarcadas pela curva extrema, mostrando que pequenas modificações podem influenciar significativamente a estabilidade e a complexidade dinâmica do sistema.

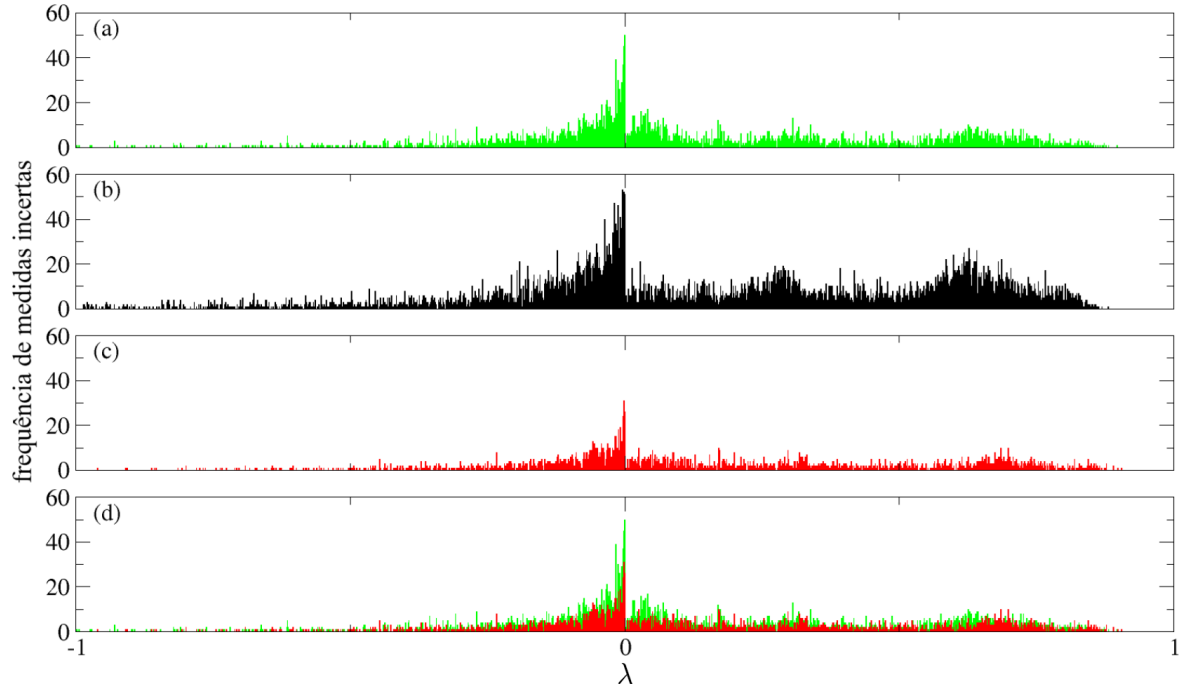


Figura 3.3: [(a) - (c)] Histogramas do expoente de Lyapunov, onde o eixo x representa os valores de λ e o eixo y indica a frequência de ocorrência de λ . As Figs. (a) a (c) correspondem, respectivamente, ao histograma da curva extrema transladada $\Delta a_1 = 0,05$, da curva extrema e_1^{12} , e da curva extrema transladada $\Delta a_1 = -0,05$. Em (d) a sobreposição de (c) sobre (a).

3.4 Crise interior

Uma maneira eficaz de distinguir essas regiões é apresentar as trajetórias em um mapa de retorno, também conhecido como mapa de teia de aranha (cobweb). Na Fig. 3.4, doze conjuntos de parâmetros (a_2, a_1) estão indicados com pontos brancos em uma área do espaço de parâmetros que permite uma análise de diversas dinâmicas do sistema como caos largo e moderado, como veremos a seguir, e as diferenças entre áreas delimitadas pela curva extrema, que atua como uma importante fronteira. Na Fig. 3.5, os mapas de retorno indicados de (a) a (l), correspondem aos atratores dos doze parâmetros, indicados na Fig.

3.4, na sequência da esquerda para a direita e de cima para baixo. Esse procedimento garante uma visão abrangente e detalhada do comportamento do sistema em cada uma das regiões selecionadas, permitindo captar nuances importantes na transição entre as dinâmicas observadas.

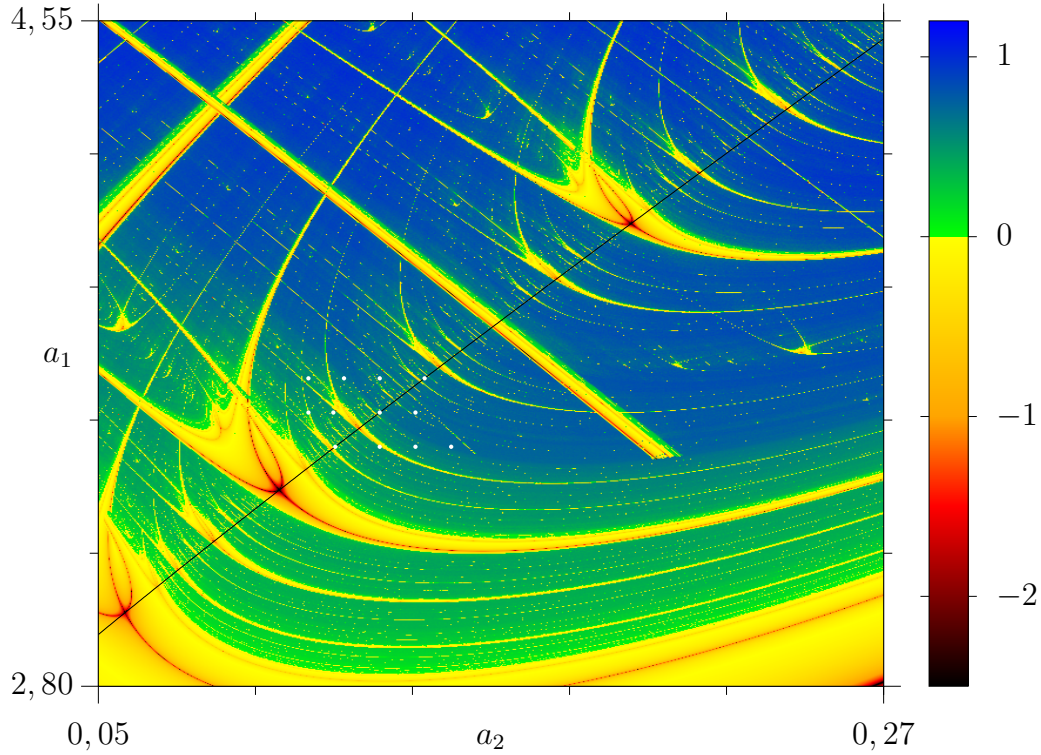


Figura 3.4: Espaço de parâmetros do mapa do Círculo, destacando os pontos brancos posicionados sobre, acima e abaixo da curva extrema.

Na elaboração dos mapas de retorno, apresentados na Fig. 3.5, destacamos, após um transiente de 10^4 iterações, 200 iterações do atrator caótico (azul), a reta identidade (preto) e o mapa (vermelho). Observamos dois tipos de atratores caóticos, um que ocupa toda a região do espaço de fase considerado $x \in (0, 1)$ o que chamamos de caos largo [veja Fig. 3.5 (c), (d), (h) e (i)], e corresponde a parâmetros que se encontram na região azul da Fig. 3.4 indicando um alto valor do expoente de Lyapunov. Os demais parâmetros, estão em uma região esverdeada da mesma figura. Os atratores correspondentes, não ocupam, pelo menos, o intervalo $x \in (0,5; 0,7)$ e apresentam baixos valores do expoente de Lyapunov, por essa razão, o chamamos de atrator caótico moderado [veja Fig. 3.5 (a), (b), (e), (f), (g), (i), (j) e (k)]. Esta diferença dos atratores ocorre por uma crise interna, onde o atrator estreito colide com o ponto fixo em $(0,5; 0,5)$ [circunferência na Fig. 3.5(a)] interno à

sua bacia de atração. Cada sequência da Fig. 3.5 mostra essa colisão. Por exemplo, na sequência (e) e (f) observa-se o atrator aproximando-se do ponto fixo, em (g) parece tocá-lo e em (h) o atrator largo está formado. Estas colisões, ocorrem exatamente na fronteira entre as cores verde e azul da Fig. 3.4.

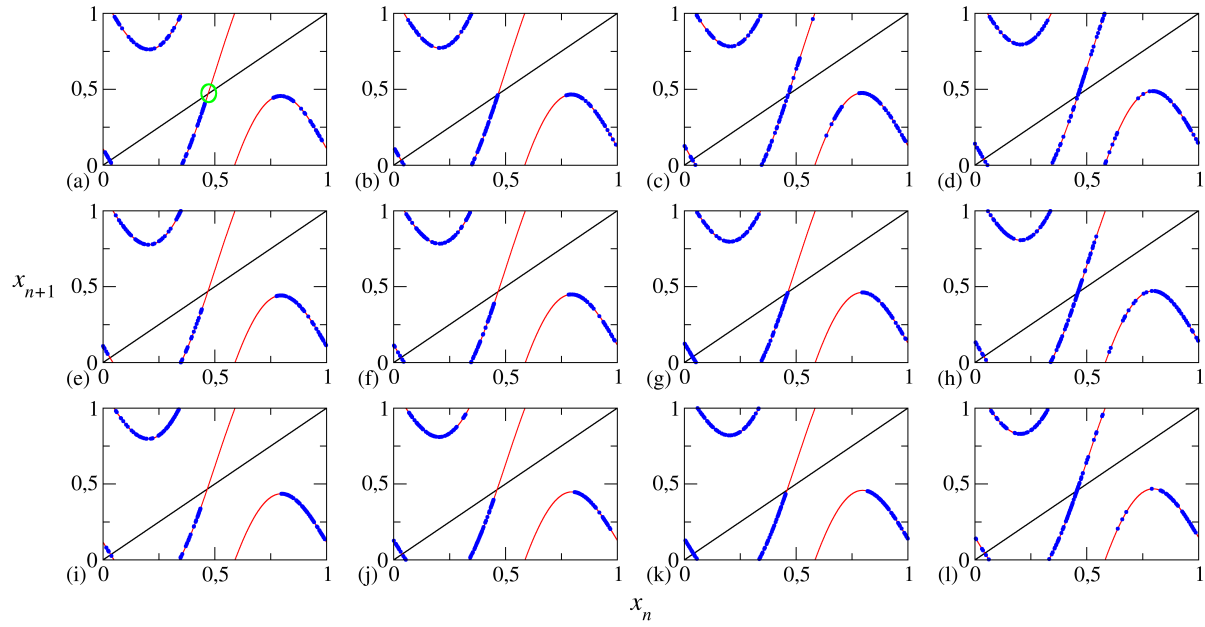


Figura 3.5: Mapa de retorno para cada um dos doze pontos brancos destacados na Fig. 3.4, com foco na crise quando o atrator caótico colide com o ponto fixo destacado em verde em (a). Todos os atratores estão apresentados por 200 pontos azuis, após um transiente de 10^4 .

3.5 Conclusões parciais

Analisamos os expoentes de incerteza, o expoente de Lyapunov, o histograma e o mapa de retorno nas proximidades das curvas extremas, evidenciando seu papel como fronteiras bem definidas entre diferentes regimes dinâmicos. Para isso, apresentamos resultados numéricos que demonstram distinções na complexidade dos sistemas, tanto acima quanto abaixo das curvas extremas.

CAPÍTULO 4

FRONTEIRA FRACTAL: EXPLORANDO A ESCADA DO DIABO

Neste capítulo, exploramos a intrigante Escada do Diabo, uma estrutura fractal que mapeia a evolução do número de rotação em sistemas dinâmicos não lineares. Esta função, contínua mas não derivável, revela padrões únicos em intervalos onde o sistema estabiliza-se entre comportamentos periódicos e quase-periódicos. A Escada do Diabo surge, assim, como uma estrutura organizada dos parâmetros, refletindo a complexidade do sistema com seus degraus infinitesimais.

4.1 Escada do diabo

A escada do diabo é uma estrutura fractal clássica, amplamente presente em sistemas dinâmicos não lineares [77–79] e composta por patamares “degraus” formados pelo mesmo número de rotação para um conjunto contínuo de parâmetros. Nesta intrigante estrutura, entre dois degraus existe sempre uma infinidade de degraus formados por todos os infinitos números racionais entre os valores de número de rotação dos dois degraus escolhidos. A Escada do Diabo é formada apenas pelo comportamento periódico. No espaço planar dos

parâmetros, ela corresponde a uma curva tal que, a região onde ocorre uma transição de periodicidade, i.e., transição de número de rotação, é sempre vizinha a regiões de comportamento caótico e quase-periódico.

O número de rotação é calculado pela expressão

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n}. \quad (4.1)$$

Cada degrau representa uma órbita periódica estável associada a valores racionais da frequência natural do sistema. À medida que diferentes regiões do espaço de parâmetros são exploradas, essas órbitas podem se transformar, interrompendo um platô e iniciando outro de forma contínua e infinitesimal. Isso dá origem à estrutura degrau-a-degrau da escada.

No entanto, em nosso estudo, observamos uma importante variação no comportamento clássico da escada. Ao calcular ρ ao longo de curvas extremas, encontramos a *Escada do Diabo Descontínua*. Essa interrupção ocorre quando o sistema atravessa regiões do espaço de parâmetros onde o comportamento caótico, gerando lacunas que interrompem a sequência ordenada de degraus.

Este comportamento reflete uma transição fundamental entre dinâmicas regulares e caóticas, uma característica de destaque em sistemas não lineares e um fenômeno amplamente estudado em física teórica e aplicada. A organização dos degraus, ligada à teoria dos números, também pode ser compreendida com base nas ressonâncias isócronas do sistema. No espaço de parâmetros, as regiões caóticas que interrompem a escada demarcam as fronteiras entre a periodicidade e o caos.

Para analisar essa dinâmica, geramos o espaço de parâmetros do mapa do Círculo representado na Fig. 4.1(a), ignorando o mod 1 da Eq. 1.30. Para tal, realizamos 10^4 iterações após descartar um transiente de 10^3 evoluções. Foram analisados 10^6 pares de parâmetros (a_2, a_1) , utilizando uma grade de plotagem com resolução de $10^3 \times 10^3$.

Nas Figs. 4.1(b) e (c), repetimos o transiente e as iterações da Fig. 4.1(a), utilizando 10^3 pontos igualmente espaçados ao longo das curvas $a_1 = 1$ e e_1^{12} , sem aplicar o mod 1. Na Fig. 4.1(b), confirmamos a presença da Escada do Diabo para o mapa do Círculo, observada ao

longo da reta $a_1 = 1$. Posteriormente, realizamos os mesmos cálculos para os parâmetros correspondentes à curva extrema e_1^{12} (Fig. 4.1(c)), evidenciando uma organização complexa das cascatas de periodicidade e o surgimento do caos conforme os parâmetros de controle variam.

