



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Marília

Daniele Cristina de Paiva Parada

Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:
contribuições da Teoria Histórico-Cultural

Marília/SP
2026

Daniele Cristina de Paiva Parada

Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:
contribuições da Teoria Histórico-Cultural

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Educação pela Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Marília.

Área de Concentração: Educação.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Miguel

Marília/SP
2026

P222d

Parada, Daniele Cristina de Paiva

Desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental : contribuições da teoria histórico-cultural /

Daniele Cristina de Paiva Parada. -- Marília, 2026

138 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília

Orientador: José Carlos Miguel

1. Educação. 2. Ensino fundamental. 3. Matemática (Ensino fundamental). 4. Álgebra. I. Título.

Daniele Cristina de Paiva Parada

Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:
contribuições da Teoria Histórico-Cultural

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração: Educação

Linha de pesquisa: Teoria e Práticas Pedagógicas

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Carlos Miguel
UNESP – Câmpus de Marília
Orientador

Prof. Dr. Osvaldo Augusto Chissonde Mame
ISP – CAÁLA/UJES (Angola)

Prof. Dr. Wellington Pereira das Virgens
IFSP – Câmpus São Paulo

Marília, 12 de dezembro de 2025

Às Marias, mãe e irmã, que sempre foram
minha inspiração. Ao parceiro de vida David,
ao amado filho Luís Fernando e à querida amiga
Monalisa que me incentivou e me apoiou nessa
jornada.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

a Deus, pela dádiva da vida.

ao querido orientador Professor Dr. José Carlos Miguel, por me permitir cursar o mestrado, pela paciência, atenção, compreensão, sabedoria, enfim, pelos ensinamentos e orientação primorosos e pela confiança atribuída à minha pessoa desde o início.

aos amigos e parceiros do “Grupo de Estudos Formação do Educador” (GP Forme-UNESP-Marília/SP) pelas trocas e aprendizado.

à Faculdade de Filosofia e Ciências, da Universidade Estadual Paulista, *campus* de Marília/SP.

aos Professores Dr. Osvaldo e Dr. Wellington, pelas profícuas contribuições teórica e metodológica no momento da qualificação.

aos Professores Dr. Dagoberto Buim Arena, Tânia Barbosa Martins e Rosane Michelli de Castro, pelos diálogos sempre provocadores de reflexão e estudo durante as disciplinas ministradas.

à minha amada mãe Maria do Carmo e irmã Maria Aparecida, que sempre me incentivaram e foram uma inspiração de vida.

ao meu marido e companheiro de vida David, por seu grande apoio, para que eu pudesse me dedicar aos estudos e à escrita da pesquisa.

ao meu amado filho Luís Fernando pela compreensão durante os momentos que me ausentei para dedicar-me ao estudo e à pesquisa.

à querida amiga, Dra. Monalisa Renata Gazoli, que me incentivou, me apoiou e se tornou minha parceira de estudos e confidente nessa trajetória, me escutando nos momentos de angústia, mostrando que tudo isso faz parte do processo de desenvolvimento do pesquisador e da pesquisa compartilhando seus ensinamentos que tanto contribuíram para meu desenvolvimento.

à querida amiga Cristina Galvani pela amizade, parceria, pelos diálogos e escuta nos momentos bons e nos difíceis também.

à querida amiga Cláudia Catena, companheira de jornada e das longas horas que passamos na estrada para cursarmos as disciplinas, participarmos dos congressos e seminários.

a todos os queridos amigos que vibraram por essa grande conquista e que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho e para a materialização de um sonho.

a todos, muito obrigada!

RESUMO

O objeto investigado nesta dissertação de mestrado em Educação é o desenvolvimento do pensamento algébrico sobre o qual se busca responder a seguinte questão orientadora: quais as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? O objetivo principal foi investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sob a perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Para atingir tal objetivo, a metodologia eleita para o desenvolvimento da pesquisa foi a pesquisa bibliográfica e documental acerca do tema indicado, o que permitiu analisar fontes que responderam, comprovaram ou refutaram as indagações iniciais. Desenvolver o pensamento algébrico é um desafio à educação atual, pois, são muito frequentes processos de ensino e de aprendizagem reduzidos à repetição, verbalização e categorização de conceitos. Portanto, a partir dos dados de pesquisa analisados é possível afirmar que para que o estudante desenvolva esse tipo de pensamento em sua amplitude, não basta aprender a verbalizar conceitos, é preciso que ele se aproprie do processo lógico e histórico que deu origem a sua necessidade e elaboração. Para isso, o estudante deve ser colocado em atividade de estudo. Desse modo, os resultados da pesquisa documental e bibliográfica realizada permitiram constatar que o ensino escolar, no geral, deve proporcionar às crianças conceitos genuinamente científicos, de forma a possibilitar que desenvolvam pensamento teórico, por meio de atividade específica, de estudo, que pouco a pouco, por etapas, permite à criança tornar-se mais autônoma, à medida que aprende o novo, o que ainda não sabe, com a colaboração de sujeitos mais experientes. Consideram-se os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural necessários à compreensão do processo educativo e do desenvolvimento do pensamento teórico, especificamente o algébrico que deve desenvolver-se mediante ações mentais de análise, síntese, abstração e generalização.

Palavras-chave: Educação. Desenvolvimento do pensamento algébrico. Anos Iniciais do Ensino fundamental. Teoria Histórico-Cultural.

ABSTRACT

This master's dissertation in Education investigates the development of algebraic thinking, aiming to address the following guiding question: What are the contributions of Historical-Cultural Theory to the development of algebraic thinking in children in the early years of primary education? The main objective was to examine the development of algebraic thinking in the early years of elementary education from the perspective of Historical-Cultural Theory. To achieve this goal, the chosen methodology was a bibliographic and documentary study on the proposed theme, which made it possible to analyze sources that answered, confirmed, or refuted the initial inquiries. Developing algebraic thinking poses a challenge to contemporary education, as teaching and learning processes are often limited to repetition, verbalization, and the categorization of concepts. Therefore, based on the analyzed research data, it is possible to state that for students to develop this kind of thinking in its full scope, it is not enough for them to merely learn to verbalize concepts; they must appropriate the logical and historical processes that gave rise to their necessity and elaboration. To that end, students must be engaged in purposeful study activities. The results of the bibliographic and documentary research revealed that school education, in general, should provide children with genuinely scientific concepts, thereby enabling them to develop theoretical thinking through specific study activities that, gradually and progressively, allow them to become more autonomous as they learn what is new – what they do not yet know – with the collaboration of more experienced individuals. The principles of Historical-Cultural Theory are thus regarded as essential to understanding the educational process and the development of theoretical thinking, particularly algebraic thinking, which must be fostered through mental actions such as analysis, synthesis, abstraction, and generalization.

Keywords: Education. Development of algebraic thinking. Early years of elementary education. Historical-Cultural Theory.

RESUMEN

El objeto investigado en esta disertación de maestría en Educación es el desarrollo del pensamiento algebraico, sobre el cual se busca responder a la siguiente pregunta orientadora: ¿Cuáles son las contribuciones de la Teoría Histórico-Cultural al desarrollo del pensamiento algebraico en niños de los primeros años de la Educación Primaria? El objetivo principal fue investigar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años de la Educación Primaria desde la perspectiva de la Teoría Histórico-Cultural. Para lograr tal objetivo, la metodología elegida para el desarrollo de la investigación fue la pesquisa bibliográfica y documental sobre el tema indicado, lo que permitió analizar fuentes que respondieron, comprobaron o refutaron las indagaciones iniciales. Desarrollar el pensamiento algebraico es un desafío para la educación actual, ya que son muy frecuentes los procesos de enseñanza y aprendizaje reducidos a la repetición, verbalización y categorización de conceptos. Por lo tanto, a partir de los datos de investigación analizados, es posible afirmar que para que el estudiante desarrolle este tipo de pensamiento en su amplitud, no basta con aprender a verbalizar conceptos, es preciso que se apropie del proceso lógico e histórico que dio origen a su necesidad y elaboración. Para ello, el estudiante debe ser puesto en actividad de estudio. De este modo, los resultados de la pesquisa documental y bibliográfica realizada permitieron constatar que la enseñanza escolar, en general, debe proporcionar a los niños conceptos genuinamente científicos, de forma a posibilitar que desarrollen el pensamiento teórico, por medio de actividad específica, de estudio, que poco a poco, por etapas, permite a la niña volverse más autónoma, a medida que aprende lo nuevo, es decir, cosas que aún no saben, con la colaboración de sujetos más experimentados. Se consideran los fundamentos de la Teoría Histórico-Cultural necesarios para la comprensión del proceso educativo y el desarrollo del pensamiento teórico, específicamente el algebraico, que debe desarrollarse mediante acciones mentales de análisis, síntesis, abstracción y generalización.

Palabras clave: Educación. Desarrollo del pensamiento algebraico. Primeros años de la Educación Primaria. Teoría histórico-cultural.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Passo (i): projeção do lado 1	25
Figura 2 – Enunciado: “A superfície e a minha confrontação acumulei”	26
Figura 3 – Passo (ii): “Quebre 1 na metade”	26
Figura 4 – Passos (iii) e (iv): “Retenha 0,30 e agregue o resultado a 0,45. O quadrado maior tem área 1 e lado 1”	26
Figura 5 – Atividade 12.4 apresentada no livro EMAI do 1º ano	66
Figura 6 – Exemplo de sequência de quadradinhos proposta na conversa inicial da atividade 12.4 do livro EMAI do 1º ano	67
Figura 7 – Situação de aprendizagem apresentada no livro EMAI & Ler e Escrever do 1º ano	69
Figura 8 – Exemplo de sequência de organização de lápis coloridos proposta na conversa inicial da atividade 12.1 do livro EMAI & Ler Escrever do 1º ano	70
Figura 9 – Situação de aprendizagem apresentada no livro EMAI & Ler e Escrever do 2º ano	71
Figura 10 – Situação de aprendizagem apresentada no livro EMAI do 2º ano	73
Figura 11 – Atividade 20.3 apresentada no livro EMAI do 5º ano	75
Figura 12 – Atividade apresentada no livro EMAI do 2º ano	77
Figura 13 – Atividade 13.6 apresentada no livro EMAI do 4º ano	79
Figura 14 – Situação de aprendizagem 4.5 apresentada no livro EMAI do 3º ano	82
Figura 15 – Situação de aprendizagem 10.2 apresentada no livro EMAI do 3º ano	84
Figura 16 – Atividade 17.1 apresentada no livro EMAI do 4º ano	87
Figura 17 – Atividade 28.3 apresentada no livro EMAI do 4º ano	88
Figura 18 – Exemplo 1 de situação envolvendo a relação de igualdade entre dois termos	89
Figura 19 – Exemplo 2 de situação envolvendo a relação de igualdade entre dois termos	89
Figura 20 – Atividade 16.6 apresentada no livro EMAI do 5º ano	90
Figura 21 – Tarefa 1: Tiras de números coloridos.....	119
Figura 22 – Tarefa 2: Tira de três números coloridos	122
Figura 23 – Tarefa: Produção livre do aluno.....	124

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Base de dados da pesquisa e endereço eletrônico (<i>link</i>).....	40
Quadro 2 – Relação de bases de dados, palavras-chave, quantidade de textos localizados e selecionados para leitura e análise	41
Quadro 3 – Critérios de inclusão (ci) e critérios de exclusão (ce) da produção bibliográfica	42
Quadro 4 – Indicação de ano de publicações, fonte de pesquisa, categorias de análise, autores, títulos e local de publicação de pesquisas selecionadas em base de dados	43
Quadro 5 – Relação de produções bibliográficas, tipo de pesquisa, região do país e categorias de análise	46
Quadro 6 – Eixo estruturante pensamento algébrico e objetivos de aprendizagem para 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental	52
Quadro 7 – Unidade temática, ano, objetos de conhecimento e habilidades de álgebra propostos pela BNCC para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental	54
Quadro 8 – Unidade temática, ano, objetos de conhecimento e habilidades de álgebra propostos pelo currículo paulista para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental	59
Quadro 9 – Grupo de bolinhas que se repetem em blocos de três números (1, 2, 3)	72
Quadro 10 – Síntese do esquema de resolução da expressão $1 + 3, 4 + 5, 9 + 7, 16 + 9, 25 + 11$	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Palavra, significado na língua corrente, sentido nos problemas e notação moderna	32
Tabela 2 – Posição, cor e motivo da sequência repetitiva indicada na sequência 12.4, do EMAI & Ler e Escrever	68
Tabela 3 – Número de ciclos e quantidade de quadrados na sequência 27.2 do Emai & Ler e Escrever do 2º ano.....	74
Tabela 4 – Quantidade de palitos utilizados na composição de triângulos na situação de aprendizagem 20.3 do Emai & ler e Escrever do 5º ano	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Cefam - Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério

Unesp – Universidade Estadual de São Paulo

PPGE - Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista

GP FORME - Grupo de Estudos Formação do Educador

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

THC – Teoria Histórico Cultural

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

MEC - Ministério da Educação

PPGE/EFMS – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

PNAIC – Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa

NCTM – Conselho Nacional de Professores de Matemática

SEDUC-SP - Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

UNDIME-SP - União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação de São Paulo

EMAI - Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

ZDI - Zona do Desenvolvimento Iminente

Ask- A Ask –An- Expert

FAQ's Frequently Asked Questions

FTP File Tranfer Protocol

http Hype Text Tranfer Protocol.

IFLA Federação Internacional de Associações e Instituições Bibliotecárias

SRI Serviço de Referência e Informação

SRID Serviço de Referência e Informação Digital

TCP/IP Transmission Control Protocol /Internet Protocol

TIC's Tecnologias de Informação e Comunicação

URL Uniform Resource Locator

www World Wide Web

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	A ÁLGEBRA COMO UM CONHECIMENTO DECORRENTE DE DIVERSAS CULTURAS E CIVILIZAÇÕES E O PENSAMENTO ALGÉBRICO COMO UMA PARTICULARIDADE DO PENSAMENTO MATEMÁTICO	24
2.1	Aspectos históricos da Álgebra: das proposições verbais à linguagem simbólica ...	24
2.1.1	A álgebra sem símbolos dos babilônios e egípcios	24
2.1.2	A <i>Aritmética</i> de Diofanto	29
2.1.3	A álgebra de Al-Khwarizmi	31
2.1.4	A ideia moderna e simbólica de álgebra, a partir de François Viète	33
2.2	O pensamento algébrico como forma particular de pensar	36
3	APRESENTAÇÃO DA PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA E DOCUMENTAL BRASILEIRA SOBRE O ENSINO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	39
3.1	Produção bibliográfica: procedimentos de localização, critérios de inclusão e exclusão e seleção dos dados de pesquisa	40
3.2	Produção documental: apresentação e análise dos documentos oficiais nacionais e paulista	48
3.2.1	Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e as indicações para o ensino da álgebra nos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	49
3.2.2	Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do ensino fundamental e as indicações ao ensino da Álgebra	51
3.2.3	A Base Nacional Comum Curricular e as indicações para o ensino da álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	53
3.2.4	O Currículo Paulista e as indicações para o ensino da álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	57
4	CONTEÚDOS RELATIVOS AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ESTADO DE SÃO PAULO: EXEMPLOS DE SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM PROPOSTAS NO MATERIAL DIDÁTICO EMAI LER & ESCREVER	64
4.1	Situações de aprendizagem sobre o estudo de regularidades e a generalização de padrões indicadas no livro EMAI & Ler e Escrever	65
4.2	EMAI: propostas de situações de aprendizagem sobre as relações de igualdade e as noções de equivalência	81
5	CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	94
5.1	A formação do pensamento algébrico mediada por conceitos científicos	107
5.2	Teoria da atividade de estudo como possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico	113
5.3	Princípios de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem: uma possibilidade para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	116
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	126

REFERÊNCIAS	131
--------------------------	------------

APRESENTAÇÃO

Como aluna eminentemente de escola pública desde a Educação Infantil ao Mestrado, desenvolvi um compromisso com a educação pública, gratuita e de qualidade.

Tal compromisso iniciou ao cursar o Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM) entre os anos de 2000 e 2003. Foi no CEFAM que iniciei o desenvolvimento da habilidade de ensinar, mas foi ao graduar-me em Pedagogia (2005 a 2008), na Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp) – Marília/SP que, efetivamente, aprofundi e consolidei os conhecimentos adquiridos no magistério.

Ainda cursando o segundo ano de graduação, iniciei trajetória como professora dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em fevereiro de 2006, após ingressar por meio de concurso público de provas e títulos realizado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEDUC/SP).

Além dessa experiência profissional, também atuei como Coordenadora de Gestão Pedagógica na mesma secretaria, e, atualmente, exerço a função de Professora Especialista em Currículo cujas atribuições são orientar e apoiar os coordenadores de escola no planejamento e implementação de atividades de gestão pedagógica, tais como formação dos docentes, orientação sobre o uso de recursos didáticos e qualificação do planejamento e metodologias de ensino utilizadas em sala de aula pelos professores.

Dentre os aprendizados decorrentes dessas experiências, especificamente os desenvolvidos ao longo da graduação e da atuação como professora, destaco o entendimento sobre a função da escola de socializar e consolidar nos diversos campos de ensino, os conhecimentos historicamente produzidos. Desde a graduação, atribuo à Teoria Histórico-Cultural, a possibilidade teórica de significar tarefas específicas da escola as quais favoreçam o desenvolvimento integral dos estudantes, contribuindo para que se apropriem de conceitos científicos e culturais da humanidade, que promovam a consciência crítica e a educação humanizadora capaz de transformar alunos, professores e, conseqüentemente, a realidade.

Em contrapartida ao que propicia a educação humanizadora, encontramos na rede pública estadual paulista modelo de ensino que coloca os alunos como espectadores de conteúdos organizados pela lógica da competência para melhoria de performance nas avaliações, distanciando-os de propósitos educativos que os conduzam ao desenvolvimento humano.

O desenvolvimento, compreendido por Vigotski (2018, p.36, grifo do autor) como “[...] um processo **de formação do homem ou da personalidade que acontece por meio do surgimento, em cada etapa, de novas qualidades**, novas formações humanas específicas [...], tais como atenção voluntária, memória de longo prazo, lógica, pensamento abstrato, linguagem (interna e externa) e planejamento, é condição necessária à educação humanizadora.

Assim, compreender o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, eleito como objeto de pesquisa, torna-se necessário para pensarmos sobre a organização de situações de aprendizagem que potencializem o desenvolvimento dos estudantes, permitindo-lhes significar e atribuir sentido aos movimentos humanos e às relações entre os fenômenos do mundo aspirando à legitimidade de significados matemáticos fora dos muros da escola.

1 INTRODUÇÃO

A trajetória escolar de alunos da Educação Básica tem sido marcada por diversos desafios, dentre os quais podemos destacar as dificuldades enfrentadas no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, em particular, os que se referem à Álgebra.

Nesse contexto, por meio desta dissertação, buscamos contribuir para a ampliação de conhecimentos sobre o pensamento algébrico a partir dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Essa discussão ganha relevância a partir da publicação da **Base Nacional Comum Curricular – BNCC** (Brasil, 2018), documento que orienta a organização curricular, a formação docente e a produção de materiais didáticos no país. Na BNCC, a Álgebra é explicitada como Unidade Temática a ser desenvolvida desde os Anos Iniciais, com papel formativo na construção de competências e habilidades a serem desenvolvidas ao longo de processos de ensino e de aprendizagem.

Da inserção da Unidade Temática “Álgebra” nesse documento, foi desenvolvida, nesta pesquisadora, a necessidade de ampliação de estudos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Além dessa necessidade, o interesse pela temática de pesquisa também decorre de prática profissional da pesquisadora, que atua como Professora Especialista em Currículo da rede pública estadual paulista que, em sua rotina diária, acompanha e orienta a implementação de políticas públicas incluindo os novos documentos legais e oficiais, a (re)organização curricular da rede a partir da BNCC e a implementação de novos materiais didáticos, atuando diretamente no processo formativo curricular de docentes vinculados à rede pública estadual de ensino. Essa atuação demanda intensa análise crítica relativa tanto aos aspectos didático-pedagógicos quanto às políticas publicadas.

Embora a Álgebra tenha sido inserida como Unidade Temática dos Anos Iniciais apenas a partir da publicação da BNCC (Brasil, 2018), desde a década de 1980, diversos pesquisadores têm se dedicado a investigar como minimizar as dificuldades evidenciadas pelos estudantes no processo de transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. Para Rosa (2012), essas dificuldades estão relacionadas a contexto histórico de organização curricular marcados pela fragmentação e pela hierarquização de conteúdos matemáticos, nos quais aritmética, álgebra e geometria são desenvolvidas de forma fragmentada e em momentos distintos do percurso escolar.

Romeiro (2023) explicita que, por longo período, a aritmética ocupou posição central nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, enquanto a álgebra passou a ser tratada apenas nos Anos Finais dessa etapa de escolarização, conforme explicitado nos Parâmetros Curriculares

Nacionais¹: “Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados” (Brasil, 2001, p. 55).

Diante do contexto de tensão entre a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, consideramos que em vez de inserir a álgebra tardiamente no currículo, esperando certo conhecimento mais profundo e sólido da aritmética, esta deveria ser desenvolvida com os alunos desde as primeiras séries escolares, ou seja, já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, como normatizado pela BNCC (Brasil, 2018).

Assim, por compreendermos que é possível desenvolver conteúdos algébricos desde os primeiros anos escolares, consideramos os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural como possibilidades teórica e metodológica que apresentam contribuições para discutir processos educativos intencionalmente voltados a esse fim.

Buscamos responder, nesta dissertação, decorrente de pesquisa acadêmico-científica em nível de mestrado, desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (PPGE-UNESP-Marília/SP), sob orientação do Prof. Dr. José Carlos Miguel e vinculada ao “Grupo de Estudos Formação do Educador” (GP FORME-UNESP-Marília/SP), a seguinte questão orientadora: quais as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?

A resposta que orientou a pesquisa foi a de que a Teoria Histórico-Cultural pode contribuir ao adequado desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental possibilitando o desenvolvimento de tipo de pensamento (teórico) que promove modos de pensar a partir da análise, síntese, generalização e abstração que superam o senso comum e promovem o desenvolvimento humano.

Apoiados nos pressupostos decorrentes da Teoria Histórico-Cultural, buscamos por meio da pesquisa empreendida, contribuir para a compreensão do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, posto que:

Assumir a Teoria Histórico-Cultural como fundamento das pesquisas em Educação representa uma necessidade teórica e metodológica. Uma necessidade teórica na medida em que é preciso conhecer os processos de desenvolvimento do psiquismo humano na direção de contribuir para o seu pleno desenvolvimento. [...] Assumir a Teoria Histórico-Cultural como fundamento das pesquisas em Educação é, também, uma necessidade metodológica, na medida em que é preciso construir o método científico da Pedagogia que nos permitirá explicitar as possibilidades concretas de

¹ Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; 2001): Documento que orientou o processo de ensino e aprendizagem, produção de materiais didáticos e a formação de professores até a publicação da BNCC.

contribuir, em nossa atual sociedade, para que cada indivíduo se aproprie da “força social” produzida pelo homem e objetivada nos signos, particularmente nos conceitos teóricos (Cedro; Nascimento, 2017, p.41).

A pesquisa foi desenvolvida a partir do método de pesquisa bibliográfica e documental, por meio dos procedimentos de localização e seleção de fontes bibliográficas com base em critérios de exclusão e inclusão, análise das fontes bibliográficas eleitas como *corpus* de pesquisa. A esses materiais bibliográficos foram empreendidas as técnicas de leitura e de fichamento dos textos, seleção das informações relevantes à pesquisa, categorização das informações selecionadas e análise dos textos mediante categorias estabelecidas.

Para o desenvolvimento da pesquisa bibliográfica e documental foram considerados livros, artigos científicos, teses, dissertações acadêmicas, documentos oficiais e outros tipos de fontes que auxiliaram a contemplar os objetivos de pesquisa. Destaca-se a leitura como principal técnica para identificar as informações e dados contidos nas fontes selecionadas bem como para verificar as relações existentes entre elas, de modo a analisar sua consistência.

A etapa de leitura das fontes bibliográficas foi desenvolvida com base nas indicações de Salvador (1986), a saber: leitura de reconhecimento do material bibliográfico; leitura exploratória do material; leitura seletiva por meio de critérios estabelecidos; leitura reflexiva ou crítica e leitura interpretativa.

A opção por essa metodologia decorre do fato de considerarmos a pesquisa bibliográfica,

[...] um processo no qual o pesquisador tem ‘uma atitude e uma prática teórica’ de constante busca que define um processo intrinsecamente inacabado e permanente’, pois realiza uma atividade de aproximações sucessivas da realidade, sendo que esta apresenta uma ‘carga histórica’ e reflete posições frente à realidade (Minayo, 1994, p.23 *apud* Lima e Miotto, 2007, p.38).

Além disso, como destaca Gil (1994 *apud* Lima e Miotto, 2007, p.40), a pesquisa bibliográfica “[...] possibilita amplo alcance de informações, além de permitir a utilização de dados dispersos em inúmeras publicações auxiliando também na construção, ou melhor definição do quadro conceitual que envolve o objeto de estudo proposto”, além de possibilitar ao pesquisador analisar fontes que respondam ao problema de pesquisa e a indagações que comprovem ou refutem suas hipóteses, produzindo novos conhecimentos.

Para resolução do problema de pesquisa foram estabelecidas categorias de análise que emergiram da leitura da literatura produzida sobre o tema de modo a ampliar o conhecimento sobre a temática do pensamento algébrico. Isto posto, estabelecemos como objetivos específicos da pesquisa cujos resultados são apresentados nesta dissertação de mestrado:

- investigar a álgebra como saber histórico-cultural decorrente de diferentes povos e culturas ao longo da história da matemática;
- compreender em que consiste o pensamento algébrico;
- identificar e analisar documentos oficiais e produção bibliográfica brasileira sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental publicadas entre 1997 e 2024.
- analisar os conteúdos indicados ao desenvolvimento do pensamento algébrico em documentos oficiais nacionais e do estado de São Paulo;
- compreender pressupostos da Teoria Histórico-Cultural que possam possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico;
- investigar as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao adequado desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Para atingir tais objetivos, foram utilizados princípios decorrentes da Teoria Histórico-Cultural, por se apresentarem como “[...] possibilidade teórica (instrumento lógico) de interpretação da realidade educacional que queremos compreender” (Pires, 1997, p. 85). Essa teoria decorre do materialismo histórico-dialético marxista que compreende o homem a partir de seus aspectos individuais (biológicos) e sociais (culturais), ou seja, aspectos bio-psico-socio-histórico-cultural, segundo o qual os processos de desenvolvimento humano demanda fatores filo e ontogenéticos (Rigon; Asbahr; Moretti, 2016).

A partir do movimento de revisão bibliográfica, elegemos as considerações de Vigotski (1993; 2000; 2001; 2006; 2017), Leontiev (2004; 2017) e Davydov (1982; 1988), representantes da Teoria Histórico-Cultural, como aportes teóricos fundamentais à compreensão do objeto de pesquisa. Tal concepção pressupõe o ensino como forma necessária e relevante para o desenvolvimento humano, por isso, a maneira pela qual o ensino se organiza, intervém no desenvolvimento do sujeito, ou seja, “[...] o ensino constitui a forma internamente indispensável e geral de desenvolvimento intelectual” (Davydov, 1988, p.180 *apud* Moura, 2016, p.105).

Para possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico, compreendido como um tipo de pensamento teórico sobre a álgebra, pressupõe-se que o ensino realizado nas escolas aproxime os estudantes de um determinado tipo de conhecimento, o científico. Daí a importância de que os professores tenham compreensão sobre seu objeto de ensino, que poderá se transformar em objeto de aprendizagem para os estudantes. Nesse sentido, Moura (2016, p. 105) afirma:

[...] é fundamental que, no processo de ensino, o objeto a ser ensinado seja compreendido pelos estudantes como objeto de aprendizagem. Para a teoria histórico-cultural, isso só é possível se esse mesmo objeto se constituir como uma necessidade para eles. Assim, os conhecimentos teóricos são ao mesmo tempo objeto e necessidade na atividade de aprendizagem.

Para a formação do pensamento teórico do estudante, pressupõe-se organizar o ensino de modo que este proporcione atividades adequadas para a formação desse pensamento. Como afirmamos, o “bom ensino”, conforme palavras de Vigotski (2017, p. 114), ou seja, o ensino adequadamente organizado impulsiona, ou seja, é a força motriz para que os alunos se constituam como sujeitos pensantes e desenvolvam suas potencialidades, tais como atenção involuntária, memória a longo prazo, lógica, pensamento abstrato, linguagem (interna e externa) e planejamento.

Para isso, Moura (2016) explicita que o desenvolvimento das potencialidades do indivíduo se encontra na possibilidade de apropriação dos conhecimentos. Contudo, não é qualquer tipo de conhecimento, mas o “[...] conhecimento teórico, que está representado nas inter-relações entre o interno e o externo, entre a totalidade e a aparência, entre o original e o derivado” (Davydov, 1999 *apud* Moura, 2016, p.158). Para que ocorra a formação do pensamento teórico, esses pesquisadores sugerem a organização do ensino de modo que o estudante realize atividades que contribuam ao desenvolvimento desse tipo de pensamento.

De acordo com a perspectiva teórica que assumimos, a escola é instituição privilegiada no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento e humanização do homem, por isso, cabe a ela promover tarefas específicas que favoreçam o desenvolvimento integral dos estudantes, levando-os a se apropriarem de conceitos científicos e culturais da humanidade, que promovam a consciência crítica e a educação humanizadora.

Moretti (2007, p.176, grifo da autora) explicita que,

[...] uma *educação humanizadora* não se limita à apropriação do conhecimento entendido como útil e nem à adaptação dos estudantes a uma realidade tida como inquestionável. Uma educação humanizadora é transformadora em sua essência. Transformadora de alunos, de professores e, conseqüentemente, da realidade. Entende-se, assim, que propiciar a todos os sujeitos uma educação de qualidade com o amplo desenvolvimento do pensamento teórico, que supere o senso comum, é condição dessa humanização [...].

Em contrapartida ao que propicia a “educação humanizadora” defendida por Moretti (2007), encontramos na rede pública estadual paulista modelo de ensino que coloca os estudantes como espectadores de conteúdos organizados pela lógica da competência e que precisam ser memorizados e treinados para melhoria de performance nas avaliações,

distanciando-os de propósito educativo que os conduza ao desenvolvimento humano. Isto posto, torna-se necessário pensarmos a organização de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem², que potencializem o desenvolvimento dos estudantes, além de promover condições para a compreensão de diferentes formas de significar e atribuir sentido aos movimentos humanos e às relações entre os fenômenos do mundo aspirando à legitimidade de significados fora dos muros da escola.

Adotando uma compreensão de educação humanizadora que prima pelo desenvolvimento do pensamento teórico que supere o senso comum, utilizamos como aporte teórico geral da pesquisa a perspectiva Histórico-Cultural e como decorrência da investigação apresentamos a materialização discursiva dos dados localizados, selecionados e analisados. Assim, na Seção 2, intitulada “A álgebra como um conhecimento decorrente de diversas culturas e civilizações e o pensamento algébrico como uma particularidade do pensamento matemático”, apresentamos as ações coletivas em torno da elaboração do pensamento algébrico, que se constitui à medida que o homem, para satisfazer suas necessidades, se apropria do conhecimento humano que está objetivado na linguagem algébrica produzida pela humanidade por meio das relações com os instrumentos físicos e simbólicos da cultura material e imaterial.

Na sequência (Seção 3), intitulada “Apresentação da produção bibliográfica e documental do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental”, destacamos a produção bibliográfica e documental brasileira sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural publicadas/publicizadas entre 1997 (ano de publicação dos PCN, Brasil, 1997)³ a partir do qual observamos a sinalização de desenvolvimento de conteúdos algébricos a partir dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e 2024 (ano de início da pesquisa de mestrado, da qual resulta esta dissertação). Nessa seção, além da análise da produção bibliográfica sobre o objeto de pesquisa, também destacamos os conteúdos indicados ao ensino da álgebra nos documentos oficiais nacionais e paulistas.

Na seção 4, “Conteúdos relativos ao ensino da álgebra no estado de São Paulo: exemplos de situações de aprendizagem propostas no material didático EMAI & Ler e Escrever”,

² Segundo Moura (2016), a Situação Desencadeadora de Aprendizagem é parte central da atividade de ensino. Sua finalidade é colocar o estudante diante de problemas mobilizadores para pôr em movimento os conhecimentos já apreendidos que são base para a produção de uma nova síntese e, desse modo, permitir a apropriação de um novo conceito ou o seu aprofundamento.

³ Embora a publicação da primeira versão dos PCN tenha ocorrido em 1997, neste texto, os pesquisadores utilizaram a versão da 3ª edição, publicada em 2001.

abordamos algumas situações de aprendizagem, que pressupõe a busca pelo desenvolvimento deste tipo de pensamento, a partir de atividades, que contemplam o estudo de conteúdos como: regularidades e generalização de padrões; relações de igualdade e desigualdade e a noção de equivalência; e proporcionalidade e reconhecimento de termos desconhecidos.

Na Seção 5, “Contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao desenvolvimento do pensamento algébrico”, considerando que o desenvolvimento do pensamento algébrico, objeto de análise, demanda compreensão de conceitos fundamentais, a saber: linguagem; pensamento; formação de conceito; generalização; abstração; e desenvolvimento psíquico, abordamos como estes conceitos são apresentados com o objetivo de compreendê-los a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural (THC) e como forma de encaminhar a discussão para as contribuições da atividade de estudo ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

2 A ÁLGEBRA COMO UM CONHECIMENTO DECORRENTE DE DIVERSAS CULTURAS E CIVILIZAÇÕES E O PENSAMENTO ALGÉBRICO COMO UMA PARTICULARIDADE DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Assim como outras áreas da Matemática, a álgebra teve origem nas primeiras civilizações da humanidade. Pode-se dizer que esta surgiu quase que ao mesmo tempo no Egito e na Babilônia, porém, devido aos sistemas numéricos de cada um desses povos, suas álgebras desenvolvidas tinham particularidades. Contudo, isso não significa que uma era superior a outra; ambas se adequavam às necessidades de cada povo e de cada tempo.

Nesta seção, não temos como objetivo esgotar todos os aspectos que constituem a história da álgebra, pretendemos, apenas, destacar aqueles que possibilitaram pensá-la como uma construção histórica decorrente de necessidades sócio-históricas. Para compreendermos o conhecimento algébrico como uma particularidade do pensamento matemático historicamente construído por diversas civilizações, retomaremos a seguir, alguns momentos da história da humanidade em que a álgebra foi concebida a posteriori pelos historiadores da matemática tradicional como retórica, sincopada e simbólica.

No período retórico, as resoluções de problemas são apresentadas na linguagem corrente. No sincopado, apesar de ainda serem operadas na linguagem corrente, são introduzidas algumas abreviações para termos ou operações utilizadas frequentemente. Por fim, no período denominado simbólico conta-se com uma linguagem de símbolos.

