

Janilson Modesto Leal

MAPEAMENTOS CONFORMES EM  
FUNÇÕES HIPERCOMPLEXAS



1910001139





# **MAPEAMENTOS CONFORMES EM FUNÇÕES HIPERCOMPLEXAS**

**Janilson Modesto Leal**

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada  
MAP - 071

# Mapeamentos Conformes em Funções Hipercomplexas

**Janilson Modesto Leal**

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto



T. 1139/03

São José do Rio Preto

18 de dezembro de 2002



753:51  
L435a

10104011

Mapeamentos Conformes em  
Funções Hipercomplexas

Janilson Modesto Leal

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada

Leal, Janilson Modesto.

Mapeamentos conformes em funções hipercomplexas / Janilson Modesto Leal . – São José do Rio Preto : [s.n.], 2003  
79 f. ; 30 cm.

Orientador: Manoel Ferreira Borges Neto  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Física matemática. 2. Quatérnios. 3. Funções hipercomplexas. 4. Bicomplexos. I. Borges Neto, Manoel Ferreira. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 501

*"O mais importante  
na vida não é  
a realização de algo,  
mas a disposição de espírito  
na hora de realizá-lo."  
Masaharu Taniguchi.*

## AGRADECIMENTO

O sentimento de gratidão serve para lustrar, dar brilho às nossas atividades cotidianas. Assim, agradeço com entusiasmo a Deus, meus pais, familiares, namorada, sócio e empregadores, por darem a sustentação para minhas atividades.

É com contentamento especial que agradeço ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, por prover integralmente todas as condições para a execução desta dissertação, sempre com o verdadeiro espírito de Orientador.

Minha gratidão também ao Prof. Dr. José Márcio Machado pelo valoroso auxílio, bem como aos demais professores, colegas e funcionários do DCCE.



## RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se dois teoremas sobre mapeamentos conformes em hipercomplexos, um para o anel dos quatérnios e outro para o anel dos bicomplexos. Busca-se, deste modo, uma abordagem quadridimensional da conformidade, tópico clássico no estudo das funções complexas. São analisados os mapeamentos hipercomplexos de translação, dilatação, rotação e inversão, para verificar sua conformidade.



## SUMÁRIO

|        |    |
|--------|----|
| Resumo | ii |
|--------|----|

## ABSTRACT

|          |     |
|----------|-----|
| Abstract | iii |
|----------|-----|

|            |    |
|------------|----|
| Introdução | 01 |
|------------|----|

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 1 Tópicos de Álgebra e Hipercomplexos | 02 |
|---------------------------------------|----|

In this work, two theorems about conformal mappings in hypercomplex, the first for the ring of quaternions and the second for the ring of bicomplex, are presented and discussed in full details. It is wanted, a four-dimensional approach for conformity, classic topic in the study of complex functions. It is analysed the hypercomplex mappings of translation, dilatation, rotation and inversion, in order to verify its conformity.

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 2.1 Transformações Conformes em Complexos | 29 |
|-------------------------------------------|----|

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| 2.2 Diferenciabilidade em Hipercomplexos | 35 |
|------------------------------------------|----|

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 2.3 Proposições em Quaternions | 38 |
|--------------------------------|----|

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| 2.4 Mapeamentos Conformes em Quaternions | 47 |
|------------------------------------------|----|

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 2.5 Proposições em Bicomplexos | 61 |
|--------------------------------|----|

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| 2.6 Mapeamentos Conformes em Bicomplexos | 68 |
|------------------------------------------|----|

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 3 Mapeamentos Conformes em Hipercomplexos | 81 |
|-------------------------------------------|----|

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 3.1 Análise da Conformidade em Exemplos | 61 |
|-----------------------------------------|----|

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 3.2 Restrições para Obtenção da Conformidade | 71 |
|----------------------------------------------|----|

|           |    |
|-----------|----|
| Conclusão | 76 |
|-----------|----|

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Referências Bibliográficas | 77 |
|----------------------------|----|



# SUMÁRIO

|                                                   |            |
|---------------------------------------------------|------------|
| <b>Resumo</b>                                     | <b>ii</b>  |
| <b>Abstract</b>                                   | <b>iii</b> |
| <b>Introdução</b>                                 | <b>01</b>  |
| <b>1 Tópicos de Álgebra e Hipercomplexos</b>      | <b>02</b>  |
| 1.1 Álgebra, Quatérnios e Bicomplexos             | 02         |
| 1.2 Grupos e Aplicações                           | 14         |
| 1.3 Grupos de Lie                                 | 18         |
| 1.4 Transformações Conformes e Grupos Holonômicos | 23         |
| <b>2 Mapeamentos Conformes</b>                    | <b>29</b>  |
| 2.1 Transformações Conformes em Complexos         | 29         |
| 2.2 Diferenciabilidade em Hipercomplexos          | 35         |
| 2.3 Proposições em Quatérnios                     | 38         |
| 2.4 Mapeamentos Conformes em Quatérnios           | 47         |
| 2.5 Proposições em Bicomplexos                    | 51         |
| 2.6 Mapeamentos Conformes em Bicomplexos          | 58         |
| <b>3 Mapeamentos Conformes em Hipercomplexos</b>  | <b>61</b>  |
| 3.1 Análise da Conformidade em Exemplos           | 61         |
| 3.2 Restrições para Obtenção da Conformidade      | 71         |
| <b>Conclusão</b>                                  | <b>75</b>  |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                 | <b>77</b>  |



# INTRODUÇÃO

## TÓPICOS DE ÁLGEBRA E HIPERCOMPLEXOS

É de importância fundamental, tanto sob o ponto de vista da Matemática, como da Física, o conhecimento da solução (e da unicidade da solução) de equações diferenciais parciais obtidas em inúmeros problemas, como os de escoamento de fluidos, campos elétricos, fluxos de calor. Tal conhecimento está condicionado à constatação da analiticidade da função estudada.

Foram feitas várias tentativas de construção de uma teoria, similar à análise complexa, de funções analíticas para álgebras não-comutativas arbitrárias. Temos os trabalhos de Fueter [9] e Balabaev [1] como exemplos. Comentário igual pode-se fazer para uma pseudo-generalização da análise complexa para quatérnios e o trabalho de Kassandrov [13].

Os quatérnios, que têm sido usados em formulações para teorias físicas desde sua criação em 1843 por Willian Rowan Hamilton, e os bicomplexos, que são gerados pelo grupo  $Z_4 \times Z_2$ , possibilitam a construção de uma "análise hipercomplexa", num espaço quadridimensional.

Recentemente, foram demonstradas relações de Cauchy-Riemann generalizadas e derivações hipercomplexas, por Machado e Borges em [15]. Os mesmos autores, em [16], provaram que as citadas relações de Cauchy-Riemann generalizadas podem definir mapeamentos conformes em superfícies quadridimensionais.

Esta dissertação, em seu capítulo 1, aborda vários conceitos de Álgebra (entre eles, grupos, anéis e corpos), define o anel dos quatérnios  $(H, +, \cdot)$  e o anel dos bicomplexos  $(G_{4 \times 2}, +, \cdot)$  e apresenta uma abordagem topológica de transformação conforme.

O capítulo 2 enfoca a conformidade na Teoria de Variáveis Complexas, aplicando-a em transformações de translação, dilatação, rotação e inversão, e demonstra teoremas para mapeamentos conformes em quatérnios e em bicomplexos, de acordo com o trabalho de Borges e Machado, op. cit. [16].

Por fim, o capítulo 3 utiliza os teoremas apresentados no capítulo anterior para estudar a conformidade em mapeamentos hipercomplexos de translação, dilatação, rotação e inversão. São discutidas, ainda, restrições possíveis para a obtenção da conformidade em alguns dos mapeamentos citados.



# CAPÍTULO 1:

## TÓPICOS DE ÁLGEBRA E HIPERCOMPLEXOS

### Seção 1.1: Álgebra, Quatérnios e Bicomplexos

Nesta seção, vamos conceituar grupos, anéis e corpos. Ao final analisaremos a construção dos quatérnios e dos bicomplexos (chamados aqui, conjuntamente, de hipercomplexos).

O texto está fortemente baseado em Pontriaguin [18] e Gonçalves [11]. Algumas definições e exemplos podem ser encontrados também em Domingues [7], Garcia [10] e Herstein [12].

#### §1. Grupos, Anéis e Corpos

Começaremos definindo grupo, pois a teoria dos grupos estuda a operação algébrica em seu aspecto mais puro: os elementos que formam o grupo se consideram exclusivamente do ponto de vista da operação definida no grupo, abstraindo-se todas as demais propriedades que possam ter estes elementos.

##### Definição 1. (Grupo)

Um conjunto  $G$  de elementos denomina-se **grupo** se está dotado de uma operação  $\otimes$  qualquer que a todo par de elementos  $a$  e  $b$  de  $G$  associa um certo elemento  $c$  de  $G$ , de modo que se cumpram as condições G.1, G.2 e G.3 a seguir, ditas "axiomas de grupo".

G.1) *Associativa*: para três quaisquer elementos  $a$ ,  $b$  e  $c$  de  $G$  se cumpre

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) ;$$

G.2) Em  $G$  existe uma *unidade pela esquerda* comum para todos os elementos do grupo, isto é, existe um elemento  $e$  tal que

$$e \otimes a = a, \text{ para todo } a \in G ;$$

G.3) Para todo elemento  $a$  de  $G$ , existe um *elemento inverso pela esquerda*, ou seja, um elemento  $a^{-1}$  tal que

$$a^{-1} \otimes a = e .$$



**Prova:** Vejamos algumas observações e proposições sobre grupos.

Por simplicidade, chamaremos esta operação  $\otimes$  de multiplicação. Seu resultado, dito produto, se representa  $a \otimes b$ , ou seja,  $c = a \otimes b$ , e pode depender da ordem dos fatores  $a$  e  $b$ :  $a \otimes b$  não é igual, em geral, a  $b \otimes a$ .

Para detalhar que estamos nos referindo a um dado grupo formado por um conjunto  $G$  munido de certa operação  $\otimes$ , indicamos  $(G, \otimes)$ . Não havendo possibilidade de dúvida, denotamos o grupo apenas por  $G$ .

É usual, como faremos daqui em diante, escrever  $ab$  no lugar de  $a \otimes b$ .

Em virtude do axioma G.1, se tem  $(ab)c = a(bc)$  e, por conseguinte, este elemento pode indicar-se por  $abc$  simplesmente. Esta mesma regra se verifica qualquer que seja o número de fatores.

**Definição:** A ordem de um grupo  $G$  é o número de elementos do conjunto  $G$ , se este for finito. Em caso contrário, o grupo  $G$  se diz infinito.

## Proposição 2. (Sobre a Unidade e o Inverso)

Uma *unidade pela esquerda*  $e$  de um grupo é, também, uma *unidade pela direita*, ou seja,  $ae = a$ , para todo  $a$ . Um elemento *inverso pela esquerda*  $a^{-1}$  do elemento  $a$  é, também, um *inverso pela direita*, ou seja,  $aa^{-1} = e$ . O elemento inverso do elemento  $a^{-1}$  coincide com o próprio  $a$ :  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

**Prova:**

Dos axiomas G.2 e G.3 resulta que

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1};$$

multiplicando à esquerda ambos os membros desta relação por um elemento inverso pela esquerda do elemento  $a^{-1}$ , obteremos,

$$aa^{-1} = e,$$

ou seja, um elemento inverso pela esquerda é, também, um inverso pela direita.

Além disso, um elemento inverso de  $a^{-1}$  é  $a$ . Teremos a continuação

$$ae = aa^{-1}a = ea = a,$$

isto é, uma unidade pela esquerda é, também, uma unidade pela direita.  $\square$

## Proposição 3. (Unicidade da Unidade e do Inverso)

O elemento  $e$ , unidade de um grupo  $G$ , é único. O elemento  $a^{-1}$ , inverso de um elemento  $a$  qualquer desse grupo, também é único.

### Prova:

Suponhamos que existam dois elementos unidades  $e, e' \in G$ . Então:

$$e = e \cdot e' = e'.$$

Portanto, o elemento unidade  $e$  é único.

Agora, vamos considerar que existam dois inversos para  $a$ :  $a^{-1}$  e  $a^{-1'}$ . Daí:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e;$$

$$a \cdot a^{-1'} = a^{-1'} \cdot a = e.$$

Então, teremos que

$$a^{-1} = e \cdot a^{-1} = (a \cdot a^{-1'}) \cdot a^{-1} = (a^{-1'} \cdot a) \cdot a^{-1} = a^{-1'} \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{-1'} \cdot e = a^{-1'}$$

e está provado que o inverso de qualquer elemento  $a$  também é único.  $\square$

### Definição 4. (Grupo Abelian)

Se, além dos 3 axiomas assinalados, se cumpre também a condição de *comutatividade*, ou seja, se para  $\forall a$  e  $b$  de  $G$  temos

$$ab = ba,$$

o grupo se denomina **abeliano** ou comutativo.

Para os grupos abelianos, pode empregar-se a notação aditiva no lugar da multiplicativa, ou seja,

- a operação de grupo se denomina adição e não multiplicação;
- se escreve a soma  $a + b$  no lugar do produto  $ab$ ;
- a unidade  $e$  do leva o nome de zero e se indica por  $0$ ;
- o elemento  $a^{-1}$ , inverso do elemento  $a$ , se denomina oposto e se indica por  $-a$ .

### Exemplo 5.

O grupo aditivo dos inteiros, representado por  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano infinito. Isto decorre de que para a adição usual em  $\mathbb{Z}$  vale:

$$a + (b + c) = (a + b) + c; \quad a + 0 = 0 + a = a;$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0; \quad a + b = b + a.$$

### Exemplo 6.

O grupo multiplicativo dos racionais  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  também é um grupo abeliano infinito.



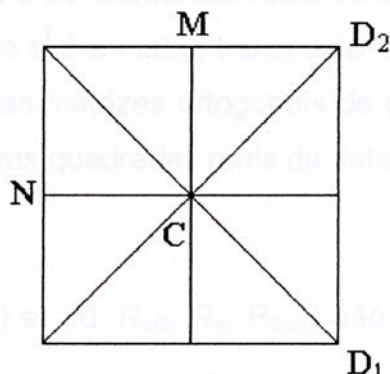
### Exemplo 7.

$G = \{1; -1\}$  é um grupo em relação à multiplicação usual. É um grupo abeliano finito de ordem 2.

### Exemplo 12.

### Exemplo 8.

O grupo diedral  $(D_4, \circ)$ , onde  $D_4 = \{\text{id}, R_{\pi/2}, R_{\pi}, R_{3\pi/2}, R_M, R_N, R_1, R_2\}$ , cujos elementos são transformações espaciais que preservam o quadrado, com a operação  $\circ$  (composição de funções), é um grupo não abeliano de ordem 8.



As transformações referidas consistem no seguinte:

- $\text{id}, R_{\pi/2}, R_{\pi}, R_{3\pi/2}$ : são as rotações planas centradas no centro  $C$  do quadrado, no sentido anti-horário, de ângulos zero,  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $3\pi/2$ , respectivamente.
- $R_M, R_N, R_1, R_2$ : são as rotações espaciais de ângulo  $\pi$  com eixos  $M$ ,  $N$ ,  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente, onde  $M$  e  $N$  são as mediatrizes e  $D_1$  e  $D_2$  são as diagonais.

### Exemplo 9.

Seja  $X$  o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$ . Este conjunto com a adição de matrizes, ou seja,  $(X, +)$  é um grupo abeliano.

### Definição 10. (Subgrupo)

Um conjunto  $H$  de elementos de um grupo  $G$  se chama **subgrupo** do grupo  $G$  se  $H$  forma um grupo para a lei de multiplicação com a que está dotado  $G$ .

Na prática, para verificar que um subconjunto  $H$  é um subgrupo de um grupo  $G$ , em geral, é mais conveniente verificar se são satisfeitas:

H.1) quaisquer  $h_1, h_2 \in H$ , temos que  $h_1 h_2 \in H$ ;

H.2) qualquer  $h \in H$ , temos  $h^{-1} \in H$ .

### Exemplo 11.

Dado um grupo  $G$ ,  $\{e\}$  e  $G$  são sempre subgrupos de  $G$ , ditos triviais.