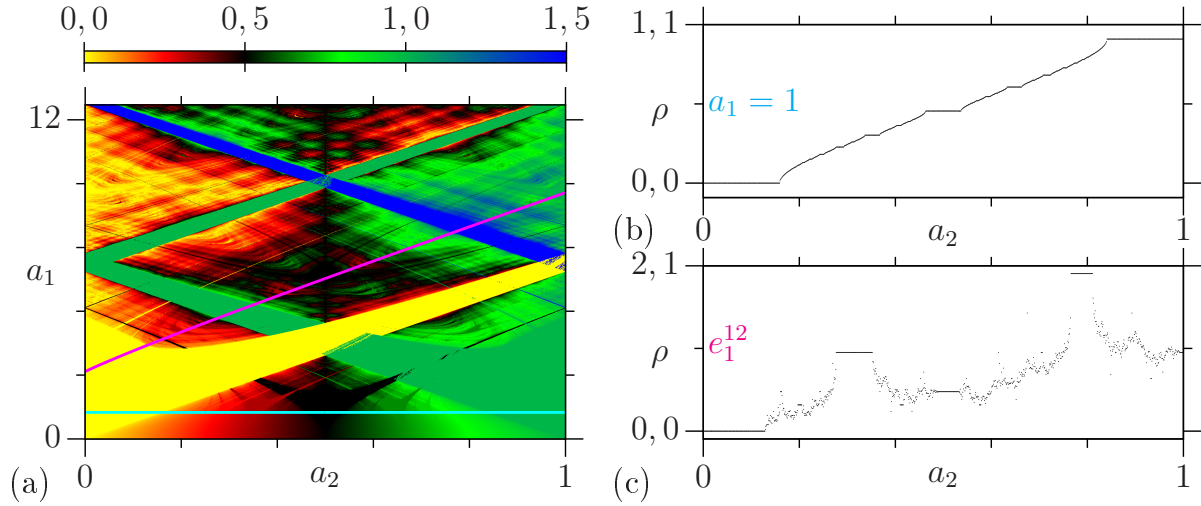


Figura 4.1: Em (a), ilustramos o espaço de parâmetros do mapa do Círculo, onde a cor indica o número de rotação ρ , variando de amarelo a azul, conforme a escala de cores exibida. Em (b) e (c), apresentamos o número de rotação em função do parâmetro a_2 , representada para a reta $a_1 = 1$ e para a curva extrema e_1^{12} , respectivamente.

Buscamos descrever outra técnica para obter essas escadas considerando a trajetória da órbita. Mais especificamente, contamos o número de deslocamentos r (retorno) para a esquerda ($x_{n+1} - x_n < 0$). Definimos um novo número de rotação ρ^* , dada uma órbita periódica, como sendo

$$\rho^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n}, \quad (4.2)$$

onde n é o número da iteração. Para calcular o número de rotação ρ^* ao longo da curva extrema e da reta $a_1 = 1$, começamos escolhendo um par de parâmetros (a_2, a_1) que pertença à curva desejada e esteja em uma das extremidades, como o menor valor de $a_2 = 0$, por exemplo. A partir da condição inicial $x_0 = 0,1$, realizamos 10^3 iterações de tempo transiente para estabilizar o sistema e consideramos $n = 10^4$ iterações. Dessa forma, estimamos $\rho^* = r/n$ com r sendo o número de retornos da trajetória nas n iterações.

Assim, calculamos ρ^* para 10^3 pares (a_2, a_1) distribuídos uniformemente e de forma crescente ao longo das curvas selecionadas. Utilizamos como condição inicial para as próxi-

mas iterações depois de $x_0 = 0,1$, o valor da última iteração, o que permitiu acompanhar o atrator com precisão ao longo do processo, até que a_2 atingisse o seu valor máximo. Para calcular ρ^* , é necessário que exista uma órbita periódica, obtida com uma tolerância inferior a 10^{-10} . Para esses cálculos, utilizamos o mapeamento Eq. 1.30.

A Fig. 4.2(a) apresenta os resultados obtidos por essa abordagem alternativa, destacando seu papel como uma ferramenta adicional para a análise do espaço de parâmetros. A figura ilustra o comportamento da órbita associada a um par de parâmetros em termos de seus retornos, expressos em porcentagem. A barra de cores, que varia do vermelho ao verde, representa a porcentagem dos retornos, enquanto a cor branca identifica as regiões que não foram detectadas periodicidade. Essa porcentagem oferece uma visão clara do número de trajetórias realizadas, permitindo uma análise mais detalhada da periodicidade das órbitas e do comportamento dinâmico correspondente.

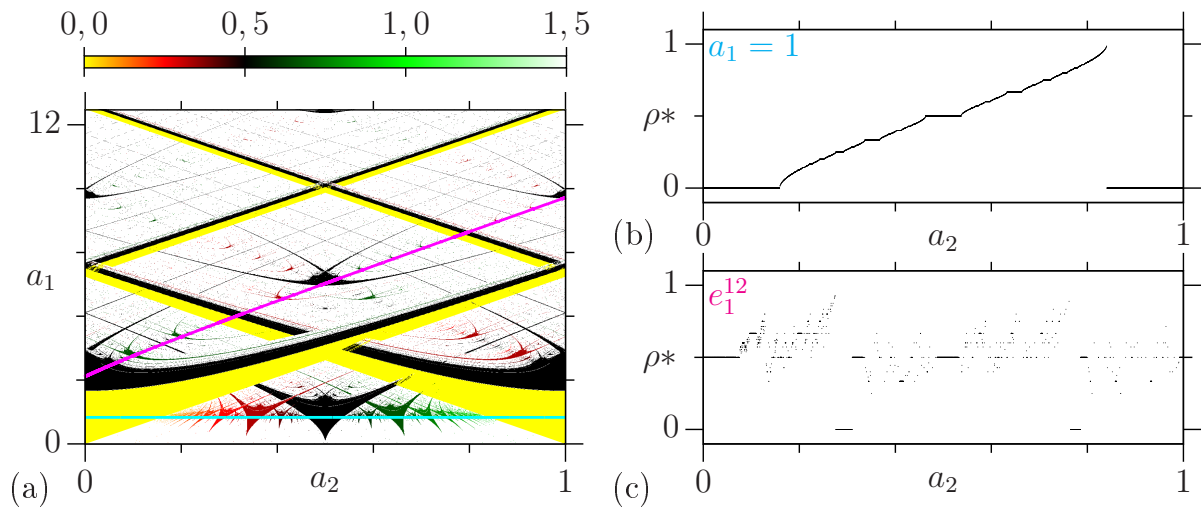


Figura 4.2: Na Fig. (a), representamos o espaço de parâmetros do mapa do Círculo, com a cor indicando o número de rotação ρ^* , que varia de amarelo a branco, de acordo com a escala de cores mostrada. As Figs. (b) e (c) exibem ρ^* em relação ao parâmetro a_2 para a reta $a_1 = 1$ (ciano) e para a curva extrema e_1^{12} (magenta), respectivamente.

Para o mapa Logístico-Gauss, a definição de ρ faz com que todas as medidas tendam a zero à medida que o número de iterações do mapeamento aumenta, uma vez que os atratores deste mapa estão confinados em uma região limitada do espaço de fases. Assim, optamos por apresentar uma transição de ρ , descartando as 10^3 primeiras iterações e considerando as 10^2 seguintes. Esse estudo está representado na Fig. 4.3(a), enquanto as Figs. 4.3(b) e (c) mostram o número de rotação em função do parâmetro a_2 , representado

para as curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} . Caso 10^4 iterações fossem realizadas, a Fig. 4.3(a) seria completamente preta e os diagramas das Figs. 4.3(b) e (c) se transformariam em retas constantes com valor $\rho = 0$.

Agora, ao calcularmos ρ^* para o mapa Logístico-Gauss, a Fig. 4.4 (a) apresenta duas cascatas de periodicidade organizadas ao longo das curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} . Nos gráficos (b) e (c) apresentamos ρ^* ao longo de e_1^{23} e e_2^{32} , respectivamente. Os parâmetros apresentados nos gráficos são distintos para facilitar a localização dos parâmetros nas curvas. Para gerar o espaço de parâmetros da Fig. 4.4 (a) foram realizadas 10^5 iterações após eliminar um transiente de 10^4 iterações.

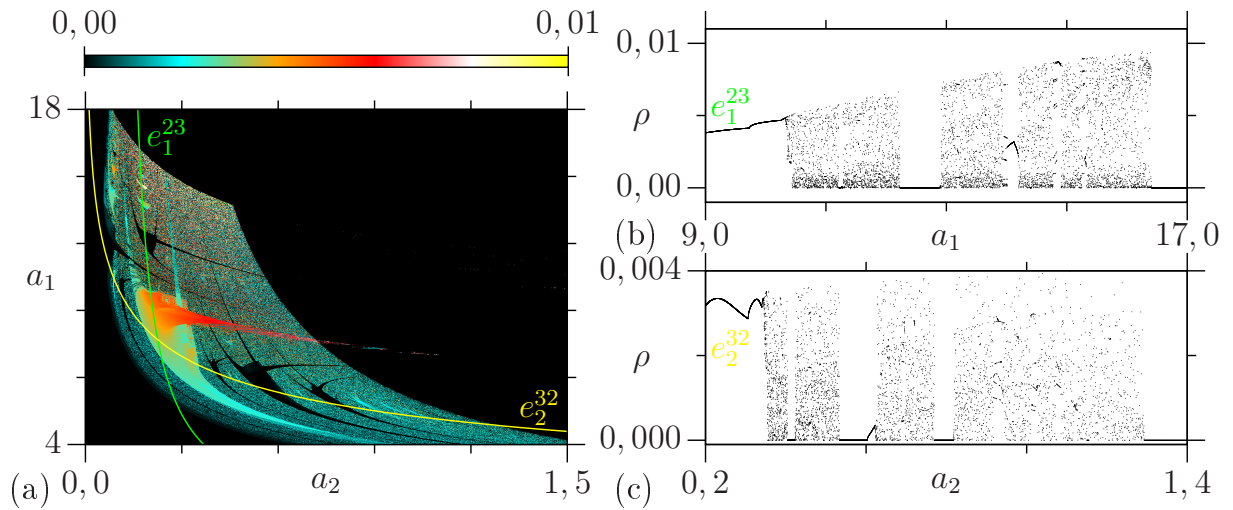


Figura 4.3: (a) Representação da transição de ρ no plano de parâmetros calculada para o mapa Logístico-Gauss. Foram descartadas as 10^3 primeiras iterações, e as 10^2 subsequentes foram utilizadas para o cálculo. (b) e (c) Exibem o número de rotação ρ em função do parâmetro a_1 e a_2 , respectivamente, calculado para as curvas extremas e_1^{23} e e_2^{32} . Nessas condições, 10^4 iterações resultariam em retas constantes com valor $\rho = 0$.

Nessas análises, apresentamos que ρ^* e ρ possuem características complementares que podem ser exploradas de acordo com o objetivo do estudo. Enquanto ρ^* se destaca pela precisão na análise de órbitas periódicas, sendo ideal para identificar cascatas de periodicidade e bifurcações, ρ oferece uma visão mais ampla do comportamento dinâmico, capturando tanto regiões periódicas quanto caóticas. Em sistemas como o mapa Logístico-Gauss, onde os atratores estão confinados em uma região limitada, ρ^* pode ser mais adequado para destacar os padrões dinâmicos relevantes sem ser influenciado pela convergência natural a zero de ρ . Apesar de suas limitações individuais, o uso combinado de ρ^* e ρ pode propor-

cionar uma análise mais completa, permitindo compreender tanto as estruturas periódicas quanto as transições e o caos presentes no sistema.

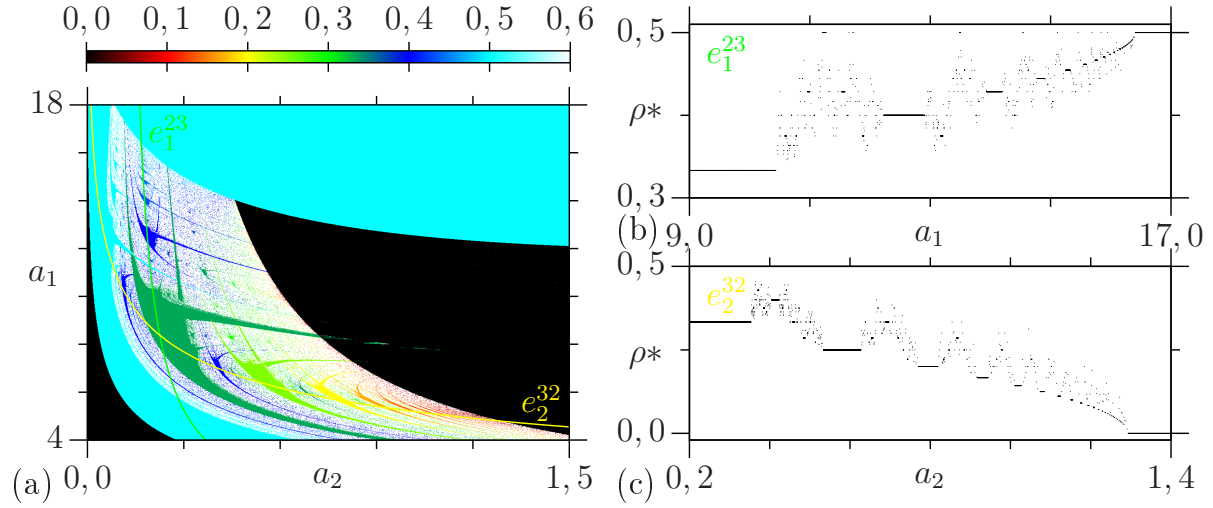


Figura 4.4: (a) Cascatas de periodicidade no plano de parâmetros Γ ao longo das curvas extremas verde e_1^{23} e amarelo e_2^{32} . O sombreado preto-ciano representa dinâmica periódica ($\lambda < 0$), enquanto o sombreado branco indica comportamento caótico ($\lambda > 0$). Tanto e_1^{23} quanto e_2^{32} cruzam cascatas de periodicidade organizando Γ . (b) e (c) Representam ρ^* em função dos parâmetros.

Na Fig. 4.5 apresentamos ampliações das Figs. 4.4(b) e (c). Elas mostram a escada com interrupções caóticas entre um degrau e outro.

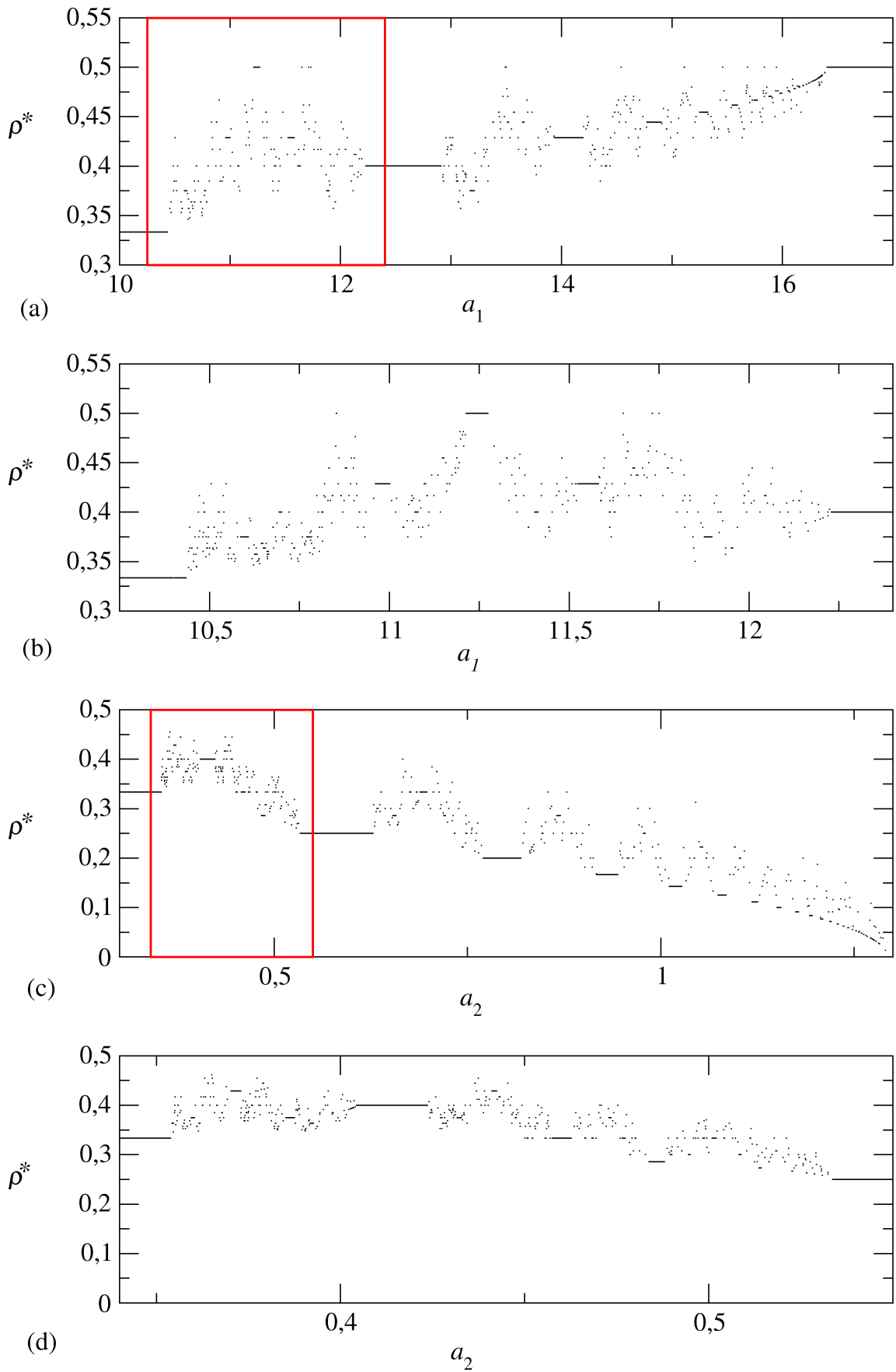


Figura 4.5: (a) Apresenta o comportamento ampliado da Fig. 4.4(a), enquanto (b) é a ampliação do retângulo vermelho que está demarcado em (a). (c) Apresenta o comportamento ampliado da Fig. 4.4 (c), enquanto (d) é a ampliação do retângulo vermelho que está demarcado em (c).

