IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT-T.016/05

Soluções tipo vórtex em teorias de gauge Chern-Simons-Maxwell-Higgs

Julio Marny Hoff da Silva

Orientadora

Maria Cristina Batoni Abdalla

Co-orientadora

Maria Emília Guimarães

Outubro de 2005

Em memória de meu avô Marny Hoff. Aqui minha singela reverência a um homem que andou pela inquietude como se não houvesse outro caminho.

O sonho obriga os homens a pensar.

Milton Santos

Ella estaba en el horizonte. Me acerco dos pasos, ella se aleja dos pasos.

Camino dos pasos y el horizonte se corre diez pasos más alla

Por mucho que yo camine, nunca la alcanzare. ¿Para que sirve la utopía? Para eso sirve: para caminar.

Eduardo Galeano

Nada é mais perigoso que a certeza de ter razão. É preciso idolatrar a dúvida.

T. Todorov

Agradecimentos

De fato, quanto mais se passou o tempo maior se tornou a chance de eu ser injusto em momentos como esse. Entretanto sinto-me, na mesma proporção, compelido a tentar expressar minha gratidão.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a meus pais. À minha mãe que desde as frias tardes de Curitiba, levando-me de bicicleta ao colégio, até o presente momento tem sido a pessoa que mais me apoia. Mãe, você é o meu maior exemplo de vitória. Ao pai pela importante lição que me ensinou no inverno de 86.

Agradeço também a toda a minha família. Aos meus segundos pais (madrinha Méia e padrinho Nélson). Todos os tios, tias, vó Nair (sempre com bons conselhos), e a cambada: Edu (valeu mesmo), Marny, K-tú, Carlão (que está pra ciência como um mecenas para arte, valeu padrinho), Rafa, Negão, Mancho (que venham as geladas) e Dé. Muito obrigado mesmo.

À Ane (nenem, cacau, picoles, caçapas) por todo o apoio, carinho, amizade, amor e paciência em todos os momentos desde que nos conhecemos. E por muitas vezes me compreender de maneira que nem eu mesmo compreendo.

Aos amigos Luciano e Maçudão meu mais profundo respeito e meus sinceros agradecimentos. À galera da terrinha: Gauchinho (desde a terceira série), Kiko (para de fazer rima japonês), Luíz, Gugu, Semente, Guilherme (valeu monstro), Ulisses, Lê, Christi, Neiva e K1000a.

Aos camaradas de floripa: Tiago, César e Rodrigo e aos professores Nelson Canzian da Silva e Maria Luíza Sartorelli.

À professora Maria Cristina Batoni Abdalla, por todo o apoio, confiança e orientação que em muito excedeu a raia acadêmica. Que eu possa ter uma pequena parte de seu entusiasmo pela física. Foi e é um contínuo (porém não linear) aprendizado o trabalho ao seu lado. Obrigado.

À professora Maria Emília Xavier Guimarães, por toda orientação e atenção devotada a mim.

À galera de São Paulo: Evandro (é bucha!!), Ricardo, outro Ricardo, Clóvis, Caroulos Mafrius, Matheus, German, David, Marco e Gisele. Em particular ao Geová (valeu pelas dicas), ao Mário (um dia a banda existirá) e ao Marcelo (salve Malta).

Ao time do Grêmio, por ter ido (muito) mal nos últimos tempos; convertendo assim as horas em que eu assistia aos jogos em estudo.

Aos funcionários e professores do Instituto de Física Teórica. E, por fim, à FAPESP pelo apoio financeiro e suporte técnico.

Obrigado.

Resumo

Neste trabalho fazemos uma introdução sistemática ao conceito de soluções do tipo vórtex em teorias de gauge planares. Tais soluções são analisadas através do mecanismo de Bogomol'nyi e do grupo fundamental de homotopia e são obtidas para os modelos de Higgs abeliano com e sem o termo de Chern-Simons (CS), além de uma análise completa incluindo o modelo de Higgs com os termos de CS e de Maxwell.

palavras chave: vórtex, homotopia e mecanismo de Bogomol'nyi.

Abstract

In this work we make a systematic introduction to the concept of vortex solutions in flat gauge theories. Such solutions are analyzed through the Bogomol'nyi's mechanism and the basic group of homotopy and are gotten for the models of abelian Higgs with and without Chern-Simons (CS) term, beyond a complete analyses including the Higgs model with CS and Maxwell's term.

Key words: vortex, homotopy and Bogomol'nyi's mechanism.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Teorias de gauge definidas em espaços bidimensionais planos frequentemente nos surpreendem por apresentarem peculiaridades bastante interessantes [6]. Aqui analisamos em maior detalhe determinados tipos de soluções advindas de algumas teorias de gauge planares. Tais soluções são chamadas vórtex, cujo nome remonta às origens da supercondutividade.

Vórtex são soluções topologicamente estáveis relacionadas a não trivialidade dos campos no vácuo via quebra espontânea de simetria [9]. De modo a fazermos uma introdução gradual a todos esses conceitos começamos por estabelecer o embasamento teórico necessário para o estudo do assunto.

Assim iniciamos a dissertação com um capítulo sobre alguns elementos da topologia. Nele se encontram conceitos importantíssimos tais como espaços e grupos topológicos, variedade associada a um grupo, homotopia e contratibilidade. Entretanto advertimos que para o leitor afeito a esse belo ramo da matemática tal capítulo pode ser suprimido de sua leitura. O terceiro capítulo versa de maneira introdutória sobre quebra espontânea de simetria no caso global, onde são introduzidos os bósons de Goldstone, e no caso local onde enfatizamos o mecanismo de Higgs. Este último de maior interesse para nossos propósitos. No quarto capítulo estudamos alguns objetos topológicos em teoria de campos. Começamos por analisar monopolos magnéticos, por serem um boníssimo exemplo de aplicabilidade de grupos de homotopia em física[1], passando pela introdução *à la* Dirac e terminando com os monopolos de 't Hooft-Polyakov. Em seguida, estudamos alguns elementos da teoria de Chern-Simons, por ser de interesse capital no restante da dissertação e finalizamos com a exposição de soluções do tipo vórtex, que são, em última análise, as peças centrais

[1]De fato, como veremos, o grupo de homotopia relevante no caso de monopolos é diferente do grupo de interesse no caso de vórtex. Entretanto a idéia é a mesma: mapeamento não trivial do espaço do campo na variedade associada ao grupo de simetria.

dessa dissertação. Ainda nesse capítulo estudamos cargas e correntes topológicas, além de analisarmos importantes aspectos relativos à estabilidade das soluções.

Sendo nosso interesse a obtenção de vórtex através do mecanismo de Bogomol'nyi, introduzimos esse conceito no capítulo cinco que juntamente com os capítulos anteriores, nos fornece todo o aparato necessário para nosso estudo. No sexto capítulo fazemos, de modo breve, a análise de vórtex carregados que nos é de particular interesse por, além de nos fornecer maior contato com nossos objetos de estudo, ser um caso em que a lagrangeana é completa com todos os termos que desejamos analisar.

O último capítulo antes das considerações finais é, por assim dizer, uma aplicação de tudo o que vimos nos capítulos anteriores. Aqui utilizamos a todo momento o mecanismo introduzido no capítulo cinco bem como os conceitos estabelecidos ao longo da dissertação. Aqui se encontra uma análise dos três casos de nosso interesse sobre soluções do tipo vórtex advindas do mecanismo de Bogomol'nyi: Higgs abeliano, Chern-Simons-Higgs e Chern-Simons-Maxwell-Higgs. O primeiro modelo nos fornece auxílio na padronização do procedimento que realizamos nos dois outros modelos restantes, além de fornecer várias propriedades interessantes. O segundo nos proporciona a visualização de uma nova eletrodinâmica em $(2+1)-$dimensões e também apresenta características peculiares [6]. O terceiro modelo é uma generalização dos anteriores, sendo bastante interessante por envolver todos os termos que vínhamos tratando separadamente.

O capítulo subsequente destina-se a resumir os resultados obtidos, ressaltando os aspectos mais importantes e relevantes de todo o estudo realizado. Somado a isso, são feitas as últimas considerações e comentários perfazendo assim um capítulo fadado à difícil missão de ser um desfecho final a todo o trabalho.

Para complementar o assunto exposto são colocados ao final da dissertação dois apêndices, deixados como tal justamente para assegurar uma leitura sequencial. O primeiro diz respeito à supercondutividade. Começando com uma visão bastante qualitativa e culminando com o efeito Meissner e com a quantização do fluxo magnético no interior de determinado tipo de supercondutor. Ambos os efeitos são interessantes por apresentarem respectivamente, uma aplicação direta de quebra espontânea de simetria e a primeira introdução (cronológica) ao conceito de vórtex. O segundo apêndice é uma introdução à generalização mais imediata (o que não quer dizer simples) das teorias vistas, isto é, a análise de vórtex para grupos de gauge não abelianos. Aqui encontramos características assaz interessantes que além de nos proporcionar uma idéia da teoria no regime não comutativo também nos ajuda na compreensão do caso abeliano.

Ao longo de todo o trabalho são colocadas algumas referências em notas de rodapé, para que o leitor interessado possa se aprofundar em assuntos que geralmente fogem do escopo desta dissertação. Além disso é dada uma série de referências bibliográficas ao final do trabalho.

De um modo geral o trabalho está escrito com o intuito de ser tão didático quanto possível, dentro obviamente dos limites impostos pelo e sobre o autor. Nesse sentido se justifica a disposição dos capítulos, tópicos e apêndices tais como expostos de maneira introdutória aqui.

Capítulo 2

Elementos de Topologia

De uma maneira bastante informal podemos dizer que a topologia geral é o estudo das propriedades puramente qualitativas dos espaços [2]. Ao longo deste capítulo procuraremos fundamentar nosso pano de fundo no sentido que todo aparato matemático necessário para a compreensão deste trabalho encontre-se, direta ou indiretamente, aqui. Faremos uma digressão acerca de espaços e grupos topológicos, definindo o que vem a ser uma topologia, passando por conceitos importantes tais como homotopia, contratibilidade, variedades e chegaremos por fim ao espaço de Minkowski que, em última análise, é o palco onde desenvolvemos este trabalho.

2.1 Espaços e Grupos Topológicos

Vamos chegar de modo gradual a estes conceitos, começando por definir espaços topológicos.

Definição: Seja S um conjunto e seja $\Im = \{U_i/i \in I\}$ uma coleção de subconjuntos de S. O par $(S, \Im)$ é um espaço topológico se $\Im$ satisfizer às seguintes condições:

i) todo o conjunto S e o conjunto vazio pertencem a $\Im$;

ii) se J é uma subcoleção qualquer (finita ou infinita) de I, a família $\{U_j/j \in J\}$ satisfaz a condição $\bigcup_{j\in J} U_j \in \Im$;

iii) se K é uma subcoleção finita qualquer de I, então a família $\{U_k/k \in I\}$ satisfaz $\bigcap_{k\in K} U_k \in \Im$.

Assim, uma topologia em S é uma coleção de subconjuntos de S a qual pertence a união de qualquer subcoleção (finita ou infinita) e a intersecção de qualquer subcoleção finita, bem como o conjunto vazio e o próprio S. S é chamado de espaço topológico.

Tomemos por exemplo o conjunto $S = \{a, b, c, d\}$ com a família de subconjuntos $T = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \emptyset, S\}$, onde $\emptyset$ denota o conjunto vazio. O par (S, T) forma um espaço topológico. Note que esta escolha para T não é arbitrária. Obviamente não estamos interessados em espaços topológicos do tipo exemplificado, no entanto é sempre importante termos exemplos como o acima em mente para garantirmos uma melhor intuição acerca do assunto em questão.

Vale lembrar que dado um conjunto S existem (podem existir) várias topologias diferentes que fazem juntamente com S um espaço topológico diferente.

Façamos agora a seguinte pergunta a título de motivação: existe alguma compatibilidade entre a estrutura algébrica de grupos e a estrutura topológica? Com efeito, a resposta é afirmativa.

Por exemplo, seja o espaço topológico euclideano E^n. Os mapeamentos

$$(X, Y) \longrightarrow X + Y, \tag{2.1}$$

$$E^n \times E^n \longrightarrow E^n \tag{2.2}$$

e

$$X \longrightarrow -X, \tag{2.3}$$

$$E^n \longrightarrow E^n \tag{2.4}$$

nos dizem que as operações do grupo são mapas contínuos na topologia adjacente. A noção de grupo topológico vem dessa compatibilidade entre estruturas algébricas e topológicas.

Vamos relembrar a definição de grupo. Um grupo é um conjunto G (cujos membros são seus elementos) com uma operação

$$m : G \times G \longrightarrow G \tag{2.5}$$

$$m : (a, b) \longrightarrow m(a, b) \tag{2.6}$$

definida de maneira que:

i) $m(a, b) \in G$ para todo par a, b;

ii) existe e tal que $m(a, e) = m(e, a) = a$ (e: elemento neutro);

iii) cada $a \in G$ possui um elemento inverso a^{-1} tal que $m(a, a^{-1}) = m(a^{-1}, a) = e$;

iv) $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$ para todo $a, b, c \in G$.

Estamos agora em posição de definir o conceito de grupo topológico.

Definição: Um grupo topológico é um grupo cujos elementos são membros de um espaço topológico em cuja topologia a operação do grupo é contínua. Ambos os mapeamentos

$$G \times G \longrightarrow G, \tag{2.7}$$

$$(X, Y) \longrightarrow X.Y \tag{2.8}$$

e

$$inv : G \longrightarrow G, \tag{2.9}$$

$$X \longrightarrow X^{-1} \tag{2.10}$$

são contínuos.

Esses conceitos serão muito importantes quando tratarmos dos grupos de Lie.

2.2 Homotopia e Contratibilidade

O conceito de homotopia é de extrema relevância para nossa futura análise sobre estabilidade de soluções do tipo vórtex [1]. É necessário, portanto, que tenhamos esse conceito em mente.

Um caminho a em um espaço X é definido como uma função contínua $a(s)$, $s \in R$, tal que cada valor de s no intervalo $0 \leq s \leq 1$ corresponde a um ponto $a(s)$ no espaço X. Se um caminho a conecta os pontos p e q temos $a(0) = p$ e $a(1) = q$. Se $a(0) = a(1) = p$ temos um caminho fechado (ou loop) em p. Note que o intervalo para s é completamente arbitrário, podendo sempre ser reparametrizado entre zero e um.

Considere dois caminhos fechados $a(s)$ e $b(s)$ ambos partindo de p e chegando em q (com possivelmente $p \neq q$) e suponha existir uma função contínua $L(t, s)$ tal que $L(0, s) = a(s)$ e $L(1, s) = b(s)$, então a e b são homotópicos ($a \sim b$)e o mapeamento L é chamdo de homotopia entre a e b. O caminho inverso de um caminho a (a^{-1}) é definido por $a^{-1}(s) = a(1 - s)$ o que corresponde ao mesmo caminho percorrido na direção oposta. Considere agora caminhos a e b com o ponto final da a coincidindo com o ponto inicial de b ($a(1) = b(0)$). Podemos definir um caminho produto $c = ab$ por

$$c(s) = a(2s) \tag{2.11}$$

para s entre zero e um meio e

$$c(s) = b(2s - 1) \tag{2.12}$$

para s entre um meio e um.

Podemos contruir um grupo introduzindo uma classe de caminhos homotópicos a a ($[a]$). Eles devem ter os mesmos pontos finais. Tais classes de homotopia podem ser multiplicadas por

$$[a] * [b] = [a * b]. \tag{2.13}$$

Esta lei de multiplicação define um grupo, chamado de grupo fundamental ou primeiro grupo de homotopia do espaço topológico X e é denotado por $\pi_1(X)$.

Agora seja $[X, Y]$ o conjunto de todas as classes de homotopia de mapas contínuos de X em Y. Isto geralmente forma um grupo, de modo que o n-ésimo grupo de homotopia é dado por

$$[S^n, Y] = \pi_n(Y), \tag{2.14}$$

onde S^1 é a circunferência, S^2 a esfera, S^3 a esfera em E^4 e assim por diante.

A noção de homotopia pode ser usada para estabelecer uma equivalência entre espaços topológicos. Dado qualquer espaço X, seja $id_X : X \longrightarrow X$ o mapa identidade em X (isto é $id_X(p) = p$ para qualquer $p \in X$). Uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência homotópica entre X e Y se existe uma função contínua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \approx id_X$ e $f \circ g \approx id_Y$. X e Y possuem os mesmos tipos homotópicos, $X \cong Y$.

Suponha agora que o mapa identidade id_X seja homotópico a uma função constante. Mais precisamente, suponha existir uma função contínua $h : X \times I \longrightarrow X$ e uma função constante $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(p) = c$ (um ponto fixo) para qualquer $p \in X$ de modo que

$$h(p, 0) = p = id_x \tag{2.15}$$

e

$$h(p, 1) = f(p) = c. \tag{2.16}$$

Quando isso acontece o espaço é homotopicamente equivalente a um ponto e é dito ser contrátil. O mapa identidade simplesmente deixa o espaço como antes enquanto f o contrai a um ponto. Um espaço contrátil é dito ser simplesmente conexo, por exemplo o plano E^2. Um exemplo de espaço que não é simplesmente conexo é $E^2 - \{0\}$; tal espaço é homotopicamente equivalente a S^1, uma vez que consiste no plano euclideano sem o ponto zero. Assim, um espaço simplesmente conexo será homotopicamente equivalente a um ponto, ou seja, terá o primeiro grupo de homotopia trivial, enquanto que para um espaço não simplesmente conexo isso não acontece. Dizemos de um modo bastante ilustrativo que a homotopia é uma medida de todas as diferentes maneiras de um caminho fechado ficar preso. Lembremo-nos do exemplo acima, no plano ordinário qualquer caminho fechado pode ser contraído a um ponto. Porém no plano sem um ponto zero, qualquer caminho fechado que envolva o buraco deixado pelo ponto zero ficará preso em uma circunferência.

Vale lembrar que apesar de todo espaço contrátil ser simplesmete conexo, o inverso não é verdadeiro; como exemplo pensemos em S^2. A esfera é simplesmente conexa porém não é contrátil.

2.3 Variedades

Nesta última subseção nos ateremos aos conceitos de variedades topológicas, variedades diferenciáveis, grupos de Lie e por fim abordaremos o espaço de Minkowski. Tudo de maneira sucinta.

De modo intuitivo podemos dizer que variedades topológicas são espaços nos quais podemos definir coordenadas. Mais precisamente, uma variedade topológica é um espaço topológico S que satisfaz as seguintes condições restritivas:

i) S é localmente euclideano, isto é, para qualquer ponto $p \in S$ existe um conjunto aberto U no qual p está contido que é homeomorfo a um conjunto aberto em algum E^n;

ii) o espaço S tem a mesma dimensão n em todos os pontos ($n = dimS$);

iii) S tem uma base contável;

iv) S é um espaço de Hausdorff, ou seja, dados quaisquer dois pontos distintos p, $q \in S$ suas vizinhanças são disjuntas.

Daremos agora uma definição menos rigorosa mas bastante útil de variedades diferenciáveis.

Definição: Uma variedade diferenciável M é um espaço topológico onde cada vizinhança (aberto) de um ponto possui um homeomorfismo (função contínua, inversível e com inversa contínua) com um aberto de R^n. Se em $p \in M$ existirem duas vizinhanças U_1 e U_2 com $p \in U_1$ e $p \in U_2$ e duas cartas locais $f_1 : U_1 \longrightarrow R^n$ e $f_2 : U_2 \longrightarrow R^n$ então a composição $f_1 \circ f_2^{-1}$ é diferenciável na intersecção de U_1 com U_2.

Temos já agora um bom cenário onde figuram espaços contínuos e diferenciáveis, o que nos é imprescindível para fazermos alguma física. Temos também conceitos importantes tais como grupos de homotopia e contratibilidade, ferramentas essenciais para adicionar topologia nesta física. No que se segue veremos algo sobre grupos de Lie.

Um grupo de Lie (que é um grupo topológico) é uma variedade G de classe C^{∞}, isto é infinitamente diferenciável, na qual uma estrutura algébrica de grupo é definida de uma tal maneira que os mapeamentos

$$G \times G \longrightarrow G, \tag{2.17}$$

$$(g, h) \longrightarrow g \cdot h \tag{2.18}$$

e

$$G \longrightarrow G, \tag{2.19}$$

$$g \longrightarrow g^{-1} \tag{2.20}$$

são todos de classe C^{∞}.

Podemos de fato associar uma variedade a um grupo de Lie [14], sempre que possível, de maneira relativamente simples analisando a estrutura algébrica do grupo em questão. Por exemplo, para o grupo unitário em uma dimensão, $U(1)$, cuja representação é $g = \exp(i\theta)$ temos que $g(\theta) = g(\theta+2\pi)$ para qualquer θ. Assim a variedade associada a $U(1)$ é S^1. Outro exemplo nos é dado pelo grupo $SU(2)$, o grupo unitário e bidimensional. Sua representação pode ser dada por $g = u_0 + \sum_{i=1}^{3} u_i\sigma_i$, onde u_0 multiplicado pela matriz identidade e σ_i as matrizes de Pauli. Da exigência que o determinante de g seja igual a um (grupo especial) temos $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ que nada mais é do que a equação de uma esfera em E^4, logo a variedade associada a $SU(2)$ é S^3. Doravante quando falarmos em espaço do grupo estaremos nos referindo a variedade associada ao grupo. É válido lembrar que algumas variedades (como S^3 por exemplo) aceitam mais do que uma estrutura de grupo, outras entretanto (como S^2) não aceitam nenhuma.

Neste trabalho nosso espaço-tempo será o espaço de Minkowski e, com efeito, muitas vezes estaremos em $(2{+}1){-}D$. Pontos do espaço-tempo são elementos de uma variedade diferenciável, entretanto o espaço de Minkowski é um caso muito particular de um espaço topológico e, uma vez que não possui curvatura, sua estrutura é consideravelmente simplificada. A fim de melhor conhecer o espaço no qual estaremos atuando vamos olhar mais de perto sua estrutura algébrica. Para tanto precisaremos de algumas definições.

Definição: Um espaço afim $(A, V, -)$ é um conjunto A associado a um espaço vetorial V munido de uma operação

$$- : A \times A \longrightarrow V, \tag{2.21}$$

$$(a,b) \longrightarrow a-b \in V, \tag{2.22}$$

tal que

i) $a-a=0$;

ii) $(a-b)+(b+c)=a-c$.

Uma observação importante a fazer é a de que no espaço afim não existe origem pré-fixada mas, uma vez determinada uma origem O todos os outros pontos $P \in A$ podem ser identificados com o vetor $P-O$.

Definição: Seja V um espaço vetorial real, uma forma bilinear simétrica não degenerada é uma aplicação

$$b : V \times V \longrightarrow R, \tag{2.23}$$

$$(v,w) \longrightarrow b(v,w), \tag{2.24}$$

tal que

i) $b(v_1+v_2,w)=b(v_1,w)+b(v_2,w)$;

i') $b(v,w_1+w_2)=b(v,w_1)+b(v,w_2)$;

i") $b(v,\alpha w)=\alpha b(v,w)$;

i"') $b(\alpha v,w)=\alpha b(v,w)$;

ii) $b(v,w)=b(w,v)$;

iii) se $b(v,w)=0 \ \forall w \in V \Longrightarrow v=0$.