### Exemplo 12.

O conjunto  $Y$  das matrizes inversíveis, subconjunto de  $X$  do exemplo 9, com a multiplicação de matrizes, ou seja,  $(Y, \cdot)$  é um grupo não abeliano.

### Exemplo 13.

Uma matriz quadrada  $s$  de elementos reais se chama ortogonal se  $s^t s = e$ , onde  $e$  é a matriz unidade e  $s^t$  é a matriz transposta de  $s$ , obtida fazendo-se  $s^t_{ij} = s_{ji}$ . O conjunto  $H$  de todas as matrizes ortogonais de ordem  $n$  é um subgrupo do grupo  $G'$  de todas as matrizes quadradas reais de determinantes distintos de zero.

### Exemplo 14.

Os conjuntos  $\{id, R_\pi\}$  e  $\{id, R_{\pi/2}, R_\pi, R_{3\pi/2}\}$  são subgrupos do grupo  $(D_4, \circ)$  definido no exemplo 8.

### Definição 15. (Anel)

Um **anel** é um conjunto  $A$  junto com duas operações internas

$$(x, y) \mapsto xy \quad \text{e} \quad (x, y) \mapsto x + y$$

chamadas multiplicação e adição, tais que:

A.1)  $A$  é um grupo abeliano sobre a adição;

A.2) A multiplicação é associativa e distributiva com respeito à adição, i. e.,

$$(xy)z = x(yz),$$

$$x(y + z) = xy + xz,$$

$$(y + z)x = yx + zx,$$

para todos  $x, y, z \in A$ .

### Definição 16. (SubAnel)

Seja  $(A, +, \cdot)$  um anel. Um subconjunto  $L \subset A$ ,  $L \neq \emptyset$ , é um **subanel** de  $A$ , se e somente se, cumpre o seguinte:

L.1) o subconjunto  $L$  é fechado para ambas as operações de  $A$ , isto é,

$$(\forall a, b) (a, b \in L \rightarrow a + b \in L \text{ e } ab \in L)$$

L.2)  $(L, +, \cdot)$  também é um anel.

### Exemplo 17.

O anel dos inteiros, denotado por  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

### Exemplo 18.

O anel dos racionais, denotado por  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ .

### Exemplo 19.

Os anéis  $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , onde  $n\mathbb{Z} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , pois são fechados em relação às operações usuais de  $\mathbb{Z}$ :

$$nq_1 + nq_2 = n(q_1 + q_2),$$

$$(nq_1)(nq_2) = n(nq_1q_2).$$

Se  $B$  é subanel de  $A$ , vamos usar a notação  $B \leq A$ .

### Exemplo 20.

Temos os exemplos de subanéis  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ .

Se na multiplicação há um elemento  $e \in A$  tal que  $ex = xe = x$  para todo  $x \in A$ , então o anel é um anel com identidade (unidade).

Se o anel é abeliano sobre a multiplicação, é chamado um anel abeliano.

Seja  $A$  um anel com identidade. Se um elemento  $x \in A$  tem inverso,  $x$  é dito ser regular (invertível ou não singular).

### Definição 21. (Corpo)

Um anel com identidade é chamado **corpo** se todos os seus elementos, exceto o zero (elemento neutro da adição) são regulares.

No entanto, a maioria dos autores chamam os corpos definidos aqui como anéis com divisão e reservam a palavra corpo para um anel com divisão comutativo. Assim, adotaremos também essa definição.

### Exemplo 22.

Os anéis  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são corpos.



### Exemplo 23. (Anel dos Quatérnios)

O anel  $\mathbb{Z}$  não é um corpo, pois não existe um simétrico multiplicativo para qualquer inteiro diferente de 1 e -1.

Prova:

Façamos agora uma construção dos quatérnios, a qual utilizará os conceitos expostos até aqui.

## §2. Os Quatérnios

Seja  $R^4 = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in R\}$ , onde

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d') \Leftrightarrow a = a', b = b', c = c' \text{ e } d = d'.$$

Vamos definir as operações de soma e produto em  $R^4$ .

Sejam  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in R$ . A soma se fará de forma que:

$$(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d'),$$

e o produto será tal que:

$$(a, b, c, d) \cdot (a', b', c', d') = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' - cd' - c'd, ac' + a'c + db' - d'b, ad' + da' + bc' - b'c).$$

Pode-se provar que  $(R^4, +, \cdot)$  é um anel cujo elemento neutro é  $(0, 0, 0, 0)$  e cujo elemento unidade é  $(1, 0, 0, 0)$ .

É fácil verificarmos que:

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) \neq (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0)$$

e portanto  $(R^4, +, \cdot)$  é um exemplo de anel não comutativo com unidade.

Vamos agora fazer as seguintes identificações:

$$1 \leftrightarrow (1, 0, 0, 0)$$

$$i \leftrightarrow (0, 1, 0, 0)$$

$$j \leftrightarrow (0, 0, 1, 0)$$

$$k \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

$$a1 + bi + cj + dk \leftrightarrow (a, b, c, d)$$

Com essas identificações e fazendo  $a1 = a$ , chegamos ao conjunto

$$\{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in R\},$$

onde

$$a + bi + cj + dk = a' + b'i + c'j + d'k \Leftrightarrow a = a', b = b', c = c' \text{ e } d = d',$$

que será denotado por  $H$ .



### Proposição 24. (Anel dos Quatérnios)

É possível construir um anel a partir do conjunto  $H$ , o qual é denominado anel dos **quatérnios**.

**Prova:**

Identificando as operações  $+$  e  $\cdot$ , teremos que:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$i \cdot j = k, \quad j \cdot i = -k$$

$$j \cdot k = i, \quad k \cdot j = -i$$

$$k \cdot i = j, \quad i \cdot k = -j$$

e as operações em  $H$  são definidas por: sejam  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in R$ ,

soma:

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k;$$

produto:

$$(a + bi + cj + dk) \cdot (a' + b'i + c'j + d'k) = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' - cd' - c'd)i \\ + (ac' + a'c + db' - d'b)j + (ad' + da' + bc' - b'c)k.$$

Portanto, o anel  $(R^4, +, \cdot)$  pode ser identificado com o anel  $(H, +, \cdot)$ .

O elemento neutro e a unidade de  $(H, +, \cdot)$  serão, respectivamente,

$$0 = 0 + 0i + 0j + 0k \quad \text{e} \quad 1 = 1 + 0i + 0j + 0k.$$

Como  $i \cdot j \neq j \cdot i$  sabemos que  $(H, +, \cdot)$  é um anel não comutativo com unidade, o qual recebe o nome de **anel dos quatérnios**.

É fácil provar que se  $x = a + bi + cj + dk \neq 0$ , então existe um elemento

$$y = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

em  $(H, +, \cdot)$ , tal que  $x \cdot y = y \cdot x = 1$ .

Assim, o anel dos quatérnios para ser um corpo só falta a propriedade da comutatividade do produto. Por isso, dizemos que se trata de um anel de divisão ou corpo não comutativo.  $\square$

### Exemplo 25.

Agora, podemos reescrever o exemplo 20 de forma que teremos os seguintes exemplos de subanéis  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq H$ .



### Proposição 26. (O Grupo $Q_8$ )

O conjunto  $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} \subset H$  é um grupo.

**Prova:**

É simples verificar que  $Q_8$  é um grupo com a operação de multiplicação de  $H$ , pois,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x, \forall x \in Q_8;$$

$$i \cdot j = k, j \cdot k = i, k \cdot i = j, j \cdot i = -k, k \cdot j = -i, i \cdot k = -j;$$

$$j^{-1} = j^3 = -j, k^{-1} = k^3 = -k, i^{-1} = i^3 = -i.$$

Assim,  $(Q_8, \cdot)$  é um grupo não abeliano com exatamente 8 elementos.  $\square$

### §3. Os Bicomplexos

Suponhamos que em um conjunto  $A$  esteja definida uma relação entre pares de elementos de  $A$ . Se  $x, x' \in A$ , escreveremos  $x \mathcal{R} x'$  se  $x$  estiver relacionado com  $x'$ .

Dizemos que  $\mathcal{R}$  é uma **relação de equivalência** em  $A$  se verificarmos as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, quaisquer que sejam  $x, x', x'' \in A$ , ou seja:

$$RA.1) x \mathcal{R} x,$$

$$RA.2) \text{ Se } x \mathcal{R} x' \text{ então } x' \mathcal{R} x,$$

$$RA.3) \text{ Se } x \mathcal{R} x' \text{ e } x' \mathcal{R} x'' \text{ então } x \mathcal{R} x''.$$

Quando uma relação for de equivalência vamos usar a notação  $\sim$  em vez de  $\mathcal{R}$ .

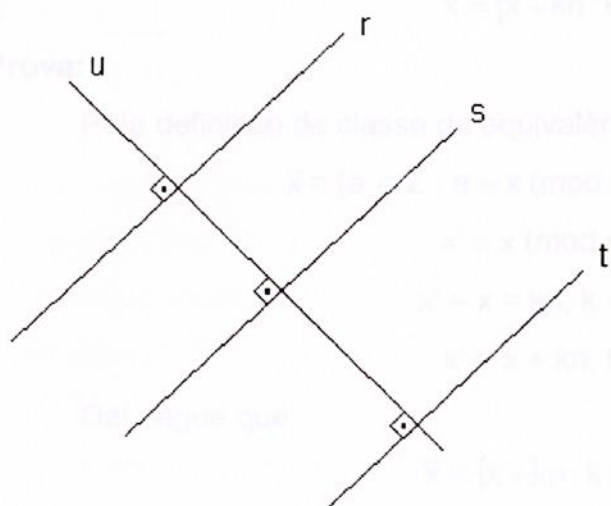
#### Definição 27. (Classe de Equivalência)

Seja  $\sim$  uma relação de equivalência em um conjunto  $A$  e seja  $x \in A$ . Chamaremos

$$\bar{x} = \{a \in A : a \sim x\}$$

de **classe de equivalência**  $\bar{x}$  do elemento  $x$  em relação a  $\sim$ .

A figura a seguir serve para ilustrar os dois próximos exemplos.



- i)  $r \not\perp r$
- ii)  $r \perp u \Rightarrow u \perp r$
- iii)  $r \perp u$  e  $u \perp s \not\Rightarrow r \perp s$
- iv)  $r \parallel r$
- v)  $r \parallel s \Rightarrow s \parallel r$
- vi)  $r \perp s$  e  $s \perp t \Rightarrow r \perp t$

### Exemplo 28.

Se  $A$  é o conjunto de retas do plano, **ortogonalidade** define uma relação  $\mathfrak{R}$  entre pares de elementos do conjunto  $A$ , a qual não é uma relação de equivalência por não ser reflexiva nem transitiva.

### Exemplo 29.

Se  $A$  é o conjunto de retas do plano e se considerarmos duas retas coincidentes como paralelas, o **paralelismo** define uma relação  $\sim$  de equivalência.

### Definição 30. (Congruência Módulo $n$ )

Seja  $A = \mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros e seja  $n \in \mathbb{Z}$  arbitrariamente fixado. A relação de equivalência

$$x, x' \in \mathbb{Z}, x \sim x' \Leftrightarrow x - x' \text{ é um múltiplo de } n$$

recebe o nome de **congruência módulo  $n$** .

Geralmente, a congruência módulo  $n$  é indicada por  $\equiv (\text{mod } n)$ . Assim,

$$x, x' \in \mathbb{Z}, x \equiv x' (\text{mod } n) \Leftrightarrow x - x' \text{ é um múltiplo de } n.$$

### Proposição 31. (Classe de Equivalência da Congruência Módulo n)

A classe de equivalência  $\bar{x}$  relativa à congruência módulo n é dada por

$$\bar{x} = \{x + kn : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Prova:**

Pela definição de classe de equivalência, temos que se  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$\bar{x} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv x \pmod{n}\} \text{ e } x' \in \bar{x} \Leftrightarrow$$

$$x' \equiv x \pmod{n} \Leftrightarrow$$

$$x' - x = kn, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x' = x + kn, k \in \mathbb{Z}.$$

Daí segue que:

$$\bar{x} = \{x + kn : k \in \mathbb{Z}\}. \quad \square$$

### Definição 32. (Os Anéis $\mathbb{Z}_n$ )

Seja  $n \geq 2$  um número inteiro e seja  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$  o conjunto formado pelas classes de equivalência de 0 até  $n - 1$ . Com as operações de

$$\text{soma: } \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} \text{ e}$$

$$\text{produto: } \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y},$$

dizemos que  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  é o **anel  $\mathbb{Z}_n$**  ou anel dos inteiros módulo n, o qual é comutativo com unidade  $\bar{1}$ .

### Exemplo 33.

Temos que  $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$  e  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  são anéis com a operação de soma e produto acima definidas. Obviamente, também são grupos aditivos.

### Definição 34. (Produto Cartesiano entre Grupos)

Sejam  $(G, \circ)$  e  $(H, \Delta)$  dois grupos. Definamos o **produto cartesiano** de G e H, dado por

$$G \times H = \{(g, h) : g \in G \text{ e } h \in H\}.$$

Então,  $(G \times H, *)$  é um grupo, cuja operação é tal que

$$(g, h) * (g', h') = (g \circ g', h \Delta h'), \quad \forall g, g' \in G, \quad \forall h, h' \in H.$$



### Exemplo 35. Grupos e Aplicações

A partir dos grupos  $(Z_4, +)$  e  $(Z_2, +)$  dados no exemplo anterior, podemos obter o grupo  $(Z_4 \times Z_2, +)$  com  $Z_4 \times Z_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}); (\bar{0}, \bar{1}); (\bar{1}, \bar{0}); (\bar{1}, \bar{1}); (\bar{2}, \bar{0}); (\bar{2}, \bar{1}); (\bar{3}, \bar{0}); (\bar{3}, \bar{1})\}$ .

Estamos interessados, para os objetivos finais desta dissertação, em anéis que podem ser obtidos a partir de grupos, com 8 elementos, que sejam isomorfos a um grupo multiplicativo qualquer  $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ , onde pelo menos duas entre as três igualdades a seguir sejam válidas:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1.$$

§1.1 Uma definição de isomorfismo é dada na seção 1.2, a seguir.

O grupo  $(Z_4 \times Z_2, +)$  acima tem, evidentemente, 8 elementos, à semelhança do grupo  $(Q_8, \cdot)$ , citado na proposição 26.

### Exemplo 36. Isomorfismo entre Grupos

Um isomorfismo entre os elementos de  $G$  e  $Q_8$  é óbvia. Por outro lado, também podemos, por exemplo, definir uma aplicação dos elementos de  $Z_4 \times Z_2$  nos elementos do grupo  $G$  de modo a obter a seguinte associação:

$$\begin{aligned} (\bar{0}, \bar{0}) &\leftrightarrow 1; & (\bar{0}, \bar{1}) &\leftrightarrow k; & (\bar{1}, \bar{0}) &\leftrightarrow i; & (\bar{1}, \bar{1}) &\leftrightarrow -i; \\ (\bar{2}, \bar{0}) &\leftrightarrow -1; & (\bar{2}, \bar{1}) &\leftrightarrow -k; & (\bar{3}, \bar{0}) &\leftrightarrow j; & (\bar{3}, \bar{1}) &\leftrightarrow -j. \end{aligned}$$

Assim como o anel dos quatérnios  $(H, +, \cdot)$  pode ser gerado pelo grupo  $Q_8$ , podemos obter, a partir do grupo  $Z_4 \times Z_2$ , um anel que chamaremos de anel dos **bicomplexos** e representaremos simplesmente por  $(G_{4 \times 2}, +, \cdot)$ .

A tabela de multiplicação para os bicomplexos é dada por:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = -1, & k^2 &= 1 \\ i \cdot j &= j \cdot i = k \\ j \cdot k &= k \cdot j = -i \\ k \cdot i &= i \cdot k = -j \end{aligned}$$

Exemplo 37. No capítulo 2, apresentaremos proposições e teoremas envolvendo o anel dos quatérnios e o anel dos bicomplexos. Esses anéis serão a base para o estudo da conformidade em alguns mapeamentos, a ser feito no capítulo 3.