4.2 Conclusões parciais

Investigamos a Escada do Diabo, uma estrutura fractal estudada em sistemas dinâmicos não lineares, caracterizada por transições entre patamares de periodicidade. Nossos resultados evidenciam que, ao longo das curvas extremas, ocorrem transições entre comportamentos periódicos e caóticos de maneira distinta do que é observado nas regiões de periodicidade, onde $a_1 = 1$. Além disso, introduzimos uma abordagem alternativa para a construção dessas escadas, baseada na análise da trajetória da órbita. A comparação entre as duas técnicas sugere que elas se complementam, fornecendo uma visão mais abrangente sobre a estrutura dessas transições e abrindo novas possibilidades para a investigação de sistemas dinâmicos.

CAPÍTULO 5

PERTURBAÇÃO RANDÔMICA

Neste último capítulo, analisamos como ruídos ou perturbações uniformes no espaço de fases podem influenciar o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares, focando no impacto dessas variações no espaço de parâmetros. Exploraremos inicialmente o conceito de ruído branco e como ele afeta as propriedades dos sistemas dinâmicos. Em seguida, discutiremos a invariância de escala sob perturbações, propondo hipóteses sobre a convergência de coeficientes de incerteza e a busca por uma curva universal. Para concluir, estabelecemos um paralelo entre o mapa do Círculo (1D) e o mapa de Hénon (2D), destacando as semelhanças e peculiaridades desses sistemas diante da introdução de ruídos.

5.1 Ruído branco

Na física, perturbação branca refere-se a perturbação que é caracterizada por distribuição de energia uniforme em todas as frequências do espectro. Em outras palavras, aplicar uma perturbação branca em um determinado sistema, significa possuir densidade espectral de potência constante em todas as frequências. O termo “branco” é uma analogia à luz branca, que contém mistura de todas as cores do espectro visível de luz. Tal perturbação é frequentemente utilizada em experimentos para representar um sinal de ruído que é ale-

atório e não correlacionado em diferentes frequências. Ele introduz variações imprevisíveis no comportamento do sistema resultando em uma gama mais ampla de possíveis estados e trajetórias para o sistema. Isso é útil em diversas aplicações, como em análises estatísticas de sistemas dinâmicos, estudos de resposta de sistemas a distúrbios externos e internos, e em experimentos de sensoriamento remoto, entre outros.

Nos últimos anos, pesquisas exploram como pequenas perturbações podem resultar em comportamentos complexos, como o caos induzido pelo ruído ou em formas de controle do caos, utilizando técnicas diversas que variam de acordo com os mapeamentos específicos e os tipos de ruído. Estudos que abordam essas questões podem ser encontrados em [45–48].

5.2 Impacto do Ruído no Espaço de Parâmetros ao Longo da Curva Extrema

Em nossos estudos, geramos um ruído distribuído de forma uniforme no mapa do Círculo e examinamos o seu efeito no espaço de parâmetros. Esse ruído é produzido pelo conjunto de perturbações aleatórias pertencente ao intervalo ΔI e realizado a cada iteração, sendo que ao final de cada iteração a perturbação é somada à variável dinâmica do mapeamento. O intervalo ΔI simboliza a amplitude de perturbação. Por exemplo, um intervalo com amplitude de 10^{-15} corresponde a valores randômicos no intervalo $[-10^{-15}, 10^{-15}]$. Para melhor visualização, na Fig. 5.2 ampliamos o espaço de parâmetros, onde a curva extrema e_1^{21} está predominantemente concentrada para diversos valores de ΔI . Desta forma, $\Delta I = 0$, expresso na Fig. 5.1(a), indica que não houve perturbação no sistema. No entanto, nos diagramas (b), (c) e (d) da Fig. 5.1, ocorreram perturbações com amplitudes de 10^{-4} , 10^{-3} e 10^{-2} , respectivamente. Para esses ruídos, conforme a perturbação no mapeamento aumenta, ocorre uma diluição da região de estabilidade periódica. Como consequência, as regiões caóticas passam a dominar o espaço de parâmetros, penetrando áreas antes periódicas, à medida que a perturbação do sistema aumenta.

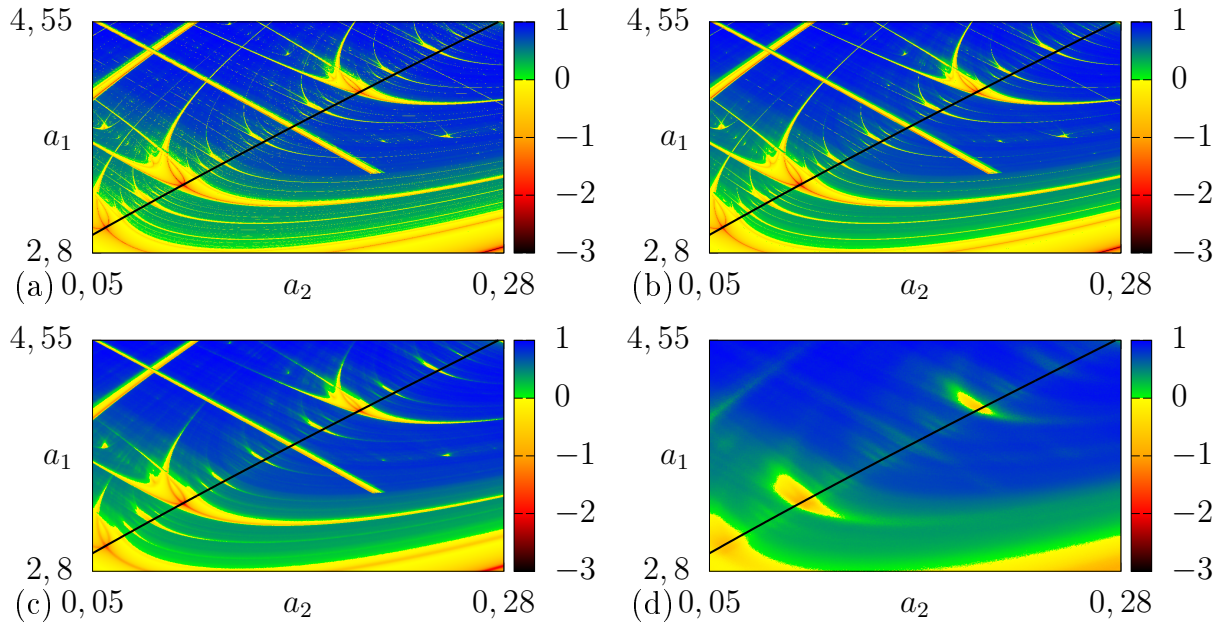


Figura 5.1: Reflexo das perturbações no espaço de parâmetros na cascata ao longo da curva extrema e_1^{21} na cor preta. (a) $\Delta I = 0$, (b) $\Delta I = 10^{-4}$, (c) $\Delta I = 10^{-3}$ e (d) $\Delta I = 10^{-2}$.

Na Fig. 5.2, apresentamos dezesseis gráficos do expoente de incerteza α calculados para a curva extrema do mapa do Círculo sob diferentes níveis de ruído. No eixo das abscissas de cada gráfico, encontra-se o parâmetro ε , utilizado para medir a incerteza sobre a curva extrema, enquanto o eixo das ordenadas exibe o valor de $f(\varepsilon)$, ambos em escala logarítmica.

Para criar esses gráficos, começamos pela estimativa do expoente de incerteza α nas cascatas de periodicidade ao longo da curva extrema e_1^{21} . Nesta curva, o parâmetro ε varia de 10^{-1} a 10^{-12} , em intervalos decrescentes com fator de multiplicação 10^{-1} . Para classificar os pontos como certos ou incertos medimos o expoente de Lyapunov λ e avaliamos 8 000 pontos para $\varepsilon = 10^{-1}$ e 88 000 pontos para $\varepsilon = 10^{-12}$, com incrementos de 8 000 pontos a cada redução de ε por um fator de 10^{-1} . Além disso, foram realizadas perturbações no sistema, variando de $\Delta I = 10^{-15}$ a $\Delta I = 10^{-2}$.

Para avaliar a dinâmica, consideramos 10^5 iterações após descartar um transiente de mesmo tempo de evolução. Dessa forma, obtivemos a fração de parâmetros incertos $f(\varepsilon)$ em função de ε para os parâmetros situados ao longo da curva e_1^{21} .

Ao ajustar uma função de lei de potência, obtivemos os gráficos apresentados na Fig. 5.2. A Fig. 5.2 (a) mostra o valor $\alpha = 0,233(1)$, correspondente ao expoente de incerteza da

curva extrema sem perturbação. Na Fig. 5.2 (b), temos $\alpha = 0,240(4)$ para uma perturbação de amplitude $\Delta I = 10^{-15}$; na Fig. 5.2 (c), α com $\Delta I = 10^{-14}$; e na Fig. 5.2 (d), α com $\Delta I = 10^{-13}$. Esse padrão se repete até a Fig. 5.2 (p), onde α é determinado para um ruído de $\Delta I = 10^{-1}$.

Com esses gráficos, observa-se que o expoente de incerteza α é alterado gradativamente: inicialmente apresenta uma tendência de crescimento, desde (a) $\alpha = 0,233(1)$ até (i) $\alpha = 0,42(3)$, e em seguida diminui até que o expoente de incerteza se aproxime de zero. Quando o expoente de incerteza atinge zero, reduzir ε não melhora a precisão da medição, ou seja, nessa região, o sistema torna-se homogêneo para todos os observáveis.

Também se nota que, de (d) $\alpha = 0,27(1)$ até (p) $\alpha = 0,03(2)$, os gráficos não se ajustam perfeitamente a uma lei de potência. Isso deve-se à significativa amplitude da perturbação: nesse regime valores menores de ε conseguem captar a homogeneidade do sistema gerada pela perturbação, o que não ocorre com valores maiores de ε para a mesma amplitude. Assim, à medida que o ruído no sistema aumenta, o valor de ε capaz de detectar a semelhança entre os observáveis também aumenta. No caso de (p) $\alpha = 0,03(2)$, com exceção de $\varepsilon = 10^{-1}$ (o último ponto), todos os valores de ε adotados indicaram a homogeneidade do sistema.

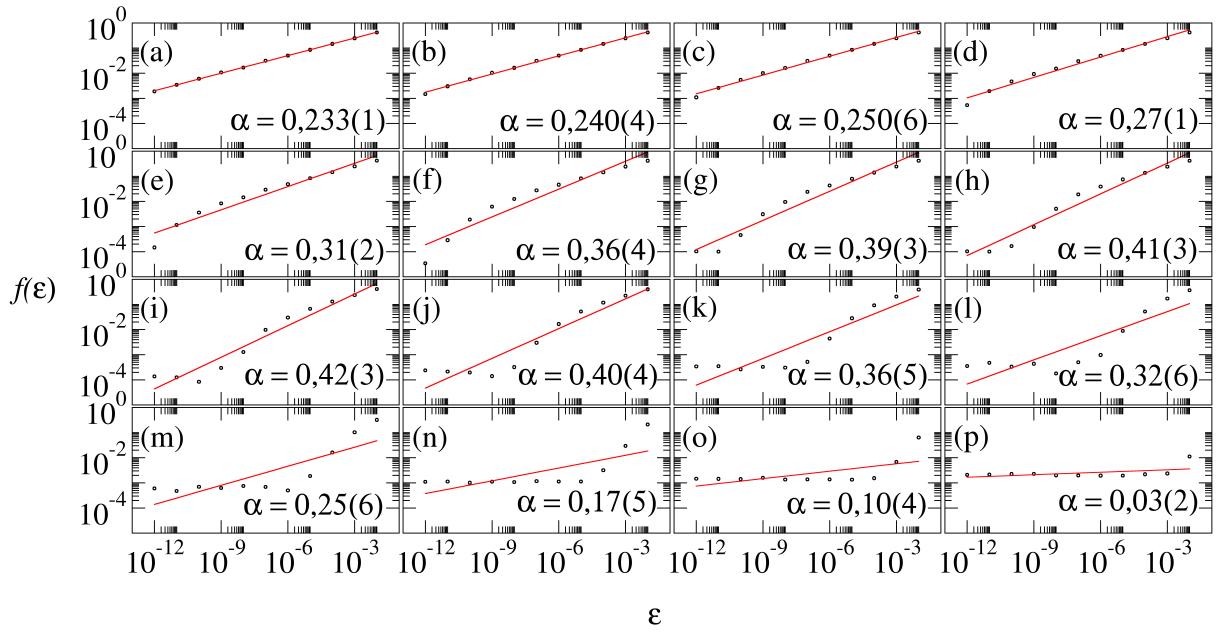


Figura 5.2: Expoente de incerteza α na cascata de periodicidade ao longo da curva extrema e_1^{21} do mapa do Círculo para diversos valores de ΔI (a) $\Delta I = 0$ até (p) $\Delta I = 10^{-1}$, com o eixo x caracterizando ε e o eixo y expressando $f(\varepsilon)$ em escala logarítmica, com a reta vermelha expondo a regressão de lei de potência. As iterações e o transiente para cada figura foi de 10^5 .

Com os resultados apresentados na Fig. 5.2, é possível formular algumas conjecturas sobre o comportamento do sistema diante das perturbações introduzidas. À medida que a perturbação no mapeamento se intensifica, os primeiros pontos a detectar essa alteração são aqueles com os menores valores de ε . Quando ε passa a captar as perturbações no mapeamento, observa-se a formação de um comportamento de inclinação nula, resultando em um “platô”. Este platô se inicia nos menores valores de ε e vai se estendendo progressivamente até que todos os pontos formem um único patamar, como mostra as Figs. 5.2 (g) a (p).

Três tipos de comportamento distintos foram identificados nos gráficos. O primeiro corresponde a valores de α entre 0,23, inclinação da reta quando o mapeamento não é perturbado, chegando a valores próximos de 0,27 quando o mapa é levemente perturbado, Figs. 5.2 (a) a (d). O segundo comportamento surge em condições de perturbação elevada, onde α tende a zero conforme descrito no parágrafo anterior. Entre esses dois extremos, há um terceiro padrão, no qual se observa α entre os valores de 0,69 a 0,76. Esse comportamento apresenta-se mais pronunciadamente nas Figs. 5.2 (f) a (m). Observamos que

a transição do plano para o regime intermediário ocorre entre $\epsilon = \Delta I \times 10^{-1}$, $\Delta I \times 10^1$. Assim, ao conhecer a intensidade da perturbação, é possível antecipar o esboço do gráfico resultante.

Aparentando certa regularidade, este comportamento sugere uma universalidade que pode ser representada por uma curva geral, que veremos na próxima Seção 5.3.2. No entanto, para melhor compreender essa representação, observamos ainda a Fig. 5.2 (j). Por exemplo, para uma perturbação de $\Delta I = 10^{-7}$, o platô está no intervalo $(10^{-13}, 10^{-9})$, o regime intermediário encontra-se em $(10^{-8}, 10^{-6})$, e o comportamento de inclinação intermediária correspondem ao intervalo $(10^{-5}, 10^{-2})$, aproximadamente.

