



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-D.001/97

Deformações Quânticas de Álgebras Conformes

Eliezer Batista

Orientador

José Francisco Gomes



Março - 1997

Agradecimentos

Há pessoas e instituições que tornaram possível a realização deste trabalho, bem como fizeram parte de minha vida. Estes são, portanto, aqueles dos quais se diz “A quem honra, honra”:

- Agradeço ao Frank pela orientação, pelo apoio e pela amizade.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro ao longo destes 4 anos.
- Ao IFT, onde pude desenvolver este trabalho e onde aprendi a encarar de maneira diferente a vida acadêmica.
- Aos meus pais, pois sem eles nem estaria aqui e também porque sempre apoiaram meu desenvolvimento estudantil.
- A minha querida Dani, por toda a felicidade que me fez, e continua me fazendo experimentar. Pelo amor, que dá sentido à vida e nos faz ir muito além de nós mesmos, pelo futuro e pelos sonhos, obrigado.
- A Cris (Aragão) por todos os bons momentos vividos e pela amizade.
- A Cris (Olga) pelos rápidos bons momentos.
- À família Aragão (Pr. Humberto, Dona Vilma, a Sô, o Beto e o Rodrigo), que me acolheu como filho durante estes quase três anos.
- Aos colegas do IFT pela amizade e companheirismo ao longo destes anos.
- Aos amigos da sempre imortal Academia.
- Ao Ivan, por ter me ajudado digitando partes da tese e pela amizade.
- Ao prof. Décio pela sempre viva amizade e mútua admiração.
- À IBBC, onde me sinto parte do corpo de Cristo com meus irmãos.
- E ao Deus Todo Poderoso: “Gloria Patri et Filio et Spiritui Sancto, sicut erat in principio, et nunc et semper, per sæcula sæculorum! Amem”.

A todos estes
que provaram
com suas próprias vidas
o valor inigualável
de sua grande fé.
A todos estes corações
cuja esperança os fazia
entender que as aflições
do tempo presente
não podem se comparar à glória que nos há de ser revelada. A estes heróis
da fé, que mesmo sendo perseguidos, torturados, pendurados em cruzes,
lançados aos leões, queimados em fogueiras, ainda assim não amaram suas
vidas até a morte, preferindo antes o prêmio da soberana vocação a
dobrarem seus joelhos às forças da injustiça, da iniquidade, da escravidão e
da morte.

A todos estes homens
e mulheres, dos quais o mundo
não era digno,
de olhar solícito,
que com os joelhos trôpegos
e a voz tênue,
marcharam sobre
as dificuldades
e espalharam a boa nova
por todos os rincões
deste planeta.
Sem estes, eu também
não teria
sido alcançado.
e são estes
que enaltecem
o nome de Cristo
ao longo dos séculos,
com suas histórias
de sangue,
de fé, de esperança
e de amor.

Abstract

In this work we study some issues about the quantum deformation of conformal field theories. We discuss, after a self-contained review of the classical aspects, the properties of primary fields in a q -deformed theory. Two unequivalent constructions of the q -Virasoro algebra, one in terms of bosonic fields, and the other in terms of free fermionic fields, are considered in detail. We also study the characterization of the conformal spin in the q -deformed bosonic conformal field theory in two dimensions.

We also propose a q -deformed analogue of the Energy-Momentum tensor in the Sugawara construction, as well as we construct a q -deformation of the $N = 2$ superconformal algebra by taking as a starting point the vertex operators realization for the quantum affine algebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$. Extending to other simply laced algebras, we find the q -deformed Energy-Momentum tensor in the Sugawara form associated to the algebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N+1))$.

Finally, we construct a new q -Virasoro algebra by imposing constraints on the currents associated to the algebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ and by using the Dirac bracket method. This procedure is inspired on the hamiltonian reduction of the WZNW model, which consists in the reduction of degrees of freedom in the action by imposing constraints on Noether currents. In the hamiltonian reduction process, one obtains extended conformal algebras ($\mathcal{W}$ algebras) from the Kac-Moody algebra of the currents.

Key words: Conformal field theories, q -deformed algebras, Sugawara construction, hamiltonian reduction.

Resumo

Neste trabalho, nós estudamos algumas questões relativas à deformação quântica de teorias de campos conformes. Nós discutimos, após uma revisão auto-contida dos aspectos clássicos, as propriedades dos campos primários em uma teoria q -deformada. São consideradas em detalhe duas construções não equivalentes da álgebra de q -Virasoro, uma em termos de campos bosônicos e a outra em termos de campos fermiônicos. Também estudamos a caracterização do spin conforme na teoria conforme bosônica q -deformada em duas dimensões.

Também propomos um análogo q -deformado do tensor Energia-Momento na construção de Sugawara, bem como construímos uma q -deformação da álgebra $N = 2$ superconforme tomando como ponto de partida a realização de operadores de vértice para a álgebra afim quântica $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$. Extendendo para outras álgebras “simply-laced”, encontramos o tensor Energia-Momento q -deformado na forma de Sugawara associado à álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N + 1))$.

Finalmente, nós construímos uma nova álgebra de q -Virasoro pela imposição de vínculos sobre as correntes associadas à álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ e utilizando o método dos parênteses de Dirac. Este procedimento é inspirado na redução hamiltoniana do modelo WZNW, que consiste na redução dos graus de liberdade na ação pela imposição de vínculos às correntes de Noether do modelo. No processo de redução hamiltoniana, são obtidas álgebras conformes extendidas ($\mathcal{W}$ álgebras) a partir da álgebra de Kac-Moody das correntes.

Palavras chave: Teorias de campos conformes, álgebras q -deformadas, construção de Sugawara, redução hamiltoniana.

Conteúdo

Introdução	3
1 Teorias de Campos Conformes	10
1.1 Introdução	10
1.2 O Grupo Conforme em Dimensão $D > 2$	12
1.3 O Grupo Conforme em dimensão $D = 2$	13
1.4 Campos Primários e o Tensor Energia-Momento	16
1.5 Realização Bosônica de uma Teoria Conforme	21
1.6 Realização Fermiônica de uma Teoria Conforme e a Álgebra $N = 1$ Superconforme	24
1.7 Álgebras de Correntes e Construção de Sugawara para o Tensor Energia-Momento	26
2 Campos Primários em uma Teoria q-Deformada	34
2.1 Introdução	34
2.2 A Álgebra de q-Virasoro em Termos de q-Derivadas	36
2.3 Teoria de Campos Primários q-Deformada	38
2.4 Realização Bosônica para a Teoria de Campos Primários q-Deformada	39
2.5 Realização Fermiônica para a Teoria de Campos Primários q-Deformada e a Álgebra $N = 1$ q-Superconforme	44
3 Construção de Sugawara para o Tensor Energia-Momento q-Deformado e a Álgebra $N = 2$ q-Superconforme	48
3.1 Introdução	48
3.2 Operadores de Vértice para a Álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$	49

3.3	A Álgebra $N = 2$ q-Superconforme	53
3.4	Construção de Sugawara e os Operadores de Vértice para a Álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N + 1))$	57
4	Redução Hamiltoniana do Modelo WZNW	62
4.1	Introdução	62
4.2	O Modelo WZNW	63
4.3	Exemplos de Redução Hamiltoniana do modelo WZNW	67
4.4	Redução da Álgebra de Correntes	70
4.5	Redução da Álgebra de Correntes: Caso q -Deformado	74
5	Conclusões	81
A	Álgebras de Hopf e Deformações	85
A.1	Introdução	85
A.2	Álgebras de Hopf	86
A.3	Deformação Quântica de uma Bi-Álgebra de Lie	92
A.4	Álgebras Afins q -Deformadas	101
B	Comutadores e OPE's, Alguns Detalhes de Cálculos	104
B.1	Campos Primários	104
B.2	Teorias Conformes, Realização Bosônica	106
B.3	Teorias Conformes, Realização Fermiônica	110
B.4	Operadores de Vértice, Usuais e Deformados	112

Introdução

A Física teórica nas últimas duas décadas presenciou o surgimento de duas grandes teorias que paulatinamente se tornaram tópicos indepententes de pesquisa: a teoria de campos conformes e a teoria dos grupos quânticos. Ambas estão relacionadas ao estudo das simetrias obedecidas por sistemas físicos. Também é notório que ambas trouxeram inovações do ponto de vista de métodos matemáticos, bem como possibilitaram a descoberta de uma fenomenologia nova. Podemos até afirmar que atualmente o conhecimento destas duas áreas se torna indispensável para quem esteja ingressando nos domínios da Física teórica.