2.1 Aspectos históricos da Álgebra: da linguagem corrente à linguagem simbólica

2.1.1 A álgebra dos babilônios e egípcios

De acordo com historiadores da matemática, na Antiguidade, povos como os babilônios já tinham necessidades sociais que os levaram a criar formas para resolver o que na atualidade é denominada equação de segundo grau. No entanto, Roque (2012), pesquisadora brasileira da história da matemática, considera tal perspectiva anacrônica, pois não corresponde à Matemática sem simbolismos, praticada na época representando forma peculiar de pensamento. Para ela, o tratamento dado pelos babilônios a situações que hoje resolveríamos por meio de equações de segundo grau era feito por meio de proposição verbal, sem o uso de abreviaturas ou símbolos e o procedimento para resolvê-los, passo a passo, se dava pela lógica geométrica.

Traduções de problemas babilônicos contidos na placa BM 13901, da coleção do British Museum feitas pelo historiador da matemática Jens Høyrup (*apud* Roque, 2012) na década de

1990, indicam que a “álgebra babilônica” correspondia à solução em que se buscavam encontrar quantidades desconhecidas pelo método de completar quadrados geometricamente, ou seja, pelo procedimento geométrico de “cortar e colar” (Roque, 2012, p.39).

O problema #1, da placa BM 13901 foi traduzido por Høyrup assim:

Nova tradução do Exemplo 1:

Procedimento: “A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45” (Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação: o lado da superfície, que é um quadrado.)

Solução:

- (i) 1 é a projeção
- (ii) quebre 1 na metade (obtendo 0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15
- (iii) agregue 0,15 a 0,45
- (iv) 1 é o lado igual
- (v) retire do interior de 1 os 0,30 que você reteve
- (vi) 0,30 é a confrontação (Roque, 2012, p.66).

Na tradução de Høyrup (*apud* Roque, 2012) é indicado que no procedimento de “cortar e colar”, inicialmente,

[...] faz-se uma projeção de 1, que permite interpretar a medida do lado procurado, suponhamos l , concretamente como um retângulo de lados 1 e l . Os babilônios transformavam, por meio de uma projeção, essa linha de comprimento l em um retângulo com um lado dado por l e o outro medindo 1. Ou seja, eles projetavam o lado l para que se tornasse o lado de um retângulo com área igual a l ” (Roque, 2012, p.66).

A figura 1, a seguir, ilustra a projeção do problema babilônico de cortar e colar:

Figura 1 – Passo (i): projeção do lado l .



Fonte: Roque (2012, p.66).

Na figura 2, observamos um retângulo de lados 1 e l e um quadrado de lado l , cuja soma deve dar 0,45, o valor dado no enunciado. Essa figura será “cortada e colada” visando estabelecer equivalência entre medidas de áreas que resolva o problema, conforme figura abaixo.

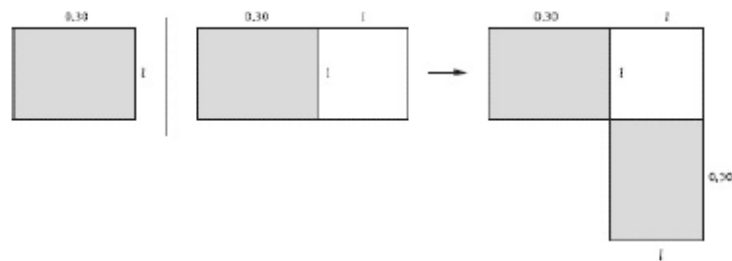
Figura 2 – Enunciado: “A superfície e a minha confrontação acumulei”



Fonte: Roque (2012, p.67).

No passo 2 (ii), é explicitado que “[...] quebramos 1 na metade, dividindo o retângulo inicial em duas partes” (Roque, 2012, p.67). Assim, ao recompor as duas metades do retângulo, obtemos outra figura, cuja área é igual à dada inicialmente (0,45), conforme demonstrado na figura abaixo:

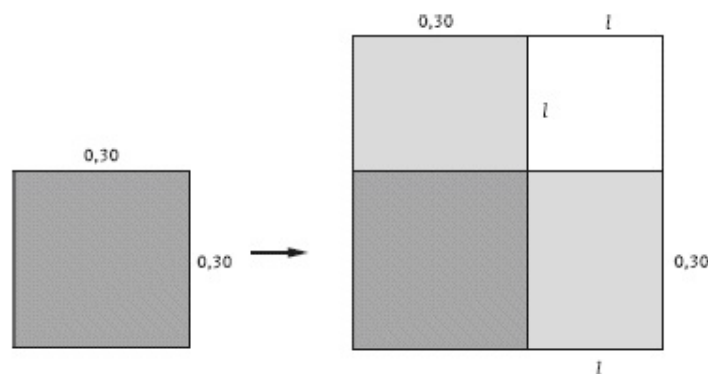
Figura 3 – Passo (ii): “Quebre 1 na metade”



Fonte: Roque (2012, p.67).

Segundo Roque (2012), os lados quebrados delimitam um quadrado de lado 0,30 que retemos, ou seja, multiplicamos por ele mesmo, obtendo a área de um novo quadrado (0,15). Essa área pode ser agregada ao conjunto, completando o quadrado e formando um quadrado maior de área 1, conforme Figura 4:

Figura 4 – Passos (iii) e (iv): “Retenha 0,30 e agregue o resultado a 0,45. O quadrado maior tem área 1 e lado 1”



Fonte: Roque (2012, p.68).

Nota-se que como 1 é o quadrado de 1, 1 é o lado do quadrado maior. Desse lado, retiramos o lado do quadrado menor (0,30). Assim, obtemos o lado procurado, que é $1 - 0,30$

= 0,30. Roque (2012, p.68) explica ainda “[...] que esse lado é chamado de ‘confrontação’, e o enunciado do problema pede que se acumule uma área e uma confrontação. Ou seja, queremos somar a área de um quadrado com o seu lado, que seria a confrontação da área”. Percebe-se que para efetuar essa operação, os babilônios transformavam essa linha em um retângulo, por isso o lado é uma confrontação (da área).

Os chamados “problemas babilônicos”, como aqueles voltados à determinação do comprimento e da largura de um campo, ao cálculo de áreas ou ao procedimento de completar o quadrado, são estruturados para funcionar harmonicamente no sistema de numeração sexagesimal. Essa articulação manifesta-se, entre outros aspectos, na escolha intencional dos números utilizados, que não são aleatórios, mas selecionados por possuírem divisores exatos na base 60, o que favorece operações como tomar a metade, reter um terço, agregar um quarto ou considerar um sexto sem a produção de frações complexas. Valores como 30, 20, 15 e 10 constituem submúltiplos exatos de 60, viabilizando decomposições e recomposições operatórias simples e precisas. Dessa forma, os procedimentos algébrico-geométricos babilônicos revelam-se intrinsecamente ajustados à lógica do sistema sexagesimal, assegurando regularidade, fluidez operatória e consistência interna às transformações realizadas.

Como observamos no problema #1, da placa BM 13901, não foram registrados simbolismos, fórmulas e justificativas para o procedimento indicado, porém, de acordo com Roque (2012), o tratamento utilizado para resolver situações que hoje compreenderíamos como equação polinomial do segundo grau era feito explicitando a técnica de se encontrar as raízes pelo método de completar quadrados.

Vale salientar que embora os mesopotâmios usassem procedimentos geométricos de cortar e colar para resolver problemas aritméticos seria precipitado concluir que, em lugar de uma álgebra, estes povos tivessem uma geometria. Para Roque (2012), é preciso ter cuidado ao aplicarmos as definições disciplinares que usamos hoje para caracterizar a matemática antiga, pois, embora o problema do exemplo possa, na atualidade ser solucionado por meio de equação polinomial de segundo grau, esta associação exige o uso de símbolos que não faziam parte da matemática desenvolvida no período em questão.

Logo, não haveria sentido em falar de algo próximo do que concebemos como “equação” se as quantidades desconhecidas não eram representadas por letras, mas designavam comprimentos, larguras e áreas dadas por números.

Se definíssemos álgebra como um conjunto de procedimentos que devem ser aplicados a entidades matemáticas abstratas, poderíamos até concluir que os babilônios realizavam uma álgebra de comprimentos, larguras e áreas. Mas nesse caso, deveríamos ter o cuidado de definir a álgebra dos babilônios de um

modo particular, e não por extensão do nosso conceito moderno de álgebra (Roque, 2012, p.71-72).

Assim como as civilizações babilônicas, os egípcios também efetuavam problemas de cálculo sobre coisas que podem ser medidas (grandezas), no entanto, para encontrar o valor desconhecido (a incógnita), utilizavam a palavra “aha”, traduzida como “número” ou “quantidade”, para representá-lo.

Os problemas de “aha” podiam ser resolvidos pela técnica que, atualmente, chamamos de falsa posição, ou seja, procedimento que se baseia em “chute” inicial que será corrigido ao longo do processo, por meio de ajustes que permitem obter o resultado real. A seguir, apresentamos um problema contido no papiro de Ahmes, considerando o método de falsa posição como um procedimento de resolução:

Problema 25: Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?

Solução: Admitimos que a quantidade é 2 (damos um “chute” inicial).

	\1	2
	\½	1
Total:	\1½	3

Obtemos, nessa primeira etapa, que 2 somado com sua metade dá 3. Mas queremos, na verdade, um número que, somado com sua metade, dê 16. Logo, podemos procurar o número pelo qual 3 deve ser multiplicado para dar 16, e este será o número pelo qual 2 deve ser multiplicado para obtermos o número procurado. Assim, tanto o “chute” inicial quanto o resultado errado, obtido por meio dele, são usados para se chegar à resposta certa.

	\1	3
	2	6
	\4	12
	\ 1/3	1
Total :	\ 5 1/3	16

O número pelo qual 3 deve ser multiplicado para dar 16 é $5\frac{1}{3}$. Em seguida, multiplico este número por 2:

	\1	$5\frac{1}{3}$
	\2	$10\frac{2}{3}$

Total:

A quantidade procurada é $10\frac{2}{3}$ (pois este número somado com sua metade dá 16) (Roque, 2012, p.80-81).

Ao analisarmos o procedimento de resolução do problema 25, do papiro Ahmes pelo método de falsa-posição, notamos que o chute inicial para a solução do problema foi 2, resultando em 3, após a soma de sua metade 1 ($2 + 1 = 3$). Na etapa seguinte, investiga-se por qual número deve-se multiplicar 3 para obter 16, que é $\frac{16}{3}$. Então, multiplica-se a falsa solução $\frac{2}{3}$ por esse número para se obter a solução verdadeira: $2 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$.

Radford (2011 *apud* Romeiro, 2023) explicita que esse método de resolução de problemas envolvendo a “falsa posição” é baseado

[...] na ideia de que se pode supor alguns valores falsos para as quantidades buscadas e, então, ajustá-las através de um “fator de ajuste proporcional”, que permite modificar - de um modo proporcional - os valores falsos, a fim de transformá-los em valores verdadeiros (Radford, 2011, p. 120 *apud* Romeiro, 2023, p.63).

A matemática desenvolvida pelos egípcios era baseada em métodos empíricos de tentativa e erro ou de falsa posição, como denominamos, para solucionar os problemas de “aha”. Porém, nem todos os problemas em que se buscava a quantidade desconhecida eram resolvidos por essa técnica. Segundo Roque (2012, p.82), no papiro Ahmes “[...] há diferentes grupos de problemas, cada um com uma estratégia específica de solução”.

Pelo exposto, nota-se que egípcios e babilônios, mesmo sem ter um sistema simbólico ou de abreviações para representar cálculos em geral, desenvolveram estruturas eficientes de cálculos que aparecem continuamente na resolução de problemas. Como fica evidenciado, os princípios da atividade humana, como preconizado por Leontiev (2017), estão presentes nas construções matemáticas criadas por esses povos.

2.1.2 A *Aritmética* de Diofanto

Apesar das significativas contribuições dos babilônicos e egípcios, diferentes necessidades humanas continuaram impelindo outros povos a encontrar novas soluções, buscando por generalização para a identificação de quantidades desconhecidas, ou seja, exigia-se a busca por formas de generalização.

Nesse sentido, a perspectiva da matemática, considera que, em decorrência da impossibilidade de resolução de alguns problemas pelas estratégias desenvolvidas por esses povos, outras soluções foram empreendidas, por exemplo, a utilização de notação simbólica como praticidade e universalização. Há registros de que a primeira ocorrência de notação simbólica remonta ao livro “*Aritmética*”, escrito em grego por Diofanto⁴. À variedade de problemas que integravam a tradição matemática da época, foram introduzidos símbolos para representar os diversos tipos de quantidade que apareciam nos problemas. Esses símbolos foram chamados por Diofanto de “designações abreviadas”.

⁴ “Acredita-se que esse autor tenha vivido no século III E.C., ainda que tal data seja contestada. Além disso, embora se tenha notícia de que Diofanto viveu em Alexandria, não se pode assegurar que fosse grego, apesar de seu texto ser escrito nessa língua” (Roque, 2012, p.231). “Na visão de alguns historiadores, o fato de se assumir uma representação para quantidades desconhecidas constitui um passo importante” [...] para “[...] considerar Diofanto o ‘pai da álgebra’, uma vez que tal representação seria a principal característica de um pensamento algébrico” (Roque, 2012, p.233-234).

O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego.
 ς (última letra da palavra *arithmos*, a quantidade desconhecida)
 ΔY (primeira letra de *dynamis*, o quadrado da quantidade desconhecida)
 KY (primeira letra de *kybos*, o cubo) $\Delta Y \Delta$ (o quadrado-quadrado) [quarta potência]
 ΔKY (o quadrado-cubo) [quinta potência]
 KYK (o cubo-cubo) [sexta potência] (Roque, 2012, p.232)

Considerado importante representante da matemática grega, Diofanto foi responsável por incluir maior complexidade à álgebra babilônica retórica ao inserir abreviações na resolução de equações, ou seja, “[...] um modo sincopado de representar a solução de seus problemas” (Domingues, 2000 *apud* Romeiro, 2023, p.63). O matemático utilizava símbolos para abreviar a escrita, porém, não realizava operações com símbolos. Ele teria introduzido “[...] uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como ‘*arithmos*’”, que significa

[...] uma quantidade indeterminada de unidades diferente dos números, que são formados de uma certa quantidade, determinada, de unidades. No entanto, ambos são sujeitos ao mesmo tipo de tratamento. Por exemplo, assim como operamos com números, obtendo um terço ou um quarto, podemos obter as partes dos *arithmoi*. A natureza das quantidades desconhecidas e as operações que podemos realizar com elas se baseiam nas propriedades dos números. Ou seja, na resolução de um problema as quantidades conhecidas e desconhecidas têm o mesmo estatuto. Somente por essa razão será possível introduzir um símbolo para uma quantidade desconhecida (Roque, 2012, p. 233).

Ao compreender os *arithmos* como uma “multitude indeterminada de unidades” (Radford, 2011, p.128 *apud* Romeiro, 2023, p.63), Diofanto ampliou a possibilidade de resolução de problemas, que justifica a menção de “pai da álgebra” feita a Diofanto por historiadores da matemática eram concentrados no que, atualmente, denomina-se equações de primeiro ou segundo grau, para possibilidades de resolução de equações de maior grau. “[...] essa compreensão foi um poderoso meio de resolução de problemas” (Radford, 2011 *apud* Romeiro, 2023, p. 63).

Na visão de alguns historiadores, o fato de se assumir uma representação para quantidades desconhecidas constitui importante passo em direção à abstração. Por isso, neste momento, Diofanto foi considerado o “pai da álgebra”, uma vez, que neste período tal representação seria a principal característica de um pensamento algébrico.

Nesse sentido, a perspectiva da matemática tradicional compreende que, diante das limitações das técnicas até então desenvolvidas, tornou-se necessário criar novos modos de tratar os problemas matemáticos. Assim, emergiram soluções que ultrapassavam o cálculo aritmético direto, como o uso de símbolos para representar quantidades desconhecidas. Há

registros de que uma das primeiras ocorrências sistematizadas desse tipo de notação encontra-se na obra *Aritmética*, escrita por Diofanto de Alexandria. Nela, o autor introduz símbolos específicos para representar diferentes tipos de quantidades envolvidas nos problemas, buscando tornar os procedimentos mais gerais e eficientes.

Esses símbolos, denominados por Diofanto como “designações abreviadas”, possibilitaram a representação de relações matemáticas de forma mais abstrata, favorecendo a generalização dos métodos de resolução. Tal avanço marcou um passo fundamental na transição de uma matemática predominantemente empírica para uma matemática de caráter mais teórico, contribuindo decisivamente para a constituição do pensamento algébrico como um campo específico do conhecimento matemático.

Em contrapartida ao que pressupõe historiadores da matemática tradicional, Roque (2012), afirma que no texto de Diofanto as quantidades desconhecidas são abreviadas, e não simbolizadas. Segundo a pesquisadora,

Símbolos não são somente abreviações ou notações empregadas para facilitar a prática de procedimentos de cálculo e resolução de problemas; o simbolismo algébrico é um tipo de representação que conduz a abstrações que não estava presentes na *Aritmética de Diofanto*. Para caracterizar o pensamento algébrico não basta associá-lo ao uso de símbolos, e menos ainda o uso de abreviações (Roque, 2012, p.232).

Nota-se que, embora Diofanto forneça enorme variedade de abreviações para a resolução de problemas, em que para cada um, há uma técnica de solução que é descrita usando-se valores numéricos, as soluções propostas por ele são descritas de modo discursivo e tal descrição é abreviada com o uso de símbolos, que ajudam o matemático a se distanciar do contexto numérico.

Embora Diofanto tenha importantes contribuições à história da matemática, ocupando lugar intermediário entre Euclides e os renascentistas europeus, diversos traços de sua matemática foram analisados a partir do ponto de vista da álgebra atual.

Tais técnicas, simbolismos e generalizações foram tão relevantes para a história dessa ciência que ainda hoje são instrumentos importantes para resolução de problemas matemáticos. Ocorre, entretanto, que o desconhecimento quanto aos aspectos de constituição histórica desse pensamento, por ora, reduzem seu ensino a simples aplicação de técnicas e símbolos.

2.1.3 A álgebra de Al-Khwarizmi

Ao se apropriar das obras gregas, o árabe Al-Khwarizmi iniciou estudo sistemático sobre os métodos para classificar e resolver equações, que levou ao desenvolvimento da álgebra, cujo significado tem origem na palavra *al-jabr*, contida em seu livro **Tratado sobre o cálculo de restauração e equilíbrio**, considerado um dos mais importantes durante a Idade Média.

Segundo Roque (2012, p.249),

A palavra *al-jabr*, ou “álgebra”, em árabe, era utilizada para designar “restauração”, uma das operações usadas na resolução de equações. Já a *al-muqabala* queria dizer algo como “balanceamento”. Trata-se, de fato, de duas etapas do método para resolver equações.

Al-Khwarizmi não empregava nenhum simbolismo em seus cálculos, ao contrário de Diofanto, sua linguagem era exclusivamente retórica. Além disso, havia um vocabulário específico para designar os objetos que surgiam nos problemas, principalmente para os três modos sob os quais o número aparecia: a raiz, o quadrado e o número simples. A palavra *mal* exprimia o quadrado da quantidade desconhecida. Na linguagem corrente, “[...] esse termo significava ‘possessão’, ou ‘tesouro’, mas, como os outros, era usado por Al-Khwarizmi com um sentido técnico, no contexto da resolução de equações. Não se tratava tampouco do quadrado geométrico, designado pela palavra *murabba’a*” (Roque, 2012, p.250):

Al-Khwarizmi (*apud* Roque, 2012, p.250, grifo da autora) explicita que:

*A raiz é qualquer coisa que será multiplicada por ela mesma ...
O quadrado é o que obtemos quando multiplicamos a raiz por ela mesma.
O número simples é um número que expressamos sem que esteja relacionado nem a uma raiz, nem a um quadrado.*

De acordo com o pensamento do matemático, a “raiz” é o termo designado pela palavra *Jidhr* e chamada de “coisa” (*shay*). As duas palavras eram usadas para representar o que hoje, chamamos de “incógnita”. O emprego do termo “raiz” para expressar a quantidade desconhecida está relacionado ao fato de que o quadrado dessa quantidade era também uma incógnita, com nomenclatura própria (*Mal*). Já o *Adad* era um número dado qualquer, ou seja, a quantidade conhecida (Roque, 2012), conforme sintetizado em tabela abaixo:

Tabela 1 – Palavra, significado na língua corrente, sentido nos problemas e notação moderna

Palavra	Significado na língua corrente	Sentido nos problemas	Notação Moderna
Adad	Número ou quantidade de dinheiro	Quantidade conhecida (número dado)	C

Jidhr	Raiz	Quantidade desconhecida	X
Mal	Possessão ou tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida	Y

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo exposto, nota-se a significativa contribuição dos árabes para o avanço do cálculo algébrico. Eles iniciaram suas teorias por meio de equações aritméticas, transpondo cálculos aritméticos para cálculos por meio de representações equivalentes.

Seguindo o desenvolvimento de aspectos históricos da álgebra, na Renascença, com a expansão comercial e a complexidade de situações envolvendo os acordos comerciais, o movimento de transformação na forma de expressar um problema algébrico tem relação com a questão de valor e eficiência, em que “[...] os cálculos precisavam ser cada vez mais ágeis, lidando com valores muito grandes ou muito pequenos” (Radford, 2011 *apud* Romeiro, 2023, p.64). Para isso, foi fundamental pensar em formas de representação que pudessem propor entendimento mais geral dos problemas existentes. Tal realidade gerou novas necessidades que, por sua vez, geraram novas formas de pensar os problemas matemáticos.

2.1.4 A ideia moderna e simbólica de álgebra, a partir de François Viète

A simbologia algébrica que conhecemos hoje nasce no momento de efervescência das ciências moderna com as ideias de importantes matemáticos dentre eles o francês François Viète que, no século XVI, utilizou símbolos para referenciar valores desconhecidos. O matemático, que viveu entre os anos 1540 e 1603, introduziu uma representação padrão: as incógnitas seriam representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas.

Roque (2012) explicita que há uma diferença fundamental entre uma “incógnita” e um “coeficiente”, pois “[...] A incógnita é uma quantidade desconhecida que se tornará conhecida a partir das restrições representadas pela equação; já o coeficiente é uma quantidade conhecida genérica que está indeterminada na expressão de uma equação qualquer” (Roque, 2012, p.276). Para ela, ambos os casos pressupõem indeterminações, porém, em níveis distintos. A determinação dos coeficientes é obtida pela escolha de uma equação particular (arbitrária); e a determinação do valor da incógnita, pela resolução (não arbitrária) dessa equação.

A notação introduzida por Viète foi, portanto, uma generalização dos métodos algébricos. Podendo trabalhar no universo das equações, usando coeficientes, passou a ser possível classificar as equações e encarar os exemplos particulares como “casos”. Enunciando uma fórmula geral, a resolução dos casos particulares se reduziria a uma aplicação mecânica do procedimento.

Considerando que a classificação de equações e o enunciado de fórmulas gerais não eram uma questão na época, pois a álgebra não se constituía como disciplina e os métodos algébricos eram usados para resolver grande variedade de problemas, para Viète era necessário mudar a *logística numerosa* (argumentos a partir de números) para a *logística speciosa* (operar com quantidades quaisquer). A partir dessa forma de expressão das ideias algébricas, a álgebra se constituiu em um campo mais formal da matemática.

O desafio da época de Viète era encontrar um método para a resolução de equações de grau n , ou seja, equações de qualquer grau. Viète disse que para equações de grau n se tem n soluções ou raízes. Mas, foi Girard, em 1629, o primeiro que afirmou a “descoberta” de Viète e publicou sua teoria conhecida como Teorema Fundamental da Álgebra em seu livro *Invention nouvelle en l'Algèbre*, porém, seu teorema foi refutado por matemáticos como Euler, Leibniz e Lagrange até se chegar aos teoremas considerados aceitáveis para resolução desse tipo de equação como Argand e Gauss (Romeiro, 2023, p.64-65).

Moretti, Virgens e Romeiro (2021) explicitam que junto ao movimento de produção de teoremas para resolução de equações, foram desenvolvidos novos estudos e funções mais complexas foram fazendo parte dos estudos matemáticos. Estudo de conceitos mais abstratos deram início ao movimento da “Álgebra Moderna”, que passou a abranger saberes que superariam a mera representação de equações e seus métodos de resolução.

Até aqui, vimos que o percurso histórico de formação do que na atualidade denomina-se de álgebra está relacionado ao movimento histórico-cultural das civilizações decorrente das necessidades humanas postas a elas, a partir das relações sociais estabelecidas. Não por acaso, quanto mais complexas passaram a ser as relações de troca comerciais mais complexas passaram a ser a busca por representações algébricas. Portanto, a maneira de manifestar a produção ou a resolução de problemas de natureza algébrica, estavam ligadas ao contexto cultural de suas épocas, que foram se transformando a partir de novas necessidades. Assim, conforme descrito por Radford (2011, p.140 *apud* Romeiro, 2023, p.65):

É importante salientar o fato de que é completamente equivocado colocar o problema do desenvolvimento do raciocínio algébrico em termos de um empreendimento epistemológico transcultural cuja meta fosse desenvolver uma linguagem simbólica abstrata e elaborada. Certamente, linguagem e símbolos desempenham um importante papel no modo como transmitimos experiências científicas. Contudo, seus usos são sustentados em práticas

socioculturais que vão além do escopo do domínio da Matemática. Uma abordagem mais adequada no estudo das relações entre símbolos e linguagem, por um lado, e o desenvolvimento do pensamento algébrico, de outro, seria analisar a linguagem e o simbolismo em seus próprios contextos semióticos históricos e culturais.

Isso posto, depreendemos que o desenvolvimento do pensamento algébrico não deve ser entendido apenas sob perspectiva epistemológica transcultural, isto é, como elaboração de conhecimento desvinculada da cultura, da história e das práticas sociais que dão sentido aos símbolos matemáticos.

Compreender o pensamento algébrico requer investigar como os símbolos e expressões algébricas ganham sentido dentro de contextos específicos de produção e uso, e não apenas como instrumentos formais de representação. Sob essa perspectiva, o pensamento algébrico deve ser analisado em termos semióticos, históricos e culturais. O estudo de sua gênese implica reconhecer que os signos matemáticos (como as letras, operadores e expressões algébricas) emergem de necessidades concretas de comunicação, generalização e abstração em contextos humanos específicos.

Neste contexto como destaca Radford (2021), o pensamento algébrico pode ser compreendido como processo de objetivação cultural, no qual os símbolos matemáticos não são apenas ferramentas cognitivas, mas meios de mediação cultural que modelam a própria forma de pensar. Em perspectiva histórico-cultural, podemos compreendê-lo como forma de atividade intelectual mediada culturalmente em que os sujeitos generalizam e teorizam relações (de quantidade, medida, dependência, variação) por meio de meios semióticos (fala, gestos, gráficos, tabelas, letras, equações, artefatos) dentro de práticas sociais concretas. Saber usar linguagem algébrica não é, portanto, “saber usar letras”, mas produzir significados para relações e invariantes ao resolver problemas historicamente situados.

Como argumenta Radford (2021), pensamento algébrico é uma forma de atividade semiótica situada, enraizada em práticas e significados compartilhados, que decorrem de necessidades sócio-históricas de diferentes civilizações, na qual o sujeito não apenas acumula conhecimento, mas o transforma e ressignifica, a partir das relações sociais e culturais que estabelece.

Como visto, neste texto, a trajetória histórica da Álgebra revela sua natureza como um saber construído coletivamente por diversas culturas e civilizações ao longo do tempo. Desde as resoluções retóricas de problemas pelos babilônios e egípcios, passando pela sistematização aritmética de Diofanto, até os avanços conceituais e metodológicos promovidos por Al-Khwarizmi e, posteriormente, pela introdução da linguagem simbólica por François Viète,

observa-se mudanças na forma de representar e manipular relações matemáticas. Essa progressiva abstração e generalização dos procedimentos matemáticos não apenas ampliou o alcance da Álgebra, como também consolidou o pensamento algébrico como uma forma particular de raciocínio matemático.

Um dos grandes desafios da humanidade é possibilitar a apropriação dessa gama de conhecimento historicamente elaborado pelas novas gerações. Esse desafio precisa ser enfrentado pelo campo da Educação, sobretudo a formal, que, em nossa sociedade ocorre em instituições de ensino, cuja função social é potencializar tal apropriação.

2.2 O pensamento algébrico como forma particular de pensar

Para emergir entre os estudantes, o pensamento de modo geral, precisa de um meio para se desenvolver. Nesse sentido, a escola possui papel relevante para desenvolver junto aos estudantes capacidades genuinamente humanas, que transcendam o sentido utilitário e pragmático da educação formal voltada à memorização de regras e reprodução mecânica de conceitos e técnicas.

Nesse contexto e a partir do conhecimento depreendido de que a álgebra resulta de saber humano construído a partir da necessidade de controlar quantidades desconhecidas, nos dedicamos nos parágrafos a seguir, a compreender o pensamento algébrico.

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2016) ao analisarem diferentes estudos sobre a temática revelam que não há consenso na literatura sobre o que se define por pensamento algébrico, mas sim, uma “[...]diversidade de visões na comunidade de educadores matemáticos, no que se refere ao que se entende por pensamento algébrico – também denominado ‘pensar algebricamente’” (Ferreira; Ribeiro; Ribeiro, 2016, p. 40).

Blanton e Kaput (2005, p. 413 *apud* Ferreira; Ribeiro; Ribeiro, p.40), ao pesquisarem como se desenvolve o pensamento algébrico de alunos norte-americanos de etapa de ensino que equivale no Brasil aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o definem como “[...]processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade”.

Semelhante a essa forma de conceitualização, Cyrino e Oliveira (2011, p.103 *apud* Nacarato; Custódio, 2018, p.15) definem o pensamento algébrico como “[...]modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação e à resolução de problemas no contexto de generalização destes objetos”.

Aprofundando as perspectivas apresentadas, destacamos as considerações de Radford⁵ (2021) sobre o surgimento ou emergência de formas de pensamento algébrico em idades iniciais, a partir do desenvolvimento de processos de generalização.

Segundo o autor, a generalização de padrões é considerada uma das formas mais importantes de introdução da álgebra nas escolas, uma vez que, entre outros aspectos, “[...] permite aos alunos aproximar-se de situações de variação que são uma parte substancial do desenvolvimento do pensamento algébrico” (Vergel, 2021, p.83).

Embora o pensamento possa ser desenvolvido por cada um de nós de modo singular, notamos que este inclui os elementos culturais, as diferentes formas de linguagem, os processos históricos, os signos e artefatos que foram moldados ao longo dos anos pela sociedade.

Chamamos signos aos estímulos-meios artificiais introduzidos pelo homem na situação psicológica, que cumprem a função de autoestimulação [...]. De acordo com nossa definição, todo estímulo condicional criado pelo homem artificialmente e que se utiliza como meio para dominar a conduta – própria ou alheia – é um signo (Vygotski, 2000, p.83, tradução nossa⁶).

Além de meio de auxiliar na organização de nosso comportamento, os signos também podem ser considerados como ferramentas que nos permitem planejar ações, enquanto os artefatos condizem com a capacidade em potencial de fazer alguma coisa, podendo ser natural ou adquirida, ou seja, estão envolvidos nas frequentes transformações a partir do contexto social.

Neste contexto, o pensamento algébrico se torna mais específico, pois corresponde à “[...] forma particular de pensar matematicamente” (Vergel, 2021, p.81). Nota-se que o pensamento algébrico trata-se de sistema de processos de ação e reflexão encarnados, constituídos histórica e culturalmente, ou seja, daquilo que é essencial para o seu desenvolvimento como a generalização de padrões e regularidades; o controle de quantidades e relações; a manipulação simbólica; a descoberta de incógnitas; a formulação de modelos e abstração que consideramos os nexos conceituais do pensamento algébrico.

⁵ Luis Radford é professor titular na Laurentian University, Ontário, Canadá, na qual leciona desde 1992 no programa de formação de professores da École des Sciences de l'Éducation e coordena o Laboratório de Pesquisa em Semiótica Cultural e Pensamento Matemático. Seus interesses de pesquisa incluem o desenvolvimento do pensamento algébrico, a relação entre cultura e pensamento, epistemologia e ontologia da matemática e da semiótica (Moretti, Panossian; Radford, 2018, p.231).

⁶ *Llamamos signos a los estímulos-medios artificiales introducidos por el hombre en la situación psicológica, que cumplen la función de autoestimulación [...]. De acuerdo con nuestra definición, todo estímulo condicional creado por el hombre artificialmente y que se utiliza como medio para dominar la conducta – propia o ajena – es un signo* (Vygotski, 2000, p.83)

Radford (2021) estabelece uma descrição em torno do pensamento considerando alguns aspectos da perspectiva histórico-cultural e do materialismo dialético destacando o saber, o conhecimento e a aprendizagem. Segundo o autor, o saber “[...] *é um sistema de arquétipos de pensamento, ação e reflexão constituído histórica e culturalmente a partir de um labor coletivo material, corporificado e sensível*” (Radford, 2021, p.66, grifo do autor), ou seja, o saber faz parte da perspectiva histórico-cultural de modo a nos fazer refletir.

O conhecimento, nessa perspectiva, é visto como materialização, atualização ou incorporação do saber. “Trata-se do *conteúdo conceitual concreto* através do qual o saber se incorpora, se materializa ou se atualiza” (Radford, 2021, p.41, grifo do autor). Este processo, sempre deve ser observado como algo fluido e possível de adaptações, como explica o autor.

Como forma particular de pensar sobre situações que envolvam relações entre grandezas, variações, generalização de padrões, cálculos com valores desconhecidos, enfim, situações “[...] que podem ser tratadas analiticamente a partir de saberes que constituem esse campo da matemática e que, ao serem encontrados, são objetivados na consciência dos estudantes como conhecimento (Romeiro; Moretti, 2021, p.110), depreendemos que o pensamento algébrico é tão relevante ao desenvolvimento da consciência humana quanto outras formas de pensar.

Os aspectos destacados nesta seção, evidenciam o longo percurso da humanidade no desenvolvimento de um tipo específico de pensamento, o algébrico. Como construção histórica e social, esse objeto de análise toma contornos específicos para cada grupo de pesquisadores. Assim, cabe explicitar que, pensamento algébrico é utilizado neste texto como forma particular de pensamento que demanda linguagem; pensamento; formação de conceito; generalização; abstração; e desenvolvimento psíquico.

Isso posto, na próxima seção, será analisado o que se produziu no Brasil sobre o ensino desse pensamento para os estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

3 APRESENTAÇÃO DA PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA E DOCUMENTAL BRASILEIRA SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

“[...] método é um caminho, um procedimento. Por ser um procedimento, consequentemente, depende do objetivo para o qual a ciência se orienta num determinado campo” (Vigotski, 2018, p.37).