## Seção 1.2: Grupos e Aplicações

Na seção anterior, entre outros assuntos, estudamos grupos exclusivamente do ponto de vista da operação definida neles mesmos. Agora, o objetivo desta seção é apresentar alguns conceitos que relacionam o estudo dos grupos com o estudo das aplicações, principalmente: isomorfismo entre grupos e grupos de transformações.

Como na seção anterior, a abordagem nesta seção está muito baseada em Pontriaguin, op. cit. [18].

### §1. Isomorfismo entre Grupos

Vejamos a seguinte definição.

#### Definição 37. (Isomorfismo entre Grupos)

Uma aplicação  $f$  de um grupo  $(G, \circ)$  sobre um grupo  $(G', \otimes)$  se chama aplicação isomorfa ou **isomorfismo** se é bijetiva e conserva a operação de multiplicação, ou seja,

$$f(x \circ y) = f(x) \otimes f(y)$$

para dois elementos quaisquer  $x$  e  $y$  de  $G$ .

É fácil ver que se a aplicação  $f$  é isomorfa, também é isomorfa a inversa dessa aplicação. Dois grupos  $G$  e  $G'$  se denominam isomorfos se existe uma aplicação isomorfa de um sobre o outro.

Se a aplicação conserva a operação de multiplicação, mas não é necessariamente bijetiva, dizemos que é um homomorfismo.

Uma aplicação bijetiva de um conjunto sobre si mesmo é uma transformação desse conjunto. Uma transformação isomorfa, ou seja, um isomorfismo de  $G$  em  $G$  se chama automorfismo de  $G$ .

#### Exemplo 38.

**Prova** Seja  $G$  o grupo de todas as matrizes quadradas de ordem  $n$  (com a multiplicação usual de matrizes), cujos determinantes são diferentes de zero. Seja



$G^*$  o grupo multiplicativo de todos os números complexos distintos de zero. Então  $g(s) = \det(s)$ , onde  $\det(s)$  é o determinante da matriz  $s \in G$  é uma aplicação homomorfa de  $g$  do grupo  $G$  sobre o grupo  $G^*$ .

Justificativa: Temos que  $g(st) = \det(st) = \det(s) \cdot \det(t)$ . Além disso, em  $G$  existem matrizes de qualquer determinante diferente de zero. Logo,  $g$  é uma aplicação homomorfa do grupo  $G$  sobre  $G^*$ .

### Exemplo 39.

Sejam  $G$  o grupo aditivo de todos os números reais e  $G'$  o grupo multiplicativo de todos os números reais positivos.  $G$  e  $G'$  são isomorfos.

Justificativa: A aplicação  $f$  que põe em correspondência a todo elemento  $x \in G$  o elemento  $f(x) = e^x \in G'$ , é um isomorfismo do grupo  $G$  sobre o grupo  $G'$ .

## §2. Grupo de Transformações

Um exemplo muito importante de grupo é o grupo de transformações de um conjunto. Os grupos apareceram na matemática precisamente em relação com as transformações e só depois, através de um processo de abstração, começaram a estudar-se independentemente das transformações.

### Definição 40. (Grupos de Transformações)

Um grupo  $G^*$  se denomina **grupo de transformações** de um conjunto  $\Gamma$ , se a todo elemento  $x^* \in G^*$  corresponde uma transformação  $x$ ,  $x = \tau(x^*)$ , do conjunto  $\Gamma$  tal que

$$\tau((xy)^*) = \tau(x^*) \tau(y^*).$$

Escrevamos  $G = \tau(G^*)$ . É evidente que  $G$  é um grupo de transformações do conjunto  $\Gamma$  e que  $\tau$  é uma aplicação homomorfa do grupo  $G^*$  sobre o grupo  $G$ .

### Proposição 41. (Grupo de Transformações)

Os grupos de transformações  $G$ , conforme definição acima, são compatíveis com a estrutura de grupo.

**Prova:**

Analisemos mais detidamente a construção do grupo  $G$  acima.



Se  $x$  e  $y$  são duas transformações do conjunto  $\Gamma$ , o produto  $z = xy$  destas se define mediante a relação:

$$z(\xi) = \{x(y(\xi))\} \text{ para qualquer } \xi \in \Gamma$$

É fácil concluir que a aplicação  $z$  assim definida é uma transformação do conjunto  $\Gamma$ .

Para esta multiplicação, o papel da unidade é desempenhado pela transformação idêntica  $e$  do conjunto  $\Gamma$  definida mediante a relação

$$e(\xi) = \xi, \text{ para } \forall \xi \in \Gamma.$$

Está claro que  $ex = xe = x$ .

A transformação  $x^{-1}$  inversa da transformação  $x$  se define como a transformação que aplica todo elemento  $x(\xi)$  do conjunto  $\Gamma$  no elemento  $\xi$ . Temos que  $x^{-1}x = e$ , de modo que a transformação  $x^{-1}$  é a inversa pela esquerda da transformação  $x$ .

Demonstremos que a multiplicação das transformações é associativa. Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  três transformações do conjunto  $\Gamma$  e seja  $\xi \in \Gamma$ .

Teremos:

$$(xy)z(\xi) = (xy)(z(\xi)) = x(y(z(\xi))),$$

$$x(yz)(\xi) = x(yz(\xi)) = x(y(z(\xi))),$$

De modo que  $(xy)z = x(yz)$ .

Por conseguinte, todo conjunto não vazio  $G$  que está composto por transformações do conjunto  $\Gamma$  e que, se contém duas transformações, também contém seu produto e que, se contém uma transformação, também contém sua inversa, constitui um grupo em virtude da lei de multiplicação de transformações estabelecida.  $\square$

Assim, a qualquer grupo deste gênero podemos dar o nome de grupo de transformações do conjunto  $\Gamma$ , conforme definição 40.

Um grupo  $G$  de transformações do conjunto  $\Gamma$  se denomina transitivo se para dois quaisquer elementos  $\xi$  e  $\eta$  do conjunto  $\Gamma$  existe uma transformação  $x \in G$  tal que

$$x(\xi) = \eta.$$

## Seção 1.3 Grupos de Lie

Em particular, o grupo de todas as transformações do conjunto  $\Gamma$  é transitivo; a transformação  $x$  que aplica  $\xi$  em  $\eta$  pode ser definida pelas relações:

$$x(\xi) = \eta, x(\eta) = \xi, x(\lambda) = \lambda \text{ para } \lambda \neq \xi \text{ e } \lambda \neq \eta.$$

### Exemplo 42.

Seja  $G_n$  o grupo de todas as transformações de um conjunto finito  $\Gamma_n$  composto por  $n$  elementos, por exemplo, pelos números  $1, 2, \dots, n$ . Qualquer transformação do conjunto  $\Gamma_n$  se denomina também permutação e o grupo  $G_n$  se chama grupo de todas as permutações do conjunto  $\Gamma_n$  e contém  $n!$  elementos.

### Exemplo 43.

Considere  $\Gamma$  como o plano euclidiano, composto como um conjunto de pontos. Denominamos movimento do plano a uma transformação pela qual se conservam as distâncias entre dois pontos quaisquer do plano. O conjunto  $G$  de todos os movimentos do plano constitui um grupo de transformações do mesmo.



Justificativa: É evidente que ao realizar sucessivamente dois movimentos, ou seja, ao multiplicá-los como transformações, obteremos de novo um movimento; do mesmo modo a transformação inversa de um movimento é um movimento. Este grupo é evidentemente transitivo.

## Seção 1.3: Grupos de Lie

Como veremos em §3, a seguir, os grupos de Lie são grupos topológicos para os quais podemos falar em diferenciabilidade de suas coordenadas.

Exem. Antes, vejamos algumas idéias úteis ao entendimento dos grupos de Lie.

Esta seção também tem seu desenvolvimento muito similar ao que pode ser visto em Pontriaguin, op. cit. [18].

### §1. Grupos Topológicos

Dizemos que  $x$  é um ponto de acumulação do conjunto  $M$  se, em  $M$ , existe uma sucessão de pontos, distintos de  $x$ , convergente a  $x$ .

O fecho de um conjunto  $M$ , representado por  $\overline{M}$ , é formado por todos os pontos de  $M$  e por todos pontos de acumulação de  $M$ .

Um conjunto  $R$  de elementos de qualquer gênero se denomina espaço topológico se a todo conjunto  $M$  formado por elementos do espaço  $R$  se põe em correspondência um conjunto  $\overline{M}$ , dito fecho do conjunto  $M$ , de modo que se cumpram as condições seguintes:

ET.1) se  $M$  contém um elemento  $x$  somente, então  $\overline{M} = M$ ;

ET.2) se  $M$  e  $N$  são dois conjuntos de elementos do espaço  $R$ , então  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ , ou seja, o fecho de uma soma é igual à soma dos fechos;

ET.3)  $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ , ou seja, a operação de fecho aplicada duas vezes dá o mesmo resultado que aplicada uma vez.

#### Exemplo 44.

Seja  $R$  um conjunto infinito. Definamos a operação de fecho em  $R$  pelas condições seguintes: se  $M$  é um conjunto infinito de  $R$ , poremos  $\overline{M} = M$ ; se  $M$  é um conjunto finito de  $R$ , poremos  $\overline{M} = R$ . É fácil comprovar que esta operação de fecho cumpre as condições da definição de espaço topológico feita acima.

Uma coleção  $\Sigma$  de abertos de um espaço  $R$  se denomina base do espaço  $R$  se todo aberto não vazio de  $R$  pode obter-se como a soma de um conjunto de



abertos pertencente a  $\Sigma$ . Uma base  $\Sigma$  do espaço  $R$  também se chama conjunto completo de vizinhanças do espaço  $R$  e todo aberto do conjunto  $\Sigma$  se denomina vizinhança de qualquer ponto pertencente a este aberto.

#### Exemplo 45.

O exemplo mais simples de uma base de um espaço  $R$  é a coleção dos abertos em  $R$ .

Um homeomorfismo é uma aplicação contínua e biunívoca de um espaço topológico sobre outro espaço topológico. Neste caso, a inversa desta aplicação também é um homeomorfismo.

#### Definição 46. (Grupo Topológico)

Um conjunto  $G$  se chama **grupo topológico** se:

GT.1)  $G$  é um grupo;

GT.2)  $G$  é um espaço topológico;

GT.3) as operações de grupo existentes em  $G$  são contínuas no espaço topológico  $G$ .

De forma um pouco mais completa, podemos substituir os itens acima por:

GT) sendo que  $a$  e  $b$  são dois elementos do conjunto  $G$ , para toda vizinhança  $W$  de elementos  $ab^{-1}$  existem vizinhanças  $U$  e  $V$  dos elementos  $a$  e  $b$  tais que  $UV^{-1} \subset W$ .

#### Exemplo 47.

A reta ou, mais geralmente, qualquer espaço vetorial normado  $E$ , é um grupo topológico (comutativo) relativamente à adição.

#### Exemplo 48.

O grupo  $G(n)$  das matrizes reais inversíveis  $n \times n$  é um grupo topológico.



Um espaço topológico  $G$  se chama grupo local se para alguns pares  $a, b$  de elementos do conjunto está definido o produto  $ab \in G$  com a particularidade de que se cumprem as condições seguintes:

GL.1) se estão definidos os produtos  $ab, (ab)c, bc$  e  $a(bc)$ , vale a igualdade  $(ab)c = a(bc)$ ;

GL.2) Se está definido o produto  $ab$ , então para toda vizinhança  $W$  do elemento  $ab$  existem as vizinhanças  $U$  e  $V$  dos elementos  $a$  e  $b$  tais que o produto  $xy$  está definido para  $x \in U$  e  $y \in V$  e  $xy \in W$ ;

GL.3) Em  $G$ , está indicado um elemento  $e$  que desempenha um papel especial e se denomina unidade. Tem a propriedade seguinte: se  $a \in G$ , está definido o produto  $ea$  tal que  $ea = a$ ;

GL.4) Se para o par  $a, b$  está definido o produto e  $ab = e$ , se diz que  $a$  é o elemento inverso à esquerda de  $b$ ,  $a = b^{-1}$ . Se existe para  $b$  o elemento inverso à esquerda  $b^{-1}$ , então para toda vizinhança  $U$  do elemento  $b^{-1}$ , existe uma vizinhança  $V$  do elemento  $b$  tal que qualquer que seja o elemento  $y \in V$ , existe seu inverso à esquerda  $y^{-1}$  pertencente a  $U$ .

## **§2. Coordenadas Diferenciáveis e Analíticas**

Dizemos que num grupo local  $G$  foram introduzidas coordenadas sempre que se tenha uma aplicação topológica  $\phi$  de uma vizinhança  $U$  da unidade do grupo  $G$  sobre um aberto  $V$  de um espaço euclidiano coordenado  $S$  que aplique a unidade na origem de coordenadas.

Ou seja, a todo ponto  $x \in U$  se corresponde um sistema de números reais

$$x^1, \dots, x^r,$$

que são as coordenadas do ponto  $\phi(x) \in S$ . Denominaremos agora estes números de coordenadas do ponto  $x \in U$ .

À unidade se correspondem então as coordenadas iguais a zero. Além disso, a todo sistema de números  $x^1, \dots, x^r$ , sempre que o valor absoluto destes números seja suficientemente pequeno, lhe corresponde um ponto determinado  $x \in U$  que tem estes números como coordenadas.

O número  $r$  é a dimensão do grupo local  $G$ .



**Definição 48.** Seja  $W$  uma vizinhança tão pequena da unidade do grupo  $G$  que para quaisquer dois elementos  $x$  e  $y$  de  $W$  está definido o produto  $xy$ ,  $xy \in U$ . Então teremos  $xy = z = f(x, y)$ .

Como os pontos  $x$ ,  $y$  e  $z$  pertencem a  $U$ , a eles correspondem coordenadas e a relação acima se representa na forma de coordenadas por

$$z = f(x, y) = f(x^1, \dots, x^r; y^1, \dots, y^r), \quad (1)$$

onde as funções  $f^i$  dos segundos membros são funções unívocas contínuas definidas para todos os valores suficientemente pequenos dos argumentos. Além disso, como  $xe = x$ ,  $ey = y$ , teremos

$$f^i(x^1, \dots, x^r; 0, \dots, 0) = x^i, \quad f^i(0, \dots, 0; y^1, \dots, y^r) = y^i \quad (2)$$

**Exemplo 52.**

#### **Definição 49. (Coordenadas Diferenciáveis e Analíticas)**

As coordenadas  $x^1, \dots, x^r$  introduzidas no grupo local  $G$  se denominam **diferenciáveis** se as funções (1) são continuamente diferenciáveis, e **analíticas**, se as funções em (2) são analíticas.

Das relações (2) se deduz diretamente que

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \frac{\partial f^i}{\partial y^j} = \delta_j^i \quad \text{para } x = y = e. \quad (3)$$

De (3) se deduz que nas proximidades de  $e$ , as equações (1) podem ser resolvidas com respeito às coordenadas  $x^1, \dots, x^r$  do elemento  $x = zy^{-1}$ ; estas coordenadas são, por conseguinte, funções continuamente diferenciáveis (analíticas) das coordenadas dos elementos  $y$  e  $z$ . O mesmo tem lugar para o elemento  $y = x^{-1}z$ .

No capítulo 2, a diferenciabilidade e a analiticidade serão novamente enfocadas, para as variáveis complexas.

Agora, já podemos definir os grupos de Lie, a seguir.

### **§3. Grupos de Lie**

A teoria clássica dos grupos de Lie se ocupa, em primeiro lugar, dos grupos locais. Por isso, a definição 50 assume a forma seguinte.



### Definição 50. (Grupo de Lie)

Um grupo local  $G$  se chama grupo de Lie se pode introduzir-se nele coordenadas diferenciáveis. Um grupo topológico  $G$  provido de uma base topológica numerável se chama **grupo de Lie** se nele, como no grupo local, pode-se introduzir coordenadas diferenciáveis.

### Exemplo 51.

O  $\mathbb{R}^n$  com a operação de adição vetorial é um grupo de Lie quando dotado com a estrutura diferenciável usual.

### Exemplo 52.

O espaço dos mapeamentos bijetivos lineares de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$  com a operação de composição é um grupo de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$ .