Observa-se que, à medida que a perturbação no mapeamento cresce, da Fig. 5.2 (a) para Fig. 5.2 (j), o expoente de incerteza aumenta de 0,233(1) para 0,42(3). Se a perturbação aumenta, de 10^{-8} [Fig. 5.2 (j)] para 10^{-1} [Fig. 5.2 (p)], os valores de α diminuem gradativamente até se aproximarem de zero. Essa variação do expoente de incerteza deve-se à proporção de pontos presentes em cada um dos três estados: o platô (α_1), o regime intermediário (α_2), e os pontos que ainda não detectam a perturbação (α_3).

Por exemplo, para $\Delta I = 10^{-7}$, observamos quatro pontos em α_1 , três pontos em α_2 e quatro pontos em α_3 . Para perturbações inferiores a $\Delta I = 10^{-8}$, o expoente de incerteza diminui gradualmente até o valor mínimo de 0,23, uma vez que o número de pontos em α_3 aumenta até que α_1 e α_2 desapareçam, estabilizando-se próximo de 0,23. Por outro lado, para perturbações superiores a $\Delta I = 10^{-8}$, o expoente de incerteza tende a diminuir até se aproximar de zero, pois os pontos em α_1 aumentam enquanto α_2 e α_3 diminuem proporcionalmente.

Ao reunir os resultados de α apresentados na Fig. 5.2 em um único gráfico, com α em função de ΔI (onde ΔI está em escala logarítmica), obtemos a Fig. 5.3.

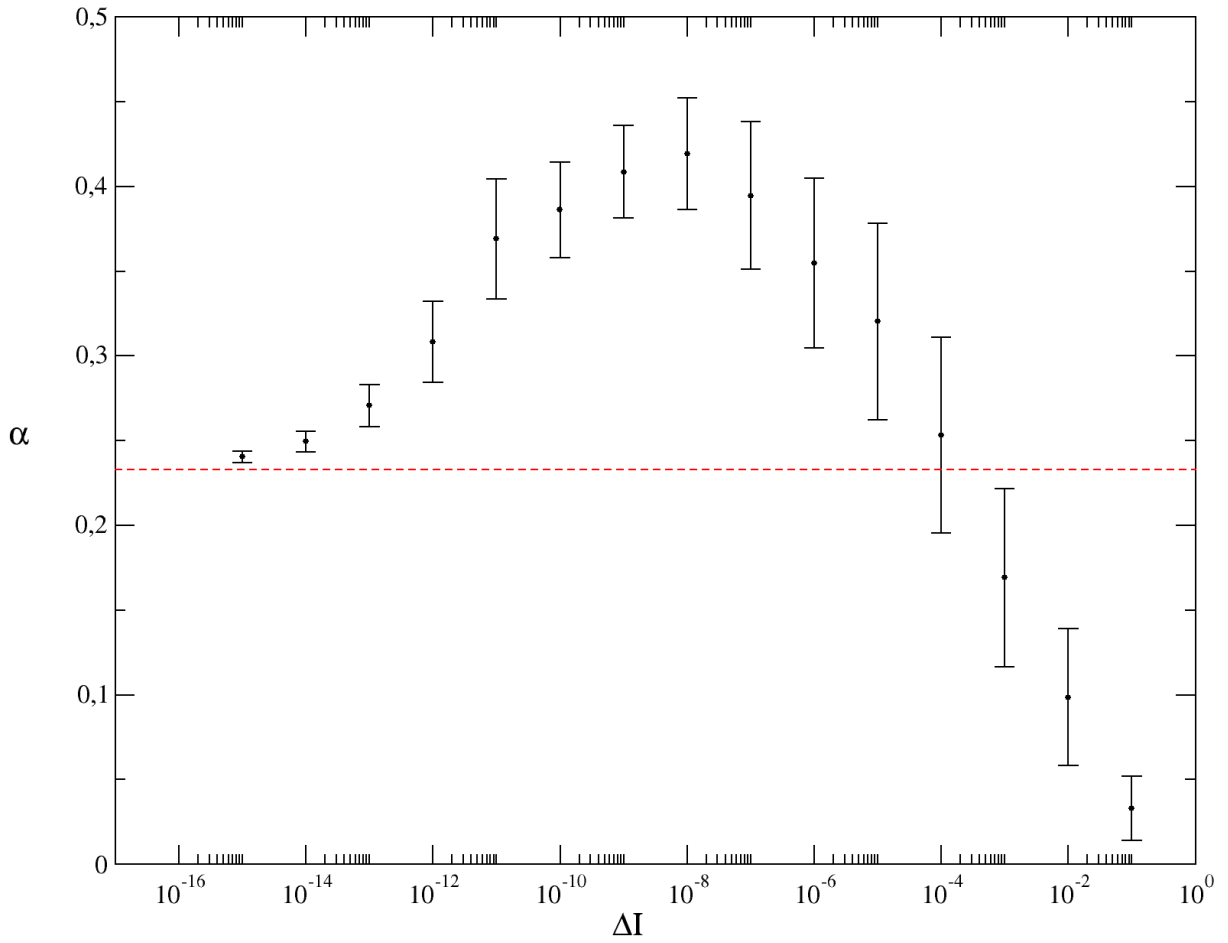


Figura 5.3: Com α *vs.* $\log(\Delta I)$, agrupamos os resultados obtidos do α da Fig. 5.2. A linha tracejada indica o valor de α sem perturbação do mapeamento.

A Fig. 5.3, apresenta os coeficientes de incerteza obtidos para cada perturbação do mapeamento, com a barra representando o erro do ajuste em lei de potência e a reta tracejada (vermelha) o valor do expoente de incerteza $\alpha = 0,233(1)$, para o mapa sem perturbação. Na figura, podemos identificar que as maiores barras de erros estão presente nas perturbações de $\Delta I = 10^{-8}$ até 10^{-2} , que são onde os valores de $f(\varepsilon)$ aparecem com maior frequência em α_1 , região em que se forma o platô. Também é notável que o ponto de inflexão é dado para a perturbação $\Delta I = 10^{-12}$, onde começamos a perceber a inclinação α_2 .

No comportamento dado por α a medida que se altera a perturbação do mapeamento, o pico se dá em $\Delta I = 10^{-8}$, que também revela outra mudança de comportameto da curva. Essa mudança se deve ao aparecimento do platô Fig. 5.2 (i) a partir do aumento da perturbação em $\Delta I = 10^{-9}$. Em suma, a transição das perturbações do mapeamento

de $\alpha = 0,233(1)$ [Fig. 5.2 (a)] até $\alpha = 0,003(2)$ [Fig. 5.2 (p)], ocorre de forma gradativa, apresentando 3 comportamentos típicos. Para os ruídos menores que $\Delta I = 10^{-12}$, para os ruídos, no intervalo intermediário, que ocorre de $\Delta I = 10^{-12}$ até $\Delta I = 10^{-8}$ e nos ruídos maiores que $\Delta I = 10^{-8}$.

Dado que esse gráfico também apresentou uma certa regularidade, nossas conjecturas sobre a universalidade de uma curva gerada pelos ruídos aplicados ao mapeamento foram ainda mais reforçadas. Com esse objetivo, buscamos uma curva que melhor se ajustasse aos pontos apresentados na Fig. 5.3. Para isso, substituímos o eixo das abcissas, originalmente representado pelo ruído ΔI , pelo expoente desse ruído, denominado “i”. Assim, por exemplo, para um ruído de $\Delta I = 10^{-6}$, o valor correspondente passou a ser $i = -6$.

Desta forma, obtivemos uma curva que aproxima esse comportamento por meio de uma função quártica (representada em vermelho), dada por

$$f(i) = 7,9763 \times 10^{-5}i^4 + 0,0023603i^3 + 0,016445i^2 - 0,032115i - 0,013549, \quad (5.1)$$

e representada na Fig. 5.4.

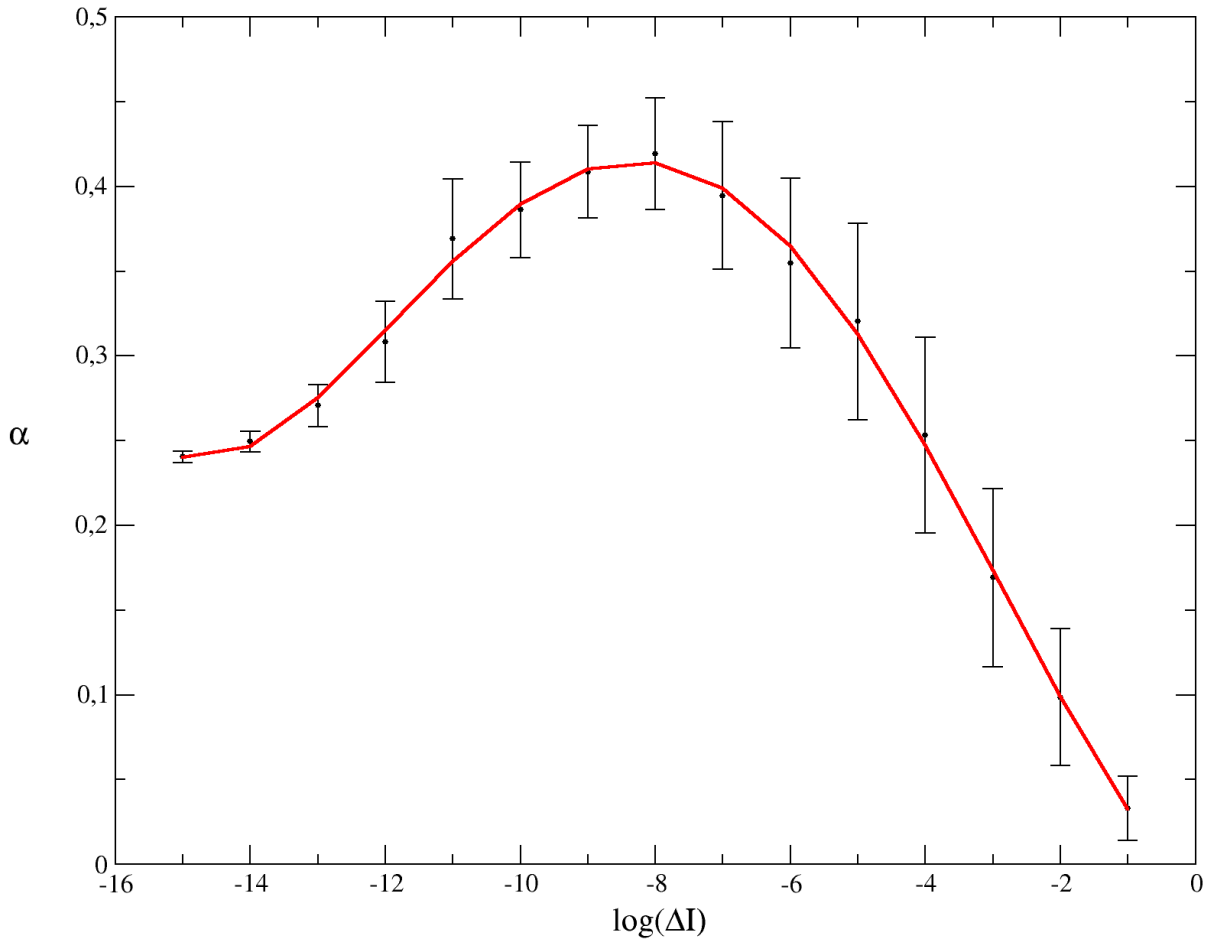


Figura 5.4: Ajuste da curva quártica aos pontos obtidos da Fig. 5.2. Eixo ΔI foi substituído por $\log(\Delta I)$ e indicado pela potência de ΔI .

5.3 Invariância de Escala Sob Perturbações: Análise nas Curvas Extremas

Outra forma de verificarmos o efeito provocado pelo ruído no mapeamento ao longo das curvas extremas é sobrepor os resultados, como fizemos na Fig. 5.5.

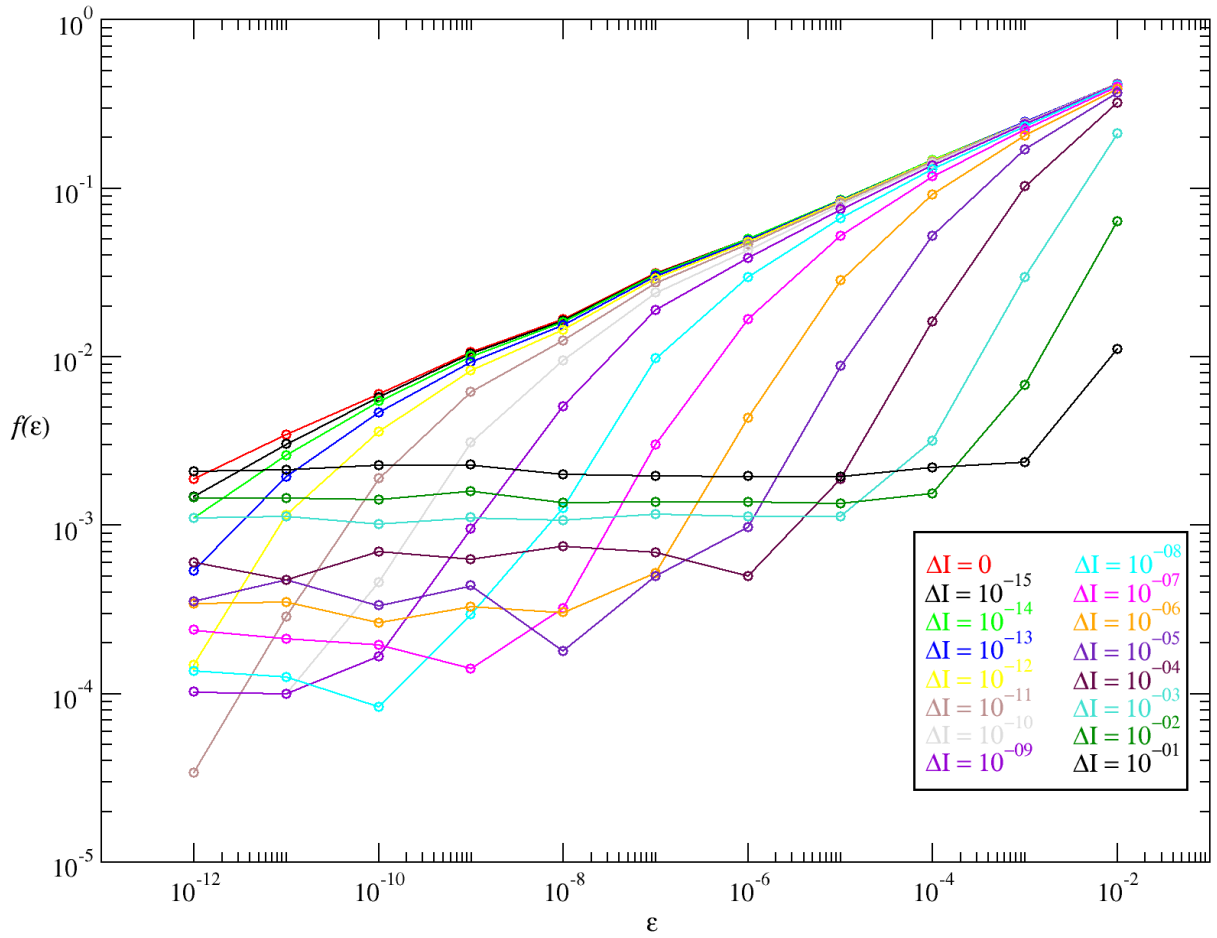


Figura 5.5: Sobreposição dos gráficos apresentados na Fig. 5.2. O ruído varia desde $\Delta I = 0$ (curva em vermelho), indicando ausência de ruído, até o ruído máximo de $\Delta I = 10^{-1}$ (curva em preto).

Na busca por uma universalidade, aplicamos a teoria de invariância de escala a sistemas dinâmicos não lineares. Com base na Fig. 5.2, podemos levantar hipóteses de escala para a convergência do coeficiente de incerteza para o mapa com ruído.