O interesse por teorias de campos invariantes por transformações conformes é motivado por vários desenvolvimentos independentes. Primeiramente, podemos mencionar o estudo dos fenômenos ultra-relativísticos em teoria de campos, nestas escalas, as massas de repouso tornam-se irrelevantes para os cálculos de processos elementares, adquire-se então um caráter invariante por transformações de escalas. Também era bem estabelecido o fato de que para sistemas que sofrem transição de fase de segunda ordem, o comprimento de correlação se torna infinito no ponto crítico, também assumindo um regime de invariância de escalas [3].

Em particular, o estudo das teorias invariantes conformes bidimensionais foi motivado pelo surgimento dos modelos duais, verificou-se primeiramente que as amplitudes duais eram invariantes por transformações de Möbius no plano complexo [36]. Pode-se então averiguar que esta simetria se estendia para um número infinito de geradores que satisfaziam a uma álgebra de Lie de dimensão infinita denominada álgebra de Witt, esta álgebra corresponde à álgebra dos geradores infinitesimais do grupo de difeomorfismos da circunferência S^1 [46]. A quantização destes modelos duais, posteriormente conhecidos como teoria de cordas também levou a uma extensão central da álgebra de Witt, a qual é conhecida como álgebra de Virasoro [42].

Foi porém com o trabalho seminal de A.A. Belavin, A.M. Polyakov e A.B. Zamolodchikov [11] que a importância das teorias conformes em duas dimensões ficou evidente. Neste trabalho utilizou-se as propriedades dos campos primários em uma teoria conforme para calcular funções de correlação através de identidades de Ward relacionadas aos OPEs entre o tensor Energia-Momento e os campos [11] [38]. O estudo das representações da álgebra de Virasoro de acordo com o valor da carga central possibilita a classificação de modelos em duas dimensões determinando o número de campos primários bem como os valores dos pesos conformes destes [1][38]. Em particular, para os valores da carga central $0 < c < 1$, temos os assim denominados modelos minimais.

A teoria de cordas nos fornece um exemplo muito elucidativo de teoria conforme para $C > 1$. O tensor Energia-Momento canônico, que é o gerador das transformações conformes, é escrito quadraticamente em termos das derivadas do campo da corda [42], este é o caso mais simples da denominada construção de Sugawara [25]. A interação entre os modos de uma corda são dadas pelos operadores de vértice, que também são campos primários da teoria. O valor da carga central na álgebra de Virasoro para a teoria de cordas tem uma interpretação muito simples, trata-se da própria dimensão do espaço onde a corda se propaga. Ao adicionarmos as contribuições de “ghosts” no tensor Energia-Momento, este irá desempenhar um papel fundamental, determinando a dimensão do espaço-tempo necessária para que a simetria conforme seja preservada a nível quântico.

Devemos mencionar também um outro importante modelo de teoria de campos a duas dimensões que possui simetria conforme, trata-se do modelo WZNW [72]. Este modelo foi proposto no contexto da bosonização de teorias fermiônicas em duas dimensões com simetria de gauge não abeliana. O modelo consiste de uma teoria de campos bosônicos bi-dimensionais a valores em um grupo de Lie. A ação do modelo WZNW possui um termo de natureza topológica que consiste na integral de uma divergência total sobre a variedade 3-dimensional cujo bordo é o espaço a 2 dimensões onde estão definidos os campos [72]. Uma propriedade deste tipo de modelo é o fato de suas correntes de Noether satisfazerem uma álgebra de dimensão infinita, álgebra de Kac-Moody, e serem campos primários em relação a um tensor Energia-Momento que é quadrático nas mesmas, esta é a construção de Sugawara [49].

A partir do modelo WZNW, é possível encontrar novos modelos completamente integráveis pela imposição de vínculos nas correntes do modelo. Este processo é denominado Redução Hamiltoniana do modelo WZNW, e através deste tipo de redução obtemos as teorias de campos de Toda [5] [41]. As correntes restantes obedecerão a uma álgebra conforme estendida $\mathcal{W}_N$ [6].

A teoria dos grupos quânticos, por sua vez, teve sua origem com o estudo do método do espalhamento inverso quântico [30] [69]. O método do espalhamento inverso consiste em se encontrar soluções para sistemas integráveis através de um sistema linear auxiliar. Os sistemas integráveis clássicos podem ser escritos em termos de uma condição de curvatura nula, associando-se assim uma conexão a este sistema. Esta conexão é definida de tal forma que o transporte paralelo segundo as componentes desta conexão gera os deslocamentos espaciais e temporais do sistema, ou seja, são suas componentes que determinam o sistema linear auxiliar. As relações fundamentais de parênteses de Poisson entre as componentes da conexão responsáveis pelos deslocamentos espaciais permitem-nos definir a matriz r clássica que obedece a uma equação denominada equação de Yang-Baxter Clássica. São as relações fundamentais dos parênteses de Poisson que garantem que as infinitas cargas conservadas do sistema estejam em involução. Ao efetuar-se a quantização de um sistema integrável, o método do espalhamento inverso sofre modificações importantes, as relações fundamentais dos parênteses de Poisson tornam-se relações de quase-comutação mediadas por um objeto denominado Matriz R quântica. Esta, por sua vez, obedece a uma equação cúbica denominada equação de Yang-Baxter Quântica [18][69].

Os modelos estatísticos de spins, como o modelo de Heisenberg, também apresentam estruturas semelhantes às encontradas no método do espalhamento inverso. Ao calcular-se a função de partição para estes modelos, utiliza-se um objeto auxiliar denominado matriz de transferência [18] [62]. Verifica-se que a matriz de transferência obedece a relações de quase comutação também mediados por uma matriz R , que obedece à equação de Yang-Baxter Quântica [62]. Estas semelhanças ocorridas entre sistemas aparentemente sem qualquer correspondência deve-se a estrutura algébrica subjacente a todos estes problemas. Trata-se da estrutura de álgebras de Hopf [20] [47][53]. A estrutura de álgebra de Hopf associada à equação de Yang-

Baxter foi descoberta independentemente por V.G. Drinfel'd [29] e por M. Jimbo [45]. Com a descoberta destas álgebras, que passaram a ser denominadas de grupos quânticos, o estudo das simetrias dos sistemas físicos foi grandemente ampliado.

Existem duas perspectivas para se entender os grupos quânticos. A primeira, mais algébrica, trata da deformação das álgebras universais envolventes de uma álgebra de Lie [19][20][47]. Este processo foi desenvolvido por Drinfel'd e Jimbo independentemente. Basicamente, estaremos utilizando este ponto de vista no decorrer deste trabalho. Uma das vantagens para este enfoque é a construção de representações de um spin arbitrário de forma análoga às representações de álgebras de Lie usuais. Uma outra perspectiva para se estudar os grupos quânticos consiste em considerá-los como grupos de simetria sobre um espaço não comutativo, este é o ponto de vista adotado por Yu.I. Manin [55]. Embora tenha a vantagem de ser mais geométrico, não estaremos utilizando este enfoque em nosso trabalho.

Atualmente muitas outras áreas da Física teórica estão fazendo uso do conceito de álgebras de Hopf e cada vez mais as simetrias quânticas fazem parte do lugar comum dos físicos. Podemos citar a aplicação dos grupos quânticos no estudo do efeito Hall quântico [64], no estudo de vibrações moleculares [18], em teorias conformes [18][20], em modelos estatísticos anisotrópicos [62], em mecânica estatística [53] entre outras. É importante citar também a tentativa de utilização de álgebras de Hopf para se tentar descrever uma quantização do campo gravitacional e entender as alterações na própria estrutura espaço-temporal provocada pela quantização [52]. Além da física teórica, a teoria de grupos quânticos permitiu avanços em matemática pura, principalmente no estudo de invariantes topológicos em variedades de dimensão 3 [20] [47].

O propósito deste trabalho consiste em se estudar as deformações quânticas de teorias de campos conformes. A motivação para se deformar álgebras conformes reside basicamente em dois problemas principais. Primeiramente, podemos citar o modelo de Liouville na rede. É conhecido que os estados quirais contruídos através da análise de Leznov-Saveliev do modelo satisfazem a uma álgebra de Virasoro em seus parênteses de Poisson [4]. Ao se tomar uma discretização do modelo de Liouville, obtém-se uma álgebra correspondente à álgebra de Virasoro na rede e que é isomorfa à álgebra de Volterra [4] [31]. Curiosamente, uma construção

q-deformada da álgebra de Virasoro realizada em termos de campos bosônicos está diretamente relacionada a este problema, embora seja obtida de uma maneira independente [12].