### Proposição 53. (Um Grupo de Lie de Matrizes)

Seja  $G$  o grupo topológico de todas as matrizes quadradas de ordem  $n$  de determinantes distintos de zero.  $G$  é um grupo analítico de Lie.

#### Prova:

Para demonstrarmos isso, definamos as coordenadas em  $G$  do seguinte modo. Representemos qualquer matriz  $x \in G$  na forma

$$e + \|x_j^i\|,$$

onde  $e$  é a matriz unidade e tomemos os elementos da matriz  $\|x_j^i\|$  como coordenadas da matriz  $x$ .

Assim obteremos uma aplicação  $\phi$  de todo o grupo  $G$  sobre um aberto de um espaço euclidiano  $S$  de  $n^2$  dimensões que aplica a unidade na origem de coordenadas. A relação (1) toma para  $G$  a seguinte forma algébrica

$$z_j^i = x_j^i + y_j^i + x_k^i y_j^k.$$

De modo que  $G$  é um grupo analítico de Lie.  $\square$

Analogamente, as matrizes complexas quadradas de ordem  $n$  e de determinantes distintos de zero constituem um grupo analítico de Lie de dimensão  $2n^2$ .

## Seção 1.4: Transformações Conformes e Grupos Holonômicos

O objetivo principal desta seção é o de explicar quando uma transformação é dita conforme e o que vem a ser um grupo holonômico.

Antes disso, aproveitaremos para definir variedade diferenciável e métrica Riemanniana, as quais nos permitirão ampliar idéias já expostas nas seções anteriores (como grupos de Lie), e, além disso, proceder ao objetivo principal desta seção de uma forma mais generalizada.

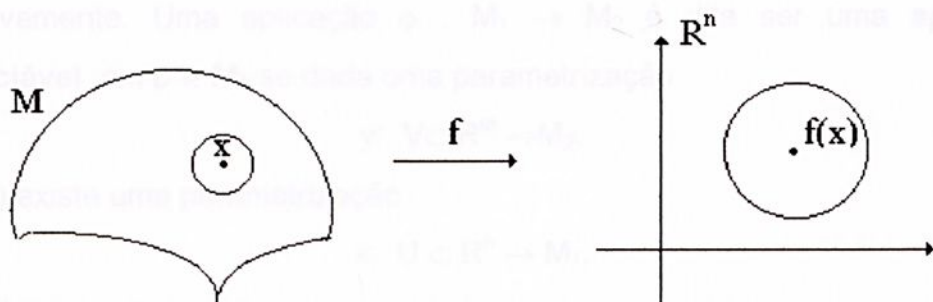
A maioria dos conceitos desta seção podem ser encontrados em Carmo [4], Choquet-Bruhat [5], Lima [14], Nakahara [17], Sagle [19] e Thorpe [21].

### §1. Métrica Riemanniana

Vejamos alguns tópicos úteis à fundamentação da métrica Riemanniana.

#### Definição 54. (Variedade Topológica)

Uma **variedade topológica** de dimensão  $n$  é um espaço topológico  $M$  tal que todo ponto  $x \in M$  possui uma vizinhança aberta, homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .



Esta definição equivale a exigir que cada ponto  $x \in M$  possua uma vizinhança homeomorfa ao disco unitário  $S^n \subset \mathbb{R}^n$ .

#### Exemplo 55.

Todo subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade topológica.

### Definição 56. (Variedade Diferenciável)

$M$  é uma **variedade diferenciável** de dimensão  $n$  se:

VD.1)  $M$  é um espaço topológico;

VD.2)  $M$  é provida com uma família de pares  $\{(U_i, \phi_i)\}$ ;

VD.3)  $\{U_i\}$  é uma família de abertos que cobrem  $M$ , ou seja,  $\cup_i U_i = M$ ;  
 $\phi_i$  é um homeomorfismo de  $U_i$  sobre um subconjunto aberto  $U'_i$  de  $\mathbb{R}^n$ .

VD.4) Dado  $U_i$  e  $U_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , a aplicação  $\psi_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1}$  de  $\phi_j(U_i \cap U_j)$  em  $\phi_i(U_i \cap U_j)$  é infinitamente diferenciável.

O par  $(U_i, \phi_i)$  é chamado uma parametrização ou sistema de coordenadas de  $M$ .

Já apresentamos a definição 50 de grupos de Lie. Agora, podemos fazer a definição de forma mais geral, mediante o exemplo 57.

### Exemplo 57.

Um grupo de Lie  $G$  é um grupo e é uma variedade diferenciável, tal que sua estrutura diferenciável é compatível com a estrutura de grupo. Ou seja, a operação que leva  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  é uma aplicação diferenciável,  $\forall x, y \in G$ .

### Definição 58. (Aplicação Diferenciável)

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades diferenciáveis de dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente. Uma aplicação  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  é dita ser uma **aplicação diferenciável** em  $p \in M_1$  se dada uma parametrização

$$y: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2,$$

em  $\phi(p)$  existe uma parametrização

$$x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1,$$

em  $p$ , tal que

$$\phi(x(U)) \subset y(V)$$

e a aplicação

$$y^{-1} \circ \phi \circ x: x^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em todos os pontos do aberto.

### Definição 59. (Espaço Tangente de M em p)

Seja  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva (aplicação) diferenciável em uma variedade M. Um vetor tangente em p é o vetor tangente em t de alguma curva  $\alpha$  com  $\alpha(t) = p$ . O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por  $T_p(M)$  e é um espaço vetorial de dimensão n, com as operações usuais de função. Este conjunto será chamado de **espaço tangente de M em p**.

### Definição 60. (Métrica Riemanniana)

Seja M uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana** g em M é uma lei que satisfaz os seguintes axiomas para cada ponto  $p \in M$ :

MR.1)  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$ ;

MR.2)  $g_p(U, U) \geq 0$ , onde a igualdade ocorre somente quando  $U = 0$ .

Aqui, temos que  $U, V \in T_p(M)$  e  $g_p = g|_p$ .

De forma curta,  $g_p$  é uma forma bilinear definida positiva simétrica.

Agora, já podemos proceder à apresentação das transformações conformes, no próximo item.

## §2. Transformação Conforme

Vejamos a seguinte definição.

### Definição 61. (Transformação Conforme)

Seja M uma variedade com uma métrica Riemanniana g. Uma aplicação suave

$$\sigma: (M, g) \rightarrow (M, g)$$

é dita ser uma **transformação conforme**, satisfaz a equação

$$(\sigma^{-1} \circ g \circ \sigma)(x) = e^{2\phi(x)} \cdot g(x),$$

onde  $\phi$  é uma função em M.

### Exemplo 62.

A projeção estereográfica é uma transformação conforme.



Definição 62. Seja  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$  a inversa da projeção estereográfica  $S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$  no hiperplano equatorial  $x_{n+1} = 0$ .

Para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ , existe  $\lambda(p) > 0$  real, tal que,

$$\|d\varphi(v)\| = \lambda(p) \cdot \|v\|,$$

qualquer que seja  $v \in \mathbb{R}_p^n$ , espaço de vetores em  $p$ .

Se usarmos o fato de que

$$v \cdot w = 1/4 \cdot (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2),$$

concluimos que

$$d\varphi(v) \cdot d\varphi(w) = (\lambda(p))^2 \cdot v \cdot w,$$

para quaisquer  $v, w \in \mathbb{R}_p^n$  e, portanto,  $d\varphi$  preserva o ângulo entre vetores.

Proposição 63.

O conjunto das transformações conformes em  $M$  é um grupo, chamado grupo conforme e denotado por  $\text{Conf}(M)$ .

### Exemplo 63.

Seja  $w = f(z)$  uma função definida no plano complexo. Escrevendo as partes real e imaginária das respectivas variáveis como  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$ , o mapeamento  $f: (x, y) \mapsto (u, v)$  é conforme desde que

$$du^2 + dv^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)^2 = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2)$$

onde foram usadas as relações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4).$$

A Teoria de Variáveis Complexas será retomada no capítulo 2, quando reapresentaremos o conceito de conformidade, construído na citada teoria.

A seguir, veremos tópicos que servirão de base para a conceituação dos grupos holonômicos.

## §3. Grupos Holonômicos

Começemos com a seguinte definição.



### Definição 64. (Conexão Afim)

Uma **conexão afim** numa variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned}\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

que satisfaz as propriedades:

$$\text{CA.1) } \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z,$$

$$\text{CA.2) } \nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$\text{CA.3) } \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y,$$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in D(M)$ , sendo  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de Classe  $C^\infty$  em  $M$  e  $D(M)$  o anel das funções reais de Classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ .

### Proposição 65.

Seja  $\nabla$  uma conexão afim numa variedade diferenciável  $M$ . Seja  $c: I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $W_0$  um vetor tangente a  $M$  em  $c(t_0)$ , com  $t_0 \in I$ . Ou seja,  $W_0 \in T_{c(t_0)}(M)$ . Existe um único campo de vetores paralelo  $W$  ao longo de  $c$ , tal que  $W(t_0) = W_0$ . Temos que  $W(t)$  é chamado transporte paralelo de  $W(t_0)$  ao longo de  $c$ .

Um loop baseado em  $x$  é uma curva fechada  $c$ , iniciando e terminando num mesmo ponto  $x$ .

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $m$ -dimensional com uma conexão afim  $\nabla$ . A conexão naturalmente define um grupo de transformação para cada espaço tangente  $T_p(M)$  como segue.

Sejam  $p \in (M, g)$  e  $\{c(t) / 0 \leq t \leq 1, c(0) = c(1) = p\}$  o conjunto de loops baseado em  $p$ . Se transportarmos paralelamente o vetor  $W \in T_p(M)$  ao longo da curva  $c(t)$ , ao fim de uma volta completa obteremos um vetor  $W_c \in T_p(M)$ .

O loop  $c(t)$  e a conexão afim  $\nabla$  induzem uma transformação linear

$$\begin{aligned}P_c: T_p(M) &\rightarrow T_p(M) \\ W &\mapsto W_c.\end{aligned}$$

### Definição 66. (Grupo Holonômico)

O conjunto das transformações definidas acima é chamado **grupo holonômico** em  $p$  e é denotado por  $\text{Hol}(p)$  ou  $H(p)$ .



### Exemplo 67.

Sejam  $S$  uma  $n$ -superfície em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $p \in S$ . Façamos  $G_p$  como o grupo das transformações lineares não-singulares de  $S_p$  em si mesmo, onde  $S_p$  é uma  $n$ -superfície em  $p$ . O grupo dado por

$H_p = \{T \in G_p / T = P_\alpha \text{ para alguma curva suave } \alpha: [a, b] \rightarrow S, \text{ com } \alpha(a) = \alpha(b) = p\}$  é o grupo holonômico de  $S$  em  $p$ .

## CAPÍTULO 2:

### Seção 2.1: Transformações Conformes em Complexos

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de transformação conforme, agora construído na Teoria de Variáveis Complexas. São analisadas as transformações de translação, dilatação, rotação e inversão, quanto à sua conformidade.

A apresentação a seguir pode ser verificada, por exemplo, em Churchill [6] e Spiegel [20].

### §1. A Conformidade em Complexos

Seja  $f(z)$  uma função definida numa região  $R$  do plano  $z$ . A derivada de  $f(z)$  é dada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

desde que o limite indicado exista, e seja independente do modo como  $\Delta z$  tenda a zero.

#### Definição 1. (Função Analítica)

Se a derivada  $f'(z)$  existe em todos os pontos  $z$  de uma região  $R$ , então  $f(z)$  diz-se analítica em  $R$ . Normalmente, usa-se também chamá-la de regular ou holomorfa.

Uma condição necessária para que  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  seja analítica numa região  $R$  é que em  $R$ ,  $u$  e  $v$  satisfaçam as relações de Cauchy-Riemann, já citadas num exemplo no capítulo 1, seção 4, na equação (4), a saber:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



## CAPÍTULO 2:

# MAPEAMENTOS CONFORMES

### Seção 2.1: Transformações Conformes em Complexos

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de transformação conforme, agora construído na Teoria de Variáveis Complexas. São analisadas as transformações de translação, dilatação, rotação e inversão, quanto à sua conformidade.

A apresentação a seguir pode ser verificada, por exemplo, em Churchill [6] e Spiegel [20].

#### §1. A Conformidade em Complexos

Seja  $f(z)$  uma função definida numa região  $R$  do plano  $z$ . A derivada de  $f(z)$  é dada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

desde que o limite indicado exista, e seja independente do modo como  $\Delta z$  tenda a zero.

#### Definição 1. (Função Analítica)

Se a derivada  $f'(z)$  existe em todos os pontos  $z$  de uma região  $R$ , então  $f(z)$  diz-se **analítica** em  $R$ . Normalmente, usa-se também chamá-la de regular ou holomorfa.

Uma condição necessária para que  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  seja analítica numa região  $R$  é que em  $R$ ,  $u$  e  $v$  satisfaçam as relações de Cauchy-Riemann, já citadas num exemplo no capítulo 1, seção 4, na equação (4), a saber:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



Se as derivadas parciais de  $f(z)$  são contínuas em  $R$ , então as equações de Cauchy-Riemann são também condições suficientes para que  $f(z)$  seja analítica em  $R$ .

## Definição 2. (Transformações de Coordenadas)

Sejam  $u$  e  $v$  as partes real e imaginária de uma função analítica de uma variável complexa  $z = x + iy$ , isto é,  $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$ . O conjunto de equações

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

definem uma transformação que estabelece uma correspondência entre os pontos dos planos  $uv$  e  $xy$ . Por isso, são ditas equações de **transformação de coordenadas**.

Agora, já podemos enunciar o seguinte teorema.

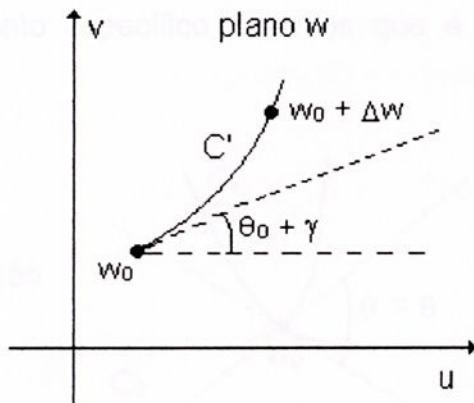
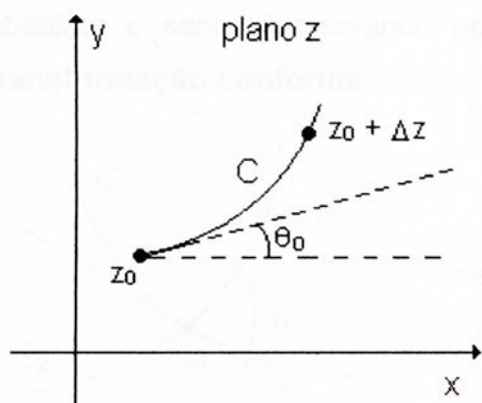
## Teorema 3. (Ângulo de Giro sob uma Transformação)

Considere a transformação  $w = f(z)$ , onde  $f(z)$  é analítica em  $z_0$  e  $f'(z_0) \neq 0$ . Sob esta transformação, a tangente em  $z_0$  a qualquer curva  $C$  do plano  $z$ , passando por  $z_0$  é girada de um ângulo  $\gamma$  tal que

$$\gamma = \arg f'(z_0).$$

**Prova:**

Quando um ponto se move de  $z_0$  a  $z_0 + \Delta z$  ao longo da curva  $C$ , a imagem move-se ao longo de  $C'$  no plano  $w$  de  $w_0$  a  $w_0 + \Delta w$ .



Se usarmos  $t$  como parâmetro para descrever a curva, então, ao caminho  $z = z(t)$  [ou  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ] no plano  $z$  corresponde o caminho  $w = w(t)$  [ou  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ] no plano  $w$ . As derivadas  $dz/dt$  e  $dw/dt$  representam os vetores tangentes nos correspondentes pontos sobre  $C$  e  $C'$ .

