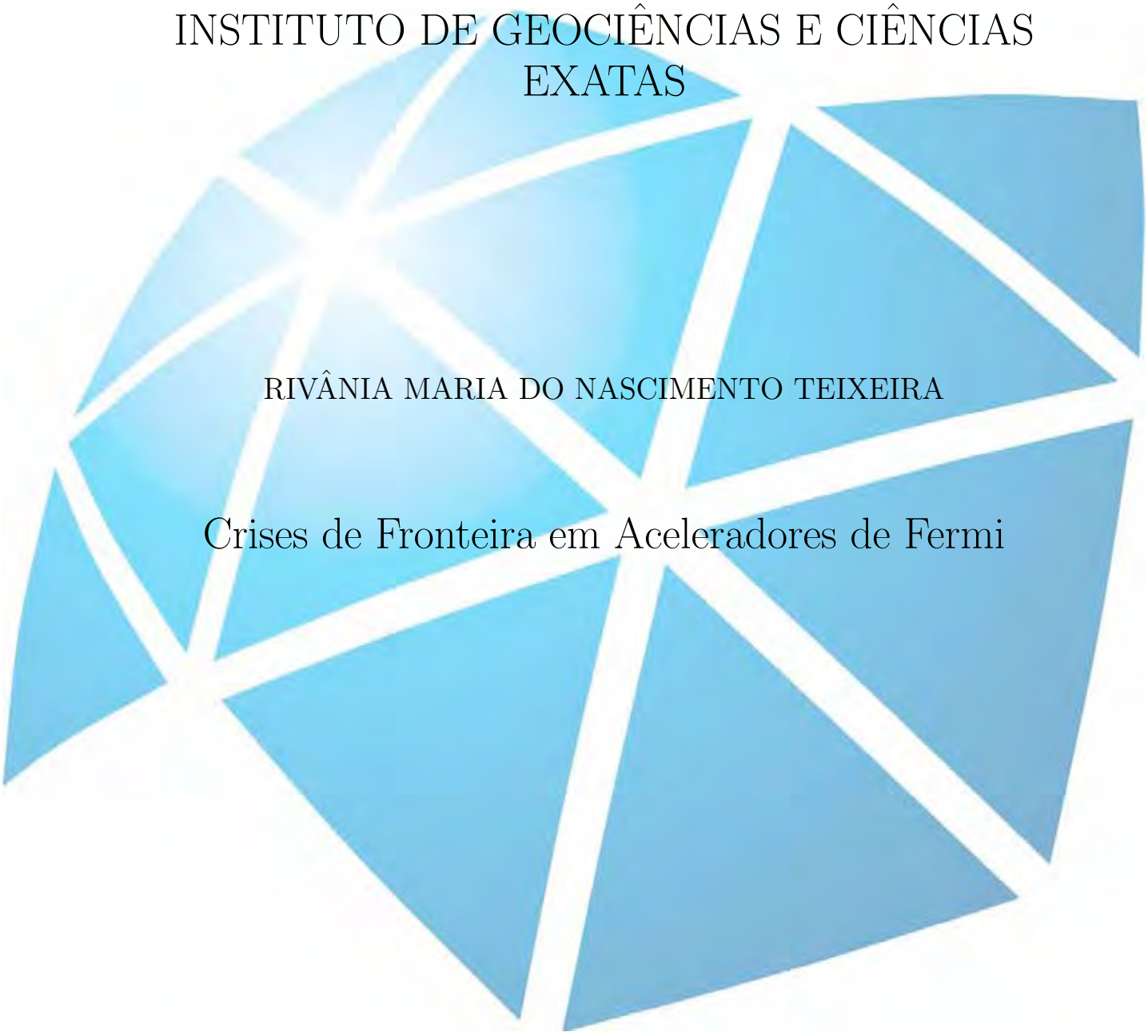
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



RIVÂNIA MARIA DO NASCIMENTO TEIXEIRA

Crises de Fronteira em Aceleradores de Fermi

Rio Claro

2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de Rio Claro

RIVÂNIA MARIA DO NASCIMENTO TEIXEIRA

CRISES DE FRONTEIRA EM ACELERADORES DE FERMI.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Aplicada
Orientador: Edson Denis Leonel

VERSÃO ORIGINAL

Rio Claro

2013

RIVÂNIA MARIA DO NASCIMENTO TEIXEIRA

Crises de Fronteira em Aceleradores de Fermi

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Edson Denis Leonel

Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Diego Fregolente Mendes de Oliveira

VERSÃO ORIGINAL

Rio Claro

2013

Dedico esta dissertação à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Raimundo Nogueira Costa Filho por ter inicialmente apresentado à mim o Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Câmpus de Rio Claro-SP, Instituição que me acolheu dando-me suporte para que este trabalho fosse possível.

Ao professor Edson Denis Leonel, pela orientação, amizade, dedicação e paciência. Pelo excelente trabalho realizado com o Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não-Linear - UNESP sob sua liderança e pelas discussões motivadoras. Obrigada por ter acreditado em mim!

Aos meus professores da Universidade Estadual do Ceará - UECE e aos professores da UNESP que contribuíram para minha formação. Em especial, agradeço ao professor Dante Chinaglia pelo enorme aprendizado em suas aulas durante o estágio de docência.

Ao Orlando Saraiva que me ajudou a resgatar arquivos importantes desse trabalho e pela solicitude de todas as horas. À Mariana Baptistella pela atenção e o cuidado nos procedimentos operacionais do Departamento de Física.

Aos meus preciosos amigos que me acolheram em Rio Claro-SP, que me ajudaram em muitos momentos difíceis e tornaram-se ao longo desses dois anos a minha família: Vinicius Santana, Rafael Bizão, Everton Cortez, Amanda Prina, Rodrigo Moreira, Júlia Inforzato, Juliano Antônio, Tiago Botari, André Livoratti, João Fonseca e Carlos Awano. Muito obrigada pela companhia e pelos melhores momentos que aqui vivi!

Ao Geraldo Pasquoto Júnior por estar ao meu lado nesse período, pelo incetivo e pela força. À sua família que me sempre me recebeu carinhosamente em muitos finais de semana e datas comemorativas, em especial: Amanda Pasquoto, Nair Gatti, Geraldo Pasquoto, Solange, Sussi, Sandra e Aline Pasquoto.

À minha família que me apoiou quando resolvi sair de Fortaleza para fazer mestrado tão longe de casa, principalmente a minha mãe que aguentou firme essa distância.

Aos meus amigos irmãos de Fortaleza que me apoiaram psicológico e até financeiramente para que eu estivesse aqui: Antenor Costa, Falcão Júnior, Cândido Rolim, Walnysse, Poliana Falcão e Irene. Aos amigos que fiz na Marinha do Brasil que sempre estiveram dispostos quando precisei: Cordeiro, Jucivaldo, Keylla, Clairton Caldas e João Brito.

A PROPG/Reitoria pelo apoio financeiro.

"Faz-se ciência com os fatos, como se faz uma casa com pedras; mas uma acumulação de fatos não é ciência, assim como um monte de pedras não é uma casa.".

JULES HENRI POINCARÉ, matemático, físico e filósofo francês.

Resumo

Teixeira, R. M. N. **Crises de Fronteira em Aceleradores de Fermi.** 2013 57 p. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

Em 1949, na tentativa de explicar a aceleração dos raios cósmicos, Enrico Fermi propõe um modelo que tem recebido ampla atenção dos cientistas. O modelo consiste de uma partícula clássica colidindo entre duas paredes rígidas, na qual uma pode movimentar-se periodicamente no tempo enquanto que a outra está fixa. Vários modelos foram propostos no intuito de investigar a dinâmica decorrente desses modelos e suas propriedades. Trabalhamos aqui com o modelo Fermi-Ulam e com uma de suas variações após introduzida uma força externa do tipo biela-manivela, tanto para os casos conservativo quanto dissipativo. O foco principal do nosso trabalho foi a caracterização do evento de crise de fronteira no modelo Fermi-Ulam.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Sistemas Conservativos e Dissipativos. Acelerador de Fermi. Crise de fronteira.

Abstract

Teixeira, R. M. N. **Boundary Crisis in the Fermi's Acceleration** 2012 57 p. Dissertation (Master in Applied Physics) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

In 1949, as an attempt to explain the acceleration of cosmic rays, Enrico Fermi proposed a model which has largely received the attention of scientists. The model consists of a classical particle colliding between two rigid walls, in which one of then can move periodically in time while the other is fixed. Different models were proposed in order to investigate the dynamics resulting from them and their properties. In this work we consider the dynamics of the Fermi-Ulam model and an alternative version with an external force of type crank drive, for the conservative as well as dissipative cases. The main focus of our study was to characterize event of a boundary crisis in Fermi-Ulam model.

Keywords: Dynamical Systems. Conservative and Dissipative Systems. Fermi accelerator. Boundary crisis.

LISTA DE FIGURAS

2.1 *Ilustração do modelo Fermi-Ulam* . . . . . p. 20

2.2 *Figura ilustrando o referencial fixo, que corresponde às coordenadas x,y e as coordenas x',y' correspondem ao referencial da parede móvel.* . . . . . p. 21

2.3 *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle ε utilizado foi $\varepsilon = 0,001$.* . . . . . p. 27

2.4 *Pontos fixos para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle ε utilizado foi $\varepsilon = 0,001$.* . . . . . p. 30

2.5 *Expoentes de Lyapunov para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle ε utilizado foi $\varepsilon = 0,001$, para uma condição inicial dada no mar de caos ($V_0 = 0,0021$, $\phi_0 = 6,0$) e iterada 10^6.* . . . . . p. 34

2.6 *Expoentes de Lyapunov para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle utilizado foi $\varepsilon = 0,001$, para seis condições iniciais e foram realizadas 10^7 iterações.* . . . . . p. 35

2.7 *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam dissipativo utilizando $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0,93$.* . . . . . p. 36

2.8 *Expoentes de Lyapunov para o modelo Fermi-Ulam dissipativo. Foram utilizadas cinco condições iniciais distintas para $\varepsilon = 0,04$ e 10^5 iterações.* . . . . . p. 38

2.9 *Variedades estáveis e instáveis utilizando $m = 1$, $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 0,93624$ e $\beta = 1$. As variedades estáveis estão representadas pelas cores amarelo e vermelho; as variedades instáveis pelas cores verde e azul. O gráfico foi construído imediatamente antes da crise de fronteira.* . . . . . p. 40

2.10 *Variedades estáveis e instáveis utilizando $m = 1$, $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 0,9385$ e $\beta = 1$. O mesmo padrão de cores para as variedades foi mantida em relação à figura (2.9). O gráfico foi construído após a crise de fronteira.* . . . . . p. 41

3.1 *Ilustração do modelo Fermi-Ulam com perturbação do tipo biela-manivela.* . . . . . p. 43

3.2 *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo com perturbação do tipo biela-manivela. Os parâmetros utilizados foram* $r = 0,01$ *e* $\varepsilon = 0,001$. . . . . p. 45
3.3 *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo com perturbação do tipo biela-manivela para* $\varepsilon = 0,001$. *(a)* $r = 0,3$, *(b)* $r = 0,6$ *e (c)* $r = 0,9$. . . . . p. 46
3.4 *Comparação entre os modelos a)Fermi-Ulam e b)biela-manivela para* $r = 0,5$. *Para a construção das duas figuras foi utilizado o mesmo parâmetro de controle* $\varepsilon = 0,001$. . p. 48
3.5 *Atrator caótico para o modelo Fermi-Ulam com perturbação do tipo biela-manivela e para o modelo Fermi-Ulam, respectivamente. Os parâmetros de controle estão mostrados nas figuras.* . . . . . p. 51

SUMÁRIO

1 Introdução p. 13

2 Modelo Fermi-Ulam p. 19
2.1 O Modelo . . . p. 19
2.1.1 Colisões Sucessivas . . . p. 20
2.1.2 Colisões Simples ou Indiretas . . . p. 22
2.2 O Mapa . . . p. 24
2.3 Propriedades Dinâmicas para o Caso Conservativo . . . p. 24
2.3.1 Matriz Jacobiana . . . p. 25
2.3.2 Espaço de Fase . . . p. 27
2.3.3 Análise dos Pontos Fixos . . . p. 28
2.3.4 Cálculo dos Expoentes de Lyapunov . . . p. 30
2.4 Caso dissipativo . . . p. 35
2.4.1 Matriz Jacobiana . . . p. 36
2.4.2 Expoentes de Lyapunov . . . p. 37
2.4.3 Ponto fixo . . . p. 38
2.5 Crise de Fronteira no modelo Fermi-Ulam . . . p. 39

3 Modelo Fermi-Ulam com Perturbação do Tipo Biela-Manivela p. 42
3.1 O Modelo . . . p. 42
3.1.1 O Mapa . . . p. 43
3.2 Propriedades Dinâmicas para o Caso Conservativo . . . p. 44
3.2.1 Matriz Jacobiana . . . p. 46
3.3 Caso Dissipativo . . . p. 50
3.3.1 Matriz Jacobiana . . . p. 51

4 Conclusões e Perspectivas p. 54

Referências Bibliográficas p. 56

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os fenômenos naturais, em sua essência, são não-lineares. Em virtude disso, encontrou-se a motivação necessária para uma investigação aprimorada desses fenômenos. Mas há de se ressaltar que fora bastante evitado uma maior progressão nessa área, principalmente pelo domínio vigente das ideias deterministas[1].

Em meados do século XV, a consolidação da Mecânica Newtoniana nos ofereceu um grande avanço filosófico e científico, sobretudo, através do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Infinitesimal, onde os sistemas poderiam ser compreendidos e descritos como equações diferenciais[2]. A existência de uma lei da natureza que descrevia o que acontecia na Terra e no Sistema Solar era sólida e fantástica! A segurança da previsibilidade e o domínio das leis newtonianas provocaram uma limitação na comunidade científica por alguns séculos, onde a preocupação restringia-se em descrever fenômenos "bem comportados".

Investigando sobre o problema de três corpos[1] no final do século XIX, Poincaré observou uma grande complexidade nos resultados. As leis da física pareciam não prever o tanto quanto esperava-se; o mundo poderia até ser bem determinado, mas era bem sensível às condições iniciais. Refutando ao que houvera dito Laplace[3]: *"Devemos considerar o estado presente do universo como efeito dos seus estados passados e como causa dos que se vão seguir. Suponha-se uma inteligência que pudesse conhecer todas as forças pelas quais a natureza é animada e o estado em um instante de todos os objetos - uma inteligência suficientemente grande que pudesse submeter todos esses dados à análise - ela englobaria*

[1] Um problema não linear e não integrável.

na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e também dos menores átomos: nada lhe seria incerto e o futuro, assim como o passado, estaria presente ante aos seus olhos (Laplace)" (a "inteligência" descrita nessa afirmação ficou conhecida como "O Demônio de Laplace")[4]. Poincaré, após seus estudos sobre esse problema[5], afirma: *"Se conhecessemos perfeitamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, estaríamos aptos a predizer a situação do mesmo universo em um instante subsequente. Mas mesmo quando as leis da natureza não são um segredo para nós, podemos conhecer a situação inicial apenas aproximadamente. Se tal nos permitisse prever a situação subsequente com o mesmo grau de aproximação, isto seria tudo o que desejaríamos e diríamos que o fenômeno foi previsto, que ele é regido por leis. Mas não é sempre assim; pode acontecer que pequenas diferenças na situação inicial produzam grandes diferenças nos fenômenos finais; um erro antecedente pode produzir um erro enorme depois. A predição se torna impossível e temos um fenômeno fortuito (Poincaré)".* No caso do problema de três corpos havia uma perturbação planetária intensa que não era tão relevante ao problema de dois corpos. Então, levantou Poincaré uma questão: Será que essas interações podem ser eliminadas? Concluiu ele que isso não era possível pelo aparecimento de ressonâncias[2] entre as frequências do sistema dinâmico, levando os resultados ao aparecimento de divergências. Esse resultado era, na época, no máximo uma curiosidade.