A segunda grande motivação para se estudar álgebras de Virasoro q-deformadas provém do estudo do efeito Hall quântico. Os operadores de translação magnética, que dependem da intensidade do campo magnético externo realizam uma álgebra quântica $\mathcal{U}_q(sl(2))$, e os níveis de Landau constituem uma representação de spin j da mesma [64][65]. A simetria deste sistema simetria pode ser ampliada para uma álgebra de Virasoro q-deformada, isto pode ser feito ampliando-se as possibilidades de valores que podem assumir os índices dos operadores de translação magnética, esta álgebra pode ser realizada em termos de campos fermiônicos livres [63]. Uma peculiaridade importante a ser mencionada é o fato de estes geradores de q-virasoro também poderem ser escritos como uma combinação dos geradores de uma álgebra W_∞ [64].

Existem várias maneiras não equivalentes de se deformar a álgebra de Virasoro. Podemos ter álgebras que satisfaçam relações de q-comutação [2]. Ainda podemos ter álgebras de comutadores porém com geradores caracterizados por um índice adicional, álgebras de dois “loops” [16] [57] [63]. Ainda podemos ter álgebras do tipo quadrático, como a descrita em [34] ou a que descrevemos neste trabalho no capítulo 4 [10]. Portanto, ainda há muito a ser compreendido sobre a deformação da álgebra de Virasoro.

Esta tese está organizada da seguinte maneira:

- No capítulo primeiro fizemos uma revisão de uma maneira auto-contida sobre teorias conformes, descrevemos as características dos campos primários, o papel do tensor Energia-Momento nas transformações conformes, as realizações de teorias conformes em termos de campos bosônicos e de campos fermiônicos livres. Também descrevemos no primeiro capítulo o papel desempenhado pelas álgebras de Kac-Moody, a construção de Sugawara para o tensor Energia-Momento e a realização de operadores de vértice. Também são discutidas as extensões supersimétricas $N = 1$ e $N = 2$ das álgebras conformes.
- No capítulo segundo discutimos as propriedades dos campos primários em uma teoria q-deformada. Analisamos algumas realizações para a álgebra de q-Virasoro como por ex-

emplo a realização em termos de operadores diferenciais q -deformados. As construções de álgebras de Virasoro deformadas em termos de campos bosônicos e fermiônicos são discutidas com um certo detalhe. Em particular, na secção onde tratamos da realização bosônica está colocada uma discussão sobre o papel do spin conforme em uma teoria de campos conformes q -deformada, os cálculos dos OPEs entre a família de tensores Energia-Momento e os campos de spin $N + 1$ ali encontrados são inéditos. Finalizando, também é feita uma discussão sobre a versão q -deformada da álgebra $N = 1$ superconforme.

- No capítulo terceiro construímos uma versão q -deformada da álgebra $N = 2$ superconforme a partir dos operadores de vértice da álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ e de um campo fermiônico livre. Também obtivemos os análogos q -deformados do tensor Energia-Momento escrito na construção de Sugawara para a álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$, bem como a extensão do processo para as álgebras $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N + 1))$. Estes resultados inéditos foram publicados na referência [7].
- No capítulo quarto, após uma revisão sobre o modelo WZNW, descrevemos o processo de redução hamiltoniana do modelo tanto a nível de campos como a nível de álgebras de correntes, todos estes resultados são bem estabelecidos. Na secção 5 deste mesmo capítulo, são expostos os cálculos inéditos de um análogo q -deformado da redução da álgebra de correntes aplicado às correntes da álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$, como resultado, obtivemos uma nova deformação do tipo quadrático da álgebra de Virasoro.
- No capítulo 5 revisamos os resultados originais obtidos ao longo da tese e colocamos os problemas em aberto dentro do escopo dos tratados na tese.
- No apêndice A realizamos uma breve revisão de álgebras de Hopf e do processo de deformação quântica, expondo com um certo detalhe a quantização da álgebra universal envolvente $\mathcal{U}(sl(2))$. Também neste mesmo apêndice descrevemos as álgebras afins quânticas, que são a versão q -deformada das álgebras de Kac-Moody.
- Para finalizar, no apêndice B realizamos alguns detalhes de cálculos a respeito dos temas

discutidos ao longo de todo o trabalho.

Capítulo 1

Teoria de Campos Conformais

1.1 Introdução

Esta seção introduz a Teoria de Campos Conformais (TCC), uma das áreas mais ativas da física teórica contemporânea. A TCC surge naturalmente no estudo de sistemas físicos com simetria conforme, como a teoria de cordas e a mecânica estatística de sistemas críticos. O objetivo principal deste capítulo é apresentar os fundamentos da TCC, incluindo a definição de campos conformes, a construção da álgebra de operadores e a aplicação da teoria à física de partículas e à gravitação.

Na primeira parte, discutimos a simetria conforme e sua realização em termos de campos. A simetria conforme é uma extensão da simetria de Poincaré, incluindo transformações de escala e transformações conformes. A teoria de campos conformes é caracterizada pela invariância sob essas transformações. A segunda parte trata da construção da álgebra de operadores, que é fundamental para a formulação da TCC. A terceira parte aborda a aplicação da TCC à física de partículas e à gravitação, destacando a importância da teoria de cordas e da gravitação quântica.

Este capítulo serve como uma introdução geral à TCC, preparando o leitor para os tópicos mais avançados discutidos nos capítulos subsequentes. A notação utilizada segue as convenções padrão da literatura, com exceção de algumas adaptações para facilitar a compreensão. O leitor é encorajado a consultar a bibliografia para obter uma visão mais detalhada dos tópicos abordados.

Capítulo 1

Teorias de Campos Conformes

1.1 Introdução

O estudo das transformações conformes tem sua importância em vários ramos da Física moderna, entre estes, podemos citar o estudo de fenômenos ultra-relativísticos, onde as massas de repouso tornam-se irrelevantes para o cálculo das energias do sistema. Outra área onde as transformações conformes também são importantes é no estudo das transições de fase em sistemas bidimensionais, próximo ao ponto crítico, o sistema apresenta larguras de correlação infinitas, portanto tornando-se invariante de escala. Neste caso, a invariância por transformações conformes torna-se útil para o cálculo de expoentes críticos.

Neste capítulo, estudaremos as propriedades das teorias de campos obtidas a partir da simetria conforme. Iniciaremos com a descrição do grupo conforme em uma variedade de dimensão $D > 2$. Em seguida, trataremos especificamente do grupo conforme para $D = 2$, que possui propriedades peculiares, tornando, assim as teorias de campos bidimensionais muito mais ricas sob o ponto de vista algébrico. Analisaremos as características de uma teoria de campos conformes em 2 dimensões e estudaremos seus constituintes fundamentais, os campos primários.

Em uma teoria de campos conformes, o tensor Energia-Momento desempenha um papel muito importante como sendo o gerador infinitesimal das transformações conformes [11] [25] [38]. A álgebra satisfeita pelo tensor Energia-Momento é denominada álgebra de Virasoro. A partir das representações desta álgebra, é possível classificar-se as teorias de campos conformes existentes, bem como as características de seus campos primários [38]. Entre as teorias de cam-

pos conformes bidimensionais mais importantes estão alguns modelos em mecânica estatística, denominados modelos minimais. Também podemos citar algumas teorias de campos cuja ação é invariante por transformações de escala, como as teorias de cordas [42], o modelo de Liouville [27], o modelo WZNW [49], bem como alguns modelos que descrevem turbulência em duas dimensões [60].

O tensor Energia-Momento pode ser escrito em termos dos campos de uma teoria conforme. Estes campos podem tanto ser bosônicos como fermiônicos. Outro tipo de teoria de campos conformes também relevante são aquelas cujos campos obedecem a simetrias de gauge internas, como é o caso do modelo WZNW [72]. As correntes conservadas associadas a estas simetrias obedecem a uma álgebra de dimensão infinita, denominada álgebra de Kac-Moody [49], esta álgebra está associada ao grupo de simetria de gauge do modelo. Neste caso, é possível escrever o tensor Energia-Momento quadraticamente em termos das correntes, esta é a denominada construção de Sugawara. Este capítulo descreverá estas construções para o tensor Energia-Momento pois utilizaremos de análogos aos casos usuais ao procedermos as deformações ao longo do trabalho.

Também veremos neste capítulo a construção de operadores de vértice para uma teoria conforme. Os operadores de vértice são campos primários especiais e podem ser utilizados para realizar os geradores de uma álgebra de Kac-Moody em um caso específico. Finalmente, construiremos as extensões supersimétricas $N = 1$ e $N = 2$ da álgebra de Virasoro, utilizando, no segundo caso, os operadores de vértice.