Chegamos enfim à definição desejada.

Definição: O espaço R^n com $n=p+q$ munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada

$$b(u,v)=-(u^1v^1)-\cdots-(u^pv^p)+(u^{p+1}v^{p+1})+\cdots+(u^{p+q}v^{p+q}) \tag{2.25}$$

é dito ser pseudo-euclideano e é denotado por R^{p+q}. O espaço de Minkowski é o espaço afim pseudo-euclideano R^{1+n}.

Temos agora todo o pano de fundo que serve de base para o que se segue. Nosso breve interlúdio pela matemática acaba aqui e estamos aptos a ir à física.

Capítulo 3

Quebra Espontânea de Simetria

Neste capítulo estaremos interessados em entender como funciona o mecanismo de quebra espontânea de simetria. Antes de analisarmos um exemplo concreto de uma lagrangeana iremos discutir dois exemplos simples que contêm a idéia básica e servem também para nos fornecer alguma intuição sobre o assunto. Depois passaremos para a quebra espontânea de uma simetria global, com o teorema de Goldstone e, por fim veremos o que acontece quando a simetria quebrada é local, basicamente culminando com o mecanismo de Higgs.

3.1 Exemplos Básicos

Como primeiro exemplo considere uma mesa plana com uma haste (vareta) de madeira com uma de suas extremidades apoiada perpendicularmente à mesa. Imagine agora a ação de uma força ($\mathbf{F}$), também perpendicular à mesa, na outra extremidade de haste. Quando o módulo da força é menor do que um certo valor crítico, digamos $|\mathbf{F}_c|$, nada acontece e o sistema é completamente simétrico. No entanto para $|\mathbf{F}| > |\mathbf{F}_c|$ a haste se curva escolhendo, por assim dizer, uma determinada direção que, a princípio, é arbitrária. Então nosso sistema completamente simétrico inicialmente teve sua simetria quebrada pela variação de um parâmetro que o levou ao estado de mais baixa energia.

Vários sistemas comuns apresentam essas características. A roleta dos jogos de azar por exemplo. Uma vez jogada a bola com a roleta girando o sistema apresenta uma simetria completa. A bola vai perdendo energia até cair em uma casa. Note que temos aqui a mesma situação anterior: sistema completamente simétrico inicialmente mas que em tendo um parâmetro variado, neste caso a energia, quebra a simetria inicial. Materiais ferromagnéticos com direcionamento aleatório de spins mas que, quando resfriados, apresentam um alinhamento dos mesmos em uma determinada direção também podem nos servir de exemplo de quebra espontânea de simetria.

Vamos agora passar à análise de um exemplo mais elaborado tendo em mente os exemplos anteriores. Neste capítulo trabalharemos no espaço de Minkowski em $(3+1)-D$.

3.2 Quebra Espontânea de Simetria Global

Seja a lagrangeana

$$L = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \tag{3.1}$$

ou

$$L = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - V(\phi, \phi^*). \tag{3.2}$$

O parâmetro λ é o de auto-interação e m^2 não deve ser ainda entendido como a massa. Devemos por enquanto entendê-lo apenas como um simples parâmetro. Note que a equação (3.1), a menos do termo de auto-interação, é a lagrangeana de Klein-Gordon. Nossa lagrangeana é claramente invariante sob transformações de gauge[1] do tipo

$$\phi \longrightarrow \exp{(i\Lambda)}\phi, \tag{3.3}$$

onde Λ é constante.

Levemos o sistema para o estado de mais baixa energia, aqui entendido como sendo o vácuo, minimizando o potencial. Assim

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2 \phi^* + 2\lambda \phi^* (\phi \phi^*). \tag{3.4}$$

Igualando (3.4) a zero obtemos

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} \equiv a^2 \tag{3.5}$$

para $m^2 < 0$. Se $m^2 > 0$, $\phi = \phi^* = 0$.

Para m^2 menor que zero temos então

$$|\langle 0|\phi|0\rangle|^2 = a^2. \tag{3.6}$$

Vamos passar os campos para coordenadas polares para uma melhor visualização. Então,

$$\phi(x) = \rho(x) \exp(i\theta(x)), \tag{3.7}$$

[1]A rigor, o termo *gauge* é usado para simetrias locais.

com ρ e θ reais. Os valores esperados no vácuo passam a ser

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \langle 0|\rho|0\rangle = a \tag{3.8}$$

e

$$\langle 0|\theta|0\rangle = 0. \tag{3.9}$$

Este exemplo tem as mesmas características dos exemplos anteriores: um vácuo assimétrico e degenerado. Vamos realizar uma perturbação no vácuo fazendo

$$\phi(x) = [\rho'(x) + a]\exp(i\theta(x)), \tag{3.10}$$

onde $\langle 0|\theta|0\rangle = \langle 0|\rho'|0\rangle = a$. Calculemos agora a lagrangeana em função dos campos ρ' e θ levando em conta nossa escolha para o vácuo, como em (3.10). Vamos então aos cálculos, primeiramente computando a parte potencial. De (3.1) temos

$$V = m^2(\rho'^2 + 2\rho' a + a^2) + \lambda(\rho'^2 + 2\rho' a + a^2)^2 \tag{3.11}$$

$$V = \lambda\rho'^4 + 4a\lambda\rho'^3 + (m^2 + 6\lambda a)\rho'^2 + (m^2 + 2\lambda a^2)2\rho' a + (m^2 + \lambda a^2)a^2. \tag{3.12}$$

Utilizando a condição de mínimo, equação (3.5), ficamos com

$$V = \lambda\rho'^4 + 4a\lambda\rho'^3 + 4\lambda a^2\rho'^2 - \lambda a^4 \tag{3.13}$$

e por fim

$$V = \lambda[(\rho' + a)^2 - a^2]^2 - \lambda a^4. \tag{3.14}$$

A substituição direta de (3.10) no termo cinético fornece

$$\partial_\mu\phi = \exp(i\theta)[\partial_\mu\rho' + i(\rho' + a)\partial_\mu\theta] \tag{3.15}$$

e para o campo complexo

$$\partial^\mu\phi^* = \exp(-i\theta)[\partial^\mu\rho' - i(\rho' + a)\partial^\mu\theta]. \tag{3.16}$$

Juntando todos os termos temos a seguinte expressão para a lagrangeana

$$L = \partial_\mu\rho'\partial^\mu\rho' + (\rho' + a)^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \lambda[\rho'^2 + 2a\rho']^2 + 4\lambda a^4 \tag{3.17}$$

realizando os últimos cálculos ficamos com

$$L = \partial_\mu\rho'\partial^\mu\rho' + (\rho' + a)^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \lambda\rho'^4 - 2\lambda a\rho'^3 - 4a^2\lambda\rho'^2 + 4\lambda a^4. \tag{3.18}$$

Note que na equação acima temos um termo proporcional a ρ'^2, portanto esse é um campo massivo cuja massa é dada pelo coeficiente desse termo quadrático.

A razão para identificarmos o coeficiente do termo quadrático como a massa do campo é que este é precisamente o pólo do propagador. Assim $m_{\rho'}^2 = 4\lambda a^2$.

Então partindo de dois campos massivos, partes reais de ϕ obtemos, após a quebra espontânea de simetria, um campo massivo (ρ') e um campo sem massa (θ). Este último campo é conhecido como bóson de Goldstone. É importante salientar que esse fenômeno é geral, ou seja, quebra espontânea de uma simetria global implica na existência de uma partícula sem massa. Esse é o teorema de Goldstone. Exposto de um modo mais geral, se uma lagrangeana L é invariante sob um grupo G e o vácuo é invariante sob um subgrupo H de G, e o campo ϕ descrito por L for tal que $\langle 0|\phi(x)|0\rangle \neq 0$, então existe um número de partículas sem massa igual a $dim(\frac{G}{H})$, isto é, o número de geradores de G que não são geradores de H. Muito embora tenhamos utilizado uma decomposição polar dos campos isso não é necessário, sendo feito apenas por conveniência. Os mesmos resultados podem ser obtidos via decomposição cartesiana.

Tudo o que vimos se aplica a simetrias globais, vamos analisar agora o que acontece quando a simetria quebrada é local.

3.3 Quebra Espontânea de Simetria Local

Consideremos novamente a lagrangeana (3.1) porém agora invariante sob $e^{i\Lambda(x)}$. Introduzindo o tensor eletromagnético e o princípio de acoplamento mínimo temos a seguinte lagrangeana

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^* - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.19}$$

Como o potencial permanece inalterado, novamente o vácuo é dado por (3.6).

Procediremos à maneira da seção anterior, decompondo o campo em dois campos reais levando em conta a contribuição do vácuo. Então

$$\phi(x) = a + \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}} \tag{3.20}$$

e, obviamente,

$$\phi(x)^* = a + \frac{\phi_1(x) - i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}. \tag{3.21}$$

Primeiramente vamos computar $\phi^*\phi$ e então substituir o resultado em (3.19). Assim

$$\begin{aligned} \phi^*\phi &= \Big(a + \frac{\phi_1(x) - i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}\Big)\Big(a + \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}\Big) \\ &= a^2 + \frac{2a}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{\phi_1^2}{2} + \frac{\phi_2^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

substituindo na lagrangeana temos

$$
\begin{aligned}
L &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\Big(a + \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}\Big)(\partial^\mu - ieA^\mu)\Big(a + \frac{\phi_1(x) - i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}\Big) \\
&- m^2\Big(a^2 + \frac{2a}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{\phi_1^2}{2} + \frac{\phi_2^2}{2}\Big) \\
&- \lambda\Big(a^2 + \frac{2a}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{\phi_1^2}{2} + \frac{\phi_2^2}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi_2 + ieaA_\mu + \frac{ie}{\sqrt{2}}A_\mu\phi_1 - \frac{e}{\sqrt{2}}A_\mu\phi_2\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu\phi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\partial^\mu\phi_2 \\
&- ieA^\mu - \frac{ie}{\sqrt{2}}A^\mu\phi_1 - \frac{e}{\sqrt{2}}A^\mu\phi_2\Big) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \Big(a^2 + \frac{2a}{\sqrt{2}}\phi_1 \\
&+ \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)\Big)\Big(m^2 + \lambda a^2 + \frac{2a}{\sqrt{2}}\lambda\phi_1 + \frac{\lambda}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)\Big) \ . \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Efetuando o simples cálculo acima temos o seguinte resultado

$$
\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - 2a^2\lambda\phi_1^2 \\
&+ \sqrt{2}eaA^\mu\partial_\mu\phi_2 + O(\phi^n A^n, n \geq 2) \ . \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

O segundo termo da equação acima é proporcional a A^2, o que indica que o fóton torna-se massivo. Além dele o campo ϕ_1 também é massivo. Podemos, através de uma transformação de gauge, eliminar tanto o campo ϕ_2 quanto o termo misto. Realizemos uma transformação infinitesimal no plano (ϕ_1, ϕ_2) da seguinte forma:

$$\phi_1' = \phi_1 - \Lambda\phi_2, \qquad (3.26)$$

$$\phi_2' = \phi_2 + \Lambda\phi_1 + \sqrt{2}\Lambda a. \qquad (3.27)$$

Pela liberdade de gauge podemos escolher Λ de maneira a obter o efeito desejado. Re-escrevendo então a equação (3.25) ficamos com (omitindo o índice linha)

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - 2\lambda a^2\phi_1^2, \qquad (3.28)$$

a menos de termos acoplados. Nesta equação existem somente dois campos; o fotonico (spin 1) e ϕ_1 (spin zero), ambos massivos. Note que o campo ϕ_2 que no caso de quebra espontânea de simetria global dava origem ao bóson de Goldstone agora desaparece. A aquisição de massa por parte do fóton é conhecida como mecanismo de Higgs.

Resumindo, neste modelo abeliano, a quebra espontânea de uma simetria local não resulta no aparecimento de bósons de Goldstone mas sim de um campo de gauge massivo. O quadro comparativo mostrado na tabela 3.1 deixa-nos clara essa diferença.

Este capítulo destina-se apenas a ser uma introdução ao funcionamento da quebra espontânea de uma simetria. Vale lembrar que este é um mecanismo de grande importância na física teórica desde modelos de grande aplicabilidade, como os que tratam de supercondutividade[2], até modelos como o de Weinberg-Salam de unificação das interações fracas e eletromagnéticas. O que vimos até aqui é suficiente para entender seu funcionamento, bem como a sua utilização no restante do trabalho.

Mecanismo de Goldstone:

2 campos escalares massivos $\longrightarrow$ 1 campo escalar massivo + 1 campo escalar sem massa

Mecanismo de Higgs:

2 campos escalares massivos $\longrightarrow$ 1 campo escalar massivo + 1 fóton massivo

Tabela 3.1: quadro comparativo

[2]Ver apêndice A.

Capítulo 4

Objetos Topológicos em Teoria de Campos

O presente capítulo é de crucial importância para o trabalho desenvolvido. Aqui se concentram os termos com os quais devemos estar bem familiarizados. Começamos com o monopolo de Dirac, cuja introdução é feita por uma analogia com monopolos elétricos. A seguir estudamos os monopolos de 't Hooft-Polyakov. Mesmo não estando particularmente interessados em monopolos, veremos esse tópico com algum detalhe pois tal assunto apresenta um excelente exemplo de aplicabilidade dos grupos de homotopia em física. Em seguida, veremos alguns elementos da teoria de Chern-Simons, depois nos dedicaremos a soluções do tipo vórtex, que são de fato os objetos mais importantes para nossos fins e por último nos dedicaremos à análise de grandezas invariantes em teorias topológicas, algumas das quais já teremos tido contato, tais como: cargas e correntes topológicas, e vorticidade.

4.1 Monopolos Magnéticos

O monopolo magnético foi introduzido por Dirac em 1931 e lança luz sobre o problema da possível existência de partículas com carga magnética. A hipótese de Dirac (polos magnéticos isolados) leva a uma explicação natural da quantização da carga elétrica. Dirac também mostrou, através de uma análise elegante, que a existência de um monopolo magnético isolado não leva, a princípio, a nenhuma contradição com a física moderna e em particular com as equações de Maxwell. Além disso os monopolos têm várias propriedades interessantes. Por exemplo, a carga magnética deve ser conservada, o que significa que uma vez gerado o monopolo não pode desaparecer sem colidir com outro monopolo com carga magnética oposta.

A carga magnética elementar de um monopolo é $\frac{137}{2}$ vezes maior que a carga elétrica, logo a força de interação entre dois monopolos deve exceder a interação entre duas cargas (a uma mesma distância) em 4692 vezes. Dirac argumentou que talvez esse seja o motivo para nunca termos detetado uma carga magnética. Vamos analisar o monopolo um pouco mais em detalhes.

Considere um monopolo magnético g na origem de um determinado sistema de referência. O campo magnético radial é (em unidades gaussianas):

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2}\hat{r} = -g\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{4.1}$$

em analogia com a lei de Coulomb. Então

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -g\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) \tag{4.2}$$

mas

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3 r \tag{4.3}$$

portanto

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\delta^3 r, \tag{4.4}$$

logo a carga magnética corresponde a um ponto.

O fluxo magnético correspondente é

$$\Phi = \oint \mathbf{B} \cdot \hat{n} dA, \tag{4.5}$$

$$\Phi = 4\pi r^2 B = 4\pi g. \tag{4.6}$$

Considere uma partícula com carga elétrica e no campo do monopolo. Sua função de onda é

$$\psi = |\psi| \exp \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et). \tag{4.7}$$

Porém, na presença do campo eletromagnético, pelo acoplamento mínimo, $\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$. Logo, a função de onda muda para

$$\psi \longrightarrow |\psi| \exp \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} - Et) = \psi \exp \frac{-ie}{\hbar c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}, \tag{4.8}$$

ou, de modo equivalente, a fase muda de acordo com

$$\alpha \longrightarrow \alpha - \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}. \tag{4.9}$$

Considere agora um caminho fechado r, θ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ com o monopolo na origem. A mudança total na fase é

$$\triangle\alpha = \frac{e}{\hbar c}\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{4.10}$$

pelo teorema de Stokes

$$\triangle\alpha = \frac{e}{\hbar c}\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n} dA, \tag{4.11}$$

$$\triangle\alpha = \frac{e}{\hbar c}\int \mathbf{B} \cdot \hat{n} dA = \frac{e}{\hbar c}\Phi(r,\theta). \tag{4.12}$$

Devemos sempre ter $\triangle\alpha = 2n\pi$, onde $n \in Z$, para quaisquer r e θ para que ψ seja bem definida. Em particular, para quando $\Phi(r,\theta) = \Phi$. Assim de (4.7) e (4.15):

$$2n\pi = \frac{e}{\hbar c}4\pi g, \tag{4.13}$$

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c. \tag{4.14}$$

Esta relação quantiza a carga elétrica em função da carga magnética.

A equação (4.12) é muito importante, ela relaciona a mudança de fase e portanto a mudança da função de onda de uma partícula carregada eletricamente no campo do monopolo com o fluxo magnético. A integral (4.11) é calculada ao longo de uma casca esférica para um determinado θ e um dado raio. Quando $\theta \to 0$, a superfície de integração vai a um ponto e portanto o fluxo é nulo, isto é:

$$\Phi(r,0) = 0. \tag{4.15}$$

Quando $\theta = \pi$ temos um caso interessante. Como vimos em (4.6) o fluxo para o monopolo calculado para toda a superfície esférica é $4\pi g$. Entretanto, no limite $\theta \to \pi$, o fluxo é novamente levado a um ponto. Podemos entender isso intuitivamente através do grau de liberdade do ângulo φ, pois este varia de zero a 2π para todos os valores de θ exceto zero e π. Assim, temos uma indeterminação no fluxo quando $\theta \to \pi$ o que nos encoraja a dizer que $\mathbf{A}$ deve ser singular em $\theta = \pi$. Como o raio da esfera é arbitrário o potencial passa a ser singular em todo o eixo z negativo. A isto denomina-se corda de Dirac. Vamos buscar uma forma para o potencial levando em conta, obviamente, suas singularidades. Claro é que o potencial deve fornecer a mesma expressão para o fluxo do monopolo.

Comecemos por dividir o espaço ao redor do monopolo, isto é, a esfera, em duas regiões. Uma região R_a que exclui o polo sul e uma R_b que exclui o polo norte. Cada região terá uma definição diferente para $\mathbf{A}$. A princípio isto pode parecer estranho mas em breve veremos que não estamos em desacordo com nenhuma regra do jogo[1]. Assim vamos definir $\mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$A_r^a = A_\theta^a = 0 \tag{4.16}$$

[1]De fato, tal reparametrização nada mais é do que recobrir a esfera ao redor do monopolo com um plano. Podemos ver isso pensando em um plano tangente a uma 2-esfera com uma projeção estereográfica.

e

$$A_\varphi^a = \frac{g}{r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{4.17}$$

para $0 \leq \theta < \pi$. E para $0 < \theta \leq \pi$

$$A_r^b = A_\theta^b = 0 \tag{4.18}$$

e

$$A_\varphi^b = \frac{-g}{r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{4.19}$$

Como não poderia deixar de ser $\mathbf{A}^a$ e $\mathbf{A}^b$ estão bem definidas em seus domínios[2], podemos perceber isto aplicando a regra de L'Hôpital com relação a θ. Na região de sobreposição suas expressões não são as mesmas mas estão relacionadas por uma transformação de gauge do tipo (em unidades naturais, $\hbar = c = 1$):

$$A_\varphi^b = A_\varphi^a - \frac{2g}{r\sin\theta} = A_\varphi^a - \frac{i}{e}S\nabla_\varphi S^{-1}, \tag{4.20}$$

onde $S = \exp(2ige\varphi)$. Devemos agora verificar se nosso potencial realmente descreve o monopolo calculando o fluxo através de uma esfera com uma carga magnética na origem. O fluxo será dado por

$$\Phi = \oint \mathbf{B}\cdot\hat{n}dA, \tag{4.21}$$

$$\Phi = \int_{Ra}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}dA + \int_{Rb}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}dA. \tag{4.22}$$

Por conveniência, calcularemos sobre R_a e R_b em $\theta = \frac{\pi}{2}$ pois assim evitamos a sobreposição das duas regiões. Podemos lançar mão do teorema de Stokes e uma vez que a fronteira é a mesma para as duas regiões podemos usar a transformação (4.20). Note que não perdemos generalidade alguma uma vez que a simetria é esférica. Como os fluxos são contrários, obtemos

$$\Phi = \oint_{\theta=\frac{\pi}{2}} \mathbf{A}^a\cdot d\mathbf{l}^a - \oint_{\theta=\frac{\pi}{2}} \mathbf{A}^b\cdot d\mathbf{l}^b. \tag{4.23}$$

Utilizando (4.20), temos

$$\Phi = \frac{i}{e}\oint_{\theta=\frac{\pi}{2}} S\frac{d}{d\varphi}S^{-1}d\varphi = 4\pi g, \tag{4.24}$$

como desejávamos.

Esta abordagem consiste basicamente em parametrizar o espaço subjacente de duas maneiras independentes correspondendo a duas regiões sobrepostas porém

[2] Note que, de fato, $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \neq 0$.

distintas. Nosso espaço de base é S^2, a esfera ao redor do monopolo, e o espaço do grupo é S^1 já que o grupo de gauge é $U(1)$. O produto direto $S^2 \times S^1$ tem então importância localmente. Como vimos, realmente realizávamos operações algébricas de elementos de $U(1)$ em S^2.

No contexto da eletrodinâmica de Maxwell, com o grupo de gauge abeliano $U(1)$, as cargas magnéticas são adicionadas na teoria. Apesar de termos uma teoria mais atraente do ponto vista simétrico e de não termos contradição alguma não existe necessidade de sua introdução. No entanto, quando a simetria de gauge é estendida para um grupo não-abeliano e a quebra espontânea da simetria é introduzida, as equações de campo produzem uma solução que corresponde a uma carga magnética. Neste contexto, se tal teoria estiver correta, monopolos magnéticos devem existir.

Em 1974, 't Hooft e Polyakov descobriram a possibilidade teórica deste tipo de monopolo cuja origem é topológica. Uma vez que nosso foco principal não se concentra nesse tipo de objeto topológico, não faremos aqui uma descrição detalhada do modelo, mas apenas delinearemos as principais idéias nele contidas concentrando-nos no que podemos aprender sobre topologia [8]. A lagrangena do modelo é dada por

$$L = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}(D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) - \frac{m^2}{2}\phi^a\phi^a - \lambda(\phi^a\phi^a)^2, \tag{4.25}$$

onde

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + e\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{4.26}$$

e

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + e\epsilon^{abc}A^b_\mu \phi^c. \tag{4.27}$$

Notemos que a lagrangeana (4.25) é invariante por ações do grupo $SO(3)$. Quando quebramos espontaneamente a simetria do sistema, os valores esperados no vácuo são simétricos por transformações do grupo de gauge $U(1)$.

Estamos interessados em soluções estáticas em que os potenciais de gauge têm a seguinte forma não-trivial para $r \to \infty$:

$$A^a_i = -\epsilon_{iab}\frac{r^b}{er^2}; \tag{4.28}$$

$$A^a_0 = 0, \tag{4.29}$$

enquanto que o campo escalar tem como valor assintótico

$$\phi^a = F\frac{r^a}{r}. \tag{4.30}$$

Note que nessa notação existe uma mistura de índices. Por exemplo, a componente x do campo escalar terá apenas a componente 1 do isospin (uma vez que ϕ^a é um isovetor).