O trabalho de Poincaré mostra uma diferença essencial entre sistemas em que as interações podem ser eliminadas e os que não podem - esses sistemas foram classificados como integráveis e não integráveis[3], respectivamente. Com a formulação da teoria KAM[6] (iniciais dos nomes dos cientistas soviéticos Kolmogorov, Arnol'd e Moser) onde um dos principais resultados foi demonstrar que levando em consideração as ressonâncias aparecem dois tipos de trajetórias: as regulares deterministas e as irregulares "imprevisíveis" causadas em decorrência da ressonância. A teoria KAM classifica as trajetórias mas não oferece uma solução para o problema da integrabilidade. Hoje, com o advento de modernos computadores, o problema continua sem solução analítica, porém factível através dos métodos de integração numérica. O problema apresentado por Poincaré é uma manifestação clara do anseio determinista em associar o ideal da física clássica com as divergências apresentadas pelo observado, buscando soluções simétricas na direção do tempo.

A partir de meados da década de 60, com os trabalhos de Lorenz[7] sobre problemas atmosféricos, observou-se que uma pequena variação nas condições iniciais poderia acarretar grandes diferenças na evolução do sistema. Esse trabalho baseava-se na descrição

[2]Tendência de um sistema a oscilar em certas frequências ou comprimentos de onda com amplitudes máximas.

[3]Um sistema é dito ser integrável quando o número de constantes de movimento do sistema é igual ao número de graus de liberdade.

matemática através de equações diferenciais ordinárias modelando os rolos de convecção existentes na atmosfera. As equações diferencias estudadas por Lorenz representadas em um gráfico tridimensional mostravam que essas órbitas convergiam à um atrator para as quais nunca se cruzavam entre si. O atrator é um ponto (ou um conjunto de pontos) para o qual uma órbita evolui após um tempo suficientemente longo. A saber, este fenômeno, descrito outrora, ficou conhecido como efeito borboleta [8], fazendo alusão a forma do atrator de Lorenz, cuja aparência lembrava uma borboleta. E não só a forma: a sensibilidade às condições inicias remetiam ao fato de que, segundo a cultura popular, se uma borboleta batesse as asas em um lugar isso poderia provocar um tufão no outro lado do mundo. O trabalho de Lorenz[7] de 1963, dá origem a nova teoria física - A Teoria do Caos. A ideia de que os sistemas clássicos deterministas podiam levar à uma aleatoriedade intrigavam os cientistas, agregando assim, à nova teoria, cada vez mais um número maior de seguidores. E não só isso: a comunidade científica em diversos ramos parecia cercada por fenômenos dessa natureza - na física, na economia, na biologia - de forma tal forma que ficou evidente que uma nova ciência estava surgindo.

Os cientistas começaram a ser cercados com as não linearidades cada vez mais evidentes e emergentes em todas as áreas incluindo: dinâmica de populações[9], atmosfera[10], economia[11], sistemas físicos[12], entre vários outros. Embora a previsibilidade da teoria linear fosse bem sucedida ficava mais difícil negar a evidência da não linearidade. E os cientistas de meados do século XX começaram a se debruçar sobre esses problemas e a ferramenta que fornecia uma melhor análise e compreensão disso era o computador e seus avanços numéricos.

O caos pode ser associado à imprevisibilidade dos resultados e sensibilidade do sistema às condições iniciais e é uma possibilidade de comportamento de um sistema não-linear dentre inúmeras outras. Entende-se por sistema dinâmico um conjunto de equações que envolve os mesmos conjuntos de variáveis evoluindo ao longo do tempo. Para a descrição de sistemas não-lineares e caóticos, são utilizados dois modelos matemáticos: as equações diferenciais e os mapas[13]. As equações diferenciais são contínuas no tempo e normalmente são não lineares. Os mapas descrevem uma evolução temporal discreta em função das iterações anteriores das variáveis relevantes ao sistema, definindo assim o seu estado. Para uma maior compreensão de sistemas desse tipo, faz-se necessária a utilização de simulações computacionais, onde serão verificadas as propriedades e variações desses sistemas sensíveis às suas condições iniciais e aos seus parâmetros de controle. Ao conjunto de estados acessíveis formados pela evolução temporal das variáveis relevantes ao sistema chamamos de espaço de fase, do qual observamos as órbitas, ou seja, um conjunto de estados formados a partir de uma dada condição inicial, evoluídos no tempo. Portanto, o espaço de fase exibe o comportamento dinâmico de um sistema, permitindo assim a caracterização de sua estrutura. Nele podem ser observados os comportamentos que vão

desde o regular ao complexo.

Se há uma sensibilidade às condições iniciais significando que o sistema é caótico, existe uma importante ferramenta que mede esse caos chamada de Expoentes de Lyapunov[14]. Tendo em vista que duas condições iniciais muito próximas podem se afastar exponencialmente dizemos que há caos e esse expoente é positivo; se essas órbitas não se afastarem ou se esse afastamento for linear dizemos que o comportamento é regular e o expoente de Lyapunov é negativo ou nulo.

A motivação inicial para o estudo do acelerador de Fermi remete ao trabalho de Enrico Fermi em 1949[15], onde há uma tentativa de explicar a aceleração dos raios cósmicos que viajam no meio interestelar através de um modelo interativo destes com campos magnéticos oscilantes. Então, é proposto um sistema dinâmico em que uma partícula colida elasticamente (sem perdas de energia nos choques) com uma parede rígida que oscile periodicamente com o tempo, exercendo assim o papel dos raios cósmicos e dos campos magnéticos oscilantes, respectivamente. Como mecanismo de retorno, é introduzida uma parede rígida a uma certa distância da parede móvel. Esse modelo foi proposto por Stanislaw Ulam [16] e ficou conhecido como Modelo Fermi-Ulam (FUM - Fermi-Ulam model), Modelo de Fermi ou Acelerador de Fermi. Desde então, os cientistas tem dedicado-se a estudar esses modelos com diversas variações, em que trataremos aqui do próprio modelo Fermi-Ulam e o modelo com perturbação do tipo biela-manivela[17, 18].

Estudamos o modelo Fermi-Ulam (FUM) unidimensional nos casos conservativo e dissipativo. O modelo consiste de uma partícula clássica confinada entre duas paredes rígidas: uma delas oscila periodicamente no tempo enquanto a outra está fixa. Consideramos colisões do tipo elásticas, indicado como caso conservativo e colisões do tipo inelásticas[4] para o caso dissipativo. Consideramos ainda ausência de campo gravitacional ou quaisquer outros campos. No caso conservativo, encontramos um espaço de fase misto, coexistindo uma região de mar de caos, ilhas de KAM e curvas invariantes tipo *spanning* limitando esse mar de caos. Observamos também no espaço de fase a transição de integrabilidade para não integrabilidade quando mudamos o parâmetro de controle ε que controla a intensidade da não linearidade da equação de $\varepsilon = 0$ para $\varepsilon \neq 0$. Quando esse parâmetro é nulo, as constantes de movimento são iguais ao número de graus de liberdade do sistema. No entanto, se aumentarmos esse parâmetro, percebemos a formação do espaço de fase misto, contendo ilhas de estabilidade, mares de caos e curvas invariantes do tipo *spanning*. As variáveis dinâmicas as quais representamos no espaço de fase são a velocidade e a fase (v, ϕ), respectivamente.

Veremos que ao introduzir as colisões inelásticas, ou seja, tornando o caso dissipativo, a dinâmica será afetada drasticamente, verificada pela presença de um atrator caótico

[4]Onde há uma perda fracional de energia a cada colisão.

no espaço de fase. Consequentemente, observamos uma contração de área no espaço de fase e atratores são observados. Portanto, um conjunto de condições iniciais é levado a um mesmo conjunto de órbitas após um tempo suficientemente longo.

Embora o modelo Fermi-Ulam tenha sido proposto no intuito de verificar a aceleração de Fermi veremos que esse fenômeno não é observado no modelo, isto é, não há um ganho ilimitado de energia da partícula. Tal fenômeno não é observado devido ao movimento suave da fronteira móvel devido a correlação entre os choques no regime de alta energia. Porém, se a perturbação da fronteira for aleatória, o fenômeno da aceleração de Fermi será observado. Desde então, os cientistas tem dedicado-se a estudar esses modelos com diversas variações.

Um outro modelo amplamente estudado é modelo *bouncer*[19], que consiste em uma partícula clássica sob ação da gravidade, em movimento unidimensional, que colide em uma plataforma que movimenta-se periodicamente com o tempo. Ao colidir, a partícula retorna à plataforma através da ação do campo gravitacional. Uma diferença entre o modelo Fermi-Ulam e o modelo *bouncer* é que dependendo da combinação das condições iniciais e parâmetros de controle, o fenômeno da aceleração de Fermi é observado - um crescimento ilimitado de energia da partícula.

O modelo Fermi-Ulam com perturbação do tipo biela-manivela[17] é descrito tal qual o modelo Fermi-Ulam, exceto o mecanismo que faz a parede móvel oscilar, associada a uma biela-manivela. Nesse caso, haverá o acréscimo de um parâmetro r, que está diretamente associado à não linearidade das equações. Veremos que para determinados valores do parâmetro r o modelo poderá apresentar o fenômeno da aceleração de Fermi. Estudamos este modelo nos casos conservativo e dissipativo.

O principal objetivo deste trabalho é a caracterização de evento de crises de fronteira [20],[21] em aceleradores de Fermi. A crise ocorre quando há uma variação no parâmetro de controle e os atratores mudam repentinamente ou são destruídos abruptamente. De fato, três tipos de crise:

(i) a crise de fronteira[20, 21, 22, 23],

(ii) a crise interior[20], e

(iii) a crise unindo atratores[24].

A crise de fronteira ocorre quando uma órbita periódica instável cruza um atrator provocando a destruição deste, sendo substituído por um transiente caótico. A crise interior ocorre quando um atrator colide com uma órbita instável posicionada ao interior desse atrator. Antes da crise esse atrator era formado por três bandas e, após a crise, o

atrator é formado por uma única banda. A crise unindo atratores ocorre quando dois ou mais atratores colidem com uma órbita instável resultando em atratores comuns.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos e discutimos com riqueza de detalhes todos os passos necessários para a construção do modelo do Acelerador de Fermi. Os casos conservativo e dissipativo são discutidos em seções distintas ao longo do mesmo capítulo. O modelo Fermi-Ulam como perturbação do tipo biela-manivela é apresentado no capítulo 3, para o qual apresentamos os casos conservativo e dissipativo. No capítulo 4 apresentamos as conclusões e perspectivas e no capítulo 5 as referências bibliográficas.

CAPÍTULO 2

MODELO FERMI-ULAM

Abordaremos neste capítulo o modelo do acelerador de Fermi-Ulam para ambos os casos conservativo e dissipativo.

2.1 O Modelo

Em 1949, Enrico Fermi[15] propõe uma explicação sobre a aceleração dos raios cósmicos. Segundo ele, partículas carregadas que viajam no meio interestelar seriam aceleradas pela presença de campos eletromagnéticos oscilantes provindos de estrelas e galáxias. Baseado nessa proposta, vários cientistas se dispuseram ao estudo modelando a ideia inicial de Fermi em vários contextos. Stanislaw Ulam[16] propos um modelo em que uma partícula estaria confinada entre duas paredes rígidas, colidindo entre elas, sendo uma delas periódica no tempo e a outra fixa. A partícula é clássica e de massa unitária; as paredes possuem massa, muito maiores que a da partícula de modo que no momento das colisões não hajam deformações nas mesmas, de acordo com a figura 2.1.

A parede móvel está localizada em $x = l$ em relação à parede fixa quando esta estiver na posição de equilíbrio. A parede que oscila periodicamente com o tempo tem o seu movimento definido por $x_w = \varepsilon' \cos \omega t$, onde ε é a amplitude de oscilação da parede móvel e ω é a frequência angular da oscilação. Não há presença de campo gravitacional ou quaisquer outros campos. Isso implica que a partícula se move com velocidade constante entre os choques.

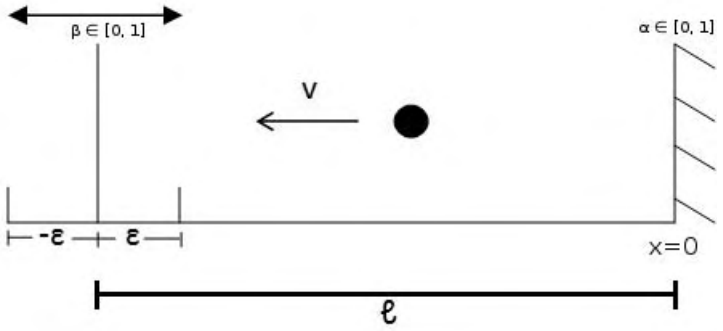


Figura 2.1: *Ilustração do modelo Fermi-Ulam*

Os termos α e β correspondem aos coeficientes de restituição e denotam a dissipação introduzida nas paredes, sendo que α é o coeficiente de dissipação na parede fixa e pertence ao intervalo $[0,1]$ e β é o coeficiente de dissipação na parede móvel, pertencendo ao intervalo entre $[0,1]$.

A dinâmica do modelo pode ser descrita utilizando um mapeamento discreto nas variáveis velocidade v e no instante da colisão t. Para isso, partiremos do princípio que a partícula já houvera colidido com a parede num instante t_n. Então, para esse instante, $x_w(t_n) = x_p(t_n)$, onde x_p é a posição em que se encontra a partícula nesse instante inicial e x_w representa a posição da parede móvel. No entanto, a partícula poderá, após partirmos do princípio que houve uma colisão, ainda ter dois tipos possíveis de colisões:

(i) Colisões múltiplas ou diretas: ocorrem quando a partícula colide com a parede móvel e, antes de sair da zona de colisão, sofre outras colisões; ou

(ii) Colisões simples ou indiretas: ocorrem quando a partícula abandona a zona de colisão, colide com a parede fixa e retorna à zona de colisão.

A zona de colisão é o intervalo compreendido entre $x \in [-\varepsilon', \varepsilon']$ a partícula poderá sofrer colisões com a parede móvel. Primeiramente, descreveremos o caso para as colisões sucessivas.

2.1.1 Colisões Sucessivas

Neste caso, após uma colisão, a partícula não abandona a zona de colisão, colidindo com a parede móvel outras vezes. Como em $t = t_n$ já houve uma colisão e a partícula não saiu ainda da zona de colisão, então podemos concluir que na próxima colisão, num instante t_{n+1} a posição da parede e da partícula será: $x_p(t_{n+1}) = x_0 + v_n(\Delta t)$, para os quais $x_0 = x_p(t_n)$, v_n é a velocidade da partícula e Δt o instante em que ocorre a colisão.