A apresentação de alguns tópicos neste capítulo será dirigida para a sua aplicação posterior nos casos em que analisamos sua q -deformação. Portanto, muitos pontos são omitidos exatamente por não termos tratado de seu análogo q -deformado. Para uma revisão mais ampla da teoria de campos primários, estados e modelos minimais, podemos nos remeter ao artigo original [11], à referência [25], que nos serviu de texto base, e ao review [38]. Para o tópico sobre as realizações bosônica e fermiônica do tensor Energia-Momento bem como para o estudo das álgebras de Kac-Moody e operadores de vértice, estamos seguindo as referências [39] e [46].

1.2 O Grupo Conforme em Dimensão $D > 2$

Seja uma variedade diferenciável M , de dimensão D , na qual esteja definida, para uma vizinhança de um ponto $x \in M$, uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Uma transformação conforme em M , $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, corresponde a uma transformação que deixa a métrica invariante a menos de um fator multiplicativo local, ou seja

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) . \quad (1.1)$$

Isto equivale dizer que as transformações conformes preservam ângulos: O co-seno de um ângulo entre dois vetores u e v pode ser escrito como

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \frac{g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu}{\sqrt{(g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)(g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)}} .$$

Assim, se a métrica for transformada apenas por um fator multiplicativo, o quociente acima não se altera.

Consideremos, agora, uma transformação infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu = x'^\mu ,$$

a expressão (1.1) se escreve como

$$g'_{\mu\nu}(x) = (1 + \sigma(x)) g_{\mu\nu}(x) . \quad (1.2)$$

Os geradores infinitesimais das transformações conformes, $\xi^\mu(x)$, denominados vetores de Killing conformes, podem ser determinados como soluções de uma equação diferencial obtida através da invariância de um elemento de linha ds^2 , i.e.

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}(x) dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu .$$

Utilizando-se a expressão (1.2), obtemos a equação

$$\sigma(x) g_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu . \quad (1.3)$$

Para se determinar $\sigma(x)$, basta contrair (1.3) com a inversa do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, e assim obtemos a equação de Killing para transformações conformes

$$\frac{2}{D} \partial^\lambda \xi_\lambda g_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu . \quad (1.4)$$

Ao nos restringirmos apenas ao caso de uma métrica plana em uma variedade com s dimensões espaciais e t dimensões temporais tais que $s+t = D$, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$. A solução mais geral de (1.4) para $D > 2$ neste caso é dada pela expressão¹

$$\xi^\mu(x) = a^\mu + \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}x^\nu + \lambda x^\mu + 2x^\mu C_\rho x^\rho - x_\rho x^\rho C^\mu,$$

onde a^μ , λ e C^μ são constantes e $\omega_{\mu\nu}$ é anti-simétrico. Esta solução inclui as seguintes transformações :

1. Translações espaço-Temporais, $\xi^\mu(x) = a^\mu$, que constituem D parâmetros independentes.
2. Rotações e “Boosts”, $\xi^\mu(x) = \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}x^\nu$, que constituem $\frac{D(D-1)}{2}$ parâmetros independentes.
3. Dilatações, ou transformações de escala, $\xi^\mu(x) = \lambda x^\mu$, 1 parâmetro independente.
4. Transformações conformes especiais, $\xi^\mu(x) = 2x^\mu C_\rho x^\rho - x_\rho x^\rho C^\mu$, que são D parâmetros independentes.

O número total de transformações deste grupo é de $\frac{(D+1)(D+2)}{2}$ e este grupo é localmente isomorfo a $SO(s+1, t+1)$.

1.3 O Grupo Conforme em dimensão $D = 2$

No caso bidimensional, se a métrica é Minkowskiana, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1)$ o grupo conforme será localmente isomorfo ao grupo $SO(2, 2)$. No entanto, se tomarmos o espaço como sendo Euclideano, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1)$, então o grupo conforme será localmente isomorfo a $SO(3, 1)$. Mas

$$SO(3, 1) \approx SL(2, \mathbf{C}) ,$$

$$SO(2, 2) \approx SL(2, \mathbf{R}) \otimes SL(2, \mathbf{R}) .$$

¹Em $D = 2$, como veremos, a solução mais geral é dada por um polinômio infinito nas coordenadas e não somente por um polinômio quadrático.

Portanto, estaremos tratando do caso Euclideo aqui para diante.

A equação (1.4) para um espaço bidimensional se escreve como

$$\begin{aligned} 2\partial_1\xi_1 &= \partial_1\xi_1 + \partial_2\xi_2, \\ 2\partial_2\xi_2 &= \partial_1\xi_1 + \partial_2\xi_2, \\ \partial_1\xi_2 &= -\partial_2\xi_1, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\partial_1\xi_1 = \partial_2\xi_2 \quad ; \quad \partial_1\xi_2 = -\partial_2\xi_1. \quad (1.5)$$

Se utilizarmos

$$\begin{aligned} z &= x^1 + ix^2, \\ \bar{z} &= x^1 - ix^2, \\ \xi &= \xi^1 - i\xi^2, \\ \bar{\xi} &= \xi^1 + \xi^2, \end{aligned}$$

veremos que as equações (1.5) são as condições de Cauchy-Riemann para funções analíticas, e podem ser escritas da forma

$$\partial_{\bar{z}}\xi = 0 \quad , \quad \partial_z\bar{\xi} = 0, \quad (1.6)$$

onde $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$ e $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$. Isto significa que as transformações conformes em um espaço bidimensional são desacopladas em dois setores isomorfos entre si gerados por todas as funções holomorfas (anti-holomorfas) no plano. Para verificar que realmente estas são transformações conformes, basta tomarmos um elemento de linha

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dzd\bar{z}$$

a transformarmos por $z \rightarrow f(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, assim

$$dzd\bar{z} \rightarrow dfd\bar{f} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z} = |f'(z)|^2 dzd\bar{z},$$

temos, assim, um fator multiplicativo na métrica. A partir deste ponto, trataremos apenas do setor holomorfo, sendo o outro setor completamente análogo.

Tomemos, agora, uma transformação conforme infinitesimal

$$f(z) = z + \epsilon(z) ,$$

expandindo $\epsilon(z)$ em uma série de Laurent, podemos identificar os geradores infinitesimais das transformações conformes

$$f(z) = z + \epsilon(z) = z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^{n+1} = (1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n L_n) z ,$$

onde

$$L_n = -z^{n+1} \partial_z . \quad (1.7)$$

Estes infinitos geradores obedecem a uma álgebra da forma

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} , \quad (1.8)$$

que é a álgebra de Virasoro clássica, que possui uma sub-álgebra isomorfa a $sl(2, \mathbb{C})$, gerada por

$$L_{-1} = -\partial_z , \quad L_0 = -z \partial_z \quad \text{e} \quad L_1 = z^2 \partial_z .$$

As transformações associadas a estes geradores são

$$L_{-1} : \epsilon(z) = -a L_{-1} z = a \rightarrow \text{translações} ,$$

$$L_0 : \epsilon(z) = -b L_0 z = bz \rightarrow \text{dilatações } (b \neq 1) \text{ e rotações } (b = 1) ,$$

$$L_1 : \epsilon(z) = -c L_1 z = cz^2 \rightarrow \text{transformações conformes especiais} ,$$

A forma mais geral das transformações conformes geradas por L_{-1} , L_0 e L_1 é

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad ad - bc = 1 .$$

A condição $ad - bc = 1$ deve ser satisfeita para que estas transformações satisfaçam uma estrutura de grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Estas transformações são denominadas transformações de Möbius, ou projetivas em $\mathbb{C}$.

1.4 Campos Primários e o Tensor Energia-Momento

O estudo das transformações conformes para a teoria de campos tem sua importância estabelecida a medida em que se caracterize a atuação destas transformações sobre os campos da teoria, isto é como os campos se comportam sob transformações deste grupo. A aplicação das teorias de campos conformes reside no cálculo de funções de correlação. Isto é feito utilizando-se as simetrias dos campos para se encontrar equações obedecidas pelas funções de n-pontos (identidades de Ward) e assim encontrar sua expressão exata.