Vamos definir uma generalização de $F_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{|\phi|}\phi^a F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{e|\phi|^3}\epsilon_{abc}\phi^a(D_\mu\phi^a)(D_\nu\phi^c). \tag{4.31}$$

Definindo agora

$$A_\mu = \frac{1}{|\phi|}\phi^a A^a_\mu, \tag{4.32}$$

temos

$$F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]} - \frac{1}{e|\phi|^3}\epsilon_{abc}\phi^a(\partial_\mu\phi^b)(\partial_\nu\phi^c). \tag{4.33}$$

Uma vez que

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B_k \tag{4.34}$$

temos

$$B^k = \frac{r^k}{er^3}. \tag{4.35}$$

Logo o fluxo é

$$\Phi = \frac{4\pi}{e}. \tag{4.36}$$

Portanto, da equação (4.6), temos

$$eg = 1, \tag{4.37}$$

que é duas vezes a unidade de Dirac. Achamos então uma configuração que carrega carga magnética.

Entretanto podemos fazer a seguinte pergunta: qual a origem desta carga magnética? E qual a sua relação com a topologia do sistema em questão? A fim de responder a essas questões vamos definir uma corrente conservada (que não advém do teorema de Noether) na forma

$$K^\mu = \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}, \tag{4.38}$$

(é fácil ver que $\partial_\mu K^\mu = 0$). Na equação acima

$$A_\mu = \frac{1}{|\phi|}\phi^a A^a_\mu. \tag{4.39}$$

Substituindo (4.33) em (4.38) temos

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi e}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abc}\partial_\nu\hat{\phi}^a\partial_\rho\hat{\phi}^b\partial_\sigma\hat{\phi}^c, \tag{4.40}$$

onde $\hat{\phi}^a = \frac{1}{|\phi|}\phi^a$. Note que a corrente conservada só depende do campo de Higgs. A carga conservada é dada por

$$Q = \int d^3x K^0, \tag{4.41}$$

$$Q = \frac{1}{8\pi e}\int d^3x(\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\partial_i\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c). \tag{4.42}$$

Porém note que

$$Q = \frac{1}{8\pi e}\int d^3x\partial_i(\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c) = \frac{1}{8\pi e}\int_{S^2_\phi} d^2\sigma_i(\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c). \tag{4.43}$$

Para percebermos que a integral acima é um mapeamento de S^2_ϕ em S^2_{int} vamos reparametrizar a superfície S^2_ϕ pelos ângulos polar e azimutal (α_1, α_2). Assim

$$d^2\sigma_i = \frac{1}{2}d^2\alpha\epsilon_{imn}\epsilon_{pq}\frac{\partial x^m}{\partial\alpha^p}\frac{\partial x^n}{\partial\alpha^q}, \tag{4.44}$$

onde $p, q = 1, 2$ e $\partial_i\hat{\phi}^a = \frac{\partial\hat{\phi}^a}{\partial\alpha^p}\frac{\partial\alpha_p}{\partial x^i}$. Logo a carga conservada torna-se

$$Q = \frac{1}{16\pi e}\int d^2\alpha\epsilon_{imn}\epsilon_{pq}\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\frac{\partial x^m}{\partial\alpha^p}\frac{\partial x^n}{\partial\alpha^q}\hat{\phi}^a\frac{\partial\hat{\phi}^b}{\partial\alpha^r}\frac{\partial\alpha_r}{\partial x^j}\frac{\partial\hat{\phi}^c}{\partial\alpha^s}\frac{\partial\alpha_s}{\partial x^k}. \tag{4.45}$$

Uma vez que $\epsilon_{imn}\epsilon^{ijk} = \delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}$ temos

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{16\pi e}\int d^2\alpha\epsilon_{pq}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\Big(\frac{\partial\hat{\phi}^b}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\hat{\phi}^c}{\partial\alpha_q} - \frac{\partial\hat{\phi}^b}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\hat{\phi}^c}{\partial\alpha_p}\Big) \\ &= \frac{1}{8\pi e}\int d^2\alpha\epsilon_{pq}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\frac{\partial\hat{\phi}^b}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\hat{\phi}^c}{\partial\alpha_q}\ , \end{aligned} \tag{4.46}$$

e como o jacobiano da transformação é dado por

$$d^2\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{pq}\epsilon_{abc}\frac{\partial\alpha_p}{\partial\hat{\phi}^b}\frac{\partial\alpha_q}{\partial\hat{\phi}^c}dS^{int}_a, \tag{4.47}$$

temos simplesmente

$$Q = \frac{1}{4\pi e}\int dS^{int}_a\cdot\hat{\phi}^a = \frac{1}{4\pi e}\int dS^{int} = \frac{N}{e}. \tag{4.48}$$

Da equação (4.14) temos que

$$Q = 2g, \tag{4.49}$$

explicitando assim o surgimento de monopolos magnéticos na teoria. O aparecimento do inteiro N e sua relação com a carga magnética é entendida como se segue. A variedade de $\hat{\phi}$ é uma esfera no isospaço e a integral da carga conservada é tomada no espaço das coordenadas. O campo de Higgs faz um mapeamento

$$\hat{\phi} : S^2 \longrightarrow S^2 \tag{4.50}$$

do espaço interno no espaço das coordenadas.

Um resultado importante é que esse mapeamento não é necessariamente um a um porém é sempre um número inteiro (N). Esse é um caso particular de um resultado mais geral obtido por Kronecker[3]. Embora isso seja de grande importância, vamos nos concentrar na equação (4.50).

Em geral, os termos importantes do modelo são os da variedade $\hat{\phi}$ que é uma variedade de vácuo. Se o grupo de simetria de uma teoria é G ($SO(3) \cong SU(2)$ no presente caso) e o grupo de simetria do vácuo é $H(U(1))$, então transformações em H deixam a variedade de vácuo invariante. Assim, o espaço de $\hat{\phi}$ é o conjunto de transformações em G que não estão relacionadas com uma transformação em H. Essa é a definição de espaço quociente. A variedade de vácuo é essencialmente G/H. Com o auxílio de (4.50), vemos que a existência de monopolos magnéticos requer um mapeamento não-trivial de $G/H = SU(2)/U(1) \cong S^2$ em S^2. Esse mapeamento forma um grupo, o segundo grupo de homotopia de G/H. De fato esse é um resultado mais geral que pode ser usado como critério topológico para a existência de soluções do tipo monopolo. Assim, a condição necessária para a existência de monopolo é a não-trivialidade do grupo $\pi_2(G/H)$, isto é

$$\pi_2(G/H) \neq 0, \tag{4.51}$$

daí a importância da não-trivialidade do vácuo e, portanto, da quebra espontânea de simetria [3].

4.2 Elementos da Teoria de Chern-Simons

Teorias definidas em espaços bidimensionais frequentemente apresentam características muito interessantes e peculiares [15]. Em $(2+1)$ dimensões temos um novo tipo de teoria de gauge diferente do eletromagnetismo usual. Tal teoria é obtida pela adição do termo de Chern-Simons[4] (CS) à lagrangeana. Esse termo é dado por[5]

$$L_{CS} = \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho. \tag{4.52}$$

Percebamos que o termo de CS por si só não tem dinâmica. Para vermos isso basta que calculemos as equações de movimento para o campo. De fato, as equações de

[3] C. B. Allendoerfer, *Am. J. Math.* **62**,243 (1940).

[4] Sempre que nos referirmos a este termo estaremos nos referindo à sua versão abeliana. O caso não abeliano envolve a soma de $\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu A_\nu A_\rho$ ao termo usual. Note que para o caso abeliano este termo não usual é explicitamente nulo.

[5] Não nos deve causar espécie o termo de CS ser dado por $\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho$ ao invés de como se encontra em $\frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}$. Obviamente trata-se do mesmo termo.

Euler-Lagrange nos fornecem

$$\epsilon^{\mu\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma - \epsilon^{\alpha\mu\nu}\partial_\nu A_\alpha = 0, \tag{4.53}$$

o que é identicamente nulo. De fato, o termo de CS interfere na dinâmica do sistema quando acoplado com outros termos, tais como o de Maxwell ou campos escalares. É natural então que o termo de CS não contribua para a energia do sistema. Como veremos ainda neste capítulo, a lagrangeana de CS não depende da métrica. Essencialmente a combinação da métrica com relação com $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ resulta em novo ϵ. Assim, calculando o tensor energia-momento, por exemplo via derivação funcional da ação com relação à métrica

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-detg_{\mu\nu}}}\frac{\delta S_{CS}}{\delta g_{\mu\nu}}, \tag{4.54}$$

vemos que tal tensor é nulo e portanto a contribuição da energia por parte do termo de CS é zero [12].[6] Vamos trabalhar um pouco com L_{CS} abrindo suas componentes. Acreditamos ser salutar esse procedimento no sentido de melhorar gradativamente, com a manipulação, nosso entendimento sobre o assunto. Para tanto, escrevamos a lagrangeana da seguinte maneira

$$L_{CS} = \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}. \tag{4.55}$$

Apenas realizando a soma temos

$$L_{CS} = \frac{\mu}{2}(BA_0 - \epsilon^{ij}A_i F_{0j}), \tag{4.56}$$

que nada mais é do que

$$L_{CS} = \frac{\mu}{2}(BA_0 - \epsilon^{ij}A_i A_j + \epsilon^{ij}A_i\partial_j A_0). \tag{4.57}$$

O termo da derivada pode ser escrito como

$$\epsilon^{ij}A_i\partial_j A_0 = \epsilon^{ij}\partial_j(A_i A_0) - \epsilon^{ij}A_0\partial_j A_i, \tag{4.58}$$

logo ficamos com

$$L_{CS} = \frac{\mu}{2}(2A_0 B + \epsilon^{ij}\dot{A}_i A_j - \epsilon^{ij}\partial_j(A_i A_0)). \tag{4.59}$$

Desprezando o termo da derivada total, uma vez que esse desaparece sob integração, temos finalmente

$$L_{CS} = \mu A_0 B + \frac{\mu}{2}\epsilon_{ij}\dot{A}_i A_j. \tag{4.60}$$

[6]Somos inclinados a advertir o leitor sobre o artigo [10]; lá aparece explicitamente uma contribuição do termo de CS para a energia do sistema. Tal contribuição é, como vimos, inconsistente.

Uma importante característica sobre a lagrangeana (4.52) é a de que ela parece não ser invariante de gauge. Entretanto sob transformações do tipo $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ temos

$$L'_{CS} = \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}[(A_\mu + \partial_\mu\Lambda)(\partial_\nu A_\rho + \partial_\nu\partial_\rho\Lambda)], \tag{4.61}$$

então ao efetuarmos o produto distributivo e eliminarmos as contrações simétricas com $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ ficamos com

$$L'_{CS} = L_{CS} + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\Lambda\partial_\nu A_\rho. \tag{4.62}$$

Porém,

$$\partial_\mu\Lambda\partial_\nu A_\rho = \partial_\mu(\Lambda\partial_\nu A_\rho) - \Lambda\partial_\mu\partial_\nu A_\rho, \tag{4.63}$$

e como o segundo termo da equação acima também desaparece quando da contração com epsilon, temos apenas

$$L'_{CS} = L_{CS} + \frac{\mu}{2}\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho). \tag{4.64}$$

Isto significa que a lagrangeana é invariante sob transformações de gauge a menos de um termo de superfície. Tal termo geralmente pode ser desprezado, exceto em importantes casos nos quais a topologia espacial é não trivial[7].

É interessante também notar que teorias de CS só estão bem definidas em espaços-tempo de dimensões ímpares. Por exemplo, em cinco dimensões temos

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\mu\partial_\nu A_\lambda\partial_\rho A_\sigma. \tag{4.65}$$

Em teorias de dimensões pares os índices não se combinam covariantemente.

Como dissemos, o termo de CS torna-se parte importante da dinâmica do sistema quando acoplado a outros termos. Vamos agora estudar a lagrangeana de CS com o termo de Maxwell, dada por

$$L_{MCS} = \frac{-1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho; \tag{4.66}$$

as equações de movimento são

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + \frac{\mu e^2}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = 0. \tag{4.67}$$

Acoplando ainda nossa lagrangeana ao termo de corrente, $-A_\mu J^\mu$, temos como equação de movimento

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + \frac{\mu e^2}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = J^\mu; \tag{4.68}$$

cuja componente temporal nos fornece

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \mu e^2 B = \rho, \tag{4.69}$$

[7]Por exemplo, um espaço-tempo $D \times R$, onde D é um disco de contorno S^1.

essa é a lei de Gauss com termo de CS. Vale ressaltar que, se tivéssemos apenas o termo de CS acoplado à corrente, teríamos dinâmica, e a equação análoga à (4.69) seria apenas

$$\mu B = \rho. \tag{4.70}$$

Voltemos novamente para (4.66). Um aspecto bastante interessante dessa equação é que ela fornece uma geração de massa completamente diferente do mecanismo de Higgs. Para visualizarmos isso basta que calculemos o propagador do campo de gauge através de (4.66) com o termo de fixação de gauge, por exemplo o gauge de Lorentz: $\frac{-1}{2\xi e^2}(\partial_\mu A^\mu)^2$, invertendo o termo quadrático do campo no espaço dos momentos. A lagrangeana total é então

$$L = \frac{-1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho - \frac{1}{2\xi e^2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \tag{4.71}$$

A fim de calcularmos o propagador vamos trabalhar com as ações dos termos da lagrangeana. A ação de Maxwell é

$$S_M = \frac{-1}{4e^2}\int d^3x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.72}$$

que nada mais é do que

$$S_M = \frac{-1}{4e^2}\int d^3x\Big(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu\Big). \tag{4.73}$$

Vamos agora manipular os termos da integral separadamente. Notemos primeiramente que

$$\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu = \partial_\mu(A_\nu\partial^\mu A^\nu) - A_\nu\partial_\mu\partial^\mu A^\nu, \tag{4.74}$$

ou ainda

$$\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu = \partial_\mu(A_\nu\partial^\mu A^\nu) - \eta^{\mu\nu}A_\mu\partial_\lambda\partial^\lambda A^\nu. \tag{4.75}$$

O segundo termo fica, pelo mesmo procedimento,

$$\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu = \partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu) - A_\mu\partial^\nu\partial^\mu A_\nu, \tag{4.76}$$

o terceiro e o quarto termo dão resultados iguais ao segundo e ao primeiro, respectivamente. Os termos que são divergências totais desaparecerão sob integração, restando apenas

$$S_M = \frac{-1}{2e^2}\int d^3x A_\mu(-\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda + \partial^\nu\partial^\mu)A_\nu, \tag{4.77}$$

escrevendo a ação no espaço dos momentos[8] temos

$$\tilde{S}_M = \int d^3p\tilde{A}_\mu\Big(\frac{\eta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu}{-2e^2}\Big)\tilde{A}_\nu. \tag{4.78}$$

[8]Para tanto, basta fazermos $\partial_\mu \to -ip_\mu$. Designaremos com tilde a ação e os campos no espaço dos momentos.

Notemos que a matriz entre parênteses é singular e portanto não inversível. No entanto isso não é problema no presente caso pois não pretendemos calcular o propagador somente para o termo de Maxwell. O fato da matriz ter determinante nulo justifica a adição do termo de fixação de gauge. A ação de CS no espaço dos momentos é, por substituição direta,

$$\tilde{S}_{CS} = \int d^3p\tilde{A}_\mu\Big(i\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\rho\nu}p_\rho\Big)\tilde{A}_\nu; \tag{4.79}$$

enquanto que o termo de fixação de gauge resulta em

$$\tilde{S}_{fg} = \int d^2p\tilde{A}_\mu\Big(\frac{-p^\mu p^\nu}{2\xi e^2}\Big)\tilde{A}_\nu. \tag{4.80}$$

Somando todas as ações temos por fim

$$\tilde{S} = \int d^3p\frac{1}{2}\tilde{A}_\mu\Big(\frac{-\eta^{\mu\nu}p^2 + p^\mu p^\nu}{e^2} - \frac{p^\mu p^\nu}{\xi e^2} + i\mu\epsilon^{\mu\rho\nu}p_\rho\Big)\tilde{A}_\nu. \tag{4.81}$$

O inverso do operador entre parênteses resultará no propagador para o campo de gauge. Chamemos o operador encontrado em (4.81) de $O_{\mu\nu}$. Temos então

$$O_{\mu\nu} = \frac{-1}{e^2}\Big(\eta_{\mu\nu}p^2 + \frac{1-\xi}{\xi}p_\mu p_\nu\Big) - i\mu\epsilon_{\mu\nu\rho}p^\rho. \tag{4.82}$$

Para acharmos o propagador, $(O^{-1})^{\mu\nu}$, vamos nos valer do seguinte *ansatz*

$$(O^{-1})^{\alpha\beta} = Ap^\alpha p^\beta + B\eta^{\alpha\beta} + C\epsilon^{\alpha\beta\gamma}p_\gamma, \tag{4.83}$$

motivados por uma possível semelhança entre o operador e seu inverso. Devemos agora achar os coeficientes A, B e C. Neles estará o polo desejado para identificarmos a massa.

Sabemos que

$$O_{\mu\nu}(O^{-1})^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu, \tag{4.84}$$

logo a substituição de (4.82) e (4.83) na equação acima resulta em

$$\begin{aligned} &\frac{-A}{e^2}p^2p_\mu p^\lambda - \frac{A}{e^2}\frac{(1-\xi)}{\xi}p^2p_\mu p^\lambda - \frac{B}{e^2}p^2\delta^\lambda_\mu - \frac{B}{e^2}\frac{(1-\xi)}{\xi}p_\mu p^\lambda \\ - \quad & i\mu B\epsilon_{\mu\nu\alpha}\eta^{\nu\lambda}p^\alpha - \frac{C}{e^2}p^2\eta_{\mu\nu}\epsilon^{\nu\lambda\beta}p_\beta - i\mu C\epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon^{\nu\lambda\beta}p^\alpha p_\beta = \delta^\lambda_\mu, \end{aligned} \tag{4.85}$$

simplificando um pouco mais a expressão acima e lembrando que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon^{\nu\lambda\beta} = \epsilon_{\nu\alpha\mu}\epsilon^{\nu\lambda\beta} = \delta^\lambda_\alpha\delta^\beta_\mu - \delta^\lambda_\mu\delta^\beta_\alpha, \tag{4.86}$$

temos o seguinte sistema

$$-\frac{B}{e^2} + i\mu Cp^2 = 1, \tag{4.87}$$

$$-\frac{C}{e^2} - i\mu B = 0 \tag{4.88}$$

e

$$-\frac{A}{e^2\xi}p^2 - \frac{B}{e^2}\frac{1-\xi}{\xi} - i\mu C = 0. \tag{4.89}$$

Após uma simples álgebra, encontramos os seguintes valores para os coeficientes

$$A = \frac{e^2}{p^2(p^2 - e^4\mu^2)} - \frac{e^2\xi}{p^4}, \tag{4.90}$$

$$B = \frac{-e^2}{p^2 - \mu^2 e^4} \tag{4.91}$$

e

$$C = \frac{i\mu e^4}{p^2(p^2 - \mu^2 e^4)}. \tag{4.92}$$

Por fim, temos então o propagador na forma

$$(O^{-1})^{\mu\nu} = e^2\Big(\frac{p^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} + i\mu e^2 \epsilon^{\mu\nu\gamma}p_\gamma}{p^2(p^2 - \mu^2 e^4)} - \frac{\xi p^\mu p^\nu}{p^4}\Big). \tag{4.93}$$

Como de modo geral o denominador do propagador é colocado na forma $\frac{1}{p^2 - m^2}$ temos que a massa, o pólo do propagador, para o campo de gauge é dada por

$$m_G = \mu e^2. \tag{4.94}$$

Como dito, essa massa não é proveniente do mecanismo de Higgs, sendo portanto gerada de maneira diversa do que vimos anteriormente. Esta é mais uma amostra da riqueza que o termo de CS adiciona à teoria quando acoplado a outros termos. A contagem de graus de liberdade é um pouco diferente do que vimos para teorias com termo de CS e merece ser mencionada. Por exemplo, em uma lagrangeana de uma teoria Chern-Simons-Maxwell-Higgs com um potencial que admite quebra espontânea de simetria e cujo valor no vácuo é diferente de zero, a contagem de graus de liberdade é feita da seguinte maneira: antes da quebra temos dois campos escalares reais e uma excitação massiva do campo de gauge advinda do termo de CS. Após a quebra um campo escalar massivo se acopla a uma componente do campo de gauge formando um campo escalar massivo mais dois campos de gauge massivos. No caso do acoplamento do termo de CS somente com campo de Higgs, com a lagrangeana dada por

$$L_{CSH} = \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu \partial_\nu A_\rho + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|), \tag{4.95}$$

cujo potencial tem as mesmas propriedades do caso anterior[9], a contagem é feita como se segue: antes da quebra temos apenas dois campos escalares massivos (uma

[9]O que não significa mesma ordem.

vez que o campo de gauge não se propaga). Após a quebra um campo escalar se combina com o campo de gauge formando um grau de liberdade, além do outro atribuído ao campo escalar que permanece massivo.

Essa seção destina-se a ser um breve apanhado de algumas características gerais sobre o termo de CS[10]. Veremos agora aspectos gerais de soluções do tipo vórtex, para passo a passo irmos completando nosso entendimento acerca do assunto.

4.3 Soluções do tipo Vórtex

Começaremos agora a analisar os objetos topológicos de maior interesse para o nosso assunto. É comum, na lituretura corrente, a introdução ao vórtex começar com a análise de sólitons unidimensionais e assim partir gradativamente para os vórtex. Entretanto aqui procediremos de maneira diferente, partindo da lagrangeana de Higgs (3.19). O vácuo, como não poderia deixar de ser, continua sendo dado por (3.6). As equações de movimento para os campos ϕ e A_μ são respectivamente

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^*} - D^\mu \frac{\partial L}{\partial (D^\mu \phi^*)} = 0, \tag{4.96}$$

onde $D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ e

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0. \tag{4.97}$$

A equação (4.96) nos leva diretamente a

$$D^\mu (D_\mu \phi) = -m^2 \phi - 2\lambda \phi |\phi|^2. \tag{4.98}$$

Para facilitar o cálculo da outra equação de movimento vamos abrir os termos de (3.19)

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + ieA_\mu \phi \partial^\mu \phi^* \\ &+ e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 + V(\phi) \, . \end{aligned} \tag{4.99}$$

Assim temos,

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} = ie(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) + 2e^2 A_\mu |\phi|^2, \tag{4.100}$$

[10]Para o leitor interessado em mais aspectos das teorias com CS recomendamos o artigo: *Chern-Simons Terms as an Example of the Relations Between Mathematics and Physics*, S. Deser, arXiv:math-ph/9805020 v2 26 May 1998. Sou grato ao amigo Carlos Mafra por me indicar este e outros artigos a respeito do assunto.

o outro termo de (4.97) fica

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4}\frac{\partial(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = F^{\mu\nu}. \tag{4.101}$$

Assim a equação de movimento é

$$ie(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + 2e^2A_\mu|\phi|^2 = \partial^\nu F_{\mu\nu}. \tag{4.102}$$

Vamos tratar o problema em três dimensões com simetria cilíndrica em torno do eixo z. A forma dos campos deve ser dada pelas equações de movimento. Olharemos para o campo ϕ na forma

$$\phi = \chi(r)\exp(i\alpha\theta), \tag{4.103}$$

com $\chi(r) \to 0$ se $r \to 0$ e $\chi(r) \to a$ para $r \to \infty$. O campo vetorial será tal que $A_r = 0$ e $A_\theta = A(r) = A$.