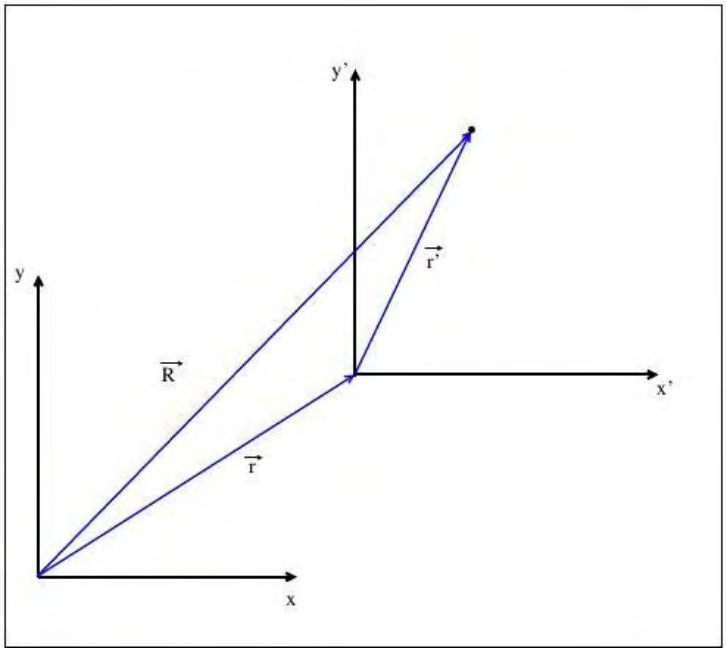


Figura 2.2: *Figura ilustrando o referencial fixo, que corresponde às coordenadas x,y e as coordenas x',y' correspondem ao referencial da parede móvel.*

$\Delta t = t - t_n$, $t \geq t_n$. Portanto:

$$\begin{aligned} x_w(t_{n+1}) &= x_p(t_{n+1}), \\ \varepsilon' \cos(\omega t_{n+1}) &= \varepsilon' \cos(\omega t_n) + v_n t_c, \end{aligned}$$

para o qual t_c é obtido da solução numérica de:

$$g(t_c) = \varepsilon' \cos[\omega(t_n + t_c)] - \varepsilon' \cos(\omega t_n) - v_n t_c = 0. \tag{2.1}$$

Quando $g(t_c) = 0$ concluímos que no tempo t_c houve uma colisão. A função $g(t_c)$ tem solução no intervalo $t_c \in (0, \frac{2\pi}{\omega}]$. Se a equação Eq.(2.1) não admitir solução nesse intervalo, significa que a partícula abandonou a zona de colisão sem sofrer colisões múltiplas com a parede móvel e uma colisão indireta irá ocorrer.

A velocidade da partícula é obtida considerando a conservação do momentum e da energia no referencial da parede móvel, de acordo com a figura 2.2.

A posição da partícula em relação ao referencial fixo é representada por $\vec{R}$, a posição da parede em relação ao referencial inercial é dada por $\vec{r}$ e a posição da partícula em relação ao referencial da parede (não-inercial) é $\vec{r'}$. Portanto:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r'}.$$

Derivando em relação tempo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d\vec{r'}}{dt}, \\ \vec{V} &= \vec{v}+\vec{v'}, \\ \vec{v'_p} &= \vec{v_p}-\vec{v_w}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que da Eq.(2.2) temos que $\vec{v'_p}$, $\vec{v_p}$ e $\vec{v_w}$ são, respectivamente, a velocidade da partícula no referencial da parede móvel, a velocidade da partícula em relação ao referencial fixo e a velocidade da parede móvel.

Após a colisão, pela condição de reflexão, temos que:

$$\begin{aligned} v'_p(depois) &= -\beta v'_p(antes), \\ (v_{n+1}-v_w) &= -\beta(v_n-v_w), \\ v_{n+1} &= -\beta v_n+(1+\beta)v_w. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Da Eq.(2.3), v_n é a velocidade da partícula antes da colisão e v_{n+1} é a velocidade da partícula após a colisão.

A velocidade da parede móvel é dada pela derivada de sua posição, ou seja

$$v_w = \frac{dx_w}{dt} = -\varepsilon'\omega\sin(\omega t). \tag{2.4}$$

Substituindo a Eq.(2.4) na Eq.(2.3) obteremos:

$$v_{n+1} = -\beta v_n-(1+\beta)\varepsilon'\omega\sin(\omega t_{n+1}). \tag{2.5}$$

Como a partícula não abandona a zona de colisão, o tempo em que o próximo choque (t_{n+1}) ocorrerá é dado por $t_{n+1} = t_n + t_c$.

Portanto, construímos o mapa T_m para o caso de colisões múltiplas dado por:

$$T_m : \begin{cases} v_{n+1} = -\beta v_n-(1+\beta)\varepsilon'\sin(\omega t_{n+1}) \\ t_{n+1} = t_n + t_c \end{cases}, \tag{2.6}$$

onde T_m é um operador que conduz a dinâmica das variáveis (v_n, t_n) ao estado (v_{n+1}, t_{n+1}) através de uma evolução temporal.

2.1.2 Colisões Simples ou Indiretas

Para este tipo de colisão, consideramos que a partícula sofre apenas uma colisão com a parede móvel e retorna à parede fixa, onde é refletida, sofrendo assim outra colisão com

a parede móvel. Portanto, consideraremos aqui o tempo necessário para que a partícula realize esse percurso. Para isso, tomamos em consideração o ponto inicial dessa trajetória sendo pressuposto que a partícula já houvera colidido em um tempo t_n. Então, $x_w(t_n) = x_p(t_n) = \varepsilon' \cos(\omega t_n)$. De acordo com a figura 2.1, ela viaja para a direita (t_d), colide com a parede fixa, viaja para a esquerda t_e e adentra a zona de colisão. O instante do choque será designado por t_c. Lembramos ainda que há o coeficiente de dissipação α na parede fixa. Descrevendo em equações o tempo de viagem para a direita, teremos que:

$$t_d = \frac{l - \varepsilon' \cos(\omega t_n)}{v_n}. \tag{2.7}$$

Por outro lado, o tempo de viagem para a esquerda, temos:

$$t_e = \frac{l - \varepsilon'}{\alpha v_n}. \tag{2.8}$$

Quando a partícula entra na zona de colisão, sua posição será $x_p = \varepsilon' - \alpha v_n t_c$. Logo:

$$x_w(t_{n+1}) = x_p(t_{n+1}), \tag{2.9}$$

$$\varepsilon' \cos[\omega(t_n + t_d + t_e + t_c)] = \varepsilon' - \alpha v_n t_c. \tag{2.10}$$

Assim, podemos definir $f(t_c)$ como:

$$f(t_c) = \varepsilon' \cos[\omega(t_n + t_d + t_e + t_c)] - \varepsilon' + \alpha v_n t_c. \tag{2.11}$$

Pela Eq.(2.11), quando $f(t_c) = 0$ a partícula sofreu um choque, cujo instante $t_c \in [0, \frac{2\pi}{\omega})$.

Fazendo o mesmo procedimento de conservação do momentum e da energia no referencial da parede móvel, obteremos:

$$\begin{aligned} v'_p(depois) &= -\beta v'_p(antes), \\ (v_{n+1} - v_w) &= -\beta(-\alpha v_n - v_w), \\ v_{n+1} &= \beta\alpha v_n + (1+\beta) v_w. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Considerando a expressão da velocidade da fronteira, temos que:

$$v_{n+1} = \beta\alpha v_n + (1+\beta)\varepsilon' \sin(\omega t_{n+1}). \tag{2.13}$$

O instante t_{n+1} é dado por $t_{n+1} = t_n + t_d + t_e + t_c$. Então, o mapa T_s é escrito como:

$$T_s : \begin{cases} v_{n+1} = \alpha\beta v_n - (1+\beta)\varepsilon' \sin(\omega t_{n+1}) \\ t_{n+1} = t_n + t_d + t_e + t_c \end{cases}, \tag{2.14}$$

onde T_s é o operador que conduz as variáveis (v_n, t_n) através de uma evolução temporal às novas variáveis (v_{n+1}, t_{n+1}).

2.2 O Mapa

Notamos da construção do mapeamento que existem três parâmetros de controle e que nem todos eles são relevantes para descrever a dinâmica do sistema. Assim, podemos ainda definir variáveis adimensionais e portanto mais convenientes à dinâmica, como $V_n = \frac{v_n}{\omega l}$ (fazendo o mesmo também para V_{n+1}), $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{l}$ e $\phi_n = \omega t_n$ (fazendo o mesmo para ϕ_{n+1}, ϕ_d, ϕ_e e ϕ_c) tornando-as adimensionais e diminuindo assim a quantidade de parâmetros de controle.

O mapeamento para as colisões múltiplas e simples poderá ser condensado em um único mapa, de modo que:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - (1+\beta)\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n^*] \mod (2\pi) \end{cases}, \tag{2.15}$$

de modo que as variáveis V_n^* e ΔT_n^* do mapa (2.15) correspondem ao tipo de colisão ocorrida. Quando a colisão for múltipla, essas variáveis serão: $V_n^* = -\beta V_n$ e $\Delta T_n^* = \phi_c$. A Eq.(2.1) será dada por

$$G(\phi_c) = \varepsilon \cos(\phi_{n+1}) - \varepsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c = 0, \tag{2.16}$$

cuja solução é obtida quando $\phi_c \in (0, 2\pi]$. Quando a ocorrerem colisões simples, as variáveis serão: $V_n^* = \alpha\beta V_n$ e $\Delta T_n^* = \phi_d + \phi_e + \phi_c$. A Eq.(2.11) tornar-se-á

$$F(\phi_c) = \varepsilon \cos(\phi_{n+1}) - \varepsilon + \alpha V_n \phi_c = 0, \tag{2.17}$$

cuja solução é obtida quando $\phi_c \in [0, 2\pi)$.

2.3 Propriedades Dinâmicas para o Caso Conservativo

Discutiremos nesta seção a dinâmica do modelo Fermi-Ulam unidimensional para o caso conservativo. Esse modelo considera apenas colisões elásticas com as paredes, e a velocidade da partícula entre elas é determinada após cada choque e mantida constante entre as viagens, pois não há perdas fracionais de energia.

Quando $\alpha = \beta = 1$ recuperamos o caso conservativo. Portanto, o mapa para este caso será:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n^*] \mod (2\pi) \end{cases}, \tag{2.18}$$

para os quais V_n^* e ΔT_n^* dependem do tipo de colisão ocorrida.

Para as múltiplas colisões, $V_n^* = -V_n$ e $\Delta T_n^* = \phi_c$, onde ϕ_c é obtido da menor solução de

$$G(\phi_c) = \varepsilon\cos(\phi_{n+1}) - \varepsilon\cos(\phi_n) - V_n\phi_c = 0, \tag{2.19}$$

para $\phi_c \in (0, 2\pi]$.

Caso o tipo de colisão ocorrida seja a indireta, $V_n^* = V_n$ e $\Delta T_n^* = \phi_d + \phi_e + \phi_c$, no qual ϕ_c é obtido da menor solução de

$$F(\phi_c) = \varepsilon\cos(\phi_{n+1}) - \varepsilon + V_n\phi_c = 0, \tag{2.20}$$

com $\phi_c \in [0, 2\pi)$.

2.3.1 Matriz Jacobiana

A matriz jacobiana pode ser utilizada para a obtenção dos expoentes de Lyapunov [14] e estudo da dinâmica de um sistema linearizado, ou seja, cujo comportamento é estudado em torno de soluções periódicas, ou conhecido também como ponto fixo [13].

Para o mapeamento definido pela Eq.(2.18) ela é escrita:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

considerando o tipo de colisão ocorrida. Considerando inicialmente as colisões múltiplas, os coeficientes da matriz jacobiana serão:

$$J_{11} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = -1 - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n},$$

$$J_{12} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n},$$

$$J_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n},$$

$$J_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}.$$

Podemos obter $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ derivando implicitamente a Eq.(2.19), na qual obtemos:

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{-\phi_c}{V_n + \varepsilon\sin(\phi_{n+1})} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon\sin(\phi_{n+1}) - \varepsilon\sin(\phi_n)}{-\varepsilon\sin(\phi_{n+1}) - V_n}.$$

O determinante da matriz jacobiana tem como principal característica mostrar o que acontece com a área no espaço de fase depois de uma evolução temporal. Sabemos, pelo Teorema de Liouville [25], que em sistemas conservativos a área no espaço de fase

deve ser preservada, para o qual devemos obter $\det(J) = \pm 1$. Porém, considerando que as variáveis em questão não são canônicas (as variáveis canônicas seriam a energia e o tempo), o determinante não será igual à 1, mas preservará uma certa medida. De fato, o determinante é dado por

$$\det(J) = \frac{V_n + \varepsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})}. \tag{2.22}$$

Para colisões simples, os coeficientes da matriz jacobiana serão dados por:

$J_{11} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = -2\varepsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}$,

$J_{12} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2\varepsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}$,

$J_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$,

$J_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$.

Lembrando que $\phi_d = \frac{1-\varepsilon\cos(\phi_n)}{V_n}$ e $\phi_e = \frac{1-\varepsilon}{V_n}$, para as quais $\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} = \frac{-1+\varepsilon\cos(\phi_n)}{V_n^2}$, $\frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon \sin(\phi_n)}{V_n}$ e $\frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} = \frac{-1+\varepsilon}{V_n^2}$, $\frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} = 0$.

Os termos $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ são obtidos derivando implicitamente a Eq.(2.20) e são expressos por:

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{-\phi_c + \varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \frac{\varepsilon(1+\cos(\phi_n)-2)}{V_n^2}}{V_n - \varepsilon \sin(\phi_{n+1})} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon \sin(\phi_{n+1})[1 + \frac{\varepsilon \sin(\phi_n)}{V_n}]}{V_n - \varepsilon \sin(\phi_{n+1})}.$$

O determinante da matriz jacobiana para este caso será:

$$\det(J) = \frac{V_n + \varepsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})}. \tag{2.23}$$

Considerando que a área no espaço de fase evolui do instante n para $n+1$, de acordo com o determinante da matriz jacobiana, temos que

$$\begin{aligned} dA_{n+1} &= \left[\frac{V_n + \varepsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})}\right] dA_n, \\ dA_{n+1}[V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})] &= [V_n + \varepsilon \sin(\phi_n)] dA_n, \\ d\mu_{n+1} &= d\mu_n, \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde $d\mu = (V + \varepsilon \sin\phi) dV d\phi$.

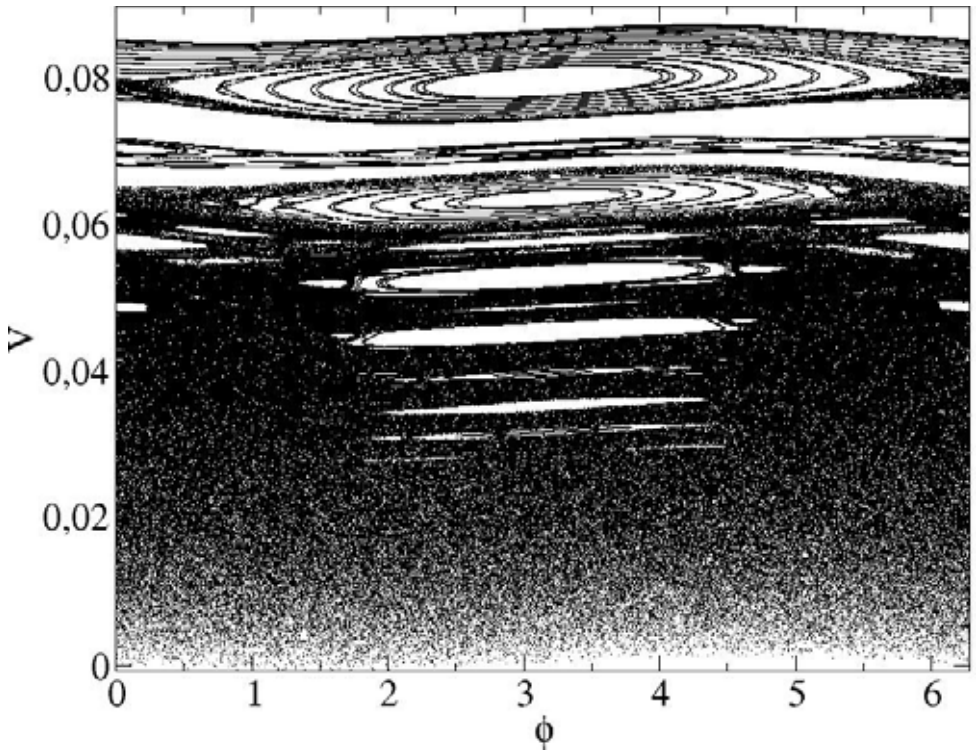


Figura 2.3: *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle* ε *utilizado foi* $\varepsilon = 0,001$.