Agora,  $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z) \frac{dz}{dt}$  e, em particular em  $z_0$  e  $w_0$ ,

$$\left[ \frac{dw}{dt} \right]_{w=w_0} = f'(z_0) \left[ \frac{dz}{dt} \right]_{z=z_0}$$

desde que  $f(z)$  é analítica em  $z = z_0$ . Escrevendo

$$\left[ \frac{dw}{dt} \right]_{w=w_0} = \rho_0 \cdot e^{i\phi_0}, \quad f'(z) = R e^{i\gamma}, \quad \left[ \frac{dz}{dt} \right]_{z=z_0} = r_0 e^{i\theta_0},$$

temos que

$$\rho_0 \cdot e^{i\phi_0} = R r_0 e^{i(\theta_0 + \gamma)}$$

logo,

$$\phi_0 = \theta_0 + \gamma = \theta_0 + \arg f'(z_0)$$

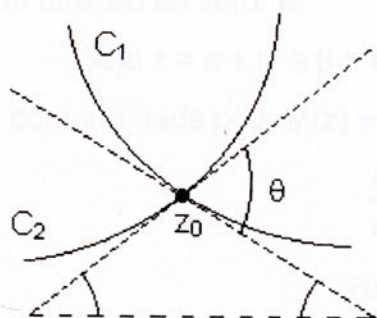
como queríamos.  $\square$

Observe que, se  $f'(z_0) = 0$ , então,  $\gamma$  é indeterminado. Os pontos para os quais  $f'(z) = 0$  são os pontos críticos.

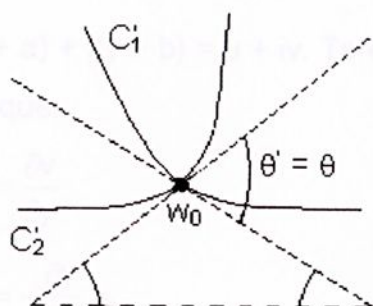
O ângulo entre duas curvas (arcos)  $C_1$  e  $C_2$  que se interceptam num ponto  $z_0$  é dado pelo ângulo  $\theta$  entre os vetores tangentes aos arcos nesse ponto.

#### Definição 4. (Transformação Conforme)

Quando uma transformação preserva o ângulo entre dois arcos (em valor absoluto e sentido) passando por um ponto específico, dizemos que é uma **transformação conforme**.



transformação  
conforme



Uma transformação que preserva os valores absolutos dos ângulos, mas não necessariamente os sentidos, é dita isogonal. Agora, vejamos um teorema.

### Teorema 5. (Transformação Conforme)

O ângulo entre duas curvas  $C_1$  e  $C_2$ , passando pelo ponto  $z_0$  no plano  $z$ , é invariante em grandeza e sentido (ou seja, é conforme) sob a transformação  $w = f(z)$ , se  $f(z)$  é analítica em  $z_0$  e  $f'(z_0) \neq 0$ .

**Prova:**

Pelo teorema 3, cada curva gira do ângulo  $\gamma = \arg f'(z_0)$ .

Para  $C_1$ , temos:

$$\phi_0 = \theta_0 + \gamma$$

e para  $C_2$ , temos:

$$\phi_0' = \theta_0' + \gamma$$

Então:

$$\phi_0' - \phi_0 = \theta_0' - \theta_0$$

Assim, provamos acima que o ângulo entre as curvas não se altera, tanto em grandeza como em sentido.  $\square$

## §2. Transformações Conformes

Vejamos alguns exemplos de transformações conformes. No que se segue, consideraremos  $\beta$  constante complexa, enquanto  $a$  e  $\theta$  constantes reais.

### Exemplo 6. (Translação)

$$w = z + \beta$$

Por esta transformação, figuras no plano  $z$  são deslocadas ou transladadas em direção ao vetor  $\beta$ .

Seja  $z = x + iy$  e  $\beta = a + ib$ . Então:  $w(z) = (x + a) + i(y + b) = u + iv$ . Teremos a conformidade pois  $w'(z) \neq 0$  e  $w$  é analítica, visto que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

### Exemplo 7. (Dilatação)

$$w = az$$

Por esta transformação, figuras no plano  $z$  são dilatadas (ou contraídas) na direção de  $z$  se  $a > 1$  (ou  $0 < a < 1$ ). Consideramos a contração como um caso especial de dilatação.

Seja  $z = x + iy$ .

Então:

$$w(z) = a(x + iy) = ax + iay = u + iv.$$

Teremos a conformidade pois  $w'(z) \neq 0$  e  $w$  é analítica, visto que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

### Exemplo 8. (Rotação)

$$w = e^{i\theta} z$$

Por esta transformação, figuras no plano  $z$  são giradas de um ângulo  $\theta$ . Se  $\theta > 0$ , a rotação se fará no sentido anti-horário; se  $\theta < 0$ , a rotação se fará no sentido horário.

Seja  $z = x + iy$  e  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

Então:

$$w(z) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta) = u + iv.$$

Teremos a conformidade pois  $w'(z) \neq 0$  e  $w$  é analítica, visto que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos \theta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin \theta; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \sin \theta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

### Exemplo 9. (Inversão)

$$w = 1/z.$$

Por esta transformação, temos o inverso de pontos não nulos no plano  $z$ .

Seja  $z = x + iy$ .



Então:

$$w(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = u + iv$$

Teremos a conformidade pois  $w'(z) \neq 0$  e  $w$  é analítica, visto que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

## §1. Região Simplesmente Conexas

Se  $f(t)$  e  $g(t)$  são funções reais de  $t$  variável real e se considerarmos que elas são contínuas em

$$a \leq t \leq b$$

as equações paramétricas

$$x = x(t) = f(t) - g(t); \quad y = y(t) = f(t) + g(t)$$

descrevem uma curva no plano  $xy$  ligando os pontos

$$A = x(a), y(a) \quad B = x(b), y(b)$$

Se integramos que

$$x(b) - x(a) = \int_a^b x'(t) dt = \int_a^b (f'(t) - g'(t)) dt$$

os pontos extremos coincidem e a curva é fechada

Uma curva fechada que não intercepta a si mesma em nenhum ponto é chamada uma curva fechada simples.

### Definição 10. (Região Simplesmente Conexas)

Uma região  $R$  é dita simplesmente conexa se qualquer curva fechada simples contida em  $R$  pode ser reduzida a um ponto, permanecendo em  $R$ .

Intuitivamente, uma região simplesmente conexa é aquela que não possui "buracos".



## Seção 2.2: Diferenciabilidade em Hipercomplexos

Como já dissemos, quando formos nos referir aos anéis dos quatérnios e dos bicomplexos, simultaneamente, diremos hipercomplexos.

Nesta seção, precisaremos expor o conceito de região simplesmente conexa, encontrado por exemplo em Domingues [8].

Além disso, serão mostrados dois resultados sobre diferenciabilidade em hipercomplexos, recentemente enunciados por Machado e Borges, conforme op. cit. [15].

Tais conceitos serão úteis na próxima seção.

Exemplo 12.

### §1. Região Simplesmente Conexa

Se  $f(t)$  e  $g(t)$  são funções reais da variável real  $t$  e se considerarmos que elas são contínuas em

$$t_1 \leq t \leq t_2,$$

as equações paramétricas

$$z = x + iy = f(t) + ig(t) = z(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

definem uma **curva** ou arco contínuo no plano  $z$ , ligando os pontos

$$a = z(t_1) \text{ e } b = z(t_2).$$

Se tivermos que

$$t_1 \neq t_2 \text{ e } z(t_1) = z(t_2), \text{ isto é, } a = b,$$

os pontos extremos coincidem e a curva é **fechada**.

Uma curva fechada que não intercepta a si mesma em nenhum ponto é chamada uma curva fechada **simples**.

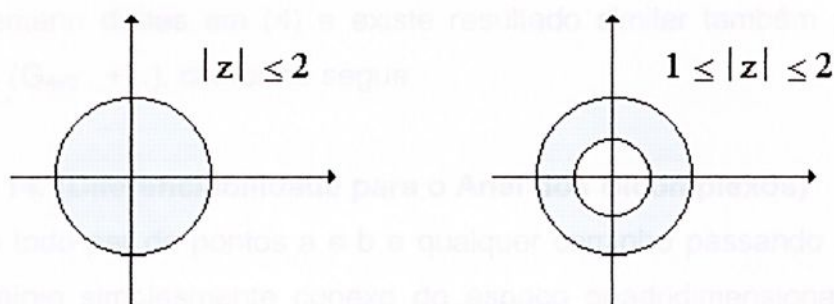
#### Definição 10. (Região Simplesmente Conexa)

Uma região  $R$  é dita **simplesmente conexa** se qualquer curva fechada simples contida em  $R$  pode ser reduzida a um ponto, permanecendo em  $R$ .

Intuitivamente, uma região simplesmente conexa é aquela que não possui “buracos”.



A figura abaixo serve para ilustrar os dois exemplos a seguir.



### Exemplo 11.

A região definida por  $|z| \leq 2$  é simplesmente conexa.

### Exemplo 12.

A região definida por  $1 \leq |z| \leq 2$  não é simplesmente conexa.

Definimos, no capítulo 1, o anel dos quatérnios e o anel dos bicomplexos, os quais, em conjunto, são ditos hipercomplexos. Agora, iremos enunciar dois resultados sobre diferenciabilidade para os mesmos.

## §2. Resultados sobre Diferenciabilidade

Vejamos um resultado para o anel dos quatérnios  $(H, +, \cdot)$ .

### Resultado 13. (Diferenciabilidade para o Anel dos Quatérnios)

Para todo par de pontos  $a$  e  $b$  e qualquer caminho passando por eles em um subdomínio simplesmente conexo do espaço quadridimensional, a integral

$\int_a^b f dz$  sob o anel dos quatérnios é independente do caminho dado, se, e somente

se, há uma função  $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$  tal que  $\int_a^b f dz = F(b) - F(a)$ , e

satisfazendo as seguintes relações:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3} \quad (5)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \quad (6)$$

As relações (5) e (6) são claramente generalizações das relações de Cauchy-Riemann dadas em (4) e existe resultado similar também para o anel bicomplexo  $(G_{4 \times 2}, +, \cdot)$ , conforme segue.

#### Resultado 14. (Diferenciabilidade para o Anel dos Bicomplexos)

Para todo par de pontos  $a$  e  $b$  e qualquer caminho passando por eles em um subdomínio simplesmente conexo do espaço quadridimensional, a integral  $\int_a^b f dz$  sob o anel dos bicomplexos é independente do caminho dado, se, e somente se, há uma função  $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$  tal que  $\int_a^b f dz = F(b) - F(a)$ , e satisfazendo as seguintes relações:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3} \quad (7)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_2} \quad (8)$$

Por fim, reiteramos que as relações (5) e (6) e as relações (7) e (8) incluem as relações de Cauchy-Riemann vistas em (4), pois apresentam

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2}.$$

## Seção 2.3: Proposições em Quatérnios

Nesta seção, vamos apresentar duas proposições válidas para o anel dos quatérnios, que serão usadas no teorema 17, demonstradas no trabalho recente de Machado e Borges, op. cit. [16].

Para tanto, consideraremos os elementos seguintes. Sejam  $F$  e  $G$  duas superfícies quadridimensionais dadas por  $F(x, y, z, w) = 0$  e  $G(x, y, z, w) = 0$ , definidas sobre um espaço real Euclidiano quadridimensional, e o conjunto de transformações de coordenadas

$$\xi = \phi(x, y, z, w); \eta = \psi(x, y, z, w); \mu = \chi(x, y, z, w) \text{ e } v = \tau(x, y, z, w)$$

tal que as relações (5) e (6) se aplicam, isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial w}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial w} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial w} = -\frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial w} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (10)$$

Vejamos a primeira proposição.

### Proposição 15.

Sendo  $F(x, y, z, w) = \Omega(\xi, \eta, \mu, v)$ , podemos escrever

$$|\partial F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2} = P_1$$

$$|\partial \Omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2} = P_2$$

e, usando

$$R_1 = (P_2)^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2$$

$$R_2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2,$$

teremos que

$$(P_1)^2 = R_1 R_2 \quad (11)$$

De modo análogo, sendo  $G(x, y, z, w) = \Gamma(\xi, \eta, \mu, \nu)$ , podemos escrever

$$|\partial G| = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2} = Q_1$$

$$|\partial \Gamma| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2} = Q_2$$

e, usando

$$R_3 = (Q_2)^2 = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2,$$

teremos que

$$(Q_1)^2 = R_3 R_2 \quad (12)$$

**Prova:**

De (9) e (10), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega(\xi, \eta, \mu, \nu)}{\partial x} = \frac{\partial \Omega[\phi(x, y, z, w), \psi(x, y, z, w), \chi(x, y, z, w), \tau(x, y, z, w)]}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial w}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega(\xi, \eta, \mu, \nu)}{\partial y} = \frac{\partial \Omega[\phi(x, y, z, w), \psi(x, y, z, w), \chi(x, y, z, w), \tau(x, y, z, w)]}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial \Omega(\xi, \eta, \mu, \nu)}{\partial z} = \frac{\partial \Omega[\phi(x, y, z, w), \psi(x, y, z, w), \chi(x, y, z, w), \tau(x, y, z, w)]}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{\partial \Omega(\xi, \eta, \mu, \nu)}{\partial w} = \frac{\partial \Omega[\phi(x, y, z, w), \psi(x, y, z, w), \chi(x, y, z, w), \tau(x, y, z, w)]}{\partial w} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \tau}{\partial w} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (16)$$



0 1 2 3 4 5

.....

2 2 2

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

( ) ( ) ( ) ( )

2 2 2

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Ou seja, de (17) e (18), temos que:

$$(P_1)^2 = R_1 R_2$$

De forma análoga, (9) e (10) também podem nos levar a

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial G}{\partial w} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (22)$$

Somando os quadrados das expressões acima, teremos

$$\begin{aligned} (Q_1)^2 &= \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial w} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2. \quad (23) \end{aligned}$$

Por outro lado, se definirmos

$$R_2 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2$$

$$R_3 = (Q_2)^2 = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2,$$

então, poderemos calcular que

$$\begin{aligned} R_3 R_2 = & \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2. \quad (24) \end{aligned}$$

Assim, de (23) e (24), temos que

$$(Q_1)^2 = R_3 R_2 \quad (25). \quad \square$$

### Proposição 16.

Sendo  $F(x, y, z, w) = \Omega(\xi, \eta, \mu, \nu)$  e  $G(x, y, z, w) = \Gamma(\xi, \eta, \mu, \nu)$ , podemos escrever

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial G}{\partial w}$$

e, usando

$$R_2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2$$

$$R_4 = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} = \langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle,$$

teremos que

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = R_4 R_2. \quad (26)$$



[illegible]

e somando, teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial G}{\partial w} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial w} \\ &+ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (27) \end{aligned}$$

Ora, sendo

$$R_2 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2$$

$$R_4 = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu},$$

é fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_4 \cdot \mathbf{R}_2 = & \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2 \\ & + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2 \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2$$

$$+\frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)^2$$

Teorema 17.

$$= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w}$$

$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w}$$

$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w}$$

$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w}. \quad (28)$$

Ou seja, de (27) e (28), concluímos que:

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = R_4 R_2, \quad (29)$$

conforme enuncia a proposição 16.  $\square$

Prova.

De acordo com a proposição 16, não podemos escrever

$$F(x, y, z, w) = f(x, y, z, w) \quad \text{e} \quad G(x, y, z, w) = f(x, y, z, w)$$

## Seção 2.4: Mapeamentos Conformes em Quatérnios

Vejamos o teorema, enunciado por Machado e Borges, op. cit. [16].