A princípio, o parâmetro α em (4.103) pode ter qualquer valor arbitrário. Entretando, o campo deve ser contínuo para qualquer valor de r e θ. A forma do campo com relação a r é dada por χ com os valores assintóticos supracitados e sua continuidade deve ser garantida quando acharmos sua forma a partir da equação de movimento. Para θ podemos achar uma condição que garanta sua continuidade exigindo que

$$\phi(\theta + 2\pi) = \phi(\theta), \tag{4.104}$$

o que nos leva a

$$\exp(i\alpha 2\pi) = 1; \tag{4.105}$$

logo

$$\alpha \equiv n \in Z. \tag{4.106}$$

Assim o campo escalar tem a forma

$$\phi = \chi(r)\exp(in\theta). \tag{4.107}$$

Abrindo os termos da derivada covariante em (4.98), temos

$$D^\mu(D_\mu\phi) = [(\partial^0 + ieA^0)(\partial_0 + ieA_0) - (\partial^i + ieA^i)(\partial_i + ieA_i)]\phi, \tag{4.108}$$

como estamos interessados em uma configuração estática do campo e o potencial escalar é nulo no modelo de Higgs abeliano ficamos com

$$D^\mu(D_\mu\phi) = -(\partial_i^2 + ie\partial_i A_i + ieA_i\partial_i - e^2A_i^2)\phi. \tag{4.109}$$

Portanto a equação (4.98) com o campo escalar na forma (4.107) fornece

$$(\partial_i^2 + ie\partial_i A_i + ieA_i\partial_i - e^2 A_i^2)\chi \exp(in\theta) - (m^2 + 2\lambda\chi^2)\exp(in\theta) = 0. \qquad (4.110)$$

Ao abrirmos a equação acima em suas componentes temos, uma vez que $A_r = 0$ e A_θ só tem dependência em r

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d}{dr}\Big)\Big)\chi\exp(in\theta) + \Big(\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{ieA}{r}\frac{d}{d\theta} - e^2A^2\Big)\chi\exp(in\theta) \\ - \quad &(m^2 + 2\lambda\chi^2)\chi\exp(in\theta) = 0 \end{aligned} \qquad (4.111)$$

o que nos leva a

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\chi}{dr}\Big) - \frac{\chi n^2}{r^2} - \frac{2enA}{r}\chi - (m^2 + 2\lambda\chi^2)\chi = 0, \qquad (4.112)$$

ou de um modo mais adequado

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\chi}{dr}\Big) - \Big(\Big(\frac{n}{r} + eA\Big)^2 + m^2 + 2\lambda\chi^2\Big)\chi = 0. \qquad (4.113)$$

Tomando agora a componente θ de (4.102) temos

$$\begin{aligned} &ie\Big(\frac{\chi}{r}\exp(in\theta)\partial_\theta(\chi\exp(in\theta)) - \frac{\chi}{r}\exp(-in\theta)\partial_\theta(\chi\exp(in\theta))\Big) + 2e^2A\chi^2 \\ = \quad &\partial_i(\epsilon_{\theta ij}B_j), \end{aligned} \qquad (4.114)$$

como $B \rightarrow B_z$ a equação fica

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA)\Big) - 2e\Big(\frac{n}{r} + eA\Big)\chi^2 = 0. \qquad (4.115)$$

Temos então um par de equações diferenciais acopladas (4.113) e (4.115). Com efeito, não estamos aptos a resolver tal sistema analiticamente sem alguma aproximação adicional[11]. Entretanto pode-se mostrar [22] que no limite $r \rightarrow \infty$ temos a seguinte solução para o potencial vetorial:

$$A = -\frac{n}{er} - \frac{c}{e}K_1(|e|ar) \qquad (4.116)$$

onde K_1 é a função de Bessel modificada e c uma constante de intregração.

Para obter a variação de χ fazemos $\chi = a + \rho(r)$, e assim

$$\rho(r) = \exp(-\sqrt{-m^2}r). \qquad (4.117)$$

Repare que estas soluções são de fato estáveis, isto é, possuem uma forma compacta no infinito. Não devemos a esta altura nos espantar com o fato dessa

[11]No artigo de H. J. Vega e F. A. Schaposnik, *Phys. Rev.* **D14** 1100 (1976), é achada uma solução analítica quando as constantes de acoplamento obedecem uma relação particular. Como, no entanto, estamos interessados nos aspectos físicos gerais vamos nos ater a nossa discussão.

$(1+1)-D$	$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$
$(2+1)-D$	$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha$
$(3+1)-D$	$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu B_{\alpha\beta}$
$(n+1)-D$	$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu_1\ldots\nu_n}\partial_{\nu_1} A_{\nu_2\ldots\nu_n}$

Tabela 4.1: correntes topológicas em diferentes dimensões

estabilidade ter sua razão na topologia. A lagrangeana (3.19) é invariante sob o grupo $U(1)$, o grupo de gauge do eletromagnetismo. O campo ϕ quando escrito na forma (4.107) é uma representação de $U(1)$. Perceba que o fato de trabalharmos com o campo nessa forma faz toda diferença pois do contrário acharíamos soluções (sempre que possíveis) outras que não as dadas por (4.116) e (4.117). O campo ϕ define um mapeamento do espaço do grupo S^1 no espaço físico S^1:

$$\phi : S^1 \longrightarrow S^1. \tag{4.118}$$

A exemplo do que ocorria no caso do monopolo de 't Hooft-Polyakov, este mapeamento também é especificado por um inteiro n. Assim, nossas configurações do campo são estáveis, uma vez que não podem ser continuamente deformadas umas nas outras. Em linguagem um pouco mais técnica, o espaço não é simplesmente conexo pois o primeiro grupo de homotopia de S^1 (espaço do grupo de gauge da teoria) é não trivial:

$$\pi(S^1) = Z. \tag{4.119}$$

Em termos gerais, dizemos que as correntes conservadas em teorias de gauge são de dois tipos, a saber: as advindas do teorema de Noether e as ditas topológicas. Podemos definir correntes conservadas em teorias de diferentes dimensões de maneira muito simples, como nos mostra a tabela 4.1.

É bastante fácil ver que qualquer corrente definida na forma das correntes da tabela 4.1 tem como propriedade $\partial_\mu J^\mu = 0$, isto é, é uma corrente conservada. Entretanto vamos mostrar isto explicitamente para uma dimensão n qualquer. Então, partindo da última corrente da tabela temos

$$\partial_\mu J^\mu = \epsilon^{\mu\nu_1\ldots\nu_n}\partial_\mu\partial_{\nu_1} A_{\nu_2\ldots\nu_n}. \tag{4.120}$$

Agora note que $\partial_\mu\partial_{\nu_1}$ é completamente simétrico pela troca de μ e ν_1, enquanto que ϵ é completamente anti-simétrico pela troca de quaisquer dois índices, em particular de μ e ν_1. Assim quando da contração teremos um resultado nulo, logo

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{4.121}$$

para qualquer dimensão, dada a corrente como definida na tabela 4.1. Resta-nos agora justificar o adjetivo topológica. Concentrar-nos-emos na corrente definida em $(2+1)-D$. Dizemos que tal termo é topológico porque não depende da métrica, estando, assim, relacionado à geometria do sistema em um nível mais profundo, isto é, topológico. É lícito tentarmos colocar uma dependência da métrica na corrente, porém note que

$$\epsilon_{\lambda\gamma\xi}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\gamma}\eta^{\alpha\xi} = \epsilon^{\mu\nu\alpha}|det\eta| = \epsilon^{\mu\nu\alpha}; \tag{4.122}$$

assim, de fato, tal termo independe da métrica.

Podemos achar agora, de modo simples, a carga conservada[12] relacionada a corrente topológica. Partindo de (4.121) temos

$$\partial_0 J_0 = \nabla \cdot \mathbf{J}. \tag{4.123}$$

Integrando toda a equação em um volume ficamos com

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_v J^0 dv = 0 \tag{4.124}$$

pelo teorema da divergência. Para o caso de $(2+1)D$ a carga conservada é simplesmente

$$Q = \int d^2x\epsilon^{ij}\partial_i A_j. \tag{4.125}$$

A fim de encerrar esta seção vamos nos voltar para o conceito de vorticidade[13] em um modelo simples e de fácil visualização. Vamos trabalhar com o grupo $U(1)$ em um espaço euclideano de duas dimensões E^2 e A_μ sendo o potencial vetorial usual tal que

$$A_\mu = g\partial g^{-1}, \tag{4.126}$$

onde g é uma função de E^2 no espaço do grupo (S^1). Olhemos para g na forma $g = \exp(in\theta)$ onde $n \in Z$ é a vorticidade. A vorticidade expressa o número de vezes que S^1 é circulado quando uma volta é dada em E^2. Repare que já nos encontramos com a vorticidade antes imersa em outros conceitos de modo que aqui focaremos nossa atenção nela na tentativa de melhorar nosso entendimento sobre esse importante conceito dirimindo, eventualmente, alguma dúvida residual.

A vorticidade como definida anteriormente é dada pela equação

$$n = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta g\frac{dg^{-1}}{d\theta}. \tag{4.127}$$

[12] Obviamente carga aqui tem um sentido mais amplo do que puramente elétrica.

[13] Correntemente na literatura é dado à vorticidade o nome *winding number*.

Esta equação é facilmente verificada por substituição direta. A vorticidade é invariante sob tranformações contínuas. Vamos provar esta afirmação demonstrando invariância sob transformações infinitesimais posto que isto é suficiente. Uma deformação infinitesimal em g é expressa na forma

$$\delta g = i(\delta\lambda)g, \tag{4.128}$$

com $\delta\lambda \in R$ em S^1. Assim

$$\delta\Big(g\frac{dg^{-1}}{d\theta}\Big) = g\delta\Big(\frac{dg^{-1}}{d\theta}\Big) + \delta g\Big(\frac{dg^{-1}}{d\theta}\Big), \tag{4.129}$$

que nada mais é do que

$$\delta g = (-in)(g(\delta g^{-1}) + (\delta g)g^{-1}) = (-in)\delta(gg^{-1}) = 0. \tag{4.130}$$

Mostramos então que a vorticidade é univocamente definida, o que mais uma vez nos remete à discussão feita na página 38. Lá, a vorticidade determinava uma configuração de campo única e estável, uma vez que não podia ser continuamente deformada em outra qualquer, o que está de pleno acordo com o que vimos aqui. Na realidade, estamos apenas olhando o mesma situação de um outro viés.

Agora vamos definir

$$G_\mu = \frac{i}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu}A_\nu. \tag{4.131}$$

Calculemos a seguinte quantidade no limite $r \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} rd\theta\hat{r}_\mu G_\mu = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} rd\theta\epsilon_{\mu\nu}\hat{r}_\mu A_\nu. \tag{4.132}$$

Uma vez que $\epsilon_{\mu\nu}\hat{r}_\mu A_\nu = |\hat{e}_r|A_\theta - |\hat{e}_\theta|A_r = A_\theta$ ficamos com

$$\int_0^{2\pi} rd\theta\hat{r}_\mu G_\mu = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} rd\theta g\frac{1}{r}\frac{dg^{-1}}{d\theta} = n. \tag{4.133}$$

Por fim, pelo teorema de Gauss

$$n = \int d^2x\epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu. \tag{4.134}$$

Analisando essa última equação em comparação com (4.125) vemos que a carga conservada em teorias topológicas em $(2+1)D$ será igual à vorticidade a menos de constantes.

Aqui encerramos este capítulo.[14] Estando munidos destes conceitos podemos introduzir o mecanismo de Bogomol'nyi bem como ao modelo de Higgs abeliano com

[14]Para um aprofundamento da discussão sobre o *winding number* em outros grupos de gauge ver: S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, capítulo 7.

o termo topológico de Chern-Simons. De um modo bastante geral acabamos, por assim dizer, uma etapa considerável de estabelecimento do corpo teórico. Daqui pra frente iremos nos deparar com engenhosas e atraentes manipulações dos conceitos até aqui abordados.

Capítulo 5

Mecanismo de Bogomol'nyi

Aqui apresentaremos uma introdução [4] ao mecanismo de saturação de energia de Bogomol'nyi chegando a uma interessante correlação entre a energia mínima de um sistema que apresenta soluções do tipo vórtex e a vorticidade, dadas condições de contorno não triviais para os campos. Estaremos também interessados na estabilidade das soluções de vórtex além de outros benefícios que esse mecanismo oferece. De início começaremos com um modelo mais simples, de modo a padronizar o método, e então olharemos mais de perto para as soluções de vórtex.

Como ponto de partida, então, vamos analisar um modelo unidimensional consideravelmente simples mas que nos será de grande valia. Seja a lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}\Big(\frac{d\varphi}{dx}\Big)^2 - \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 - F^2)^2. \tag{5.1}$$

A equação de movimento nos leva diretamente a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2\lambda(F^2 - \varphi^2)\varphi \tag{5.2}$$

e o funcional de energia é dado por

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{d\varphi}{dx}\Big)^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 - F^2)^2\Big] dx. \tag{5.3}$$

Note que tal sistema pode modelar, por exemplo, um oscilador massa-mola com constante elástica λ e amplitude máxima F. Vamos sujeitar a função $\varphi(x)$ às condições de contorno dadas na tabela 5.1.

$\varphi(x) \to F$	$x \to +\infty$
$\varphi(x) \to -F$	$x \to -\infty$

Tabela 5.1: condições de contorno para φ.

Nossa tática agora será trabalhar a expressão do funcional de energia antes mesmo de resolver a equação de movimento (o que de fato não é nosso intuito). Começemos por reescrever (5.3) na seguinte forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{d\varphi}{dx} + \sqrt{\lambda}(\varphi^2 - F^2)^2\Big)^2 - \sqrt{\lambda}\frac{d\varphi}{dx}(\varphi^2 - F^2)\Big]. \tag{5.4}$$

O segundo termo pode ser reescrito de sorte que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{\frac{1}{2}\Big[\frac{d\varphi}{dx} + \sqrt{\lambda}(\varphi^2 - F^2)^2\Big]^2 + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{d\varphi}\Big[-\sqrt{\lambda}\Big(\frac{\varphi^3}{3} - F^2\varphi\Big)\Big]\Big\}dx, \tag{5.5}$$

o que nos leva a

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{d\varphi}{dx} + \sqrt{\lambda}(\varphi^2 - F^2)^2\Big]^2 dx + \Big\{-\sqrt{\lambda}\Big(\frac{\varphi^3}{3} - F^2\varphi\Big)\Big\}\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{5.6}$$

O segundo termo desta equação fornece

$$\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}F^2[\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)], \tag{5.7}$$

que nada mais é do que a carga topológica conservada no caso de duas dimensões. Podemos ver isso facilmente partindo do primeiro termo da tabela 4.1, basta realizarmos uma integral semelhante a (4.125) em uma dimensão. Assim temos como resultado final

$$E = \frac{2}{3}\sqrt{\lambda}F^2|Q| + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{d\varphi}{dx} + \sqrt{\lambda}(\varphi^2 - F^2)^2\Big]^2 dx \tag{5.8}$$

obviamente para as condições de contorno dadas na tabela 5.1, $Q = 2F$.

Este simples modelo nos revela propriedades muito interessantes. Primeiramente vemos que a energia é proporcional à carga topológica e além disso, temos uma soma de parcelas positivas, logo o sistema tem um mínimo de energia. Outra benéfice do modelo é que para obtermos a solução de energia mínima não precisamos resolver a equação de Euler-Lagrange (de segunda ordem), basta que

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\lambda}(F^2 - \varphi^2)^2, \tag{5.9}$$

que é uma equação de primeira ordem. Por fim, vemos que a estabilidade das soluções obtidas a partir da equação acima, digamos $\varphi_0(x)$, está assegurada pois, para uma perturbação do tipo $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \eta\bar{\varphi}(x)$ teremos que $\varphi(x)$ será uma solução com a mesma energia para $\eta << 1$ se $\frac{d\bar{\varphi}}{dx} = -2\sqrt{\lambda}\varphi_0\bar{\varphi}$ como podemos facilmente inferir substituindo a solução perturbada em (5.9).

Tendo agora conhecimento do modo como procediremos podemos aplicar estas idéias a um modelo um pouco mais elaborado como o da linha de vórtex. O funcional de energia[1] é dado por

$$E = \int \left\{ \frac{1}{4} F_{mn}^2 + \frac{1}{2} (D_m \phi_a)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_a \phi_a - F^2)^2 \right\} d^2x, \tag{5.10}$$

onde $a, m, n = 1, 2$; ϕ_a representa as partes reais do campo escalar; $D_m \phi_a = \partial_m \phi_a + e\epsilon_{ab} A_m \phi_b$; $A_r \rightarrow 0$ e $A_\theta \rightarrow \frac{n}{er}$ com $r \rightarrow \infty$ e neste mesmo limite para r a forma complexa do campo escalar é dada como em (4.107). Agora estabelecemos completemente nosso sistema. No que se segue faremos uma série de transformações nos campos e nas coordenadas antes de trabalharmos mais a fundo o funcional de energia. Tomemos $\phi_a = FQ_a$, $A_m = \frac{F}{\sqrt{2}} v_m$ e $x_m = \frac{\sqrt{2}}{eF} y_m$, tais mudanças nos levam a

$$\partial_m \longrightarrow \frac{eF}{\sqrt{2}} \partial_m, \tag{5.11}$$

$$F_{mn} = \frac{eF^2}{2} (\partial_m v_n - \partial_n v_m) \equiv \frac{eF^2}{2} f_{mn}, \tag{5.12}$$

$$D_m \phi_a = \frac{eF^2}{\sqrt{2}} D_m Q_a, \tag{5.13}$$

e finalmente

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (y_1, y_2) \Longrightarrow d^2x = \frac{2}{e^2 F^2} d^2y. \tag{5.14}$$

Com essas transformações a equação (5.10) fica

$$E = \frac{F^2}{2} \int \left\{ \frac{1}{4} f_{mn}^2 + (D_m Q_a)^2 + \frac{\lambda}{e^2} (Q_a Q_a - 1)^2 \right\} d^2y. \tag{5.15}$$

Lembremo-nos agora da equação obtida após a quebra espontânea de simetria da lagrangeana de Higgs. As massas dos campos escalar (m_e^2) e vetorial (m_v^2) são dadas por $2\lambda F^2$ e $e^2 F^2$, respectivamente. Assim, rearranjando o funcional de energia ficamos com

$$E = \frac{m_v^2}{4\alpha} \varepsilon, \tag{5.16}$$

onde

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{1}{4} f_{mn}^2 + (D_m Q_a)^2 + \frac{\beta}{2} (Q_a Q_a - 1)^2 \right\} d^2y, \tag{5.17}$$

sendo $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ e $\beta = \frac{2\lambda}{e^2} = \frac{m_e^2}{m_v^2}$.

Nossos esforços agora concentrar-se-ão na tentativa de completar o quadrado do funcional de energia; note que o procedimento geral é o mesmo que usamos no exemplo anterior, isto é, dado um funcional de energia adequado, procuramos uma maneira de completar o quadrado a fim de termos um mínimo de energia quando

[1] Obtido de uma lagrangeana do tipo (3.19) não abeliana e com potencial adequado.

o sistema obedece certas equações que surgem da nossa manipulação algébrica da equação da energia. Mais a frente daremos a este tipo de equações o nome de auto-duais.

Observemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(f_{mn} - \epsilon_{mn}(1 - Q_a Q_a))^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{mn} D_n Q_a + \epsilon_{ab} D_m Q_b)^2 + \frac{\beta - 1}{2}(Q_a Q_a - 1)^2 \\ + & \{\frac{1}{2} f_{nm} \epsilon_{mn}(1 - Q_a Q_a) - \epsilon_{mn}\epsilon_{ab} D_n Q_a D_m Q_b\} \ . \end{aligned} \tag{5.18}$$

Abrindo estes termos e lembrando que

$$\epsilon_{mn}\epsilon^{mn} = \epsilon_{1n}\epsilon^{1n} + \epsilon_{2n}\epsilon^{2n} = 2, \tag{5.19}$$

e

$$\epsilon_{mn}\epsilon^{mi} = \epsilon_{1n}\epsilon^{1i} + \epsilon_{2n}\epsilon^{2i} = \delta_n^i, \tag{5.20}$$

temos exatamente a expressão para ε a menos de $1/2\pi$. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2\pi}\int d^2y \Big\{ \frac{1}{4}(f_{mn} - \epsilon_{mn}(1 - Q_a Q_a))^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{mn} D_n Q_a + \epsilon_{ab} D_m Q_b)^2 \\ &+ \frac{\beta - 1}{2}(Q_a Q_a - 1)^2 + \{\frac{1}{2} f_{nm}\epsilon_{mn}(1 - Q_a Q_a) \\ &- \epsilon_{mn}\epsilon_{ab} D_n Q_a D_m Q_b\}\Big\}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Entretanto, o último termo da integral pode, e isso não é de modo algum trivial, ser escrito como a divergência de um vetor. Com efeito, para

$$S_p = \epsilon_{pm}(Q_a D_m Q_b \epsilon_{ab} + v_m) \tag{5.22}$$

temos que

$$\partial_p S_p = \partial_p\{\epsilon_{pm}\epsilon_{ab} Q_a \partial_m Q_b + \epsilon_{pm} v_m (1 - Q_a Q_a)\} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} \partial_p S_p &= \epsilon_{pm}\epsilon_{ab}\{\partial_p Q_a \partial_m Q_b + Q_a \partial_p \partial_m Q_b\} + \epsilon_{pm}\{\partial_p v_m (1 - Q_a Q_a) \\ &+ v_m \partial_p (1 - Q_a Q_a)\} \ . \end{aligned} \tag{5.24}$$

Continuando a desenvolver este cálculo, nada além de simples álgebra, chegamos a

$$\partial_p S_p = \frac{1}{2}\epsilon_{mn} f_{mn}(1 - Q_a Q_a) - \epsilon_{mn}\epsilon_{ab}\partial_n Q_a \partial_m Q_b + 2\epsilon_{mn}\partial_n Q_a v_m Q_a. \tag{5.25}$$

Agora note que

$$-\epsilon_{mn}\epsilon_{ab} D_n Q_a D_m Q_b = -\epsilon_{mn}\epsilon_{ab}\partial_n Q_a \partial_m Q_b + 2\epsilon_{mn}\partial_n Q_a v_m Q_a \tag{5.26}$$

e portanto

$$\partial_p S_p = \frac{1}{2} f_{nm}\epsilon_{mn}(1 - Q_a Q_a) - \epsilon_{mn}\epsilon_{ab} D_n Q_a D_m Q_b, \tag{5.27}$$

$$
\begin{array}{cc}
Q_1 = \cos(n\theta)s(r) & Q_2 = \sin(n\theta)s(r) \\
v_\theta = \frac{n}{r}v(r) & v_r = 0
\end{array}
$$

Tabela 5.2: forma das soluções do sistema.

como havíamos dito. Assim, nos é lícito escrever o funcional de energia como

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{2\pi}\int d^2y\Big\{\frac{1}{4}[f_{mn} - \epsilon_{mn}(1 - Q_aQ_a)]^2 + \frac{1}{2}[\epsilon_{mn}D_nQ_a + \epsilon_{ab}D_mQ_b]^2 \\
&+ \frac{\beta - 1}{2}(Q_aQ_a - 1)^2\Big\} + \frac{1}{2\pi}\int d^2y\partial_pS_p \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

e o segundo termo da energia fornece o que vinhamos procurando, tendo em mente o exemplo anterior, pois ele nada mais é do que a vorticidade n[2]. Portanto ficamos com

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n = n + \frac{1}{2\pi}\int d^2y\Big\{\frac{1}{4}[f_{mn} - \epsilon_{mn}(1 - Q_aQ_a)]^2 + \frac{1}{2}[\epsilon_{mn}D_nQ_a \\
+ \epsilon_{ab}D_mQ_b]^2 + \frac{\beta - 1}{2}(Q_aQ_a - 1)^2\Big\}. \qquad (5.29)
\end{aligned}
$$

Para obtermos as soluções que levam o sistema para o estado de mais baixa energia basta que o integrando acima seja zero.