Os campos mais fundamentais em uma teoria conforme são os denominados campos primários. Seja $\phi(z, \bar{z})$ um campo primário, dada uma transformação conforme $z \rightarrow f(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, o campo $\phi(z, \bar{z})$ se transforma como

$$\phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{df}{dz} \right)^\Delta \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right)^{\bar{\Delta}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) , \quad (1.9)$$

onde Δ e $\bar{\Delta}$ são os pesos conformes do campo $\phi(z, \bar{z})$. A soma $\Delta + \bar{\Delta}$ é denominada a dimensão de escala do campo e a diferença $\Delta - \bar{\Delta}$ o spin do campo. Considerando-se uma transformação conforme infinitesimal, $z \rightarrow z + \epsilon(z)$, temos que a expressão (1.9) se escreve como (estaremos considerando somente o setor holomórfico)

$$\delta_\epsilon \phi(z) = (\epsilon(z) \partial_z + \Delta \epsilon'(z)) \phi(z) . \quad (1.10)$$

Ainda, expandindo-se $\epsilon(z)$ em série de Laurent $\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \epsilon_n z^{n+1}$, poderemos reescrever (1.10) como

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi(z) &= \sum_n \epsilon_n \delta_n \phi(z) , \\ \delta_n \phi(z) &= (z^{n+1} \partial_z + \Delta(n+1)z^n) \phi(z) . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para melhor compreendermos as conseqüências da invariância conforme em uma teoria quântica de campos em duas dimensões, é necessário discutirmos o processo de quantização, denominado quantização radial. Seja um espaço de Minkowski bidimensional com coordenadas $\xi^0 = \tau, \xi^1 = \sigma$. Podemos transformá-lo em um espaço euclideo introduzindo a rotação de Wick $\xi^0 \rightarrow \xi^2 = i\tau$. Ao se estabelecermos condições de contorno periódicas na coordenada

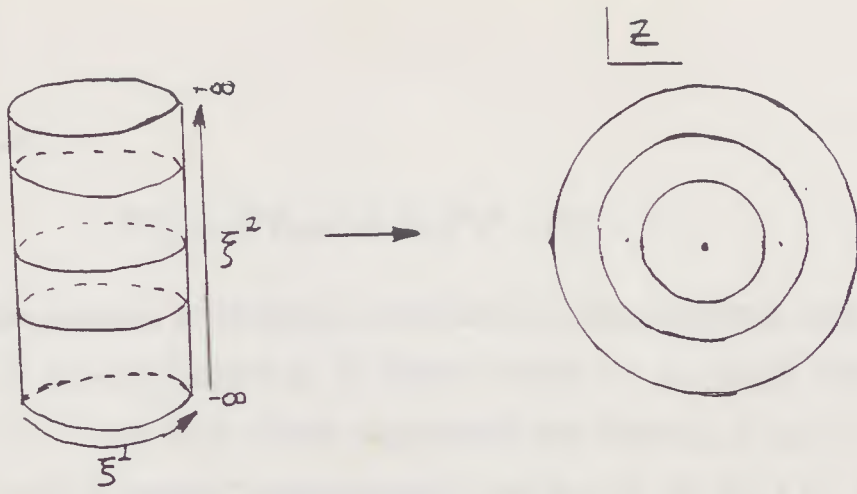


Figura 1.1: Transformação conforme que mapeia um cilindro em um plano.

espacial (que corresponde a um modelo de cordas fechadas ou de redes periódicas em mecânica estatística) podemos tomar a transformação conforme

$$z = e^{i\xi^1 + \xi^2},$$

que transformam um cilindro em um plano, conforme ilustra-nos a figura 1.2. A extremidade equivalente a $\xi^2 = -\infty$ é mapeada na origem $z = 0$ e $\xi^2 = \infty$ em $|z| = \infty$. As circunferências ξ^1 de tempos constantes são mapeadas em circunferências concêntricas no plano z e a evolução temporal se torna-se equivalente a dilatações no plano complexo. Em particular, a utilização deste tipo de coordenadas facilita a o uso de integrais de contornos no plano complexo para analisar expansões a curtas distâncias, cargas conservadas, etc.

Em geral, os geradores de transformações de simetria em uma teoria de campos são contruídos como correntes de Noether associadas a uma ação invariante em uma teoria de campos. Uma teoria de campos em dimensão $D = d + 1$ com uma simetria exata tem uma corrente associada J^μ , satisfazendo uma equação de continuidade, $\partial_\mu J^\mu = 0$. A carga conservada $Q = \int d^d x J^0(x)$, construída integrando-se sobre a seção espacial em um determinado tempo fixo, gera as transformações infinitesimais, indexadas por um parâmetro ϵ , sobre qualquer campo A da teoria, $\delta_\epsilon A = \epsilon[Q, A]$. Em particular, as transformações locais de coordenadas são geradas por cargas construídas a partir de um tensor Energia-Momento $T_{\mu\nu}$ que possui divergência nula e em geral é simétrico. Em teorias invariantes conformes o traço do tensor Energia-Momento é nulo, isto devido à conservação da corrente associada a uma transformação

de escala, $J_\mu = T_{\mu\nu}x^\nu$:

$$\partial^\mu J_\mu = \partial^\mu T_{\mu\nu}x^\nu + T_{\mu\nu}\partial^\mu x^\nu = T^\mu_\mu = 0.$$

Para implementarmos as correntes conservadas no plano conforme, precisamos de algumas definições de tensores complexos. O tensor métrico em um espaço euclideo plano com coordenadas $(z, \bar{z})$, tem como únicas componentes não nulas $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}$. As únicas componentes não nulas do tensor Energia-Momento, por sua vez, são T_{zz} e $T_{\bar{z}\bar{z}}$, pois $T_{z\bar{z}}$ e $T_{\bar{z}z}$ são proporcionais ao traço $T^\mu_\mu = 0$. Da equação de continuidade também concluímos que as componentes do tensor Energia-Momento se desacoplam quiralmente:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_{\bar{z}}T_{zz} + \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \\ \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0, \end{cases}$$

que, devido ao traço nulo, resulta em

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} = 0 \quad ; \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0.$$

Finalmente podemos escrever explicitamente a atuação do tensor Energia-Momento como o gerador das transformações conformes no plano. Consideremos a função N pontos entre os campos bidimensionais $\phi_1 \dots \phi_N$, dada pela expressão

$$\langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = \int \mathcal{D}\phi (\phi_1 \dots \phi_N) e^{-S[\phi]},$$

onde $\mathcal{D}\phi$ é uma medida sobre todas as configurações de campo existentes e $S[\phi]$ é a ação que rege a dinâmica destes campos. Sendo a teoria invariante por transformações conformes, temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\epsilon \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = \langle (\delta_\epsilon \phi_1(z_1)) \phi_2(z_2) \dots \phi_N(z_N) \rangle + \\ &+ \langle \phi_1(z_1) (\delta_\epsilon \phi_2(z_2)) \dots \phi_N(z_N) \rangle + \dots + \langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots (\delta_\epsilon \phi_N(z_N)) \rangle + \\ &- \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \delta_\epsilon S \rangle, \end{aligned} \tag{1.12}$$

onde

$$\delta_\epsilon S = \int dz d\bar{z} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_\epsilon g_{\mu\nu} = \int dz d\bar{z} T^{\mu\nu} \delta_\epsilon g_{\mu\nu} = \int dz d\bar{z} T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu).$$

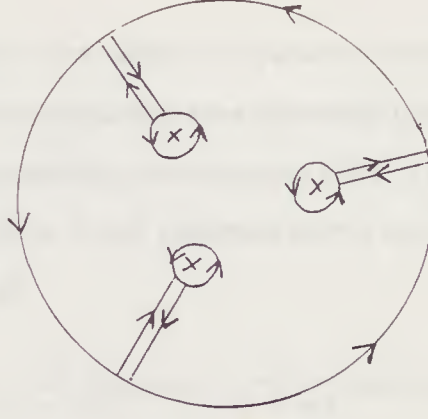


Figura 1.2: Deformação dos contornos de integração no plano complexo

Assim, sendo $X = \phi_1 \dots \phi_N$, temos

$$\begin{aligned} \langle \delta_\epsilon X \rangle - \langle X \int dz d\bar{z} T_{zz} (\partial^z \epsilon^z) + \text{conjugado complexo} \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \langle \delta_\epsilon X \rangle - \langle X \int dz d\bar{z} T_{zz} \frac{1}{2} (\partial_{\bar{z}} \epsilon^z) + \text{conjugado complexo} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos a métrica do plano euclideo complexo para levantar e abaixar os índices. Integrando-se em $d\bar{z}$, temos

$$\langle \delta_\epsilon X \rangle = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) \langle T_{zz} X \rangle + \text{conjugado complexo}, \quad (1.13)$$

onde C é o contorno da região do plano onde se efetuou a transformação conforme e o fator $\frac{1}{2}$ foi absorvido na redefinição do parâmetro $\epsilon(z)$ e o fator $\frac{1}{2\pi i}$ é um fator de normalização na integral complexa. A integração é efetuada sobre contornos ao redor dos pontos z_i ($i = 1 \dots N$), onde estão definidos os campos ϕ_i , isto é facilmente verificável na figura 1.1.