A seguir, apresentamos em detalhes essa análise, fundamentada em [76].

5.3.1 Invariância de Escala e a busca por uma Curva Universal

Com base na análise apresentada na Fig. 5.5, formulamos as seguintes hipóteses de escala para descrever a dependência da propriedade de incertos $f(\epsilon)$ pela escala ϵ e amplitude do ruído Δ .

1. Para valores suficientemente pequenos de ϵ , o comportamento de $f(\epsilon)$ em função de

ε pode ser expresso por:

$$f(\varepsilon) \propto \Delta I^{a_1} \quad (5.2)$$

Essa relação é válida para $\varepsilon \ll \varepsilon_x$, onde ΔI representa a perturbação aplicada ao mapeamento, a_1 é um expoente crítico, e ε_x define o valor característico de ε onde ocorre a mudança na inclinação do regime crescente.

2. Para valores suficientemente grandes de ε , temos:

$$f(\varepsilon) \propto \varepsilon^{a_2} \quad (5.3)$$

Essa equação se aplica para $\varepsilon \gg \varepsilon_x$, sendo a_2 o expoente crítico que caracteriza a inclinação no caso de ausência de ruído, que já vimos, na Fig. 5.2 (a), ser $a_2 = 0,233(1)$.

3. O valor característico ε_x , que define a transição no regime de crescimento, é dado por:

$$\varepsilon_x \propto \Delta I^{a_3} \quad (5.4)$$

Aqui, a_3 é o expoente crítico que determina a dependência de ε_x em relação à perturbação ΔI .

Essas três hipóteses de escala podem ser combinadas em uma função homogênea generalizada:

$$f(\Delta I, \varepsilon) = l f(l^a \Delta I, l^b \varepsilon), \quad (5.5)$$

onde l é um fator de escala e a e b são expoentes característicos.

Escolhendo l de modo que $l^a \Delta I = 1$, temos:

$$l = \Delta I^{-1/a}. \quad (5.6)$$

Substituindo a Eq. 5.6 na Eq. 5.5, resulta em:

$$f(\Delta I, \varepsilon) = \Delta I^{-1/a} f(1, \Delta I^{-b/a} \varepsilon). \quad (5.7)$$

Assumindo que a função $f(1, \Delta I^{-b/a} \varepsilon)$ é constante para $\varepsilon \ll \varepsilon_x$, comparando com a

Eq.(5.2), obtemos $a_1 = -1/a$. De maneira análoga, escolhendo l de forma que $l^b \varepsilon = 1$, temos

$$l = \varepsilon^{-1/b}, \quad (5.8)$$

o que leva a:

$$f(\Delta I, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/b} f(\varepsilon^{-a/b} \Delta I, 1), \quad (5.9)$$

em que assumimos que $f(\varepsilon^{-a/b} \Delta I, 1)$ é constante para $\varepsilon \gg \varepsilon_x$. Comparando com a Eq.(5.3), obtém-se $a_2 = -1/b$. Comparando as duas expressões para l , Eqs. 5.6 e 5.6, obtemos:

$$\varepsilon_x = \Delta I^{a_1/a_2}. \quad (5.10)$$

Desta forma, os expoentes críticos estão relacionados por:

$$a_3 = \frac{a_1}{a_2}. \quad (5.11)$$

Na Fig. 5.2 observamos que $\varepsilon_x = 10^2 \Delta I$. Para determinar a_3 , podemos ajustar uma lei de potência aos valores de ε_x em função de ΔI . A Fig. 5.6 ilustra esse ajuste, resultando em $a_3 = 1$.

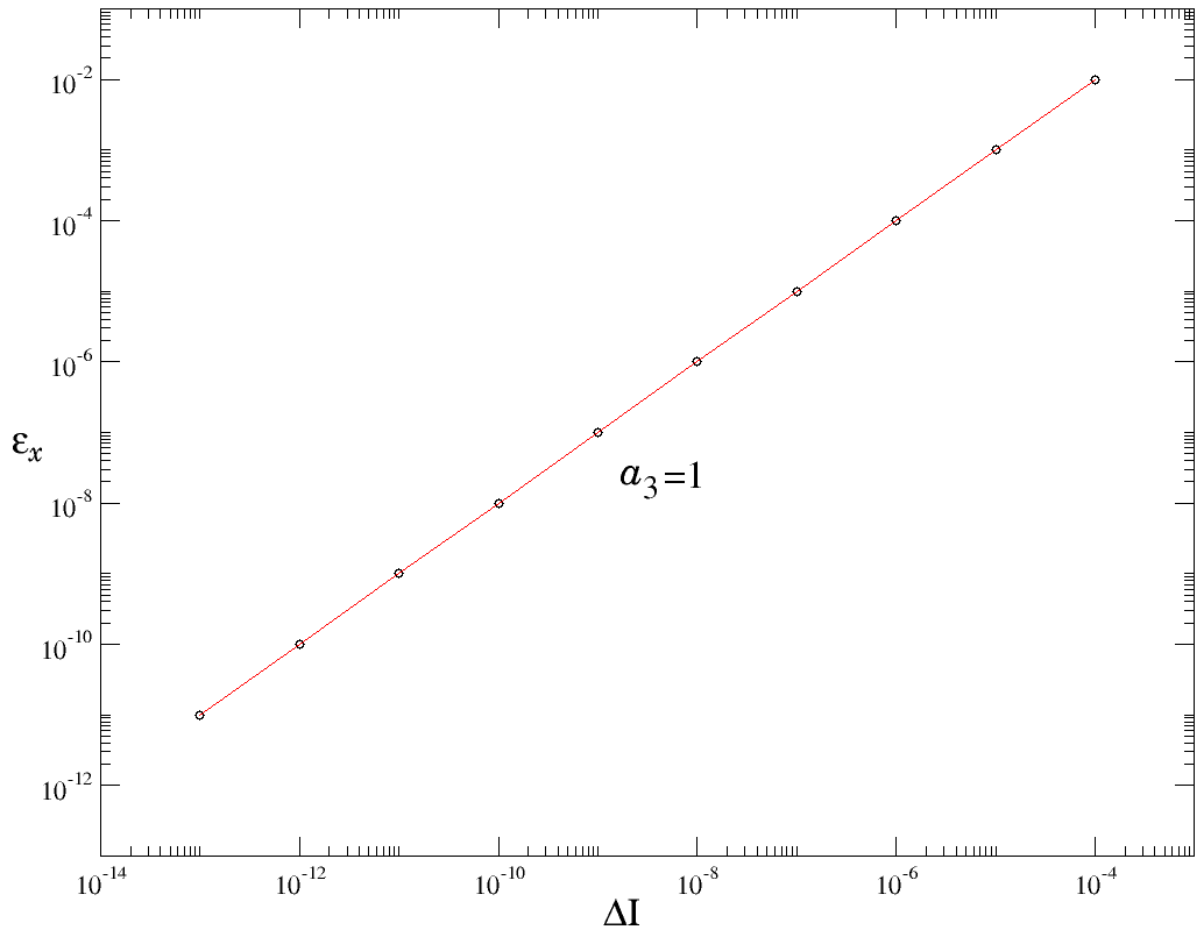


Figura 5.6: Esboço do comportamento de ϵ_x vs. ΔI . Um ajuste em lei de potência fornece $a_3 = 1$.

Substituindo a_2 e a_3 na Eq.(5.11) podemos obter o expoente crítico $a_1 = 0,233(1)$. Conhecidos os três expoentes críticos, podemos fazer duas mudanças nos eixos da Fig. 5.5. A primeira mudança é a transformação $f(\epsilon) \rightarrow f(\epsilon)/\Delta I^{a_1}$, e a segunda, $\epsilon \rightarrow \epsilon/\Delta I^{a_3}$.

As curvas apresentadas na Fig. 5.7 sobrepõem-se em uma única curva, evidenciando um comportamento universal. No entanto, observam-se pequenas diferenças nos platôs, especialmente em valores próximos a 10^{-2} . Essas discrepâncias são mais evidentes devido à escala logarítmica utilizada no gráfico. Como o logaritmo é uma função não linear, pequenas variações nos valores originais são amplificadas em escala logarítmica, resultando em uma aparente falta de sobreposição nos platôs.

Essa amplificação ocorre porque, na escala decimal, diferenças entre os platôs estão dentro de um intervalo de erro muito pequeno, geralmente aceitável. Porém, quando transformados para a escala logarítmica, essas mesmas diferenças tornam-se perceptíveis,

fazendo com que os platôs que deveriam estar alinhados pareçam deslocados.

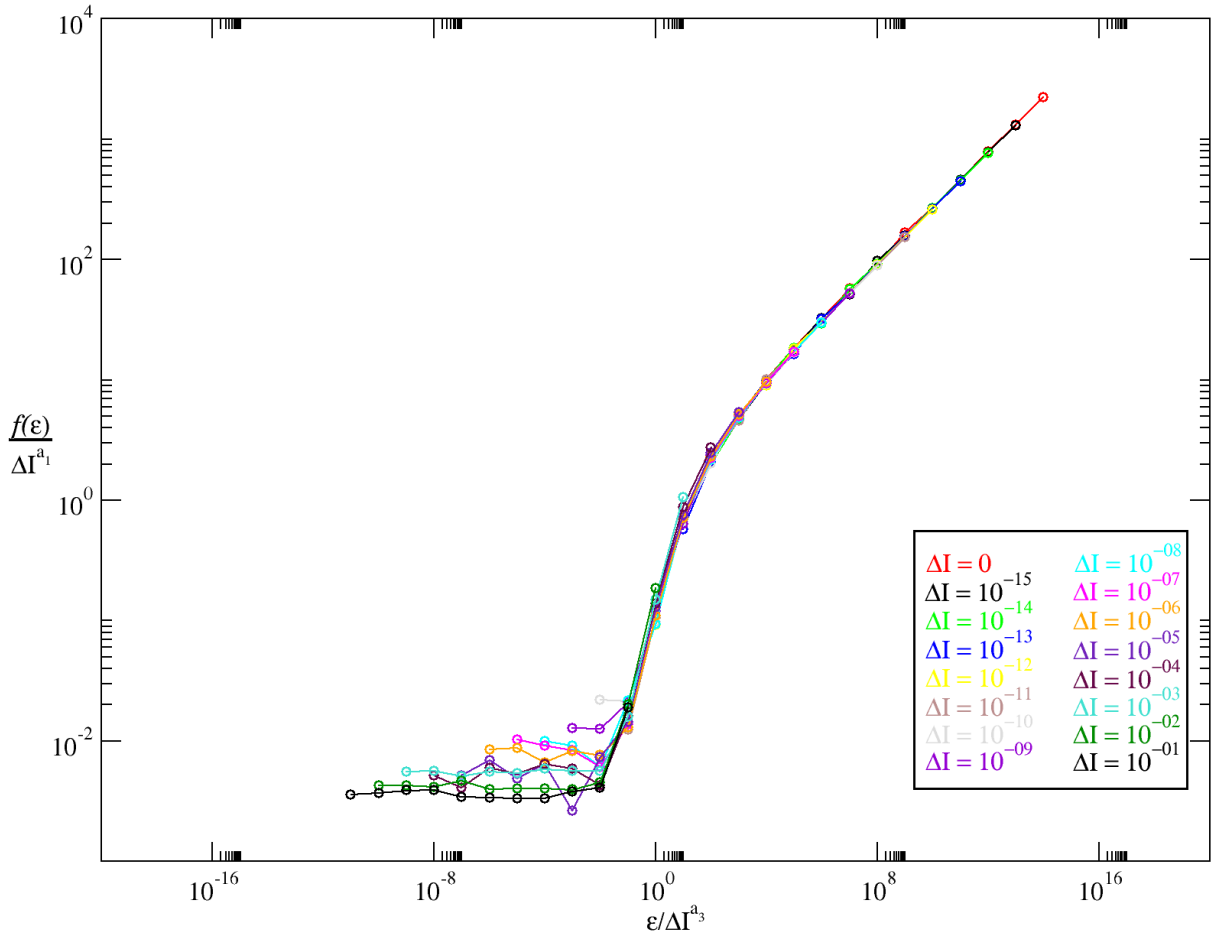


Figura 5.7: Sobreposição das curvas mostradas na Fig. 5.5 em uma única curva universal, após as transformações $f(\epsilon) \rightarrow f(\epsilon)/\Delta I^{a_1}$ e $\epsilon \rightarrow \epsilon/\Delta I^{a_3}$.

Para ilustrar essa questão e corrigir visualmente os deslocamentos, aplicamos uma translação vertical de 0,1 a todos os gráficos. O resultado pode ser observado na Fig. 5.8, onde as curvas agora exibem uma sobreposição uniforme, mesmo em escala logarítmica.

Em suma, a validade das hipóteses de escala permanece intacta, pois o comportamento funcional das variáveis não é alterado pela translação. Ela é apenas uma ferramenta visual para lidar com limitações práticas de representação em escala logarítmica.

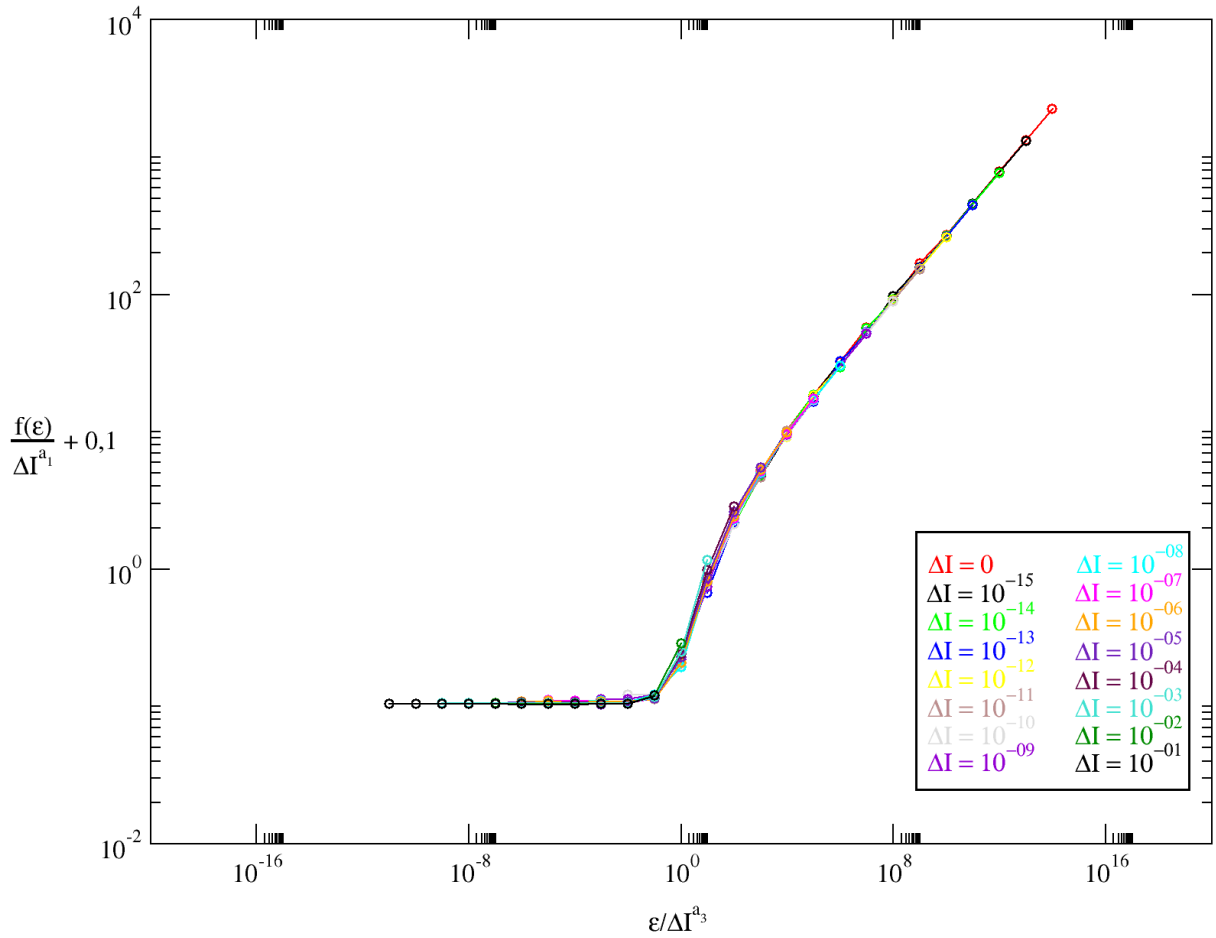


Figura 5.8: Sobreposição das curvas mostradas na Fig. 5.7 em uma única curva universal, após as transformações $f(\varepsilon) \rightarrow f(\varepsilon)/\Delta I^{a_1} + 0,1$ e $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/\Delta I^{a_3}$.