Como tal integral é formada por somas de parcelas quadradas temos o valor mínimo para ε_n, para $\beta = 1$ quando os campos satisfazem

$$
f_{mn} = \epsilon_{mn}(1 - Q_aQ_a) \qquad (5.30)
$$

e

$$
\epsilon_{mn}D_nQ_a + \epsilon_{ab}D_mQ_b = 0. \qquad (5.31)
$$

É importante salientar que $\beta = 1$ corresponde ao valor $1/\sqrt{2}$ do parâmetro que distingue supercondutores do tipo I (com o parâmetro $< 1/\sqrt{2}$) de supercondutores do tipo II (com o parâmetro $> 1/\sqrt{2}$)[3]. Para as equações (5.30) e (5.31) vamos olhar para soluções do tipo dado na tabela acima, onde r e θ são coordenadas polares no plano y_1, y_2.

Então, substituindo as equações da tabela obtemos o seguinte sistema de equações para $s(r)$ e $v(r)$:

$$
\frac{dv}{dr} = \frac{r}{n}(1 - s^2) \qquad (5.32)
$$

[2]A integral aqui é semelhante à da carga conservada em (4.41). Uma maneira mais simples de enxergar esse resultado é trabalhando com o campo escalar na forma complexa. Sou grato ao amigo Geová Maciel por me esclarecer esse ponto.

[3]Para uma revisão sobre supercondutividade ver Apêndice A.

e

$$\frac{ds}{dr} = \frac{n}{r}(1 - v)s. \tag{5.33}$$

Pode-se mostrar que esse sistema de equações diferenciais acopladas possuem solução para condições de contorno $s(r) = v(r) = 1$ com $r \to \infty$ e $s(r) = v(r) = 1$ com $r \to 0$. Estamos mais interessados, por hora, na estabilidade de nossas soluções. Ou melhor dizendo, avaliaremos uma possível mudança no funcional de energia após uma pequena variação nas soluções. Para tanto tomemos Q_1 e Q_2 com $S(r,\theta)$ no lugar de $s(r)$, onde

$$S(r,\theta) = s(r) + \eta\bar{s}(r,\theta) \tag{5.34}$$

e $v_\theta = \frac{n}{r}V(r,\theta)$ além de $v_r = W(r,\theta)$ sendo

$$V(r,\theta) = v(r) + \eta\bar{v}(r,\theta) \tag{5.35}$$

e

$$W(r,\theta) = \eta\bar{w}(r,\theta) \tag{5.36}$$

com $\eta << 1$. Substituindo o conjunto de equações acima na equação (5.17), chegamos a

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon \; &= \; \frac{\eta^2}{2\pi}\int d^2y\Big\{\frac{1}{2r^2}\Big(n\frac{\partial\bar{v}}{\partial r} - \frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\theta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\theta}\Big)^2 + s^2\bar{w}^2 \\ &+ \; \frac{n^2}{r^2}[\bar{s}^2(1-v)^2 + s^2\bar{v}^2 + 4\bar{v}\bar{s}s(1-v)] + \beta(3s^2-1)\bar{s}^2\Big\}, \end{aligned} \tag{5.37}$$

onde $\delta\varepsilon$ é a diferença de energia entre a solução perturbada e a exata. Temos então uma equação para a diferença de energia proporcional a η^2, sendo assim um termo passível de ser desprezado. No que tange ao mecanismo de Bogomol'nyi ficaremos por aqui pois da prolixidade é costumaz gerar-se o fastio. Tudo o que vimos nos dá uma boa idéia sobre este tópico de modo que podemos agora tratar de vórtex carregados e, depois, aplicarmos este mecanismo em alguns interessantes casos.

Capítulo 6

Vórtex Carregados em $(2+1)-D$

É conhecido o fato de que as equações de Ginzburg-Landau[1] para a supercondutividade assim como o modelo de Higgs abeliano em $(2+1)-D$ admitem soluções do tipo vórtex de energia finita. Em particular, tratamos aqui da lagrangeana de Higgs e estudamos suas soluções do tipo vórtex, bem como sua estabilidade. Foi demonstrado por Julia e Zee em 1975 que tais vórtex são eletricamente neutros, isto é, o modelo de Higgs abeliano não admite vórtex carregados de energia finita [23].

Neste capítulo mostraremos que ao adicionarmos um termo de Chern-Simons, ao qual aliás já estamos familiarizados, à lagrangeana do modelo de Higgs abeliano com um potencial adequado encontramos vórtex carregados.

Partiremos da seguinte lagrangeana:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - C_4\Big(|\phi|^2 - \frac{C_2}{2C_4}\Big)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde C_2 e C_4 são constantes adimensionais. Com o potencial dado na forma em que se encontra em (6.1), teremos soluções topológicas advindas da não trivialidade do vácuo da teoria, uma vez que o valor do campo que minimiza o potencial é não nulo. Podemos melhor visualizar essa situação com o auxílio da Figura **??** que mostra o comportamento do potencial com relação ao campo.

Tomaremos como configuração para os campos o *ansatz* de n-vórtex[2]:

$$\mathbf{A}(\rho) = -\hat{e}_\theta\frac{A(\rho)}{\rho}; \tag{6.2}$$

[1] Novamente remetemos o leitor interessado ao Apêndice A.

[2] Aqui tomaremos a decomposição polar em termos de ρ, ao invés de r. Obviamente isso em nada muda a análise.

$$A_0(\rho) = A_0(\rho); \tag{6.3}$$

$$\phi(\rho) = f(\rho)\exp(in\theta). \tag{6.4}$$

Agora estabeleceremos condições de contorno apropriadas para soluções com energia finita. Para $\rho \to \infty$:

$$f(\rho) = \Big(\frac{C_2}{2C_4}\Big)^{1/2}; \tag{6.5}$$

$$A(\rho) = -\frac{n}{e}; \tag{6.6}$$

$$A_0(\rho) = 0. \tag{6.7}$$

Enquanto que para $\rho \to 0$:

$$A_0(\rho) = A(\rho) = f(\rho) = 0. \tag{6.8}$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange em (6.1) e lembrando que $\nabla_\theta \phi = \frac{1}{\rho}(inf\exp(in\theta))\hat{\theta}$ para a configuração dada no *ansatz*, temos as seguintes equações de movimento (o cálculo é completamente análogo ao feito na seção 4.3):

$$\frac{d^2A}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dA}{d\rho} - ef^2(n+eA) = \mu\rho\frac{dA_0}{d\rho}, \tag{6.9}$$

$$\frac{d^2A_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dA_0}{d\rho} - e^2A_0f^2 = \frac{\mu}{\rho}\frac{dA}{d\rho}, \tag{6.10}$$

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \Big(\frac{f}{\rho^2}\Big)(n+eA)^2 + e^2A_0^2f + 2C_2f - 4C_4f^3 = 0. \tag{6.11}$$

Repare que, no limite $A_0 = 0$ e $\mu = 0$, recuperamos o modelo de Higgs abeliano. Daqui pra frente tomaremos $\mu > 0$. Note que, da equação (6.10) se μ for diferente de zero A_0 também deve obrigatoriamente o ser.

A carga conservada é dada por

$$\bar{Q} = \int_{S^1} \epsilon^{ij}\partial_i A_j d^2x = \int_{\partial S^1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_{S^1} A_\theta \rho d\theta = \frac{2\pi n}{e}. \tag{6.12}$$

Repare que a carga conservada nada mais é do que o fluxo magnético, ou seja, $\bar{Q} = \Theta$.

Integrando ambos os lados de (6.10), temos

$$\int_{S^1}\Big(\frac{d^2A_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dA_0}{d\rho}\Big)d^2x - \int_{S^1} e^2A_0f^2d^2x = -\mu\Theta. \tag{6.13}$$

Mas notemos que

$$\int_{S^1}\Big(\frac{d^2A_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dA_0}{d\rho}\Big)d^2x \tag{6.14}$$

é proporcional a

$$\int_{S^1}\Big(\rho\frac{d^2A_0}{d\rho^2}+\frac{dA_0}{d\rho}\Big)d\rho=\int_{S^1}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho\frac{dA_0}{d\rho}\Big)d\rho=\rho\frac{dA_0}{d\rho}\mid_{\rho\to\infty}\longrightarrow 0. \tag{6.15}$$

Aqui assumimos que tanto A_0 quanto $dA_0/d\rho$ vão a zero mais rapidamente que ρ vai a infinito, o que de modo algum pode nos causar espécie pois A_0 advém de um funcional e portanto não só ele mesmo mas também sua primeira derivada devem ir a zero mais rápido que qualquer potência de ρ. Assim, a integração nos leva a

$$\int_{S^1} e^2A_0f^2d^2x=\mu\Theta. \tag{6.16}$$

O parâmetro μ é a massa (topológica) do campo vetorial obtida através do mecanismo de Higgs. Em unidades naturais a dimensão de μ é e^2 e uma vez que a dimensão do fluxo magnético é $1/e$, temos

$$\int_{S^1} e^2A_0f^2d^2x=Q \tag{6.17}$$

e, portanto

$$Q=\mu\Theta=\mu\frac{2\pi}{e}n. \tag{6.18}$$

Então temos vórtex carregados cuja carga é quantizada e proporcional ao fluxo magnético. O conjunto de equações de (6.9) a (6.11) não possui soluções analíticas, entretanto pode-se mostrar que assintoticamente os campos (de gauge e de Higgs) têm valores aproximadamente exponenciais [5]. De fato, na última seção da dissertação resolvemos este problema em uma determinada aproximação sem o auxílio de cálculo numérico.

Para $\rho\to\infty$ temos

$$A(\rho)\longrightarrow -\frac{n}{e}+\alpha_{\pm}\sqrt{\rho}\exp(-\mu_{\mp}\rho)+\ldots, \tag{6.19}$$

$$A_0(\rho)\longrightarrow 0\pm\frac{1}{\sqrt{\rho}}\alpha_{\mp}\exp(\mu_{\mp})\rho+\ldots, \tag{6.20}$$

$$f(\rho)\longrightarrow\Big(\frac{C_2}{2C_4}\Big)^{1/2}+e\beta_{\mp}\exp(-m_s\rho)+\ldots. \tag{6.21}$$

Onde $\alpha\pm$ e $\beta\pm$ são constantes adimensionais, $m_s=\sqrt{4C_2}$ a massa da partícula escalar no mecanismo de Higgs e $\mu_{\pm}=(\mu^2/4+e^2C_2/2C_4)^{1/2}\pm\mu/2$.

Para $\rho\longrightarrow 0$, temos as seguintes soluções

$$A(\rho)\longrightarrow\gamma\rho^2+O(\rho^4), \tag{6.22}$$

$$A_0\longrightarrow\frac{\mu\gamma}{2}\rho^2+O(\rho^4), \tag{6.23}$$

$$f(\rho) \longrightarrow \sigma\rho|n| + O(\rho^{|n|+2}), \tag{6.24}$$

sendo γ e σ constantes. Assim, obtemos duas soluções do tipo n-vórtex (para $\rho \to \infty$ e $\rho \to 0$). O fato de que a adição do termo de Chern-Simons favorece esse tipo de solução é entendido como uma consequência natural de sua proporcionalidade ao campo magnético.

Este breve capítulo encontra-se já em seu final pois já chegamos ao nosso esperado resultado do vórtex carregados em Higgs abeliano com Chern-Simons. Entretanto, a título de ou completeza, vamos citar mais duas características interessantes deste modelo. A isto se destinam as próximas linhas.

Através do mecanismo de Bogomol'nyi podemos e, de fato, vamos mostrar que o funcional de energia para esta solução de n-vórtex tem a seguinte propriedade

$$\varepsilon \geq \frac{\pi C_2}{2C_4}|n| \tag{6.25}$$

se $\frac{8C_4}{e^2} \geq 1$ e

$$\varepsilon \geq \frac{8C_4}{e^2}\frac{\pi C_2}{2C_4}|n| \tag{6.26}$$

se $\frac{8C_4}{e^2} \leq 1$. Tendo o sistema portanto um mínimo de energia.

Outra interessante propriedade do modelo é a quantização (ou discretização) do momento angular. Através de

$$J = \frac{1}{2}\int d^2x \epsilon^{ij} x^i T^{0j} \tag{6.27}$$

temos que o momento angular se reduz a

$$J = -\frac{nQ}{4e} - \frac{\mu}{2}\int_0^\infty d^2x A_0^2(\rho) \tag{6.28}$$

onde Q é dado por (6.17). Além de quantizado o momento angular é também proporcional à carga. Vale ressaltar também que a equação (6.28) nos dá um momento angular diferente, em geral, de um número inteiro ou semi-inteiro. Temos assim que nossos vórtex não se comportam nem como bósons nem como férmions, sendo denominados *anyons*.

Aqui se encerra este capítulo. Uma vez já tendo em mente os conceitos de vórtex bem como suas propriedades e características, vamos estudar as soluções auto-duais, isto é, obtidas a partir do mecanismo de Bogomol'nyi para diversas teorias de gauge.

Capítulo 7

Vórtex Auto-Duais em Teorias de Gauge

Até agora estudamos dois casos cujas soluções nos forneciam configurações de vórtex. O primeiro caso era o modelo de Higgs abeliano (com termo de Maxwell) sem outro termo adicional, onde introduzimos realmente o conceito de vórtex e o outro, o caso em que havia também na lagrangeana de Higgs o termo de Chern-Simons. As lagrangeanas também diferiam pelo termo do potencial, embora ambos fossem de quarta ordem. Façamos agora uma nova discussão acerca das soluções que doravante buscaremos. Até aqui sempre buscamos soluções do tipo vórtex obtidas através das equações de movimento. Tais soluções podem, com efeito, serem vistas como uma superposição de n-vórtex no mesmo ponto. Vamos doravante nos concentrar nas soluções chamadas auto-duais, isto é, as soluções das equações de primeira ordem obtidas através do mecanismo de Bogomol'nyi.

Este mecanismo é de extrema importância para nossos fins, e faz-se necessário uma breve discussão acerca das soluções por ele obtidas. Em primeiro lugar, como já sabemos, ele nos fornece uma energia mínima para o sistema em questão. Além disso, sua aplicação reduz a ordem das equações diferenciais que levam à resolução do problema. Mas tudo tem seu preço. Como veremos, aqui também teremos que levar em conta análises numéricas para soluções analíticas, o que foge ao escopo e ao intento deste trabalho. Porém as equações obtidas por esse método são, em geral, passíveis de melhor interpretação. Mas existe ainda um outro motivo mais contundente para voltarmos nossa atenção a aplicação desse mecanismo. Ele nos proporciona soluções de n-vórtex não interagentes distribuídos no plano. Ou seja, uma vez saturado o limite de Bogomol'nyi, o que é equivalente a achar as equações que devem ser satisfeitas para que o sistema vá para seu estado de mais baixa energia, as soluções não levarão em conta a energia de interação entre os vórtex, descrevendo assim vórtex estáveis e não interagentes. De agora até o término do trabalho concentrar-nos-emos nas soluções auto-duais. Esse é o nosso interesse[1].

7.1 Modelo de Higgs Abeliano

Vamos então analisar os vórtex advindos do modelo de Higgs abeliano através do mecanismo de Bogomol'nyi. Consideremos novamente a lagrangeana do modelo de Higgs porém agora com um novo potencial[2] dado por

$$\frac{\lambda}{4}(\mid \phi \mid^2 - a^2)^2, \tag{7.1}$$

que é também um potencial de quarta ordem com as mesmas características do anterior. A energia, como de hábito, é dada pela integral no plano da componente T^{00} do tensor energia-momento. Sabemos que a energia associada ao termo de Maxwell é $\int d^2x \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$. O campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = \nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{7.2}$$

Entretanto, no modelo de Higgs abeliano $A_0 = 0$ e como estamos estudando configurações estáticas temos apenas a contribuição do campo magnético para a energia. Por esse mesmo motivo o termo $|D_\mu \phi|^2$ contribui apenas com $|\mathbf{D}\phi|^2$. Temos então a seguinte expressão para o funcional de energia

$$\varepsilon = \int d^2x \Big(\frac{1}{2} B^2 + |\mathbf{D}\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(\mid \phi \mid^2 - a^2)^2 \Big). \tag{7.3}$$

A fim de completar o quadrado do funcional de energia vamos fazer uso da seguinte identidade [15]

$$|\mathbf{D}\phi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 \pm \epsilon^{ij}\partial_i J_j, \tag{7.4}$$

onde $J_k = \frac{1}{2i}[\phi^* D_k \phi - \phi(D_k\phi)^*]$. Os sinais mais e menos da equação acima serão justificados logo em seguida. Colocando então a equação (7.4) no funcional de energia e desprezando o termo da divergência temos

$$\varepsilon = \int d^2x \Big(\frac{1}{2} B^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(\mid \phi \mid^2 - a^2)^2 \Big). \tag{7.5}$$

[1]Para o leitor afeito à matemática recomendamos o artigo: *Commun. Math. Phys.* **75**, 207 (1980). Aqui há uma prova rigorosa, feita por C. H. Toubes, sobre a equivalência entre as soluções obtidas via equações de movimento e mecanismo de Bogomol'nyi.

[2]Apenas introduzido por conveniência.

Por fim vamos somar e subtrair termos do funcional com o propósito de termos uma soma de quadrados. Temos assim

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int d^2x \Big\{ \frac{1}{2}[B \mp e(|\phi|^2 - a^2)]^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp ea^2 B \\ &+ \Big(\frac{\lambda}{4} - \frac{e^2}{2}\Big)(|\,\phi\,|^2 - a^2)^2 \Big\} \,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Repare que esta equação resulta exatamente na equação anterior para o funcional de energia. Assim a energia pode ser escrita como se segue

$$\begin{aligned}\varepsilon &= a^2|\Theta| + \int d^2x \Big\{ \frac{1}{2}[B \mp e(|\phi|^2 - a^2)]^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \\ &+ \Big(\frac{\lambda}{4} - \frac{e^2}{2}\Big)(|\,\phi\,|^2 - a^2)^2 \Big\} \,, \end{aligned} \tag{7.7}$$

onde $|\Theta|$ é o fluxo magnético[3]. Agora podemos explicar os sinais da equação (7.4). Uma vez que estamos levando em conta apenas o módulo do fluxo magnético, se o fluxo for positivo escolhemos o sinal inferior e o contrário se for fluxo negativo. Temos assim um funcional de energia positivo. De fato, podemos ainda escrever

$$\varepsilon \geq a^2|\Theta|. \tag{7.8}$$

Claro é que, para a igualdade na equação acima ser satisfeita, devemos zerar o outro termo da soma em (7.7), isto nada mais é do que saturar o limite de Bogomol'nyi. Antes porém vamos nos valer de alguns dados fornecidos pela experiência. As massas do campo escalar (m_E) e de gauge (m_G) em princípio são independentes, no entanto o modelo de Higgs abeliano tem um comportamento peculiar. Soluções numéricas das equações de movimento indicam que dois vórtex interagentes se repelem quando $m_E > m_G$ e se atraem quando $m_E < m_G$. O mais interessante é que quando as massas são iguais ($m_E = m_G$) os vórtex são não interagentes. Esse é o caso em que estamos interessados. Podemos facilmente calcurar tais massas, basta que para isso utilizemos o mecanismo de quebra espontânea de simetria. A igualdade das massas nos leva a uma surpreendente relação entre as constantes de acoplamento:

$$\lambda = 2e^2. \tag{7.9}$$

Temos então um termo da equação (7.7) automaticamente nulo. Assim as equações auto-duais para nosso sistema são

$$(D_1 \pm iD_2)\phi = 0 \tag{7.10}$$

[3]Note que chamamos aqui de fluxo magnético o que anteriormente denominamos de fluxo multiplicado por carga. É apenas um abuso de linguagem que facilita análises futuras.

e

$$B = \pm e(|\phi|^2 - a^2). \tag{7.11}$$

Vamos agora trabalhar um pouco mais as equações auto-duais. Consideremos a seguinte decomposição para o campo escalar

$$\phi = \rho^{\frac{1}{2}} \exp(i\omega), \tag{7.12}$$

com $\rho = \rho(r,\theta)$ e $\omega = \omega(r,\theta)$. Da equação (7.10), temos que

$$\partial_1\phi + ieA_1\phi \pm i\partial_2\phi \mp eA_2\phi = 0, \tag{7.13}$$

porém

$$\partial_j\phi = \exp(i\omega)\Big(\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\partial_j\rho + i\rho^{\frac{1}{2}}\partial_j\omega\Big). \tag{7.14}$$

Assim, após substituição da derivada na equação (7.13) ficamos com

$$\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\partial_1\rho \mp \rho^{\frac{1}{2}}\partial_2\omega \mp eA_2\rho^{\frac{1}{2}} + i\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\partial_1\omega + eA_1\rho^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\partial_2\rho\Big) = 0. \tag{7.15}$$

O que obriga a parte real bem como a parte imaginária da equação acima ser nulas. O termo real fornece

$$eA_2 = -\partial_2\omega \pm \frac{1}{2}\partial_1 ln\rho, \tag{7.16}$$

enquanto o imaginário resulta em

$$eA_1 = -\partial_1\omega \mp \frac{1}{2}\partial_2 ln\rho. \tag{7.17}$$

De um modo compacto, podemos escrever essas equações na forma

$$eA_i = -\partial_i\omega \mp \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_j ln\rho. \tag{7.18}$$

A segunda equação auto-dual, (7.11), resulta então em

$$\nabla^2 ln\rho = e^2(\rho^2 - a^2). \tag{7.19}$$

Novamente porém não somos capazes de encontrar soluções analíticas para as equações resultantes. Entretanto, soluções numéricas podem ser obtidas para o sistema. Ainda assim é válido mencionar que as equações auto-duais podem por si só revelar características interessantes. Como exemplo, tomemos nosso estudo de vórtex em uma variedade espacial compacta. De um modo bastante natural podemos perceber um limite superior na vorticidade para uma dada área da superfície. Com efeito, realizando uma integração da equação auto-dual (7.11) em todo plano temos

$$\int d^2xeB = \int d^2xe^2(a^2 - |\phi|^2), \tag{7.20}$$

onde admitimos, por conveniência, o fluxo negativo. Através de integração direta do fluxo magnético levando-se em conta o *ansatz* de simetria cilíndrica, percebemos que

$$\int d^2xeB = 2\pi n, \tag{7.21}$$

logo, a equação (7.20) nos fornece

$$2\pi n = e^2a^2 \int d^2x - e^2 \int d^2x|\phi|^2. \tag{7.22}$$

O primeiro termo da equação acima é proporcional à área pois envolve uma integração por toda a superfície. O segundo termo é sempre positivo, sendo então válida a afirmação

$$2\pi n \leq e^2a^2 Area, \tag{7.23}$$

ou ainda

$$n \leq \frac{e^2a^2}{2\pi} Area. \tag{7.24}$$

Esta característica peculiar é conhecida como limite de Bradlow [25]. Sendo nosso interesse aqui o de saturar o limite de Bogomol'nyi vamos estudar um modelo mais interessante cuja lagrangeana é dada pelo termo de Higgs somado ao termo de Chern-Simons.