Afim de se evitar ambigüidades nas funções de Green da teoria, é necessário definirmos o ordenamento radial entre campos

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w) & |z| > |w| \\ B(w)A(z) & |w| > |z| \end{cases},$$

assim, o produto entre dois campos $A(z)B(w)$ somente estará definido para regiões onde $|z| > |w|$. Portanto, podemos escrever uma transformação conforme infinitesimal sobre um campo $\phi(w)$ como sendo o comutador a tempos iguais com uma carga Q , isto equivale a uma integral de contorno ao redor da origem do produto ordenado $T(z)$ e $\phi(w)$:

$$\delta_\epsilon \phi(w) = \epsilon[Q, \phi] = \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) R(T(z)\phi(w)). \quad (1.14)$$

O resultado desta integral depende dos termos singulares existentes no produto destes dois operadores, portanto é necessário encontrarmos uma expressão para este produto em termos dos campos da teoria, a este tipo de expansão, denominamos OPE (Operator Product Expansion). Tendo em vista as expressões (1.10) e (1.14) podemos inferir que o OPE $T(z)\phi(w)$ ($|z| > |w|$) de forma a obtermos a igualdade é²

$$T(z)\phi(w) = \frac{\Delta}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\phi(w) + \text{reg.} \quad (1.15)$$

Podemos ainda expandir o tensor energia-momento em seus modos normais

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2},$$

assim, os L_n podem ser calculados como

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z).$$

Após a integração, obtemos a atuação dos operadores L_n sobre os campos primários que foi dada pela expressão (1.11) pois

$$\delta_n \phi(w) = [L_n, \phi(w)].$$

Efetuando-se duas transformações conformes consecutivas sobre um campo primário, podemos verificar que a expressão do OPE $T(z)T(w)$ ($|z| > |w|$)

$$T(z)T(w) = \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{(z-w)} + \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \text{reg.} \quad (1.16)$$

A álgebra entre os modos L_n pode ser obtida pela integração de (1.16) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} [T(z), T(w)] = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{z=0} dz \oint_{w=0} dw z^{m+1} w^{n+1} (T(z)T(w) - T(w)T(z)). \end{aligned}$$

Para avaliar-se esta integral, tomemos um w fixo e integremos em z para depois integrarmos em w . O primeiro termo da integral somente será não nulo para regiões onde $|z| > |w|$, contendo,

²Escreveremos explicitamente apenas a parte singular do OPE, pois os termos regulares não oferecem contribuição na integral.

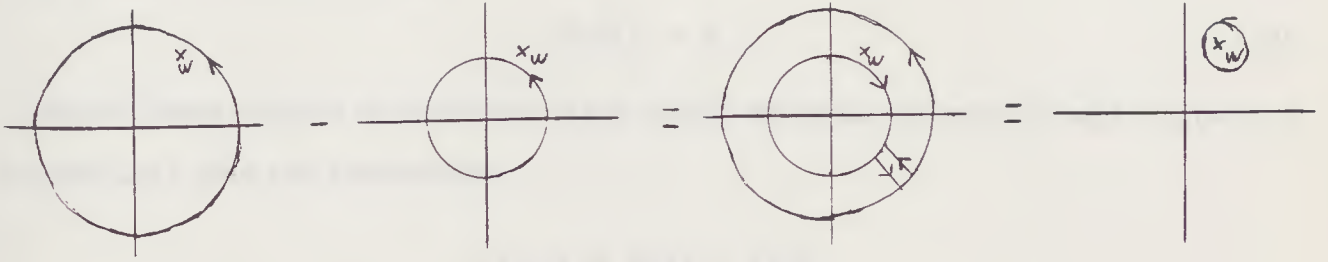


Figura 1.3: Deformação do contorno de integração no plano complexo para o cálculo de $[L_m, L_n]$.

assim, o pólo $(z - w)$. O segundo termo na integral somente é não nulo para regiões onde $|w| > |z|$, assim

$$\begin{aligned}
 [L_m, L_n] &= \oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{|z| > |w|} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} T(z) T(w) + \\
 &- \oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{|z| < |w|} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} T(w) T(z) = \\
 &= \oint_{w=0} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{|z|=|w|} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} R(T(z) T(w)) .
 \end{aligned}$$

A razão desta última passagem pode ser vista na figura 4.3, onde a deformação dos contornos no plano complexo nos permite calcular o resíduo somente no polo existente na expressão do OPE, cancelando-se, assim um resíduo na origem. Finalmente obtemos a álgebra

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} ,$$

conhecida como a álgebra de Virasoro que consiste em uma extensão central da álgebra (1.8).

1.5 Realização Bosônica de uma Teoria Conforme

Tomemos o caso de um campo escalar não massivo X em duas dimensões cuja ação é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \partial^\mu X \partial_\mu X . \quad (1.17)$$

No espaço euclidiano complexificado, o campo X dependerá das coordenadas z e $\bar{z}$ e a ação (1.17) se escreverá como

$$S = \int dz d\bar{z} \partial_z X \partial_{\bar{z}} X , \quad (1.18)$$

cuja equação de movimento será

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} X = 0 . \quad (1.19)$$

A solução desta equação de movimento é um campo resultante da soma de uma componente holomórfica e uma anti holomórfica

$$X(z, \bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z}) .$$

Trataremos aqui apenas do setor holomórfico, sendo o outro análogo.

A expressão do campo bidimensional $X(z)$ é dada por

$$X(z) = Q - iP \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} , \quad (1.20)$$

onde os modos α_n , P e Q obedecem às regras de comutação

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{m+n,0} \quad ; \quad [Q, P] = i .$$

Este campo, escrito em termos destes modos normais, é denominado na literatura de campo de Fubini-Veneziano e foi definido primordialmente no contexto de teoria de cordas. A partir deste campo, podemos definir todos os campos primários da teoria, bem como efetuar os OPEs existentes pois inclusive o tensor Energia-Momento é escrito em termos do campo X . Alguns detalhes de cálculos referentes a resultados desta seção estarão expostos no apêndice B. A expressão do OPE entre $X(z)$ e $X(w)$ ($|z| > |w|$) é dada por

$$X(z)X(w) = -\ln(z-w) . \quad (1.21)$$

Por sua vez, o tensor Energia-Momento associado à ação (1.17) se escreve como

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \partial_z X(z) \partial_z X(z) : , \quad (1.22)$$

onde os pontos $::$ representam um ordenamento normal, colocando todos os modos α_n para $n > 0$ à direita e os modos para $n < 0$ à esquerda. Escrito em modos, o tensor Energia-Momento será

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n z^{-n-2} ,$$

com

$$L_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} : \alpha_p \alpha_{n-p} : .$$

Com o auxílio da expressão (1.21) e dos OPEs resultantes entre as derivadas do campo X , podemos verificar através do teorema de Wick que o OPE entre $T(z)$ e $X(w)$ é

$$\begin{aligned} T(z)X(w) &= -\frac{1}{2} : \partial_z X(z) \partial_z X(z) : X(w) = : \partial_z X(z) : \partial_z \ln(z-w) = \\ &= \frac{\partial_z X(z)}{(z-w)} = \frac{\partial_w X(w)}{(z-w)} , \end{aligned} \quad (1.23)$$

onde a última igualdade é obtida expandindo-se o numerador dependente de z em torno de w por séries de Taylor, os outros termos da série são regulares em $z = w$, e portanto não contribuem na integral. Temos, assim, que o campo $X(w)$ é um campo primário cujo peso conforme é igual a 0. Um outro campo primário da teoria é a corrente

$$H(z) = i\partial_z X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n-1} , \quad (1.24)$$

onde $\alpha_0 = P$. Com esta definição, o tensor Energia-Momento pode ser escrito como

$$T(z) = \frac{1}{2} : H^2(z) : . \quad (1.25)$$

A expressão do OPE entre $H(z)$ e $H(w)$ pode ser obtida facilmente resultando em

$$H(z)H(w) = \frac{1}{(z-w)^2} . \quad (1.26)$$

A partir do OPE entre as correntes H , podemos calcular, utilizando o teorema de Wick, a expressão $T(z)H(w)$:

$$T(z)H(w) = \frac{H(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w H(w)}{(z-w)} + \text{reg.} , \quad (1.27)$$

o que indica que $H(w)$ é um campo primário com peso conforme igual a 1. Adicionalmente, podemos calcular a álgebra obedecida pelo tensor Energia-Momento bosônico e mostrar que ele satisfaz a uma relação do tipo (1.16) com $c = 1$

$$T(z)T(w) = \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{(z-w)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \text{reg.} . \quad (1.28)$$