Vigotski (2018) explicita que método é “[...] **o modo de investigação ou de estudo de uma parte definida da realidade**” (p.37, grifo do autor). Compreendemos o modo de investigação como procedimento, caminho, modo de fazer a pesquisa. Como explicitado na epígrafe, o método é definido pelo objetivo para o qual a ciência se orienta, por isso, toda ciência, tendo seu objetivo específico de estudo, deve ter também o seu método ou caminho de investigação. Esse caminho é definido pelas especificidades do objeto (no caso em questão, desenvolvimento do pensamento algébrico) que é estudado por uma determinada ciência (Matemática).

É fundamental, que ao investigarmos as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao adequado ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico de crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os procedimentos que orientaram a pesquisa cujos resultados são apresentados neste texto sejam definidos e, com isso, os objetivos que buscamos atingir.

Ao explicitarmos o problema e iniciarmos busca por resolvê-lo, é natural que busquemos, primeiramente, localizar a produção bibliográfica já produzida a seu respeito. Assim, com o intuito de identificar as produções brasileiras realizadas no campo da Matemática sobre a temática em análise, tornou-se necessário empreender revisão bibliográfica, cujos resultados apresentamos a seguir.

De acordo com Severino (2017, p.93), a revisão bibliográfica

[...] é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrentes de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos.

Apresentamos a seguir, dados de pesquisa sobre a produção bibliográfica brasileira relativas ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, localizada e selecionada em bases de dados nacionais.

3.1 Produção bibliográfica: procedimentos de localização, critérios de inclusão e exclusão e seleção dos dados de pesquisa

Para levantarmos a produção bibliográfica e documental brasileira sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, realizamos buscas em bases de dados nacionais, que foram eleitas pela visibilidade científica e quantidade expressiva de textos nelas indexados. Tais bases de dados foram: Catálogo de Teses e Dissertações, Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior da Capes, Catálogo Athenas – Unesp, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e *Scientific Eletronic Library Online* (SciELO – BR).

Os *links* que dão acesso aos endereços eletrônicos de cada uma delas são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 – Base de dados da pesquisa e endereço eletrônico (*link*)

Base de Dados	Endereço Eletrônico
Athena – Unesp	https://unesp.primo.exlibrisgroup.com/discovery/search?vid=55UNESP_INST:UNESP
Biblioteca digital brasileira de teses e dissertações	https://bdtd.ibict.br/vufind/
Catálogo de teses e dissertações Capes	https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
Portal de periódicos da Capes/ MEC	https://www.periodicos.capes.gov.br/
SciELO-BR	https://www.scielo.br/

Fonte: Dados da pesquisa.

A delimitação do marco temporal compreende os anos de 1997 a 2024 e são justificadas pelos seguintes motivos: 1997, ano de publicação dos **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN** (Brasil, 2001)⁷, nos quais é indicado que desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, já se pode desenvolver a pré-álgebra⁸; e 2024, por ter sido o ano de início da pesquisa de mestrado.

Para a coleta de dados buscamos por palavras-chave que compreendessem o escopo de dissertações, teses e artigos científicos que tratassem do tema investigado. Como muitos textos foram recorrentes nas bases consultadas, após a busca pelas palavras-chave determinadas, foram excluídas as bases com textos recorrentes. Assim, a quantidade de bases e textos localizados e selecionados para análise são apresentadas no quadro abaixo.

⁷ Nesta dissertação utilizamos como referência a 3ª edição dos **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN) (Brasil, 2001) publicada no ano de 2001).

⁸ Nos PCN (Brasil, 2001) a pré-álgebra é entendida como a preparação para o ensino da álgebra.

Quadro 2 – Relação de bases de dados, palavras-chave, quantidade de textos localizados e selecionados para leitura e análise

Base de dados	Palavras-chave	Quantidade de textos localizados	Quantidade de textos selecionados para análise
Portal de periódicos da Capes (MEC)	“álgebra nos anos iniciais”	20	5
	“pensamento algébrico”	60	
Catálogo de teses e dissertações Capes	“pensamento algébrico nos anos iniciais”	44	4
	“álgebra” AND “teoria histórico-cultural”	28	
Total		152	9

Fonte: Dados da pesquisa.

Com base nos dados apresentados no Quadro 2, ressaltamos que, dentre as buscas realizadas nas bases nacionais, 152 textos foram localizados, aos quais empreendemos procedimentos de leitura prévia e exploratória de títulos, resumos e sumários. Conforme indica Salvador (1986, p.96-97, grifo do autor), tais procedimentos caracterizam-se como:

1.1.1 – Leitura de reconhecimento ou prévia

É uma leitura rápida, *por alto*, um primeiro contato com o livro ou revista. Fazemos leitura de reconhecimento quando percorremos as páginas de um livro, damos uma *olhadela* nos títulos dos capítulos, índices, sumários, procurando um assunto de nosso interesse.

1.1.2 – Leitura exploratória ou pré-leitura:

[...] visa, pois, a dar uma visão superficial das reais possibilidades da referência. [...] examinado a folha de rosto, os índices, a bibliografia e as citações [...].

Assim, após procedimento de “leitura seletiva”, na qual foi “[...] descoberto o material que poderá ser útil, procedemos à sua seleção, isto é, eliminamos o disponível e fixamo-nos nas informações verdadeiramente pertinentes ao problema focalizado” (Salvador, 1986, p.98), chegamos ao total de nove textos publicizados em cinco artigos e quatro dissertações, que foram selecionados com base em critérios de inclusão e exclusão, apresentados no quadro 3, a seguir:

Quadro 3 – Critérios de inclusão (CI) e critérios de exclusão (CE) da produção bibliográfica

Critérios de inclusão (CI) de artigos completos publicados em periódicos revisado por pares
(CI.1) publicados entre 1997 e 2024;
(CI.2) que tratam do desenvolvimento da álgebra ou do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental;
(CI.3) que caracterizam o pensamento algébrico e seu desenvolvimento nos Anos Iniciais, a partir de orientações contidas nos documentos oficiais;

(CI.4) que consideram o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a partir de pressupostos da Teoria Histórico-Cultural.
Critérios de exclusão (CE) de artigos completos publicados em periódicos revisado por pares
(CE.1) que se repetem nas bases de dados;
(CE.2) que consideram o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do Ensino Fundamental, Médio e Superior;
(CE.3) que consideram possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes da Educação Especial;
(CE.4) que consideram o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de conhecimentos mobilizados pelo professor.
(CE.5) que consideram a Álgebra a partir de conhecimentos mobilizados em atividades de ensino, voltadas à tecnologia, à Educação Especial e à formação do pensamento algébrico do professor.

Fonte: Dados da pesquisa.

Aplicados os critérios de inclusão e exclusão, nota-se que, dentre os 152 textos localizados, conforme dados apresentados no quadro 2, a busca pela palavra-chave “pensamento algébrico”, resultou em mais pesquisas, no entanto, a maioria se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico vinculado a estudos na área de Educação Especial, Educação Tecnológica, dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Médio, por isso foram excluídos da seleção.

A busca pela palavra-chave “pensamento algébrico nos Anos Iniciais” resultou em textos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, porém, a maioria refere-se a pesquisas vinculadas a grupos de estudos de programas de pós-graduação que se dedicam a estudar os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e aplicá-los em programas de formação de professores que se dedicam a pesquisar os conhecimentos algébricos mobilizados por professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, o que explica sua exclusão da seleção realizada.

Ainda sobre os dados sintetizados no Quadro 2, o resultado de buscas na base de dados do Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), do Ministério da Educação (MEC), evidencia que 80 artigos científicos foram localizados, porém, ao realizarmos a leitura prévia, selecionamos apenas cinco trabalhos que se aproximam da temática investigada e atendem aos critérios de inclusão à análise. Já no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, foram localizados 72 trabalhos. No entanto, deste total, 17 são anteriores à Plataforma Sucupira e não apresentam os respectivos resumos, por isso, realizamos a leitura prévia de 55 trabalhos (10 teses e 45 dissertações), dos quais quatro publicações foram selecionadas conforme as os critérios de inclusão e exclusão estabelecidos.

Sobre os 17 trabalhos, anteriores à Plataforma Sucupira, consultamos os repositórios das instituições nos quais foram depositados, e, após localizarmos os textos, realizamos os procedimentos de leitura indicados por Salvador (1986), porém, nenhum texto foi selecionado para análise por não atenderem aos critérios de inclusão.

Na base de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações localizamos 107 publicações decorrentes da busca pelas palavras-chave “álgebra” AND “anos iniciais” e “pensamento algébrico” AND “teoria histórico-cultural”, no entanto, os três trabalhos identificados por discorrer sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, à luz da Teoria Histórico-Cultural, já haviam sido selecionados na base de dados consultada anteriormente.

Na biblioteca Athena-Unesp, localizamos 13 trabalhos resultante da busca pela palavra-chave “desenvolvimento do pensamento algébrico”, porém, todos foram excluídos por não atenderem aos critérios que justificam a escolha dos textos ou já terem sido selecionados em outra base de dados. No portal virtual de Revistas Científicas Brasileiras em formato eletrônico (SciELO – BR), 12 resultados foram localizados, mas nenhum foi selecionado conforme os critérios de inclusão adotados.

Junto aos textos que atendem aos critérios de inclusão adotados, também selecionamos um livro e um capítulo de livro que foram referenciados no material selecionado das bases de dados pesquisadas e do acervo pessoal dos pesquisadores para composição do *corpus* da pesquisa, indicado no quadro a seguir:

Quadro 4 – Indicação de ano de publicações, fonte de pesquisa, categorias de análise, autores, títulos e local de publicação de pesquisas selecionadas em base de dados

	Ano de publ.	Fonte de pesquisa	Categoria de análise	Autor	Título	Local de publ.
1	2021	Acervo pessoal	Livro	Vanessa Dias Moretti e Luis Radford	Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: diálogos e complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural	Editora LF São Paulo
2	2018	Acervo pessoal	Capítulo de livro	Adair Mendes Nacarato e Iris Aparecida Custódio	O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor	Editora SBEM Brasília

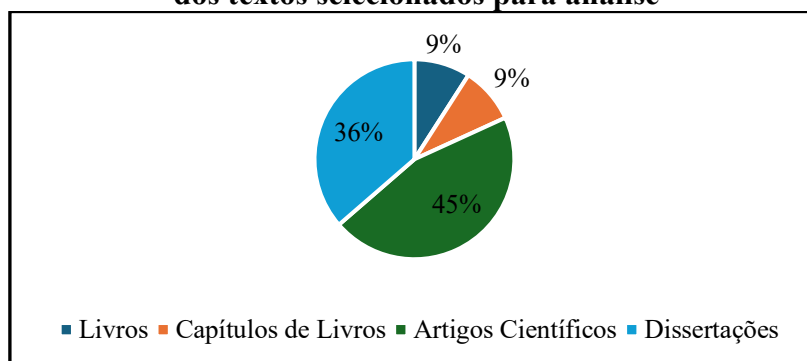
	Ano de publ.	Fonte de pesquisa	Categoria de análise	Autor	Título	Local de publ.
					que Ensina (Ensinará) Matemática	
3	2017	Catálogo de Teses e Dissertações da Capes	Dissertação	Carla Cristiane Silva Santos	O pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: a percepção da regularidade e o pensamento relacional	USF Itatiba
4	2020	Catálogo de Teses e Dissertações da Capes	Dissertação	Eva Lúcia Raquel Teodoro	Introdução do pensamento algébrico nos Anos Iniciais	UNIFESP Diadema
5	2021	Catálogo de Teses e Dissertações da Capes	Dissertação	Raquel Guimarães de Medeiros	Pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um olhar para pesquisas científicas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela BNCC	IFSP São Paulo
6	2022	Catálogo de Teses e Dissertações da Capes	Dissertação	Tchierly Juliani Bier de Oliveira	Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental nos trabalhos acadêmicos produzido no Brasil nas últimas três décadas	UNIOESTE Cascavel
7	2017	Portal de Periódicos da Capes	Artigo científico	Miriam C. Ferreira, Alessandro Jacques Ribeiro e Carlos Miguel Ribeiro	Álgebra nos Anos Iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura	Dourados
8	2018	Portal de Periódicos da Capes	Artigo científico	Flávio Ulhoa Coelho e Márcia Aguiar	A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino	São Paulo
9	2020	Portal de Periódicos da Capes	Artigo científico	Marcela da Silva Caetano Rodrigues e Márcia Maria	Caracterizações do Pensamento Algébrico na Escola Básica	Belo Horizonte

	Ano de publ.	Fonte de pesquisa	Categoria de análise	Autor	Título	Local de publ.
				Fusaro Pinto		
10	2021	Portal de Periódicos da Capes	Artigo científico	Joceli Miranda Silva e Klinger Teodoro Ciriaco	Possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de tarefas nos Anos Iniciais	Revista BOCEHM
11	2023	Portal de Periódicos da Capes	Artigo científico	Tchierly Juliani Bier de Dulcyene Maria Oliveira e Ribeiro	Uma análise de bibliografias sobre o pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Revista RPEM Campo Mourão

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelos dados apresentados no Quadro 3, é possível constatar que das 11 publicações selecionadas para análise, quatro são dissertações, cinco são artigos científicos, uma corresponde a um livro e outra a um capítulo de livro, percentualmente considerados no gráfico abaixo.

Gráfico 1 – Percentual, por categoria de análise, dos textos selecionados para análise



Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando as publicações selecionadas, observamos que a maioria dos artigos e dissertações foram produzidos em programas de pós-graduação em Educação de instituições localizadas da região Sudeste.

Acreditamos que a concentração de pesquisas em instituições da região Sudeste, ocorra, provavelmente, por ser um local onde há maior quantidade de programas de pós-graduação que pesquisam a Educação Matemática. Não localizamos publicações dessas categorias de análise

vinculadas a instituições localizadas em estados da região Norte do país, como é possível verificar, a partir dos dados organizados no Quadro 2.

Ainda sobre os critérios de seleção utilizados no levantamento da produção bibliográfica que constitui o *corpus* de pesquisa, durante os procedimentos de leitura exploratória e seletiva, indicados por Salvador (1986), estabelecemos duas categorias de análise, assim compreendidas:

Categoria 1 (C1): agrupamos os textos que discutem as possibilidades e contribuições de se desenvolver o pensamento algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir de orientações contidas nos documentos oficiais.

Categoria 2 (C2): agrupamos os textos que discutem as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

No Quadro 5, organizamos as produções conforme os critérios de análise determinadas.

Quadro 5 – Relação de produções bibliográficas, tipo de pesquisa, região do país e categorias de análise

Produções bibliográficas	Tipo de pesquisa	Região do país	Categorias de análise	
			C1	C2
Pensamento algébrico nos Anos Iniciais: diálogos e complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural	Livro	Sudeste	X	X
O desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática	Capítulo de livro	Centro-Oeste	X	X
O pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: a percepção da regularidade e o pensamento relacional	Dissertação	Sudeste		X
Introdução do pensamento algébrico nos Anos Iniciais	Dissertação	Sudeste	X	
Pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um olhar para pesquisas científicas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela BNCC	Dissertação	Sudeste	X	
Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental nos trabalhos acadêmicos produzido no Brasil nas últimas três décadas	Artigo científico	Sul	X	
Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura	Artigo científico	Centro-Oeste	X	
A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino	Artigo científico	Sudeste	X	X

Caracterizações do Pensamento Algébrico na Escola Básica	Artigo científico	Sudeste	X	
Possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de tarefas nos Anos Iniciais	Artigo científico	Nordeste		X

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelos dados apresentados no quadro acima, observamos poucas produções bibliográficas vinculadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural, principalmente em relação aos textos que são publicizados em artigos, teses e dissertações.

Nota-se que de todo o material localizado e selecionado para análise, não localizamos nenhuma tese de doutorado vinculada à temática da pesquisa. Apenas a dissertação intitulada **O pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: a percepção da regularidade e o pensamento relacional, de Santos (2017) e o artigo “Possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de tarefas nos Anos Iniciais”, de Silva e Ciriaco (2021) contemplam as intenções de pesquisa, ou seja, tratam do desenvolvimento do pensamento algébrico a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural, por isso, apenas essas serão explicitadas a seguir.

Ao relacionar o problema para o qual se busca resposta nesta dissertação de mestrado com as intenções de pesquisa de Santos (2017), concordamos que desde a educação infantil e na educação informal é possível desenvolver o pensamento algébrico. Apoiada nos pressupostos vigotskianos, Santos (2017) explicita que, à medida que a circulação de sentidos se viabiliza na discussão, no confronto de ideias e de argumentação para a construção coletiva de generalizações, a socialização de ideias torna-se possibilidade de circulação dos sentidos.

A partir de análises de tarefas realizadas pelos alunos ao longo de suas experiências de investigação, essa pesquisadora constatou que, à medida que avançavam nas estratégias para resolver as situações propostas, os estudantes desenvolvem capacidade de generalizar e, consequentemente, de perceber regularidades e relacionar as ideias e os termos matemáticos, promovendo a elaboração do pensamento algébrico.

Segundo Santos (2017), desde que sejam inseridas em ambientes investigativos e colocadas a resolver situações de aprendizagem potencializadoras, crianças pequenas são capazes de generalizar padrões, formular hipóteses e argumentar matematicamente. Para a pesquisadora, a organização do ambiente de aprendizagem, os tipos de situações propostas e a condução destas pela professora são aspectos importantes para o processo de generalização das crianças.

Assim como Santos (2017), Silva e Ciríaco (2021) depreendem que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde os primeiros anos escolares. A partir de investigação de mestrado vinculada ao PPGE Edumat/EFMS, os autores descrevem e analisam tarefas matemáticas que envolvem ideias algébricas para turmas de 1º, 2º e 3º anos, contexto basilar para a formação do pensamento matemático de crianças focando nas regularidades, padrões e generalizações, elementos centrais para o pensamento algébrico.

Após a análise da pesquisa bibliográfica realizada junto às bases de dados, passamos a apresentar e analisar o material documental referente ao ensino da álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental publicado entre 1997 (ano de publicação dos **Parâmetros Curriculares Nacionais**) e 2019 (ano de publicação do **Currículo Paulista**).

3.2 Produção documental: apresentação e análise dos documentos oficiais nacionais e paulista

A fim de conhecer o que é indicado nos documentos que orientam os currículos escolares sobre o ensino da álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, analisamos nos tópicos a seguir, três documentos oficiais brasileiro. O primeiro são os **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN) (Brasil, 2001), que são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal, em 1997, com a finalidade de orientar os educadores a respeito dos elementos considerados relevantes para cada um dos componentes curriculares integrantes da Educação Básica. Embora tenha sido elaborado há quase trinta anos, ainda representam relevantes orientações à prática docente.

O segundo documento, intitulado **Elementos conceituais e metodológicos para a definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização do Ensino Fundamental** (Brasil, 2012), orientou práticas escolares específicas para crianças na faixa etária de 6 a 8 anos de idade. Embora não esteja em vigor, foi expressivamente adotado na formação continuada de professores do ciclo de alfabetização (1º ao 3º ano) no contexto da política do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), um programa do Ministério da Educação (MEC) que foi descontinuado em 2017, em meio a “[...] um processo político tumultuado de mudanças institucionais e, de forma decorrente, no Ministério da Educação” (Moretti; Radford, 2021, p.27).

O terceiro documento é a **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC) (Brasil, 2018), que está em vigor desde 2018 e orienta a organização de currículos para toda a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio). Destacamos que, neste texto,

restringimo-nos à análise das orientações para o período do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, campo de análise desta dissertação.

Como a pesquisa que empreendemos está sendo desenvolvida no Estado de São Paulo, o quarto documento analisado é o **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019), no qual também é indicada a necessidade de desenvolver nos Anos iniciais, a compreensão de conceitos algébricos e a capacidade de usar suas representações, ampliando-se esse tipo de pensamento, a cada ano, até chegar em etapa de ensino posterior, aos registros com letras ou variáveis.

3.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e as indicações para o ensino da álgebra nos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Os PCN (2001) para a área de Matemática do Ensino Fundamental estão pautados em princípios decorrentes de reformas que ocorreram mundialmente na década de 1980, com o intuito de traçar novos rumos e recomendações às discussões sobre melhorias curriculares para o ensino de Matemática. Dentre as instruções emitidas, encontram-se as recomendações da *National Council of Teachers of Mathematics*⁹ (NCTM), dos Estados Unidos.

No documento “Agenda para Ação”, emitido pelo NCTM destacam-se a resolução de problemas e a relevância de aspectos sociais, antropológicos e linguísticos como foco do processo de ensino e de aprendizagem de Matemática nos anos 1980.

Além destes, outros pontos de convergência, ganharam destaque no documento:

- direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção de seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
- importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreenderem a importância do uso da tecnologia e a acompanharem sua permanente renovação (Brasil, 2001, p.22).

⁹ Fundado em 1920, o **Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM)** é uma organização profissional para professores de matemática nos Estados Unidos. Um de seus objetivos é melhorar os padrões de matemática na educação. O NCTM realiza conferências nacionais e regionais anuais para professores e publica cinco periódicos (Wikipedia, *National Council of Teachers of Mathematics* - Wikipedia).

Como implicações curriculares nacionais das discussões promovidas pelo NCTM, nos PCN (Brasil, 2001) foram apresentadas indicações de blocos de conteúdos a serem contemplados nos currículos de Matemática para os quatro primeiros anos do Ensino Fundamental: Números e Operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), Espaço e Forma (no campo da Geometria), Grandezas e Medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria) e Tratamento da Informação.

Os PCN (Brasil, 2001) não apresentam a Álgebra como bloco de conteúdo independente, recomendando que esta seja trabalhada junto ao bloco de conteúdos de Números e Operações, articulada à Aritmética, trazendo como principais conteúdos a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em sequências numéricas e padrões.

Destacamos que não há orientações específicas acerca do desenvolvimento da temática, o documento apenas faz menção a sua introdução nos primeiros anos do Ensino Fundamental:

Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (Brasil, 2001, p. 55).

Pelo exposto, fica evidente a indicação de que a álgebra seja tratada como pré-álgebra nas séries iniciais (atuais Anos Iniciais) e sistematizada nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Apesar de se mostrar favorável à introdução da temática nos primeiros anos do Ensino Fundamental, nos PCN (Brasil, 2001) não são apresentadas orientações curriculares mais específicas, detendo-se a explicar que o desenvolvimento de conteúdos algébricos deve se dar articulado aos conteúdos de geometria, de grandezas e medidas e estudo de números e operações.

Embora nos PCN (Brasil, 2001) não seja tratado sobre o pensamento algébrico, observamos nas indicações de conteúdos de outros eixos situações em que é introduzido o pensar algébrico. No bloco temático Espaço e Forma, observamos menção ao ensino da álgebra quando afirmado que:

A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema, e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (Brasil, 2001, p. 55-56).

Embora a indicação do trabalho com noções geométricas seja contribuir na aprendizagem de números e medidas, entendemos que o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento se dá na identificação de regularidades, semelhanças, sendo que a generalização da aritmética, induz ao raciocínio lógico, necessário ao pensamento algébrico.

3.2.2 Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental e as indicações ao ensino da Álgebra

Como indicado, o Ministério da Educação (MEC) publicou, no ano de 2012, o documento **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental** (Brasil, 2012) com o intuito de auxiliar a elaboração do Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa – PNAIC, que apresentou ampla proposta de letramento, incluindo o matemático.

O documento orientador do PNAIC inovou em relação aos PCN (Brasil, 2001) ao abordar o conteúdo de álgebra de forma sistematizada no ciclo de alfabetização. Nesse documento, há a indicação de cinco eixos para a garantia de direitos de aprendizagem da perspectiva de letramento matemático: Números e Operações, Pensamento Algébrico, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Com exceção do eixo Pensamento Algébrico, todos os demais já estavam previstos nos PCN (Brasil, 2001) dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Indica-se como objetivo geral do eixo Pensamento Algébrico “[...] compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos” (Brasil, 2014, p.50), enfocando o trabalho com sequências, com o movimento e deslocamento no espaço, regularidades e padrões para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental que possibilitam aos estudantes:

- estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos;
- reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples;
- produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples (Brasil, 2014, p. 50-51).

Para o desenvolvimento dos objetivos apresentados, o documento indica quais devem ser iniciados no 1º ano, iniciados ou aprofundados no 2º ano e aprofundados ou consolidados no 3º ano do ciclo de alfabetização (Brasil, 2012), conforme explicitamos no quadro a seguir:

Quadro 6 – Eixo estruturante Pensamento Algébrico e objetivos de aprendizagem para 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental

EIXO ESTRUTURANTE PENSAMENTO ALGÉBRICO Objetivos de Aprendizagem	1º ano	2º ano	3º ano
Compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos.			
Estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos.	I	I/A	A/C
Reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.	I	I/A	A/C
Produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.	I	I/A	A/C
LEGENDA: I – Introduzir; A – Aprofundar; C – Consolidar.			

Fonte: Dados da pesquisa.

Para o desenvolvimento destes objetivos de aprendizagem, é indicado no documento **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental** (Brasil, 2012) que as ações pedagógicas se deem na perspectiva da alfabetização e letramento, sendo apropriado o trabalho com a proporcionalidade na multiplicação, elemento importante para o reconhecimento de valores de grandezas e com a linguagem de programação a partir de construções de objetos com uso da linguagem Logo¹⁰. É também parte componente da alfabetização e letramento matemático a possibilidade de produção de padrões em faixas decorativas, sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples. Essa perspectiva amplia a ideia de que o desenvolvimento do pensamento algébrico se reduz a abordagens numéricas descontextualizadas.

Em síntese, por meio da análise do documento, podemos afirmar, portanto, que as orientações para o ensino da álgebra aos primeiros anos do Ensino Fundamental, neste caso específico, ao ciclo de alfabetização, dizem respeito, mesmo que de modo introdutório e sem muitas especificações, principalmente ao trabalho com sequências, que pressupõe a identificação de regularidades, a percepção de diferenças e a generalização de padrões.

¹⁰ “LOGO, é uma linguagem de programação elaborada no MIT por S. Papert, cuja finalidade é, partindo das motivações das crianças e jovens, permitir a construção de objetos e desenhos ou a programar novas construções e/ou movimentações após a compreensão dos movimentos básicos” (Brasil, 2012, p.77).

3.2.3 A Base Nacional Comum Curricular e as indicações para o ensino da álgebra nos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

A **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC) (Brasil, 2018) é um documento oficial de caráter normativo, que define conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais a todos os alunos das etapas e modalidades da Educação Básica nacional nos seguintes níveis de ensino: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, substituindo os PCN (Brasil, 2001) e o documento que orientou o PNAIC.

Com o texto final aprovado em 2018 por equipe “[...] constituída por especialistas convidados e por representantes de grupos empresariais” (Passos; Adair, 2018 *apud* Moretti; Radford, 2021, p.27), na BNCC são feitas indicações sobre o ensino da álgebra, por meio da afirmação de que:

A unidade temática álgebra, por sua vez tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo de pensamento, o pensamento algébrico, que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas, planejando o uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas (Brasil, 2018, p.270).

Isto posto, de acordo com as orientações apresentadas na BNCC (Brasil, 2018), o foco conceitual do desenvolvimento do pensamento algébrico do 1º ao 5º não deve ser a formalização de regras e fórmulas algébricas, mas que é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com álgebra “[...] estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde Ensino Fundamental, Anos Iniciais (antigas séries iniciais), com as ideias de regularidades, generalização de padrões e propriedades de igualdade” (Brasil, 2018, p. 270) e equivalência.

De acordo com as indicações apresentadas na BNCC (Brasil, 2018), na fase inicial do ciclo de alfabetização e letramento (1º, 2º e 3º anos), o foco de ensino da Unidade Temática Álgebra está na organização de sequências de figuras por atributos e cores e na organização em ordem crescente e decrescente por meio de diversas estratégias, com a finalidade de que as crianças realizem ações de generalização e percebam regularidades. Ainda para o ciclo de alfabetização, na BNCC (Brasil, 2018) é indicado, a partir do 3º ano, o trabalho com o símbolo de igualdade. Aqui, percebemos distanciamento quanto ao documento do PNAIC, que focou apenas no trabalho pedagógico com sequências e padronizações.

Para os 4º e 5º anos, o foco é nas noções de equivalência, nas habilidades de identificação de um termo desconhecido e no uso das quatro operações para resolver e elaborar situações matemáticas.

A seguir, destacamos no quadro 7, os objetos de conhecimento e as habilidades indicadas na BNCC (Brasil, 2018) para o trabalho com a Unidade Temática álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Quadro 7 – Unidade temática, ano, objetos de conhecimento e habilidades de álgebra propostos pela BNCC para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Unidade Temática	Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
Álgebra	1º	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
		Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	2º	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
		Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
			(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	3º	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
		Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números

			naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
	4º	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
		Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
		Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
		Propriedades da igualdade	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
			(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
	5º	Propriedades da igualdade e noção de equivalência Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
			(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.

		Propriedades da igualdade e noção de equivalência Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
--	--	---	---

Fonte: Elaborado pela autora a partir da BNCC (Brasil, 2018).

Nota-se que na BNCC (Brasil, 2018), ao contrário de documentos anteriores há sistematização de conteúdos propostos ao desenvolvimento do pensamento algébrico, como:

- o trabalho com o sinal de igualdade, para além do significado operacional e da construção da noção de equivalência;
- o trabalho com as propriedades do sistema de numeração decimal, o qual pressupõe que os alunos identifiquem e conjecturem sobre as regularidades e as propriedades das operações;
- o trabalho com a ideia de equivalência a partir de problemas;
- o trabalho com o sinal de igual a partir do significado de equivalência;
- o trabalho com a ideia de incógnita, uma vez que trata da equivalência entre os lados de uma igualdade com um valor desconhecido;
- a resolução de problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas; e
- o trabalho com resolução e elaboração de problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido e, a partir de dados conhecidos, pode-se chegar a valores, a princípio desconhecidos.

Observamos que na perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico indicada pela BNCC (Brasil, 2018), no 3º ano do Ensino Fundamental, a grande diferença em relação aos documentos anteriores, está na indicação de trabalho com símbolo de igualdade, o qual tem seu significado relacionado com a equivalência e o controle de quantidades, desfazendo, a

compreensão errônea de que esse símbolo representa apenas a indicação do resultado de uma operação.

Já para os 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, na BNCC (Brasil, 2018) é dado continuidade ao aprofundamento dos conhecimentos algébricos, não apenas com a continuação do trabalho com equivalência por intermédio do símbolo de igualdade, como também com o desenvolvimento das habilidades de identificação de um termo desconhecido, do uso das quatro operações matemáticas para resolver e elaborar situações matemáticas e da ideia de proporcionalidade.

Comparando as indicações apresentadas na BNCC (Brasil, 2018) com as apresentadas nos PCN (Brasil, 2001), notamos que a Álgebra era apresentada aos estudantes apenas nos anos finais do Ensino Fundamental, sem fazer referência ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico, e seu encaminhamento se dava a partir da generalização de padrões, bem como pelo estudo da variação de grandezas. Com a implantação da BNCC (Brasil, 2018), entretanto, a Álgebra passa a ser objeto de aprendizagem desde o 1º ano do Ensino Fundamental, com foco no desenvolvimento do Pensamento Algébrico, e não apenas nas operações algébricas. As atividades devem relacionar o estabelecimento de padrões e regularidades, propriedades das operações, o significado do sinal de igualdade, ideias de proporcionalidade e equivalência.

É importante destacar que, embora na BNCC (Brasil, 2018) sejam apresentadas indicações acerca do ensino de conceitos algébricos, ainda há desarranjo entre o que é proposto nos documentos orientadores e a realidade pedagógica escolar, situação que dificulta o desenvolvimento de um tipo de ensino que possibilite o desenvolvimento humano e contribua para que estudantes “[...] possam humanizar-se no processo de conhecer o mundo físico, social, cultural, e, nesse processo, possam se reconhecer como humanos [...]” (Asbahr, 2020, p.87), capazes de aspirar à legitimidade de significados matemáticos fora dos muros da escola.

3.2.4 O Currículo Paulista e as indicações para o ensino da álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Em 2018, após implementação da BNCC (Brasil, 2018), o Estado de São Paulo, que já tinha o Currículo do Estado, precisou reestruturá-lo para se enquadrar às recomendações indicadas naquele documento.

A primeira versão do **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019), resultou, segundo consta no documento, de leitura analítica das proposições da **BNCC** (Brasil, 2018), do cotejamento dessas propostas com documentos curriculares das diferentes Redes Municipais, da Rede

Privada e da Rede Estadual e de discussões que envolveram a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação de São Paulo (UNDIME-SP), contando também com a presença de representantes da rede privada (São Paulo, 2019).

Após diversas colaborações (consulta pública, União Nacional dos Dirigentes Municipais de São Paulo, professores etc.) e adequações em seu currículo, em 1º. de agosto de 2019, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo publica e homologa a versão final do **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019), no qual são definidas as competências e as habilidades essenciais para o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos estudantes em todas as áreas de conhecimento.

Reiterando a BNCC (Brasil, 2018), o **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019) aponta que nos Anos Iniciais é necessário que professores atuem no desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como na compreensão de conceitos algébricos e na capacidade de usar suas representações, ampliando-se esse tipo de pensamento, a cada ano, até chegar em uma etapa de ensino posterior, aos registros com letras ou variáveis. O aprendizado da Álgebra, de acordo com o **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019, p.319) “[...] contribui para a compreensão das propriedades e generalizações, para ampliar a capacidade de abstração, o que promove ‘saltos’ cognitivos no raciocínio matemático”. Além disso, o raciocínio proporcional é considerado uma das bases do pensamento algébrico, é por isso que

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o objetivo da proporcionalidade está em desenvolver o pensamento algébrico, o que significa: observar um fato ou relação, identificar um padrão, algo que se repete, generalizar esse padrão e fazer deduções a partir dessa generalização, sem o uso de letras, com ênfase na maneira de pensar. (São Paulo, 2019, p.229).

Assim, nos problemas de proporcionalidade, é preciso entender a situação e identificar que a relação entre as grandezas envolvidas é de um tipo especial. Uma vez identificado que se trata de uma relação proporcional direta, é preciso usar esse conhecimento e fazer alguma generalização, usando a relação identificada. A compreensão dessas relações nos Anos Iniciais permitirá que elas sejam utilizadas em cálculos algébricos nos Anos Finais.