7.2 Modelo de Chern-Simons-Higgs

Temos enfatizado que em $(2+1)-D$ existe um tipo de teoria de gauge, diferente do eletromagnetismo. É bastante importante notar que o termo de Maxwell não é uma necessidade nessa dimensão, pois, de fato, tal termo é invariante. Nesta seção consideraremos soluções de vórtex auto-duais obtidas a partir de uma lagrangeana do tipo (4.95), isto é, sem o termo de Maxwell.

Existem algumas características interessantes associadas as soluções de CS. Antes de mais nada, como veremos, o limite de Bogomol'nyi é saturado de forma diferente. Enquanto os vórtex que vimos requeriam um potencial de quarta ordem, os vórtex que surgirão no nosso presente caso requerem, no limite de Bogomol'nyi, um potencial de sexta ordem. É válido mencionar que a introdução de um termo dessa ordem no potencial escalar não é não-natural para os critérios de normalização em $(2+1)-D$.

Consideremos então uma lagrangeana do tipo dado em (4.95), porém com o termo de CS dado como em (4.55):

$$L = \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho} + |D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|). \tag{7.25}$$

Sabemos que no modelo de Higgs abeliano a obtenção de vórtex não interagentes é dada quando $\lambda = 2e^2$ (ver equação (7.9)), ou seja, quando a massa do campo escalar é igual a do campo de gauge. Faremos aqui algo semelhante para saturar o limite de Bogomol'nyi, deixando o potencial em aberto e reconhecendo depois sua forma explícita.

O funcional de energia, sem contribuição de termo de CS, é dado por

$$\varepsilon = \int d^2x[|\mathbf{D}\phi|^2 + |D_0\phi|^2 + V(|\phi|)]. \tag{7.26}$$

Notemos primeiramente que da lei de Gauss para CS, ($\mu B = \rho$), temos

$$B = \frac{1}{\mu} J_0, \tag{7.27}$$

ou seja

$$B = \frac{i}{\mu}(\phi^* D_0\phi - (D_0\phi)^*\phi). \tag{7.28}$$

Claro é que, uma vez que $Q = \int d^2x J_0 = \mu\Theta$, o número de vorticidade n necessariamente carrega carga elétrica e fluxo magnético, sendo assim ótimo candidato a objetos aniônicos.

Utilizando a identidade (7.4) podemos escrever a equação para o funcional de energia na forma

$$\varepsilon = \int d^2x[|(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 + |D_0\phi|^2 + V(|\phi|)], \tag{7.29}$$

já desprezando o termo de superfície.

A fim de completar quadrados no funcional para saturar o limite de Bogomol'nyi, vamos fazer algumas considerações da maneira mais geral possível. Faremos todos os procedimentos de maneira análoga ao caso de vórtex no modelo de Higgs abeliano; estes serão, por assim dizer, nosso paradigma de vórtex.

Primeiramente desejamos uma energia proporcional ao fluxo magnético. Assim, vamos somar e subtrair o termo $\pm \int d^2x ea^2 B$ no funcional de energia. Logo, a quadratura deve reproduzir os termos $\mp eB|\phi|^2$, $|D_0\phi|^2$, $\pm ea^2B$ e ainda nos fornecer a forma do potencial. Em geral procuramos por um potencial que admita quebra espontânea de simetria com um vácuo não trivial, portanto algo proporcional a $(|\phi|^2 - a^2)$. Vamos colocar essas exigências para a quadratura na seguinte forma[4]

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \int d^2x[|D_0\phi \pm ih(|\phi|^2 - a^2)\phi^m|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \\ &+ V(|\phi|) \mp ea^2B - h^2|\phi|^{2m}(|\phi|^2 - a^2)^2]. \end{aligned} \tag{7.30}$$

[4]Não devemos fazer confusão entre a constante aqui chamada de h e a constante de Planck.

Devemos agora achar m e h de modo a identificarmos $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Utilizando a restrição (7.27) temos imediatamente, para que tenhamos os outros termos $h = \frac{e}{\mu}$ e $m = 1$. Assim o funcional é[5]

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= a^2|\Theta| + \int d^2x \Big(|D_0\phi \pm \frac{ie}{\mu}(|\phi|^2 - a^2)\phi|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \\
&+ V(|\phi|) - \frac{e^2}{\mu^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - a^2)^2 \Big). \qquad (7.31)
\end{aligned}$$

Logo, o limite de Bogomol'nyi é saturado quando

$$(D_1 \pm iD_2)\phi = 0 \qquad (7.32)$$

e

$$D_0\phi = \mp \frac{ie}{\mu}(|\phi|^2 - a^2)\phi, \qquad (7.33)$$

para um potencial na forma

$$V(|\phi|) = \frac{e^2}{\mu^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - a^2)^2. \qquad (7.34)$$

Trabalhando um pouco a equação (7.33), temos

$$\phi^* D_0\phi = \mp \frac{ie}{\mu}(|\phi|^2 - a^2)|\phi|^2, \qquad (7.35)$$

mas, com o auxílio da equação (7.28), vemos que

$$B = \pm \frac{e}{\mu^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - a^2) - \frac{e}{\mu}A_0|\phi|^2. \qquad (7.36)$$

Entretanto, resolvendo completamente (7.28) relacionamos B e A_0 da seguinte maneira

$$A_0 = -\frac{\mu B}{2e}\frac{1}{|\phi|^2}, \qquad (7.37)$$

portanto podemos escrever a segunda equação auto-dual como

$$B = \pm \frac{2e}{\mu^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - a^2). \qquad (7.38)$$

Antes de analisarmos um pouco mais em detalhes as equações auto-duais vamos nos concentrar no potencial encontrado na equação (7.34). Como dito no início desta seção, tal potencial é de sexta ordem. Essa diferença imediatamente nos revela que a teoria terá dois tipos de solução: as topológicas, caracterizadas pela parte não trivial do potencial no vácuo ($|\phi| \to a$ quando $r \to \infty$) e as não topológicas, obtidas para

[5]Aqui novamente chamamos de fluxo magnético a carga multiplicada pelo fluxo usual. Lembramos também que, a exemplo do que fizemos no caso anterior, aqui utilizamos o módulo do fluxo escolhendo os sinais de maneira a termos energia positiva.

o parte trivial do potencial no vácuo ($|\phi| \to 0$ quando $r \to \infty$). Podemos visualisar a forma do potencial na figura **??**. No que diz respeito ao nosso desenvolvimento concentrar-nos-emos no setor topológico da teoria.

Podemos, a título de curiosidade, encontrar o análogo ao limite de Bradlow para nosso caso. Lembremos novamente do *ansatz* para n-vórtex; ele estabelece que

$$\mathbf{A}(r) = -\hat{\theta}\frac{A(r)}{r} \tag{7.39}$$

e

$$\phi(r) = g(r)\exp(in\theta), \tag{7.40}$$

como os seguintes limites assintóticos: $A(r) = -n/e$ e $g(r) = a$ para $r \to \infty$; e $A(r) = g(r) = 0$ para $r \to 0$. Nessas condições vemos que

$$\Theta = e\int d^2xB = e\int A_\theta r d\theta = 2\pi n. \tag{7.41}$$

Repare que podemos escrever a equação (7.38) como

$$B = \pm\frac{2e}{\mu^2}\Big((|\phi|^2 - \frac{a^2}{2})^2 - \frac{a^4}{4}\Big). \tag{7.42}$$

Admitindo um fluxo magnético positivo e integrando a equação acima em todo plano obtemos

$$\int d^2xB = +\frac{2e}{\mu^2}\frac{a^4}{4}\int d^2x - \frac{2e}{\mu^2}\int d^2x\Big(|\phi|^2 - \frac{a^2}{2}\Big)^2, \tag{7.43}$$

e, com o auxílio de (7.41), temos

$$n = \frac{ea^4}{4\pi\mu^2}Area - \frac{e}{\pi\mu^2}\int d^2x\Big(|\phi|^2 - \frac{a^2}{2}\Big)^2. \tag{7.44}$$

Como o segundo termo é sempre positivo, temos que

$$n \leq \frac{ea^4}{4\pi\mu^2}Area, \tag{7.45}$$

o que é o limite de Bradlow para nosso caso, expressando um extremo superior para a vorticidade do sistema.

Um tipo muito interessante de vórtex é o chamado rotacionalmente simétrico [11]. Suas soluções são encontradas através do estudo das configurações de campo dadas pelo *ansatz*

$$\phi = ag(r)\exp(in\theta) \tag{7.46}$$

e

$$eA^i = \epsilon^{ij}\frac{\hat{r}^j}{r}(b(r) - n). \tag{7.47}$$

Como fizemos anteriormente para o caso de vórtex no modelo de Higgs abeliano vamos trabalhar a primeira equação auto-dual. Assim como vimos, de (7.32), escrevendo o campo escalar na forma $\phi = \rho^{1/2}\exp(iw)$ achavamos a equação

$$eA_i = -\partial_i w \mp \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_j ln\rho. \tag{7.48}$$

Aqui ambos, w e ρ, eram funções de r e θ. Agora dispondo os componentes do campo ϕ na forma

$$w \equiv n\theta \tag{7.49}$$

e

$$\rho^{1/2} \equiv ag(r), \tag{7.50}$$

reproduzimos o *ansatz* rotacionalmente simétrico para o campo escalar, equação (7.46), logo a equação (7.48) fornece

$$A_i = -\frac{n}{e}\partial_i\theta \mp \frac{1}{2e}\epsilon_{ij}\partial_j ln(a^2g^2), \tag{7.51}$$

e, por sua vez, o campo magnético toma a forma

$$B = \epsilon^{ki}\partial_k\Big(-\frac{n}{e}\partial_i\theta \mp \frac{1}{2e}\epsilon_{ij}\partial_j(lna^2g^2)\Big). \tag{7.52}$$

O primeiro termo vai a zero quando da contração do tensor anti-simétrico ϵ com as derivadas, sobrando então

$$B = \mp\frac{1}{2e}\epsilon^{ki}\epsilon_{ij}\partial_k\partial_j(lna^2g^2), \tag{7.53}$$

porém como $\epsilon^{ki}\epsilon_{ij} = -\delta^k_j$, temos

$$B = \pm\frac{1}{2e}\partial^2_k(lna^2g^2). \tag{7.54}$$

Por fim, lembrando que a componente r do laplaciano em coordenadas polares é

$$\nabla^2_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big), \tag{7.55}$$

achamos

$$B = \pm\frac{1}{2e}\Big((lna^2g^2)'' + \frac{1}{r}(lna^2g^2)'\Big), \tag{7.56}$$

onde linha denota derivada com relação a r. Finalmente, com o auxílio da segunda equação auto-dual, vemos que o campo magnético é dado, levando-se em conta o *ansatz*, por

$$B = \pm\frac{2e}{\mu^2}a^4g^2(g^2-1), \tag{7.57}$$

e portanto, da igualdade de (7.56) com a equação acima, temos

$$(lna^2g^2)'' + \frac{1}{r}(lna^2g^2)' = \frac{4e^2a^4}{\mu^2}g^2(g^2-1). \tag{7.58}$$

Nosso esforço agora será no sentido de esboçar uma solução para $g(r)$ a fim de obtermos alguma intuição a mais sobre o *ansatz* rotacionalmente simétrico. Acharemos assim uma forma para o campo escalar completando nosso estudo. Para tanto, faremos algumas aproximações. Primeiramente podemos, sem perda de generalidade, fazer $a = 1$[6]. Como estamos interessados agora em obter uma forma para $g(r)$, atribuiremos pouca relevância às constantes restantes. Chamemos $\frac{4e^2}{\mu^2} \equiv m^2$, assim a equação (7.58) fica

$$(lng^2)'' + \frac{1}{r}(lng^2)' = -m^2g^2(1-g^2). \tag{7.59}$$

Vamos definir agora

$$g(r) = \exp(y(r)), \tag{7.60}$$

então ficamos com

$$y'' + \frac{1}{r}y' = -\frac{m^2}{2}\exp(2y)(1-\exp(2y)), \tag{7.61}$$

de modo a obter uma solução analítica para nosso sistema vamos considerar uma aproximação para g pequeno, o que é equivalente a considerar termos de, no máximo, primeira ordem em uma expansão em y. Logo, temos nossa equação reduzida a

$$y'' + \frac{1}{r}y' - m^2y = 0. \tag{7.62}$$

Com efeito a integração dessa equação leva a uma combinação de funções de Bessel do segundo tipo[7]. Entretanto, impondo as condições de contorno ao problema, ou seja, exigindo que $g \to 0$ quando $r \to 0$ e $g \to 1$ quando $r \to \infty$ temos como solução fisicamente aceitável

$$\begin{aligned} g &= \exp\left([ln(\frac{r}{2}) + \alpha]I_0(r) + \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2.4^2}(1+\frac{1}{2})\right. \\ &+ \left.\frac{r^6}{2^2.4^2.6^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + \cdots\right), \end{aligned} \tag{7.63}$$

onde α é uma constante arbitrária e $I_0(r)$ é dada por

$$I_0(r) = 1 + \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2.4^2} + \frac{r^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots. \tag{7.64}$$

[6]Note que a é o valor (fixo) do campo no vácuo, de modo que podemos atribuir-lhe um valor numérico escolhendo, por assim dizer, nossa escala de trabalho.

[7]O que de fato não nos surpreende por termos simetria cilíndrica.

O comportamento de g com relação a r é melhor visualizado na Figura **??**. Podemos perceber claramente seu comportamento assintótico com $r \rightarrow \infty$, evidenciando uma solução topológicamente estável. É importante ressaltar que as condições de contorno nos garantem que os campos sejam não-singulares e tenham energia finita.

Aqui encerramos esta seção. De um modo geral pudemos estudar várias propriedades do nosso sistema através das equações auto-duais. Na próxima seção analisaremos vórtex em teorias de CS com o termo de Maxwell.

7.3 Modelo de Chern-Simons-Maxwell-Higgs

Vimos ao longo de todo o trabalho o ferramental necessário para o estudo de vórtex em teorias de gauge (abelianas) e, com efeito, aplicamos as técnicas que vimos para o estudo de vórtex auto-duais. Analisamos os casos de vórtex no modelo de Higgs abeliano que, como dissemos, nos serviu de paradigma de vórtex. Vimos também as soluções obtidas para o modelo de Higgs com o termo de CS, onde tínhamos uma nova eletrodinâmica e particularmente pudemos melhor visualisar o mérito do mecanismo de Bogomol'nyi.

Falta-nos no entanto o caso completo com o termo de Maxwell e de CS juntos no modelo de Higgs. Este caso será, como se poderia esperar, mais difícil do que os anteriores. De fato, a junção de todos esses termos complica consideravelmente as equações. Entretanto nos proporciona uma generalização dos anteriores no sentido de que em algum limite os vórtex obtidos aqui reproduzem os que já foram vistos.

A lagrangeana para nosso modelo será dada por

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\mu\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}A_\rho + |D_\mu\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu N)^2 - V(\phi, N), \tag{7.65}$$

onde a derivada covariante é diferente da que estávamos utilizando durante o decorrer do trabalho, sendo dada por[8]

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \tag{7.66}$$

e o potencial é

$$V(\phi, N) = \frac{1}{2}(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2)^2 + e^2N^2|\phi|^2. \tag{7.67}$$

Vamos fazer algumas considerações sobre nossa lagrangeana. Primeiramente, a mudança na forma da derivada covariante não nos preocupa uma vez que basta ficarmos atentos a algumas mudanças de sinais acarretadas por essa nova notação

[8] A diferença está no sinal do segundo termo.

(como a expressão para a corrente, por exemplo). Em (7.65) temos a presença de um novo termo dado por $\frac{1}{2}(\partial_\mu N)^2$, sendo N um campo escalar neutro. Este campo serve para nossos propósitos apenas como termo auxiliar quando da saturação do mecanismo de Bogomol'nyi. De fato, tal termo auxiliar, será posteriormente identificado com o potencial escalar A_0. Ademais, trabalharemos com o potencial na forma dada em (7.67) e não de forma aberta como fizemos para o caso anterior sem o termo de Maxwell. Certo é que achar o potencial através do mecanismo de saturação é muito mais agradável do ponto de vista de completude do modelo. Entretanto, devido à complexidade advinda da introdução do termo de Maxwell, vamos fixar o potencial e partindo dele analisar as soluções que a teoria fornece.

Extremizando o potencial com relação ao campo escalar carregado igualando o resultado a zero temos a seguinte expressão para o ponto mínimo do módulo do campo

$$|\phi|^2_{min} = a^2 - N(1 + \mu/e), \tag{7.68}$$

enquanto que, realizando o mesmo procedimento porém agora com relação ao campo escalar neutro, temos

$$N_{min} = \frac{1}{(\mu^2/e + 2e|\phi|^2)}(a^2 - |\phi|^2). \tag{7.69}$$

Percebemos então claramente a existência de dois estados degenerados na mais baixa energia. Da equação (7.68), para $N = 0$ e $|\phi|_{min} = a$; e da equação (7.69), para $|\phi| = 0$ e $N_{min} = \frac{ea^2}{\mu}$. Concentrar-nos-emos no primeiro caso pois ele é que nos fornecerá soluções topológicas, já que o valor esperado para o campo no vácuo é não nulo. Entretanto, deixamos registrado que o modelo fornece tanto soluções topológicas quanto não topológicas, como se percebe das considerações acima.

É importante salientar que no setor topológico da teoria existem dois modos de propagação para o campo de gauge. Para percebermos isso basta que calculemos o propagador do campo de gauge redefinido por $C_\mu = A_\mu + \frac{1}{ea}\partial_\mu\phi_2$, sendo ϕ_2 uma componente do campo escalar carregado. Para a quebra espontânea de simetria fazemos $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + \phi_1 + \phi_2)$. Assim passando a lagrangeana para o espaço dos momentos, após uma escolha apropriada de gauge (gauge de 't Hooft), temos que os pólos do propagador [24] são dados por

$$m^2_\pm = (2e^2a^2 + \mu^2/2) \pm [\mu^2(2e^2a^2 + \mu^2/4)]^{1/2}. \tag{7.70}$$

Gostaríamos de ressaltar que ambos os pólos são físicos, isto é, são modos de excitação do campo de gauge.

Tomando a componente temporal da equação de movimento para o campo de gauge temos

$$-\partial_i F_{0i} + \mu F_{12} - eJ_0 = 0, \tag{7.71}$$

onde a componente zero da corrente é dada por

$$J_0 = -i[\phi^*(D_0\phi) - (D_0\phi)^*\phi], \tag{7.72}$$

que escrevemos explicitamente por razão da diferença de sinal existente com a corrente que havíamos definido. Notemos que a lei de Gauss obtida em (7.71) é, como não poderia deixar de ser, uma generalização dos casos que obtivemos anteriormente. Integrando a equação (7.71) por todo o espaço e reconhecendo, como de hábito, $\int d^2x J_0$ como a carga e $\int d^2x F_{12}$ como sendo o fluxo temos

$$eQ = \mu\Theta, \tag{7.73}$$

uma vez que os modos invariantes de gauge são massivos e de curto alcance.

Estamos aptos a analisar o funcional de energia de (7.65) e dele extrair as equações auto-duais através do mecanismo de Bogomol'nyi. O funcional é dado por

$$\varepsilon = \int d^2x \Big[\frac{1}{2}F_{i0}^2 + \frac{1}{2}F_{12}^2 + |D_0\phi|^2 + |\mathbf{D}\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 N)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i N)^2 + V\Big]. \tag{7.74}$$

Aqui, os dois primeiros termos são as contribuições dos campos elétrico e magnético, respectivamente, e os termos intermediários a contribuição do campo de Higgs além, é claro, do potencial e do campo escalar neutro.

Devido à mudança no sinal da derivada covariante, a equação (7.4) também mudará o sinal do segundo termo. Gostariamos de ressaltar que toda essa adaptação na notação é feita aqui apenas para que possamos ter o respaldo da literatura padrão para esse tipo de vórtex (Chern-Simons-Maxwell-Higgs)[13]. Assim utilizando a equação (7.4), com o sinal do segundo termo trocado, e explicitando a forma do potencial podemos escrever o funcional como

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int d^2x \Big[\frac{1}{2}F_{i0}^2 + \frac{1}{2}F_{12}^2 + |D_0\phi|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \pm eF_{12}|\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 N)^2 \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_i N)^2 + \frac{1}{2}(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2)^2 + e^2N^2|\phi|^2\Big] . \end{aligned} \tag{7.75}$$

Como desejamos ter uma energia proporcional ao fluxo magnético vamos somar e subtrair o termo $\pm ea^2 F_{12}$ ao funcional de energia. Então temos como resultado

$$\begin{aligned} \varepsilon &= ea^2|\Theta| + \int d^2x \Big[\frac{1}{2}F_{i0}^2 + \frac{1}{2}F_{12}^2 + |D_0\phi|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \pm eF_{12}|\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 N)^2 \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_i N)^2 + \frac{1}{2}(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2)^2 + e^2N^2|\phi|^2 \mp ea^2F_{12}\Big] . \end{aligned} \tag{7.76}$$

Onde escolhemos o sinal superior para fluxo magnético positivo e o inferior para o caso contrário.

Devemos agora trabalhar no sentido de escrever (7.76) como uma soma de quadrados, assim como fizemos para os outros casos considerados. Para tanto, analisemos algumas identidades. Primeiramente vejamos que

$$\frac{1}{2}(F_{i0} \pm \partial_i N)^2 = \frac{1}{2}F_{i0}^2 \pm F_{i0}\partial_i N + \frac{1}{2}(\partial_i N)^2, \tag{7.77}$$

além disso

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[F_{12} \pm (e|\phi|^2 + \mu N - ea^2)]^2 = \frac{1}{2}F_{12}^2 \pm F_{12}(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2) \\ + & \frac{1}{2}(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2)^2, \end{aligned} \tag{7.78}$$

e por fim

$$|D_0\phi \mp ie\phi N|^2 = |D_0\phi|^2 + e^2N^2|\phi|^2 \mp eNJ_0. \tag{7.79}$$

Somando essas três equações aos termos $\frac{1}{2}(\partial_0 N)^2$ e $|(D_1 \pm iD_2)\phi|^2$ temos exatamente o integrando da equação (7.76) mais o termo $\pm F_{i0}\partial_i N \pm F_{12}\mu N \mp eNJ_0$.