Finalmente, temos uma terceira classe de campos primários não triviais: trata-se dos operadores de vértice, escritos na forma

$$V_\alpha(z) = : e^{i\alpha X(z)} : = e^{-\alpha \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} e^{i\alpha Q} e^{\alpha P \ln z} e^{-\alpha \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}},$$

onde o ordenamento normal indica que as exponenciais dos modos positivos são colocadas à direita das exponenciais dos modos negativos. É exatamente o ordenamento normal que fornece a este campo um peso conforme não trivial, tendo em vista que o peso conforme de $X(z)$ é nulo. O OPE entre $T(z)$ e $V_\alpha(w)$ é

$$\begin{aligned} T(z)V_\alpha(w) &= T(z) : e^{i\alpha X(w)} : = \\ &= \frac{\frac{\alpha^2}{2} V_\alpha(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w V_\alpha(w)}{(z-w)} + \text{reg.} . \end{aligned} \quad (1.29)$$

Portanto, o peso conforme de um operador de vértice $V_\alpha(w)$ é igual a $\frac{\alpha^2}{2}$. Os operadores de vértice são muito úteis no contexto de teoria de cordas, representando os estados de partículas correspondentes aos modos vibracionais da corda. As funções de N pontos de vértices na teoria de cordas reproduzem e generalizam os resultados obtidos pelos modelos de ressonâncias duais. Uma outra aplicação importante para os operadores de vértice é o fato de se obter uma realização para uma álgebra de Kac-Moody com carga central igual a 1, isto será discutido na seção 7 deste capítulo.

1.6 Realização Fermiônica de uma Teoria Conforme e a Álgebra $N = 1$ Superconforme

Também podemos construir uma teoria conforme a partir de um férmion livre não massivo em um espaço euclideo bidimensional. As matrizes de Dirac euclideanas em duas dimensões possuem a forma

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

Assim, o operador de Dirac $\gamma^\mu \partial_\mu$, pode ser escrito como

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{\bar{z}} \\ \partial_z & 0 \end{pmatrix} .$$

Portanto, a equação de Dirac para um campo fermiônico, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}$, leva-nos à conclusão que suas componentes se desacoplam em uma componente holomorfa e uma anti-holomorfa. Assumindo as duas quiralidades, a ação para este campo fermiônico é escrita como [38]

$$S = \frac{1}{8\pi} \int dzd\bar{z} \{ \bar{\psi} \partial_z \bar{\psi} + \psi \partial_{\bar{z}} \psi \} . \quad (1.30)$$

A partir deste ponto, somente estaremos considerando o setor holomorfo, a menos que se diga o contrário.

As condições de contorno para os férmions a duas dimensões podem ser de dois tipos:

1. Periódicas (P), ou setor de Ramond: $\psi(ze^{2\pi i}) = \psi(z)$.
2. Anti-periódicas (A), ou setor de Neveu-Schwartz: $\psi(ze^{2\pi i}) = -\psi(z)$.

Podemos expandir os campos fermiônicos ψ em modos ψ_n , obedecendo à regra de anti-comutação

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{m+n,0} ,$$

para $n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ no caso (P), e $n \in \mathbf{Z}$ no caso (A). Tomando a forma

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}} \psi_n z^{-n-\frac{1}{2}} \quad (\text{P}) , \\ \psi(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \psi_n z^{-n-\frac{1}{2}} \quad (\text{A}) . \end{aligned}$$

Com esta expansão, é possível calcular o OPE entre os campos $\psi(z)$ e $\psi(w)$

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{(z-w)} + : \psi(z)\psi(w) : , \quad (1.31)$$

onde o ordenamento entre os modos fermiônicos é feito de forma a se colocar os modos positivos à direita dos negativos. Esta teoria é conformemente invariante, e o tensor Energia-Momento canônico associado à ação (1.30) é

$$L(z) = \frac{1}{2} : \partial_z \psi(z) \psi(z) : , \quad (1.32)$$

estaremos denotando o tensor Energia-Momento para férmions livres por $L(z)$ apenas para sermos coerentes com outras notações utilizadas em outros capítulos. O campo $\psi(w)$ transforma-se,

com relação a este tensor Energia-Momento, como um campo primário de peso conforme igual a $\frac{1}{2}$

$$L(z)\psi(w) = \frac{\frac{1}{2}\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\psi(w)}{(z-w)} + \text{reg.} . \quad (1.33)$$

O tensor Energia-Momento, por sua vez, satisfaz a uma relação algébrica do tipo (1.16) com $c = \frac{1}{2}$

$$L(z)L(w) = \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w L(w)}{(z-w)} + \frac{\frac{1}{4}}{(z-w)^4} + \text{reg.} . \quad (1.34)$$

Associando-se a construção bosônica da seção anterior à construção de férmions livres aqui apresentada, podemos construir uma extensão supersimétrica $N = 1$ para a álgebra de Virasoro. Define-se o gerador de supersimetria como $G(z) = H(z)\psi(z)$, ele opera da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G(z)H(w) &= \frac{\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\psi(w)}{(z-w)} + \text{reg.} , \\ G(z)\psi(w) &= \frac{H(w)}{(z-w)} + \text{reg.} . \end{aligned}$$

Podemos ver que $G(w)$ é um campo primário de peso conforme igual a $\frac{3}{2}$ em relação ao tensor Energia momento total $\mathbf{T}(z) = T(z) + L(z)$. Assim, a álgebra $N = 1$ superconforme se escreve como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(z)\mathbf{T}(w) &= \frac{2\mathbf{T}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\mathbf{T}(w)}{(z-w)} + \frac{\frac{3}{4}}{(z-w)^4} + \text{reg.} , \\ \mathbf{T}(z)G(w) &= \frac{\frac{3}{2}G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w G(w)}{(z-w)} + \text{reg.} , \\ G(z)G(w) &= \frac{1}{(z-w)^3} + \frac{2\mathbf{T}(w)}{(z-w)} + \text{reg.} . \end{aligned} \quad (1.35)$$

1.7 Álgebras de Correntes e Construção de Sugawara para o Tensor Energia-Momento

Uma outra classe importante de álgebras a ser considerada neste trabalho são as assim denominadas álgebras de Kac-Moody, ou álgebras afins. Uma álgebra de Kac-Moody é construída a partir de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com os geradores T^a satisfazendo

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c . \quad (1.36)$$

Toma-se, então a álgebra de “loops” de $\mathfrak{g}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \left\{ f : S^1 \longrightarrow \mathfrak{g} \mid \theta \mapsto f(\theta) \right\} ,$$

que é a álgebra das funções de uma circunferência unitária sobre $\mathfrak{g}$. As funções $f(\theta)$ em $\mathfrak{g}$ podem ser decompostas em componentes de uma série de Fourier

$$f(\theta) = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} f_a(\theta) T^a = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{a,n} e^{in\theta} T^a .$$

Para n sendo qualquer inteiro, a álgebra é denominada “untwisted”, para o caso de n ser somente múltiplo de um número inteiro, a álgebra é denominada “twisted”. Portanto, todo elemento em $\tilde{\mathfrak{g}}$ pode ser escrito em termos dos elementos da base³ $J_n^a = e^{in\theta} T^a$. A álgebra de “loops” pode ser munida de uma estrutura natural de álgebra de Lie, basta considerarmos os comutadores

$$[J_n^a, J_m^b] = i f^{abc} J_{m+n}^c .$$

Denominamos álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathfrak{g}}$ à extensão central da álgebra de “loops” por um parâmetro k ($\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus k\mathbb{C}$), cuja relação de comutação mais geral compatível com a identidade de Jacobi é dada por

$$\begin{aligned} [J_n^a, J_m^b] &= i f^{abc} J_{m+n}^c + kn \delta^{ab} \delta_{m+n,0} , \\ [k, J_n^a] &= 0 , \end{aligned} \tag{1.37}$$

em geral, considera-se a normalização $Tr(T^a T^b) = \delta^{ab}$.