2.3.2 Espaço de Fase

O espaço de fase é uma representação das variáveis dinâmicas relevantes ao sistema dinâmico. É o conjunto de todos os estados acessíveis que evoluem no tempo a partir de um estado inicial do sistema. Para tal evolução, o sistema percorre pontos do espaço de fase, dando origem às órbitas. Portanto, o espaço de fase também é o conjunto de todas as órbitas possíveis. O espaço de fase pode exibir estruturas de formas diversas, contendo organizações diferentes e arranjos. Falaremos sobre o espaço de fase do modelo Fermi-Ulam conservativo e as estruturas observadas. A fig.(2.3) mostra o espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam considerando $\varepsilon = 0,001$. Para a construção da figura 2.3 foram utilizadas 200 condições iniciais através da iteração do mapa Eq.(2.18). A grade de condições iniciais construídas para a fase $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ foi dividida em 20 incrementos igualmente espaçados ao passo que para a grade construída para a velocidade V, foi realizada uma divisão de 10 incrementos também igualmente espaçados iniciando em $V_0 \in [0,0175, 0,085]$. Cada condição inicial foi iterada 10^3 vezes.

Analisando o espaço de fase, percebemos a presença de uma rica estrutura, onde curvas invariantes tipo *spanning* coexistem com ilhas de estabilidade e mares de caos. As curvas invariantes são assim ditas por serem invariantes por iteradas. Elas são observadas num regime de altas energias e a curva invariante de mais baixa energia limita o mar de caos. Observamos ainda que essas curvas separam um caos global (mar de caos) de um

caos local (região de caos acima da primeira curva *spanning*). As ilhas de estabilidade são caracterizadas por comportamentos periódicos ou quase-periódicos. Pelas propriedades do determinante da matriz jacobiana, uma condição inicial dada no interior de uma ilha jamais sairá dela e, da mesma maneira, uma dada condição inicial gerada no mar de caos não visitará uma ilha. Fisicamente, essas ilhas de periodicidade representam um movimento periódico entre os choques da partícula e a fase da parede móvel. Veremos mais adiante que nessas ilhas localizar-se-á pontos de estabilidade ou pontos fixos. O mar de caos aparece em regime de baixas energias, representando fisicamente uma certa aleatoriedade entre a fase da parede móvel e os choques.

2.3.3 Análise dos Pontos Fixos

Os pontos fixos são obtidos através da condição $V_{n+1} = V_n = V^*$ e $\phi_{n+1} = \phi_n = \phi^* + 2m\pi$, onde $m = 1, 2, ...$ Então, substituindo tais condições no mapa (2.18), encontramos:

$$\phi^* = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \tag{2.25}$$

para o qual $v^* = \frac{1-\varepsilon\cos(\phi^*)}{m\pi}$. Substituindo Eq.(2.25), teremos dois pontos fixos:

$$(V_1^*, \phi_1^*) = \left(\frac{1-\varepsilon}{m\pi}, 0\right), \tag{2.26}$$

e

$$(V_2^*, \phi_2^*) = \left(\frac{1+\varepsilon}{m\pi}, \pi\right). \tag{2.27}$$

Para analisar a estabilidade desses pontos fixos devemos substituí-los na matriz jacobiana. Então, os elementos da matriz jacobiana avaliada no ponto fixo da Eq.(2.26) serão:

$$J_{11}^* = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = 1 - 2(2m\pi)^2 \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{(1-\varepsilon)^2},$$

$$J_{12}^* = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2\varepsilon,$$

$$J_{21}^* = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = 2(m\pi)^2 \frac{(\varepsilon-1)}{(1-\varepsilon)^2},$$

$$J_{22}^* = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1.$$

Para encontrar os autovalores da matriz jacobiana, usamos a propriedade[13]:

$$\det(J^* - \nu I) = 0, \tag{2.28}$$

onde J^* é a matriz jacobiana avaliada no ponto fixo; ν é o autovalor e I é a matriz

identidade. A partir da Eq.(2.28), o ponto fixo da Eq.(2.26) resulta no polinômio

$$\det(J^* - \nu I) = \nu^2 - \nu\left[(2m\pi)^2\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} + 2\right] + 1, \tag{2.29}$$

onde chamamos de traço da matriz jacobiana o termo

$$Tr(J^*) = \left[(2m\pi)^2\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} + 2\right] > 0. \tag{2.30}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \nu^2 + \nu(TrJ^*) + 1 = 0, \\ \nu_\pm = \frac{TrJ^* \pm \sqrt{(TrJ^*)^2 - 4}}{2}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

A partir da análise de TrJ^*, podemos classificar os pontos fixos em:

(i) Se $|TrJ^*| < 2 \rightarrow$ Ponto fixo elíptico;

(ii) Se $|TrJ^*| = 2 \rightarrow$ Ponto fixo parabólico;

(iii) Se $|TrJ^*| > 2 \rightarrow$ Ponto fixo hiperbólico.

Como $TrJ > 2$ para o ponto fixo (2.26), concluímos que eles são pontos fixos hiberbólicos.

Fazendo o mesmo procedimento para Eq.(2.27), os elementos da matriz jacobiana serão dados por:

$J^*_{11} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = 1 - \frac{\varepsilon(2m\pi)^2}{(1+\varepsilon)}$,

$J^*_{12} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = 2\varepsilon$,

$J^*_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{-2(m\pi)^2}{(1-\varepsilon)}$,

$J^*_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1$.

Usando a Eq.(2.28), o polinômio será:

$$\det(J^* - \nu I) = \nu^2 + \nu\left[\frac{\varepsilon(2m\pi)^2}{(1+\varepsilon)} - 2\right] + 1, \tag{2.32}$$

onde chamamos de traço da matriz jacobiana o termo

$$Tr(J^*) = \left[\frac{\varepsilon(2m\pi)^2}{(1+\varepsilon)} - 2\right]. \tag{2.33}$$

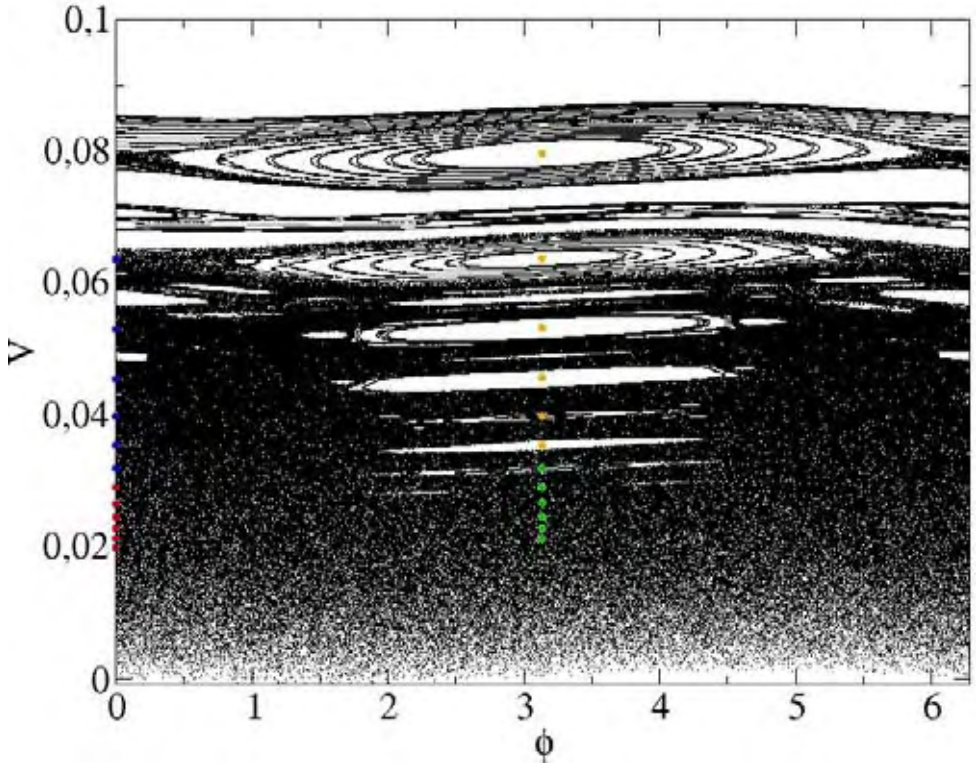


Figura 2.4: *Pontos fixos para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle* ε *utilizado foi* $\varepsilon = 0,001$.

Utilizando a Eq.(2.31) para o ponto fixo $(V_2^*, \phi_2^*) = (\frac{1+\varepsilon}{m\pi}, \pi)$, a expressão para m será dada por:

$$m = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}. \tag{2.34}$$

Substituindo a Eq.(2.34) em $V^* = \frac{1+\varepsilon}{m\pi}$ para o parâmetro de controle $\varepsilon = 0,001$:

$$m \cong 10,07 \begin{cases} V^* \cong 0,031 \\ \phi^* = \pi \end{cases}, \tag{2.35}$$

logo se $m > 10$ temos ponto fixo hiperbólico e se $m \geq 10$ temos ponto fixo elíptico.

A figura 2.4 representa a localização dos pontos fixos encontrados analiticamente.

2.3.4 Cálculo dos Expoentes de Lyapunov

A presença de expoentes de Lyapunov positivo é um importante indicador da presença de caos em um sistema dinâmico. A relação consiste em verificar se a partir de duas condições iniciais próximas haverá uma divergência exponencial entre elas para tempos suficientemente longos. Caso o afastamento entre essas órbitas seja linear, podemos dizer que o sistema é regular e não há perdas de previsibilidade; se o afastamento for exponen-

cial, o sistema poderá ter componentes que indiquem a existência de caos. Vejamos como isso ocorre.

Inicialmente, suponhamos que a dinâmica seja dada por um mapeamento tipo

$$x_{n+1} = \tilde{F}(x_n) \tag{2.36}$$

para o qual $\tilde{F}$ seja uma função não linear qualquer de duas variáveis. Utilizando uma condição inicial x_0 e uma condição inicial próxima $x_0 + \delta_0$ e iterando o mapa Eq.(2.36) após n iterações, teremos:

$$\delta_n = |\tilde{F}^{(n)}(x_0 + \delta_0) - \tilde{F}^{(n)}(x_0)| \tag{2.37}$$

para o qual δ_n é a distância entre as órbitas e n identifica a enésima composição de $F(x_0)$. Supondo que o afastamento entre as órbitas seja exponencial, então

$$\delta_n \cong \delta_0 e^{\lambda n}. \tag{2.38}$$

Aplicando o logarítmo em ambos os lados da equação (2.38) temos:

$$\begin{aligned} ln\delta_n &= (\lambda n) ln\delta_0, \\ \lambda &= \frac{1}{n}\left[ln\delta_n - ln\delta_0\right], \\ \lambda &= \frac{1}{n} ln\left[\frac{\delta_n}{\delta_0}\right]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Podemos substituir a Eq.(2.37) na Eq.(2.38) obtendo

$$\lambda = \frac{1}{n} ln\left|\frac{\tilde{F}^{(n)}(x_0 + \delta_0) - \tilde{F}^{(n)}(x_0)}{\delta_0}\right|. \tag{2.40}$$

Tomando o limite quando $\delta_0 \to 0$ da Eq.(2.40) temos:

$$e^{\lambda n} = \lim_{\delta_0 \to 0}\left|\frac{\tilde{F}^{(n)}(x_0 + \delta_0) - \tilde{F}^{(n)}(x_0)}{\delta_0}\right|. \tag{2.41}$$

Se λ for negativo ($\lambda < 0$), as órbitas serão regulares (periódicas ou quase periódicas); se λ for positivo ($\lambda > 0$), a órbita é dita ser caótica. Isolando λ,

$$\lambda = \frac{1}{n} ln\left|\tilde{F}'^{(n)}(x_0)\right|. \tag{2.42}$$

O lado direito da Eq.(2.41) é a própria definição de derivada. Aplicando a regra da cadeia:

$$\lambda = \frac{1}{n} ln\left|(\tilde{F}'(x_{n-1}).\tilde{F}'(x_{n-2}).\tilde{F}'(x_{n-3}).....\tilde{F}'(x_0))\right|. \tag{2.43}$$

Usando a propriedade logarítmica, a Eq.(2.43) tornar-se-á:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{n}\left(ln|\tilde{F}'(x_{n-1})| + ln|\tilde{F}'(x_{n-2})| + ln|\tilde{F}'(x_{n-3})| + ... + ln|\tilde{F}'(x_0)|\right), \\ \lambda &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} ln|F'(x_i)|. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Para a realização da simulação, tomamos λ quando $n \to \infty$. Então, λ será o expoente de Lyapunov calculado para mapas unidimensionais pela equação:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} ln|F'(x_i)|. \tag{2.45}$$

Aplicando o formalismo para o mapeamento bidimensional, de um mapa qualquer dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} = C(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = D(x_n, y_n) \end{cases}, \tag{2.46}$$

onde C e D são funções não lineares de suas variáveis. Os expoentes de Lyapunov são dados por [14]:

$$\lambda_j = \lim_{n\to\infty} ln|\Lambda_j^{(n)}|;\ j = 1, 2. \tag{2.47}$$

para o qual $\Lambda_j^{(n)}$ identifica os autovalores da matriz

$$\begin{aligned} M &= \prod_{i=1}^{n} J_i(x_i, y_i), \\ M &= J_n(x_n, y_n) J_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) ... J_1(x_1, y_1) J_0(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.48}$$

onde J representa a matriz jacobiana do mapeamento avaliada ao longo da órbita. O produto dessas matrizes da Eq.(2.48) pode tornar-se grande, acarretando uma ocorrência numérica conhecida como *overflow*. Para evitar o produto dessas matrizes e encontrar os autovalores, reescrevemos a matriz J como o produto de duas matrizes sendo uma triangular superior T e a outra ortogonal θ, de tal modo que

$$J = \theta T. \tag{2.49}$$

Os autovalores serão T_{11} e T_{22} da matriz T. Assim, para obtermos as expressões dos autovalores, escolhemos a matriz diagonal do tipo

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

e a matriz triangular superior como

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22.} \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Usando a propriedade $\theta^{-1} = \theta^t$, ou seja, a matriz inversa de rotação da Eq.(2.50) é igual a sua transposta e o produto da matriz inversa de rotação por ela mesma resulta na matriz identidade I, $\theta^{-1}\theta = I$, reescrevemos a matriz M

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} ... J_2 J_1 \theta_0 \theta_0^{-1} J_0. \tag{2.52}$$

Aplicando na Eq.(2.49) a matriz inversa, temos:

$$\begin{aligned} \theta^{-1} J &= \theta^{-1}\theta T; \\ \theta^{-1} J &= T; \end{aligned} \tag{2.53}$$

ao que chamamos os produtos $J_1\theta_0 = \tilde{J}_1$ e $\theta_0^{-1}J_0 = T_0$. Reescrevendo a Eq.(2.52) em termos da Eq.(2.53), resulta

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} ... J_2 J_1 T_0. \tag{2.54}$$

Escrevendo a Eq.(2.53) em forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

$$\begin{cases} T_{11} = J_{11}\cos\theta_0 + J_{21}\sin\theta_0 \\ T_{22} = -J_{12}\sin\theta_0 + J_{22}\cos\theta_0 \end{cases}, \tag{2.56}$$

Para obter a relação de θ_0 em função de J, podemos usar:

$$\begin{aligned} -\sin\theta_0 J_{11} + \cos\theta_0 J_{21} &= 0 \\ \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} &= \frac{J_{21}}{J_{11}}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Podemos escrever a razão trigonométrica de modo

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \\ \cos(\theta) &= \frac{J_{11}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