A seguir, destacamos no quadro, os objetos de conhecimento e as habilidades indicados no **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019) para o trabalho com a Unidade Temática álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Quadro 8 – Unidade Temática, ano, objetos de conhecimento e habilidades de álgebra propostos pelo Currículo Paulista para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Unidade Temática	Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
Álgebra	1º	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos do cotidiano ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
		Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	2º	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
		Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
		Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	3º	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
		Relação de igualdade.	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
	4º	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural, completando sequências numéricas pela

			observação de uma dada regra de formação dessa sequência.
		Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
		Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas, dominando estratégias de verificação e controle de resultados pelo uso do cálculo mental e/ou da calculadora.
		Propriedades da igualdade	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
	5º	Propriedades da igualdade	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
		Propriedades da igualdade e noção de equivalência.	EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
		Propriedades da igualdade e noção de equivalência.	(EF05MA11) Resolver e elaborar situações-problema cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
		Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA12) Resolver situações-problema que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de

			ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
		Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais. Divisão desigual.	(EF05MA13) Resolver situações-problema envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: Elaborado pela autora a partir do Currículo Paulista (São Paulo, 2019).

Ao analisarmos as habilidades propostas ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019), percebemos, que ao longo dos anos de escolaridade, a complexidade cresce progressivamente, sendo alguns temas retomados nessa mesma perspectiva, ou seja, a apropriação do conhecimento é proposta de maneira espiral.

Para os 1º e 2º anos espera-se que os estudantes organizem, descrevam e construam proposições em relação aos objetos de conhecimento. Nas etapas seguintes, ao longo do 3º, 4º e 5º anos, a perspectiva é de que sejam identificadas, compreendidas, determinadas, concluídas, resolvidas e elaboradas situações referentes aos objetos de conhecimento estabelecidos. Nota-se que o processo de construção e apropriação dos conhecimentos se torna cada vez mais complexos, sendo necessário que os estudantes se apropriem das aprendizagens propostas no nível anterior para prosseguirem para o nível seguinte de aprendizagem.

Quando observamos os objetos de conhecimento ligados à construção da ideia de equivalência, notamos que, inicialmente, o estudante deve entender a funcionalidade da igualdade, observando que operações distintas podem levar a um mesmo resultado, depois reconhecer e mostrar a validade de algumas de suas propriedades, inclusive determinando um número natural desconhecido que torna verdadeira a igualdade, para então, concluir, por meio de investigações, que as operações que são feitas em ambos os lados da igualdade e desigualdades não a alteram e, por fim, resolver e elaborar problemas que recaiam em igualdades de operações nas quais um dos termos não é conhecido.

Conforme sintetizado no quadro anterior (Quadro 8), os conceitos fundamentais trabalhados nessa Unidade Temática são: estudo de regularidades, generalização de padrões e propriedades de igualdade, equivalência, interdependência, variação e proporcionalidade. O

raciocínio proporcional é uma das bases do pensamento algébrico e envolve processos mentais de análise, estabelecimento de relações e comparações entre grandezas e quantidades.

Nos anos iniciais do ensino Fundamental, o objetivo da proporcionalidade está em desenvolver o pensamento algébrico, o que significa: observar um fato ou relação, identificar um padrão, algo que se repete, generalizar esse padrão e fazer deduções a partir dessa generalização, sem o uso de letras, com ênfase na maneira de pensar. Assim, nos problemas de proporcionalidade, é preciso entender e identificar que a relação entre as grandezas envolvidas é de um tipo especial. Uma vez identificado que se trata de uma relação proporcional direta, é preciso usar esse conhecimento e fazer alguma generalização, usando a relação identificada (São Paulo, 2019, p. 318-319).

Observamos a importância dada ao ensino do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, preconizado pela BNCC (2018), coadunando com o **Currículo Paulista** (2019) que:

[...] a partir da relação construída entre as grandezas, a estratégia de resolução ou cálculo necessário para responder ao problema é a dedução final. É desse processo de generalizações contínuas que nasce o pensamento algébrico, essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemática (São Paulo, 2019, p. 320).

A descrição analítica apresentada possibilita afirmar que o conteúdo álgebra é apresentado de diferentes maneiras em cada documento analisado. Nos PCN (Brasil, 2001), sob a perspectiva de pré-álgebra, o desenvolvimento de conteúdos algébricos está vinculado ao eixo temático “Números e Operações” subordinado à Aritmética. Já no documento orientador **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo básico de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do ensino fundamental** (Brasil, 2012), que deu origem ao PNAIC, observamos inovação em relação aos PCN (Brasil, 2001) ao fazer indicações sobre desenvolvimento de conteúdos algébricos de forma sistematizada no ciclo de alfabetização. Para essa modalidade de ensino é indicado o desenvolvimento do eixo Pensamento Algébrico, a partir de ações pedagógicas que se deem na perspectiva da alfabetização e do letramento matemático. Ampliando o que foi proposto para o programa de alfabetização (PNAIC), na BNCC (Brasil, 2018), indica-se que a Álgebra seja estudada desde o 1º ano do Ensino Fundamental corroborando para o desenvolvimento de um tipo de pensamento, o Algébrico. No **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019) reitera-se o que está indicado na BNCC (Brasil, 2018), porém, observamos, que ao longo dos anos de escolaridade, a complexidade dos conteúdos cresce progressivamente, sendo alguns temas retomados, ou seja, a apropriação do conhecimento é proposta de maneira espiral.

Na próxima seção, apresentamos os conteúdos para o ensino de álgebra indicados em livros didáticos elaborados pela Secretaria de Educação de São Paulo. Foram selecionados para

análise livros didáticos desse estado em decorrência da pesquisa da qual resulta esta dissertação ter sido desenvolvida em universidade paulista. Compreendemos que a relevância da análise empreendida a seguir decorra do fato de que as materializações didáticas apresentadas nos livros analisados repercutem diretamente no cotidiano escolar paulista, nos projetos políticos pedagógicos das escolas, nos planejamentos anuais e diários dos professores e na formação inicial e continuada desses profissionais.

4 CONTEÚDOS RELATIVOS AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ESTADO DE SÃO PAULO: EXEMPLOS DE SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM PROPOSTAS NO MATERIAL DIDÁTICO EMAI & LER E ESCREVER

A partir da leitura analítica dos materiais documentais e bibliográficos apresentados na seção anterior, observamos clara indicação sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, que pode ser organizado com base em ações intencionais que promovam o estudo dos seguintes conteúdos: regularidades e generalização de padrões; relações de igualdade e desigualdade e a noção de equivalência; e proporcionalidade e reconhecimento de termos desconhecidos.

Para analisarmos como esses conteúdos são materializados em livros didáticos utilizados em escolas públicas paulistas, apresentamos, a seguir, exemplos de situações de aprendizagem contidas no material **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020). Cabe destacar que não buscamos a análise exaustiva desse material didático, apenas o citamos para ilustrar tais situações.

Esse material decorre do Projeto “Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – EMAI”, que foi idealizado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, em 2012, e efetivamente implantado na rede estadual em 2013.

O projeto em sua essência, compreende:

[...] um conjunto de ações que têm como objetivo articular o processo de desenvolvimento curricular em Matemática, a formação de professores, o processo de aprendizagem dos alunos em Matemática e a avaliação dessas aprendizagens, elementos-chave de promoção da qualidade da educação. Caracteriza-se pelo envolvimento de todos os professores que atuam nos anos iniciais do ensino fundamental, a partir da consideração de que o professor é protagonista no desenvolvimento do currículo em sala de aula e na construção das aprendizagens dos alunos. Coerentemente com essa característica, o projeto propõe como ação principal a constituição de grupos de Estudo de Educação Matemática em cada escola, usando o horário destinado para as aulas de trabalho pedagógico coletivo (ATPC), e atuando no formato de grupos colaborativos, organizados pelo Professor Coordenador do Ensino Fundamental Anos Iniciais, com atividades que devem ter a participação dos próprios professores. Essas reuniões são conduzidas pelo Professor Coordenador (PC) que tem apoio dos Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos (PCNP) das Diretorias de Ensino e têm como pauta o estudo e o planejamento de trajetórias hipotéticas de aprendizagem a serem realizadas em sala de aula (São Paulo, 2013, p. 4).

Isto posto, é importante destacar, que em 2020, após implementação da BNCC (Brasil, 2018) e do novo **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019), o projeto passou por reformulações, que modificaram o movimento metodológico do material (conversa inicial, problematização e

observação/intervenção), que explicita os encaminhamentos de cada atividade¹¹, as questões que o professor deve fazer para conduzir o diálogo, aquilo que deve observar na execução e como deve intervir; a fim de que se possa, ao final de cada eixo, atingir as expectativas determinadas. Em 2024, mediante processo reformador no campo educacional, o projeto foi descontinuado e substituído por ensino digital e material impresso implementado para materializar, institucionalizar e instrumentalizar por meio de política educacional, a racionalidade neoliberal que é (re)produzida no sistema de ensino estadual paulista.

Assim, no que tange à seleção de situações de aprendizagem indicadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico no livro **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020), na próxima seção apresentaremos alguns exemplos que contemplam os conteúdos indicados nos documentos oficiais brasileiros, descritos na seção anterior: regularidades e generalização de padrões; as relações de igualdade e desigualdade; a noção de equivalência, o estudo da proporcionalidade e reconhecimento de termos desconhecidos.

4.1 Situações de aprendizagem sobre o estudo de regularidades e a generalização de padrões indicadas no livro EMAI & Ler e Escrever

De acordo com os documentos oficiais brasileiros (Brasil, 2018; São Paulo, 2019) para se desenvolver o pensamento algébrico, é necessário que os estudantes desde os primeiros anos escolares do Ensino Fundamental identifiquem regularidades e generalizem padrões. Mas o que é um padrão? Vale e Pimentel (2011 *apud* Regis, 2017) explicitam que se percebemos regularidades, estamos diante de um padrão. Segundo as autoras, “A regularidade é a percepção de que algo se repete, e de modo previsível. O termo padrão é amplo e pode ser utilizado se há a percepção de regularidades em sons, cores, formas, arranjos de números ou figuras, e não apenas em padrões visuais [...]” (Vale; Pimentel, 2011 *apud* Regis, 2017, p.30).

Para compreendermos como o estudo deste conteúdo é proposto no **EMAI**, apresentamos na Figura 5, situação de aprendizagem retirada da sequência 12 desse livro e indicada aos alunos do 1º ano (São Paulo, 2020a) intitulada “Coisas de criança: brinquedos e brincadeiras”, que tem como finalidade levar os estudantes a compreender regularidades de um padrão, organizando e ordenando objetos do cotidiano ou representações usando relação de recorrência.

¹¹ O termo atividade utilizado para representar as situações de aprendizagem selecionadas do EMAI difere do significado atribuído à “atividade” por Leontiev (2017), na seção 5 desta dissertação.

Partindo da sequência citada, selecionamos para análise, a situação de aprendizagem 12.4, na qual as crianças precisam identificar o padrão de sequência repetitiva, a partir do reconhecimento de regularidades contidas na sequência de bolinhas apresentadas. Cabe destacar, que situações envolvendo padrões de repetição podem ser desenvolvidas desde a Educação Infantil, sendo explorada de forma mais aprofundada ao longo dos primeiros anos do Ensino Fundamental com a inclusão de tópicos como a multiplicação, múltiplos e divisores, as relações numéricas e o raciocínio proporcional, e sobretudo processos de generalização, que possibilitam a entrada no domínio da álgebra.

Figura 5 – Atividade 12.4 apresentada no livro EMAI do 1º ano

ATIVIDADE 12.4

LÍGIA COMEÇOU A DESENHAR UMA SEQUÊNCIA DE BOLINHAS E PEDIU A DANIELLA QUE CONTINUASSE.

PARA ISSO, DANIELLA DISSE QUE PRECISAVA IDENTIFICAR O PADRÃO QUE LÍGIA CRIOU.

●	●	●	●	●	●	●	●
---	---	---	---	---	---	---	---

1: VOCÊ IDENTIFICOU ESSE PADRÃO? ENTÃO, RESPONDA ÀS QUESTÕES:

A. DESENHE A PRÓXIMA BOLINHA.
DE QUE COR VOCÊ A PINTOU?

B. DESENHE MAIS UMA BOLINHA.
DE QUE COR ELA DEVE SER PINTADA?

C. DE QUE COR DEVE SER PINTADA A BOLINHA QUE OCUPARÁ A 10ª POSIÇÃO?

D. DE QUE COR DEVE SER PINTADA A BOLINHA QUE OCUPARÁ A 12ª POSIÇÃO?

E. VOCÊ PODE DIZER A COR DA BOLINHA QUE OCUPARÁ A POSIÇÃO DE NÚMERO 15 DA SEQUÊNCIA? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA.

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020a, p.115).

A situação de aprendizagem indicada na Figura 5, possibilita o reconhecimento de padrões de sequência repetitiva e exploração da regularidade com que as cores se repetem. Pela observação dos elementos (bolinhas), solicita-se que os estudantes reconheçam o motivo da repetição, que neste caso é de padrão AB, AB, AB... 12, 12, 12....., ou seja, representa uma

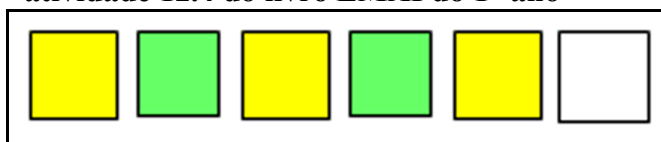
sequência de dois elementos e continuem a sequência de cores dos elementos da 10ª, 12ª e 15ª posição.

Com base nas orientações apresentadas no **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020a) – caderno do professor¹², esse tipo de situação possibilita aos alunos:

- reconhecer o motivo da sequência de cores, pela percepção de sua regularidade;
- generalizar o motivo de uma sequência, identificar as semelhanças e as diferenças entre as sequências de cores;
- identificar o padrão proposto no motivo, estabelecendo relações entre a cor e a posição; e
- trabalhar os conceitos de números pares e ímpares.

Para seguir a lógica de pensamento contida na situação, nas orientações metodológicas do **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020a) indica-se ao professor explorar situações similares a sequência de bolinhas contida no livro do estudante. Para isso é proposto que o professor desenhe na lousa uma sequência de quadradinhos com cores diferentes, como no exemplo a seguir:

Figura 6 – Exemplo de sequência de quadradinhos proposta na conversa inicial da atividade 12.4 do livro EMAI do 1º ano



Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020a, p.114).

Para explorar a sequência de elementos (quadradinhos) exemplificados na Figura 6, é sugerido ao professor realizar os seguintes questionamentos:

- Qual a cor que representa o 1º quadradinho? E o segundo?
- Quantos quadradinhos (elementos) são possíveis observar na sequência?
- Como poderíamos continuar essa sequência?
- Qual será a cor do 6º quadradinho? Explique como você sabe disso.
- Qual será a cor do 10º quadradinho? Explique como você sabe disso.
- Como você faria para descobrir a cor de quadradinhos em posição qualquer?

¹² As versões dos cadernos de professor analisadas nesta dissertação encontram-se somente na versão preliminar em PDF, pois não foram disponibilizadas pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo no formato impresso. Ressalta-se que os materiais analisados foram localizados na biblioteca virtual dessa Secretaria.

Objetivando aprofundar a situação proposta, sugere-se que o professor proponha aos alunos a criação de novos padrões de cores, questionando-os sobre o que consideram existir nos espaços com cores repetidas, isso no sentido de perceber se reconhecem a alternância entre posições pares e ímpares.

Ao tomar consciência da relação entre números pares e ímpares com a cor e a posição, os alunos são levados a identificar qualquer elemento da sequência, sem ter de contá-los um a um para descobrir a cor e a posição. Assim, ao identificar que a bolinha vermelha corresponde aos números ímpares e as azuis aos números pares, os alunos podem identificar qualquer elemento da sequência. A seguir apresentamos exemplo de tabela a ser construída com os estudantes com o objetivo de auxiliar na identificação visual do padrão de sequência repetitiva de bolinhas  vermelhas e  azuis.

Tabela 2 – Posição, cor e motivo da sequência repetitiva indicada na sequência 12.4, do EMAI & Ler e Escrever

Posição	Cor	Motivo
1		Ímpar → primeira cor
2		Par → segunda cor
3		Ímpar → primeira cor
4		Par → segunda cor
5		Ímpar → primeira cor
6		Par → segunda cor
7		Ímpar → primeira cor
8		Par → segunda cor
9		Ímpar → primeira cor
10		Par → segunda cor
11		Ímpar → primeira cor
12		Par → segunda cor
13		Ímpar → primeira cor
14		Par → segunda cor
15		Ímpar → primeira cor

Fonte: Elaborado pela autora.

Embora a compreensão das relações entre os números pares e ímpares com a cor e a posição dos quadradinhos, ou bolinhas utilizadas no padrão explicitado, possibilite que os estudantes determinem as cores da sequência repetitiva, é possível ampliar as discussões para além da análise visual dos elementos. Utilizando os algoritmos da multiplicação e da divisão, os estudantes podem descobrir qualquer termo da sequência apresentada, ou seja, considerando que os elementos se repetem em blocos de dois números (1, 2,) e que a cada 2 figuras, temos um grupo de repetição, para descobrir qual número aparece em uma determinada posição (n), basta dividir o número da posição (n) por 2 ($n : 2$).

Assim, para descobrir a cor do 15º termo da figura, os alunos precisam calcular $15 : 2 = 7$ com resto 1. Relacionando o algoritmo da divisão com o problema proposto, se o resto da divisão for 1, a bolinha é vermelha e se o resto for 0, a bolinha é azul.

Para ampliar as propostas de situações de aprendizagem do EMAI & Ler e Escrever do 1º ano (São Paulo, 2020a) que contemplam a generalização de padrões, a seguir, selecionamos a sequência repetitiva do tipo ABCABC..., retirada da sequência 12 do livro EMAI & Ler e Escrever do 1º ano (São Paulo, 2020a), conforme figura 7.

**Figura 7 – Situação de aprendizagem apresentada no livro
EMAI & Ler e Escrever do 1º ano**

ATIVIDADE 12.1

1 DANIELLA E LÍGIA ORGANIZARAM OBJETOS DO MATERIAL ESCOLAR SOBRE UMA CARTEIRA.

VEJA O QUE ELAS FIZERAM E IDENTIFIQUE UM PADRÃO NA ORGANIZAÇÃO ESTABELECIDA.



LÁPIS – FONTE: PIXABAY, DISPONÍVEL EM: [HTTPS://PIXABAY.COM/PT/VECTORS/L%C3%A1pis-CANETA-LARANJA-VERMELHO-190586/](https://pixabay.com/pt/vectors/l%C3%A1pis-caneta-laranja-vermelho-190586/). ACESSO EM: 12 JAN. 2021. BORRACHA – IMAGEM ADAPTADA PELA EQUIPE CEIAI/SEDUC ESPECIALMENTE PARA O MATERIAL DO EMAI 2020. FONTE: FREEPIK, DISPONÍVEL EM: [HTTPS://BR.FREEPIK.COM/VETORES-GRATIS/APAGADOR-BORRACHA-ALFINETE-CLIQUE-DE-PAPEL-CONCEITO-DE-PAPELARIA_3056599.HTM](https://br.freeipk.com/vetores-gratis/apagador-borracha-alfinete-clipe-de-papel-conceito-de-papelaria_3056599.htm). ACESSO EM: 12 JAN. 2021. APONTADOR – IMAGEM ADAPTADA PELA EQUIPE CEIAI/SEDUC ESPECIALMENTE PARA O MATERIAL DO EMAI 2020. FONTE: FREEPIK, DISPONÍVEL EM: [HTTPS://BR.FREEPIK.COM/VETORES-GRATIS/VOLTA-PARA-ESCOLA-DEFINIR-ICONES_4985031.HTM](https://br.freeipk.com/vetores-gratis/volta-para-escola-definir-icones_4985031.htm). ACESSO EM: 12 JAN. 2021

A. SE ELAS CONTINUAREM A COLOCAR OS OBJETOS SEGUINDO O PADRÃO, QUAIS DEVEM SER OS PRÓXIMOS TRÊS OBJETOS?

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020a, p.110).

De acordo com a situação proposta, para compreender o conceito de padrão é necessário, que os estudantes tomem consciência da unidade repetitiva presente na organização dos objetos, ou seja, que a ordem dos elementos observados da esquerda para a direita respeita um padrão (lápiz, borracha e apontador). Conforme orientações do guia do professor, cabe ao docente conduzir as crianças à observação e organização dos elementos, questionando-as se identificam algo que se repete. Identificado o padrão, as crianças realizam a atividade proposta no livro, completando a sequência apresentada.

Segundo Radford (2010 *apud* Vergel, 2021, p.83),

[...] a generalização de padrões é considerada uma das formas mais importantes de introdução da álgebra nas escolas, uma vez que, entre outros aspectos, permite aos alunos aproximar-se de situações de variação que são uma parte substancial do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Isto posto, considerando a situação de aprendizagem apresentada na Figura 7, depreendemos que, situações como esta, com sequências figurativas, propostas desde o 1º ano

do Ensino Fundamental possibilitam aos estudantes vivenciar tarefas de reconhecimento de regularidades e padrões, porém, observamos que tais procedimentos se limitam a breves análises figurativas visuais. Os estudantes podem por si descobrir estratégias de cálculo intuitivas e simples ou podem apenas desenhar, sem nenhum cálculo, e responder ao que se pede.

Situações deste tipo são importantes no sentido de contribuir para que os estudantes recorrendo ou não à simbologia, a procura de padrões figurativos ou numéricos, levantem hipóteses, formulem regras e raciocinem matematicamente. Para o desenvolvimento da atividade proposta, no material do professor (São Paulo, 2020a) sugere-se inicialmente, que as crianças entrem em contato com a noção de padrão repetitivo a partir da manipulação de objetos, como indicado na Figura 8.

Figura 8 – Exemplo de sequência de organização de lápis coloridos proposta na conversa inicial da atividade 12.1 do livro EMAI & Ler Escrever do 1º ano



Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020a, p.109).

A situação de aprendizagem indicada na Figura 8 propõe que os alunos reconheçam as regularidades de uma sequência de objetos do cotidiano. Para isso, é indicado no **livro EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020a) etapas de desenvolvimento da ação pedagógica, a saber:

- **Etapas 1:** Organizar os estudantes em duplas e solicitar que organizem sobre suas carteiras, um lápis verde, um amarelo e um laranja, mantendo essa ordem de cores, conforme configuração apresentada na Figura 8;
- **Etapas 2:** Solicitar que as duplas de estudantes juntem os lápis e observem como fica a ordem dessas cores, após cada uma juntar os seus lápis com os lápis do colega ao lado;
- **Etapas 3:** Propor aos estudantes que construam e explorem outras composições de sequências e em duplas descubram a regularidade (o motivo) da sequência; e
- **Etapas 4:** Realizar leitura compartilhada do texto que precede a atividade para verificar se as crianças identificam o significado do termo padrão.

Com base nas etapas de desenvolvimento da situação proposta, observamos que os lápis coloridos foram utilizados como instrumento de apoio à resolução da situação de aprendizagem explicitada. Para Leontiev (2004), o instrumento é um dos elementos fundamentais da atividade

e auxilia a materialização da ação consciente do homem para um determinado fim. Neste contexto compreendemos que o material manipulável (lápiz coloridos) utilizados pelos alunos, pode atuar como um dos mediadores da ação mental.

Também observamos que situações de aprendizagem envolvendo a generalização de sequências são mais exploradas nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Normalmente, se apresenta aos estudantes um número finito de termos de uma sequência constituída de figuras compostas por objetos como círculos ou quadrados para que eles se concentrem em perceber a relação de recorrência na qual, para se encontrar o próximo termo, é necessário conhecer o anterior.

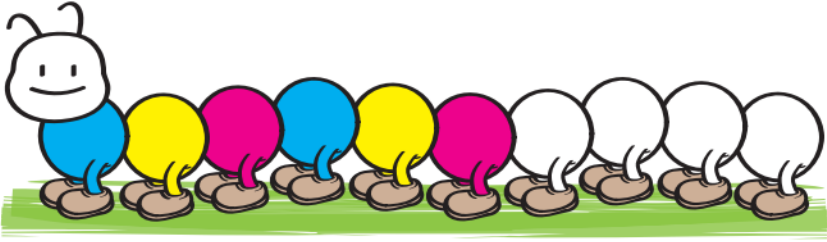
Segundo Radford (2021, p.178), a relação de recorrência “[...] aparece à consciência através da contagem dos termos e da atividade perceptiva [...]” como podemos observar no exemplo de situação de aprendizagem apresentada na figura a seguir.

**Figura 9 – Situação de aprendizagem apresentada no livro
EMAI & Ler e Escrever do 2º ano**

ATIVIDADE 1.6

JÚLIO COMEÇOU A PINTAR UMA CENTOPEIA E ESTABELECEU UM PADRÃO PARA REALIZAR A PINTURA.

1. OBSERVE O DESENHO E COMENTE COM SEU COLEGA SE VOCÊ IDENTIFICA ESSE PADRÃO.



Arte: IMESP

2. AGORA, COMPLETE A PINTURA COMO VOCÊ ACHA QUE JÚLIO IRIA FAZER.

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020b, p.25-27).

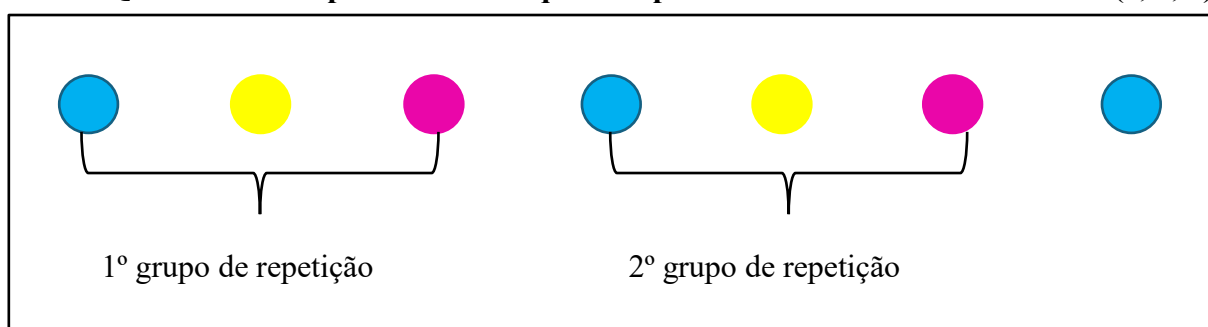
A situação de aprendizagem exemplificada na Figura 9, que foi retirada do volume 1, do caderno do 2º ano **EMAI & Ler e escrever** (São Paulo, 2020b) dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental requer a determinação dos próximos três elementos da sequência. Para isso, é preciso que os estudantes identifiquem que a sequência segue o padrão repetitivo de bolinhas de três cores: azuis, amarelas e rosas e que, a cada três termos o ciclo reinicia. Isto posto, dentre as possibilidades de generalização do padrão destacamos uma, que requer o domínio da

multiplicação, da divisão e da regularidade de que numa divisão por três, os restos possíveis são 0, 1 e 2.

No contexto dos Anos Iniciais, é possível usar a relação do resto da divisão para descobrir termos mais distantes de uma sequência cujo padrão repetitivo, por exemplo, é 123,123,123... ou ABC, ABC, ABC... Assim, identificado o motivo da sequência, para descobrir a cor ou número que ocupa determinada posição, os estudantes podem utilizar o seguinte pensamento: se os elementos se repetem em blocos de três números (1, 2, 3), ou seja, a cada 3 figuras, temos um grupo de repetição, então, para descobrir o número que aparece em determinada posição (n), basta dividir o número da posição (n) por 3 ($n : 3$).

Assim, para descobrirmos a cor do 7º termo da figura basta calcular $7 : 3 = 2$ com resto 1. Relacionando o algoritmo da divisão com o problema proposto, se houver resto 1, é o primeiro elemento do ciclo, se houver resto 2, é o segundo e se não houver resto (divisão exata), é o último elemento do ciclo. Logo o 7º termo procurado será o círculo azul, 1º termo do próximo grupo de repetição (pelo fato do resto ser 1).

Quadro 9 – Grupo de bolinhas que se repetem em blocos de três números (1, 2, 3)



Fonte: Elaborado pela autora.

Seguindo a mesma estratégia, para descobrir a cor do 47º elemento, os alunos que dominam conhecimentos de divisão podem recorrer à divisão por 3, visto que o motivo dessa sequência é composto por 3 figuras. A divisão a ser realizada é $47 : 3 = 15$ com resto 2. Relacionando o algoritmo da divisão com o problema proposto, temos 15 motivos de repetição, e o termo procurado é o segundo do próximo grupo de repetição (pelo fato do resto ser 2), logo a cor do 47º elemento será o círculo amarelo.

Se o objetivo fosse descobrir o 45º termo da sequência, os alunos poderiam recorrer ao algoritmo $45 : 3 = 15$, com resto zero, então teríamos 15 motivos completos, logo o termo procurado seria a esfera rosa, que é a última figura do 15º grupo de repetição. E se o termo procurado fosse o 46º, faríamos $46 : 3 = 15$ com resto 1, o que significa 15 grupos completos de repetição e o termo procurado seria o 1º do próximo motivo, logo, o círculo azul. Nota-se

que o objetivo da tarefa é possibilitar que as crianças compreendam o motivo da sequência e percebam que os círculos são iguais, mas as cores são diferentes.

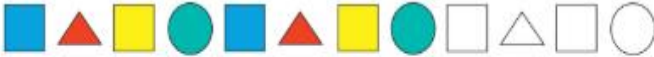
Observando os procedimentos apresentados para descobrir um termo específico de determinada sequência, com o intuito de continuarmos refletindo sobre o conteúdo generalização de padrões figurativos ou numéricos, a seguir, apresentamos outra proposta de tarefa do volume 2 do **EMAI & Ler e Escrever** para o 2º ano (São Paulo, 2020c), no qual prioriza-se sequência repetitiva figurativa de padrão 1234,1234... ou ABCD, ABCD...

Figura 10 – Situação de aprendizagem apresentada no livro EMAI do 2º ano

ATIVIDADE 27.2

JULIANA COMEÇOU A DESENHAR UMA SEQUÊNCIA DE FIGURAS, MAS NÃO PINTOU TODAS.

1 VEJA O QUE ELA JÁ FEZ:



FORTE: GRUPO DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA.

AGORA, RESPONDA ÀS QUESTÕES:

A. EXPLIQUE COMO ELA ESTÁ CONSTRUINDO AS FIGURAS E COMPLETE A PINTURA.

B. QUANDO ELA COMPLETAR AS 20 PRIMEIRAS FIGURAS, QUANTOS QUADRADOS ELA TERÁ DESENHADO? POR QUÊ?

C. QUANTOS DESSES QUADRADOS DEVEM SER PINTADOS DE AZUL? EXPLIQUE.

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020c), p.119-121).

A situação de aprendizagem 27.2 explicitada na Figura 10 convida os alunos a observar o padrão construído e completar a pintura das figuras, dando sequência ao padrão já iniciado:

- 1º elemento: um quadrado azul.
- 2º elemento: um triângulo vermelho.
- 3º elemento: um quadrado amarelo.
- 4º elemento: um círculo verde.

A sequência iniciada é composta por dois blocos com quatro figuras pintadas, conforme o padrão repetitivo enunciado e um bloco cuja ordem das figuras é exatamente igual aos ciclos anteriores, porém, os novos elementos (os próximos quatro da sequência) foram desenhados sem pintura. Esse mesmo padrão continua sendo utilizado para as figuras seguintes, por isso, independentemente de serem pintadas ou não, a sequência segue o mesmo ciclo: em cada grupo de 4 figuras, as posições 1 e 3 são sempre quadrados. Assim, a cada ciclo, temos 2 quadrados.

Para completar as 20 primeiras figuras, os estudantes podem compreender que serão necessários formar 5 ciclos completos. Para isso precisam recorrer ao algoritmo da divisão para representar a quantidade de ciclos construídos: 20 (quantidade de figuras da sequência) $\div 4$ (quantidade de elementos de cada ciclo) = 5 ciclos completos. Como cada ciclo tem 2 quadrados, o total de quadrados desenhados será 10 quadrados, pois $5 \text{ ciclos} \times 2 \text{ quadrados por ciclo} = 10 \text{ quadrados}$.

Outra possibilidade de descobrir quantos quadrados são necessários para completar as 20 primeiras figuras da sequência repetitiva é utilizar o raciocínio proporcional. Os alunos precisam deduzir que se um ciclo tem 4 elementos formados por 2 quadrados, em dois ciclos temos 8 elementos formados por 4 quadrados, assim em quatro ciclos temos dezesseis elementos construídos por oito quadrados e em cinco ciclos temos vinte elementos formados por 10 quadrados.

Nesse tipo de situação, indica-se construir com os estudantes uma tabela para organizar os dados e relações proporcionais estabelecidas na sequência.

Tabela 3 – Número de ciclos e quantidade de quadrados na sequência 27.2 do EMAI & Ler e Escrever do 2º ano

Número de ciclos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de quadrados	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Fonte: Elaborado pela autora.

Além da organização dos dados na tabela, é interessante que se estabeleça momentos de análise da situação, a partir de questões que desencadeiam elaborações conceituais iniciais, que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Dentre esses questionamentos, podemos destacar:

- Numa sequência com 50 figuras, quantos quadrados há? E triângulos? E círculos?
- Qual será a forma da 30ª peça da sequência?

- O número de triângulos é igual ao número de círculos?

A partir das situações apresentadas até o momento, observamos, que a primeira atividade possibilitou o conhecimento do padrão existente na sequência, as grandezas variáveis e as relações funcionais entre as grandezas existentes (posição e quantidade de quadradinhos e círculos, por exemplo). A segunda atividade teve como propósito superar a contagem termo a termo, buscando na atividade uma reflexão analítica sobre dois tipos de relação entre grandezas: relação entre quantidade de círculos e posição. A terceira proposta teve como foco a elaboração de uma forma geral de representação da relação entre as grandezas da sequência, sem a necessidade, a princípio, de representação simbólica formal.

Para além de situações de aprendizagem pautadas em sequências repetitivas, a seguir, na Figura 11, apresentamos sequência constituída por configuração de elementos figurais que foram organizados para criar uma composição visual de elementos da sequência. Cabe destacar, que cada termo depende do anterior e da sua posição na sequência para designarmos a figura seguinte.

Figura 11 – Atividade 20.3 apresentada no livro EMAI do 5º ano

ATIVIDADE 20.3

1 A professora Elaine pediu a seus alunos que levassem palitos de fósforo usados para a sala. Todos estavam curiosos para saber o que fariam com os palitos. Ela começou a aula pedindo que eles usassem os palitos para construir diferentes figuras geométricas como estas:

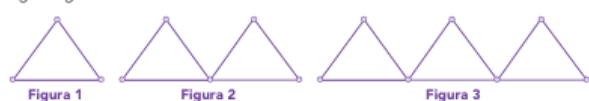


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Faça você também suas montagens e responda:

A. Quantos palitos foram usados na construção da Figura 1?

B. Quantos palitos foram utilizados na construção da Figura 2?

C. E na Figura 3?

D. Como você construiria a próxima figura dessa sequência obedecendo ao mesmo padrão. Quantos palitos foram usados nessa quarta figura?

E. E como seria a quinta figura? Quantos palitos são necessários para construí-la?

2 Anote suas respostas no quadro:

Figura	1	2	3	4	5
Quantidade de palitos	3				

Você sabe dizer quantos palitos devem ser usados para montar a sexta figura dessa sequência? _____

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020d, p.71-73).