Porém notemos que, sob integração em d^2x, temos

$$F_{i0}\partial_i N = -N\partial_i F_{i0}, \tag{7.80}$$

logo, todo termo restante da soma das equações (7.77), (7.78) e (7.79) é nulo pela lei de Gauss.

Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon &= ea^2|\Theta| + \int d^2x\Big[\frac{1}{2}(F_{i0} \pm \partial_i N)^2 + \frac{1}{2}[F_{12} \pm (e^2|\phi|^2 + \mu N - ea^2)]^2 \\ &+ |D_0\phi \mp ie\phi N|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 N)^2\Big]. \end{aligned} \tag{7.81}$$

Conseguimos, então, completar quadrados no funcional de energia da maneira desejada. Para saturar o limite de Bogomol'nyi vamos apenas impor que $\partial_0 N = 0$, o que não contraria nenhum princípio pois ao final, como de hábito, estaremos interessados em configurações estáticas para os campos. Assim as equações autoduais são

$$F_{i0} \pm \partial_i N = 0, \tag{7.82}$$

$$F_{12} \pm (e^2|\phi|^2 + \mu N - ea^2) = 0, \tag{7.83}$$

$$D_0\phi \mp ie\phi N = 0 \tag{7.84}$$

e por fim

$$(D_1 \pm iD_2)\phi = 0. \tag{7.85}$$

Consideremos agora soluções estáticas das equações auto-duais. Nesse regime,

$$F_{i0} = \partial_i A_0 \tag{7.86}$$

e

$$D_0 \phi = -ieA_0\phi; \tag{7.87}$$

logo, da equação (7.82) temos

$$\partial_i (A_0 \pm N) = 0. \tag{7.88}$$

De (7.84), no entanto, percebemos que

$$A_0 \pm N = 0. \tag{7.89}$$

Desenvolvendo a equação (7.85) ficamos com

$$\partial_1 \phi \pm eA_2\phi + i(\pm\partial_2\phi - eA_1\phi) = 0, \tag{7.90}$$

igualando cada parte (real e imaginária) da equação a zero e escrevendo o resultado compactamente em uma equação chegamos a

$$2eA_i \mp \epsilon_{ij}\partial_j ln|\phi|^2 = 0. \tag{7.91}$$

Onde multiplicamos toda a equação por dois, por conveniência futura. A componente zero da corrente (equação (7.72)) é, para configurações estáticas, dada por

$$J_0 = -2eA_0|\phi|^2, \tag{7.92}$$

logo, da lei de Gauss, tiramos que

$$-\partial_i\partial^i A_0 + \mu F_{12} + 2e^2 A_0|\phi|^2 = 0 \tag{7.93}$$

e, utilizando a equação (7.83), temos

$$-\nabla^2 A_0 \mp \mu(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2) + 2e^2 A_0|\phi|^2 = 0. \tag{7.94}$$

Uma vez que A_0 e N estão relacionados tal como em (7.88) temos

$$-\nabla^2 N + (\mu^2 + 2e^2|\phi|^2)N + e\mu(|\phi|^2 - a^2) = 0. \tag{7.95}$$

Vamos por agora achar outra relação entre N e ϕ. Primeiramente notemos que a equação (7.83) pode ser escrita como

$$\epsilon^{ij}\partial_i A_j = \mp(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2), \tag{7.96}$$

além disso temos, da equação (7.91), a seguinte identidade

$$2e\epsilon^{ki}\partial_k A_i = \pm\epsilon^{ki}\epsilon_{ij}\partial_k\partial_j ln|\phi|^2. \tag{7.97}$$

Contraindo os epsilons e identificando o lado esquerdo de (7.97) com (7.96) temos

$$\nabla^2 ln|\phi|^2 - 2e(e|\phi|^2 + \mu N - ea^2) = 0, \tag{7.98}$$

que é a relação que buscávamos. Temos agora um conjunto de equações auto-duais para configurações estáticas dos campos (equações (7.91),(7.95) e (7.98)). Observemos que as relações entre ϕ e N são dadas por equações diferenciais não linares e acopladas. De fato, a solução de tal sistema sem nenhuma aproximação adicional requer análise numérica. Vamos discutir, assim como no caso anterior, soluções rotacionalmente simétricas. Para tanto vamos nos valer do *ansatz*

$$\phi = g(r)\exp(in\theta) \tag{7.99}$$

e

$$eA_i = \pm\frac{\epsilon_{ij}\hat{r}_j}{r}\Big(\frac{g^{'}}{g} - n\Big), \tag{7.100}$$

onde linha denota derivação com relação a r. Tal configuração dos campos em muito é semelhante à que estudamos para o caso anteriormente analisado. De um modo geral esperamos que os campos sejam bem definidos e comportados, em $r \to 0$. Quando $r \to \infty$ devemos ter $g \to a$ e $N \to 0$. Aplicando a condição (7.99) nas equações auto-duais (7.95) e (7.98) temos as mesmas equações, apenas com g^2 no lugar de $|\phi|^2$.

É comum na literatura corrente a utilização de cálculo numérico para a resolução do problema a partir daqui. De fato, como foi dito no parágrafo anterior, uma solução completa sem nenhuma aproximação requer tal procedimento. No entanto, impelidos pela idéia de que a manipulação algébrica das equações nos confere, além de uma maior famialiaridade com o problema, um melhor entendimento do assunto em si e, que uma solução, mesmo em alguma aproximação, pode nos revelar características interessantes do sistema aumentando nossa intuição acerca do assunto, solucionaremos o problema valendo-nos de uma aproximação sem o auxílio de análise computacional. Tal aproximação será a mesma usada na seção anterior, ou seja, estudaremos a solução para o campo g no regime g pequeno. Mais precisamente, definiremos o campo g como a exponencial de y e trabalharemos com y pequeno. Por fim analisaremos a solução assintótica para $r \to 0$. Ademais assumiremos também que o campo neutro também é pequeno. Estamos então em um domínio restrito de aplicabilidade das equações auto-duais, no qual os campos têm valor absoluto baixo;

aqui delinearemos o restante de nosso estudo. Vale sempre lembrar que as equações auto-duais não valem somente nesse regime, sendo que aqui apenas o estabelecemos para que possamos manipulá-las e obter assim soluções que não necessitem de cálculos computacionais.

Novamente como no caso visto anteriormente vamos definir

$$g = \exp(y(r)), \tag{7.101}$$

logo, da equação (7.98) temos

$$\nabla^2 y - e(e\exp(2y) + \mu N - ea^2) = 0, \tag{7.102}$$

e de (7.95)

$$-\nabla^2 N + (\mu^2 + 2e^2\exp(2y))N + e\mu(\exp(2y) - a^2) = 0. \tag{7.103}$$

Valendo-nos do fato de que y é pequeno façamos uma expansão da exponencial de y até o primeiro termo somente. Além disso, colocando o valor do campo no vácuo igual a um, por simplicidade, temos como equações resultantes

$$\nabla^2 y - 2e^2 y - \mu e N = 0 \tag{7.104}$$

e

$$\nabla^2 N - (2e^2 + \mu^2)N - 2\mu e y = 0, \tag{7.105}$$

onde o termo proporcional a Ny foi desprezado por ser de ordem quadrática nos campos. Assim, isolando N na equação (7.104) e substituindo em (7.105) ficamos com uma única equação em y, dada por

$$\nabla^2\Big(\frac{1}{e\mu}\nabla^2 y - \frac{2e^2}{e\mu}y\Big) - (2e^2 + \mu^2)\Big(\frac{1}{e\mu}\nabla^2 y - \frac{2e^2}{e\mu}y\Big) - 2e\mu y = 0. \tag{7.106}$$

Realizando uma simples álgebra chegamos a

$$\nabla^2(\nabla^2 y) - (4e^2 + \mu^2)\nabla^2 y + 4e^4 y = 0. \tag{7.107}$$

Não esquecendo que a componente r do operador laplaciano em coordenadas polares é dada por (7.55) e utilizando a notação, já conhecida, $y^{'} \equiv \frac{dy}{dr}$ temos

$$y^{''''} + \frac{2}{r}y^{'''} - \frac{1}{r^2}y^{''} + \frac{1}{r^3}y^{'} - (4e^2 + \mu^2)\Big(y^{''} + \frac{1}{r}y^{'}\Big) + 4e^4 y = 0. \tag{7.108}$$

Uma vez que nosso interesse reside na forma geral da solução, vamos redefinir as constantes multiplicativas dos dois últimos termos da equação acima como

$$4e^2 + \mu^2 \equiv K_1 \tag{7.109}$$

e

$$4e^4 \equiv K_2, \tag{7.110}$$

assim temos como equação resultante

$$y^{''''} + \frac{2}{r}y^{'''} - \Big(\frac{1}{r^2} + K_1\Big)y^{''} + \frac{1}{r}\Big(\frac{1}{r^2} - K_1\Big)y^{'} + K_2 y = 0. \tag{7.111}$$

De fato, esta equação pode ser integrada tendo como solução uma combinação de funções de Bessel de primeiro e segundo tipos dada por

$$y(r) = C_1 Y_0(x(r)) + C_2 J_0(x^{'}(r)) + C_3 Y_0(x^{'}(r)) + C_4 J_0(x(r)), \tag{7.112}$$

onde J_0 e Y_0 são as funções de Bessel (de índice zero) de primeiro e segundo tipos, respectivamente e

$$x(r) = \frac{r}{2}\sqrt{-2K_1 - 2\sqrt{-4K_2 + K_1^2}}, \tag{7.113}$$

$$x^{'}(r) = \frac{r}{2}\sqrt{-2K_1 + 2\sqrt{-4K_2 + K_1^2}}. \tag{7.114}$$

Antes de analisarmos melhor nossa solução obtida, vamos estudar a solução completa e então fazer uma comparação, nas devidas proporções, entre a solução geral e a solução obtida nessa aproximação. A solução obtida em [13], sem nenhuma aproximação adicional, é dada de forma ilustrativa na Figura **??**.

Notemos que, como não poderia deixar de ser, o campo g é saturado com $r \to \infty$. Além disso percebemos que com r indo a zero o campo também se anula, tendo portanto um comportamento adequado. É válido atentar para o fato de que o formato da curva de g explicita uma solução topologicamente estável pois é levada ao valor do campo no vácuo com r indo a infinito, além de não poder ser continuamente deformada em outra. A título de completeza, informamos que as soluções do setor não topológico da teoria têm, em $r \to 0$, um comportamento bastante semelhante às do setor topológico. Porém a semelhança é somente válida nesse regime.

Uma análise comparativa entre nossa solução e a padrão é desejável. O comportamento assintótico com $r \to 0$ das funções de Bessel é

$$J_0(x) \sim 1 \tag{7.115}$$

e

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} ln(x). \tag{7.116}$$

Assim, a forma geral da solução com $r \to 0$ é

$$\begin{aligned} y(r) &= C_1 ln\left[\frac{r}{2}\sqrt{-2K_1 - 2\sqrt{-4K_2 + K_1^2}}\right] \\ &+ C_3 ln\left[\frac{r}{2}\sqrt{-2K_1 + 2\sqrt{-4K_2 + K_1^2}}\right] + C_2 + C_4 \,, \end{aligned} \tag{7.117}$$

já absorvido o fator $2/\pi$ nas constantes.

Lembrando que $g = \exp(y(r))$ temos

$$\begin{aligned} g(r) &= \left(\frac{r}{2}\sqrt{-2K_1 - 2\sqrt{-4K_2 + K_1^2}}\right)^{C_1}\left(\frac{r}{2}\sqrt{-2K_1 2\sqrt{-4K_2 + K_1^2}}\right)^{C_3} \\ &\times \exp(C_2 + C_4). \end{aligned} \tag{7.118}$$

Temos uma aprazível situação quando $C_1 = C_3 = 2$, pois podemos eliminar as raízes restando apenas

$$g(r) = K_2 \exp(C_2 + C_4) r^4 \tag{7.119}$$

ou

$$g(r) = 4e^4 \exp(C_2 + C_4) r^4. \tag{7.120}$$

Neste regime, de fato a aproximação feita revela-se frutífera uma vez que temos um comportamento aceitável para $r \to 0$ conforme nos evidencia o gráfico da Figura **??**.

Se, por um lado, temos um bom resultado nesse regime, quando $r \gg$ nosso resultado não é o esperado. Infelizmente pagamos o preço por fazer uma aproximação. O comportamento assintótico das funções de Bessel em $r \gg$ revela um comportamento oscilatório amortecido que vai novamente a zero com o inverso da raíz de r. Não apresentando, portanto, a saturação ao valor do vácuo. Sendo assim, a solução obtida nessa aproximação revela-se boa para $r \to 0$ e ineficaz para o outro extremo.

Façamos então um breve apanhado das idéias gerais. A inquestionável solução [13] representada graficamente na Figura **??** é obtida através de cálculo numérico sem nenhuma aproximação. Ela apresenta as propriedades esperadas de uma solução topologicamente estável. Com o intuito de nos familiarizarmos mais com o problema realizamos uma aproximação que nos deixou as equações auto-duais analiticamente integráveis. O estudo assintótico da solução obtida nos revela um bom comportamento próximo à origem mas infelizmente não apresenta estabilidade. Ainda assim, partilhamos da opinião, já mencionada, de que tal manipulação cumpre um importante papel, ainda que essencialmente didático, no estudo de vórtex e, em particular, do sistema em questão.

Aqui de certo modo encerramos o tratamento que desejávamos obter nesse trabalho. Nos é forçoso, entretanto, discutir um outro modelo que também apresenta soluções tipo vórtex com uma lagrangeana do tipo dado em (7.65) porém com um potencial modificado (entre outras coisas). Disso ocupar-se-ão as próximas linhas.

Nosso novo modelo em questão é uma teoria de gauge $U(1) \times U(1)$ com dois campos de gauge, A_μ e a_μ, dois campos escalares complexos, χ e ψ, e um campo escalar neutro N. Nossa nova lagrangeana é dada por

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu \partial_\nu a_\rho + |D_\mu \chi|^2 + |D_\mu \psi|^2$$

$$+ \quad \frac{1}{2}(\partial_\mu N)^2 - V(\chi, \psi, N) \; , \tag{7.121}$$

e onde

$$D_\mu \chi = [\partial_\mu - i(e_1 a_\mu + e_2 A_\mu)]\chi, \tag{7.122}$$

$$D_\mu \psi = [\partial_\mu - i(e_3 a_\mu + e_4 A_\mu)]\psi. \tag{7.123}$$

O potencial é dado por

$$\begin{aligned} V(\chi, \psi, N) \;\; &= \;\; \frac{1}{2}(e_2|\chi|^2 + e_4|\psi|^2 - u^2)^2 + \frac{e_1^2}{\kappa^2}|\chi|^2\Big(e_1|\chi|^2 + e_3|\psi|^2 - \frac{\kappa e_2}{e_1}N - v^2\Big)^2 \\ &+ \;\; \frac{e_3^2}{\kappa^2}|\psi|^2\Big(e_1|\chi|^2 + e_3|\psi|^2 - \frac{\kappa e_4}{e_3}N - v^2\Big)^2 \; , \end{aligned} \tag{7.124}$$

e os termos e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ são parâmetros da teoria. Não é difícil ver que as equações de movimento para a_μ e A_μ têm como componente temporal, respectivamente:

$$\kappa(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) - e_1 J_\chi^0 - e_3 J_\psi^0 = 0 \tag{7.125}$$

e

$$-\partial_i F_{i0} - e_2 J_\chi^0 - e_4 J_\psi^0 = 0, \tag{7.126}$$

onde J_χ^0 e J_ψ^0 são definidas como em (7.72). Essas são as leis de Gauss do modelo. Note que elas nada mais são do que uma extensão do que havíamos obtido. Tais equações nos fornecem relações entre os fluxos magnéticos (para os campos a_μ e A_μ) e as cargas (Q_χ e Q_ψ). Assim, integrando as equações (7.125) e (7.126) por todo plano temos

$$\kappa \Theta_a = e_1 Q_\chi + e_3 Q_\psi \tag{7.127}$$

e

$$e_2 Q_\chi + e_4 Q_\psi = 0. \tag{7.128}$$

Notemos que não há nenhuma restrição ao fluxo magnético do campo A_μ ($\Theta_A = \int d^2 r F_{12}$). O funcional de energia é dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon \;\; &= \;\; \int d^2 r \Big(\frac{1}{2}F_{i0}^2 + \frac{1}{2}F_{12}^2 + |D_0\chi|^2 + |D_i\chi|^2 + |D_0\psi|^2 + |D_i\psi|^2 \\ &+ \;\; \frac{1}{2}(\partial_0 N)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i N)^2 + V\Big) \; . \end{aligned} \tag{7.129}$$

É importante destacar que todos os procedimentos aqui feitos são idênticos aos realizados no caso anterior ainda nessa seção. A forma mais complexa de (7.121) é refletida apenas em uma complicação nos procedimentos de cálculo. As equações auto-duais advindas deste modelo são também uma generalização do caso anteriormente visto. Vamos, no entanto, explicitar o funcional em sua forma quadrática.

Após usarmos as restrições obtidas pelas leis de Gauss do modelo e explicitar os termos proporcionais aos fluxos temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \pm(v^2\Theta_a + u^2\Theta_A) + \int d^2r \Big\{ \frac{1}{2}(F_{i0} \pm \partial_i N)^2 + \frac{1}{2}[F_{12} \pm (e_2|\chi|^2 + e_4|\psi|^2 - u^2)]^2 \\
&+ |(D_1 \pm iD_2)\psi|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\chi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 N)^2 + \Big| D_0\chi \pm \frac{ie_1}{\kappa}\chi \Big[e_1|\chi|^2 + e_3|\psi|^2 \\
&- \frac{\kappa e_2}{e_1}N - v^2 \Big]\Big|^2 + \Big| D_0\psi \pm \frac{ie_3}{\kappa}\psi \Big[e_1|\chi|^2 + e_3|\psi|^2 - \frac{\kappa e_4}{e_3}N - v^2 \Big]\Big|^2 \Big\}. \qquad (7.130)
\end{aligned}$$

O limite de Bogomol'nyi é então saturado, para configurações estáticas, pelas seguintes equações auto-duais

$$(D_1 + iD_2)\chi = 0, \qquad (7.131)$$

$$(D_1 + iD_2)\psi = 0, \qquad (7.132)$$

$$F_{12} \pm (e_2|\chi|^2 + e_4|\psi|^2 - u^2) = 0, \qquad (7.133)$$

$$a_0 \mp \frac{1}{\kappa}(e_1|\chi|^2 + e_3|\psi|^2 - v^2) = 0 \qquad (7.134)$$

e por fim

$$A_0 \pm N = 0. \qquad (7.135)$$

Podemos notar, com as devidas proporções, a semelhança entre estas equações auto-duais e aquelas dadas em (7.82), (7.83), (7.84) e (7.85). Lembremos que na nossa convenção os sinais superiores correspondem aos valores positivos de $v^2\Theta_a + u^2\Theta_A$ e os inferiores aos valores negativos. Nossas novas equações auto-duais apresentam características interessantes dependendo da escolha dos parâmetros livres da teoria. Evidentemente muitas escolhas podem ser feitas, de modo que, a seguir, discutiremos apenas algumas delas.

Quando $e_1 = e_3 = 0$ temos um sistema auto-dual tipo Maxwell-Higgs com dois campos escalares complexos, além disso o campo a_μ é desacoplado dos demais. Quando $e_2 = e_4 = 0$ temos um sistema auto-dual tipo Chern-Simons. Agora o campo A_μ se desacopla do restante. Quando $e_2 = e_3 = 0$ o sistema se torna uma soma desacoplada de sistemas auto-duais de Maxwell-Higgs e de Chern-Simons. Escolhendo os parâmetros tais que $e_4 = e_3 = 0$ e $e_1 = e_2 = e$ o campo ψ se desacopla. A lei de Gauss, para configurações estáticas, passa a ser $\nabla^2 A_0 = -\kappa(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)$, logo não existem vórtex carregados para essa configuração. Colocando $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ temos um caso bastante semelhante ao caso imediatamente anterior, exceto pelo fato de termos dois campos escalares complexos.

Aqui se encerra todo nosso estudo sobre o assunto. De um modo geral conseguimos nosso intento de obter equações auto-duais para os diferentes casos de teorias de gauge abordados. Ademais conseguimos resolver as equações auto-duais para o campo escalar na aproximação de campo fraco para os casos onde a lagrangeana era dada pelos termos de CS-Higgs e pelos termos de CS-Maxwell-Higgs.

Capítulo 8

Considerações Finais

Primeiramente gostaríamos de ressaltar o papel da topologia nesta linha de pesquisa. Em geral, este ramo da matemática em muito tem ajudado na compreensão da natureza e, de acordo com o que foi visto, aqui isso se torna explícito. Vimos também, além da forte influência da topologia, a conexão existente entre quebra espontânea de simetria e objetos topológicos em teoria de campos, evidenciando a importância de um vácuo topologicamente não trivial em modelos tais como o de Higgs abeliano. Trabalhamos com o mecanismo de Bogomol'nyi e aprendemos essa importante ferramenta para obtenção de vórtex topologicamente estáveis. Depois analisamos e obtivemos vórtex carregados de energia finita no modelo de Higgs abeliano com o termo topológico de Chern-Simons. Mais a frente trabalhamos na obtenção de vórtex auto-duais em três modelos particulares, aos quais vínhamos nos familiarizando ao longo de todo o trabalho. Estes foram o modelo de Higgs abeliano, o modelo Chern-Simons-Higgs e o modelo Chern-Simons-Maxwell-Higgs (CSMH).

Desde já é importante salientar que nem todos os aspectos concernentes a vórtex em teorias de gauge puderam ser abordados, dada a riqueza do assunto. Tampouco o que vimos nessa dissertação tem a pretensão de ser um guia único no estudo das características mais interessantes sobre tais soluções. No entanto os assuntos aqui, na forma como foram abordados, são o resultado de uma análise idiossincrática e, nesse ponto, nosso trabalho adquire seu maior valor. Isso se revela por exemplo na forma como os tópicos foram expostos e analisados.

Como resultado particular é lícito chamarmos a atenção para nossa aplicação das técnicas estudadas e apresentadas na dissertação à obtenção de vórtex auto-duais em teorias completas, o que nesse contexto significa com os termos de CSMH, tal como feito na última seção do capítulo sete. Mesmo sem lançar mão de análise numérica, o que certamente nos renderia uma solução completa, pudemos através da manipulação das equações de Bogomol'nyi no limite para campos fracos, obter uma solução do sistema adquirindo maior familiaridade com o assunto em si. De modo geral, demos no decorrer do trabalho coesão aos tópicos abordados dispondo-os de uma maneira didática e utilizando-os de modo claro e recorrente.

Por fim devemos sempre lembrar que vórtex compõem um grande espectro dentro de teorias planares, abelianas e não abelianas[1] e além disso também podem ser analisados em teorias acopladas à gravitação [9]. Sob outro ângulo, podem também ser estudados em uma belíssima interface com física fundamental através da análise dos supercondutores, perfazendo assim um campo de estudo e pesquisa rico, amplo e , como mensagem final, belo.