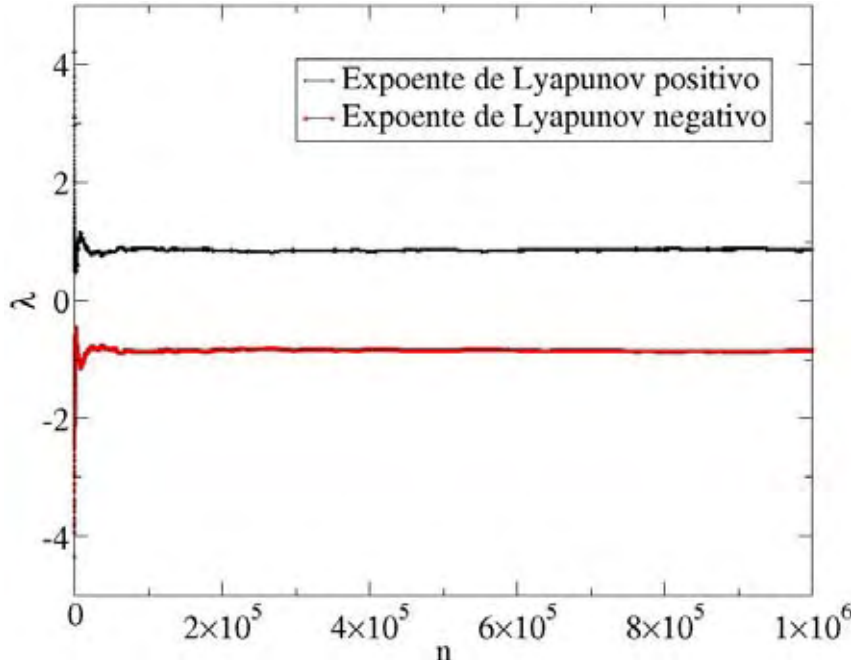


Figura 2.5: *Expoentes de Lyapunov para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle* ε *utilizado foi* $\varepsilon = 0,001$*, para uma condição inicial dada no mar de caos (*$V_0 = 0,0021$*,* $\phi_0 = 6,0$*) e iterada* 10^6*.*

Substituindo a Eq.(2.58) na Eq.(2.56) temos:

$$T_{11} = \frac{J_{11}^2 + J_{21}^2}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \tag{2.59}$$

$$T_{22} = \frac{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}. \tag{2.60}$$

O procedimento é repetido para $\tilde{J}_2, ...$, de modo que com esta atualização, o algorítimo pode ser continuado e os expoentes de Lyapunov calculados por

$$\lambda_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} ln|T_{jj}^{(i)}|; j = 1,2. \tag{2.61}$$

Portanto, a partir desses resultados poderemos calcular os expoentes de Lyapunov numericamente para um órbita caótica do modelo Fermi-Ulam.

O grafico 2.6 mostra os expoentes de Lyapunov positivo e negativo para uma única condição inicial dada na região do mar de caos, iterada 10^6 vezes. Por se tratar de um sistema conservativo dado por um mapeamento bidimensional e, portanto o sistema é hamiltoniano, temos que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, isto é, a soma do expoente positivo com o expoente negativo é nula. Isso se deve ao fato desses sistemas preservarem área no espaço de fase.

A figura 2.6 foi construída para seis condições iniciais distintas, ecolhidas na região do mar de caos e iteradas 10^7. O parâmetro de controle utilizado é $\varepsilon = 0,001$. O ex-

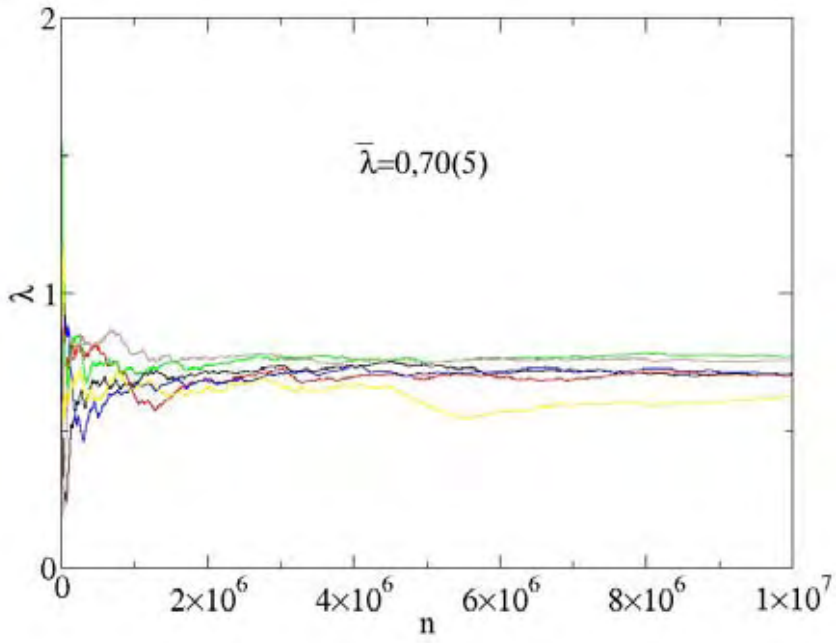


Figura 2.6: *Expoentes de Lyapunov para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle utilizado foi* $\varepsilon = 0{,}001$*, para seis condições iniciais e foram realizadas* 10^7 *iterações.*

poente de Lyapunov flutua inicialmente convergindo à um platô constante para tempos suficientemente longos.

2.4 Caso dissipativo

Neste caso, consideraremos que as colisões ocorridas são do tipo inelásticas e, para tal, introduz-se um coeficiente α na parede fixa e β na parede móvel. Em termos dos coeficientes de dissipação α e β as possibilidades da dinâmica são:

i) $\alpha = \beta = 1$: caso conservativo;

ii) $\alpha = 1$ e $\beta = 0$: a partícula, inicialmente vinda de uma colisão, viajando em direção à parede fixa, cola nesta pondo fim à dinâmica. O caso deixa assim de ser interessante;

iii) quando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$: a partícula colide com a parede fixa e entra na zona de colisão, cola a esta e, quando a fase para o qual a energia da fronteira é máxima, ou seja, em $x = 0$, a partícula é relançada com a velocidade máxima da fronteira. Este efeito é conhecido na literatura como *locking*[26];

(iv) para $\alpha = \beta = 0$ chegamos ao caso segundo caso descrito acima;

(v) restando ainda a situação $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 1$.

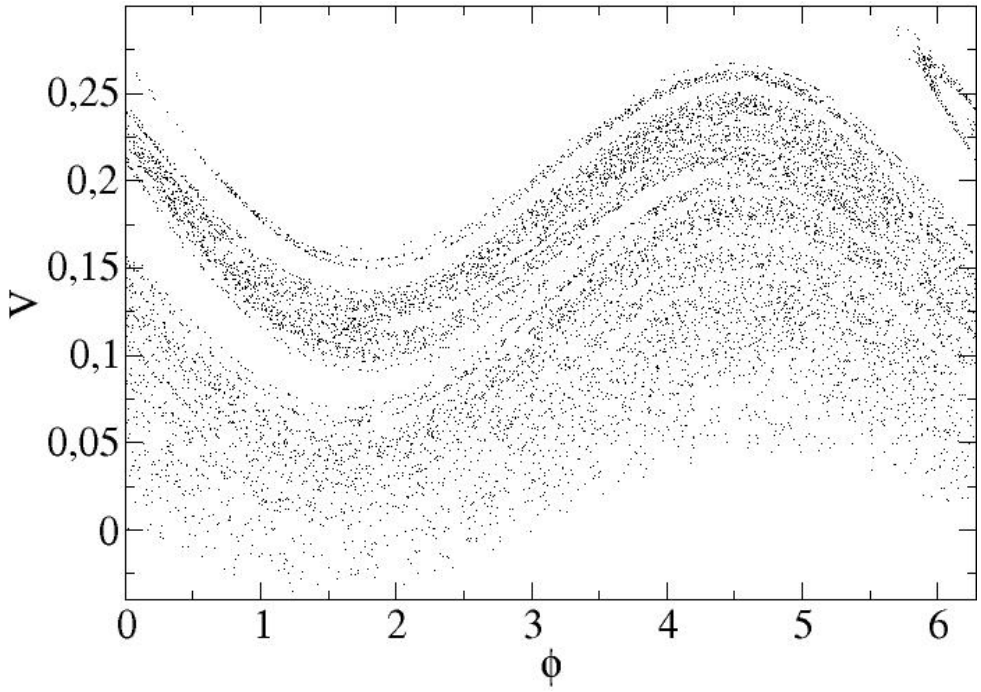


Figura 2.7: *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam dissipativo utilizando* $\varepsilon = 0{,}04$, $\alpha = 1$ *e* $\beta = 0{,}93$.

Então, o mapa que descreve caso dissipativo será dado pela Eq.(2.15), obedecendo as Eq.(2.16) para as colisões sucessivas e Eq.(2.17) para as colisões simples.

A presença da dissipação afeta drasticamente a dinâmica desse modelo, conforme mostra a figura 2.7. Ocorre a destruição do espaço de fase misto podendo ser substituído por um atrator caótico. Atrator é um ponto ou um conjunto de pontos para os quais as órbitas convergem no espaço de fase para tempos suficientemente longos.

2.4.1 Matriz Jacobiana

A matriz jacobiana será dada pela Eq.(2.21) cujos coeficientes para colisões múltiplas serão dados por:

$$J_{11} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = -\beta - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n},$$

$$J_{12} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -(1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n},$$

$$J_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n},$$

$$J_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n},$$

para os quais podemos extrair $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ derivando implicitamente a função (2.16), na qual obtivemos:

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{-\phi_c}{V_n + \varepsilon\sin(\phi_{n+1})} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon\sin(\phi_{n+1}) - \varepsilon\sin(\phi_n)}{-V_n - \varepsilon\sin(\phi_{n+1})}.$$

O determinante dessa matriz para esse tipo de colisão é

$$\det(J) = \beta^2 \frac{V_n + \varepsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})}. \tag{2.62}$$

Os coeficientes da matriz jacobiana para as colisões simples, serão dados por:

$J_{11} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = \beta\alpha - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}$,

$J_{12} = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -(1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}$,

$J_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$,

$J_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$,

em que $\phi_e = \frac{1-\varepsilon}{\alpha V_n}$ e $\phi_d = \frac{1-\varepsilon\cos(\phi_n)}{V_n}$. As derivadas de ϕ_d e ϕ_e são:

$\frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} = \frac{-(1-\varepsilon)}{\alpha V_n^2}$, $\frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} = 0$, $\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} = \frac{-[1-\varepsilon\cos(\phi_n)]}{V_n^2}$ e $\frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon\sin(\phi_n)}{V_n}$.

Podemos extrair $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ derivando implicitamente a função (2.17), na qual obtivemos:

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\left[\frac{1-\varepsilon\cos(\phi_n)}{V_n^2} + \frac{(1-\varepsilon)}{\alpha V_n^2}\right] + \alpha\phi_c}{\varepsilon\sin(\phi_{n+1}) - \alpha V_n} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\left[1 + \frac{\varepsilon\sin(\phi_n)}{V_n}\right]}{-\varepsilon\sin(\phi_{n+1}) + \alpha V_n}.$$

O determinante da matriz jacobiana para colisões simples é:

$$\det(J) = \beta^2\alpha^2\left[\frac{V_n + \varepsilon\sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon\sin(\phi_{n+1})}\right]. \tag{2.63}$$

Concluímos que os resultados das Eqs.(2.62) e (2.63) mostram que a área no espaço de fase sofre uma contração quando a dissipação é introduzida. Se $\alpha = \beta = 1$ recuperamos os resultados do determinante para o caso conservativo.

2.4.2 Expoentes de Lyapunov

Considerando a discussão da subseção (2.3.5), podemos também utilizar o algoritmo de triangularização para obter o comportamento do expoente de Lyapunov positivo. A figura (2.8) mostra a convergência do expoente de Lyapunov positivo para 5 condições iniciais distintas escolhidas ao longo do atrator caótico mostrado na Fig.(2.8). A média das convergências fornece $\overline{\lambda} = 1,58(1)$, onde $0,01$ corresponde ao desvio padrão.

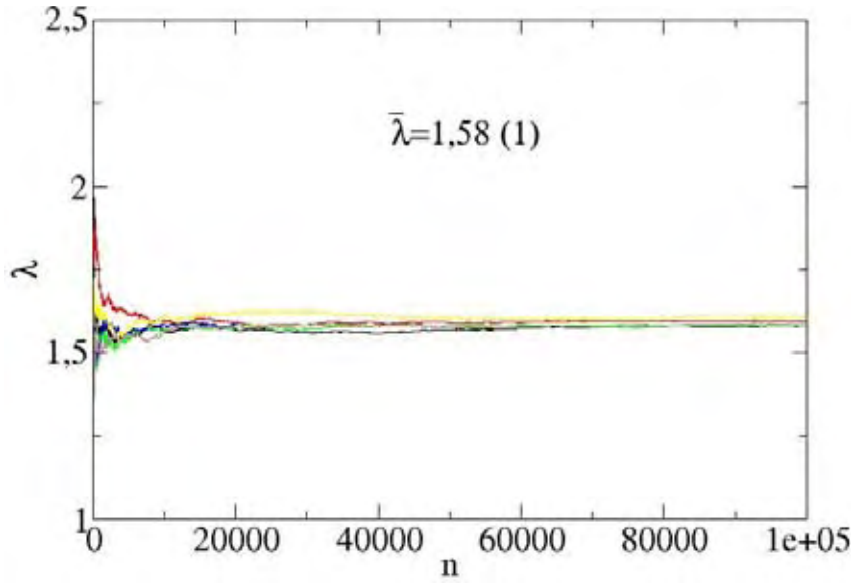


Figura 2.8: *Expoentes de Lyapunov para o modelo Fermi-Ulam dissipativo. Foram utilizadas cinco condições iniciais distintas para* $\varepsilon = 0,04$ *e* 10^5 *iterações.*

2.4.3 Ponto fixo

O ponto fixo é um ponto para o qual a solução não varia com o tempo. Neste modelo, é obtido através do mapa para colisões simples e atendendo a dois critérios:

$$V_{n+1} \quad = \quad V_n = V^* \tag{2.64}$$

$$\phi_{n+1} \quad = \quad \phi_n = \phi^* + 2m\pi, \text{ onde } m = 1,2,\ldots, \tag{2.65}$$

onde m denota o número de oscilações completas da parede móvel. Os índices $n+1$ indicam que o ponto fixo encontrado possui período 1, e de maneira generalizada, poderemos dizer que para o índice $n+i$, i denota o período do ponto ponto fixo. Substituindo as Eqs.(2.64) e (2.65) no mapa (2.15), encontraremos V^*:

$$V^* = \frac{(1+\beta)}{(\beta\alpha - 1)}\varepsilon \sin(\phi^*), \tag{2.66}$$

$$\phi^* = \pm \arccos\left[\frac{\varepsilon \pm \gamma\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2-1}}{\varepsilon^2+\gamma^2}\right], \tag{2.67}$$

onde γ é uma termo auxiliar definido como $\gamma = \frac{2\varepsilon\alpha m\pi}{(\alpha+1)}\left[\frac{(1+\beta)}{(\beta\alpha-1)}\right]$. Existem quatro expressões possíveis valores para ϕ^*. Duas delas são soluções matemáticas e duas são soluções físicas. Assim, a expressão que produz um ponto de sela é dado por:

$$\phi^* = -\arccos\left[\frac{\varepsilon - \gamma\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2-1}}{\varepsilon^2+\gamma^2}\right], \tag{2.68}$$

ao passo que

$$\phi^* = -\arccos\left[\frac{\varepsilon+\gamma\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2-1}}{\varepsilon^2+\gamma^2}\right], \tag{2.69}$$

leva a um ponto fixo assintoticamente estável (*sink*).

O ponto de sela é um ponto fixo instável, para o qual os autovalores obedecem o critério $|\nu_1| > 1$ e $\nu_2 < 1$ ou vice-versa. A partir do ponto de sela é que construímos as variedades estáveis e instáveis, conforme discutiremos na próxima seção.