Na situação de aprendizagem selecionada do livro **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020d) do 5º ano, observamos tipo de sequência crescente de triângulos com palitos, que pode ser formada adicionando um número fixo de palitos a cada nova figura. Dados os termos da sequência, os alunos são questionados sobre a quantidade de palitos utilizados para formar as figuras 1, 2 e 3 e desafiados a continuá-la identificando o padrão e termos seguintes.

Uma abordagem comum, nesse tipo de situação é calcular a quantidade de palitos necessários para a construção de determinado número de triângulos. Utilizando o raciocínio dedutivo e proporcional é possível identificar, que na sequência 1, 2, 3 e 4 são necessários 3, 6, 9 e 12 palitos, respectivamente, conforme o quadro a seguir.

Tabela 4 – Quantidade de palitos utilizados na composição de triângulos na situação de aprendizagem 20.3 do EMAI & Ler e Escrever do 5º ano

Figura	1	2	3	4	5	6
Quantidade de palitos	3	6	9	12	15	18

Fonte: Elaborado pela autora.

Como na situação de aprendizagem apresentada anteriormente, para o desenvolvimento da situação explicitada na Figura 11, também destacamos a possibilidade construção de quadro para organizar os dados, evidenciando o pensamento proporcional utilizado para identificar a quantidade de palitos necessários para compor as próximas figuras da sequência. Nota-se que a sequência pode variar dependendo da forma como os triângulos são construídos e conectados.

Na próxima tarefa apresentada na Figura 12, pretendemos mostrar como a apropriação visual da regularidade e a procura de consistência com a representação numérica, permite um grau de generalização até a descoberta do termo geral que, por simples observação da sequência numérica, não seria possível a alunos dessa modalidade de ensino.

Figura 12 – Atividade apresentada no livro EMAI do 2º ano

ATIVIDADE 27.1

CAUÃ COMEÇOU A DESENHAR ALGUMAS FIGURAS MANTENDO UM PADRÃO. ELE ESQUECEU DE DESENHAR A FIGURA 4, E NÃO TERMINOU DE PINTAR A FIGURA 5. OBSERVE O QUE ELE JÁ FEZ:

FONTE: GRUPO DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA.

1. EXPLIQUE PARA UM(UMA) COLEGA COMO CAUÃ ESTÁ CONSTRUINDO AS FIGURAS DESSA SEQUÊNCIA.

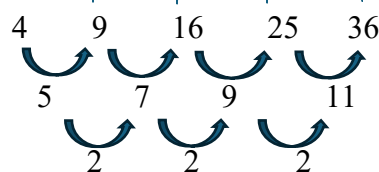
2. OBSERVE OS DESENHOS DAS FIGURAS ANTERIORES, CONSTRUA A FIGURA 4 E COMPLETE A PINTURA DA FIGURA 5.

Fonte: EMAI Ler & Escrever (São Paulo, 2020c, p. 117-119)

Na sequência figurativa de crescimento retirada do livro **EMAI Ler & Escrever** (São Paulo, 2020c) do segundo ano, espera-se que os estudantes observem o padrão de crescimento das figuras para identificar as regras de mudança e repetição, que no caso se refere ao aumento do tamanho dos quadrados.

Pelo exposto, observamos que o procedimento mais comum nesse tipo de situação é uma conversão numérica imediata e a procura de uma regularidade ou padrão nesse arranjo. Contudo, se os alunos se limitarem a observar a sequência numérica resultante, poderão facilmente descobrir uma lei e formação por recorrência, onde cada termo é obtido adicionando um valor fixo ao anterior. Essa prática pode ser vista como uma generalização aritmética.

Na questão 2, solicita-se que os estudantes construam a figura 4 e completem a pintura da figura 5, que poderá ser explorada, a partir da representação figurativa e uma representação numérica dará origem às expressões $1 + 3, 4 + 5, 9 + 7, 16 + 9, 25 + 11$



Quadro 10 – Síntese do esquema de resolução da expressão $1 + 3, 4 + 5, 9 + 7, 16 + 9, 25 + 11$

Número da figura	Soma de quadrados azuis e amarelos	Total de quadrados	Quantidade de aumento	Padrão recorrente
1	$1 + 3$	4	Sem aumento	Aumento de 2 quadrados comparando figura 1 e 2
2	$4 + 5$	9	Aumento de 5 quadrados comparado com a figura 1	Aumento de 2 quadrados comparando figura 2 e 3
3	$9 + 7$	16	Aumento de 7 quadrados comparado com a figura 2	Aumento de 2 quadrados comparando figura 3 e 4
4	$16 + 9$	25	Aumento de 9 quadrados comparado com a figura 3	Aumento de 2 quadrados comparando figura 3 e 4
5	$25 + 11$	36	Aumento de 11 quadrados comparado com a figura 4	Aumento de 2 quadrados comparando figura 4 e 5

Fonte: Elaborado pela autora.

Observando que no livro **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020c) é apresentada apenas uma situação de aprendizagem como a citada na Figura 11, consideramos a necessidade de se propor outras sequências repetitivas com padrão recorrente de aumento de 2; de 3; 4; 5... para que os estudantes possam generalizar as regularidades contidas em padrões de repetição como esses.

Na situação de aprendizagem 13.6 retirada do **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020e) do 4º ano apresentada a seguir, espera-se que os estudantes identifiquem regularidades e completem as sequências numéricas compostas por ideias aditivas e multiplicativas, analisando, sintetizando e generalizando o padrão estabelecido nas sequências numéricas.

Figura 13 – Atividade 13.6 apresentada no livro EMAI do 4º ano

ATIVIDADE 13.6

1. Cecília criou sequências de números seguindo um padrão. Identifique o padrão e complete com os números que faltam.

A.	5	10	15	20		
B.	30	40		60	70	
C.	3	6	9			18
D.	20	40	60			
E.	100	90		70	60	
F.	7	14	21			

2. Identifique o padrão utilizado na formação de cada sequência de números e complete-a:

A.	8	13	18	23		
B.	97	87	77			
C.	130	128		124		

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020e, p.150-152).

Para que os estudantes possam generalizar as regularidades estabelecidas nas sequências numéricas apresentadas, é indicado no material do professor o estabelecimento de etapas de estudo que conduzam a elaboração do pensamento. Na primeira etapa, sugere-se que o professor escreva na lousa as sequências de números pares e ímpares até 10 e faça perguntas como: “[...] se escrevermos os números de 1 a 10, quais números serão pares? E ímpares?” (São Paulo, 2020e, p.151). Em seguida, solicita-se que os estudantes preencham as sequências numéricas propostas no livro. É interessante observar se percebem as regularidades de cada sequência, como por exemplo, que aumentam de 5 em 5, de 10 em 10 etc.

Para que os estudantes tomem consciência das variações numéricas existentes nas sequências numéricas em crescimento, o professor pode explorar as regularidades da multiplicação e o conceito de múltiplo de um número. Para as sequências numéricas decrescentes se faz necessário que as mediações realizadas favoreçam à:

- observação dos números da sequência (quanto estão diminuindo);

- compreensão de que para identificar o quanto a sequência está diminuindo é possível calcular a diferença entre os termos subtraindo um número do anterior para descobrir a razão da sequência,
- verificação se a diferença é constante (se a subtração entre os termos for sempre igual, temos uma progressão aritmética decrescente).

A identificação das regularidades, a identificação de relações entre os números e a capacidade de generalizar contribuem para o desenvolvimento de pensamento algébrico dos alunos, promovendo a generalização e a compreensão da relação de progressão da sequência.

As situações de aprendizagem apresentadas, ampliam a capacidade de generalização, à medida que, entre outros aspectos, permite que os estudantes descubram relações, encontrem conexões, façam suposições e previsões. Para Radford (2013 *apud* Vergel, 2021, p.83-84) a generalização algébrica de padrões implica:

1. capturar ou identificar uma comunalidade ou característica comum, percebida em alguns elementos de uma sequência [...];
2. A generalização ou aplicação desta comunalidade a todos os termos da sequência em consideração [...];
3. A capacidade de usar essa propriedade comum para deduzir uma expressão direta que permita calcular o valor de qualquer termo da sequência.

Depreendemos do conteúdo da citação que a ideia fundamental explicitada no conceito de generalização algébrica de padrões é baseada em dar-se conta de uma comunalidade local, que então generaliza a todos os termos da sequência e serve como ordem para construir expressões dos elementos da sequência que permanecem fora do campo perceptual. Isto posto, observamos que a ideia explicitada no conceito de construção de padrão é procurar, ordenar e estruturar os termos em suas regularidades, por isso, normalmente está associada à repetição e à mudança. Para Valle (2011 *apud* Regis, 2017), os padrões têm suas próprias características, podendo ser classificados como padrão de repetição, por exemplo, 1,2,3; 1,2,3;1,2,3 ou padrão de crescimento 1, 2, 3, 4 , 5, 6, ...

Com base nessas análises, percebemos que as atividades propostas no material em análise que exploram o uso de sequências com padrão de repetição e padrão de crescimento mais simples são recorrentes nas etapas de alfabetização (1º e 2º anos), pois os estudantes estão construindo o valor numérico, por isso, são trabalhados aspectos visuais como cor, forma e objetos. Nas etapas finais dos Anos Iniciais (4º e 5º anos) observamos a presença de atividades que demonstram a necessidade de maior mobilização do pensamento algébrico ao requerer do estudante um processo de generalização mais desenvolvido.

A seguir apresentaremos situações de aprendizagem contidas no **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020f) que tratam do desenvolvimento de conteúdos como relações de igualdade e noções de equivalência.

4.2 EMAI: propostas de situações de aprendizagem sobre as relações de igualdade, desigualdade e as noções de equivalência

Nos documentos oficiais brasileiros é indicado que o conceito de igualdade seja desenvolvido a partir dos 3º, 4º e 5º anos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, é proposto ao 3º ano, o conteúdo relações de igualdade, que pode ser ampliado no 4º ano, a partir do estudo de suas propriedades e aprofundado no 5º ano pelo estudo das propriedades de igualdade e noções de equivalência.

A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita (Brasil, 2018, p.270).

Isto posto, destacamos a importância de se ampliar a compreensão do sinal de igualdade apresentado na forma de $a + b = c$. Em termos matemáticos, compreendemos que “[...] a relação de igualdade é uma relação de equivalência” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p.19), por isso, se faz necessário, estender a ideia de igualdade limitada a sinal que indica o lugar no qual devem ser colocados os resultados das operações realizadas.

Kieran (1981 *apud* Gomes; Noronha 2021), ao investigar sobre o significado do símbolo de igualdade com crianças, identificou que a maioria dos estudantes, reconhecem esse símbolo apenas como um “sinal de fazer algo” (Kieran, 1981, p.321 *apud* Gomes; Noronha, 2021, p.138). Embora esse seja um dos significados atribuído ao símbolo de igual, acreditamos que o restringir apenas a ideia de operar não promove a compreensão do que de fato, são relações de igualdade e, por consequência, não desenvolve o pensamento algébrico. É preciso expandir o sentido mais geral deste sinal à ideia de equivalência entre duas expressões numéricas.

Buscando exemplificar o movimento de representação desse sinal como símbolo que indica uma importante relação de equivalência entre dois membros ou expressão, a seguir, apresentamos exemplo de situação de aprendizagem proposta no livro **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020f) do 3º ano.

Figura 14 – Situação de aprendizagem 4.5 apresentada no livro EMAI do 3º ano

ATIVIDADE 4.5

1 Na atividade anterior, você completou uma tabela de adições. Utilize-a para preencher o seguinte quadro:

9	10	11	12	13	14	15
1 + 8	1 + 9	1 + 10				
2 + 7	2 + 8	2 + 9				
3 + 6	3 + 7					
4 + 5	4 + 6					
5 + 4						
6 + 3						
7 + 2						
8 + 1						

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020f, p.51-52)

A atividade apresentada possibilita que alunos reconheçam diferentes formas de representar um número por meio de igualdades numéricas. Por exemplo:

$$9 = 1 + 8, 9 = 2 + 7, 9 = 3 + 6, 9 = 4 + 5, 9 = 5 + 4, 9 = 6 + 3, 9$$

É importante destacar que o reconhecimento do zero leva a juntar novas igualdades à lista anterior: $9 = 0 + 9$, $9 = 9 + 0$.

A partir da mesma atividade, alunos de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental podem investigar as diferentes decomposições dos números usando expressões numéricas para representá-las, observando a estrutura dessas expressões, como, por exemplo:

$$9 + 0 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1.$$

Progressivamente, é possível ensinar igualdades mais complexas, como escrever $3 + 5$ como uma adição de dois números de todas as formas possíveis ($3 + 5 = 0 + 8 = 1 + 7 = \dots$); ou ainda, escrever 9 como uma adição de três números todos diferentes uns dos outros, como no exemplo, a seguir:

$$9 = 8 + 1 + 0 = 7 + 2 + 0 = 6 + 3 + 0 = 5 + 4 + 0 = 6 + 2 + 1 = 5 \dots$$

Situações análogas envolvendo igualdades podem ser exploradas, a seu tempo, para as operações de multiplicação, subtração e divisão. Em qualquer caso, o professor precisa ficar atento ao modo como o sinal de igual é utilizado nestas expressões. Este sinal representa sempre equivalência entre a expressão que vem antes e a que vem depois, ou seja, numa expressão ligada por vários sinais de igual, o primeiro termo é equivalente ao último termo.

Estes dois modos de encarar o sinal de igual levam Kieran (*apud* Ponte; Branco; Matos, p.21) a distinguir entre pensamento aritmético e pensamento algébrico. Segundo a autora, o pensamento aritmético é marcado pelo cálculo, ou seja, realizam-se operações procurando saber qual o respectivo resultado e o pensamento algébrico é marcado pela atenção às estruturas e às relações que estão na sua base.

Um aspecto fundamental à compreensão dessas concepções tem a ver com o entendimento do sinal de igual. Esse sinal, numa perspectiva processual, indica a realização de uma operação, e, numa perspectiva estrutural, remete para uma relação relacional ou funcional. Do ponto de vista processual, o sinal de igual assume o significado de operador, no qual o aluno pode dizer “adicionei 9 e 2 e obtive 11” ou, ainda, “9 mais 2 dá 11” para a situação $5 + 7 = 12$. Este é o principal modo como, nos primeiros anos de escolaridade, se trabalha com este sinal. Com frequência, o sinal de igual é utilizado no sentido operador, mas também pode ser utilizado com outras intencionalidades, conforme explicitam Molina, Castro e Castro (2009, p.347 *apud* Merlini; Magina; Teixeira, 2024, p.4, grifo dos autores)

Operador (também conhecido como significado aritmético ou operacional do sinal de igual). Isso refere-se ao uso do sinal para indicar a resposta a um cálculo ou a simplificação de uma expressão escrita à sua esquerda (por exemplo, $4 \times 5 = 20$, $x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$). Isso é interpretado como um símbolo de operador, lido apenas a partir da esquerda para direita. **Expressão de uma ação**: um significado bidirecional que amplia o significado do operador reconhecendo a propriedade simétrica da igualdade. Ocorre em

frases com símbolos operacionais em apenas um lado do sinal de igual, à direita ou à esquerda (por exemplo, $2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$, $24 = 12+12$, $12+12=24$). **Expressão de equivalência:** Ocorre quando o sinal de igual é utilizado para relacionar dois representantes do mesmo objeto matemático.

Isto posto, observamos que dentre os diferentes objetivos atribuídos ao uso do sinal de igual, no material em análise prevalece a utilização do sinal para representar o resultado de uma operação aritmética. Assim, para que não seja enfatizada apenas a concepção processual do significado do sinal de igual, é necessário explorar situações que promovam a compreensão de equivalência.

Como discutido na terceira seção desta dissertação, a relação de igualdade “[...] pode ser compreendida como equivalência entre expressões, mesmo que tenham formas diferentes, desde que produzam o mesmo resultado” (Brasil, 2018, p.270), por isso, espera-se que os alunos desenvolvam a habilidade de compreender o sinal de igual como relação de equivalência, e não apenas como sinal que indica resposta certa ou fim da conta.

Aos poucos, espera-se que os estudantes dos Anos Iniciais compreendam o sinal de igual como comparação entre expressões de ambos os lados e reconheçam que a relação de igualdade é uma relação de equivalência. Essa ideia aparece na BNCC (Brasil, 2018) como parte das habilidades esperadas para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, especialmente na habilidade EF05MA10, que propõe que os alunos investiguem e concluam que a igualdade entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir ambos os lados por um mesmo número

A seguir, apresentamos a situação de aprendizagem 10.2 também selecionada do **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020f) que contempla atividade sobre relações de igualdade proposta para o 3º ano do Ensino Fundamental.

Figura 15 – Situação de aprendizagem 10.2 apresentada no livro EMAI do 3º ano

ATIVIDADE 10.2

1. Mateus propôs a Caio que pensasse em dois números cuja soma fosse igual a 100 e os escrevesse nos quadrinhos. Depois, perguntou: será que há somente uma solução?

$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{100}$$

2. Caio respondeu que há várias soluções e Mateus pediu que ele escrevesse duas delas. Veja o que Caio escreveu:

$$\boxed{40} + \boxed{60} = \boxed{100}$$

$$\boxed{30} + \boxed{70} = \boxed{100}$$

3. Mateus observou as duas soluções propostas e escreveu:

$$\boxed{40} + \boxed{60} = \boxed{30} + \boxed{70}$$

4. Você acha que está correto o que Mateus escreveu? Explique.

5. Complete os quadrinhos em branco para que a sentença seja verdadeira e justifique sua resposta.

$$\boxed{20} + \boxed{30} = \boxed{} + \boxed{}$$

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020f, p.116-117).

A atividade destacada tem por objetivo organizar fatos derivados da adição com a ideia de igualdade em diferentes sentenças que resultam na mesma soma, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para o desenvolvimento da atividade, no material do professor é sugerido que:

1º Antes da resolução da atividade 10.2 (no livro do estudante), escreva na lousa a sentença $4 + 6 = 10$ e questione se é possível formular outras somas que tenham esse mesmo resultado;

2º Peça aos estudantes que apresentem outras possibilidades de sentença, cujo resultado seja igual a 10, como por exemplo, $2 + 8 = 10$; $9 + 1 = 10$;

3º Amplie as possibilidades de igualdade: $5 + 5 = 2 + 8$; $7 + 3 = 4 + 6$;

4º Convide os estudantes a formularem outras possibilidades assim como: $20 + 10 = 15 + 15$; $14 + 16 = 12 + 18$.

Essas situações são propostas aos estudantes para que entendam, que o significado de igualdade vai além da representação de uma operação. Além disso, eles precisam ser levados a expressar suas respostas e sintetizar conclusões, usando diferentes registros de representação.

Entretanto, uma ação mental tão complexa quanto essa dificilmente será materializada em tão exígua quantidade de exercícios.

Duval (2012, p. 06, grifo do autor) explicita que

[...] é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, **o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.**

Ao mobilizar diferentes registros de representação no decorrer de um mesmo passo, os estudantes são levados a sair da observação para a generalização. Para isso, cabe ao professor explorar as regularidades e relações de equivalência. Quando isso não é explorado em sala de aula, podem surgir conflitos na interpretação dos estudantes, que identificam o igual (=) somente como sendo o resultado de uma operação.

Quando generalizam regularidades e relações de equivalência, os estudantes podem perceber que a ordem das parcelas não altera a soma ou total, podem perceber também que números diferentes, quando adicionados, podem obter o mesmo valor, como no exemplo: $50 + 20 = 70$; $55 + 15 = 70$; portanto, também pode concluir que $50 + 20 = 55 + 15$.

Pelo exposto, observamos que, as relações de igualdade se dão em pelo menos dois contextos distintos: o operacional e o que indica equivalência entre objetos. A noção operacional surge, essencialmente, em contextos aritméticos, que conduzem as crianças a compreender o sinal de igualdade como um símbolo operacional, ou seja, um símbolo que indica uma ação (operação) a ser realizada. Normalmente, os alunos aceitam o sinal de igualdade em sentenças em que ele aparece logo após os símbolos operatórios (+, -, x e :). Situações como essas se materializam no EMAI.

Isto posto consideramos que a ênfase no significado operatório do sinal de igual como é materializado no EMAI pode dificultar o entendimento de equivalência deste sinal, por exemplo, quando se introduz o conceito de equação, em anos posteriores. As expressões envolvendo relações de igualdade e desigualdade precisam ser exploradas desde os primeiros anos escolares, para que os estudantes percebam e compreendam a natureza destas relações.

A seguir apresentaremos outro exemplo de situação de aprendizagem contidas no **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020g) que trata do desenvolvimento de conteúdo sobre as relações de igualdade, desigualdade e noções de equivalência.

Figura 16 – Atividade 17.1 apresentada no livro EMAI do 4º ano

SEQUÊNCIA 17

ATIVIDADE 17.1

 1 Ana Julia propôs alguns desafios para Thiago envolvendo igualdades. Inicialmente, ela escreveu:

$20 + 39 = 39 + 20$	e	$23 + 38 = 20 + 41$
---------------------	---	---------------------

Depois perguntou se as escritas estavam corretas. Thiago respondeu que sim. Ela então pediu que ele completasse as sentenças com os números que estão faltando. Faça isso você também.

A. $36 + 49 = \square$
B. $90 - 36 = 89 - \square$
C. $72 + 119 = 70 + \square$
D. $\square + 26 = 26 + 56$
E. $200 - 74 = 198 - \square$
F. $26 + 39 + 57 = 20 + 30 + 50 + \square$
G. $96 + 88 = 100 + \square$

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020g, p. 15-17).

Na tarefa apresentada no **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020g) do 4º ano do Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes determinem o número desconhecido, que torna verdadeira uma igualdade, envolvendo as operações de adição e subtração com números naturais.

Nas situações propostas, ao ajustarmos um número, ajustamos o outro na mesma proporção inversa para manter a igualdade. Se modificamos um lado da sentença, precisamos compensar isso do outro lado na mesma medida, para que o resultado não mude. Na regra geral, se diminuirmos ou aumentamos um número de um lado da sentença, precisamos fazer o contrário no número com o qual ele está sendo combinado.

Para que os estudantes se apropriem desses procedimentos, antes que resolvam as sentenças, indica-se que o professor os questione sobre como resolveriam, mentalmente, os cálculos $32 + 28$ e $35 + 25$ e, em seguida, explorar as diferentes estratégias levantadas pelos alunos e apresentando outras possibilidades, ou seja, mostrando aos estudantes que não existe

uma única maneira de resolução. Para ampliar as discussões, indica-se ao professor fazer perguntas sobre os resultados encontrado nas operações $32 + 28$ e $35 + 25$ e sobre as relações as mudanças observadas nos números da segunda sentença em relação à primeira.

É importante que os estudantes percebam a relação de igualdade entre as operações, uma vez que ambas apresentam o mesmo resultado. No exemplo a seguir, selecionamos outra situação que explora a identificação das relações existentes entre as operações tornando a igualdade entre os termos verdadeira.

Figura 17 – Atividade 28.3 apresentada no livro EMAI do 4º ano

ATIVIDADE 28.3

Mônica escreveu as igualdades:

$$12 + 23 = 35 \quad \text{e} \quad 12 + 23 + 3 = 35 + 3$$

Perguntou a Ricardo: uma igualdade não se altera se eu adicionar um mesmo número a seus dois termos? Será que isso acontece sempre?

Para verificar, Ricardo escreveu:

A. $18 + 32 = 50$ e $18 + 32 + 10 = 50 + 10$

B. $7 + 8 + 10 = 25$ e $7 + 8 + 10 + 9 = 25 + 9$

1. Observe-as e responda o que Ricardo fez. Verifique se após adicionar um mesmo número aos dois termos, as igualdades permanecem verdadeiras.

No item A) _____

No item B) _____

2. Ricardo então perguntou a Mônica: será que isso também acontece se subtrair um mesmo número aos dois termos de uma igualdade? Será que a igualdade permanece verdadeira?

Para ajudar Mônica a investigar, complete a igualdade subtraindo 5 unidades em cada termo e responda pergunta:

$$15 + 50 = 65 \quad \text{e} \quad 15 + 50 - \underline{\quad} = \underline{\quad} - \underline{\quad}$$

Elabore com seu(sua) colega, uma igualdade com adição nos dois termos.

e

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020g, p.161-163).

Na situação de aprendizagem explicitada na Figura 17, que foi selecionada do **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020g) do 4º ano, espera-se que os estudantes reconheçam a relação de igualdade existente entre os dois termos. Para isso, no material do professor do indica-se o desenvolvimento de conversa inicial, explorando as igualdades apresentadas nas figuras 18 e 19, a seguir.

Figura 18 – Exemplo 1 de situação envolvendo a relação de igualdade entre dois termos

$$\boxed{20} + \boxed{35} = \boxed{35} + \boxed{}$$

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020g, p.161)

Partindo da igualdade apresentada na Figura 18, indica-se ao professor questionar os alunos sobre o número que pode ser utilizado para completar o segundo termo da operação tornando a igualdade entre as expressões verdadeira.

Após os estudantes discorrerem sobre as hipóteses e estratégias de cálculo utilizadas no reconhecimento da igualdade apresentada, para ampliar as discussões o professor também pode apresentar a igualdade indicada, a seguir.

Figura 19 – Exemplo 2 de situação envolvendo a relação de igualdade entre dois termos

$$\boxed{86} - \boxed{16} = \boxed{80} - \boxed{}$$

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020g, p.162)

Com base na igualdade apresentada na Figura 19, para ampliar as discussões envolvendo a relação de igualdade, o professor pode questionar os estudantes sobre o número que pode ser utilizado para completar o segundo termo da operação tornando a igualdade da expressão verdadeira.

Assim, após os estudantes apresentarem as estratégias de cálculo utilizadas para descobrir os números que faltam para que as igualdades se tornem verdadeiras, é indicado no material que o professor as registre na lousa, sistematizando as estratégias utilizadas pelas crianças. É importante que as crianças percebam a relação de igualdade entre as operações, uma vez que ambas apresentam o mesmo resultado. Se necessário, pode-se propor outras operações equivalentes envolvendo adição ou subtração.

Na sequência, nas orientações descritas no material do professor sugere-se o desenvolvimento das seguintes etapas:

Etapas 1: Realizar a leitura da atividade com as crianças;

Etapas 2: Solicitar aos estudantes que observem os registros feitos por Mônica;

Etapas 3: Propor aos estudantes que respondam as questões A e B do item 1.

Ao desenvolver as etapas propostas, é importante que o professor observe como as crianças procedem para resolver as questões e quais estratégias utilizam no estabelecimento das igualdades mantendo-as verdadeiras. Além dessas ações, ao final das discussões indica-se socializar as produções das crianças com registros na lousa para validá-las ou não.

Para ampliar os exemplos de situações de aprendizagem que compreendam a ideia de igualdade e equivalência entre dois termos, a seguir apresentaremos mais um exemplo selecionado do **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020d).

Figura 20 – Atividade 16.6 apresentada no livro EMAI do 5º ano

ATIVIDADE 16.6

1. Áurea construiu cartelas e começou a criar sentenças matemáticas. Ela propôs que Emerson completasse as cartelas em branco para tornar as sentenças verdadeiras. Faça isso você também:

A. $26 + 35 - 20 + 30 + \boxed{}$

B. $48 + 57 = 40 + 50 + \boxed{}$

C. $48 + 57 = 50 + 60 - \boxed{}$

2. Áurea, Emerson e Glauce gostam de estudar juntos, discutir as estratégias que utilizam e conferir os resultados. Eles devem completar cada sentença para torná-las verdadeiras. Ajude-os nessa tarefa.

A. $32 + 59 = 30 + \boxed{}$

B. $29 + 88 = 30 + \boxed{}$

C. $47 + 71 = 40 + \boxed{}$

D. $123 + 209 = 120 + 200 + \boxed{}$

3. Áurea escreveu uma sentença para Emerson completá-la para que seja verdadeira:

$99 + 104 = 100 + 100 \underline{\hspace{1cm}}$

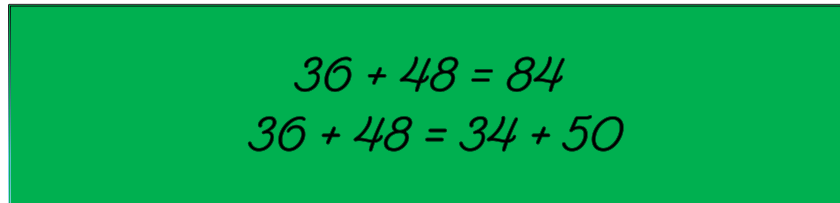
Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020d, p.26-28).

Na situação de aprendizagem 16.6 selecionada do volume 2, do livro **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020c) do 5º ano espera-se que os alunos completem as cartelas em branco para tornar as sentenças verdadeiras.

No material do professor sugere-se iniciar a atividade investigando sobre os conhecimentos que os estudantes possuem acerca da utilização do sinal de igual, observando se

já compreendem que além de ser utilizado para indicar o resultado de uma operação, o sinal de igual também pode indicar uma equivalência entre sentenças numéricas.

Sugere-se que o professor apresente aos estudantes, o seguinte registro:



$$36 + 48 = 84$$

$$36 + 48 = 34 + 50$$

Fonte: EMAI & Ler e Escrever (São Paulo, 2020d, p.27).

A partir do registro explicitado, os estudantes são levados a observar que em $36 + 48 = 84$, o sinal de igual é utilizado para indicar o resultado de uma adição, enquanto em $36 + 48 = 34 + 50$, o sinal de igual indica que as adições em cada membro da igualdade apresentam resultados iguais, porém não há a indicação do resultado. É apresentada uma equivalência entre duas adições.

Após análise das sentenças indicadas, o professor pode propor a leitura da primeira questão, levando os estudantes a observar que nas adições apresentadas há um elemento faltante em cada item, que deve ser determinado. Para isso, eles devem observar os números escritos no primeiro e segundo termos da cartela. No item A, por exemplo, os alunos calculam $26 + 35$, encontrando 61; e $20 + 30$, obtendo 50, verificando que o valor faltante é 11. É preciso incentivá-las a observar os números escritos e estabelecer relações entre eles.

Por exemplo:	26	35
	$20 + 6$	$30 + 5$

E a identificar que, no segundo membro, está escrita a adição $20 + 30$ e, portanto, o elemento faltante pode ser obtido pela adição de $6 + 5$, ou seja, 11.

Na Atividade 2, item A, as crianças identificam, a partir da análise dos números já escritos nas cartelas que podem adicionar 2 a 59, obtendo 61. É necessário escrever na lousa as igualdades:

$$32 + 59 = 30 + 2 + 59$$

$$32 + 59 = 30 + 61$$

Na Atividade 3, são apresentadas duas possibilidades de resolução para que as crianças analisem e as validem ou não. Ambas estão corretas e exploram composições e decomposições dos números ou compensações aditivas. Em $99 + 104 = 100 + 103$, é possível identificar que uma unidade do 104 foi adicionada a 99, obtendo, portanto, 100 e 103.

Na Atividade 4, é esperado que as crianças observem os números que constam de cada

adição:

$$58 + 75 + 97 = 230$$

$$59 + 76 + 98$$

E façam associações. É possível escrever $59 + 76 + 98 = 58 + 1 + 75 + 1 + 97 + 1$ e concluir que $59 + 76 + 98 = 230 + 3$, ou seja, 233.

Na Atividade 5, é sabido que $49 + 125 + 238 = 412$ e $51 + 125 + 241$ pode ser escrito como $49 + 2 + 125 + 238 + 3$ e, a partir do resultado 412, encontrar o valor 417 ($412 + 2 + 3$).

A partir da descrição e análise de situações de aprendizagem selecionadas do **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020c), que foram apresentadas como possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico, consideramos necessário repensar tais propostas para além da aquisição de conteúdos materializados em livros didáticos que não dão conta de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes.

Embora os conteúdos e situações de aprendizagem explicitados no material analisado articulem-se com as intenções da pesquisa de mestrado empreendida, observamos que a forma como estão materializados nos livros didáticos analisados não contribuem efetivamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois estão ancorados em princípios pragmáticos e imediatistas, que desconsideram as condições concretas e históricas de materialização do conhecimento produzido e acumulado historicamente.

Coerentemente com os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, a partir de toda a análise empreendida podemos concluir que as situações de aprendizagem contidas no EMAI não se mostram suficientes para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que não foram organizadas de maneira sistemática para desencadear processos de generalizações, abstrações, sínteses, análises, comparações etc., necessários à formação conceitual. Tal insuficiência decorre de limites intencionais e estruturais materializados no material, por meio de situações de aprendizagem com foco na repetição de procedimentos, na insuficiência de formação de conceitos teóricos e na fragmentação de conceitos decorrentes de escassez de atividades.

Isto posto, concluímos que, embora o EMAI represente avanço na estruturação do ensino de Matemática nos Anos Iniciais, sistematizando conteúdos e oferecendo sequências didáticas orientadoras, ainda enfrenta desafios importantes para consolidar aprendizagem verdadeiramente conceitual. Para cumprir plenamente seu papel formativo, o EMAI precisa avançar de modo intencional na formação de conceitos teóricos, dos objetos matemáticos, e não apenas à execução de procedimentos operatórios. Para o desenvolvimento do pensamento algébrico é necessário que o estudante compreenda as relações internas e essenciais do objeto

de estudo, e não apenas, execute procedimentos, como observamos nas situações de aprendizagem selecionadas do EMAI, que permanecem no plano empírico, sem promover mediações que conduzam à abstração, à análise e à generalização.

Em síntese, para possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico, é necessário o desenvolvimento de situações de aprendizagem que promovam ações intelectuais capazes de levar os estudantes à apropriação dos modos teóricos de pensamento, colaborando para que a matemática escolar deixe de ser predominantemente procedimental e se torne espaço de formação intelectual, favorecendo o desenvolvimento das funções psicológicas superiores e a constituição de sujeitos capazes de compreender e transformar a realidade.

Isto posto, na próxima seção, apresentamos conceitos fundamentais da Teoria Histórico-Cultural que colaboram ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

5 CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Com o objetivo de verificar as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentamos nesta seção, conceitos e princípios fundamentais da teoria que elegemos como fundamento teórico e metodológico de pesquisa em Educação.

A Teoria Histórico-Cultural tem sua origem nos trabalhos de Lev Vigotski (1896-1934) e seus colaboradores como Aléxis Leontiev (1903-1979) e Alexander Luria (1902-1977), que também fizeram parte desse grupo.

Eles desenvolveram a ideia de que o homem não reage diretamente ao meio com os seus reflexos inatos e sim que a relação entre o sujeito humano e os objetos do meio é mediada por signos, significados e ferramentas culturais. Sendo assim, a cultura passa a ser considerada como um elemento da natureza humana, num processo histórico ao longo do desenvolvimento do indivíduo, modelando as ações psicológicas do homem (Cedro, 2004, p.28).