### Teorema 17.

Sejam  $F$  e  $G$  duas superfícies quadridimensionais dadas por  $F(x, y, z, w) = 0$  e  $G(x, y, z, w) = 0$ , definidas sobre um espaço real Euclidiano quadridimensional, e o conjunto de transformações de coordenadas

$$\xi = \phi(x, y, z, w); \eta = \psi(x, y, z, w); \mu = \chi(x, y, z, w) \text{ e } v = \tau(x, y, z, w)$$

tal que as relações (9) e (10) se aplicam, isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial w}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial w} = \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

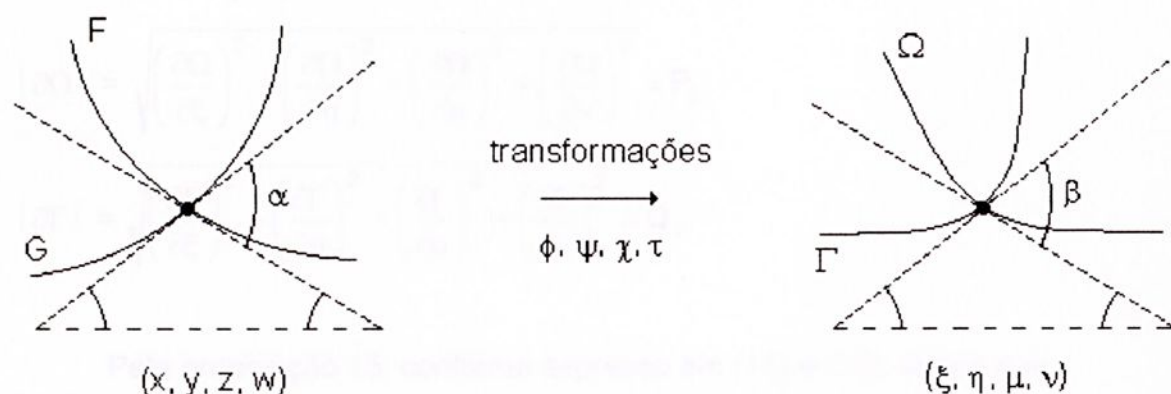
$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial w} = -\frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial w} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

então este conjunto de transformações de coordenadas definem uma transformação conforme. Em outras palavras, dado os vetores gradiente para ambos subespaços  $F(x, y, z, w) = 0$  e  $G(x, y, z, w) = 0$  em qualquer ponto, o conjunto de transformações de coordenadas preserva os ângulos apropriadamente definidos entre eles.

### Prova:

De acordo com a proposição acima, nós podemos escrever

$$F(x, y, z, w) = \Omega(\xi, \eta, \mu, v) \quad \text{e} \quad G(x, y, z, w) = \Gamma(\xi, \eta, \mu, v).$$



Denotemos por  $\alpha$  o ângulo entre as superfícies  $F$  e  $G$  e por  $\beta$  o ângulo entre as superfícies  $\Omega$  e  $\Gamma$ , obtidas através das transformações de coordenadas.

Pela definição 4 deste capítulo, de transformações conformes, provaremos este teorema se demonstrarmos que:

$$\cos \alpha = \cos \beta.$$

Considerando o produto interno associado ao espaço métrico Euclidiano, definiremos formalmente que

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = |\partial F| \cdot |\partial G| \cdot \cos \alpha$$

$$A = \cos \alpha = \frac{\langle \partial F, \partial G \rangle}{|\partial F| |\partial G|} = \frac{\langle \partial F, \partial G \rangle}{P_1 Q_1}, \quad (30)$$

onde

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial G}{\partial w}$$

$$|\partial F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2} = P_1$$

$$|\partial G| = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2} = Q_1$$

De modo similar, temos que

$$\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle = |\partial \Omega| \cdot |\partial \Gamma| \cdot \cos \beta$$

$$B = \cos \beta = \frac{\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle}{P_2 Q_2}, \quad (31)$$

onde

$$\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}$$

$$|\partial \Omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \nu}\right)^2} = P_2$$

$$|\partial \Gamma| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2} = Q_2$$

Pela proposição 15, conforme expresso em (11) e (12), temos que:

$$P_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{R_1 R_2}$$

$$Q_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{R_3 R_2}$$

onde

$$R_1 = (P_2)^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \nu}\right)^2$$

$$R_2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2.$$

$$R_3 = (Q_2)^2 = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2.$$

Pela proposição 16, conforme expresso em (26), temos que:

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = R_4 R_2$$

onde

$$R_4 = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}.$$

Portanto, em (30), teremos que:

$$A = \frac{\langle \partial F, \partial G \rangle}{P_1 Q_1} = \frac{R_4 R_2}{P_1 Q_1} = \frac{R_4 R_2}{\sqrt{R_1 R_2} \sqrt{R_3 R_2}} = \frac{R_4}{\sqrt{R_1 R_3}}. \quad (32)$$

Ora, pela definição feita na proposição 15,

$$P_2 = \sqrt{R_1}$$

$$Q_2 = \sqrt{R_3}$$

e, pela definição feita na proposição 16,

$$\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} = R_4.$$

Daí, tiramos, em (31), que

$$B = \frac{\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle}{P_2 Q_2} = \frac{R_4}{\sqrt{R_1 R_3}}. \quad (33)$$

De (32) e (33), somos levamos à igualdade

$$A = B$$

ou seja,

$$\cos \alpha = \cos \beta \quad (34)$$

e, portanto, o conjunto de transformação de coordenadas no teorema 17 define uma transformação conforme.  $\square$

Para tanto, de forma similar ao que foi feito na seção 3, consideraremos os elementos seguintes. Sejam  $F$  e  $G$  duas superfícies quadridimensionais dadas por  $F(x, y, z, w) = 0$  e  $G(\xi, \eta, \mu, \nu) = 0$ , definidas sobre um espaço real Euclidiano quadridimensional, e o conjunto de transformações de coordenadas

$$\xi = \xi(x, y, z, w), \eta = \eta(x, y, z, w), \mu = \mu(x, y, z, w), \nu = \nu(x, y, z, w)$$

tal que as relações (7) e (8) se aplicam, isto é

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial w}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial w} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial w} = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial w} = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (36)$$

Vejamos a primeira proposição.

#### Proposição 18.

Seja  $F(x, y, z, w) = 0$  e  $G(\xi, \eta, \mu, \nu) = 0$ , podemos escrever

$$|F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2} = P_1$$

$$|G| = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^2} = P_2$$

e usando

$$P_1 = (P_2)^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^2$$

$$P_2 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^2$$

## Seção 2.5: Proposições em Bicomplexos

Nesta seção, vamos apresentar duas proposições válidas para o anel dos bicomplexos, que serão usadas no teorema 20, definidas por Machado e Borges, op. cit. [16].

Para tanto, da forma similar ao que foi feito na seção 3, consideraremos os elementos seguintes. Sejam  $F$  e  $G$  duas superfícies quadridimensionais dadas por  $F(x, y, z, w) = 0$  e  $G(x, y, z, w) = 0$ , definidas sobre um espaço real Euclidiano quadridimensional, e o conjunto de transformações de coordenadas

$$\xi = \phi(x, y, z, w); \eta = \psi(x, y, z, w); \mu = \chi(x, y, z, w) \text{ e } v = \tau(x, y, z, w)$$

tal que as relações (7) e (8) se aplicam, isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial w}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial w} = \frac{\partial \tau}{\partial z}; \quad (35)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial w} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (36)$$

Vejamos a primeira proposição.

### Proposição 18.

Seendo  $F(x, y, z, w) = \Omega(\xi, \eta, \mu, v)$ , podemos escrever

$$|\partial F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2} = P_1$$

$$|\partial \Omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2} = P_2$$

e, usando

$$R_1 = (P_2)^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2$$

$$R_2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2,$$

teremos que

$$(P_1)^2 = R_1 R_2 + 4 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + 4 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \quad (37)$$

De modo análogo, sendo  $G(x, y, z, w) = \Gamma(\xi, \eta, \mu, v)$ , podemos escrever

$$|\partial G| = \sqrt{\left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial w} \right)^2} = Q_1$$

$$|\partial \Gamma| = \sqrt{\left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)^2} = Q_2$$

e, usando

$$R_3 = (Q_2)^2 = \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right)^2,$$

teremos que

$$(Q_1)^2 = R_3 R_2 + 4 \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + 4 \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \quad (38)$$

**Prova:**

De (35) e (36), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega(\xi, \eta, \mu, v)}{\partial x} = \frac{\partial \Omega[\phi(x, y, z, w), \psi(x, y, z, w), \chi(x, y, z, w), \tau(x, y, z, w)]}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega(\xi, \eta, \mu, v)}{\partial y} = \frac{\partial \Omega[\phi(x, y, z, w), \psi(x, y, z, w), \chi(x, y, z, w), \tau(x, y, z, w)]}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial \Omega(\xi, \eta, \mu, v)}{\partial z} = \frac{\partial \Omega[\phi(x, y, z, w), \psi(x, y, z, w), \chi(x, y, z, w), \tau(x, y, z, w)]}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (41)$$



Somando as expressões acima, teremos que:

$$\begin{aligned}
 (P_1)^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2 = \\
 &\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \\
 &\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \\
 &+ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \\
 &+ 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
 &- 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
 &= R_1 R_2 + 4 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} + 4 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - 4 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - 4 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \\
 &= R_1 R_2 + 4 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + 4 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right),
 \end{aligned}$$

tendo em vista o resultado para  $R_1 R_2$  obtido em (18).

De forma análoga, (35) e (36) também podem nos levar a

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (45)$$

$$\frac{\partial G}{\partial w} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (46)$$

Somando os quadrados das expressões acima, teremos

$$(Q_1)^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2 =$$

$$= R_3 R_2 + 4 \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + 4 \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right),$$

tendo em vista o resultado para  $R_3 R_2$  obtido em (24).

Assim, provamos a proposição.  $\square$

### Proposição 19.

Seendo  $F(x, y, z, w) = \Omega(\xi, \eta, \mu, v)$  e  $G(x, y, z, w) = \Gamma(\xi, \eta, \mu, v)$ , podemos escrever

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial G}{\partial w}$$

e, usando

$$R_2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^2$$

$$R_4 = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle,$$

teremos que

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = R_4 R_2 + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$+ 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \quad (47)$$

### Demonstração:

Fazendo uso das igualdades em (35) e (36):

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) =$$

$$= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)$$

$$- \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \langle \partial F, \partial G \rangle = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial G}{\partial w} =$$

$$\begin{aligned}
& R_4 R_2 + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
& + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)
\end{aligned}$$

tendo em vista o resultado para  $R_4 R_2$  obtido em (28).

Assim, provamos esta proposição.  $\square$

## Seção 2.6: Mapeamentos Conformes em Bicomplexos

Agora, já podemos apresentar o seguinte teorema (Machado e Borges, op. cit. [16]).

### Teorema 20.

Sejam  $F$  e  $G$  duas superfícies quadridimensionais dadas por  $F(x, y, z, w) = 0$  e  $G(x, y, z, w) = 0$ , definidas sobre um espaço real Euclidiano quadridimensional, e o conjunto de transformações de coordenadas

$$\xi = \phi(x, y, z, w); \eta = \psi(x, y, z, w); \mu = \chi(x, y, z, w) \text{ e } \nu = \tau(x, y, z, w)$$

tal que as relações (35) e (36) se aplicam, isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial w}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial w} = \frac{\partial \tau}{\partial z};$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial w} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\partial \chi}{\partial y};$$

então, este conjunto de transformações de coordenadas irá definir uma transformação conforme sempre que seja satisfeita a relação

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (48)$$

### Prova:

Faremos a demonstração de forma similar à do teorema 17, pois, de acordo com a proposição acima, nós podemos escrever

$$F(x, y, z, w) = \Omega(\xi, \eta, \mu, \nu) \quad \text{e} \quad G(x, y, z, w) = \Gamma(\xi, \eta, \mu, \nu).$$

Denotemos, como antes, por  $\alpha$  o ângulo entre as superfícies  $F$  e  $G$  e por  $\beta$  o ângulo entre as superfícies  $\Omega$  e  $\Gamma$ , obtidas através das transformações de coordenadas.

Pela definição 4, de transformações conformes, provaremos este teorema se demonstrarmos que:

$$\cos \alpha = \cos \beta.$$

Considerando o produto interno associado ao espaço métrico Euclidiano, já formalmente definido antes, temos que

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = |\partial F| \cdot |\partial G| \cdot \cos \alpha$$



$$A = \cos \alpha = \frac{\langle \partial F, \partial G \rangle}{|\partial F| |\partial G|} = \frac{\langle \partial F, \partial G \rangle}{P_1 Q_1}, \quad (49)$$

onde

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial G}{\partial w}$$

$$|\partial F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2} = P_1$$

$$|\partial G| = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2} = Q_1$$

De modo similar, temos que

$$\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle = |\partial \Omega| |\partial \Gamma| \cos \beta$$

$$B = \cos \beta = \frac{\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle}{P_2 Q_2}, \quad (50)$$

onde

$$\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$$

$$|\partial \Omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2} = P_2$$

$$|\partial \Gamma| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\right)^2} = Q_2$$

Se considerarmos válida a equação (48) na proposição 18, conforme expresso em (37) e (38), teremos que:

$$P_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{R_1 R_2}$$

$$Q_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{R_3 R_2}$$

Se considerarmos válida a equação (48) na proposição 19, conforme expresso em (47), teremos que:

$$\langle \partial F, \partial G \rangle = R_4 R_2$$



Portanto, em (49), teremos que:

$$A = \frac{\langle \partial F, \partial G \rangle}{P_1 Q_1} = \frac{R_4 \cdot R_2}{P_1 Q_1} = \frac{R_4 \cdot R_2}{\sqrt{R_1 R_2} \sqrt{R_3 R_2}} = \frac{R_4}{\sqrt{R_1 R_3}}. \quad (51)$$

Ora, pela definição feita na proposição 18,

$$P_2 = \sqrt{R_1}$$

$$Q_2 = \sqrt{R_3}$$

e, pela definição feita na proposição 19,

$$\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} = R_4.$$

Daí, tiramos, em (50), que

$$B = \frac{\langle \partial \Omega, \partial \Gamma \rangle}{P_2 Q_2} = \frac{R_4}{\sqrt{R_1 R_3}}. \quad (52)$$

De (51) e (52), somos levamos à igualdade

$$A = B$$

ou seja,

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

e, portanto, o conjunto de transformação de coordenadas no teorema 20 define uma transformação conforme, desde que seja satisfeita a equação dada em (48),

ou seja,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial w} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad \square$$

## §1. Translação

Seja um hipercomplexo na forma  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ . Sua translação em direção ao vetor  $\beta = a + ib + j\beta + k\gamma$  se dá através do mapeamento  $w = z + \beta$ .

Teremos

$$w = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$w = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$w = (a + x_1) + i(b + x_2) + j(c + x_3) + k(d + x_4). \quad (53)$$

## CAPÍTULO 3:

### MAPEAMENTOS CONFORMES EM HIPERCOMPLEXOS

#### Seção 3.1: Análise da Conformidade em Exemplos

No capítulo 2, mostramos que, em complexos, translação, dilatação, rotação e inversão são mapeamentos conformes. Além disso, apresentamos os importantes teoremas 17 e 20, sobre conformidade em hipercomplexos, seguindo recentes resultados obtidos por Machado e Borges (op. cit. [15] e [16]).

Agora, verificaremos se os mapeamentos acima citados também são conforme em hipercomplexos.

É importante observar que a tabela de multiplicação para quatérnios é tal que:

$$\begin{aligned}ij &= -ji = k, \quad jk = -kj = i, \\ki &= -ik = j, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \\1i &= i1 = i, \quad 1j = j1 = j, \quad 1k = k1 = k;\end{aligned}$$

e, que para os bicomplexos:

$$\begin{aligned}ij &= ji = k, \quad jk = kj = -i, \\ki &= ik = -j, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = 1, \\1i &= i1 = i, \quad 1j = j1 = j, \quad 1k = k1 = k.\end{aligned}$$

#### §1. Translação

Seja um hipercomplexo na forma  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ . Sua translação em direção ao vetor  $\beta = a + ib + jc + kd$  se dá através do mapeamento  $w = z + \beta$ .

Teremos

$$\begin{aligned}w &= f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\w &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + if_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + jf_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + kf_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \\w &= (a + x_1) + i(b + x_2) + j(c + x_3) + k(d + x_4). \quad (53)\end{aligned}$$



Deste modo, podemos calcular que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 0.$$

Assim, verificam-se as condições dos teoremas 17 e 20 e a translação é conforme tanto em quatérnios quanto em bicomplexos.

## §2. Dilatação

Para o hipercomplexo  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ , sua dilatação causada pelo número real  $a$  se dá através do mapeamento  $w = az$ .