2.5 Crise de Fronteira no modelo Fermi-Ulam

Investigado pela primeira vez por Celso Grebogi [20], em 1982, a crise de fronteira ocorre quando uma órbita instável cruza uma região caótica. Inicialmente, foi observado no mapa quadrático (mapa que pode ser obtido através de uma transformação linear do mapa logístico), onde mudando o parâmetro de controle obtinha-se esse cruzamento. Até então, não havia explicações para o fenômeno, denominando-o assim de crise.

Existem pelo menos três tipos de crise [20]:

i) Crise de fronteira: ocorre quando uma órbita periódica cruza um atrator caótico. O resultado dessa colisão é uma repentina e abrupta destruição do atrator caótico;

ii) Crise interior: ocorre quando um atrator caótico colide com uma órbita instável posicionada ao interior do atrator, resultando na expansão desse atrator; e

iii) Crise unindo atratores: neste evento de crise, dois ou mais atratores colidem simultaneamente entre si e com uma órbita instável, tornando-se comuns.

Veremos que nos aceleradores de Fermi a crise de fronteira ocorre quando as ramificações estáveis de um ponto de sela colidem com as bordas do atrator caótico [22]. Do ponto de sela partem ramificações que se afastam, sendo chamadas de variedades instáveis e ramificações que se aproximam, sendo chamadas de variedades estáveis. A partir da localização do ponto de sela, é possível determinar essas variedades, que são mostradas na fig.(2.9).

A figura 2.9 mostra a evolução dessas variedades. As variedades instáveis são construídas pela iteração do mapa T, onde as condições iniciais são dadas a partir de autovetores do ponto de sela e evoluídos no tempo. As variedades estáveis foram construídas iterando o mapa inverso T^{-1}. O operador T^{-1} conduz as variáveis (V_{n+1}, ϕ_{n+1}) ao estado (V_n, ϕ_n) e, para tal transformação, usamos a expressão da velocidade obtida da Eq.(2.15),

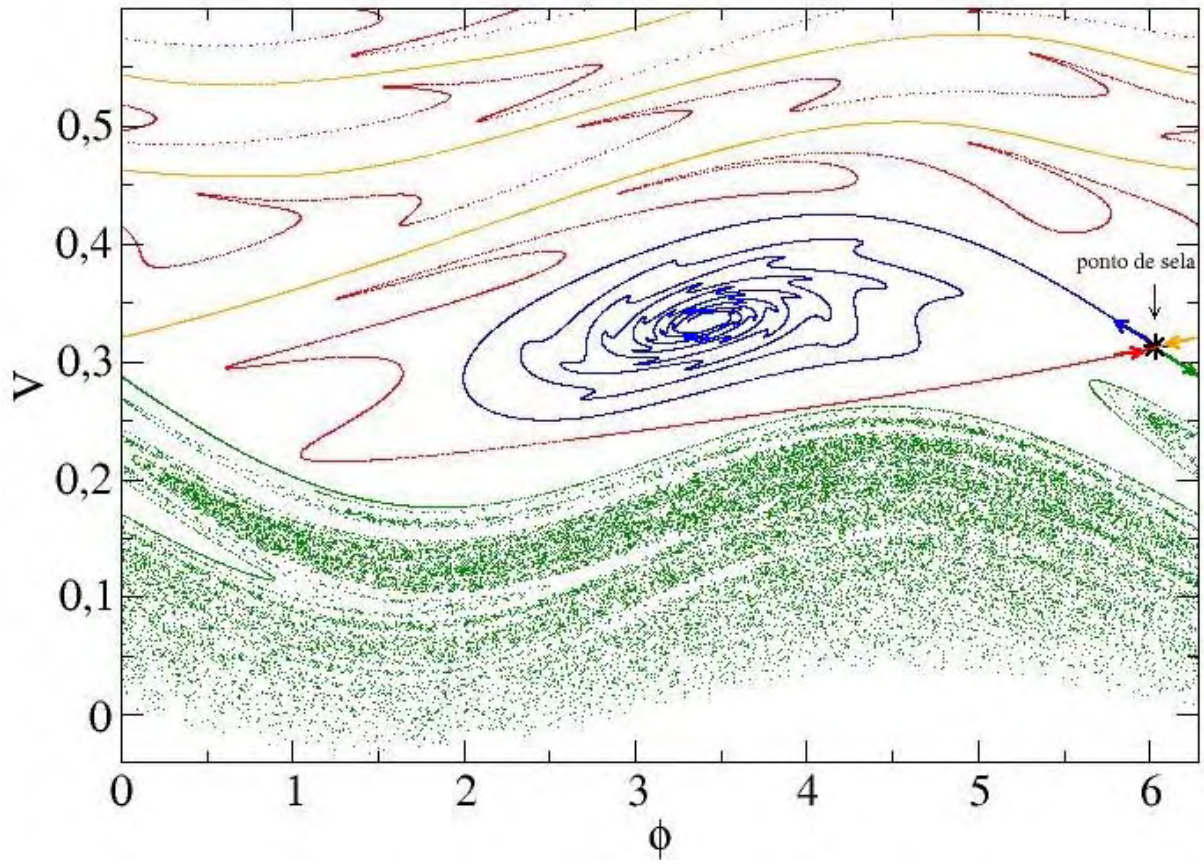


Figura 2.9: *Variedades estáveis e instáveis utilizando* $m = 1$, $\varepsilon = 0{,}04$, $\alpha = 0{,}93624$ *e* $\beta = 1$. *As variedades estáveis estão representadas pelas cores amarelo e vermelho; as variedades instáveis pelas cores verde e azul. O gráfico foi construído imediatamente antes da crise de fronteira.*

isolando V_n, logo:

$$V_n = \frac{1}{\beta\alpha}\left[V_{n+1} + (1+\beta)\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\right], \tag{2.70}$$

e ϕ_n é obtida da solução da função $h(\phi_n) = 0$ na qual é escrita como:

$$\begin{aligned} h(\phi_n) = [V_{n+1} + (1+\beta)\varepsilon\sin(\phi_{n+1})](\phi_n - \phi_{n+1}) + \beta(1+\alpha) \\ -\beta\varepsilon\alpha\cos(\phi_n) - \beta\varepsilon\cos(\phi_{n+1}). \end{aligned} \tag{2.71}$$

A solução da Eq.(2.71) é obtida numericamente pelo método de Newton com uma precisão de 10^{-12}.

As órbitas em azul e verde representam as variedades instáveis, para as quais observamos que o ramo em azul evolui para um ponto fixo atrativo (*sink*) e o ramo em verde evolui para um atrator caótico. As órbitas em amarelo e vermelho mostram as variedades estáveis e formam a fronteira entre a bacia de atração do atrator caótico e de ponto fixo atrativo. Na figura 2.9 temos a construção dessas variedades imediatamente antes do evento de crise de fronteira; para a figura 2.10, imediatamente após. Para tal, aumentamos o valor de α, o que corresponde a diminuir o coeficiente de dissipação. As

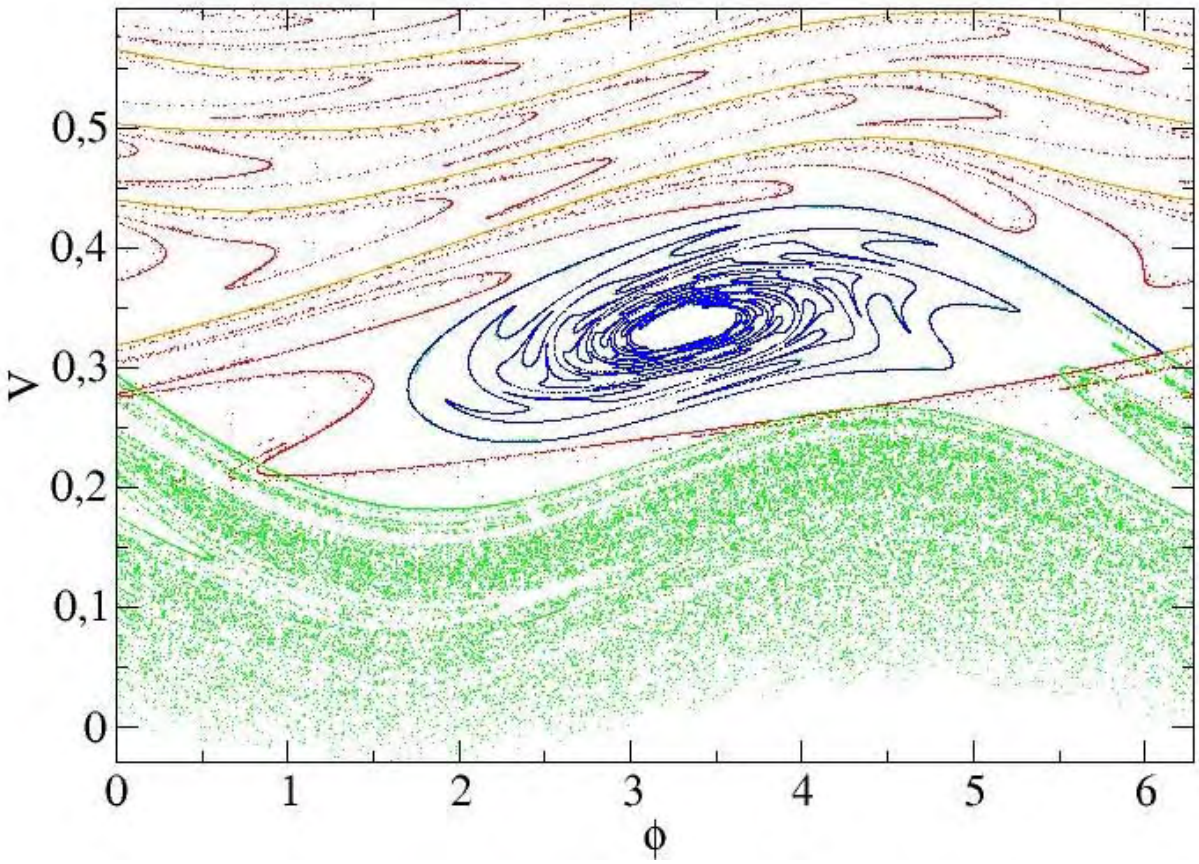


Figura 2.10: *Variedades estáveis e instáveis utilizando* $m = 1$, $\varepsilon = 0{,}04$, $\alpha = 0{,}9385$ *e* $\beta = 1$. *O mesmo padrão de cores para as variedades foi mantida em relação à figura (2.9). O gráfico foi construído após a crise de fronteira.*

variedades estáveis tocam as bordas do atrator caótico, causando sua destruição. Temos então um cruzamento homoclínico das órbitas pois as ramificações que se cruzam provêm do mesmo ponto de sela, caracterizando assim um evento de crise de fronteira.

CAPÍTULO 3

MODELO FERMI-ULAM COM PERTURBAÇÃO DO TIPO BIELA-MANIVELA

O modelo Fermi-Ulam serviu de inspiração aos cientistas e foi um ponto de partida para o estudo de muitas variações desse modelo. A versão do modelo Fermi-Ulam que estudaremos neste capítulo inclui uma perturbação do tipo biela-manivela e foi proposta pela primeira vez na literatura por Leonel e Silva [17] em 2008.

3.1 O Modelo

O modelo consiste em introduzir um mecanismo que movimenta a parede móvel através de uma perturbação do tipo biela-manivela, que transforma um movimento circular em translação. Observaremos que a dinâmica gerada pela presença desse mecanismo altera em comparação com o que observamos para o espaço de fase do modelo Fermi-Ulam, revelando o fenômeno da aceleração de Fermi para alguns parâmetros de controle específicos. Descreveremos a dinâmica desse modelo através de um mapeamento discreto bidimensional. A figura 3.1 ilustra o modelo. Uma partícula clássica colide entre essas paredes rígidas,em que a parede fixa está localizada em $x = l$ enquanto que a parede móvel tem sua posição dada por $s(t) = R\cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)}$, onde R é o raio da biela, ωt que representa a fase ϕ da parede móvel e L que é o comprimento da haste ligada à

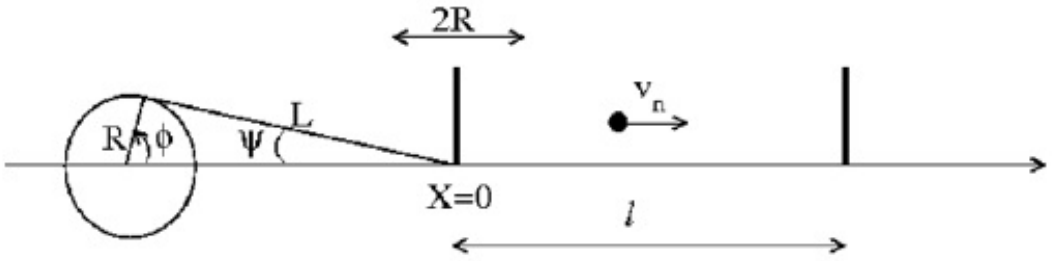


Figura 3.1: *Ilustração do modelo Fermi-Ulam com perturbação do tipo biela-manivela.*

biela. Não há presença de campo gravitacional ou qualquer outro tipo de campo. Além disso, consideramos ainda que os choques entre a partícula e as paredes são inelásticos, cujo coeficiente de dissipação para a parede fixa é α e para a parede móvel β, ambos pertencendo ao intervalo $[0,1]$.

Considerando que no instante $t = t_n$ a partícula sofra uma colisão, sua posição será dada por $x_w(t_n) = x_p(t_n)$ para $v_n > 0$. Então, poderão ocorrer dois tipos de colisões:

(i) Colisões múltiplas; ou

(ii) Colisões simples.

As colisões múltiplas ocorrem quando a partícula, após colidir com a parede móvel, colide outras vezes com a mesma, sem abandonar a zona de colisão, definida em $x \in [-R,R]$. Se a partícula colide apenas uma vez com a parede móvel, saindo da zona de colisão, viajando até à parede fixa e retornando novamente à zona de colisão, dizemos que ela sofreu um choque simples.

Os parâmetros de controle para este modelo são R, L, l e ω. De modo mais conveniente, podemos definir variáveis adimensionais, tais como $V_n = \frac{v_n}{\omega l}$, $\varepsilon = \frac{R}{l}$, $r = R/L$ e $\phi_n = \omega t_n$. Assim, temos que ε, r, α e β são os quatro parâmetros de controle relevantes para a dinâmica do sistema.

3.1.1 O Mapa

O mapa bidimensional T que conduz as variáveis (V_n, ϕ_n) através de uma evolução temporal às novas variáveis V_{n+1}, ϕ_{n+1} é:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - (1+\beta)\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \left[1 + \dfrac{r\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\phi_{n+1})}} \right] \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \mod (2\pi) \end{cases} , \tag{3.1}$$

em que V_n^* e ΔT_n dependem do tipo de colisão ocorrida. Para o caso (i), $V_n^* = -\beta V_n$ e $\Delta T_n = \phi_c$. O valor de ϕ_c é obtido numericamente da menor solução da equação $G(\phi_c) = 0$, para $\phi_c \in (0, 2\pi]$, onde:

$$G(\phi_c) = \varepsilon\cos(\phi_n + \phi_c) + \frac{\varepsilon}{r}\sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi_n + \phi_c)} - \varepsilon\cos(\phi_n) - \frac{\varepsilon}{r}\sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi_n)} - V_n\phi_c \quad (3.2)$$

Para o caso (ii), devemos levar em consideração o tempo gasto pela partícula ao viajar para a direita, colidindo com a parede fixa, e para a esquerda, entrando na zona de colisão. Assim,

$$\phi_d = \frac{r[1 - \varepsilon\cos(\phi_n)] - \varepsilon\sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi_n)}}{rV_n} \quad \text{e} \quad \phi_e = \frac{r[1-\varepsilon] - \varepsilon}{\alpha r V_n}. \quad (3.3)$$

Então, o tempo total para a partícula completar seu percurso, será $\phi_T = \phi_n + \phi_d + \phi_d$. Portanto, a variáveis V_n^* e ΔT_n serão escritas: $V^* = V_n$ e $\Delta T_n = \phi_T + \phi_c$, onde ϕ_c é obtido numericamente da solução de $F(\phi_c) = 0$, cuja função é dada por:

$$F(\phi_c) = \varepsilon\cos(\phi_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{r}\sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi_{n+1})} - \frac{\varepsilon}{r}(1+r) + \alpha V_n\phi_c, \quad (3.4)$$

para a qual $\phi_c \in [0, 2\pi)$.