Segundo Vigotski (2018, p.90, grifo do autor), “[...] **o homem é um ser social e, fora da relação com a sociedade, jamais desenvolveria as qualidades, as características que são resultado do desenvolvimento metódico de toda a humanidade**”, ou seja, os traços tipicamente humanos, suas funções psicológicas superiores. Isto porque, o meio é fonte de desenvolvimento das qualidades especificamente humanas.

De acordo com a teoria vigotskiana, as funções psicológicas superiores são habilidades mentais complexas que se desenvolvem por meio da interação social e da mediação cultural, aprimorando-se com a experiência e a interação do indivíduo com o meio social, desde o seu nascimento. Como funções psicológicas superiores que possibilitam que cada um de nós se aproprie de capacidades humanas, destacamos a memória, a atenção, a linguagem, a vontade, a emoção, a percepção, o pensamento etc.

De acordo com Martins (2006, p.51),

[...] as funções psicológicas superiores representam o substrato da consciência humana, regulando o comportamento dos homens e definitivamente, diferenciando-os dos animais. Considerando a origem social dessas funções, ou seja, o fato de que apenas se desenvolvem pela mediação das relações entre os homens, o autor virá afirmar a apropriação da cultura enquanto condição para a estruturação do pensamento humano [...].

O pensamento como atividade intelectual não surge de modo espontâneo, mas como “[...] produto do desenvolvimento histórico-social, como uma forma teórica especial da atividade humana que não é nada mais que um derivado da atividade prática” (Leontiev, 2004,

p.42, tradução nossa)¹³, ou seja, surge como função psicológica superior que não é inata ao indivíduo, mas se desenvolve por meio da mediação de signos e a utilização de instrumentos, especialmente a linguagem, que se interpõem entre homem e objetos, potencializando as ações materiais e mentais dos seres humanos. Isso é possível devido à função dos instrumentos de preservar a história da produção humana por meio das formas de uso neles encarnadas, pois ao entrar em contato com elas, o ser humano se relaciona com o que a humanidade produziu, materializando as experiências adquiridas.

Vygotski (2000) atribui aos instrumentos e signos, a função de mediadores culturais, na relação do ser humano com o mundo.

Por meio da ferramenta o homem influencia o objeto de sua atividade, a ferramenta é direcionada para fora: deve causar uma ou outra mudança no objeto. É o meio da atividade externa do homem visando modificar a natureza. O signo não modifica nada no objeto da operação psicológica: é o meio que o homem utiliza para influenciar psicologicamente, seja o seu próprio comportamento, seja o dos outros; é um meio para a sua atividade interior, destinada a dominar o próprio ser humano: o signo está orientado para dentro. Ambas as atividades são tão diferentes que a natureza dos meios utilizados não pode ser a mesma em ambos os casos (Vygotski, 2000, p.94, tradução nossa).¹⁴

Como visto, os signos, concebidos como instrumentos da atividade psicológica, orientam o próprio sujeito, ou seja, estão voltados para dentro do indivíduo, dirigindo-se ao controle de sua atividade psicológica. Os instrumentos constituem-se como produto da evolução histórica da humanidade necessários ao surgimento das funções psicológicas superiores, que decorrem da atividade humana mediatizada.

Com base na teoria vigotskiana, observamos que a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas sim, mediada, isto é, se dá pela possibilidade de interagir com o meio e pode ser realizada por meio de instrumentos e signos. A mediação por instrumentos externos diz respeito ao uso de ferramentas intermediárias para alcançar algum objetivo concretamente, enquanto a mediação por signos se realiza quando atuamos mentalmente no mundo, tendo assim, o plano mental ou simbólico internalizado como mediadores do sistema psicológico.

¹³ “[...] producto del desarrollo histórico-social, como una forma teórica especial de la actividad humana que no es otra cosa que un derivado de la actividad práctica” (Leontiev, 2004, p.42).

¹⁴ “Por medio de la herramienta el hombre influye sobre el objeto de su actividad la herramienta está dirigida hacia fuera: debe provocar unos u otros cambios en el objeto. Es el medio de la actividad exterior del hombre, orientado a modificar la naturaleza. El signo no modifica nada en el objeto de la operación psicológica: es el medio de que se vale el hombre para influir psicologicamente, bien en su propia conducta, bien en la de los demás; es un medio para su actividad interior, dirigida a dominar el propio ser humano: el signo está orientado hacia dentro. Ambas actividades son tan diferentes que la naturaleza de los medios empleados no puede ser la misma en los casos” (Vygotski, 2000, p.94).

Para alcançar tais processos mediadores, é fundamental a experiência com o outro e com os objetos da cultura, pois a experiência do homem no mundo é mediada pela relação com o outro.

Para Vygostky (2007), os principais elementos mediadores são o pensamento e a linguagem. A linguagem é o principal instrumento de representação simbólica de que o homem dispõe. Há duas funções básicas da linguagem: interação e compreensão generalizada do mundo. De acordo com Leontiev (2004), além da função de interação entre os homens, a linguagem “[...] é também um meio, uma forma da consciência e do pensamento humano [...]. Torna-se a forma e o suporte da generalização consciente da realidade” (Leontiev, 2004, p. 93-94). Assim, quando a palavra e a linguagem se desvinculam da atividade prática imediata, as significações verbais são abstraídas do objeto real e, portanto, existem como fato de consciência, isto é, como pensamento.

Nesse sentido, dentre os signos utilizados pelo homem na formação de conceitos, que são meio para o desenvolvimento psíquico, a palavra tem destaque na teoria vigotskiana. Assim,

Todas as funções psíquicas superiores são processos mediados, e os signos constituem o meio básico para dominá-las e dirigi-las. O signo mediador é incorporado à sua estrutura como uma parte indispensável, na verdade a parte central do processo como um todo. Na formação de conceitos, esse signo é a *palavra*, que em princípio tem o papel de meio na formação de um conceito e, posteriormente, torna-se seu símbolo (Vygotski, 1993, p.48, grifo do autor).

Constata-se que, pela linguagem e demais funções psicológicas, os sujeitos interagem, atuam com conceitos e estabelecem novas sínteses, mediadas pela palavra. Com base na Teoria Histórico-Cultural, o domínio da palavra possibilita a aquisição de um complexo sistema de associações e relações em que dado objeto se encontra os quais se formaram ao longo da história da humanidade.

Pelo exposto, destacamos que o conceito linguagem é fundamental para a compreensão do objeto em análise nesta dissertação, pois, o pensamento algébrico demanda um tipo específico de linguagem, a linguagem matemática. Para Panossian (2008), o pensamento não é expresso pela linguagem em sua forma pura, por isso “Não podemos imaginar o conhecimento do homem sem a linguagem, pois linguagem consubstancia nas palavras o resultado do pensamento” (Kopnin, 1978 *apud* Panossian, 2008, p. 31). Assim,

[...] a linguagem é instrumento do pensar na medida em que é o material básico do homem para planejar sua atividade. [...] é instrumento regulador, considerando que o homem ao planejar sua atividade, organiza seu comportamento. É também instrumento do conhecimento, pois se fixam na linguagem resultados do conhecimento. Não se trata de somente associar o conceito (conjunto de conhecimentos ou fenômeno) a uma palavra nem, tampouco, imaginar que na palavra estão reproduzidas todas as características de um conceito, mas sim que a linguagem permite a apropriação de tais conceitos e também a obtenção de novos conhecimentos a partir daqueles que

possuímos. Sendo instrumento do conhecimento, é também outra função da linguagem servir como meio de apropriação da experiência histórico-social (Leontiev 1975 *apud* Panossian, 2008, p.31).

Assim, como descreve Panossian (2008), a função tripla da linguagem (instrumento regulador do comportamento, instrumento de conhecimento – não confundido com conjunto de conhecimentos ou fenômenos – e meio de apropriação da experiência histórico-social) é também percebida no processo de ensino e aprendizagem que objetiva o desenvolvimento do pensamento algébrico. A função de instrumento regulador do comportamento pode ser percebida quando a criança utiliza palavras (orais, escritas ou em pensamento) para organizar suas ações visando a resolução de problemas algébricos. Em relação à função de instrumento de conhecimento, percebe-se a utilização da linguagem matemática, relativa ao conhecimento algébrico, em situações nas quais, eficientemente, a criança pensa a partir de conceitos historicamente elaborados como regularidade e generalização de padrões; relações de igualdade, desigualdade e a noção de equivalência; e proporcionalidade e reconhecimento de termos desconhecidos.

Isto posto, a partir da análise do recorte histórico sobre o desenvolvimento de conhecimentos algébricos por diferentes civilizações, enunciado na segunda seção deste texto, depreendemos que o pensamento algébrico não é inato aos seres humanos, mas constitui-se à medida que o aluno se apropria do conhecimento humano que está objetivado na linguagem algébrica que a humanidade produziu por meio de relações com os instrumentos físicos e simbólicos da cultura material e imaterial.

Ao apresentarmos, na seção dois desta dissertação, as ações coletivas em torno da elaboração do pensamento algébrico, observamos que este, “[...] nasce de necessidades práticas para fazer as necessidades da prática, ou seja, um processo dirigido a um fim” (Kopnin, 1978, p.170 *apud* Panossian, 2008, p.21). Nesse sentido, esse tipo de pensamento é “[...] atividade intelectual do homem, como relação teórica do sujeito com o objeto. Tal relação surge na prática e continua se desenvolvendo orientada pela prática, que é a base inicial do pensamento e determina o que é necessário ao homem no processo de conhecimento do objeto” (Panossian, 2008, p.21).

Segundo Panossian (2008), como conjunto de símbolos e signos construídos pelos homens, a linguagem matemática, assim como a algébrica estão repletas de conceitos e significados, que decorrem do processo de generalização e abstração surgidos das necessidades humanas, inicialmente decorrentes da vida cotidiana e da experiência prática, e

progressivamente do conhecimento científico que vão se transformando e originando novos conceitos conforme são geradas novas necessidades pela própria atividade humana.

O conceito de atividade, compreendido por Davidov (2021) como um dos conceitos teóricos fundamentais da psicologia russa (soviética), foi desenvolvido por Leontiev (2017), que investigou a estrutura da atividade externa e seu vínculo com os processos psíquicos. Suas pesquisas também revelaram que “[...] as atividades externa e interna têm estruturas idênticas, e mais, que a atividade psíquica interna representa uma atividade material e externa transformada, o que evidencia a unidade da atividade e do psiquismo” (Sforni, 2004, p. 86),

Assim, buscando compreender a estrutura da atividade externa e suas relações com os processos psíquicos, Leontiev (2017) ampliou o conceito de atividade indicado por Vigotski (2001), definindo “atividade” como “[...] os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo”. Para ele, as atividades humanas decorrem de necessidades, das quais surgem motivos e objetivos para a ação, demandando condições e meios objetivos para serem efetivadas.

À estrutura da atividade humana proposta por Leontiev (necessidades, tarefas, ações e operações), Davidov (2021, p.169) acrescenta o “desejo”, definindo como componentes estruturais da “atividade” o desejo, as necessidades, os motivos, as tarefas, as ações e as operações. Ainda segundo esse pesquisador:

Na esfera da psicologia do desenvolvimento ontogênico do homem, podem ser distinguidos os seguintes tipos de atividade geneticamente herdados: a comunicação emocional, a manipulação objetual, a brincadeira, o estudo, as atividades socialmente úteis (por exemplo, o trabalho). O conteúdo e as regularidades do processo de assimilação dependem daqueles tipos concretos de atividade dentro dos quais a mesma se realiza (Davidov, 2021, p.169).

Isto posto, com base na citação apresentada, depreendemos que o desenvolvimento psíquico do homem é determinado pelo tipo de atividade a qual o sujeito desenvolve. No caso específico da escolarização, essa forma superior de pensamento se constitui por meio de atividade, cujo objetivo é a apropriação de conceitos científicos.

Vigotski (2001) e Davidov (1988), explicitam que o pensamento humano se constitui por conceitos cotidianos; espontâneos ou empíricos (que regem os princípios orientadores presentes nos documentos oficiais brasileiro, como analisamos) e conceitos científicos ou teóricos (que possibilitam o desenvolvimento de capacidades humanas específicas consubstanciadas no mundo). Os conceitos espontâneos são resultado da relação sensível do homem com o mundo; e os científicos decorrem do estabelecimento de complexas relações.

Ao investigar o desenvolvimento psíquico humano e a constituição do pensamento, Vigotski (2001, p. 245) questiona: “Como se desenvolvem os conceitos científicos na mente de uma criança em processo de aprendizagem escolar?”

Para ele, embora os conceitos científicos e espontâneos se desenvolvam em direções opostas, os dois processos estão interligados, pois exercem influência mútua. A base dos conceitos científicos são os conceitos espontâneos sendo que os conceitos espontâneos são reconfigurados e ampliados à medida que os conceitos científicos são aprendidos.

Segundo Vigotski (2001, p.263) os conhecimentos científicos

[...] surgem e se constituem no processo de aprendizagem escolar por via inteiramente diferente que no processo de experiência pessoal da criança. As motivações internas, que levam a criança a formar conceitos científicos, também são inteiramente distintas daquelas que levam o pensamento infantil à formação de conceitos espontâneos. Outras tarefas surgem diante do pensamento da criança no processo de assimilação dos conceitos na escola, mesmo quando o pensamento está entregue a si mesmo. Resumindo, poderíamos dizer que os conceitos científicos, que se formam no processo de aprendizagem, distinguem-se dos espontâneos por outro tipo de relação com a experiência da criança, outra relação sua com o objeto desses ou daqueles conceitos, e por outras vias que eles percorrem do momento da sua germinação ao momento da informação definitiva (Vigotski, 2001, p.263).

Para o estudioso,

[...] o desenvolvimento dos conceitos científicos deve apoiar-se forçosamente em um determinado nível de maturação dos conceitos espontâneos, que não podem ser indiferentes à formação de conceitos científicos simplesmente porque a experiência imediata nos ensina que o desenvolvimento dos conceitos científicos só se torna possível depois que os conceitos espontâneos de uma criança atingiram um nível próprio do início da idade escolar. Por outro lado, cabe supor que o surgimento de conceitos de tipo superior, como são os conceitos científicos, não pode deixar de influenciar o nível dos conceitos espontâneos anteriormente constituídos, pelo simples fato de que não estão encapsulados na consciência da criança, não estão separados uns dos outros [...] (Vigotski, 2001, p.261).

Os conceitos espontâneos são formados a partir da experiência cotidiana do sujeito com os objetos e, por meio da comunicação com os outros, por meio da qual resultam processos de generalização e apropriação do significado do objeto. De acordo com Davidov (1988), esse conhecimento, de caráter empírico, é elaborado a partir da comparação entre objetos e suas representações, processo que possibilita ao sujeito destacar propriedades comuns e classificá-las.

Nesse tipo de conhecimento, a generalização resulta da identificação de traços semelhantes entre elementos distintos da realidade, com base na experiência sensível e imediata. Trata-se de um tipo de conhecimento que se ancora na aparência e nas propriedades

externas dos objetos e fenômenos. Para Davydov (1988), no processo de comparação, característico do pensamento empírico, destaca-se uma propriedade formalmente geral de um conjunto de objetos, o que permite sua classificação, independentemente de haver relações efetivas entre eles.

Por outro lado, tanto Vigotski (2001) quanto Davidov (1988) destacam que os conhecimentos científicos ou teóricos são adquiridos inicialmente na escola, por meio de ensino intencional, organizado e sistematizado. Sua apropriação começa com a conscientização das características essenciais presentes na definição do objeto, em atividade de caráter consciente e intencional. Tais conhecimentos são formados mediante procedimentos de análise, mas não apenas a partir da experiência imediata. O conhecimento teórico emerge da análise do papel e da função de relações internas entre os elementos que compõem um sistema integral. Tal análise não visa apenas descrever ou categorizar objetos, mas compreender sua gênese, estrutura e lógica a partir de uma relação universal.

Conforme afirma Davydov (1988), esse tipo de conhecimento permite ao sujeito identificar a base genética do sistema, a partir da qual todas as manifestações particulares podem ser compreendidas como expressões do universal. A formação de conceitos demanda, portanto, processo psíquico de generalização.

Davydov (1982) explicita que o processo de generalização

[...] é usado para designar múltiplos aspectos do processo assimilativo do conhecimento por crianças em idade escolar. O processo de generalização se refere à transição da criança da descrição das propriedades de um objeto individualizado para a descoberta e separação dele dentro de uma classe inteira de objetos semelhantes. Aqui, a criança encontra e destaca alguns atributos estáveis que se repetem nesses objetos. Para os trabalhos psicodidáticos é típica a seguinte afirmação: "... realiza-se a generalização, isto é, se reconhecem como comuns as qualidades parecidas em todos os objetos do mesmo tipo ou classe [pág. 77]¹⁵ (Davydov, 1982, p.13, tradução nossa).¹⁶

Logo, a generalização se caracteriza como via fundamental para que possamos estabelecer relações e formular conceitos. De acordo com a Teoria Histórico-Cultural, o papel da escola é promover a apropriação dos conceitos científicos. Mas, como atingir esse desafiador objetivo?

¹⁵ "Didaktika", traducido del alemán. Moscú, Ediciones de la ACP de la RSFSR, 1959 (Davydov, 1982, p.13).

¹⁶ "[...] emplease para designar múltiples aspectos del proceso assimilativo de los conocimientos por los escolares. el proceso de eneralización, por lo común viene a señalarse el tránsito del niño de la descripción de propiedades de un objeto individualizado a su hallazgo y separación en toda una clase de objetos similares. Aquí el niño encuentra y destaca algunos atributos estables que se repiten em dichos objetos. Para los trabajos psicológico-didáticos es típica la siguiente tesis: "... procédase a generalizar, o sea, las cualidades análogas en todos los objetos del mismo tipo o classe vienen a considerarse comunes [108, pág. 77]" (Davydov, 1982, p.13).

Vigotski (2010), a partir da teoria materialista dialética, investigou a generalização nos processos de desenvolvimento do pensamento e da linguagem. Para ele, a generalização se refere à forma como o homem compreende a realidade mediada pelo signo, principalmente, pela palavra, que permite generalizar a realidade e abstrai dela traços gerais. Vigotski (2001) acrescenta que generalização e significado da palavra são sinônimos, portanto, toda generalização, toda formação de conceitos é um “[...] ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível do pensamento. Consequentemente, estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento” (Vigotski, 2001, p. 398).

Ainda de acordo com Vigotski (2000), o signo e a palavra permitem ao indivíduo dominar e conduzir suas próprias operações psíquicas, controlando sua atividade e orientando-a de forma a suprir suas necessidades de conhecimento. Assim, para o pesquisador, a criança, utilizando a palavra, direciona sua atenção para determinadas características do objeto a ser apropriado. Servindo-se das palavras, ela sintetiza, simboliza o conceito abstrato e o utiliza como signo. Ao se apropriar de conceitos científicos, vários conhecimentos entram em relação. Quando uma palavra nova é aprendida pela criança, no início, ela é uma generalização do tipo elementar, mas, aos poucos, à medida que a criança se apropria do conceito, essa palavra é substituída por generalizações de tipo mais complexo, culminando no processo de formação de conceitos genuínos.

De acordo com a Teoria Histórico-Cultural, o pensamento por conceitos possibilita que os sujeitos compreendam a realidade das outras pessoas e delas mesmas. Utilizando os postulados marxistas, Vygotski (2006, p. 78-79) afirma que

[...] o pensamento em conceitos é o meio mais adequado para conhecer a realidade porque penetra na essência interna dos objetos, já que a natureza dos mesmos não se revela na contemplação direta de um ou outro objeto isolado, senão por meio dos nexos e relações que se manifestam na dinâmica do objeto, em seu desenvolvimento vinculado a todo o resto da realidade. O vínculo interno das coisas se descobre com ajuda do pensamento por conceitos, já que elaborar um conceito sobre algum objeto significa descobrir uma série de nexos e relações do objeto dado com toda a realidade, significa incluí-lo no complexo sistema dos fenômenos.¹⁷

O conceito, segundo a lógica dialética, não inclui somente o geral, senão também o particular e o singular. Ele é o resultado de conhecimento duradouro e profundo do objeto,

¹⁷ “*El pensamiento en conceptos es el medio más adecuado para conocer la realidad porque penetra en la esencia interna de los objetos, ya que la naturaleza de los mismos no se revela en la contemplación directa de uno u otro objeto por aislado, sino en medio de los nexos y las relaciones que se ponen de manifiesto en la dinámica del objeto, en su desarrollo vinculado a todo el resto de la realidad. El vínculo interno de las cosas se descubre con ayuda del pensamiento en conceptos, ya que elaborar un concepto sobre algún objeto significa descubrir una serie de nexos y relaciones del objeto dado con toda la realidad, significa incluirlo en el complejo sistema de los fenómenos*” (Vygotski, 1996, p. 78-79).

construído a partir de relações sócio-históricas. Não se detém somente na aparência dos fenômenos, mas busca estabelecer relações com conceitos anteriormente apropriados.

De acordo com Moura, Sforzi e Araújo (2011, p.44), os conceitos são instrumentos simbólicos que possibilitam ações mediadas que relacionam objetos e fenômenos. Para esses pesquisadores:

[...] se, diante de um objeto estranho ao nosso cotidiano, somos informados de que se trata de um instrumento musical, a palavra “instrumento musical” remete-nos a conceitos que subsidiam nosso pensamento a respeito de quando ele é utilizado, com que finalidade e quais os possíveis modos de ação com ele. No entanto, se nos dissessem que se trata de uma “peça de uma máquina”, os conceitos de “peça” e “máquina” induziriam outros pensamentos, outras imagens mentais em face do mesmo objeto. Os conceitos tornam-se instrumentos nossos quando conseguimos pensar com eles, estabelecer relação entre seu significado social e o sentido pessoal que lhes atribuímos.

Isto posto, depreendemos que generalizar é formar significados sobre a realidade circundante, seja ela física, social ou intelectual. Assim, tomando como base a linguagem matemática, especificamente a algébrica, torna-se imprescindível tratarmos de processos de generalização de conceitos algébricos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, considerando que estes podem se manifestar de diferentes modos ou linguagens, ou seja, não precisam ser materializados por meio de simbolismo alfanumérico, mas sim, por meio de desenvolvimento de princípios didáticos e ações docentes que se mostram favoráveis à promoção da aprendizagem conceitual dos estudantes na perspectiva de formação do pensamento teórico desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Vygotsky (2017, p. 114) afirma que “[...] o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento”. Isto porque a aprendizagem, resultante do ensino, promove o desenvolvimento, impulsionando-o. Assim, a atividade de ensino deve adiantar-se ao desenvolvimento do estudante e incidir sobre o que o autor conceitua como Zona do Desenvolvimento Iminente (ZDI), um de seus mais conhecidos conceitos.

Segundo Vigotski (2021), a ZDI trata-se de

[...] conceito relacionado ao problema da imitação [...]. Com a ajuda da imitação numa atividade coletiva, com a orientação de adultos, a criança é capaz de fazer muito mais e, além disso, fazer com compreensão, independentemente. A diferença entre o nível de resolução de problemas acessíveis com a orientação de adultos e o nível de solução de problemas acessíveis numa atividade independente define a zona de desenvolvimento iminente da criança. O que a criança está em condição de fazer com ajuda do adulto indica sua zona de desenvolvimento iminente. O que a criança faz hoje com a ajuda dos adultos, amanhã será capaz de fazer independentemente. Desse modo, a zona de desenvolvimento iminente nos ajudará a determinar o dia seguinte da criança, o estado dinâmico de seu desenvolvimento, que leva

em consideração não apenas o que foi alcançado, mas também o que está em processo de amadurecimento (Vigotski, 2021, p.257-259).

Isto posto, para organizar um tipo de ensino que resulte em aprendizagem e, por sua vez, promova desenvolvimento que culmine na possibilidade de agir com autonomia é preciso compreender como se dá o processo de formação dos conceitos científicos pelos estudantes, e, a partir disso, criar métodos de ensino eficientes. Destacamos que o conhecimento sobre as leis do desenvolvimento (isso inclui as funções psicológicas superiores) é aspecto fundamental para organização do ensino, pois fornece subsídios necessários ao entendimento sobre como se desenvolvem as máximas capacidades humanas.

Martins (2013, p.191), explicita que a construção do conhecimento

[...] têm sua origem nas sensações e percepções, todavia, não se esgotam nelas. Essa superação é tarefa, fundamentalmente do pensamento, graças ao qual se aprende mediamente o que é dado imediatamente pela captação sensorial”. O pensamento, visando à descoberta das conexões existentes entre os dados, coloca a descoberto novas propriedades, não disponibilizadas pela sensibilidade imediata. Assim, permite a construção da imagem do objeto em suas vinculações internas abstratas.

Para Martins (2013), o pensamento como processo funcional, visa

[...] o estabelecimento de conexões mentais entre os dados captados da realidade, imbricando-se à linguagem no curso de sua formação. O avanço qualitativo verificado tanto no pensamento quanto na linguagem resulta exatamente do fato que, ao se entrecruzarem, mudam completamente suas estruturas internas e o “lugar” que ocupam na orientação do comportamento. O pensamento, tornando-se verbal, e a linguagem, intelectual, acarretam transformações no âmbito de todas as funções psíquicas, determinando a própria instituição do psiquismo como sistema interfuncional complexo (Martins, 2013, p.191).

Assim, por meio de avanço qualitativo da linguagem, se formam os complexos processos de regulação das próprias ações do ser humano, condição necessária para a genuína formação de conceitos, que, segundo Vygotski (2001, p.169, tradução nossa)

[...] surge quando uma série de atributos que foram abstraídos se sintetizam novamente e quando a síntese abstrata conseguida desse modo se torna a forma fundamental do pensamento, por meio da qual a criança percebe e atribui significado à realidade que a cerca. Ali, como já dissemos, o papel decisivo no processo de formação do conceito genuíno corresponde à palavra. Servindo-se da palavra, a criança dirige deliberadamente sua atenção para determinados atributos, servindo-se da palavra os sintetiza, simboliza o conceito abstrato e opera com ele como o signo superior entre todos os que foram criados pelo pensamento humano.¹⁸

¹⁸ “[...] surge cuando una serie de atributos que han sido abstraídos se sintetizan de nuevo y cuando la síntesis abstracta conseguida de esse modo se convierte en la forma fundamental del pensamiento, a través de la cual el niño percibe y atribuye sentido a la realidad que le rodea. Ahí, como ya hemos dicho, el papel decisivo en el proceso de formación del concepto genuíno corresponde a la palabra. Sirviéndose de la palabra, el niño dirige deliberadamente su atención hacia determinados atributos, sirviéndose de la palabra los sintetiza, simboliza el

Sobre o processo de abstração, um componente da generalização e aspecto associado à formação de conceitos, Davydov (1982, p.17, tradução nossa) explicita que “A generalização deve ser examinada em uma relação inseparável da operação de abstração”¹⁹, ou seja, o processo de abstração demanda generalização, já que resulta do desenvolvimento da capacidade de abstração do sujeito, tendo como base certos atributos particulares e invariantes do objeto analisado. De acordo com Davydov (1982, p. 17, grifo do autor, tradução nossa),

Separar como geral uma certa qualidade implica desagregá-la de outras qualidades, o que permite à criança transformar a qualidade geral em objeto independente e singular de suas ações subsequentes (o atributo geral é designado com algum signo: vocábulo, desenho gráfico etc.). O conhecimento do geral, sendo resultado do fato comparativo e de sua fixação no signo, constitui sempre algo *abstrato, inconcreto, imaginável*.²⁰

Pelo exposto, fica evidente que a abstração, que é a separação do geral e sua confrontação com o particular, é um elemento construtivo da atividade mental generalizadora do sujeito. Para Rosa, Moraes e Cedro (2016), esse processo abstrato de identificação de um objeto prescinde não somente da abstração, mas também da síntese, para que ocorra. Assim, para os pesquisadores

Todo processo de generalização permite compreender a relação entre a percepção, a representação e o conceito, ao considerarmos como ponto de partida os objetos e fenômenos singulares, sensorialmente perceptíveis, do mundo que nos rodeia. segundo essa compreensão, quando solicitamos aos estudantes que observem (percepção) os objetos e fenômenos e que expliquem os resultados das suas observações pelos meios mais diversos (representação), estamos possibilitando a eles que, de um modo gradual, cheguem à formação do conceito. Ou seja, nessa perspectiva, o processo de generalização parte da intuição e da percepção (Rosa; Moraes; Cedro, 2016, p. 80-81).

Nessa perspectiva, cabe destacar, que no modelo escolar atual, o ensino sempre tem como ponto de partida as percepções e representações, que surgem por meio da ação do sujeito sobre o objeto de conhecimento. Com base nos autores da Teoria Histórico-Cultural,

concepto abstracto y opera con él como el signo superior entre todos los que há creado el pensamiento humano”(Vygotski, 2001, p.169).

¹⁹ *Por lo común, el proceso generalizador se analiza indisolublemente ligado al proceso de abstracción* (Davydov, 1982, p.17).

²⁰ *“Separar como general una cierta cualidad implica desagregarla de otras cualidades, lo que le permite al niño transformar la cualidad general en objeto independiente y singular de sus actos subsiguientes (el atributo general se designa con algún signo: vocablo, diseño gráfico, etc. El conocimiento de lo general, siendo resultado del hecho comparativo y de su fijación en el signo, constituye siempre algo **abstrato, in concreto, imaginable**”* (Davydov, 1982, p. 17, grifo do autor).

compreendemos que esse aspecto intuitivo, também presente nos materiais didáticos analisados neste texto, não é suficiente para o desenvolvimento integral do pensamento do sujeito.

Davydov (1987, 1988 *apud* Rosa; Moraes; Cedro 2016) explicita que no modelo de escola tradicional prevalece o método intuitivo, que promove um tipo de ensino que reside na dimensão utilitária e empírica, própria da prática cotidiana, do senso comum das pessoas. O pensamento desenvolvido nesse tipo de escola “[...] tem um caráter classificador, catalisador e assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e os traços externos de objetos e fenômenos isolados na natureza e da sociedade” (Davydov, 1987 *apud* Rosa; Moraes; Cedro, 2016, p. 81-82).

Davydov (1988) tece críticas à organização do ensino escolar em que predominam métodos de ensino baseados na lógica formal do conhecimento. Segundo ele, nesse tipo de ensino, para a elaboração autônoma de conceitos,

[...] os alunos analisam e compararam entre si uma quantidade bastante grande de objetos idênticos ou parecidos, especialmente selecionados e propostos pelo professor. São examinados consecutivamente as qualidades isoladas de diferentes objetos e se determina em que se diferenciam ditos objetos uns dos outros. Dá-se a seleção das qualidades comuns para todos os objetos... e estas últimas dão, no final de contas, a definição do conceito em forma de enumeração das qualidades gerais para os objetos que entram no conteúdo do correspondente conceito” (Davydov, 1988, p.105).

O pensamento, nesse formato, ascende do sensorial-concreto para o mental-abstrato expresso na palavra, não resultando em pensamento teórico. Apesar de extensa, apresentamos a seguir uma síntese das principais diferenças entre as abstrações, generalizações e conceitos empíricos e teóricos, apresentada por Davydov (1988, p. 154-155):

- 1) Os conhecimentos empíricos se elaboram no processo de comparação dos objetos e representações sobre eles, que permite separar as propriedades iguais, comuns. Os conhecimentos teóricos surgem no processo de análise do papel e da função de certa relação peculiar dentro do sistema integral que, ao mesmo tempo, serve de base genética inicial do todas as manifestações.
- 2) No processo de comparação ocorre a separação da propriedade formalmente geral de certo conjunto de objetos, o conhecimento desta propriedade permite relacionar objetos isolados a uma classe determinada, independentemente de eles estarem ou não vinculados entre si. O processo de análise permite descobrir a relação geneticamente inicial do sistema integral como sua base universal ou essência.
- 3) Os conhecimentos empíricos, apoiando-se nas observações, refletem nas representações as propriedades externas dos objetos. Os teóricos, que surgem sobre a base da transformação mental dos objetos, refletem suas relações e conexões internas “saindo” assim dos limites das representações.
- 4) Formalmente, a propriedade geral se separa como algo pertencente à ordem das propriedades particulares e singulares dos objetos. Nos conhecimentos teóricos se determina o nexos da relação universal, realmente existente, do sistema integral com suas diferentes manifestações, o elo do universal com o singular.

5) O processo de concretização dos conhecimentos empíricos consiste em selecionar ilustrações, exemplos, que se encaixam na correspondente classe dos objetos. A concretização dos conhecimentos teóricos consiste na dedução e explicação das manifestações particulares e singulares do sistema integral a partir de seu fundamento universal.

6) As palavras-termos são o meio indispensável para expressar os conhecimentos empíricos. Os conhecimentos teóricos se expressam, sobretudo, nos procedimentos mentais da atividade mental e posteriormente com a ajuda de deferentes meios simbólicos e semióticos, em particular as linguagens natural e artificial.

Conceitos como abstrações, generalizações e conceitos empíricos e teóricos, apresentados por Davydov, ocupam lugar central na teoria do desenvolvimento do pensamento humano.

Como discutido nesta seção, o pensamento teórico decorre do empírico, ou do pensamento baseado na lógica formal que apenas categoriza ou nomeia os fenômenos. Segundo Davydov (1988, p.127),

O conteúdo específico do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial. O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetual-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como experimentação objetual sensorial peculiar. Depois, este experimento adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, aos experimentos realizados mentalmente.

Então, ao atuar com o pensamento teórico, o sujeito opera com conceitos. Davydov (1988) explica que o pensamento teórico ascende do concreto (caótico-sensorial) ao abstrato (geral-universal), em direção ao concreto (pensado), permitindo compreender a realidade para além de sua aparência externa, isto é, permite revelar a essência do movimento do objeto.

No pensamento teórico, o próprio concreto aparece duas vezes: como ponto de partida da contemplação e representação, reelaboradas no conceito, e como resultado mental da reunião das abstrações. Aqui é importante ressaltar que, no fim das contas, o caráter “concreto” ou “abstrato” do conhecimento não depende de estar próximo das representações sensoriais, mas de seu próprio conteúdo objetivo. Se o fenômeno ou objeto é examinado pelo homem independentemente de certa totalidade, como algo isolado e autônomo, trata-se somente de um conhecimento abstrato, por mais detalhado e visível que seja, por mais “concretos” que sejam os exemplos que o ilustram. Ao contrário, se os fenômenos ou objeto é tomado em unidade com o todo, se é examinado na sua relação com suas outras manifestações, com sua essência, com a origem universal (lei), trata-se de um conhecimento concreto, mesmo que seja expresso com a ajuda dos signos e símbolos mais “abstratos” e “convencionais” (Davydov, 1988, p. 151).