5.3.2 Cálculo da universalidade da curva

Após identificarmos a universalidade das curvas, apresentamos o expoente de incerteza α de forma analítica, considerando as diversas perturbações do sistema. Nosso objetivo principal é descrever precisamente a Fig. 5.4. Para isso, construímos a Fig. 5.9, onde $f(x)$ representa o valor médio dos dados obtidos numericamente.

Para cada amplitude de ruído ΔI , definimos $\varphi(x)$ como uma aproximação linear de $f(x)$. Essa regressão é ajustada aos pontos experimentais utilizando o método de mínimos quadrados, e seu coeficiente angular a é obtido por meio da integral definida no intervalo $[x_i, x_f]$, que representa uma aproximação de α para cada perturbação. Como buscamos expressar o expoente de incerteza α , analisamos a relação entre a e ΔI , determinando como a inclinação da regressão evolui com o nível de ruído.

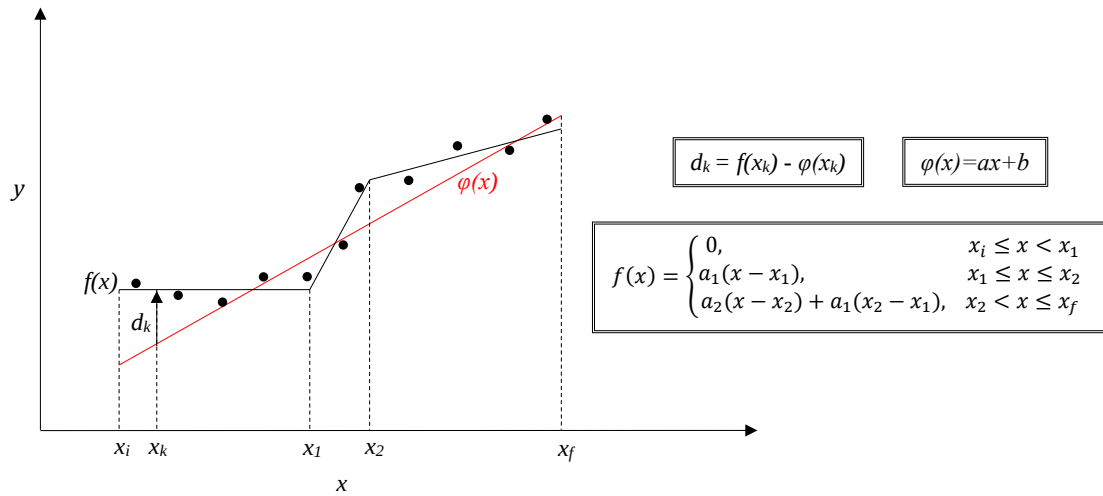


Figura 5.9: Representação gráfica da curva padrão $f(x)$ e da regressão linear $\varphi(x)$. Os pontos pretos representam os dados medidos numericamente em torno de $f(x)$.

Pelo método dos mínimos quadrados queremos minimizar a distância quadrática entre todos os pontos das curvas d_k^2 . Assim,

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{k=1}^m [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^m -2[f(x_k) - (ax_k + b)]x_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^m ax_k^2 + \sum_{k=1}^m bx_k = \sum_{k=1}^m x_k f(x_k)$$

Considerando $m \rightarrow \infty$ no intervalo $[x_i, x_f]$:

$$a \int_{x_i}^{x_f} x^2 dx + b \int_{x_i}^{x_f} x dx = \int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx$$

$$a \frac{(x_f^3 - x_i^3)}{3} + b \frac{(x_f^2 - x_i^2)}{2} = \int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx \quad (5.12)$$

Procedendo de forma similar, ao realizarmos a derivada parcial em relação a b , obtemos:

$$a \frac{(x_f^2 - x_i^2)}{2} + b(x_f - x_i) = \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx \quad (5.13)$$

Para resolver o sistema composto pelas duas últimas equações, multiplicamos a Eq.(5.12) por $(x_f - x_i)$ Eq. (5.13) por $(x_f^2 - x_i^2)/2$ e as subtraímos:

$$a \frac{(x_f^3 - x_i^3)}{3} (x_f - x_i) - a \frac{(x_f^2 - x_i^2)^2}{4} = (x_f - x_i) \int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx - \frac{(x_f^2 - x_i^2)}{2} \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx \quad (5.14)$$

Usamos as identidades de soma e diferença de cubos e quadrados para simplificar a expressão do primeiro membro:

$$\begin{aligned} & a \frac{(x_f - x_i)^2 (x_f^2 + x_f x_i + x_i^2)}{3} - a \frac{(x_f - x_i)^2 (x_f + x_i)^2}{4} \\ &= a (x_f - x_i)^2 \left[\frac{x_f^2 + x_f x_i + x_i^2}{3} - \frac{(x_f + x_i)^2}{4} \right] \end{aligned}$$

Expandindo os termos dentro dos parênteses e substituindo de volta na equação (5.14):

$$a \frac{(x_f - x_i)^4}{12} = (x_f - x_i) \int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx - \frac{(x_f^2 - x_i^2)}{2} \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx$$

$$a \frac{(x_f - x_i)^4}{12} = (x_f - x_i) \left[\int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx - \frac{x_f + x_i}{2} \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx \right]$$

$$a \frac{(x_f - x_i)^3}{12} = \int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx - \int_{x_i}^{x_f} \frac{x_f + x_i}{2} f(x) dx$$

Finalmente, isolamos a :

$$a = \frac{6}{(x_f - x_i)^3} \int_{x_i}^{x_f} (2x - x_f - x_i) f(x) dx \quad (5.15)$$

Como $f(x)$ é uma função linear por partes definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i \leq x < x_1 \\ a_1(x - x_1), & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2, \\ a_2(x - x_2) + a_1(x_2 - x_1), & \text{se } x_2 < x \leq x_f \end{cases}$$

para determinar o valor de a , precisamos integrar cada um dos três intervalos da função $f(x)$. Como $f(x) = Ax + B$, reescrevemos $f(x)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} A = 0, & \text{se } x_i \leq x < x_1, \\ A = a_1, \quad B = -a_1x_1, & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2, \\ A = a_2, \quad B = a_1(x_2 - x_1) - a_2x_2, & \text{se } x_2 < x \leq x_f. \end{cases}$$

Nosso próximo passo é calcular a integral definida:

$$\int_{x_i}^{x_f} (2x - x_f - x_i) f(x) dx.$$

Se definirmos $c = -x_f - x_i$, podemos reescrevê-la como:

$$\int_{x_i}^{x_f} (2x + c)(Ax + B) dx = \left[\frac{2}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}(2B + Ac)x^2 + Bcx \right]_{x_i}^{x_f}.$$

Como $f(x)$ é definida por partes, podemos dividir a integral nas três regiões, que nomeamos por I_1, I_2 e I_3 :

$$\int_{x_i}^{x_f} (2x - x_f - x_i) f(x) dx = I_1 + I_2 + I_3. \quad (5.16)$$

Os intervalos são calculados separadamente:

1. I_1 ($x_i \leq x < x_1$):

Como $f(x) = 0$ em $x_i \leq x < x_1$, segue que

$$I_1 = 0.$$

2. I_2 ($x_1 \leq x \leq x_2$):

Na região $x_1 \leq x \leq x_2$, temos $f(x) = a_1(x - x_1)$.

A integral resulta em:

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} (2x + c) a_1(x - x_1) dx.$$

$$I_2 = \frac{a_1}{6} \left[4(x_2^3 - x_1^3) - 3(2x_1 + x_f + x_i)(x_2^2 - x_1^2) + 6(x_f + x_i)x_1(x_2 - x_1) \right].$$

3. I_3 ($x_2 < x \leq x_f$):

Para $x_2 < x \leq x_f$, temos $f(x) = a_2(x - x_2) + a_1(x_2 - x_1)$.

A integral fornece:

$$I_3 = \int_{x_2}^{x_f} (2x + c) [a_2(x - x_2) + a_1(x_2 - x_1)] dx.$$

$$I_3 = \frac{2}{3} a_2(x_f^3 - x_2^3) + \frac{1}{2} [2a_1(x_2 - x_1) - 2a_2x_2 - a_2(x_f + x_i)] (x_f^2 - x_2^2) - [a_1(x_2 - x_1) - a_2x_2] (x_f + x_i)(x_f - x_2).$$

Analisando a Fig. 5.2 para cada perturbação ΔI , é possível determinar as três inclinações do modelo, que estão distribuídas nos seguintes intervalos:

$$(x_f, x_1] = [10^{-12}, 10^{-1} \Delta I],$$

$$[x_1, x_2] = [10^{-1} \Delta I, 10^2 \Delta I],$$

$$(x_2, x_f] = (10^1 \Delta I, 10^{-2}].$$

A representação desses intervalos está ilustrada em Fig. 5.10, que indicam os valores da perturbação ΔI (vermelho) do mapeamento, intervalo $[x_1, x_2]$ com inclinação a_1 (verde) e intervalo $(x_2, x_f]$ com inclinação a_2 (azul).

Por exemplo, para uma perturbação $\Delta I = 10^{-7}$, os intervalos: $(x_f, x_1] = (10^{-12}, 10^{-8}]$, $[x_1, x_2] = [10^{-8}, 10^{-5}]$ e $(x_2, x_f] = (10^{-5}, 10^{-2}]$. Então, para uma perturbação $\Delta I = 10^{-7}$, $x_i = 10^{-12}$, $x_1 = 10^{-8}$, $x_2 = 10^{-5}$ e $x_f = 10^{-2}$.

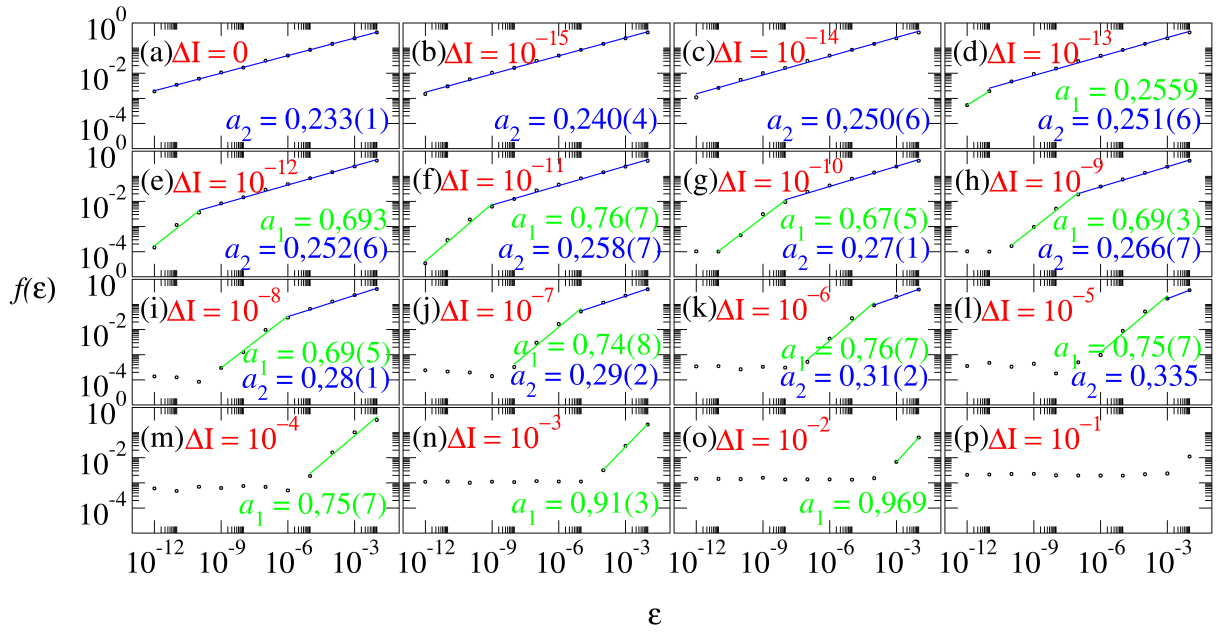


Figura 5.10: Representação dos intervalos I_2 (verde) e I_3 (azul) com as suas inclinações correspondentes, incluindo a perturbação do mapeamento (vermelho).

Agora, a partir da Fig. 5.10, podemos determinar a média de a_1 e a_2 associados às diferentes perturbações. Calculamos a_1 como média aritmética e por regressão linear a_2 , conforme ilustrado na Fig. 5.11.

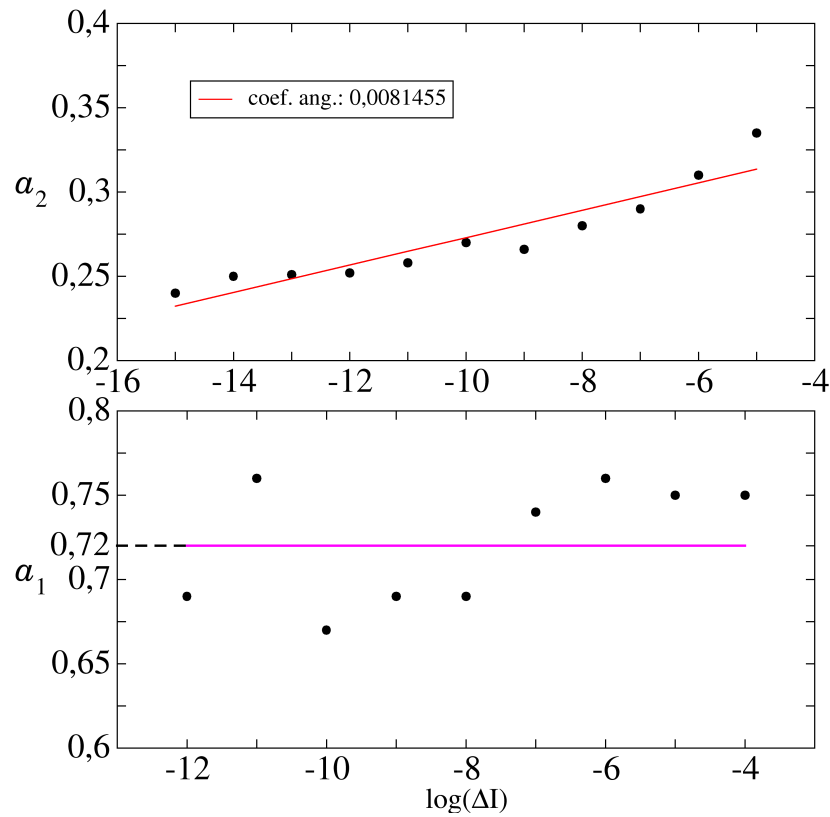


Figura 5.11: Valores dos coeficientes a_1 (média aritmética) e a_2 (regressão linear), determinados a partir da análise gráfica apresentada na Fig. 5.10.

Com os valores fixados $a_1 = 0,72$ e $a_2 = 0,0081455$, além de cada x_i devidamente determinado, aplicamos a Eq. 5.15 para calcular o coeficiente angular de $\varphi(x)$ em cada perturbação. Assim, construímos a curva azul exibida na Fig. 5.12, que é sobreposta aos pontos pretos obtidos experimentalmente. Observa-se que a curva azul proporciona uma boa aproximação aos resultados numéricos.