3.2 Propriedades Dinâmicas para o Caso Conservativo

O caso conservativo é recuperado quando os coeficientes de restituição são $\alpha = \beta = 1$ e o mapa descrito na Eq.(3.1) irá tornar-se:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\left[1 + \dfrac{r\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1 - r^2\sin^2}(\phi_{n+1})}\right] \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \mod (2\pi) \end{cases} . \quad (3.5)$$

Para colisões múltiplas, $V_n^* = -V_n$ e $\Delta T_n = \phi_c$, em que ϕ_c é obtido numericamente da função $G(\phi_c)$, dada pela Eq.(3.2), para $\phi_c \in (0, 2\pi]$. Se as colisões forem do tipo simples, então: $V_n^* = V_n$ e $\Delta T_n = \phi_d + \phi_e + \phi_c$, em que ϕ_c é obtido também numericamente da função $F(\phi_c) = 0$ onde:

$$F(\phi_c) = \varepsilon\cos(\phi_n + \phi_d + \phi_e + \phi_c) + \frac{\varepsilon}{r}\sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi_n + \phi_d + \phi_e + \phi_c)} - \frac{\varepsilon}{r} - \varepsilon - V_n\phi_c, \quad (3.6)$$

em que $\phi_c \in [0, 2\pi)$.

A partir disso, construímos o espaço de fase desse modelo, iterando o mapa (3.5)

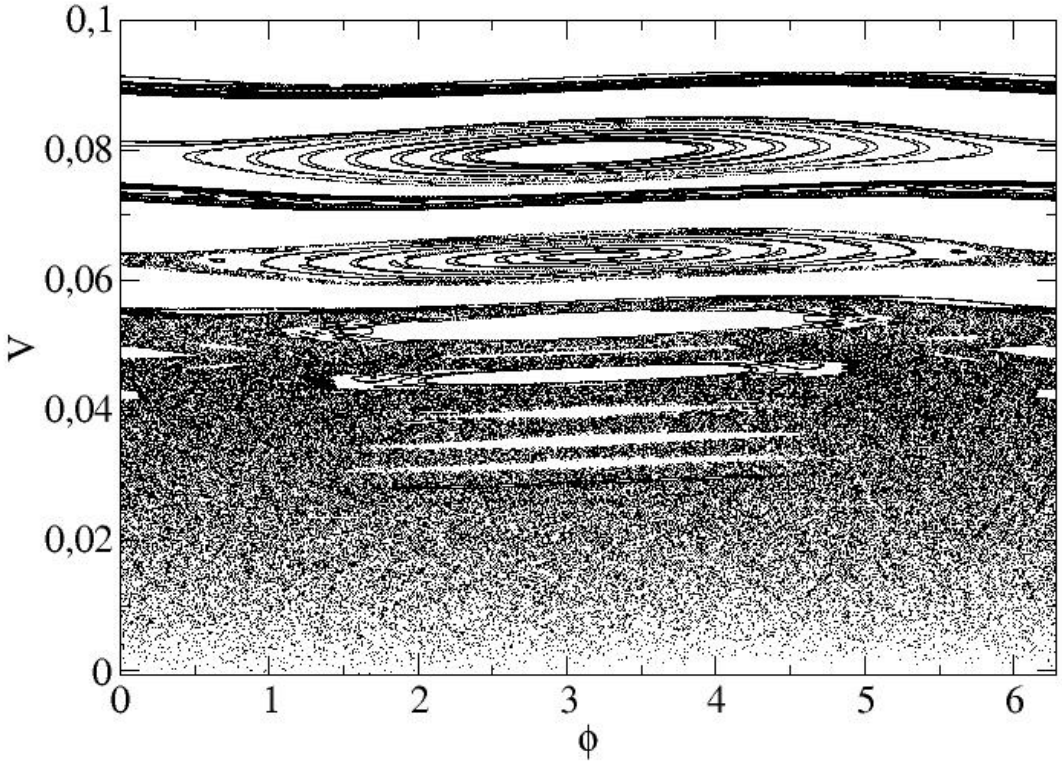


Figura 3.2: *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo com perturbação do tipo biela-manivela. Os parâmetros utilizados foram* $r = 0,01$ *e* $\varepsilon = 0,001$.

e os resultados estão dispostos na figura (3.2). Para construirmos essa figura, utilizamos uma grade de 200 condições iniciais, na qual $\phi \in [0, 2\pi]$ dividido em 20 incrementos igualmente espaçados e $V_0 \in [0,0869,\ 0,86]$ divididos em 10 incrementos igualmente espaçados, iteradas 10^3 vezes.

Para três valores distintos de r e parâmetro de controle $\varepsilon = 0,001$, os resultados obtidos estão indicados na figura 3.3, para uma grade de 200 condições iniciais e iteradas 10^3 vezes.

Podemos perceber um espaço de fase misto, com a presença de mares de caos, curvas invariantes tipo *spanning* e ilhas de periodicidade limitando o mar de caos. À medida que o parâmetro de controle r aumenta, observamos que a posição da primeira curva invariante também aumenta, contudo, quando $r \to 1$ notamos o fenômeno da aceleração de Fermi, para o qual a partícula tem um ganho ilimitado de energia pois não há presença de curvas invariantes no espaço de fase. As curvas invariantes limitam a região do mar de caos, indicando ausência da aceleração de Fermi. Isso se deve ao fato de a derivada da função $s(t)$ apresentar descontinuidade quando $r = 1$. Por outro lado, podemos observar

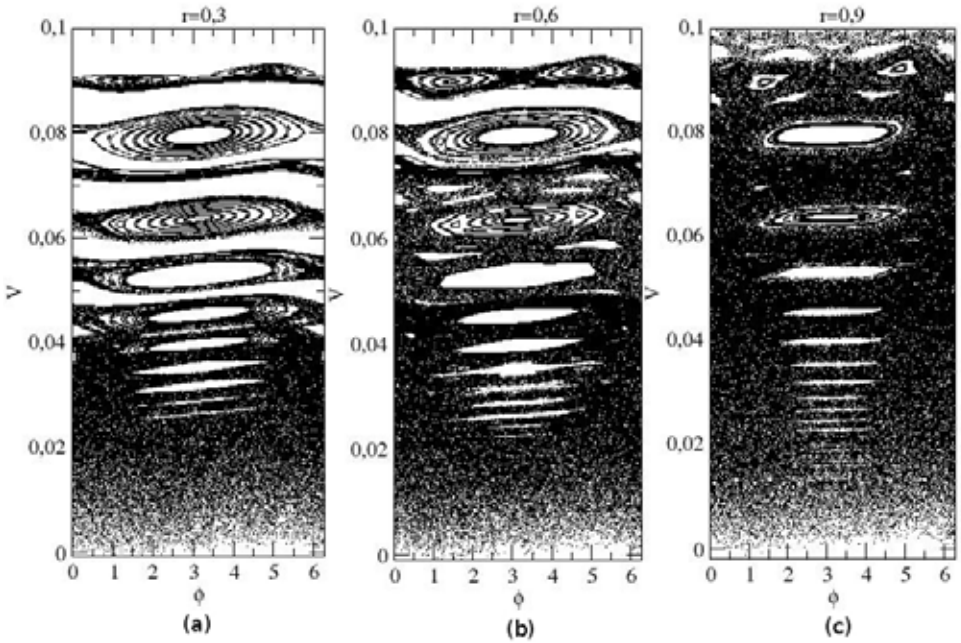


Figura 3.3: *Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo com perturbação do tipo biela-manivela para* $\varepsilon = 0,001$. *(a)* $r = 0,3$, *(b)* $r = 0,6$ *e (c)* $r = 0,9$.

da Eq.(3.5) que quando $r \to 0$ os resultados tendem a recuperar o modelo Fermi-Ulam, de modo que quando $r = 0$ o recuperamos.

A figura 3.4 mostra a comparação entre os dois modelos. Para o modelo com perturbação do tipo biela-manivela utilizamos $r = 0,5$. Em comparação, o modelo biela-manivela mostra a formação de mais ilhas de periodicidade para a região de baixa energia além da posição da primeira curva invariante aparecendo acima da primeira curva no modelo Fermi-Ulam.

3.2.1 Matriz Jacobiana

A partir da matriz jacobiana dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}. \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

podemos obter seus elementos para o caso conservativo considerando que o tipo de colisão ocorrida seja múltipla serão:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = 1 - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}\Gamma \\ &- 2\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial V_n} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}\Gamma \\ &- 2\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$J_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \tag{3.10}$$

$$J_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}, \tag{3.11}$$

em que Γ corresponde ao termo

$$\Gamma = \frac{r\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi_{n+1})}}, \tag{3.12}$$

facilitando os cálculos.

Podemos obter as derivadas parciais $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ derivando implicitamente a função (3.2). Portanto:

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{-\phi_c}{\varepsilon\sin(\phi_{n+1}) + \frac{\varepsilon r\sin(\phi_{n+1})\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}} + V_n}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon\sin\phi_{n+1} - \varepsilon\sin(\phi_n) + \frac{\varepsilon r\sin\phi_{n+1}\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2\phi_{n+1}}}}{-\sin\phi_{n+1} - \frac{\varepsilon r\sin\phi_{n+1}\cos\phi_{n+1}}{\sqrt{1-r^2\sin^2\phi_{n+1}}} - V_n}. \tag{3.14}$$

Então, após alguns arranjos algébricos, o determinante da matriz jacobiana será dado por:

$$\det(J) = \frac{V_n + \varepsilon\sin(\phi_n)\left[1 + \frac{r\cos(\phi_n)}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_n)}}\right]}{V_{n+1} + \varepsilon\sin(\phi_{n+1})\left[1 + \frac{r\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}}\right]}. \tag{3.15}$$

A área no espaço de fase se preserva após uma evolução temporal, pois o sistema é conservativo. E, de fato, observamos pela Eq.(3.15) que há preservação de uma quantidade de medida, para o qual

$$d\mu_{n+1} = d\mu_n \tag{3.16}$$

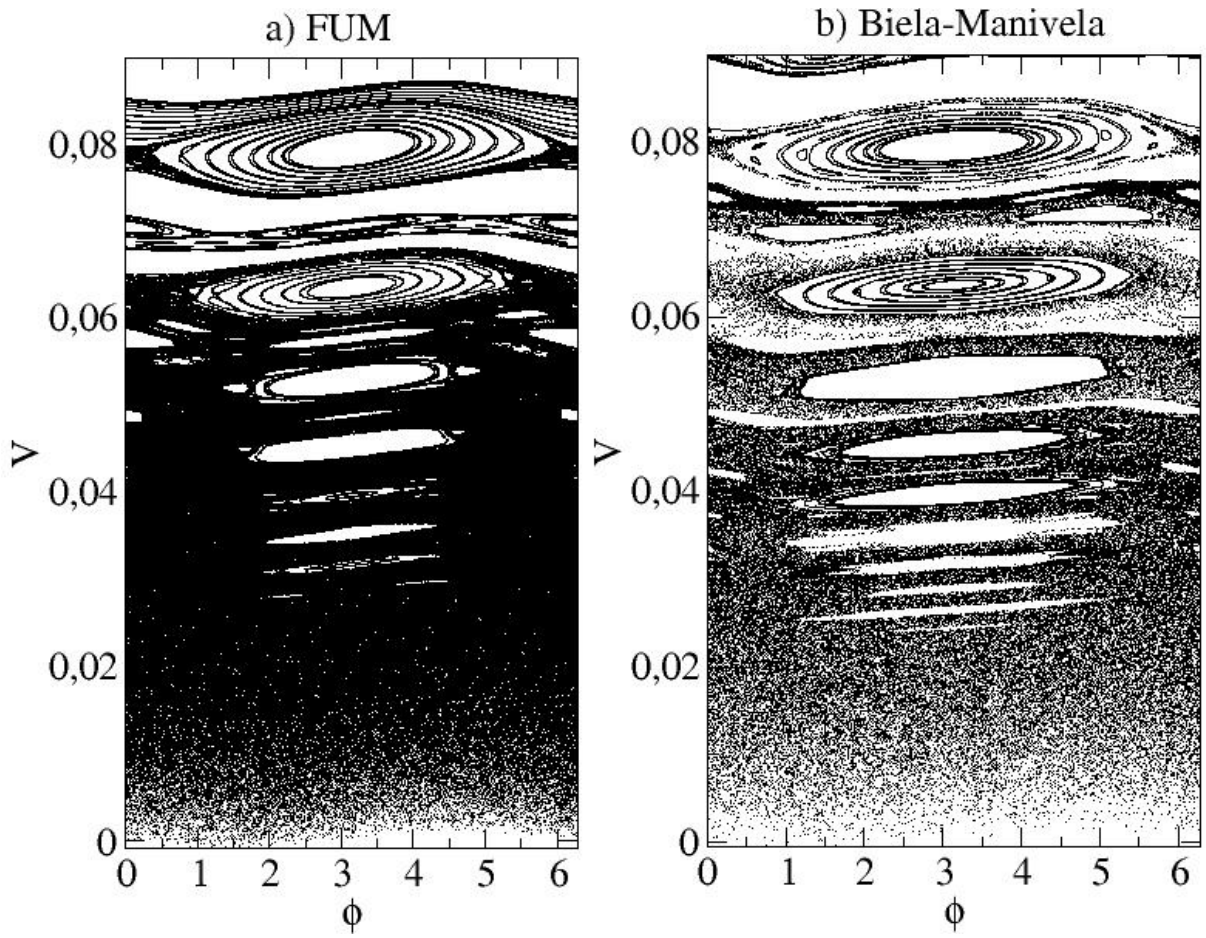


Figura 3.4: *Comparação entre os modelos a)Fermi-Ulam e b)biela-manivela para* $r = 0,5$. *Para a construção das duas figuras foi utilizado o mesmo parâmetro de controle* $\varepsilon = 0,001$.

onde

$$d\mu = (V + \varepsilon \sin\phi)\left[1 + \frac{r\cos\phi}{\sqrt{1 - r^2\sin^2\phi}}\right] dV d\phi. \tag{3.17}$$

Os elementos da matriz jacobiana quando o tipo de colisão ocorrida for simples serão dados por:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = 1 - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}\Gamma \\ &- 2\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial V_n} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - 2\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}\Gamma \\ &- 2\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$J_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \tag{3.20}$$

$$J_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}, \tag{3.21}$$

em que chamamos de $\Gamma = \frac{r\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}}$ e suas derivadas parciais $\frac{\partial \Gamma}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n}$ serão:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial V_n} = r\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}\left[\frac{r^2\cos^2(\phi_{n+1})}{[1 - r^2\sin^2(\phi_{n+1})]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[1 - r^2\sin^2(\phi_{n+1})]^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{3.22}$$

e

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n} = r\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}\left[\frac{r^2\cos^2(\phi_{n+1})}{[1 - r^2\sin^2(\phi_{n+1})]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[1 - r^2\sin^2(\phi_{n+1})]^{\frac{1}{2}}}\right], \tag{3.23}$$

e as derivadas parciais de ϕ_d e ϕ_e em relação à V_n e ϕ_n compõem as expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} &= \frac{\varepsilon\sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi_n)} - r[1 - \varepsilon\cos(\phi_n)]}{rV_n^2}, \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} &= \frac{\varepsilon\sin(\phi_n) - \frac{\varepsilon r\sin(\phi_n)\cos(\phi_n)}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_n)}}}{V_n}, \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} &= \frac{\varepsilon - r(1-\varepsilon)}{rV_n^2}, \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} &= 0. \end{aligned}$$

Derivando implicitamente a função $F(\phi_c)$ podemos obter $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$. Logo:

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \left[\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right] - \frac{\varepsilon r \sin(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}} \left[\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right] - \phi_c}{\frac{\varepsilon r \sin(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}} - \varepsilon \sin(\phi_{n+1}) + V_n}, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon \sin \phi_{n+1} \left[1 + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right] - \frac{\varepsilon r \sin \phi_{n+1}}{\sqrt{1-r^2\sin^2 \phi_{n+1}}} \left[1 + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right]}{-\sin \phi_{n+1} + \frac{\varepsilon r \sin \phi_{n+1} \cos \phi_{n+1}}{\sqrt{1-r^2\sin^2 \phi_{n+1}}} + V_n}. \tag{3.25}$$

Substituindo as Eqs.(3.35) e (3.36) nos elementos da matriz jacobiana e calculando o determinante dessa matriz, encontraremos o mesmo resultado da Eq.(3.15), mostrando realmente que o sistema é conservativo e preserva área no espaço de fase.