A materialização do pensamento teórico, por sua vez, resulta da transformação ativa e consciente dos objetos no plano mental, possibilitando a apreensão de suas conexões internas e

o rompimento com os limites da aparência imediata. Ao contrário do conhecimento empírico o conhecimento teórico, permite estabelecer o nexo entre o universal e o singular, explicando a manifestação individual como forma determinada do sistema integral. A própria concretização do conhecimento assume formas distintas: o empírico se concretiza pela ilustração de exemplos, enquanto o teórico se concretiza pela dedução lógica das manifestações singulares a partir de seu fundamento universal. O empírico se mostra acumulativo; o teórico, por sua vez, é estrutural e sistemático, permitindo explicar, prever e transformar a realidade.

Em síntese, os princípios e conceitos apresentados nesta seção possibilitam perceber que para o desenvolvimento do pensamento teórico, se faz necessário organizar o ensino de modo que o estudante realize atividades voltadas à formação desse tipo de pensamento, no caso em questão, do pensamento algébrico. Para isto, Davídov (1982) e Vigotski (2001) indicam que o ensino escolar deve proporcionar às crianças apropriação de conceitos genuinamente científicos, desenvolver nelas o pensamento científico e as capacidades para o sucessivo domínio, sempre ascendente, de novos conhecimentos científicos.

Davydov (1988), aprofundando as proposições de Vigotski (2001) acerca da formação conceitual, defende que a escola deve ensinar as crianças a pensar teoricamente. Assim, tendo como premissa que o conhecimento teórico constitui o objetivo fundamental para o desenvolvimento psíquico humano, o pesquisador dedica-se à investigação da formação do pensamento teórico e da atividade de estudo, discutidos nas subseções, a seguir.

5.1 A formação do pensamento algébrico mediada por conceitos científicos

Como visto, Davydov (1988) um dos defensores do ensino que promove o desenvolvimento afirma que ensinar os alunos a pensar implica introduzi-los no caráter abstrato das operações mentais conforme a lógica dialética, ou seja, pressupõe levá-los a fazer abstrações e generalizações que possibilitam a formação de conceitos científicos e a resignificação da realidade.

Segundo Panossian (2014), a unidade entre abstração, generalização e formação de conceitos, partindo do geral para o particular, constitui o desenvolvimento do pensamento algébrico, por isso, é preciso promover um tipo de ensino no qual as generalizações teóricas envolvam as relações externas e internas do fenômeno em estudo, superando a aparência sensorialmente percebida, ou seja, permitindo descobrir “[...] uma inter-relação necessária dos

fenômenos particulares e singulares com a base geral de certa totalidade, descobrir a lei de formação da unidade interna dele” (Davydov, 1988, p. 152).

Para Davydov (1988), a generalização teórica segue um movimento de redução do concreto sensorial para o abstrato e depois de ascensão do abstrato ao concreto pensado, ou seja, um movimento concreto-abstrato-concreto, que permite a reprodução mental de um objeto em seu sistema integral, isto é, a formação do conceito teórico sobre este objeto.

Especialmente em relação à apropriação de conhecimentos algébricos, Moretti, Virgens e Romeiro (2021, p.1464, grifo dos autores) explicitam que:

[...] podemos compreender que, ao analisarmos fenômenos que expressem relações entre operações ou variações entre grandezas de forma mediada por conceitos algébricos, as diferentes manifestações semióticas possíveis, resultantes dessa análise, expressam uma manifestação objetiva do pensamento teórico. Assim, entendemos que *o pensamento algébrico é o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos*.

Isto posto, depreendemos que o desenvolvimento do pensamento algébrico não se restringe ao uso de símbolos convencionais ou ao emprego de procedimentos operatórios formais, como frequentemente é abordado no ensino tradicional. Trata-se, antes, de modo específico de organizar a experiência intelectual com base em relações e generalizações sustentadas por sistemas de significação que integram diferentes registros semióticos. Nessa perspectiva, as representações simbólicas, gráficas, tabelares, verbais ou gestuais constituem mediações necessárias, que permitem aos estudantes transitar entre diferentes modos de objetivação do fenômeno estudado.

Assim, a álgebra deixa de ser considerada como linguagem voltada à manipulação de incógnitas e se torna campo teórico que possibilita compreender e explicar regularidades, variações e dependências entre grandezas. Isso significa reconhecer que a atividade algébrica envolve operar sobre relações e não apenas sobre números, favorecendo a construção de modelos teóricos capazes de interpretar fenômenos matemáticos mediado por conceitos algébricos, permitindo a aproximação do sujeito com a essência do conhecimento algébrico.

Ao afirmar que o pensamento algébrico é uma forma de pensamento teórico mediado por conceitos algébricos, Moretti, Virgens e Romeiro (2021), situam-no no âmbito da atividade cognitiva complexa, cujo desenvolvimento requer a apropriação de ferramentas semióticas, conceituais e culturais. Isso implica reconhecer a natureza histórica e social do conhecimento algébrico, cuja objetivação se realiza a partir da interação do sujeito com práticas culturalmente constituídas, que permitam a aproximação do sujeito com a essência do conhecimento algébrico.

Segundo Panossian (2014, p.110),

O estabelecimento de nexos conceituais, como possibilidade de concretização do pensamento teórico, permite a compreensão do estudo lógico (do movimento do pensamento) e histórico (do movimento dos fenômenos do mundo objetivo) dos conceitos, por meio de formas de pensamento teórico (processos de abstração, generalização e formação de conceitos), de análise e síntese, e no movimento de ascensão do abstrato ao concreto, movimento da lógica dialética.

Isto posto, cabe destacar que nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a identificação dos nexos conceituais da álgebra não significa antecipar conteúdos algébricos propostos aos Anos Finais, nem que os Anos Iniciais do Ensino Fundamental precisam se limitar ao conhecimento aritmético a partir de perspectiva lógico-formal, que propõe o ensino com base na apropriação de procedimentos e regras limitadas à aparência dos casos sensíveis, mas que, o desenvolvimento de conhecimentos algébricos nos Anos Iniciais perpassa o trabalho no qual o sujeito seja colocado diante da necessidade de abstrair, reconhecendo e manifestando por diferentes meios semióticos de tais relações. A princípio, o que se busca é desenvolver uma forma de pensamento que reconheça relações gerais e sua potencialidade na previsão de fatos para compreensão da realidade em movimento.

Como o pensamento teórico se desenvolve com a mediação de conceitos científicos, entendemos que como campo de conhecimento da matemática, a álgebra se torna um importante objeto de estudo no movimento de desenvolvimento do pensamento teórico desde o início da educação escolar sistematizada. Com a abstração dos nexos conceituais que revelam o que é essencial ao conhecimento algébrico e a generalização teórica sobre determinado objeto de conhecimento do campo algébrico, torna-se possível a formação de conceitos relacionados a esse objeto.

Depreendemos que assumir a álgebra como Unidade Temática de ensino nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental implica pensar em condições para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, nesse contexto de ensino, observarmos como se dá a articulação entre a aritmética e a álgebra.

Na segunda sessão desta dissertação, destacamos que no contexto escolar brasileiro, anteriormente à BNCC, a álgebra constava nos currículos oficiais como objeto de estudo apenas nos Anos Finais do Ensino Fundamental, o que acarretou a compreensão de que o pensamento aritmético fosse pré-requisito para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Com base nesta premissa, acreditamos que, os ensinamentos de álgebra, geometria e aritmética devam estar articulados a fim de que as crianças sejam apresentadas a situações que possibilitem a generalização delas, bem como a compreensão da lógica das operações, não se limitando à

reprodução de modelos numéricos. Assim, o ensino e a aprendizagem da aritmética podem ser ressignificados pelo pensamento algébrico, que permite a compreensão da estrutura das operações aritméticas de modo geral, além de promover sua analiticidade e generalização.

Para Radford (2013 *apud* Vergel, 2021, p.85, grifo do autor), “[...] a ideia do *analítico* é a chave na conceitualização de tipo algébrica”, ou seja, a generalização característica do pensamento algébrico

[...] envolve a natureza analítica explicativa para raciocinar algebricamente, de modo que a lei geral é deduzida conscientemente, e não ‘adivinhada’ como pode acontecer nas relações aritméticas. Pensar algebricamente é operar com o desconhecido, o que significa operar como se o desconhecido fosse sempre conhecido (Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p.1465).

Assim, segundo Radford (2018 *apud* Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p.1465)

[...] o pensamento algébrico caracteriza-se por recorrer a quantidades indeterminadas, lidando com elas de forma analítica e podendo representar tais quantidades indeterminadas e operações de modos próprios e não necessariamente utilizando um simbolismo alfanumérico, uma vez que, “embora as quantidades indeterminadas possam ser expressas através de simbolismo alfanumérico, elas também podem ser expressas através de outros meios semióticos, sem prejuízo da natureza algébrica do pensamento”²¹. Nesse sentido, a compreensão de generalização algébrica proposta por Radford (2018), se olhada a partir das contribuições de Davídov (1988)²², parece remeter a um processo mediado por conceitos algébricos e, desta forma, se aproximaria de um pensar teórico.

Nesse contexto, observamos a necessidade de o ensino da aritmética ser subsidiado por abordagem algébrica, voltado para as relações gerais de seus conceitos referentes à sua essência e não à sua aparência. Ao lidar com uma operação aritmética, por exemplo, pretende-se que o aluno supere a tendência de simplesmente operar um algoritmo de forma cristalizada a fim de encontrar um resultado numérico sem significado. O objetivo, então, é permitir que o aluno consiga identificar e compreender a sua estrutura e as regras gerais presentes nela ao explorar a aritmética generalizada.

Moretti, Virgens e Romeiro (2021) explicitam que Radford, ao investigar a emergência do pensamento algébrico em crianças na generalização de sequências e padrões, reconhece diferentes estratégias de generalização que as levam a distinguir a generalização aritmética da generalização algébrica. Para os pesquisadores, o ponto crucial que diferencia essas duas estratégias de pensamento reside na analiticidade, específica da generalização algébrica.

²¹ Os autores referem-se ao texto cuja referência é: RADFORD, Luis. *The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school*. In: KIERAN, C. (org.). **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds**: The global evolution of na emerging field of research and practice. New York: Springer, 2018. p.3-25.

²² Trata-se do texto de Davídov (1988) indicado na lista de referências desta dissertação.

Radford (2018 *apud* Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p.1465) defende nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a existência de generalizações aritméticas sofisticadas, que podem se manifestar quando o estudante recorre a quantidades indeterminadas e até algum tipo de simbolismo, mas a analiticidade encontra-se ausente. Assim,

[...] quando um problema envolvendo variação de grandezas é resolvido por meio de classificação ou agrupamento de elementos semelhantes, utilizando recursos como a ‘tentativa e erro’ ou a indução aritmética, para chegar a uma regra geral, entendemos que o movimento fica limitado ao campo do pensamento empírico (Radford, 2018 *apud* Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p.1465).

Assim, embora os movimentos típicos do pensamento empírico e do pensamento teórico se iniciem no mesmo ponto – o concreto sensorial, que poderia ser associado à ideia de generalização próxima – o desenvolvimento da forma desses pensamentos é diferente.

A generalização algébrica não necessita da resolução particular da situação, mas sim da análise geral da sua lei de formação que pode ser expressa por diferentes meios semióticos (gestos, palavras, desenhos, símbolos etc.). Radford (2015 *apud* Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p. 1468) relaciona essas diferentes formas de manifestação da generalização algébrica com o que ele chama de camadas de generalidade.

Radford (2015 *apud* Moretti; Virgens; Romeiro, 2021) identifica três camadas de generalidade algébrica: a factual, a contextual e a simbólica, que são percebidas de maneira progressiva pelos alunos. Partindo do estudo da generalização algébrica de padrões, o autor caracteriza cada uma dessas camadas de generalidade a partir da análise dos registros semióticos da atividade dos estudantes e, apesar dessas camadas possuírem suas especificidades, todas manifestam algum nível de analiticidade. Assim,

[...] a camada de generalização factual expressa a compreensão das relações gerais de um padrão por meio de palavras, frases, gestos factuais, de modo que “a fórmula é expressa através de instâncias particulares da variável” (RADFORD, 2018, p. 14). À medida que a relação entre variáveis e sua generalidade ganha o caráter verbal, desvincilhando-se do caso particular, a generalização avança para contextual. Segundo Radford (2018, p. 22), “em generalizações contextuais, em contraste, a fórmula é expressa em um nível mais geral; as variáveis e sua relação tornam-se explícitas e são referidas por meio de elementos contextuais – divisões linguísticas espaciais”. Já a camada simbólica é uma forma sofisticada de manifestar a forma de pensar sobre um padrão. Nesta camada de generalização, são utilizados os meios semióticos simbólicos que expressam a maneira geral de formação de uma sequência. Esse nível de generalização muda a forma de pensar e ser do sujeito, dentro do contexto do pensamento algébrico (Moretti; Virgens; Romeiro, 2021, p.1468).

Pelo exposto, observamos que a generalização algébrica, que pode se manifestar em diferentes camadas, revela a analiticidade no trato das relações entre grandezas e a mediação do conceito teórico. Por outro lado, os movimentos de adivinhação (tentativa e erro), indução ou análise, de particularidades aritméticas, podem conduzir a uma generalização aritmética que, por sua vez, não é desenvolvvente do pensamento algébrico.

Compreender as estruturas aritméticas corroboram o movimento de apreensão das relações algébricas, assim como a aproximação dos nexos conceituais e o desenvolvimento do pensamento algébrico podem ressignificar cálculos aritméticos outrora cristalizados e mecanizados; logo, na relação entre o conhecimento aritmético e conhecimento algébrico, um não é precedente do outro e seu ensino podem e devem coexistir (Santos; Moretti, 2024, p.6).

Isto posto, depreendemos que ao ancorar o ensino de Matemática na memorização e na repetição mecânicas, a perspectiva empírica acaba por limitar o processo de pensamento dos estudantes e, conseqüentemente, o desenvolvimento psíquico humano. Esse depende da qualidade dos nexos conceituais que são estabelecidos com o mundo, isto é, depende do grau de organização das atividades em relação aos seus fins e motivos, bem como do grau de subordinação dessa organização à consciência sobre si e à autoconsciência. Acreditamos que o indivíduo, ao utilizar os conhecimentos científicos das diversas áreas de conhecimento como instrumento do pensamento tem possibilidade de interagir com o mundo e alcançar princípios gerais que proporcionam o desenvolvimento humano.

É por isso que nos opomos aos materiais didáticos, dentre eles o EMAI, organizados de forma que os conteúdos neles veiculados sejam apropriados pelos aprendizes como resultado da simples comparação entre fenômenos particulares. Esses materiais conduzem o pensamento da criança a mover-se da observação de um objeto para a identificação de suas aparências, por meio da percepção de características de identidade, similaridade ou de elementos comuns que são designados apenas por palavras.

Um exemplo dessa situação pode ser encontrado em situações e aprendizagem apresentadas na seção quatro desta dissertação quando abordamos a formação de padrões. Para fazer com que as crianças se familiarizem com essa noção, são apresentadas a elas figuras repetitivas. A partir delas, as crianças observam as sequências, as comparam, abstraem os atributos característicos dessas sequências, extraem as regularidades comuns e as nomeiam com signos numéricos ou figurais. Como resultado disso, temos um padrão numérico ou figural. Essa situação dificulta que as crianças desenvolvam conceitos científicos, pois, dependendo das intervenções didáticas feitas pelo professor, elas são induzidas a centrar sua atenção às particularidades do empírico.

Uma possibilidade de superação desse modelo de ensino é, segundo Davydov (1982), o movimento do concreto (caótico-sensorial) ao abstrato (geral-universal), depois de ascensão novamente ao concreto (pensado), que é um dos princípios didáticos necessários para a organização do ensino que possibilite a formação do pensamento teórico, ou seja, “[...] é necessário mostrar **francamente** às crianças a essência abstrata das Matemáticas, inculcar-lhes a faculdade de fazer abstrações e de aproveitar sua força *teórica*”²³ (Davydov, 1982, p.157, grifo do autor).²⁴

Desse modo, para que ocorra a formação do pensamento teórico, é necessária a organização do ensino de modo que o estudante esteja em atividade para a formação desse tipo de pensamento. Davydov (1982) afirma que é necessário, tendo como bases as teses gerais da área do saber e não dos casos particulares, buscar a célula dos conceitos, isto é, a sua gênese e a sua essência. Tais encaminhamentos de ensino são apresentados no tópico a seguir.

5.2 Teoria da atividade de estudo como possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico

O conceito atividade de estudo proposto por Davydov (1988) decorre de outro mais amplo, já discutido anteriormente, nesta seção: o de atividade, que tem sua essência nos pressupostos do materialismo dialético, os quais segundo Marx (2004) em seus primeiros escritos, aponta a atividade laboral humana como a que dá origem ao desenvolvimento histórico-social dos homens e, assim, também ao desenvolvimento individual.

A categoria filosófica da atividade é a abstração teórica de toda a prática humana que tem um caráter histórico-social. A forma inicial de todos os tipos de atividade humana é a prática histórico-social do gênero humano, ou seja, a atividade laboral, coletiva, adequada, sensório-objetual, transformadora, das pessoas. Na atividade se revela a universalidade do sujeito humano (Davydov, 1988, p.27).

Vigotski (2017) alinhado à concepção marxista buscou compreender por meio de seus estudos como “[...] se desenvolvem socialmente as formas individuais do psiquismo” (Moretti, 2016, p.25), isto é, a formação da consciência humana em sua relação com a atividade. O estudioso formulou o conceito de atividade “como mediação, gerando o modelo triangular da

²³ “[...] es necesario mostrarles **francamente** a los niños la esencia abstracta de las matemáticas, inculcarles la facultad de hacer abstracción y de aprovechar su fuerza *teórica*” (Davydov, 1982, p.157, grifo do autor).

relação do sujeito com o objetivo mediado por artefatos materiais e culturais” (Libâneo, 2004, p.9).

Aprofundando os estudos vigotskianos, Leontiev (2017) desenvolveu a Teoria da Atividade, por meio da qual buscou compreender a estrutura da atividade externa do homem e suas relações com os processos psíquicos já discutidos nesta seção. Como visto, a atividade compreendida como “[...] aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele” (Leontiev, 2017, p.68), é constituída de necessidades e motivos, objetivos e ações, tarefas e operações, e; sobretudo de desejo, elemento posteriormente, acrescentado por Davidov (*apud* Puentes *et al.*, 2021) à essa estrutura, ampliando a formulação inicialmente realizada por Leontiev.

Acredito que o desejo deve ser considerado como um elemento da estrutura da atividade. [...] Necessidades e desejos compõem a base sobre a qual as emoções funcionam. [...] o termo *desejo* reproduz a verdadeira essência da questão: as emoções são inseparáveis de uma necessidade. [...] Em seus trabalhos, Leontiev afirma que as ações são conectadas às necessidades e motivos. Discordo desta tese. Ações, como formações integrais, podem ser conectadas somente com necessidades baseadas em desejos – e as ações ajudam na realização de certas tarefas a partir dos motivos. [...] É esta a estrutura da atividade que tentei apresentar-lhes. [...] Os elementos são os seguintes: desejos, necessidades, emoções, tarefas, ações, motivos para as ações, meios usados para as ações, planos (perceptual, mnemônico, pensamento, criativo) – todos se referindo à cognição e, também, à vontade (Davidov, 1999, p. 41 *apud* Libâneo, 2004, p.13).

Pautado nos princípios da Teoria da Atividade, considerando uma forma de ensino que colabore com o desenvolvimento psíquico da criança, Davydov (1988) propõe a atividade de estudo como sendo a principal atividade que

[...] se forma nas crianças de seis a dez anos de idade. A consciência teórica e o raciocínio surgem, as capacidades correspondentes (reflexão, análise, planejamento mental) e [...] as necessidades percebidas e motivos relacionados às tarefas escolares (aprendizagem) são desenvolvidas, em jovens em idade escolar, baseando-se na atividade (Davydov, 1988, p.72).

Dusavitskii (2014, p.80) define a atividade de estudo como sendo

[...] um método radicalmente novo de ensinar. Prevê a organização de atos independentes pelas crianças que asseguram sua análise e generalização substantivas do material de estudo. No processo de análise, as crianças descobrem a matriz inicial ou base comum que reflete o conteúdo e a estrutura do objeto de conhecimento dado.

Percebe-se que a atividade de estudo não é inata, ou seja, ela é uma atividade em que se aprende a realizar mediante processo de apropriação intencional e previamente organizado. Por

meio dessa atividade, as crianças se apropriam dos conhecimentos teóricos, que se caracterizam como os conteúdos da atividade de estudo.

Nessa perspectiva, para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos escolares do Ensino Fundamental, faz-se necessário o desenvolvimento de tarefas de estudo estruturadas e organizadas. A principal condição na formulação de uma tarefa de estudo é a resolução de um problema em que o conhecimento anterior do aluno é problematizado com a introdução de uma contradição para gerar uma situação de busca de solução. O processo de resolução do problema pode conduzir o aluno à situação de estudo.

A tarefa de estudo exige dos estudantes tipos de procedimentos como

[...] 1) a análise do material factual a fim de descobrir nele alguma relação geral que apresente uma vinculação governada por uma lei com as diversas manifestações deste material, ou seja, a construção da generalização e da abstração substantivas; 2) a dedução, baseada na abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em algum objeto integral, ou seja, a construção de seu “núcleo” e do objeto mental concreto; e 3) o domínio, neste processo de análise e síntese, do procedimento geral (“modo geral”) de construção do objeto estudado (Davydov, 1988, p.161).

Davydov (1988) estabelece, para cada tarefa de estudo, seis ações, que fornecem o caminho para a formação do pensamento teórico. São elas:

[...] transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado; modelação da relação universal na unidade das formas literal, gráfica e objetual; transformação do modelo da relação universal para estudar suas propriedades em forma pura; dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral; controle da realização das ações anteriores; avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada (Davydov, 1988, p.164).

A primeira ação de estudo, “transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado” (Davydov, 1988, p.64) tem a finalidade de explicitar a relação universal do objeto em estudo, ou seja, o problema dado ao aluno passa pela análise de seus dados, com o objetivo de se encontrar uma ideia geral que o organiza, isto é, uma relação na base da qual se encontra o procedimento geral de sua resolução.

A ação seguinte, “modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras” (Davydov, 1988, p.164), consiste na criação de um modelo representativo da relação universal, expresso em forma literal, gráfica ou objetivada e que será utilizado posteriormente na análise do objeto.

A terceira ação de estudo, “transformação do modelo da relação universal para estudar suas propriedades em ‘forma pura’” (Davydov, 1988, p.164) refere-se à transformação do

modelo com a finalidade de estudar a propriedade da relação universal que foi identificada inicialmente, ou seja, por meio desta ação, os alunos estudam as propriedades da relação universal do objeto como tal, em seu aspecto concreto e não apenas abstrato, extraindo as múltiplas manifestações particulares do objeto.

A quarta ação de estudo, “construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral”, consiste na dedução e elaboração de um sistema de tarefas particulares, cuja resolução requer procedimento geral que foi assimilado durante o desenvolvimento das ações anteriores.

A quinta ação de estudo, “controle da realização das ações anteriores” (Davydov, 1988, p.164), diz respeito ao controle do processo de desenvolvimento das ações anteriores. É a ação de assegurar a realização e execução correta das operações que compõem toda a tarefa. Nessa ação, os alunos refletem sobre as ações e os caminhos de pensamento, visando ao cumprimento do objetivo. Portanto, essa ação é fundamental para que o aluno possa resolver as diferentes tarefas particulares que fazem parte de determinado estudo.

A sexta ação de estudo, “avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada” (Davydov, 1988, p.164), é a avaliação referente à apropriação do procedimento geral obtido como consequência do desenvolvimento da tarefa de estudo dada. Ligada ao controle, a avaliação permite ao aluno e ao professor constatar como o aluno assimilou o procedimento de solução de sua tarefa de estudo, ou seja, se cumpriu ou não o objetivo da tarefa. Cabe destacar que as ações de controle e avaliação ocorrem durante toda a atividade de estudo, pois são elas que possibilitam ao aprendiz verificar se o conhecimento está ou não sendo apreendido.

Isso posto, podemos afirmar que ao realizar as ações relativas à Atividade de Estudo, a criança poderá se apropriar do conceito científico sobre o objeto estudado. A diferença principal dessa forma de ensino com outras é que os conceitos não são dados aos alunos, como ocorre, regularmente, nos formatos de ensino atual, mas são elaborados por etapas, pouco a pouco por meio da mediação da linguagem. Desse modo, a criança passa a compreender o fenômeno estudado como um todo e a generalizá-lo para casos particulares, torna-se mais autônoma.

5.3 Princípios de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem: uma possibilidade para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Ao longo deste texto, vimos que o desenvolvimento histórico da álgebra passou por diversos momentos e formas de representação. Além disso, observamos que as situações de aprendizagem apresentadas nos livros didáticos são sínteses da Matemática materializada ao longo da história humana.

Retomando o objeto de estudo desta dissertação, observamos que as situações de aprendizagem do EMAI, livro didático analisado neste texto, não têm colaborado para desenvolver nos estudantes o pensamento algébrico. Com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, vimos que o ensino de conceitos algébricos, em direção à formação do pensamento teórico, pressupõe compreender os nexos conceituais desses conceitos, que levam em consideração o movimento lógico e histórico de desenvolvimento desse conhecimento matemático.

Nessa perspectiva, é importante que as ações pedagógicas considerem o movimento de objetivação de conhecimentos, em especial, no que tange à generalização de padrões, aos cálculos com valores desconhecidos e às relações entre grandezas variáveis. É importante que sejam apresentadas, aos estudantes, situações de aprendizagem que lhes possibilitem entender o que são as grandezas e suas variações de modo que eles tenham contato com as necessidades humanas que deram origem a estes conceitos, isto é, os seus nexos conceituais.

Além disso, Moretti (2014) nos lembra que, segundo Kopnin (1978, p.161 *apud* Moretti, 2014, p.34), “[...] a essência do conceito é constituída de propriedades, indícios e relações que superam o “sensorialmente perceptível” por meio da abstração autêntica que generaliza não só forma, mas também conteúdo do objeto”. Assim, a tarefa que se apresenta ao professor, que organiza o ensino, é elaborar e propor situações, que suscitem necessidades de solução de problemas, similares àquelas produzidas historicamente, relacionadas à produção de conhecimento.

Segundo Moretti (2014. p.34)

No caso do ensino da Matemática, o desafio que se impõe ao professor é a proposição de problemas que coloquem, para os estudantes, situações que, para serem resolvidas, impliquem na análise e objetivação de elementos essenciais do conceito que se quer ensinar.

Moura e Lanner de Moura (1998) explicitam que as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), que podem se materializar em uma história virtual (ou seja, uma situação fictícia que se propõe a simular o movimento histórico factual), em um jogo ou em problemas que emergem de situações cotidianas não reproduzem a história humana, mas busca apresentar

em uma situação fictícia as necessidades humanas históricas que levaram à produção de conceitos.

As Situações Desencadeadoras de Aprendizagem possibilitam a análise da situação com base nos conhecimentos adquiridos ao longo da busca por soluções. Além disso, desencadeia no processo de busca de novos nexos conceituais, tipo de tensão que subsidia a solução do problema gerado na SDA. Para Virgens (2019, p.127), “[...] o Problema Desencadeador de Aprendizagem (PDA) se constitui como a essência da SDA. O PDA não é sinônimo da SDA nem, tão pouco, se confunde com ela, mas é seu elemento essencial”, que suscitará na SDA a necessidade que desencadeará o movimento de ensino (por parte do professor) e de aprendizagem (por parte do aluno) que possibilitarão que ambos entrem em atividade.

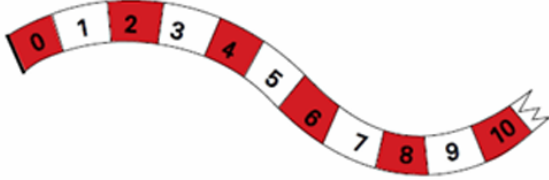
Sendo esse elemento essencial, o PDA pode aparecer no contexto do jogo, nas situações emergentes do cotidiano ou nas histórias virtuais, mas será sempre a “provocação” que, no contexto da organização consciente da atividade, subsidiará a constituição da SDA [...]. A SDA deve, portanto, potencializar um “algo a mais” no processo de aprendizagem, para além da solução em si e não apenas uma reconstrução dos passos já dados [...] (Virgens, 2019, p.128).

As situações desencadeadoras de aprendizagem que objetivam ensinar matemática, colocam o aluno em movimento, dessa forma, os problemas envolvidos nas SDA, não são problemas quaisquer, são PDA, que desencadeiam “[...] uma busca de solução, permite um avanço do conhecimento desse sujeito por meio do processo de análise e síntese e lhe permite desenvolver a capacidade de lidar com outros conhecimentos a partir dos conhecimentos que vai adquirindo à medida que desenvolve a sua capacidade de resolver problemas (Moura, 2000, p.35 *apud* Virgens, 2019, p.127).

A seguir, apresentamos a Situação Desencadeadora de Aprendizagem nomeada “As Tiras Coloridas”, que foi adaptada de Kindt *et al.* (2006) por Santos, Luvison e Moreira (2018) para ser desenvolvida com uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública municipal do interior de São Paulo, que possibilita, segundo as pesquisadoras, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Figura 21 – Tarefa 1: Tiras de números coloridos

Tarefa 1: Tira de números coloridos



Observe a tira de papel que inicia no número zero. Ela alterna números nas cores vermelha e branca.

1. Note que a ponta da direita é diferente da ponta da esquerda. O que você acha que isso indica?
2. Ainda prestando atenção nas cores dos números, responda:
 - a) O que os números que estão nos espaços brancos da tira de papel têm em comum?
 - b) Pense em um número bem grande que não está representado na tira. Registre esse número. _____. Esse número ocupa um espaço branco? _____. Como você sabe disso?
 - c) O que os números que estão nos espaços vermelhos têm em comum?

Fonte: Santos; Luvison; Moreira, 2018, p. 119.

A Situação Desencadeadora de Aprendizagem contida na Figura 21 “**Tarefa 1: Tiras de números coloridos**”, apresenta uma sequência numérica organizada em uma tira, na qual os números aparecem alternando cores. A solicitação para que o estudante observe a diferença entre as extremidades da tira instaura uma situação de problematização que rompe com a leitura imediata e descritiva do material. Essa ruptura constitui o primeiro movimento da atividade desencadeadora, pois cria uma necessidade intelectual de explicação que não pode ser satisfeita apenas pela observação superficial.

Conforme Moura (1996; 2010), a SDA deve provocar uma ruptura com o pensamento empírico imediato, levando o estudante a buscar explicações que ultrapassem a aparência do objeto. Nesse sentido, a atividade cria uma situação problematizadora que exige a compreensão da lógica interna que organiza a sequência numérica.

Ao direcionar a atenção para as cores dos números e questionar o que eles têm em comum, a tarefa promove a análise das relações essenciais entre os elementos da sequência. Esse movimento corresponde ao processo inicial, no qual o estudante passa a identificar regularidades, neste caso, a distinção entre números pares e ímpares, superando a simples enumeração de casos particulares. Segundo a Teoria Histórico-Cultural, esse processo

representa a transição do pensamento empírico para formas iniciais de pensamento teórico, uma vez que o sujeito passa a operar com propriedades gerais e não apenas com características perceptíveis.

A etapa seguinte, que solicita ao estudante a escolha de um número não representado na tira e a previsão de sua cor, aprofunda esse movimento teórico. Ao exigir que o estudante aplique a regra construída a uma situação não observável diretamente, a atividade promove a generalização consciente do conceito. Assim, a atividade não se limita à identificação de números pares e ímpares, mas organiza uma trajetória formativa que possibilita a construção do conceito por meio da atividade intelectual do estudante. A aprendizagem ocorre não pela transmissão direta de definições, mas pela vivência de uma necessidade cognitiva que exige análise, comparação, abstração e generalização, elementos centrais da atividade de estudo na perspectiva histórico-cultural.

Dessa forma, a tarefa analisada configura-se como uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem ao promover a apropriação consciente de um conceito matemático por meio de um processo investigativo orientado. Ao articular a organização didática da atividade com os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, evidencia-se seu potencial formativo para o desenvolvimento do pensamento teórico, contribuindo para uma compreensão mais profunda da matemática como construção histórica e socialmente mediada.

Ao analisar tiras compostas por alternâncias cromáticas vinculadas à distribuição de números, o aluno é conduzido a identificar atributos invariantes. A tarefa demanda a análise intencional dos elementos constitutivos da situação (cores, posição, relações numéricas), buscando reconhecer as propriedades que organizam o sistema numérico.

Cabe destacar que o movimento de compreensão do padrão não se reduz à identificação empírica de repetições, mas implica a construção de explicação baseada em critérios relacionais. Trata-se, pois, de processo que envolve a ruptura com a aparência imediata dos fenômenos, em direção à apreensão de sua estrutura interna, característica definidora da ação de análise orientada ao conceito (Davydov, 1988).

A comparação empírica é insuficiente para resolver o problema de maneira geral, pois torna-se necessário abstrair o modo geral de ação que explique as relações entre os números da sequência. Isso mobiliza ações que levam à formação de conceitos teóricos, ou seja, o estudante passa a procurar regularidades, identificar maior, menor, igual, construir relações ordenadas e estruturais e formular representações gerais, dentre outras ações mentais.

Com a finalidade de compreender a organização do ensino dos conceitos algébricos, em direção à formação do pensamento teórico para a produção de conceitos genuinamente

científicos, destacamos alguns princípios didáticos orientadores da atividade de ensino propostos por Sforini (2015), com base em obras de autores como Vigotski, Leontiev, Luria, Elkonin, Galperin e Davidov, representantes da Teoria Histórico-Cultural, que se mostram favoráveis à aprendizagem conceitual dos estudantes na perspectiva de formação do pensamento teórico: princípio do ensino que desenvolve; princípio do caráter ativo da aprendizagem; princípio do caráter consciente; princípio da unidade entre o plano material (ou materializado) e o verbal e princípio da ação mediada pelo conceito.

Sobre o princípio do ensino que desenvolve, depreendemos que, este deve ser planejado com foco no desenvolvimento futuro dos estudantes, e não apenas na constatação e repetição de suas capacidades atuais. Isso implica compreender o desenvolvimento como processo dinâmico, impulsionado pela aprendizagem sistematizada. Com base neste princípio, o professor precisa realizar diagnóstico inicial do nível de desenvolvimento dos estudantes, identificando tanto o que já dominam quanto o potencial para avançar mediante orientação adequada. O ensino organiza-se, então, em torno da Zona de Desenvolvimento Iminente (ZDI) (Vigotski, 2021), que leva em consideração não apenas o que foi alcançado, mas também o que está em processo de desenvolvimento.

É compreensível que a aprendizagem escolar sistematizada promove avanços qualitativos nas funções psíquicas superiores, como memória voluntária, pensamento abstrato e atenção consciente, portanto, a avaliação, com base nesse princípio de ensino que desenvolve, deixa de ser apenas instrumento de verificação de resultados (como o modelo de ensino no qual estamos inseridos) e passa a ser ferramenta formativa para acompanhar a progressão do pensamento dos estudantes, orientando a prática pedagógica.