Daí, teremos

$$w = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$w = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + if_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + jf_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + kf_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$w = ax_1 + iax_2 + jax_3 + kax_4. \quad (54)$$

O que leva a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = a$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 0.$$

Assim, verificam-se as condições dos teoremas 17 e 20 e a dilatação é conforme tanto em quatérnios quanto em bicomplexos.



### §3. Rotação

Seja, como antes, um hipercomplexo na forma  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ . Sua rotação causada por  $\beta = a + ib + jc + kd$ , com  $|a + ib + jc + kd| = 1$  se dá através do mapeamento  $w = \beta z$ .

Desta forma, em quatérnios, temos:

$$\begin{aligned}w &= f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\w &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + if_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + jf_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + kf_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \\w &= (a + ib + jc + kd) \cdot (x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) \\w &= ax_1 + iax_2 + jax_3 + kax_4 + ibx_1 - bx_2 + kbx_3 - jbx_4 + jcx_1 - kcx_2 - cx_3 + icx_4 \\&\quad + kdx_1 + jdx_2 - idx_3 - dx_4 \\w &= (ax_1 - bx_2 - cx_3 - dx_4) + i(ax_2 + bx_1 + cx_4 - dx_3) + j(ax_3 - bx_4 + cx_1 + dx_2) \\&\quad + k(ax_4 + bx_3 - cx_2 + dx_1). \quad (55)\end{aligned}$$

Podemos calcular que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = a \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = b \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = c \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = d.\end{aligned}$$

Portanto, verificam-se as condições do teorema 17 e a rotação é conforme em quatérnios.

Agora, em bicomplexos, temos

$$\begin{aligned}w &= f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\w &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + if_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + jf_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + kf_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \\w &= (a + ib + jc + kd) \cdot (x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) \\w &= ax_1 + iax_2 + jax_3 + kax_4 + ibx_1 - bx_2 + kbx_3 - jbx_4 + jcx_1 + kcx_2 - cx_3 - icx_4 \\&\quad + kdx_1 - jdx_2 - idx_3 + dx_4 \\w &= (ax_1 - bx_2 - cx_3 + dx_4) + i(ax_2 + bx_1 - cx_4 - dx_3) + j(ax_3 - bx_4 + cx_1 - dx_2) \\&\quad + k(ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1). \quad (56)\end{aligned}$$



Podemos calcular que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = a$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = b$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = c$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = d.$$

Mas, por outro lado,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = ad \neq \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = (-b)(-c) = bc. \quad (57)$$

Portanto, verificam-se as relações de Cauchy-Riemann generalizadas mas não é válida a condição adicional, apresentadas no teorema 20.

Concluimos que a rotação não é conforme em bicomplexos.

#### §4. Inversão

A inversão do hipercomplexo  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ , se dá através do mapeamento  $w = 1/z$ .

Para quatérnios, usando o conjugado de  $z$ , podemos obter:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4} \cdot \frac{x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4}{x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4}$$

$$w = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} - i \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} - j \frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} - k \frac{x_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \quad (58)$$

Precisaremos calcular, usando a regra do quociente para derivação, o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - x_1 \cdot (2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{-1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_2 \cdot (2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= \frac{-1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_3 \cdot (2x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_4} &= \frac{-1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_4 \cdot (2x_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2},\end{aligned}$$

que não obedecem à primeira relação do teorema;

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_2 \cdot (2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - x_1 \cdot (2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_4} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_3 \cdot (2x_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_3x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_4 \cdot (2x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_3x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}\end{aligned}$$

que não obedecem à segunda relação do teorema;

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_3 \cdot (2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_1x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - x_1 \cdot (2x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{-2x_1x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_2 \cdot (2x_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_2x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_4 \cdot (2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_2x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}\end{aligned}$$

que não obedecem à terceira relação do teorema;

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_4 \cdot (2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_1x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - x_1 \cdot (2x_4)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{-2x_1x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_2 \cdot (2x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_2x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_3 \cdot (2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} = \frac{2x_2x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

que não obedecem à quarta relação do teorema.

Assim, a inversão não é um mapeamento conforme em quatérnios.

Agora, como não é definida a conjugação para bicomplexos, a análise da inversão para esses números dependerá antes de calcular  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$  em função  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ , de modo a escrever:

$$w = \frac{1}{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4} = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4.$$

Da igualdade acima e usando a tabela de multiplicação para bicomplexos, tiramos que:

$$1 + i \cdot 0 + j \cdot 0 + k \cdot 0 = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 + i(x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3) + j(x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2) + k(x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1).$$

O que nos leva ao sistema 
$$\begin{cases} x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 = 1 \\ x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 - x_3y_4 = 0 \\ x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 - x_2y_4 = 0 \\ x_4y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_1y_4 = 0 \end{cases}, \text{ cuja resolução é:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = x_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & -x_4 & -x_3 \\ -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} - x_3 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} - x_4 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 \\ x_3 & -x_4 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= x_1 \cdot (x_1^3 + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 - x_1 x_4^2) \\ &+ x_2 \cdot (x_1^2 x_2 + x_2 x_4^2 - x_2 x_3^2 + x_1 x_3 x_4 + x_2^3 + x_1 x_3 x_4) \\ &- x_3 \cdot (-x_1 x_2 x_4 - x_1 x_2 x_4 - x_3^3 - x_3 x_4^2 + x_2^2 x_3 - x_1^2 x_3) \\ &- x_4 \cdot (-x_2^2 x_4 + x_1^2 x_4 - x_3^2 x_4 - x_4^3 - x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3)\end{aligned}$$

$$\Delta = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 8x_1 x_2 x_3 x_4 + 2 \cdot (x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 - x_1^2 x_4^2 - x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2)$$

$$\Delta = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2 x_3 - 2x_1 x_4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2 x_3 + 2x_1 x_4)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ 0 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ 0 & x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & -x_4 & -x_3 \\ -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_1 = x_1^3 + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 - x_1 x_4^2$$

$$\Delta_1 = x_1^3 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 - x_1 x_4^2 + 2x_2 x_3 x_4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & 1 - x_3 & x_4 \\ x_2 & 0 - x_4 & -x_3 \\ x_3 & 0 & x_1 - x_2 \\ x_4 & 0 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} x_2 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (-1)(x_1^2 x_2 + x_2^3 - x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + 2x_1 x_3 x_4)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & 1 & x_4 \\ x_2 & x_1 & 0 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & 0 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & 0 & x_1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = (-1)(x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3 + x_3^3 + x_3 x_4^2 + 2x_1 x_2 x_4)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & 1 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & 0 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 \\ x_3 & -x_4 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{vmatrix} = -x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 + x_4^3 + 2x_1 x_2 x_3$$

Encontraremos a solução do sistema fazendo:

$$y_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{x_1^3 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 - x_1 x_4^2 + 2x_2 x_3 x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2 x_3 - 2x_1 x_4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2 x_3 + 2x_1 x_4)}$$

$$y_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{x_1^2 x_2 + x_2^3 - x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + 2x_1 x_3 x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2 x_3 - 2x_1 x_4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2 x_3 + 2x_1 x_4)}$$

$$y_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3 + x_3^3 + x_3 x_4^2 + 2x_1 x_2 x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2 x_3 - 2x_1 x_4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2 x_3 + 2x_1 x_4)}$$

$$y_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 + x_4^3 + 2x_1 x_2 x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2 x_3 - 2x_1 x_4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2 x_3 + 2x_1 x_4)}$$

Se, nos denominadores dos resultados acima, fizermos

$$r = r(z) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (59)$$

$$s = s(z) = 2x_2 x_3 - 2x_1 x_4, \quad (60)$$

poderemos, então, manipulando as expressões, escrever o mapeamento de inversão em bicomplexos na seguinte forma:

$$w = \frac{1}{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4} = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4$$

$$w(z) = \frac{x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + 2x_2 x_3 x_4}{(r+s)(r-s)} - i \frac{x_2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2) + 2x_1 x_3 x_4}{(r+s)(r-s)} - j \frac{x_3(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2x_1 x_2 x_4}{(r+s)(r-s)} + k \frac{x_4(-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2x_1 x_2 x_3}{(r+s)(r-s)}. \quad (61)$$

Além disso, se procurarmos trabalhar os numeradores acima, usando  $r(z)$  e  $s(z)$ , poderemos reescrever:

$$w(z) = \frac{x_1 r + x_4 s}{r^2 - s^2} - i \frac{x_2 r - x_3 s}{r^2 - s^2} - j \frac{x_3 r - x_2 s}{r^2 - s^2} + k \frac{x_4 r + x_1 s}{r^2 - s^2}. \quad (62)$$

Agora, calcularemos, usando a regra do quociente para derivação, o seguinte:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{r(r^2 - s^2 - 8x_1 x_4 s) - 2(r^2 + s^2)(x_1^2 + x_4^2)}{(r^2 - s^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{2(x_1 x_2 - x_3 x_4)(r^2 + s^2) - 4rs(x_1 x_3 - x_2 x_4)}{(r^2 - s^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{2(x_1 x_3 - x_2 x_4)(r^2 + s^2) - 4rs(x_1 x_2 - x_3 x_4)}{(r^2 - s^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{-s(r^2 - s^2) + 4(x_4 r + x_1 s)(x_1 r + x_4 s)}{(r^2 - s^2)^2}$$



Mas, por outro lado,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{m}{(r^2 - s^2)^4}, \quad (63)$$

onde

$$m = -r^5s + 2r^3s^3 - rs^5 + 6r^4sx_1^2 - 4r^2s^3x_1^2 - 2s^5x_1^2 - 8r^3sx_1^4 - 8rs^3x_1^4 + 4r^5x_1x_4 + 8r^3s^2x_1x_4 - 12rs^4x_1x_4 - 8r^4x_1^3x_4 - 48r^2s^2x_1^3x_4 - 8s^4x_1^3x_4 + 6r^4sx_4^2 - 4r^2s^3x_4^2 - 2s^5x_4^2 - 48r^3sx_1^2x_4^2 - 48rs^3x_1^2x_4^2 - 8r^4x_1x_4^3 - 48r^2s^2x_1x_4^3 - 8s^4x_1x_4^3 - 8r^3sx_4^4 - 8rs^3x_4^4;$$

ou, escrevendo apenas em função de  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ,

$$\begin{aligned} m = & -6x_1^{10}x_2x_3 - 10x_1^8x_2^3x_3 + 4x_1^6x_2^5x_3 + 12x_1^4x_2^7x_3 + 2x_1^2x_2^9x_3 - 2x_2^{11}x_3 - \\ & 10x_1^8x_2x_3^3 - 72x_1^6x_2^3x_3^3 - 44x_1^4x_2^5x_3^3 + 24x_1^2x_2^7x_3^3 + 6x_2^9x_3^3 + 4x_1^6x_2x_3^5 - \\ & 44x_1^4x_2^3x_3^5 - 52x_1^2x_2^5x_3^5 - 4x_2^7x_3^5 + 12x_1^4x_2x_3^7 + 24x_1^2x_2^3x_3^7 - 4x_2^5x_3^7 + 2x_1^2x_2x_3^9 + \\ & 6x_2^3x_3^9 - 2x_2x_3^{11} + 2x_1^{11}x_4 - 2x_1^9x_2^2x_4 - 12x_1^7x_2^4x_4 - 4x_1^5x_2^6x_4 + 10x_1^3x_2^8x_4 + \\ & 6x_1x_2^{10}x_4 - 2x_1^9x_3^2x_4 + 56x_1^7x_2^2x_3^2x_4 - 60x_1^5x_2^4x_3^2x_4 - 104x_1^3x_2^6x_3^2x_4 + 14x_1x_2^8x_3^2x_4 - \\ & 12x_1^7x_3^4x_4 - 60x_1^5x_2^2x_3^4x_4 - 68x_1^3x_2^4x_3^4x_4 - 20x_1x_2^6x_3^4x_4 - 4x_1^5x_3^6x_4 - 104x_1^3x_2^2x_3^6x_4 - \\ & 20x_1x_2^4x_3^6x_4 + 10x_1^3x_3^8x_4 + 14x_1x_2^2x_3^8x_4 + 6x_1x_3^{10}x_4 - 14x_1^8x_2x_3x_4^2 + 104x_1^6x_2^3x_3x_4^2 \\ & + 60x_1^4x_2^5x_3x_4^2 - 56x_1^2x_2^7x_3x_4^2 + 2x_2^9x_3x_4^2 + 104x_1^6x_2x_3^3x_4^2 - 56x_1^4x_2^3x_3^3x_4^2 - \\ & 136x_1^2x_2^5x_3^3x_4^2 + 24x_2^7x_3^3x_4^2 + 60x_1^4x_2x_3^5x_4^2 - 136x_1^2x_2^3x_3^5x_4^2 - 52x_2^5x_3^5x_4^2 - \\ & 56x_1^2x_2x_3^7x_4^2 + 24x_2^3x_3^7x_4^2 + 2x_2x_3^9x_4^2 - 6x_1^9x_4^3 - 24x_1^7x_2^2x_4^3 + 44x_1^5x_2^4x_4^3 + \\ & 72x_1^3x_2^6x_4^3 + 10x_1x_2^8x_4^3 - 24x_1^7x_3^4x_4^3 + 136x_1^5x_2^2x_3^2x_4^3 + 56x_1^3x_2^4x_3^2x_4^3 - \\ & 104x_1x_2^6x_3^2x_4^3 + 44x_1^5x_3^4x_4^3 + 56x_1^3x_2^2x_3^4x_4^3 - 68x_1x_2^4x_3^4x_4^3 + 72x_1^3x_3^6x_4^3 - \\ & 104x_1x_2^2x_3^6x_4^3 + 10x_1x_3^8x_4^3 + 20x_1^6x_2x_3x_4^4 + 68x_1^4x_2^3x_3x_4^4 + 60x_1^2x_2^5x_3x_4^4 + \\ & 12x_2^7x_3x_4^4 + 68x_1^4x_2x_3^3x_4^4 - 56x_1^2x_2^3x_3^3x_4^4 - 44x_2^5x_3^3x_4^4 + 60x_1^2x_2x_3^5x_4^4 - 44x_2^3x_3^5x_4^4 \\ & + 12x_2x_3^7x_4^4 + 4x_1^7x_4^5 + 52x_1^5x_2^2x_4^5 + 44x_1^3x_2^4x_4^5 - 4x_1x_2^6x_4^5 + 52x_1^5x_3^2x_4^5 + \\ & 136x_1^3x_2^2x_3^2x_4^5 - 60x_1x_2^4x_3^2x_4^5 + 44x_1^3x_3^4x_4^5 - 60x_1x_2^2x_3^4x_4^5 - 4x_1x_3^6x_4^5 + \\ & 20x_1^4x_2x_3x_4^6 + 104x_1^2x_2^3x_3x_4^6 + 4x_2^5x_3x_4^6 + 104x_1^2x_3^3x_4^6 - 72x_2^3x_3^3x_4^6 + 4x_2x_3^5x_4^6 + \\ & 4x_1^5x_4^7 - 24x_1^3x_2^2x_4^7 - 12x_1x_2^4x_4^7 - 24x_1^3x_3^2x_4^7 + 56x_1x_2^2x_3^2x_4^7 - 12x_1x_3^4x_4^7 - \\ & 14x_1^2x_2x_3x_4^8 - 10x_2^3x_3x_4^8 - 10x_2x_3^3x_4^8 - 6x_1^3x_4^9 - 2x_1x_2^2x_4^9 - 2x_1x_3^2x_4^9 - 6x_2x_3x_4^{10} + \\ & 2x_1x_4^{11}; \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{n}{(r^2 - s^2)^4}, \quad (64)$$

onde



$$n = -8r^3sx_1^2x_2^2 - 8rs^3x_1^2x_2^2 + 4r^4x_1^2x_2x_3 + 24r^2s^2x_1^2x_2x_3 + 4s^4x_1^2x_2x_3 - 8r^3sx_1^2x_3^2 - 8rs^3x_1^2x_3^2 - 4r^4x_1x_2^2x_4 - 24r^2s^2x_1x_2^2x_4 - 4s^4x_1x_2^2x_4 + 32r^3sx_1x_2x_3x_4 + 32rs^3x_1x_2x_3x_4 - 4r^4x_1x_3^2x_4 - 24r^2s^2x_1x_3^2x_4 - 4s^4x_1x_3^2x_4 - 8r_3sx_2^2x_4^2 - 8rs^3x_2^2x_4^2 + 4r^4x_2x_3x_4^2 + 24r^2s^2x_2x_3x_4^2 + 4s^4x_2x_3x_4^2 - 8r^3sx_3^3x_4^2 - 8rs^3x_3^3x_4^2 ;$$