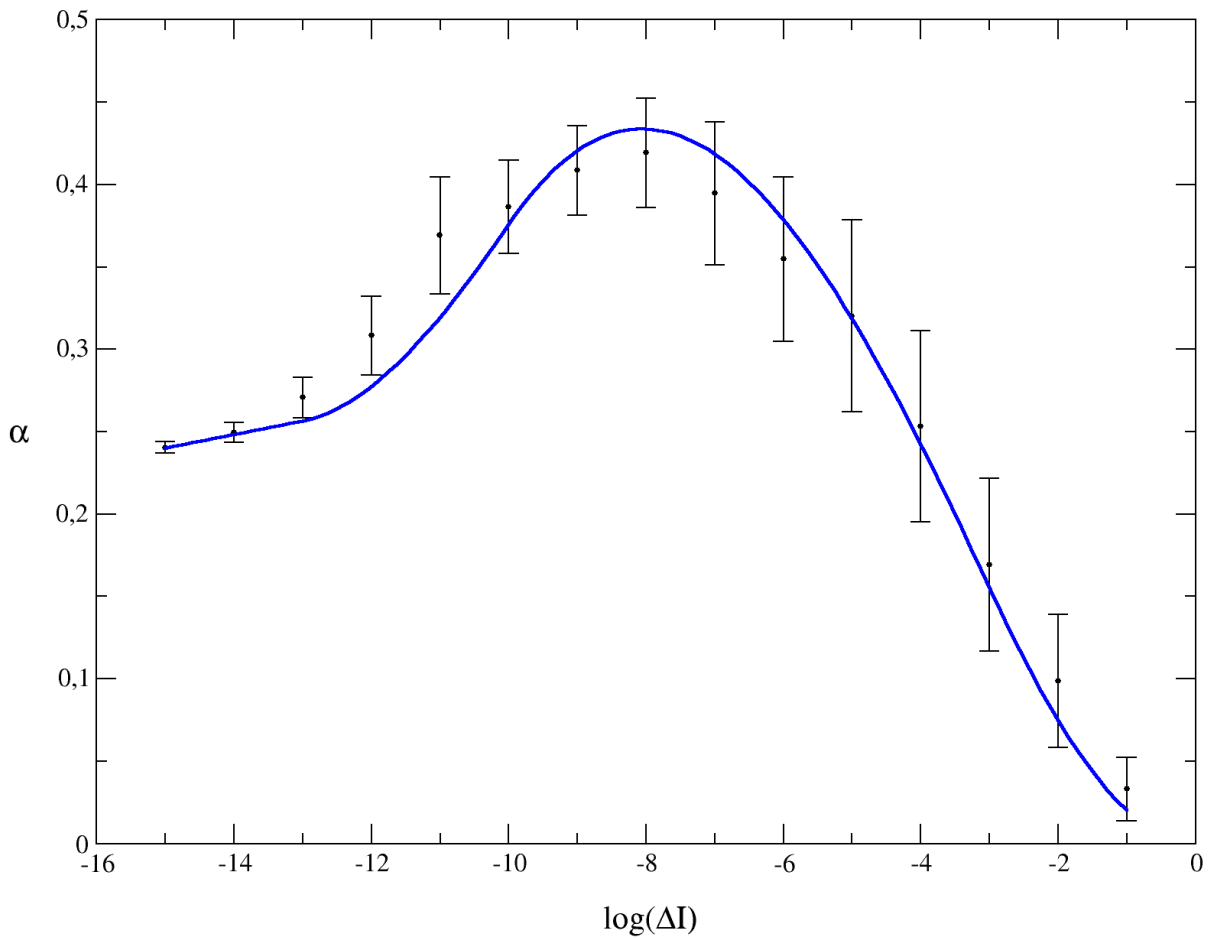


Figura 5.12: A curva azul, gerada pela Eq. 5.16, representa os resultados algébricos correspondentes a cada uma das perturbações ΔI que modelam o experimento. Essa curva é sobreposta à curva preta, que é resultado dos experimentos numéricos observados.

A comparação entre a curva teórica e os dados experimentais revela que o modelo proposto reproduz com boa precisão a relação entre o expoente de incerteza α e a amplitude da perturbação ΔI . A aproximação obtida não apenas confirma a coerência matemática da formulação analítica, mas também demonstra que a regressão linear $\varphi(x)$, construída a partir da integral definida, captura com precisão o comportamento da incerteza sob diferentes níveis de perturbação.

Além disso, observa-se que a variação de α em função de ΔI segue um padrão, indicando que a incerteza do sistema cresce de maneira previsível à medida que a perturbação aumenta. Esse resultado caracteriza a transição entre diferentes regimes de comportamento do sistema e oferece uma ferramenta para a análise da sensibilidade a perturbações em sistemas dinâmicos.

5.4 Um paralelo entre o mapa do Círculo (1D) e o mapa de Hénon (2D)

Até o momento, exploramos diversos mapeamentos unidimensionais para compreender o comportamento próximo às curvas extremas, incluindo a análise de expoentes de incerteza e a influência de ruídos brancos. Nesta seção, estendemos o estudo para sistemas bidimensionais, estabelecendo um paralelo entre o mapa do Círculo (1D) e o mapa de Hénon (2D). Essa transição permite examinar como as propriedades investigadas em sistemas unidimensionais podem ser adaptadas e ampliadas para mapeamentos bidimensionais, criando perspectivas para futuras análises de sistemas de maior complexidade.

Mapeamentos bidimensionais descrevem a evolução de sistemas dinâmicos em um espaço de duas dimensões, onde as variáveis dependentes (como posição e velocidade) são representadas como pares ordenados. Esses mapeamentos capturam interações mais complexas do que os unidimensionais, pois cada estado futuro depende de duas variáveis anteriores, em vez de uma.

A transição de sistemas unidimensionais para bidimensionais geralmente envolve a introdução de uma variável adicional que interage com a dinâmica original. Por exemplo, no caso do mapa do Círculo, que descreve a evolução de uma variável angular, um sistema bidimensional pode ser construído incorporando uma segunda variável que introduz dependência entre estados consecutivos, como uma força dissipativa ou uma perturbação externa. Essa abordagem amplia a capacidade do mapeamento para modelar sistemas mais complexos, como oscilações não lineares, caos e outros comportamentos dinâmicos encontrados em sistemas reais.

O mapa de Hénon, introduzido por Michel Hénon em 1976, é um dos mapeamentos bidimensionais mais estudados em sistemas dinâmicos não lineares. Originalmente proposto para modelar a dinâmica de estrelas em galáxias [80], o mapa ganhou destaque por sua simplicidade matemática e por apresentar um comportamento dinâmico rico. Esse mapeamento é amplamente utilizado em estudos de caos devido à sua capacidade de exibir atratores estranhos, estruturas geométricas que descrevem o comportamento de sistemas

complexos em espaços de fase. Ele serve como um protótipo para investigar propriedades de sistemas bidimensionais, como a sensibilidade às condições iniciais, bifurcações e os efeitos de perturbações, incluindo ruídos brancos.

Matematicamente, o mapa é definido pelas equações:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n,$$

onde a e b são parâmetros que controlam a não linearidade e a dissipação do sistema. Para nossos propósitos, substituiremos a por a_2 e b por a_1 .

Ao analisar o espaço de parâmetros do mapa do Círculo (1D) e do mapa de Hénon (2D), buscamos investigar como os expoentes de incerteza dado um determinado ruído, se manifestam em sistemas com diferentes dimensões. Essa análise visa identificar elementos que possam ser utilizados para estender os resultados da seção anterior a sistemas bidimensionais. Tal abordagem é essencial para lançar bases teóricas e práticas para o estudo de comportamentos dinâmicos em espaços de maior dimensionalidade.

Nessa direção, realizamos cálculos do expoente de incerteza ao longo de uma reta definida no espaço de parâmetros de ambos os mapeamentos, conforme destacado nas Figs. 5.13a, 5.13b (representado em ciano). Esses expoentes, representados por α , foram determinados tanto para os sistemas sem ruído quanto para os que sofreram perturbações induzidas. Distintos ruídos foram adicionados aos mapeamentos, abrangendo uma faixa de $\Delta I = 10^{-15}$ a $\Delta I = 10^{-2}$, possibilitando observar o impacto progressivo dessas perturbações nos sistemas.

No caso do mapa do Círculo Eq. 1.30, utilizamos o parâmetro $k = a_1 = 5$ e consideramos o intervalo $\omega = a_2 \in [0, 1]$. Essa escolha foi feita pela simplicidade e pela simetria do espaço de parâmetros, permitindo uma análise representativa sem comprometer a generalidade dos resultados. Para o mapa de Hénon, fixamos $a_1 = 0,1$ e trabalhamos com o intervalo $a_2 \in [1,25; 1,7]$.

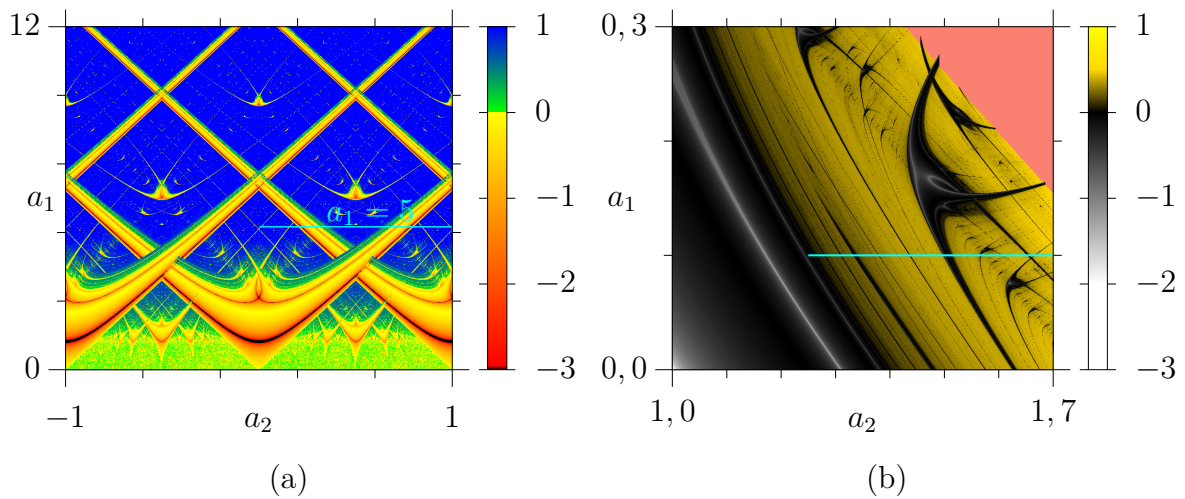


Figura 5.13: (a) e (b) Espaço de parâmetros dos mapas do Círculo e de Hénon, destacando a reta em estudo (ciano). A paleta de cores representam os valores do expoente de Lyapunov. (b) A cor salmão assinala a divergência do sistema.

O cálculo do expoente de incerteza tem a finalidade de mensurar como a inclusão de ruídos influencia o comportamento dinâmico em diferentes dimensões. O estudo oferece importantes resultados para a compreensão da transição de comportamentos regulares para regimes caóticos e para a caracterização de propriedades emergentes em sistemas não lineares sob perturbações externas.

Na Fig. 5.14, apresentamos dois gráficos sobrepostos que representam o expoente de incerteza α em função dos diferentes níveis de ruído ΔI , calculados para as retas em ciano dos dois mapeamentos. O eixo da abcissa encontra-se em escala logarítmica, enquanto o eixo da ordenada em escala decimal.

Para criar essa sobreposição gráfica, começamos pela estimativa do expoente de incerteza α ao longo das retas $a_1 = 5$ e $a_1 = 0,1$, respectivamente, nos mapas do Círculo e no mapa de Hénon.

Nessas retas, para calcular o expoente de incerteza, utilizamos valores de ε variando de 10^{-2} a 10^{-10} , com reduções sucessivas por um fator de 10^{-1} . Para classificar os pontos como certos ou incertos, utilizamos o expoente de Lyapunov λ , descartando um transiente de 10^5 e consideramos 10^6 iterações. Foram avaliados 15 000 pontos para $\varepsilon = 10^{-2}$ e 135 000 pontos para $\varepsilon = 10^{-10}$, com um incremento de 15 000 pontos a cada redução de ε . Esse cálculo foi realizado para os dois mapeamentos, considerando quatorze valores de

perturbações: $\Delta I = 10^{-15}$, $\Delta I = 10^{-14}$, $\Delta I = 10^{-13}$, ..., $\Delta I = 10^{-3}$. Além disso, também foi calculado o expoente de incerteza para o mapa sem perturbação.

Ao analisar os resultados obtidos, expostos na Fig. 5.14, observa-se que ambas as curvas apresentam formatos similares, diferindo apenas no comportamento de decaimento. Para os ruídos mais baixos, no intervalo de $\Delta I = 10^{-15}$ a $\Delta I = 10^{-11}$, os valores de α permanecem aproximadamente constantes em torno de 0,40. Essa estabilidade sugere que, nesse regime, o impacto dos ruídos sobre os sistemas é praticamente indistinguível.

A partir de $\Delta I = 10^{-10}$, identifica-se um ponto de inflexão comum para ambos os casos, marcando o início de mudanças mais pronunciadas no comportamento das curvas. Até $\Delta I = 10^{-7}$, os dois sistemas seguem características semelhantes, com uma redução gradual nos valores de α .

Contudo, observa-se uma diferença significativa na região de decaimento: a curva correspondente ao mapa de Hénon (vermelha) antecipa o declínio em relação à curva associada ao mapa do Círculo (preta). Essa discrepância indica uma maior sensibilidade do mapa de Hénon aos níveis intermediários de ruído.

Esses resultados reforçam a importância de analisar o comportamento dos sistemas dinâmicos sob diferentes níveis de ruído, evidenciando não apenas semelhanças estruturais, mas também características particulares que emergem em função da dimensão e propriedades intrínsecas de cada mapeamento.

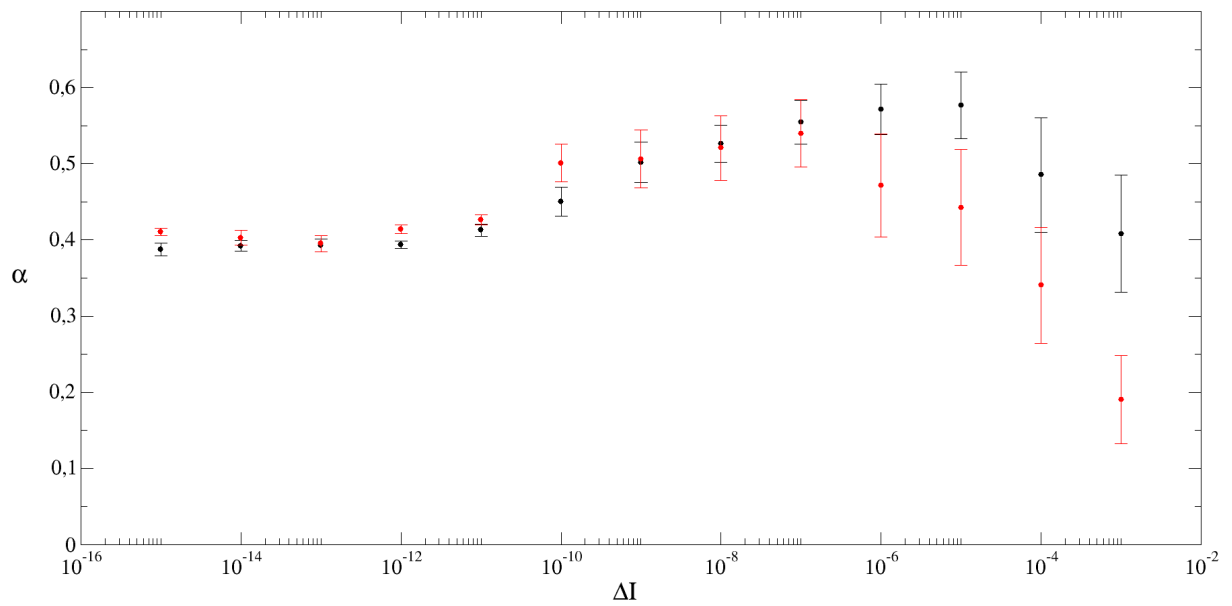


Figura 5.14: Comparação do valor de α obtidos das retas dos mapeamentos: Círculo ($a_1 = 5$) e Hénon ($a_1 = 0,1$), considerando ruídos variando de $\Delta I = 10^{-15}$ a $\Delta I = 10^{-3}$.