Coerentemente com o segundo princípio de ensino em questão, a saber, o caráter ativo da aprendizagem, rejeita-se qualquer concepção de ensino centrada na transmissão passiva de conteúdo. O desenvolvimento, para gerar aprendizagem, deve envolver o estudante em relação ativa com o objeto de conhecimento. O aluno precisa investigar, formular hipóteses, comparar informações, argumentar, relacionar ideias e elaborar sínteses próprias. Para isso, o professor deve organizar SDA que desencadeiem a necessidade de apropriação do conceito. Tais situações devem expor o estudante a contradições entre o senso comum e o conhecimento científico, levando-o à busca de explicações mais complexas. O aluno, em atividade intelectual, reconstrói o conceito por meio do movimento que vai do concreto ao abstrato.

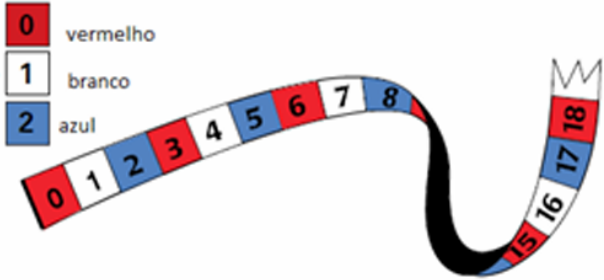
Nessa perspectiva, atividades coletivas como discussões, apresentações orais e sínteses compartilhadas se tornam fundamentais, pois estimulam a explicitação do pensamento, a argumentação lógica e a aprendizagem colaborativa. A prática docente deve prever momentos

de diálogo, reflexão e debate, nos quais o estudante verbalize sua compreensão e avance para formas mais elaboradas de raciocínio.

Tal perspectiva pode ser observada na “Tarefa 2: Tira de três números coloridos”, apresentada na figura 22, a qual, como na tarefa anterior, pressupõe a organização dos estudantes em pequenos grupos, nos quais cada um, deve receber uma folha da tarefa proposta. Espera-se que durante o desenvolvimento do trabalho nos grupos, o professor faça intervenções e questionamentos que os ajudem a avançar em relação às ideias matemáticas. Depois da conclusão, o professor organiza um momento para socializações. Pode ser que algum grupo, nesse momento, perceba que a relação de cores, varia de três em três. Dependendo do ano, os alunos ainda não têm o conceito de múltiplo, então podem usar a expressão “vai de três em três”. Ao final da socialização, síntese coletiva poderá ser produzida pelo professor, contando com as ideias dos alunos.

Figura 22 – Tarefa 2: Tira de três números coloridos

Tarefa 2: Tira de três números coloridos



Esta é uma tira diferente, repete as cores em uma sequência: vermelho, branco, azul; vermelho, branco, azul.

1. Observando as cores que os números ocupam, responda:

- O que a sequência de números nos espaços brancos tem em comum?
- Entre o 7 e o 16, quais números ocupam os espaços brancos?
- O que a sequência de números vermelhos tem em comum?
- Qual é a cor do espaço do número 51? _____ Como você sabe disso?
- Qual é a cor do espaço do número 37? _____ Como você sabe disso?

Fonte: Santos; Luvison; Moreira, 2018, p. 119.p. 126

Com base na tarefa 2 apresentada na figura acima, depreendemos que o problema desencadeador dessa sequência, ou seja, a necessidade de representar, justificar e operar sobre as relações e regularidades já identificadas, para além da comparação direta, provoca necessidade intelectual no estudante, colocando-o diante de contradição que pode ser resolvida por ações empíricas já conhecidas, pois embora 37 e 51 sejam números grandes, são possíveis de serem construídos empiricamente.

O problema desencadeador cria o motivo para que os alunos investiguem essas relações, favorecendo o desenvolvimento do pensamento, que se modifica, à medida que os estudantes precisam ir além do empírico para buscar relações essenciais do objeto e reconstruir mentalmente a gênese do conceito. Sem problema, não há motivo; sem motivo, não há atividade de estudo. Isso ativa a necessidade de produzir modelos, condição essencial para o pensamento teórico.

Outro princípio de ensino desenvolvente sintetizado por Sforni (2015) é o caráter consciente da atividade. Em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, quando o professor propõe SDA aos estudantes, esse princípio possibilita aprendizagem efetiva pois exige que compreendam conscientemente o objetivo da atividade em que está inserido. Isso significa que o conteúdo não pode ser apresentado de forma descontextualizada ou mecânica, sem explicitar sua finalidade, seu sentido histórico e sua importância no desenvolvimento intelectual. O aluno precisa entender não apenas o como fazer, mas sobretudo o quê e por que fazer, isto é, a lógica interna do conceito e os motivos que justificam seu estudo.

Quando o ensino se limita a exercícios formais, memorização ou reprodução de procedimentos como no caso das situações de aprendizagem apresentadas na seção 4 desta dissertação, o estudante permanece no plano da atividade não consciente, o que não promove avanços qualitativos em seu pensamento. Para superar esse modelo formal de ensino e de aprendizagem, o professor pode, portanto, explicitar a relação entre o conteúdo escolar e os problemas que lhe deram origem historicamente, demonstrando como os conceitos respondem a necessidades humanas concretas. Além disso, as SDA e os PDA precisam reproduzir ficticiamente ou não as necessidades históricas que deram origem ao objeto de aprendizagem. Dessa maneira, o estudante tem a oportunidade de compreender o lugar do conhecimento na atividade humana e tomar consciência de sua aprendizagem. A consciência amplia o poder intelectual do aluno, permitindo que aplique o conhecimento a novas situações.

Tal situação é demonstrada na figura abaixo, a qual reproduz uma SDA a partir da qual objetiva-se que os estudantes utilizem conhecimentos decorrentes de aprendizagens ocorridas a partir das situações anteriormente apresentadas.

Figura 23 – Tarefa: Produção livre do aluno

3.2 TAREFA: PRODUÇÃO LIVRE DO ALUNO (PARA ALUNOS DE ANOS MAIS AVANÇADOS)

Agora é sua vez! Crie uma tira com quatro cores.
Sua tira deverá ter uma regularidade. Esta será identificada por seus colegas da classe. Formule questões para que eles possam responder.

Fonte: Santos; Luvison; Moreira, 2018, p. 128

Para o desenvolvimento da tarefa apresentada na Figura 23, os alunos precisam trabalhar em pequenos grupos e criar uma tira. Esta será trocada entre os grupos para que eles identifiquem as regularidades (ou não) e respondam às questões propostas pelos estudantes que as elaboraram. Há a possibilidade de a tira criada não ter uma regularidade. Assim, o grupo que ficar responsável por ela deverá argumentar sobre a não existência de uma regularidade e propor a reorganização da tira.

Observamos que a proposta investigativa observada na tarefa apresentada motiva os estudantes levando-os a argumentar, levantar hipóteses, discutir em grupos e socializar com todos, as suas ideias. Um princípio contido nessa proposta refere-se ao princípio unidade entre plano material e plano verbal. De acordo com esse princípio, a formação de conceitos não ocorre exclusivamente no plano mental ou verbal, ela emerge da interação dialética entre ação concreta e linguagem. Nesse princípio, destaca-se a importância de recursos materiais como objetos manipulativos, modelização de procedimentos, gráficos, tabelas, registros, esquemas como mediadores da aprendizagem, pois possibilitam ao estudante operar com representações sensíveis do conceito.

Contudo, tais ações materiais devem ser acompanhadas de verbalizações, análises e explicações, pois é na linguagem que se organiza a síntese conceitual e a generalização. A atividade prática sozinha pode levar apenas à manipulação mecânica de termos matemáticos, sem compreensão profunda. A verbalização isolada também pode gerar abstrações vazias. Assim, a unidade entre ação e linguagem constitui caminho para o desenvolvimento do pensamento teórico. Situações Desencadeadoras de Aprendizagem ou Problemas Desencadeadores de Aprendizagem acompanhados de resolução justificadas ilustram esse princípio. Tal movimento fortalece a compreensão conceitual, permitindo a internalização de conhecimentos historicamente elaborados.

O último princípio de ensino desenvolvente, indicado por Sforzi (2015) é o da ação mediada pelo conceito. Esse princípio pressupõe que o conceito seja tomado como instrumento intelectual que orienta a atividade cognitiva dos estudantes. A apropriação de conceitos não significa apenas conhecer palavras ou definições, mas operar a partir deles em situações diversas, utilizando-os para interpretar, analisar e transformar a realidade. Esse princípio exige que o ensino ofereça oportunidades para que o estudante mobilize conceitos como ferramentas de ação e pensamento. A mediação conceitual permite que o aluno organize informações, estabeleça relações, argumente, generalize e formule sínteses.

Das considerações apresentadas, é possível depreender que o conceito adquire função estruturante na atividade mental à medida que é apropriado na atividade mediada pela SDA. A ação mediada pelo conceito implica transição do plano empírico para o teórico, em que o estudante compreende não só os atributos externos dos fenômenos, mas suas relações internas e leis de funcionamento. A ação pedagógica deve, portanto, criar situações em que o conceito seja necessário para resolver problemas, interpretar informações e produzir novos conhecimentos. Quanto mais o aluno opera com conceitos, mais se apropria deles, desenvolvendo funções psíquicas superiores fundamentais à transformação da realidade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo escolhido o desenvolvimento do pensamento algébrico como objeto de análise, buscamos, ao longo desta dissertação de mestrado, compreender quais as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao desenvolvimento desse tipo de pensamento em crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Os resultados da análise desenvolvida foram materializados discursivamente em seções, por meio das quais buscamos:

- investigar a álgebra como saber histórico-cultural decorrente de diferentes povos e culturas ao longo da história da matemática;
- compreender em que consiste o pensamento algébrico;
- identificar e analisar documentos oficiais e produção bibliográfica brasileira sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental publicadas entre 1997 e 2024.
- analisar os conteúdos indicados ao desenvolvimento do pensamento algébrico em documentos oficiais nacionais e do estado de São Paulo;
- compreender pressupostos da Teoria Histórico-Cultural que possam possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico;
- investigar as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao adequado desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Para o desenvolvimento deste texto, utilizamos técnicas decorrentes de pesquisa bibliográfica e documental que possibilitaram analisar as contribuições da Teoria Histórico-Cultural ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, perpassando por bases e princípios teóricos que possibilitaram a ampliação de discussões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, apresentando possibilidades e desdobramentos teóricos para a sala de aula ou futuras pesquisas sobre a temática analisada.

Considerando que o caminho metodológico utilizado apresenta princípios da Teoria Histórico-Cultural, principalmente quanto à totalidade ou integralidade do objeto de pesquisa, na segunda seção, buscamos situá-lo historicamente, analisando, as ações coletivas em torno da elaboração do pensamento algébrico, que se constitui à medida que o homem, para satisfazer as necessidades que surgem da prática, se apropria do conhecimento humano que está objetivado na linguagem algébrica produzida pela humanidade por meio das relações com os instrumentos físicos e simbólicos da cultura material e imaterial.

Além de investigar a álgebra como saber histórico-cultural decorrente de diferentes povos e culturas, na terceira seção, levantamos nas bases de dados consultadas e acervo dos autores, a produção bibliográfica e documental brasileira sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Dentre as produções bibliográfica e documental que se referem a intenção de pesquisa contida nesta dissertação, constatamos a necessidade de se ampliar a quantidade de pesquisas a partir dos princípios dessa teoria, visto que, dos 152 textos localizados para análise, apenas nove dos que foram selecionados decorrem de tais fundamentos.

Além disso, dos textos analisados, destacamos as contribuições de Santos (2017) pela coerência com as intenções desta pesquisa. Essa pesquisadora destaca que desde os primeiros anos escolares, crianças pequenas são capazes de generalizar padrões, formular hipóteses e argumentar matematicamente. Para isso, é preciso possibilitar às crianças, tipo de ensino que permite ao sujeito enxergar a essência de dado objeto estudado e compreender todo o seu processo de construção por meio das ações mentais que possibilitam a ascensão do abstrato ao concreto.

Isto posto, depreendemos que o pensamento teórico deve ser o objetivo a ser alcançado pelas instituições de ensino e, de acordo com Davidov (1988), a atividade de estudo, considerando toda a sua estrutura é o caminho a ser percorrido pelos escolares para se chegar ao desenvolvimento do pensamento teórico.

Na quarta seção, com base nos conteúdos indicados para se promover o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares do Ensino Fundamental, a partir de análise dos conteúdos indicados na BNCC (Brasil, 2018) e no **Currículo Paulista** (São Paulo, 2019), selecionamos do **EMAI & Ler e Escrever** (São Paulo, 2020) alguns exemplos de situações de aprendizagem que pressupõe o estudo de conceitos algébricos que possibilitam o desenvolvimento de deste tipo de pensamento. No entanto, observamos que as situações de aprendizagem do **EMAI & Ler e Escrever** limitam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, vimos que o ensino de conceitos algébricos, em direção à formação do pensamento teórico, pressupõe compreender os nexos conceituais desses conceitos, que levam em consideração o movimento lógico e histórico de desenvolvimento desse conhecimento matemático.

Nessa perspectiva, é importante que as ações pedagógicas considerem o movimento de objetivação de conhecimentos, em especial, no que tange à generalização de padrões, aos cálculos com valores desconhecidos e às relações entre grandezas variáveis. É importante que

sejam apresentadas, aos estudantes, situações de aprendizagem que lhes possibilitem entender o que são as grandezas e suas variações, de modo que eles tenham contato com as necessidades humanas que deram origem a estes conceitos, isto é, os seus nexos conceituais.

Assim, a tarefa que se apresenta ao professor, que organiza o ensino, é elaborar e propor situações, que suscitem necessidades de solução de problemas, similares àquelas produzidas historicamente, relacionadas à produção do conhecimento em estudo. Como visto, tais situações são chamadas, por Moura e Lanner de Moura (1998) de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) e podem se materializar em uma história virtual (ou seja, uma situação fictícia que se propõe a simular o movimento histórico factual), em um jogo ou em problemas que emergem de situações cotidianas.

Como explicitado neste texto, embora no Brasil haja claras indicações acerca do ensino de conhecimentos algébricos, estas estão longe de ser suficientes para a transformação do pensamento teórico que promove o desenvolvimento humano e supera o senso comum. As razões para esse empasse decorrem desde a prescrição de conteúdos que não é acompanhada de orientações didáticas e pedagógicas até os problemas de formação de professores que ensinam matemática nesta modalidade de ensino.

De modo geral, nos programas de ensino tem-se destacado as operações básicas com enfoque exclusivamente aritmético, não permitindo a produção de um movimento de superação da aritmética pela álgebra, ou ainda, de superação da aritmética pela articulação entre álgebra, aritmética e geometria. Para Rosa (2012), superar a fragmentação entre álgebra, aritmética e geometria é fundamental para o desenvolvimento do pensamento teórico em matemática. Por isso, cabe às propostas de ensino promover essa articulação desde os primeiros anos escolares, favorecendo a compreensão mais profunda e integrada dos conceitos matemáticos.

Nesse sentido, pensarmos o currículo é de fundamental importância, pois este, conforme Saviani (2009), compreende o conjunto de elementos que estruturam a organização do trabalho escolar. Se o método se orienta pela questão de como proceder para alcançar determinado objetivo, o currículo, por sua vez, responde à indagação acerca do que deve ser ensinado para que esse objetivo seja atingido. Nessa perspectiva, o currículo diz respeito ao conteúdo da educação e à forma como este é distribuído ao longo do tempo escolar, considerando o termo conteúdo em sua acepção ampla, que envolve conhecimentos, habilidades, valores e modos de agir.

Isto posto, percebemos que os documentos ou propostas curriculares normatizam o que se deve ensinar ou o que se deve aprender, mas muitas vezes, não há políticas educacionais que

ofereçam apoio didático e formativo aos professores que precisam investigar o que deve ser feito para que os estudantes se apropriem desses conceitos.

Cabe frisar que o que gera indagações não é a introdução da temática nessa modalidade de ensino, porque sem esse tipo de pensamento não se promove a educação matemática de maneira ampla. A álgebra faz parte do desenvolvimento humano e, como tal, surgiu inicialmente para resolver necessidades práticas, estando presente no cotidiano, de diferentes formas. O questionamento decorre do fato de existirem lacunas em como efetivamente, promover o ensino que “[...] se adianta ao desenvolvimento” (Vigotski, 2017, p.114) e contribua para que os estudantes “[...] possam humanizar-se no processo de conhecer o mundo físico, social, cultural, e, nesse processo, possam se reconhecer como humanos que, por meio do trabalho, modificam (ou podem modificar) o mundo a sua volta [...]” (Asbahr, 2020, p.87) tornando-se sujeitos pensantes e críticos, capazes de pensar e lidar com conceitos, argumentar e resolver problemas, diante de situações da vida em sociedade.

Compreendemos, pois, que alicerçar o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais em princípios decorrentes da Teoria Histórico-Cultural como buscamos apresentar na seção 5, pode possibilitar saltos qualitativos em seu desenvolvimento psíquico e nas relações que estabelece com a realidade objetiva. Isto posto, depreendemos que a estrutura da “atividade de estudo” (Dávidov, 1988; Davidov, 2019a; 2019b; Dávidov; Márkova, 2019) nos parece caminho didático-metodológico profícuo à essa formação, porque, por meio dela, o aluno tem a oportunidade de desenvolver o pensamento teórico mediante ações mentais de análise, síntese, abstração e generalização. Esse tipo de pensamento decorre, como demonstrado, por meio da formação de conceitos científicos que demanda apropriação de signos culturais, dentre os quais a palavra, que se caracteriza como símbolo que representa o conceito.

As considerações apresentadas confirmam a resposta de pesquisa de que a Teoria Histórico-Cultural pode contribuir ao adequado desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental possibilitando o desenvolvimento de tipo de pensamento teórico que promove modos de pensar a partir da análise, síntese, generalização e abstração que superam o senso comum e promovem o desenvolvimento humano.

Isto posto, consideramos que a atividade de estudo deve ser apropriada e empregada pelos professores em sua prática de sala de aula, uma vez que, além de ter como conteúdo o conhecimento teórico, é atividade que tem caráter principal na vida das crianças em idade escolar e, por isso, criar motivos que coincidam com o objeto de estudo do conteúdo escolar é um princípio fundamental para o desenvolvimento humano

Portanto, a partir dos dados de pesquisa analisados é possível afirmar que para que o estudante desenvolva o pensamento algébrico em sua amplitude, não basta aprender a verbalizar conceitos, é preciso que ele se aproprie do processo lógico e histórico que deu origem a sua necessidade e elaboração. Para isso, o estudante deve ser colocado em atividade de estudo. Desse modo, os resultados da pesquisa documental e bibliográfica realizada permitiram constatar que o ensino escolar, no geral, deve proporcionar às crianças conceitos genuinamente científicos, de forma a possibilitar que desenvolvam pensamento teórico, por meio de atividade específica, de estudo, que pouco a pouco, por etapas, permite à criança tornar-se mais autônoma, à medida que aprende o novo, o que ainda não sabe, com a colaboração de sujeitos mais experientes. Consideram-se os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural necessários à compreensão do processo educativo e do desenvolvimento do pensamento teórico, especificamente o algébrico que deve desenvolver-se mediante ações mentais de análise, síntese, abstração e generalização promovidas por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem.

Dos resultados obtidos pela pesquisa desenvolvida, é possível criar novas situações desencadeadoras de aprendizagens mediadas por ações intencionais de ensino a partir do desenvolvimento de experimentos didático-formativos que resultem de atividade de estudo voltada à apropriação de conhecimentos algébricos por alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira. **A pesquisa sobre formação de pensamento teórico**. Revista Simbio-Logias, v.12, n.17, 2020, p.85-102.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral – DICEI. Coordenação Geral do Ensino Fundamental – COEF. **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo básico de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do ensino fundamental**. Brasília, F: MEC, 2012. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=18543:direitos-de-aprendizagem-do-ciclo-de-alfabetizacao-no-ensino-fundamental&catid=323:orgaos-vinculados&Itemid=97. Acesso em: 08 maio 2024.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> . Acesso em: 08 maio 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei no. 9394, de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 08 maio 2024.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**. Brasília: 2001.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**. Apresentação. Alfabetização matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. 2014.

CEDRO, Wellington Lima; NASCIMENTO, Carolina Picchetti Nascimento. Dos métodos e das metodologias em pesquisas educacionais na teoria histórico-cultural. In: MOURA, Manoel Ariosvaldo de (org.). **Educação Escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017, p.13-45.

CEDRO, Wellington Lima. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino: o clube de matemática**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2004. Disponível em: [O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino: o clube de matemática](#). Acesso em: 30 mai. 2025.

COELHO, Flávio Ulhoa; AGUIAR, Marcia. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, 2018, p. 171-187. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/eav/article/view/152688> . Acesso em 10 jan. 2024.

DAVÍDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental**: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel Madeira Freitas²⁵. Educação Soviética, n. 8, ago. 1988. (Digitado)

²⁵ “Nota prévia dos tradutores: Os textos deste livro foram traduzidos por José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas, a partir da tradução do russo para o inglês da obra mencionada, para uso didático, na disciplina:

DAVÝDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Havana: Pueblo y Educación, 1982.

DUVAL, Raymond. **Registro e representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução Mércies Thadeu Moretti. 2012. Disponível em: Vista do Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.

DUSAVITSKII, A. K. Educação desenvolvente e a sociedade aberta. **Ensino Em Re-Vista**, v.21, n.1, p.77-84, jan./jun. 2014. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/25053/13890>. Acesso em: 28 out. 2021.

FACCI, Marilda Gonçalves Dias. Vigotski e o processo ensino-aprendizagem: a formação de conceitos. In: MENDONÇA, Sueli Guadalupe de Lima; MILLER, Stela (org.). **Vigotski e a escola atual: fundamentos teóricos e implicações pedagógicos**. Araraquara: Junqueira & Marin, 2006.

FERREIRA, Miriam Criez Nóbrega. **Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do pensamento algébrico**. Dissertação (Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática), Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

FERREIRA, Miriam Criez Nóbrega; RIBEIRO, Alessandro Jacques; RIBEIRO, Carlos Miguel. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. **Educação e Fronteiras On-Line**, Dourados, Mato Grosso do Sul, v.6, n.17, p. 34-47, maio/ago., 2016.

GOMES, L. P. da Silva; NORONHA, Claudianny Amorin. O símbolo de igualdade e a mobilização do pensamento algébrico por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. In: MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis (org.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais: diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural**. São Paulo: Livraria da Física, 2021. p. 131-148.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Metodologia do trabalho científico**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1986.

LEONTIEV, Alexis N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Tradução Rubens Eduardo Frias. 2. ed. São Paulo, SP: Centauro, 2004.

LEONTIEV, Alexis. Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A.N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo, 2017. p. 59-83.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**. n. 27, set./ dez., 2004.

Didática na perspectiva histórico-cultural, no PPGE da Universidade Católica de Goiás. Excetuam-se os capítulos III e IV, traduzidos do espanhol do livro: DAVÝDOV, V. V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Moscú: Editorial Progreso, 1988. Esclarecemos que os dois títulos correspondem à mesma obra original russa, de Davydov”.

LIBÂNEO, José Carlos.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (org.). **Ensino Desenvolvidor: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. 1 ed. Uberlândia: Editora UFU, 2015, v. 1, p. 315-350.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamasso. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katál**, Florianópolis, v.10, n. esp. p. 37- 45, abr. 2007.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 1997.

MARTINS, Lígia Márcia. Implicações pedagógicas da escola de Vigotski: algumas considerações. In: MENDONÇA, Sueli Guadalupe de Lima; MILLER, Stela (org.). **Vigotski e a escola atual: fundamentos teóricos e implicações pedagógicas**. Araraquara, SP: Junqueira & Marin, 2006.

MARTINS, Lígia Márcia. **O desenvolvimento do psiquismo e a educação escolar: contribuições à luz da psicologia histórico-cultural e da pedagógica histórico-crítica**. Campinas, SP: Autores Associados, 2013.

MEDEIROS, Raquel Guimarães de. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para pesquisas científicas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela BNCC**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Instituto Federal de Educação e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2021.

MERLINI, Vera Lúcia; MAGINA, Sandra Maria Pinto; TEIXEIRA Antônio Cesar Nascimento. O sinal de igual e a relação de equivalência: um estudo diagnóstico com estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental. **IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: Pensar a educação matemática pela pesquisa frente aos desafios do cotidiano escolar e responsabilidade social**. 2024, Natal, RN. Disponível em: [O sinal de igual e a relação de equivalência: um estudo diagnóstico com estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental | Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática](#). Acesso em: 03 jun. 2025.

MORETTI, Vanessa Dias; VIRGENS, Wellington Pereira das; ROMEIRO, Irajá de Oliveira. Generalização Teórica e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: contribuições para a formação de professores dos Anos Iniciais. **Bolema**, set-dez. 2021.

MORETTI, Vanessa Dias. O problema lógico-histórico: aprendizagem conceitual e formação de professores de matemática. **Poiésis: Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação- Unisul**, Tubarão, SC, número especial, p. 29 - 44, jan-jun, 2014.

MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. **Pensamento algébrico nos Anos Iniciais: diálogos complementares entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural**. São Paulo: Livraria Física, 2021.

MORETTI, Vanessa Dias. **Professores de matemática em atividade de ensino: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente**. 2007. 206 f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática), Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.

MORETTI, Vanessa Dias; PANOSSIAN, Maria Lucia; RADFORD, Luis. Questões em torno da Teoria da Objetivação. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**. Uberlândia, MG, v.2, n.1, p. 230-251. Jan./abr. 2018.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2016.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; LANNER DE MOURA, Anna Regina. A atividade de ensino de matemática como desencadeadora da formação do professor. In: **Congresso Iberoamericano de Educação Matemática - CIBEM**, 3., 1999, Caracas. Resúmenes do [...]. v. 1. Caracas: Asovmat, 1998. p. 497-507.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de.; ARAÚJO, Elaine Sampaio; SOUZA, Flávia Dias de; PANOSSIAN, Maria Lúcia; MORETTI, Vanessa Dias. **A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem**. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 93-125.

MOURA, Manoel Oriosvaldo; SFORNI, Maria Sueli de Faria; ARAÚJO, Elaine Sampaio. Objetivação e apropriação de conhecimentos na atividade orientadora de ensino. **Revista Teoria e Prática da Educação**, v.14, n.1, p.39-50, jan./abr. 2011. Disponível em: Vista do OBJETIVAÇÃO E APROPRIAÇÃO DE CONHECIMENTOS NA ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO. Acesso em 23 jun. 2025

NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida. **O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática**. Brasília, DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. (livro digital). (Coleção SBEM). Disponível em: Acesso em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf

OLIVEIRA, Sílvio Luiz. **Tratado de metodologia científica: projetos de pesquisas, TGI, TCC, monografias, dissertações e teses**. São Paulo: Pioneira, 1997.

OLIVEIRA, Tchierly Juliani Bier de. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental nos trabalhos acadêmicos produzidos no Brasil nas últimas três décadas**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNOESTE), Cascavel-PR, 2022.

OLIVEIRA, Tchierly Juliani Bier de.; RIBEIRO, Dulcyene Maria. Uma análise de bibliografias sobre pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**, Campo Mourão, Paraná, v.12, n.28, p.155-174, maio/ago., 2023.

PANOSSIAN, Maria Lúcia. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2008. Disponível em: Microsoft Word - Panossian_Maria Lucia.doc. Acesso em: 17 mar. 2025.

PANOSSIAN, Maria Lúcia. PANOSSIAN, Maria Lúcia. **O movimento histórico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**.

2014. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2014. Disponível em: [O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição...](#). Acesso em: 19 mar. 2025.

PIRES, Marília Freitas de Campos. O materialismo histórico-dialético e a educação. **Interface – Comunicação, Saúde, Educação**. Botucatu, v.1, n.1, p.83-94, ago.1997.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. Álgebra no ensino básico. **DGIDC**, Lisboa, Portugal, set. 2009.

Puentes Roberto Valdés; CARDOSO, Cecília Garcia Coelho; AMORIM, Paula Alves Prudente (org.). Teoria da atividade de estudo: contribuições de D.B. Elkonin, V.V. Davidov; V. V. REPIKIN – Livro I. 3. ed. Curitiba: CRV, 2021.

REGIS, Flávia Christiane do Nascimento. **Introdução ao pensamento algébrico: a generalização de padrões**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, 2017. Disponível em: [Universidade Federal de Minas Gerais](#). Acesso em: 12 abr. 2024.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. *In*: MOURA, Manoel Oriosvaldo (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 15-50.

RODRIGUES, Marcela da Silva Caetano; PINTO, Márcia Maria Fusaro. Caracterizações do pensamento algébrico na escola básica. **Abakós**, Belo Horizonte, v.8, n.1, p.86-102, maio, 2020.

ROMEIRO, Irají de Oliveira. **Formas de generalização no processo formativo de professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais**. 2023. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação da Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos - SP, 2023. Disponível em: [Formas de generalização no processo formativo de professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais](#). Acesso em: 05 ago. 2024.

ROMEIRO, Irají de Oliveira; MORETTI, Vanessa Dias. O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação de professores dos anos iniciais: Contribuições da Teoria da Objetivação. *In*: MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. (org.). **Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, Josélia Euzébio. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas**. 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós- Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR, 2012. Disponível em: [Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar : inter-relações dos sistemas de significações numéricas](#)

ROSA, Josélia Euzébio; MORAES Silvia Pereira Gonzaga de; CEDRO, Wellington Lima. As particularidades do pensamento empírico e do pensamento teórico na organização do ensino. *In*: MOURA, Manoel Oriosvaldo (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 77-92.

SALVADOR, Ângelo Domingos. **Métodos e técnicas de pesquisa bibliográfica**. 11ª ed. Porto Alegre: Revista Ampliada, 1986.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI**: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor, vol.1 – quarto ano. Centro de Ensino Fundamental dos Anos Iniciais. São Paulo: SE, 2013.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI & Ler e Escrever**: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor, vol.1 – primeiro ano. São Paulo: SE, 2020. Disponível em: [Manual do Prf_EMAI_1º ANO_vol 1.pdf - Google Drive](#). Acesso em: 04 fev. 2025.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI & Ler e Escrever**: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor, vol.1 – segundo ano. São Paulo: SE, 2020. Disponível em: [Manual do Prf_EMAI_2º ANO_vol 1.pdf - Google Drive](#). Acesso em: 04 fev. 2025.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI & Ler e Escrever**: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor, vol.2 – segundo ano. São Paulo: SE, 2020. Disponível em: [EF_PR_MT_02_Vol2_VP.pdf - Google Drive](#). Acesso em: 04 fev. 2025.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI & Ler e Escrever**: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor, vol.2 – quinto ano. São Paulo: SE, 2020. Disponível em: [ACFrOgBKXXzEBsqSwzvF6y9f9y4t1QE13d4i_5tTWOLIFuhXNfYB9M7HlCbDUpeCngd4XT-4-UeRPXtgs9lj5LYhCsTbAoxwWezQUg2IZwwJz9FR-Pq_-xF9PTh3TDd1-v8Vnjin1ZPLpvVSYWj4naGwPw7Ffzq7YpRC-NV6vLAr895W7kLtA9RhGUuo-1CRqbf32PKjYw7Ym3bnyrQ7gX0MmtHLMrnvQIU1oKPhFgzZOzeAB-jh0lH133Vsrna0=](#). Acesso em: 01 abr. 2025.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI & Ler e Escrever**: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor, vol.1 – quarto ano. São Paulo: SE, 2020. Disponível em: [Manual do Prf_EMAI_4º ANO_vol 1.pdf - Google Drive](#). Acesso em: 04 fev. 2025.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI & Ler e Escrever**: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor, vol.1 – terceiro ano. São Paulo: SE, 2020. Disponível em: [Manual do Prf_EMAI_3º ANO_vol 1.pdf - Google Drive](#). Acesso em: 04 fev. 2025.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. São Paulo: SEE-SP/UNDIME, 2019. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>. Acesso em 08 maio 2022.

SANTOS, Carla Cristiane Silva. **O pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: a percepção da regularidade e o pensamento relacional**. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade São Francisco, Itatiba, 2017.

SANTOS, Carla Cristiane Silva; LUVISON, Cidinéia da Costa; MOREIRA, Kátia Gabriela. A construção do pensamento algébrico no Ensino Fundamental I: possíveis trabalhos para a percepção de regularidades e de generalizações. *In*: NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida. **O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática**. Brasília, DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. (livro digital). (Coleção SBEM). Disponível em: Acesso em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf

SFORNI, Maria Sueli de Faria. Interação entre didática e teoria histórico-cultural. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v.40, n. 2, p. 375-397, abr./jun. 2015.

SAVIANI, Dermeval. **Educação: do senso comum à consciência filosófica**. Campinas: Autores Associados, 2009.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia Histórico-Crítica**. 12. ed. Campinas: Autores Associados, 2021.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2017.

SILVA, Jocenei Miranda da; Ciríaco, Klinger Teodoro. Possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de tarefas nos anos iniciais. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM)**, vol.8, n.23, p.115-130, 2021.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. **Educação e Matemática**, n.110, p. 33-38, nov/dez. 2010.

VERGEL, Rodolfo. Reflexões teóricas sobre a atividade semiótica dos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em uma tarefa de sequenciamento de padrões. *In*: MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis (org.). **Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Livraria da Física, 2021, p.79-104.

VIRGENS, Wellington Pereira das. **Problemas desencadeadores de aprendizagem na organização do ensino: sentidos em movimento na formação de professores de matemática**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-03102019-120541/> . Acesso em: 18 dez. 2025.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo, SP: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKI, L.S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 16. ed. São Paulo: Ícone, 2017.

VYGOTSKI, Lev Semiónovich. *Investigación experimental del desarrollo de los conceptos*. In: VYGOTSKI, Lev Semiónovich. **Obras escogidas (Tomo II)**. Tradução José Maria Bravo. 2. ed. Madri: A. Machado Libros, 2001, p. 119-178.

VYGOTSKI, Lev Semiónovich. **Obras escogidas**. Tomo III. Madrid: Visor, 2000.

VYGOTSKI, Lev Semiónovich. **Obras escogidas**. Tomo IV. Madrid: Visor, 2006.

VYGOTSKY, Lev. Semiónovich. **Pensamento e da linguagem**. São Paulo, SP: Martins Fontes, 1993.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. **Psicologia, Educação e Desenvolvimento**: escritos de L. S. Vigotski. Tradução e organização Zoia Prestes e Elisabeth Tunes. São Paulo: Expressão Popular, 2021.

VYGOTSKI, Lev Semiónovich. **Sete aulas de L.S. VIGOTSKI sobre os fundamentos da PEDOLOGIA**. Tradução e organização Zoia Prestes e Elisabeth Tunes. Tradução Claudia da Costa Guimarães Santana. Rio de Janeiro, RJ: E-Papers, 2018.