ou, escrevendo apenas em função de  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ,

$$n = 4x_1^{10}x_2x_3 - 24x_1^6x_2^5x_3 - 32x_1^4x_2^7x_3 - 12x_1^2x_2^9x_3 + 48x_1^6x_2^3x_3^3 + 32x_1^4x_2^5x_3^3 - 16x_1^2x_2^7x_3^3 - 24x_1^6x_2x_3^5 + 32x_1^4x_2^3x_3^5 + 56x_1^2x_2^5x_3^5 - 32x_1^4x_2x_3^7 - 16x_1^2x_2^3x_3^7 - 12x_1^2x_2x_3^9 + 12x_1^9x_2^2x_4 + 32x_1^7x_2^4x_4 + 24x_1^5x_2^6x_4 - 4x_1x_2^{10}x_4 + 12x_1^9x_3^2x_4 - 64x_1^7x_2^2x_3^2x_4 - 24x_1^5x_2^4x_3^2x_4 - 52x_1x_2^8x_3^2x_4 + 32x_1^7x_3^4x_4 - 24x_1^5x_2^2x_3^4x_4 + 56x_1x_2^6x_3^4x_4 + 24x_1^5x_3^6x_4 + 56x_1x_2^4x_3^6x_4 - 52x_1x_2^2x_3^8x_4 - 4x_1x_3^{10}x_4 + 52x_1^8x_2x_3x_4^2 + 24x_1^4x_2^5x_3x_4^2 + 64x_1^2x_2^7x_3x_4^2 - 12x_2^9x_3x_4^2 - 48x_1^4x_2^3x_3^3x_4^2 - 64x_1^2x_2^5x_3^3x_4^2 - 16x_2^7x_3^3x_4^2 + 24x_1^4x_2x_3^5x_4^2 - 64x_1^2x_2^3x_3^5x_4^2 + 56x_2^5x_3^5x_4^2 + 64x_1^2x_2x_3^7x_4^2 - 16x_2^3x_3^7x_4^2 - 12x_2x_3^9x_4^2 + 16x_1^7x_2^2x_4^3 - 32x_1^5x_2^4x_4^3 - 48x_1^3x_2^6x_4^3 + 16x_1^7x_3^2x_4^3 + 64x_1^5x_2^2x_3^2x_4^3 + 48x_1^3x_2^4x_3^2x_4^3 - 32x_1^5x_3^4x_4^3 + 48x_1^3x_2^2x_3^4x_4^3 - 48x_1^3x_3^6x_4^3 - 56x_1^6x_2x_3x_4^4 + 24x_1^2x_2^5x_3x_4^4 - 32x_2^7x_3x_4^4 - 48x_1^2x_2^3x_3^3x_4^4 + 32x_2^5x_3^3x_4^4 + 64x_1^2x_2x_3^5x_4^4 + 32x_2^3x_3^5x_4^4 - 32x_2x_3^7x_4^4 - 56x_1^5x_2^2x_4^5 - 32x_1^3x_2^4x_4^5 + 24x_1x_2^6x_4^5 - 56x_1^5x_3^2x_4^5 + 64x_1^3x_2^2x_3^2x_4^5 - 24x_1x_2^4x_3^2x_4^5 - 32x_1^3x_3^4x_4^5 - 24x_1x_2^2x_3^4x_4^5 + 24x_1x_3^6x_4^5 - 56x_1^4x_2x_3x_4^6 - 24x_2^5x_3x_4^6 + 48x_2^3x_3^3x_4^6 - 24x_2x_3^5x_4^6 + 16x_1^3x_2^2x_4^7 + 32x_1x_2^4x_4^7 + 16x_1^3x_3^2x_4^7 - 64x_1x_2^2x_3^2x_4^7 + 32x_1x_3^4x_4^7 + 52x_1^2x_2x_3x_4^8 + 12x_1x_3^2x_4^9 + 4x_2x_3x_4^{10}.$$

Portanto,  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \neq \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_3}.$

Assim, verificam-se as relações de Cauchy-Riemann generalizadas mas não é válida a condição adicional, apresentadas no teorema 20.

Concluimos que a inversão não é conforme em bicomplexos.



## Seção 3.2: Restrições para Obtenção da Conformidade

Vimos na seção anterior que a rotação não é conforme em bicomplexos e que a inversão não é conforme, nem em quatérnios, nem em bicomplexos.

Aqui, verificaremos algumas restrições nesses mapeamentos que viabilizam a conformidade.

### §1. Rotação com Restrições

Sabe-se que, ao multiplicarmos um complexo  $z$  por um número real  $a$ , temos uma dilatação  $w = az$  e que, se multiplicarmos esse complexo  $z$  por um número complexo  $\beta$ , teremos uma rotação  $w = \beta z$ .

No parágrafo §3, na seção anterior (3.1), fizemos a multiplicação de um hipercomplexo  $z$  por um hipercomplexo  $\beta$  e indicamos tal mapeamento como uma rotação  $w = \beta z$ . No entanto, essa rotação é uma 'rotação causada por hipercomplexo', que pode fugir da idéia tridimensional que usualmente temos de rotação.

Assim, vamos, inicialmente, restringir essa rotação do hipercomplexo  $z$  dada por  $w = \beta z$ , de modo a considerarmos um  $\beta = a + ib + jc + kd$ , com  $c = d = 0$ . Deste modo, qualquer  $\beta = a + ib$  será similar a um número complexo e teremos um mapeamento mais próximo da 'rotação causada por complexo'.

Seja, como antes, um hipercomplexo na forma  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ .

Sua rotação causada por  $\beta = a + ib$ , com  $|a + ib| = 1$  se dá através do mapeamento  $w = \beta z$ .

De (57), encontramos,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = ad = a(0) = 0 ,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = (-b)(0) = 0 .$$

Portanto, agora, verificam-se, além das relações de Cauchy-Riemann generalizadas, também a condição adicional, apresentadas no teorema 20.



Concluimos que esse mapeamento similar a uma **rotação causada por complexo** é conforme em **bicomplexos**.

Por outro lado, podemos nos restringir à rotação causada pelos hipercomplexos  $\beta = a + ib + jc + kd$ , tal que  $ad = bc$ .

De (57), encontramos,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = ad ,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = (-b)(-c) = bc = ad.$$

Desta forma, verificam-se as relações de Cauchy-Riemann generalizadas e também a condição adicional, apresentadas no teorema 20.

Concluimos que a **rotação causada por um hipercomplexo**  $\beta = a + ib + jc + kd$ , tal que  $ad = bc$ , é conforme em **bicomplexos**.

## §2. Inversão com Restrições

A inversão do quatérnio  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ , se dá através do mapeamento  $w = 1/z$ .

Em (58), obtivemos:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4} \cdot \frac{x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4}{x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4}$$

$$w = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} - i \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} - j \frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} - k \frac{x_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}.$$

Agora, no entanto, se nos restringirmos à inversão:

- numa hipersuperfície esférica, fazendo  $|z|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = c$  ;
- associada com uma conjugação:  $x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \Rightarrow x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4$  ;

teremos:

$$w(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{x_1}{c} + i \frac{x_2}{c} + j \frac{x_3}{c} + k \frac{x_4}{c} . \quad (65)$$

Onde podemos calcular que:



$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0.$$

Portanto, verificam-se as condições do teorema 17 e a **inversão**, numa **hipersuperfície esférica de raio  $\sqrt{c}$** , associada com uma **conjugação**, se torna um mapeamento conforme em **quatérnios**.

Analisemos a inversão do bicomplexo  $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ , que se dá através do mapeamento  $w = 1/z$ .

Em (59) e (60), fizemos:

$$r = r(z) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$s = s(z) = 2x_2x_3 - 2x_1x_4,$$

e encontramos em (62):

$$w = \frac{1}{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4}$$

$$w(z) = \frac{x_1 r + x_4 s}{r^2 - s^2} - i \frac{x_2 r - x_3 s}{r^2 - s^2} - j \frac{x_3 r - x_2 s}{r^2 - s^2} + k \frac{x_4 r + x_1 s}{r^2 - s^2}.$$

Agora, no entanto, se nos restringirmos à inversão:

- numa hipersuperfície esférica, fazendo  $|z|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r(z) = c$
  - associada à pseudo-conjugação:  $x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \Rightarrow x_1 - ix_2 - jx_3 + kx_4$ ;
  - para os bicomplexos tais que  $s(z) = 0 \Rightarrow x_1x_4 = x_2x_3$ .
- teremos:

$$w(z) = \frac{x_1}{c} + i \frac{x_2}{c} + j \frac{x_3}{c} + k \frac{x_4}{c}. \quad (66)$$



Dos resultados obtidos em 63 e 64, encontramos,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0.$$

Desta forma, verificam-se as relações de Cauchy-Riemann generalizadas e também a condição adicional, apresentadas no teorema 20.

Concluimos que a **inversão, numa hipersuperfície esférica de raio  $\sqrt{c}$ , associada com uma pseudo-conjugação**, e aplicada aos bicomplexos tais que  $x_1x_4 = x_2x_3$ , se torna um mapeamento conforme em **bicomplexos**.

Foram analisados os mapeamentos conformes no plano complexo, rotação e inversão, quanto à serem conformes em relação aos bicomplexos hipercomplexos, considerando-se espaços euclidianos e hiperbólicos.

Sabe-se que todos os mapeamentos são conformes em quatêrnios. No entanto, este trabalho conclui que em quatêrnios, são conformes apenas os mapeamentos de translação, dilatação e rotação e que, no bicomplexo, são conformes apenas a translação e a dilatação.

A tabela a seguir resume tais conclusões, relacionando os mapeamentos quadridimensionais estudados com a verificação ("sim" ou "não") das relações de Cauchy-Riemann generalizadas e da condição adicional, presentes no teorema 17 (sobre a conformidade no anel dos quatêrnios) e no teorema 20 (sobre a conformidade no anel dos bicomplexos).

| mapeamentos | quatêrnios     | bicomplexos    |                    |
|-------------|----------------|----------------|--------------------|
|             | Cauchy-Riemann | Cauchy-Riemann | condição adicional |
| translação  | sim            | sim            | sim                |
| dilatação   | sim            | sim            | sim                |
| rotação     | sim            | sim            | não                |
| inversão    | não            | sim            | não                |

É auspicioso saber de que a rotação é conforme em quatêrnios, pois abre a hipótese de uma formulação quaternionica para a Mecânica Quântica.

## CONCLUSÃO

No capítulo 2 desta dissertação, apresentou-se os teoremas 17 e 20, seguindo demonstrações feitas por Borges e Machado, op. cit. [16], sobre a conformidade de mapeamentos no anel dos quatérnios e no anel dos bicomplexos, chamados conjuntamente de hipercomplexos.

Foram analisados os mapeamentos complexos de translação, dilatação, rotação e inversão, quanto à serem conformes ou não, bem como suas versões hipercomplexas, consideradas em espaços euclidianos quadridimensionais.

Sabe-se que todos os mapeamentos citados são conformes em complexos. No entanto, este trabalho conclui que, em quatérnios, são conformes apenas os mapeamentos de translação, dilatação e rotação, e que, em bicomplexos, são conformes apenas a translação e a dilatação.

A tabela a seguir resume tais conclusões, relacionando os mapeamentos quadridimensionais estudados com a verificação ("sim" ou "não") das relações de Cauchy-Riemann generalizadas e da condição adicional, presentes no teorema 17 (sobre a conformidade no anel dos quatérnios) e no teorema 20 (sobre a conformidade no anel dos bicomplexos).

| mapeamentos | quatérnios     | bicomplexos    |                    |
|-------------|----------------|----------------|--------------------|
|             | Cauchy-Riemann | Cauchy-Riemann | condição adicional |
| translação  | sim            | sim            | sim                |
| dilatação   | sim            | sim            | sim                |
| rotação     | sim            | sim            | não                |
| inversão    | não            | sim            | não                |

É auspicioso o fato de que a rotação é conforme em quatérnios, pois abre a hipótese de uma formulação quaterniônica para a Mecânica Quântica.



Importante observação pode ser feita para o caso bicomplexo, onde os mapeamentos de rotação e inversão não são conformes apenas por não obedecerem uma condição adicional do teorema 20. Por outro lado, cumprem as relações de Cauchy-Riemann generalizadas, presentes em tal teorema.

Esta característica possivelmente justifica a formulação bicomplexa da Teoria do Eletromagnetismo de Maxwell.

Por fim, este trabalho discutiu possíveis restrições aos mapeamentos citados, que levam à conformidade.

De qualquer forma, com os trabalhos de Machado e Borges, op. cit. [15] e [16], está se procedendo a uma relevante tentativa de aproximação da teoria de variáveis complexas de duas para quatro dimensões.

[1] BORGES, M. F., CALIXTO, A. P., MACHADO, J. V. On a Anti-Gordon-Graz Operator, XIV CNMAC, Nova Friburgo, 2002, p. 09.

[4] CARMO, M. P. do, *Geometria Diferencial*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[5] CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C., *Analysis, Manifolds and Physics*, Elsevier Science Publishers, B. V., North Holland, 1982.

[6] CHURCHILL, R. V., *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 1975.

[7] DOMINGUES, H. H., *Álgebra Moderna*, Editora Atual, São Paulo, 1982.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BALABAEV, V. E., *Quaternion Analog of Cauchy-Riemann System in 4-Dimensional Complex Space and Some of its Applications*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 214: (3) (1974), 489-491.
- [2] BORGES, M. F., LEAL, J. M., MACHADO, J. M., *Liouville Theorem and Hypercomplex Conformal Mappings*, XXV CNMAC, Nova Friburgo, 2002, p. 68.
- [3] BORGES, M. F., CALIXTO, A. P., MACHADO, J. M., *On a Klein-Gordon-Dirac Quaternionic Operator*, XXV CNMAC, Nova Friburgo, 2002, p. 69.
- [4] CARMO, M. P. do, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [5] CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C., *Analysis, Manifolds and Physics*, Elsevier Science Publishers, B. V., North Holland, 1982.
- [6] CHURCHILL, R. V., *Variáveis Complexas e suas aplicações*, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 1975.
- [7] DOMINGUES, H. H., *Álgebra Moderna*, Editora Atual, São Paulo, 1982.



- [8] DOMINGUES, H. H., *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Atual Editora, São Paulo, 1982.
- [9] FUETER, R., *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta \Delta u = 0$  mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv., 7 (1935), 307-330.
- [10] GARCIA, A., LEQUAIN, Y., *Álgebra: Um Curso de Introdução*, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [11] GONÇALVES, A., *Introdução à Álgebra*, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [12] HERSTEIN, I. N., *Tópicos de Álgebra*, Edusp, Polígono, São Paulo, 1970.
- [13] KASSANDROV, V., *Conformal Mappings, Hyperanalyticity and Field Dynamics*, Acta Applicandae Mathematicae, 50: (1998), 197-206.
- [14] LIMA, E. L., *Elementos de Topologia Geral*, IMPA, Rio de Janeiro, 1970.
- [15] MACHADO, J. M., BORGES, M. F., New Remarks on the Differentiability of Hypercomplex Functions, *International Journal of Applied Mathematics*, 8(1) 85-101 (2002).
- [16] MACHADO, J. M., BORGES, M. F., Hypercomplex Functions and Conformal Mappings, *International Journal of Applied Mathematics*, 9(1) 27-38 (2002).



- [17] NAKAHARA, M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1990.
- [18] PONTRIAGUIN, L. S., *Grupos Contínuos*, Editorial Mir, Moscou, 1978.
- [19] SAGLE, A. A., WALDE, R. E., *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Academic Press, Inc., London, 1973.
- [20] SPIEGEL, M. R., *Variáveis Complexas*, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., Brasília, 1973.
- [21] THORPE, J. A., SINGER, I. M., *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1979.