[1]Para uma breve introdução deste caso ver Apêndice B.

Apêndice A

Introdução à Supercondutividade

Nosso estudo sobre vórtex seria falho se nele não incluíssemos o problema original que motivou as teorias relativísticas com soluções do tipo vórtex. Assim, delinearemos brevemente aqui alguns aspectos da supercondutividade [18], passando por uma análise qualitativa do problema, seguida por uma aplicação direta de quebra espontânea de simetria e por fim veremos a quantização do fluxo magnético em supercondutores e sua relação com vórtex.

As primeiras experiências confirmando , o fenômeno da supercondutividade consiste na propriedade que certos materiais (puros ou ligas) apresentam de, a temperaturas suficientemente baixas, não oferecer resistência à passagem de corrente elétrica. Apenas para termos uma ordem de grandeza, a temperatura crítica (T_c), isto é temperatura abaixo da qual o material torna-se supercondutor, de um material puro é de cerca de $10K$ enquanto que para uma liga é de cerca de $30K$.

Sabemos que a resistência à passagem de corrente elétrica é devida basicamente a duas características: impurezas e agitação térmica do condutor. Uma vez que a supercondutividade depende fortemente da temperatura crítica do material, somos inclinados a delegar importância capital às vibrações dos seus constituintes em uma teoria que vise uma explicação qualitativa desse fenômeno. Mais além, precisamos levar em conta as interações entre os constituintes do material e os elétrons a serem transportados. Tendo tudo isso em mente vamos tentar entender qualitativamente a supercondutividade.

Consideremos um elétron em um dado material movendo-se perto de uma região de íons positivos do próprio material. Entre o elétron e o íon há uma interação atrativa e ambos têm seu estado alterado nesse processo. Em particular, os íons são agitados e surge uma espécie de onda que se propaga pelo material. Tal onda tem energia e momento bem definidos e, como efeito, podemos associar uma partícula a ela. Esta partícula é chamada de fônon. Assim dizemos que o elétron emite um fônon ao interagir com a rede iônica. É possível que um segundo elétron se aproxime da mesma região de íons positivos sendo atraído por ela e, eventualmente, absorva o fônon emitido pelo primeiro elétron. Com isso acontecendo, tudo se passa como se os dois elétrons estivessem interagindo de maneira atrativa. Se tal interação for suficientemente intensa para sobrepujar a repulsão coulombeana entre os elétrons, eles formam um estado ligado conhecido como par de Cooper. É válido lembrar que tal situação só é possível a temperaturas muito baixas. Além disso esse estado ligado comporta-se como um bóson e, como não poderia deixar de ser, a baixas temperaturas apresenta condensação de Bose-Einstein.

Em 1933, Meissner e Oschenfeld descobriram que os supercondutores apresentam comportamentos interessantes com relação a campos magnéticos externos aplicados a eles. De acordo com esse comportamento os supercondutores são classificados em dois tipos. Supercondutores tipo I, aqueles em que o material sofre uma transição de supercondutor para o estado normal num valor definido do campo magnético externo $\mathbf{B}_c(T)$; e supercondutores do tipo II, os quais são caracterizados por terem dois campos críticos: o inferior $\mathbf{B}_{1c}(T)$ e o superior $\mathbf{B}_{2c}(T)$. Abaixo de $\mathbf{B}_{1c}(T)$ essa classe de supercondutores se comporta como se fosse do tipo I, e o campo magnético externo não penetra no material. Acima de $\mathbf{B}_{2c}(T)$ o comportamento é igual ao de um material normal e o campo magnético externo penetra normalmente na amostra. Para intensidades de campo entre $\mathbf{B}_{1c}(T)$ e $\mathbf{B}_{2c}(T)$ há uma penetração parcial do fluxo magnético no interior do material e nele existem regiões microscópicas supercondutoras e regiões normais chamadas *vórtex*, formando estruturas bastante complexas conhecidas como estados mistos.

Tendo posse dessa visão qualitativa da supercondutividade vamos aplicar o modelo de Higgs ao caso de supercondutores do tipo I. Assim sendo, consideremos uma situação estática. A lagrangeana de Higgs nesse caso é dada por

$$L = -\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 - |(\nabla - ie\mathbf{A})\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4, \tag{A.1}$$

onde $m^2 = a(T - T_c)$ com a temperatura perto da temperatura crítica, a uma constante e ϕ a função de onda macroscópica de muitas partículas.

Notemos que se $T > T_c$, $m^2 > 0$ e a função ϕ tem o mínimo igual a zero. No entanto se $T < T_c$, $m^2 < 0$ e o mínimo da função de onda é dado por

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda}, \tag{A.2}$$

equação essa que nos é bastante conhecida[1]. Este é um belo exemplo de quebra

[1] Ver Capítulo 3.

espontânea de simetria. A corrente conservada associada a esse comportamento é

$$\mathbf{J} = -i(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*) - 2e|\phi|^2\mathbf{A}. \tag{A.3}$$

Para supercondutores do tipo I, ou do tipo II para campos magnéticos externos menores que $\mathbf{B}_c(T)$, a função de onda varia muito pouco sobre a amostra. Logo o segundo termo de (A.3) é dominante sobre o primeiro. Então a corrente pode ser escrita como

$$\mathbf{J} = \frac{em^2}{\lambda}\mathbf{A}. \tag{A.4}$$

No modelo de Higgs abeliano $A_0 = 0$, portanto o campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{A.5}$$

Como $\mathbf{A}$ não depende do tempo[2] o campo elétrico é nulo. Lembrando que a definição da lei de Ohm num metal é

$$\mathbf{E} = R\mathbf{J}, \tag{A.6}$$

inferimos que R=0. Logo temos supercondutividade.

A expulsão do fluxo magnético do interior do material (efeito Meissner) pode ser facilmente entendida nesse modelo. Para correntes que variam lentamente (ou quase não variam, como é o nosso caso) podemos desprezar a corrente de deslocamento na lei de Ampère. Logo, podemos escrever

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \tag{A.7}$$

Tomando o rotacional dessa expressão e lembrando que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}, \tag{A.8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{A.9}$$

e

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{A.10}$$

temos a seguinte relação

$$\nabla^2\mathbf{B} = -\frac{em^2}{\lambda}\mathbf{B}. \tag{A.11}$$

Definindo agora, sem perda de generalidade,

$$\frac{em^2}{\lambda} \equiv -k^2, \tag{A.12}$$

[2]Notemos que $\mathbf{A}$ tal como dado em (A.4) é completamente consistente com o pressuposto de configurações estáticas, uma vez que a corrente sobre o supercondutor é permanente.

com $k \in R$ temos

$$\nabla^2 \mathbf{B} = k^2 \mathbf{B}, \tag{A.13}$$

resolvendo esta equação em $(1 - D)$ por simplicidade temos como solução

$$B_x = B_0 \exp(-kx). \tag{A.14}$$

Então o campo magnético penetra no material de um comprimento característico $1/k$, isso, em números, é da ordem de 10^{-6} cm. Por fim, gostaríamos de apontar para uma importante e interessante característica desse modelo. A equação (A.13) implica

$$\nabla^2 \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A}, \tag{A.15}$$

cuja versão relativística, com derivadas temporais, é

$$\Box A_\mu = -k^2 A_\mu. \tag{A.16}$$

Ou seja, o campo A_μ obedece a equação de Klein-Gordon com massa k. Logo k é a massa do fóton. Este fenômeno é característico do mecanismo de Higgs.

Para supercondutores do tipo II na região de coexistência de supercondutividade e não supercondutividade temos que lançar mão da teoria de Ginzburg-Landau para explicar os fenômenos que ali ocorrem. A corrente ao longo do condutor aqui é a mesma da corrente dada na equação (A.3), entretanto aqui colocaremos, por conveniência futura, as constantes que lá omitimos. Assim

$$\mathbf{J} = -\frac{ie\hbar}{2m_e}(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) - \frac{2e^2}{m_e}|\phi|^2 \mathbf{A}, \tag{A.17}$$

onde m_e é a massa do elétron e ϕ é a função de onda quântica que descreve o centro de massa de um par de Cooper[3]. Repare que agora não podemos fazer a suposição que nos levou à equação (A.4), pois estamos em um regime onde coexistem regiões supercondutoras (onde vale aquela aproximação) e regiões normais. Consideremos agora a função de onda sendo dada por

$$\phi = |\phi| \exp(i\varphi); \tag{A.18}$$

desse modo, com o módulo da função de onda constante, temos

$$\nabla \phi = i\phi \nabla \varphi, \tag{A.19}$$

e

$$\nabla \phi^* = -i\phi^* \nabla \varphi. \tag{A.20}$$

[3]Note que basta descrever o movimento de um par.

De sorte que a equação para a corrente pode ser escrita como

$$\mathbf{J} = \left(\frac{e\hbar}{m_e}\nabla\varphi + \frac{2e^2}{m_e}\mathbf{A}\right)|\phi|^2. \tag{A.21}$$

Façamos a integral de (A.21) ao longo de um caminho fechado C no interior do supercondutor. Então temos

$$\oint_C \mathbf{J}\cdot d\mathbf{l} = \frac{e\hbar}{m_e}|\phi|^2 \oint_C \nabla\varphi\cdot d\mathbf{l} + \frac{2e^2}{m_e}|\phi|^2 \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \tag{A.22}$$

Como $\mathbf{J} = 0$ ao longo da curva ficamos com

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\hbar}{2e}\oint_C \nabla\varphi\cdot d\mathbf{l}; \tag{A.23}$$

mas sabemos que $d\varphi = \nabla\cdot d\mathbf{l}$ e além disso

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}da = \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{n}da = \Phi, \tag{A.24}$$

onde S é a superfície delimitada pela curva C e Φ, o fluxo magnético. Assim, a equação (A.23) fornece

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e}\Delta\varphi. \tag{A.25}$$

Porém, para que ϕ seja unívoca devemos ter $\Delta\varphi = 2\pi N$. Logo o fluxo magnético é dado por

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e}2\pi N; \tag{A.26}$$

definindo a unidade de fluxo magnético (fluxóide) como $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ temos enfim

$$\Phi = -N\Phi_0. \tag{A.27}$$

Cada fluxóide tem como valor $2,07\times10^{-15}$ Wb. A teoria então prevê que cada cada vórtex de supercondutores do tipo II contém exatamente um fluxóide, o que, de fato, é comprovado experimentalmente.

Apêndice B

Introdução a Vórtex em Modelos não Abelianos

Tudo o que vimos neste trabalho pertence ao domínio de teorias de gauge abelianas. No presente apêndice faremos uma introdução ao caso não abeliano. Assim como no caso abeliano a bibliografia aqui é extensa. Casos bastante interessantes são encontrados em [16] onde temos uma apresentação de vórtex auto-duais obtidos a partir de uma lagrangeana de Higgs com termo de CS, tudo no regime não abeliano, particularmente interessante por realizar uma introdução com um grupo de gauge $SU(N)$ só depois fazendo uma identificação com $SU(2)$. Em [17] temos uma análise completa de vórtex auto-duais advindos de modelos com simetria de gauge $SU(2)$ e $SU(N)$ para uma lagrangeana completa com os campos de Higgs, o termo de Maxwell e o de CS.

Sendo nosso interesse aqui introdutório, nos limitaremos a uma análise focada em características interessantes e peculiares de vórtex eletricamente carregados em teorias não abelianas com termo de CS bem como com o termo de Maxwell. Tais vórtex não serão advindos do mecanismo de Bogomol'nyi e, de modo geral, não nos concentramos nas soluções em si.

Como vimos, a adição do termo de CS ao modelo de Higgs abeliano permite a obtenção de vórtex eletricamente carregados com energia finita. No caso não abeliano não é diferente. Com efeito, estudaremos agora um modelo desse tipo. Sabemos que soluções do tipo vórtex estão relacionadas com o mecanismo de quebra espontânea de simetrias de gauge via campos de Higgs e vimos também que para termos configurações de vórtex topologicamente estáveis devemos ter um grupo fundamental não-trivial, isto é, se G é o grupo de gauge e H o grupo de invariância do vácuo, então

$$\pi_1(G/H) \neq 0. \tag{B.1}$$

Para $G = SU(N)$ e os campos de Higgs na representação adjunta é conveniente ter um máximo de quebras de simetrias de G [20], de modo a termos o vácuo invariante apenas sob a matriz unidade (na representação adjunta). Assim temos $H = Z_N$ e

$$\pi_1(G/H) = \pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N. \tag{B.2}$$

Neste apêndice concentrar-nos-emos no caso $G = SU(2)$ (com geradores T^a) e portanto $H = Z_2$. A lagrangeana do nosso modelo[1] é dada por

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\vec{\phi}\cdot D^\mu\vec{\phi} + \frac{1}{2}D_\mu\vec{\psi}\cdot D^\mu\vec{\psi} \\ &+ \frac{1}{4}\mu\epsilon_{\mu\nu\alpha}\left(\mathbf{F}^{\alpha\mu}\cdot\mathbf{A}^\nu - \frac{2}{3}e\mathbf{A}^\alpha\cdot(\mathbf{A}^\mu\times\mathbf{A}^\nu)\right) - V(\vec{\phi},\vec{\psi})\ , \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde $A_\mu = A^a_\mu T_a$ e

$$D_\mu\vec{\phi} = \partial_\mu\vec{\phi} + e\mathbf{A}_\mu\times\vec{\phi}, \tag{B.4}$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu + e\mathbf{A}_\mu\times\mathbf{A}_\nu. \tag{B.5}$$

O potencial dos campos de Higgs é dado por [19]

$$V(\vec{\phi},\vec{\psi}) = \frac{1}{8}g^2(\vec{\phi}^2-\eta^2)^2 + \frac{1}{8}g\prime^2(\vec{\psi}^2-\eta\prime^2)^2 + \frac{1}{2}g\prime\prime^2(\vec{\psi}\cdot\vec{\phi})^2. \tag{B.6}$$

Note que o potencial é de quarta ordem nos campos.

A fim de obtermos soluções carregadas vamos nos valer do seguinte *ansatz* para os campos de Higgs e de gauge

$$\vec{\phi} = f(r)(cos\varphi, sen\varphi, 0), \tag{B.7}$$

$$\vec{\psi} = \hat{e}_3\eta\prime, \tag{B.8}$$

$$\mathbf{A}_\varphi = \hat{e}_3 A(\varphi) \tag{B.9}$$

e

$$\mathbf{A}_0 = \hat{e}_3 A_0(\varphi), \tag{B.10}$$

com $\hat{e}_3 = (0,0,1)$ e (r,φ) são coordenadas polares usuais. As condições de contorno são dadas a seguir.

[1] Z_2 é o grupo cíclico obtido pela classe de equivalência formada a partir do resto da divisão de todos os números inteiros por 2 [21]. Números pares na classe de equivalência do zero e números ímpares na classe de equivalência do um. A álgebra do grupo é dada por: $0+0=0$, $0+1=1+0=1$ e $1+1=0$.

Para $r \to \infty$,

$$A = -\frac{1}{e}, \tag{B.11}$$

$$A_0 = 0 \tag{B.12}$$

e

$$f = \eta. \tag{B.13}$$

Enquanto que, para $r \to 0$,

$$A = A_0 = f = 0. \tag{B.14}$$

Notemos que com as condições dadas no *ansatz* temos $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ e $\vec{\phi}$ mutuamente ortogonais. Vale também lembrar que as condições de contorno, além de nos proporcionar uma forma não trivial dos campos no vácuo (equações (B.11) e (B.13)) também asseguram ação finita.

De uma forma mais explícita o campo de gauge com o *ansatz* é dado por

$$\mathbf{A}_\mu = \Big((0, 0, A_0(r)), (0, 0, 0), (0, 0, A(r))\Big), \tag{B.15}$$

e podemos de fato propor a forma do tensor eletromagnético como

$$\Xi_{\mu\nu} = \frac{\vec{\psi}}{|\vec{\psi}|} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} = F^3_{\mu\nu}. \tag{B.16}$$

Com tal definição temos, de modo usual, os campos elétrico e magnético dados por

$$E_i = \Xi_{0i} \tag{B.17}$$

e

$$B = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\Xi^{ij}. \tag{B.18}$$

Repare que a forma do campo de gauge dada em (B.15) em muito facilita as contas, pois

$$F^3_{\mu\nu} = (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) \cdot \hat{e}_3 + e(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu) \cdot \hat{e}_3, \tag{B.19}$$

mas percebemos facilmente que

$$\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu = 0, \tag{B.20}$$

e uma vez que, como de hábito, estamos interessados em configurações estáticas dos campos temos

$$E_i = -\partial_i \mathbf{A}_0 \cdot \hat{e}_3. \tag{B.21}$$

As equações de movimento são dadas por

$$D_\mu D^\mu \vec{\phi} = \frac{\delta V}{\delta \vec{\phi}}, \tag{B.22}$$

$$D_\mu D^\mu \vec{\psi} = \frac{\delta V}{\delta \vec{\psi}} \tag{B.23}$$

e

$$D_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\nu + \frac{1}{2}\mu\epsilon^{\nu\alpha\beta}\mathbf{F}_{\alpha\beta}. \tag{B.24}$$

Onde a corrente tem a forma $\mathbf{J}^\nu \equiv e(D^\nu\vec{\phi} \times \vec{\phi} + D^\nu\vec{\psi} \times \vec{\psi})$. Tomando na equação (B.24) as componentes $\mu = i$ e $\nu = 0$ temos

$$\partial_i \mathbf{F}^{i0} + e\mathbf{A}_i \times \mathbf{F}^{i0} = \mathbf{J}^0 + \frac{1}{2}\mu\epsilon^{ij}\mathbf{F}_{ij}. \tag{B.25}$$

Realizando agora o produto escalar de todos os termos com $\hat{e}_3$ e definindo $\mathbf{J}^0 \cdot \hat{e}_3 = -\sigma$ ficamos com

$$-\partial_i E^i + e(\mathbf{A}_i \times \mathbf{F}^{i0}) \cdot \hat{e}_3 = -\sigma + \mu B. \tag{B.26}$$

Porém, percebamos que o produto vetorial de (B.26) só tem componentes em $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$, logo este termo desaparecerá pelo produto escalar com $\hat{e}_3$. Assim nos sobra apenas

$$\partial_i E^i + \mu B = \sigma, \tag{B.27}$$

que, quando integrada por todo o plano fornece, uma vez que $E_i \to 0$ no limite $r \to \infty$

$$Q = \mu\Phi, \tag{B.28}$$

onde Φ é o fluxo magnético e Q a carga. Um pouco de álgebra nos mostra que

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{F}^{ij})^3 = 2\partial_r A(r), \tag{B.29}$$

logo o fluxo magnético é dado por

$$\Phi = \int d^2x \partial_r A(r). \tag{B.30}$$

Utilizando o teorema da Stokes juntamente com a condição de contorno (B.11) temos finalmente

$$\Phi = -\frac{2\pi}{e} \tag{B.31}$$

e portanto a carga fica

$$Q = -\frac{2\pi}{e}\mu. \tag{B.32}$$

Vale a pena atentar para o fato de que no nosso presente caso o fluxo magnético não é quantizado como nos casos abelianos. A fim de termos carga quantizada para os vórtex devemos buscar outro meio de quantização da equação (B.32). Como podemos perceber só nos resta procurar tal discretização no parâmetro de acoplamento do termo de CS (μ).

A lagrangeana (B.3) devido ao termo de CS não é invariante de gauge. De fato, sob uma tranformação de gauge g ela muda por uma derivada total, de modo que a ação muda por

$$S \longrightarrow S + \mu \frac{8\pi^2}{e^2} w(g), \tag{B.33}$$

onde $w(g)$ é o *winding number* correspondente à transformação. Assim, para que tenhamos a exponencial da ação invariante[2] o parâmetro μ deve obedecer à restrição

$$\mu = -\frac{e^2 n}{4\pi}. \tag{B.34}$$

Assim conseguimos o que procurávamos, pois a carga é dada então por

$$Q = \frac{e}{2} n. \tag{B.35}$$

Como última característica interessante desse modelo vamos atentar para o fato de que a quantização da carga está conectada com o momento angular do vórtex [19]. Em três dimensões temos apenas um gerador de momento angular, dado por

$$|\vec{l}| = \int d^2 x \epsilon^{ij} x_i T_{0j}, \tag{B.36}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. O cálculo direto de $|\vec{l}|$ nos leva a

$$|\vec{l}| = \frac{Q}{2e} = \frac{n}{4}, \tag{B.37}$$

logo, de modo diferente ao que acontece no caso abeliano, aqui o vórtex carrega um momento angular quantizado.

A título de completeza mencionamos que em teorias não abelianas também é necessária a introdução de potenciais de sexta ordem para obtenção de vórtex via mecanismo de Bogomol'nyi. Entretanto, não existem soluções topologicamente estáveis para ambos os vácuos, simétrico e anti-simétrico, da teoria.

[2] O que é atraente do ponto de vista dos geradores funcionais, por exemplo.

Referências Bibliográficas

[1] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996);

[2] R. Aldrovandi and J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific Publishing, 1995);

[3] M. Monastyrsky, *Topology of Gauge Fields and Condensed Matter* (New York and London Mir Publishers, 1993).

[4] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976);

[5] S. K. Paul and A. Khare, *Phys. Lett.* **B 174**, 420 (1986);

[6] E.C. Marino, Procedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School, editors: J. C. A. Barata, A. P. C. Manbouisson, S. F. Novaes;

[7] J. Arafune, P. G. O. Freund and C. J. Goebel, *Journal of Mathematical Physics*, **16**, No. 2 (1975);

[8] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland Publishing Company, 1982);

[9] M. E. X. Guimarães and L. A. J. London, *Phys. Rev.* **D 52**, 6075 (1995);

[10] R. Jackiw and E. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2234 (1990);

[11] R. Jackiw, K. Lee and E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D 42**, 3466 (1990);

[12] J. Hong, Y. Kim and P. Y. Pac, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2230 (1990);

[13] C. Lee, K. Lee and H. Min, *Phys. Lett.* **B 252**, 79 (1990);

[14] Tan Shin Eik, E. Teo and Brenda Chng Mei Yuen, *Lie Groups and Their Cosets* (The 15th Science Research Congress, 2003. National University of Singapore);

[15] G. V. Dunne, *Aspests of Chern-Simons Theory*, arXiv:hep-th/9902115 v1 (1999);

[16] K. Lee, *Phys. Lett.* **B 255**, 381 (1991);

[17] L. F. Cugliandolo, G. Lozano and F. A. Schaposnik, *Phys. Rev.* **D 40**, 3440 (1989);

[18] K. D. Machado, *Teoria do Eletromagnetismo, Vol.II*, Editora UEPG;

[19] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2564 (1986);

[20] K. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 553 (1991);

[21] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Institute of Physics Publishing, 2003);

[22] N. K. Nielsen and P. Olesen, *Nuclear Physics* **B61** 45-61 (1973);

[23] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.* D11 2275 (1975);

[24] R. Pisarki and S. Rao, *Phys. Rev.* D **32** 2081 (1985);

[25] S. Bradlow, *Comm. Math. Phys.* **135** 1 (1990).

Além das referências citadas em notas de rodapé ao longo do trabalho.