3.3 Caso Dissipativo

Consideraremos que os choques entre as paredes sejam inelásticos. Isto significa introduzir uma dissipação nas paredes que, para a parede fixa chamaremos de α e para a parede móvel chamaremos de β. A análise preliminar baseada nos possíveis valores que α e β podem assumir, está descrita no segundo capítulo, seção 2.4, nos itens (i), (ii), (iii) e (iv) na qual podemos aplicá-la também neste caso. Portanto, α e β são coeficientes de dissipação e podem assumir valores pertencentes ao intervalo $[0,1]$. Este será o objeto de nosso estudo nessa seção. O mapeamento bidimensional dado pela Eq. (3.1), considerando que o tipo de choque influencia diretamente nesse mapa, através de V_n^* e ΔT_n. Para colisões simples, o valor é obtido numericamente da Eq.(3.2) para $\phi_c \in [0, 2\pi)$; caso não haja solução para a $G(\phi_c)$, uma nova solução é procurada através da iteração do mapa (3.1) para a função $F(\phi_c)$ (3.4) para $\phi_c \in (0, 2\pi]$. Os resultados obtidos estão mostrados na figura 3.5 em comparação ao atrator do acelerador de Fermi. Foram usados os mesmos parâmetros de controle, $\varepsilon = 0,04$ e o mesmo coeficiente de dissipação $\beta = 0,93$ em ambas as figuras, construídas para 200 condições iniciais.

Como $r = 0,01$, observamos o mesmo comportamento em ambos atratores. De fato, quando $r \to 0$, o modelo do acelerador de Fermi tende a ser recuperado.

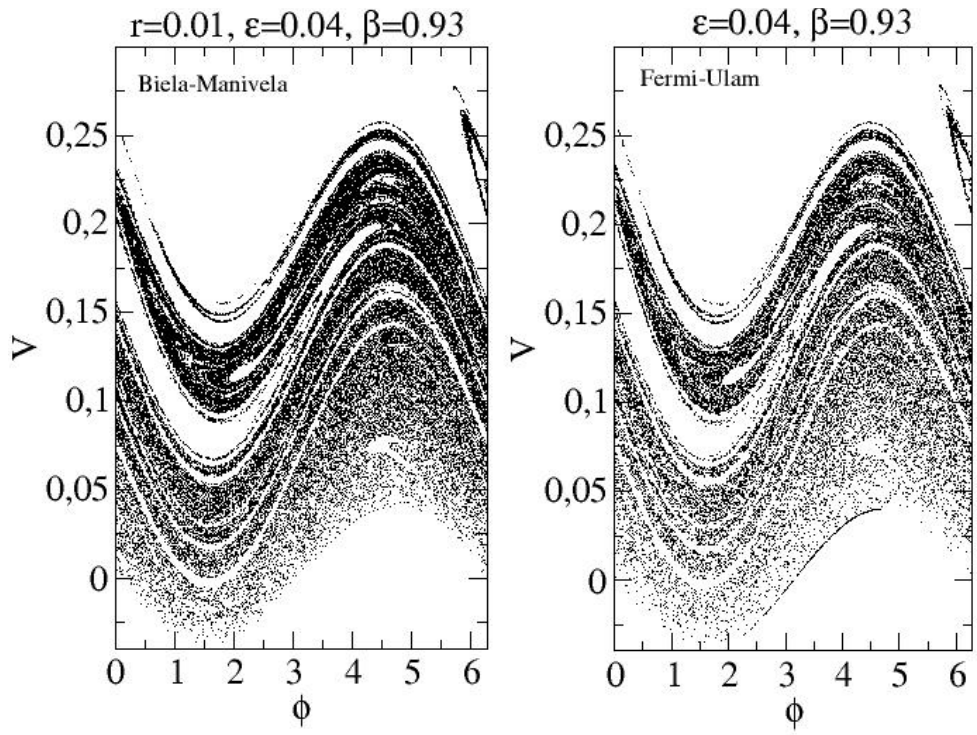


Figura 3.5: *Atrator caótico para o modelo Fermi-Ulam com perturbação do tipo biela-manivela e para o modelo Fermi-Ulam, respectivamente. Os parâmetros de controle estão mostrados nas figuras.*

3.3.1 Matriz Jacobiana

Os elementos da matriz jacobiana para o caso dissipativo foram obtidos através da matriz (3.7). Para colisões múltiplas, estes elementos são:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = -\beta - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}\Gamma \\ &- (1+\beta)\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial V_n} \qquad (3.26) \\ J_{12} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -(1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}\Gamma \\ &- (1+\beta)\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n} \qquad (3.27) \\ J_{21} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \qquad (3.28) \\ J_{22} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}, \qquad (3.29) \end{aligned}$$

onde Γ é a expressão dada pela equação Eq. (3.12). Os elementos $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ são obtidos derivando-se implicitamente a função $G(\phi_c)$ dada pela Eq.(3.2), para a qual temos obteremos os mesmos resultados das equações Eq.(3.13) e Eq.(3.14).

Calculamos também o determinante da matriz jacobiana, cujo resultado é

$$\det(J) = \beta^2 \frac{V_n + \varepsilon \sin(\phi_n)\left[1 + \frac{r\cos(\phi_n)}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_n)}}\right]}{V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})\left[1 + \frac{r\cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}}\right]}, \tag{3.30}$$

Podemos perceber que neste caso o determinante da matriz jacobiana não preserva área no espaço de fase, pois $\beta < 1$.

Para as colisões simples, os elementos da matriz jacobiana dada por(3.7) são:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = \alpha\beta - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}\Gamma \\
&- (1+\beta)\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial V_n} \qquad (3.31)\\
J_{12} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -(1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - (1+\beta)\varepsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}\Gamma \\
&- (1+\beta)\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n} \qquad (3.32)\\
J_{21} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \qquad (3.33)\\
J_{22} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}, \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

onde Γ é Eq.(3.12). As derivadas parciais de ϕ_d e ϕ_e em relação à V_n e ϕ_n são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} &= \frac{\varepsilon\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_n)} - r(1-\varepsilon\cos(\phi_n))}{rV_n^2},\\
\frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} &= \frac{\varepsilon\sin(\phi_n) - \frac{\varepsilon r\sin(\phi_n)\cos(\phi_n)}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_n)}}}{V_n},\\
\frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} &= \frac{\varepsilon - r(1-\varepsilon)}{\alpha V_n^2},\\
\frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} &= 0.
\end{aligned}$$

Os termos $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ são obtidos derivando-se implicitamente a função (3.6) da qual obtemos:

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{\varepsilon\sin(\phi_{n+1})\left[\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right] - \frac{\varepsilon r\sin(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}}\left[\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right] - \alpha\phi_c}{\frac{\varepsilon r\sin(\phi_{n+1})}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\phi_{n+1})}} - \varepsilon\sin(\phi_{n+1}) + \alpha V_n}, \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon \sin \phi_{n+1} \left[1 + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right] + \frac{\varepsilon r \sin \phi_{n+1}}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \phi_{n+1}}} \left[1 + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n}\right]}{-\sin \phi_{n+1} - \frac{\varepsilon r \sin \phi_{n+1} \cos \phi_{n+1}}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \phi_{n+1}}} - \alpha V_n}. \tag{3.36}$$

O determinante da matriz jacobiana para colisões simples é

$$\det(J) = \beta^2 \alpha^2 \frac{V_n + \varepsilon \sin(\phi_n) \left[1 + \frac{r \cos(\phi_n)}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\phi_n)}}\right]}{V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \left[1 + \frac{r \cos(\phi_{n+1})}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\phi_{n+1})}}\right]}, \tag{3.37}$$

para o qual percebemos contração na área no espaço de fase, uma vez que $\alpha < 1$ e $\beta < 1$.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Ao longo deste trabalho estudamos o modelo do acelerador de Fermi e o modelo Fermi-Ulam com a introdução de uma força externa do tipo biela-manivela, para os casos conservativo e dissipativo.

O modelo Fermi-Ulam ou acelerador de Fermi é constituído por uma partícula confinada entre duas paredes rígidas. Uma dessas paredes pode se movimentar periodicamente com o tempo enquanto que a outra está fixa. Para considerarmos o sistema conservativo ou dissipativo, devemos ter em vista o tipo de colisão ocorrida entre as paredes. Caso a colisão seja do tipo elástica, o caso é conservativo; para colisões do tipo inelástica, o caso é dissipativo. Para o caso conservativo, descrevemos o mapeamento para dois casos de colisões que podem ocorrer com a parede móvel: as colisões do tipo múltiplas ou sucessivas e as colisões do tipo simples ou indiretas. Construímos o espaço de fase iterando o mapeamento bidimensional. Analisamos também a estrutura mista que os compõem. Obtivemos analiticamente os elementos da matriz jacobiana e seu determinante. Concluímos que existe preservação de uma medida no espaço de fase para o caso conservativo. Através do método da triangularização, obtivemos numericamente os expoentes de Lyapunov para a região do mar de caos. Encontramos também analiticamente os pontos fixos de período 1, analisando sua estabilidade e localizando-os no espaço de fase. Para o caso dissipativo mostramos a existência o atrator caótico. Portanto, a introdução da dissipação altera drasticamente a dinâmica do modelo. Obtivemos a matriz jacobiana e verificamos através do seu determinante que este caso não preserva área no espaço de fase. Calculamos também os expoentes de Lyapunov. Foram obtidos os pontos fixos analiticamente para

este caso, no qual encontramos um ponto fixo assintoticamente estável (*sink*) e um ponto de sela, para o período 1 para uma combinação de parâmetros de controle. A partir disso, foi possível construir as variedades estáveis e instáveis para o ponto de sela, que, para parâmetros específicos geram o evento de crise de fronteira, um dos principais objetos de nosso estudo nesse trabalho.

No modelo com a força externa do tipo biela-manivela descrevemos o mapeamento para colisões sucessivas e simples tanto para o caso conservativo quanto para o caso dissipativo e seus respectivos espaços de fase. Investigamos comparativamente este modelo com o modelo Fermi-Ulam, analisando o parâmetro da segunda não linearidade em seus casos limites. Obtivemos os elementos da matriz jacobiana analiticamente e seus determinantes, verificando que para o caso conservativo temos a preservação de área no espaço de fase enquanto que para o caso dissipativo temos uma contração devido à formação do atrator caótico. O modelo com perturbação do tipo biela-manivela mostra uma característica importante em relação ao modelo Fermi-Ulam - para alguns valores do parâmetro r observamos a presença da aceleração de Fermi. Isto se deve ao fato do parâmetro r interferir diretamente na não linearidade do sistema, explicitando uma generalização do modelo.

Como perspectivas deste trabalho, pretendemos estudar algumas propriedades de transporte ao longo do mar de caos. Ao que é conhecido da literatura, a existência de ilhas de estabilidade podem provocar nas partículas um efeito de aprisionamento temporário conhecido como *stickiness*[27, 28]. Este efeito afeta as propriedades médias do espaço de fase incluindo os expoentes de Lyapunov. A compreensão deste fenômeno e sua influência causada pela variação dos parâmetros de controle é de grande importância para a área de pesquisa, podendo gerar técnicas e formalismo que podem ser aplicadas em outros sistemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] KUHN, T. A estrutura das revoluções científicas. Editora Perspectiva, 1998.

[2] STEWART, J. Cálculo (vol. 1 e 2). *São Paulo: Pioneira Thomson Learning*, 2006.

[3] SILVEIRA, F. Determinismo, previsibilidade e caos. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 10, n. 2, p. 137–147, 2008.

[4] JR, O. P. Definição de propriedades super-empíricas como relações entre fatias do universo. *Neste volume*, 2011.

[5] PESSIS-PASTERNAK, G. *Do caos à inteligência artificial*. [S.l.]: Unesp, 1993.

[6] SALAMON, D. The kolmogorov-arnold-moser theorem. *Zürich preprint*, 1986.

[7] LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.

[8] SAVI, M. *Dinâmica não-linear e caos*. [S.l.]: Editora E-papers, 2006.

[9] MAY, R. et al. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, London, v. 261, n. 5560, p. 459–467, 1976.

[10] LILLY, D. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. *Monthly Weather Review*, v. 93, n. 1, p. 11–25, 1965.

[11] VERCELLI, A. Por uma macroeconomia não reducionista: uma perspectiva de longo prazo. *Economia e sociedade*, IE/UNICAMP Campinas, v. 3, p. 3–19, 1994.

[12] FERMI, E.; PASTA, J.; ULAM, S. *Studies of nonlinear problems*. [S.l.], 1955.

[13] FERRARA, N.; PRADO, C. do. Caos–uma introdução. *São Paulo: Edgard Blücher*, 1994.

[14] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 57, p. 617–656, Jul 1985.

[15] FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 8, p. 1169, 1949.

[16] ULAM, S. On some statistical properties of dynamical systems. In: *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. [S.l.: s.n.], 1961. v. 3, p. 315–320.

[17] LEONEL, E.; SILVA, M. A bouncing ball model with two nonlinearities: a prototype for fermi acceleration. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 1, p. 015104, 2007.

[18] OLIVEIRA, D. F.; LEONEL, E. D. Some dynamical properties of a classical dissipative bouncing ball model with two nonlinearities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, 2013.

[19] PUSTYL'NIKOV, L. Existence of invariant curves for maps close to degenerate maps, and a solution of the fermi-ulam problem. *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, IOP Publishing, v. 82, n. 1, p. 231, 2007.

[20] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, APS, v. 48, n. 22, p. 1507–1510, 1982.

[21] LEONEL, E.; MCCLINTOCK, P.; SILVA, J. da. Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, APS, v. 93, n. 1, p. 14101, 2004.

[22] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. A crisis in the dissipative fermi accelerator model. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, Institute of Physics, v. 38, n. 23, p. 425–430, 2005.

[23] LEONEL, E. D.; OLIVEIRA, D. F.; CARVALHO, R. Egydio de. Scaling properties of the regular dynamics for a dissipative bouncing ball model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 386, n. 1, p. 73–78, 2007.

[24] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 181–200, 1983.

[25] SALINAS, S. *Introdução à física estatística*. [S.l.]: Edusp, 1997.

[26] LUCK, J.; MEHTA, A. Bouncing ball with a finite restitution: chattering, locking, and chaos. *Physical Review E*, APS, v. 48, n. 5, p. 3988, 1993.

[27] ALTMANN, A. E. M. E. G.; KANTZ, H. Stickiness in mushroom billiards. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 15, n. 033105, p. 033105–1–033105–7, 2005.

[28] SHLESINGER, M.; ZASLAVSKY, G.; KLAFTER, J. Strange kinetics. *Nature*, v. 363, n. 6424, p. 31–37, 1993.