5.5 Conclusões parciais

Através da análise do expoente de incerteza, investigamos o impacto de perturbações randômicas, como o ruído branco, na dinâmica de sistemas não lineares, ao longo de curvas extremas. Examinamos de que forma essas perturbações influenciam a organização do espaço de parâmetros, revelando padrões de transição entre regimes periódicos e caóticos. Nossos estudos avançaram para a confirmação de uma lei de escala, sugerindo a existência de uma universalidade na qual, dado um nível de ruído, é possível determinar o coeficiente de incerteza α correspondente.

Além disso, sobre efeito de ruído e não mais sobre curvas extremas, realizamos uma comparação entre dois sistemas: o mapa do Círculo (1D) e o mapa de Hénon (2D). Essa análise nos revelou semelhanças na forma como o ruído modifica o espaço de parâmetros quando os observáveis são os estados de periodicidade e caoticidade. Os resultados obtidos indicam que, apesar das diferenças dimensionais entre os sistemas, os efeitos das perturbações exibem características universais. Isso reforça a ideia de que a presença de ruído pode desempenhar um papel essencial na organização e evolução de sistemas dinâmicos complexos, proporcionando novas perspectivas para a compreensão desses fenômenos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No espaço de parâmetros de mapas discretos não lineares, investigamos as fronteiras entre periodicidade e caos e revelamos a existência de conjuntos fractais caracterizados por uma dimensão fractal singular. Esta dimensão se destaca das dimensões fractais típicas, anteriormente consideradas universais para essas fronteiras de parâmetros. Mostramos que os conjuntos fractais singulares residem ao longo de curvas de parâmetros, chamadas curvas extremas, que intersectam cascatas de periodicidade no seu centro de estabilidade em todas as escalas do espaço de parâmetros. Os resultados aqui apresentados são geralmente demonstrados para a classe de mapas unidimensionais com pelo menos dois parâmetros de controle, sendo possíveis generalizações para outras classes de sistemas.

Através dos mapeamentos unidimensionais descritos conseguimos analisar o espaço de parâmetros, aplicar a teoria de curvas extremas e calcular o coeficiente de incerteza ao longo das curvas extremas contidas neste espaço. Essas investigações mostraram que a incerteza ocorre com maior intensidade ao longo das cascatas de periodicidade, sendo suprema nas curvas extremas onde o valor do expoente de incerteza assume valores de aproximadamente $0,232(2)$. Também reafirmamos que o cálculo do expoente de incerteza quando realizado a uma certa distância das curvas extremas tendem a um valor de $0,40(1)$. Portanto, além dos mapas apresentados, conjecturamos que esse formalismo, aplicado em outros mapeamentos e sistemas dissipativos, deve indicar que a região de maior instabilidade no espaço de parâmetros ocorra nas cascatas de conjuntos de periodicidade ao longo das

curvas extremas.

Adicionalmente, exploramos diversos aspectos fundamentais de sistemas dinâmicos não lineares, com foco na organização do espaço de parâmetros e nos efeitos de perturbações externas.

Estudamos a Escada do Diabo, uma estrutura fractal destacada por descrever a evolução do número de rotação em sistemas dinâmicos. Ao mapear essa função nas curvas extremas, identificamos padrões complexos e descontinuidades, evidenciando a intrincada interação entre periodicidade e caos.

Por fim, investigamos o impacto de ruídos uniformes nos sistemas, descrevendo exatamente como a incerteza do estado assintótico é afetada no espaço de parâmetros quando um ruído branco perturba o espaço de fases. Comparações entre o mapa do Círculo (1D) e o mapa de Hénon (2D) destacaram semelhanças estruturais e diferenças na resposta a ruídos, evidenciando a aplicabilidade de conceitos unidimensionais a sistemas bidimensionais.

Como perspectivas futuras, sugerimos estender essas análises para outros mapeamentos, tanto em uma quanto em múltiplas dimensões, investigando o papel de curvas extremas e estruturas fractais em sistemas mais complexos. Além disso, estudar como diferentes tipos de ruído, além do ruído branco, influenciam o comportamento dinâmico pode ampliar a compreensão sobre a transição entre ordem e caos em contextos ainda mais amplos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris: Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, 1899. v. 3.
- [2] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- [3] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge: Cambridge university press, 2002.
- [4] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: CRC press, 2018.
- [5] GOYAL, P.; BENNER, P. Discovery of nonlinear dynamical systems using a Runge–Kutta inspired dictionary-based sparse regression approach. *Proceedings of the Royal Society A*, The Royal Society, v. 478, n. 2262, p. 20210883, 2022.
- [6] ARNOLD, V. I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, IOP Publishing, v. 18, n. 6, p. 85–195, 1963.
- [7] GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the Hénon map. *Physical Review Letters*, APS, v. 70, n. 18, p. 2714–2717, 1993.

- [8] BARRETO, E. et al. From high dimensional chaos to stable periodic orbits: The structure of parameter space. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 24, p. 4561–4564, 1997.
- [9] MARANHÃO, D. M. et al. Experimental observation of a complex periodic window. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 3, p. 037202, 2008.
- [10] OLIVEIRA, J. A. D. et al. An investigation of the parameter space for a family of dissipative mappings. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 29, n. 5, p. 053114, 2019.
- [11] ABREU, C. E. P. et al. Extreme fractal dimension at periodicity cascades in parameter spaces. *Physical Review E*, APS, v. 110, n. 3, p. L032201, 2024.
- [12] COSTA, D. R. D. et al. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one-dimensional maps. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 380, n. 18-19, p. 1610–1614, 2016.
- [13] COSTA, D. R. D. et al. Logistic-like and Gauss coupled maps: The born of period-adding cascades. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 144, p. 110688, 2021.
- [14] PAIVA, L. S. D. et al. Dynamical properties of the composed Logistic–Gauss map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 35, n. 1, 2025.
- [15] GREBOGI, C. et al. Exterior dimension of fat fractals. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 110, n. 1, p. 1–4, 1985.
- [16] MEDEIROS, E. S.; CALDAS, I. L.; BAPTISTA, M. S. Sensitive dependence on parameters of continuous-time nonlinear dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 99, p. 16–19, 2017.
- [17] FARMER, J. D. Sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics. *Physical Review Letters*, APS, v. 55, n. 4, p. 351–354, 1985.

- [18] HUNT, B. R.; OTT, E. Structure in the parameter dependence of order and chaos for the quadratic map. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 30, n. 20, p. 7067, 1997.
- [19] JOGLEKAR, M.; OTT, E.; YORKE, J. A. Scaling of chaos versus periodicity: how certain is it that an attractor is chaotic? *Physical Review Letters*, APS, v. 113, n. 8, p. 084101, 2014.
- [20] BARONI, R. S. et al. Global dynamics and asymmetric fractal dimension in a nontwist circle map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 35, n. 2, 2025.
- [21] STROGATZ, S. H. Nonlinear dynamics and chaos. *Perseus Books*, 1994.
- [22] VIANA, R. L. Introdução à dinâmica não-linear e caos. *Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná-UFPR, Curitiba*, 2011.
- [23] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, Springer, v. 261, p. 459–467, 1976.
- [24] MAY, R. M.; OSTER, G. F. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. *The American Naturalist*, University of Chicago Press, v. 110, n. 974, p. 573–599, 1976.
- [25] COSTA, D. R. D. et al. Extreming curves and the parameter space of a generalized logistic mapping. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, L&H Scientific Publishing, v. 2, n. 2, p. 109–118, 2018.
- [26] FEIGENBAUM, M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 21, p. 669–706, 1979.
- [27] RANDO, D. S. Convergência para estados assintóticos em mapeamentos unidimensionais. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2016.
- [28] FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 19, n. 1, p. 25–52, 1978.

- [29] LEONEL, E. D.; SILVA, J. K. L. D.; KAMPHORST, S. O. Transients in a time-dependent logistic map. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, Elsevier, v. 295, n. 1-2, p. 280–284, 2001.
- [30] LEONEL, E. D.; SILVA, J. K. L. D.; KAMPHORST, S. O. Relaxation and transients in a time-dependent logistic map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 12, n. 7, p. 1667–1674, 2002.
- [31] GALLAS, J. A. C. A method for studying stability domains in physical models. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, Elsevier, v. 211, n. 1, p. 57–83, 1994.
- [32] BRUNET, L. G.; GALLAS, J. A. C. Exploring collective behaviors with a multi-attractor quartic map. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 257, n. 1-4, p. 329–333, 1998.
- [33] DOUGLASS, J. K. et al. Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 365, n. 6444, p. 337–340, 1993.
- [34] MORI, T.; KAI, S. Noise-induced entrainment and stochastic resonance in human brain waves. *Physical review letters*, APS, v. 88, n. 21, p. 218101, 2002.
- [35] LINDNER, B. et al. Effects of noise in excitable systems. *Physics reports*, Elsevier, v. 392, n. 6, p. 321–424, 2004.
- [36] KRAMERS, H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *physica*, Elsevier, v. 7, n. 4, p. 284–304, 1940.
- [37] JUNG, P. Threshold devices: Fractal noise and neural talk. *Physical Review E*, APS, v. 50, n. 4, p. 2513–2522, 1994.
- [38] CRUTCHFIELD, J. P.; HUBERMAN, B. A. Fluctuations and the onset of chaos. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 77, n. 6, p. 407–410, 1980.

- [39] MATSUMOTO, K.; TSUDA, I. Noise-induced order. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 31, p. 87–106, 1983.
- [40] GALATOLO, S.; MONGE, M.; NISOLI, I. Existence of noise induced order, a computer aided proof. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 33, n. 9, p. 4237, 2020.
- [41] BASSOLS-CORNUDELLA, B.; LAMB, J. S. W. Noise-induced chaos: A conditioned random dynamics perspective. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 33, n. 12, 2023.
- [42] OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, APS, v. 64, n. 11, p. 1196, 1990.
- [43] LAI, Y.-C.; TÉL, T. *Transient chaos: complex dynamics on finite time scales*. Heidelberg: Springer, 2011. v. 173.
- [44] BOCCALETTI, S. et al. The control of chaos: theory and applications. *Physics Reports*, Elsevier, v. 329, n. 3, p. 103–197, 2000.
- [45] YOSHIMOTO, M.; KUROSAWA, S.; NAGASHIMA, H. Effect of noise on chaos in a one-dimensional map. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 67, n. 6, p. 1924–1929, 1998.
- [46] SILVA, R. M. D.; MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. Exploring conservative islands using correlated and uncorrelated noise. *Physical Review E*, APS, v. 97, n. 2, p. 022219, 2018.
- [47] NICOLAU, N. S. et al. Tracking multistability in the parameter space of a Chua's circuit model. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 92, p. 1–8, 2019.
- [48] MARTINS, L. C.; GALLAS, J. A. C. Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: a map with many coexisting attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 18, n. 6, p. 1705–1717, 2008.
- [49] MEDEIROS, E. S. et al. Torsion-adding and asymptotic winding number for periodic window sequences. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 8, p. 628–631, 2013.

-
- [50] FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. Cintra do. *Caos: uma introdução*. Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1994.
- [51] ARNOLD, V. I. Small denominators. i. mapping of the circumference onto itself. *Collected Works: Representations of Functions, Celestial Mechanics and KAM Theory, 1957–1965*, Springer, p. 152–223, 2009.
- [52] JAKOBSON, M. V. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 81, p. 39–88, 1981.
- [53] GRACZYK, J.; SWIATEK, G. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Annals of Mathematics*, v. 146, n. 1, p. 1–52, 1997.
- [54] YORKE, J. A. et al. Scaling behavior of windows in dissipative dynamical systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 54, n. 11, p. 1095–1098, 1985.
- [55] KANEKO, K. On the period-adding phenomena at the frequency locking in a one-dimensional mapping. *Progress of Theoretical Physics*, v. 68, n. 2, p. 669–672, 1982.
- [56] ENGLISH, V.; LAUTERBORN, W. Regular window structure of a double-well duffing oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 44, n. 2, p. 916–924, 1991.
- [57] GREBOGI, C. et al. Final state sensitivity: an obstruction to predictability. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 99, n. 9, p. 415–418, 1983.
- [58] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers. *Physical Review E*, APS, v. 75, n. 5, p. 055204, 2007.
- [59] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. Accumulation boundaries: codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers, electric circuits, atmospheric and chemical oscillators. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, The Royal Society London, v. 366, n. 1865, p. 505–517, 2008.

- [60] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. Global structure of periodicity hubs in lyapunov phase diagrams of dissipative flows. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 1, p. 016216, 2011.
- [61] BARRIO, R. et al. Global organization of spiral structures in biparameter space of dissipative systems with shilnikov saddle-foci. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 3, p. 035201, 2011.
- [62] BARRIO, R.; BLESÁ, F.; SERRANO, S. Topological changes in periodicity hubs of dissipative systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 108, n. 21, p. 214102, 2012.
- [63] BONATTO, C.; GARREAU, J. C.; GALLAS, J. A. C. Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated co2 laser. *Physical Review Letters*, APS, v. 95, n. 14, p. 143905, 2005.
- [64] STOOP, R. et al. Shrimps: Occurrence, scaling and relevance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 22, n. 10, p. 1230032, 2012.
- [65] MEDRANO-T, R. O.; ROCHA, R. The negative side of chua's circuit parameter space: Stability analysis, period-adding, basin of attraction metamorphoses, and experimental investigation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 24, n. 9, p. 1430025, 2014.
- [66] ROCHA, R.; MEDRANO-T, R. O. Stability analysis and mapping of multiple dynamics of Chua's circuit in full four-parameter spaces. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 25, n. 13, p. 1530037, 2015.
- [67] MARANHÃO, D. M. Ordered and isomorphic mapping of periodic structures in the parametrically forced logistic map. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 380, n. 40, p. 3238–3243, 2016.
- [68] HEGEDŰS, F. et al. Non-feedback technique to directly control multistability in nonlinear oscillators by dual-frequency driving: Gpu accelerated topological analysis of a bubble in water. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 94, p. 273–293, 2018.

- [69] RAPHALDINI, B. et al. Geomagnetic reversals at the edge of regularity. *Physical Review Research*, APS, v. 3, n. 1, p. 013158, 2021.
- [70] HALLIER, L. et al. Coupling-induced periodic windows in networked discrete-time systems. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 138, n. 2, p. 21001, 2022.
- [71] STOOP, R.; BENNER, P.; UWATE, Y. Real-world existence and origins of the spiral organization of shrimp-shaped domains. *Physical Review Letters*, APS, v. 105, n. 7, p. 074102, 2010.
- [72] VIANA, E. R. et al. High-resolution parameter space of an experimental chaotic circuit. *Chaos*, AIP Publishing, v. 20, n. 2, p. 023110, 2010.
- [73] FAÇANHA, W.; OLDEMAN, B.; GLASS, L. Bifurcation structures in two-dimensional maps: The endoskeletons of shrimps. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 18, p. 1264–1268, 2013.
- [74] OLIVEIRA, J. A. D. et al. Effects of a parametric perturbation in the Hassell mapping. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 113, p. 238–243, 2018.
- [75] MAY, R. M. et al. Time delays, density-dependence and single-species oscillations. *The Journal of Animal Ecology*, JSTOR, p. 747–770, 1974.
- [76] LEONEL, E. D. *Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares*. São Paulo: Editora Blucher, 2019.
- [77] BAK, P. Commensurate phases, incommensurate phases and the devil's staircase. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 45, n. 6, p. 587–629, 1982.
- [78] JENSEN, M. H.; BAK, P.; BOHR, T. Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map. *Physical Review Letters*, APS, v. 50, n. 21, p. 1637, 1983.
- [79] BAK, P. The devil's staircase. *Physics Today*, American Institute of Physics, v. 39, n. 12, p. 38–45, 1986.

-
- [80] HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *The Theory of Chaotic Attractors*, Springer, p. 94–102, 2004.