Estas álgebras são comumente encontradas na física de campos na forma de álgebra de correntes, isto é, dependentes da função geratriz

$$J^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^a z^{-n-1} ,$$

o termo central da álgebra de correntes é denominado termo de Schwinger. Uma realização para estas correntes pode ser dada em termos de campos fermiônicos a duas dimensões

$$J^a(z) = \frac{1}{2} : \psi^i(z) T_{ij}^a \psi^j(z) : , \tag{1.38}$$

³Aqui estaremos utilizando a letra J para indicar os geradores da álgebra de Kac-Moody apenas para evitar mal-entendidos com respeito à notação em situações em que consideraremos o tensor Energia-Momento escrito em função das correntes

onde os campos $\psi^i(z)$ obedecem a relações de OPE

$$\psi^i(z)\psi^j(w) = \frac{\delta^{ij}}{(z-w)},$$

e os elementos da álgebra de Lie T^a estão dados em uma representação de dimensão finita tal que $T_{ij}^a = -T_{ji}^a$. A relação de OPE entre estas correntes pode ser efetuada rapidamente utilizando-se o teorema de Wick, resultando em [39]

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{if^{abc}J^c(w)}{(z-w)} + \frac{k\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \text{reg.} \quad (1.39)$$

É possível construir-se uma teoria conforme a partir das correntes de uma álgebra de Kac-Moody associada a uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Este tipo de teoria conforme pode ser visto no estudo dos modelos σ não lineares e do modelo WZNW. Neste caso, o tensor Energia-Momento é escrito quadraticamente em termos das correntes, esta é a denominada construção de Sugawara⁴

$$T(z) = \beta \sum_{a=1}^{dim \mathfrak{g}} \times_{\times} J^a(z)J^a(z)_{\times} \quad (1.40)$$

onde o ordenamento indicado pelo sinal $(\times_{\times})$, denota o seguinte:

$$\times_{\times} J_n^a J_m^a_{\times} = \begin{cases} J_n^a J_m^a & n < 0 \\ J_m^a J_n^a & n \geq 0 \end{cases}.$$

A constante β , é determinada impondo-se que as correntes $J^a(w)$ sejam campos primários de peso conforme igual a 1,

$$T(z)J^a(w) = \frac{J^a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J^a(w)}{(z-w)} + \text{reg.}, \quad (1.41)$$

resultando, assim, em

$$\beta = \frac{1}{2k + Q_{\psi}},$$

onde Q_{ψ} é o Casimir quadrático na representação adjunta e obedece à relação $f^{acd}f^{bcd} = \delta^{ab}Q_{\psi}$.

O tensor Energia-Momento obedecerá a uma álgebra de Virasoro do tipo (1.16) com carga central [39]

$$c = \frac{2k dim \mathfrak{g}}{2k + Q_{\psi}}.$$

⁴Para maiores detalhes a respeito da construção de Sugawara para o tensor Energia-Momento, vide as refs. [33] [46] e [39].

Para concluirmos este capítulo introdutório, vamos discutir a realização em termos de operadores de vértice para uma álgebra de Kac-Moody. Em primeiro lugar, é necessário escrever as relações de comutação (1.37) na base de Weyl-Cartan, H_n^i , para $i = 1 \dots \text{rank } \mathfrak{g}$, e E_n^α , sendo α as raízes da álgebra $\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
[H_n^i, H_m^j] &= kn\delta^{ij}\delta_{m+n,0} , \\
[H_n^i, E_m^\alpha] &= \alpha^i E_{m+n}^\alpha , \\
[E_n^\alpha, E_m^\beta] &= \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{m+n}^{\alpha+\beta} & \text{Para } \alpha + \beta \text{ raiz ,} \\ \frac{2}{\alpha^2} \{ \alpha \cdot H_{m+n} + kn\delta_{m+n,0} \} & \text{Para } \alpha = -\beta , \\ 0 & \text{De outra forma ,} \end{cases} \\
[k, E_n^\alpha] &= [k, H_n^i] = 0 .
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Adotamos a normalização $Tr(H^i H^j) = \delta^{ij}$, e $Tr(E^\alpha E^\beta) = \frac{2}{\alpha^2} \delta^{\alpha, -\beta}$. Estaremos tratando apenas do caso onde temos condições de Hermiticidade,

$$H_n^{i\dagger} = H_{-n}^i ; \quad E_n^{\alpha\dagger} = E_{-n}^{-\alpha} ; \quad k^\dagger = k ,$$

pois este é o caso interessante para descrevermos teorias de campos.

Para o caso de álgebras “simply-laced”, i.e., as raízes de $\mathfrak{g}$ têm todas o mesmo comprimento, portanto é uma álgebra do tipo A, D ou E, e para o nível $k = 1$, é possível realizar-se uma construção em termos de operadores de vértice para a álgebra, uma vez que o peso conforme é proporcional ao comprimento das raízes. O comprimento padrão das raízes será tido como $\sqrt{2}$. Para construirmos os vértices, tomemos uma sub-álgebra de Heisenberg cujos geradores serão denotados por α_n^i . Estes geradores obedecem à seguinte regra de comutação

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{m+n,0} , \tag{1.43}$$

portanto equivalentes aos comutadores entre os modos H_n^i para $k = 1$. Assim, as correntes associadas $H^i(z)$ podem ser escritas como

$$H^i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^i z^{-n-1} . \tag{1.44}$$

As condições de Hermiticidade implicam em $\alpha_n^{i\dagger} = \alpha_{-n}^i$. Em analogia com o que foi apresentado na seção 5 deste capítulo, podemos definir um campo de Fubini-Veneziano $X^i(z)$, correspondente ao da expressão (1.20), integrando-se a relação

$$H^i(z) = i\partial_z X^i(z) .$$

Assim, denominando-se $P^i = \alpha_0^i$, temos

$$X^i(z) = Q^i - iP^i \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^i}{n} z^{-n} ,$$

onde as constantes de integração Q^i são escolhidas de forma a serem canonicamente conjugados aos modos P^i

$$[Q^i, P^j] = i\delta^{ij} .$$

Os operadores de vértice serão dados pela expressão

$$\begin{aligned} U^\alpha(z) &= : e^{i\alpha \cdot X(z)} : = \\ &= e^{-\alpha \cdot \sum_{n < 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} e^{i\alpha \cdot Q} e^{\alpha \cdot P \ln z} e^{-\alpha \cdot \sum_{n > 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} . \end{aligned}$$

Com os operadores de vértice construídos desta maneira, veremos que os modos E_n^α da álgebra de Kac-Moody serão proporcionais aos coeficientes A_n^α da expansão em séries de Laurent do vértice: $U^\alpha(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^\alpha w^{-n-1}$. O resultado do OPE entre $H^i(z)$ e $U^\alpha(w)$ é

$$H^i(z)U^\alpha(w) = : H^i(z)U^\alpha(w) : + \frac{\alpha^i U^\alpha(w)}{(z-w)} . \quad (1.45)$$

Para se efetuar os OPEs entre os vértices, utiliza-se a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]} .$$

Assim, temos

$$: e^{i\alpha \cdot X(z)} :: e^{i\beta \cdot X(w)} : = (z-w)^{\alpha \cdot \beta} : e^{i(\alpha \cdot X(z) + \beta \cdot X(w))} : . \quad (1.46)$$

Ao integrarmos sobre as variáveis z e w , obtemos as relações de quase-comutação

$$\begin{aligned} [H_n^i, H_m^j] &= n\delta^{ij}\delta_{m+n,0} , \\ [H_n^i, A_m^\alpha] &= \alpha^i A_{m+n}^\alpha , \end{aligned}$$

$$A_n^\alpha A_m^\beta - (-1)^{\alpha \cdot \beta} A_m^\beta A_n^\alpha = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) A_{m+n}^{\alpha+\beta} & \alpha \cdot \beta = -1, \\ \alpha \cdot H_{m+n} + n \delta_{m+n,0} & \alpha \cdot \beta = -2, \\ 0 & \alpha \cdot \beta \geq 0. \end{cases}$$

Tendo em vista a semelhança das relações acima com as apresentadas em (1.42), podemos propor uma proporcionalidade entre E_n^α e A_n^α por um operador hermiteano de quadrado unitário c_α que seja função dos momentos P^i e que obedeça a uma relação do tipo

$$E_n^\alpha = A_n^\alpha c_\alpha = c_{-\alpha} A_n^\alpha.$$

Um fato importante a se observar com relativo à construção de operadores de vértice para álgebras de Kac-Moody é a equivalência entre o tensor Energia-Momento na construção de Sugawara e sua parte proporcional às correntes da sub-álgebra de Cartan [39]. Na base de Weyl-Cartan, o tensor Energia-Momento se escreve como

$$T(z) = \frac{1}{2k + Q_\psi} \left\{ \sum_{i=1}^{rank \mathfrak{g}} \times H^i(z) H^i(z) \times + \sum_{\alpha > 0} \times (E^\alpha(z) E^{-\alpha}(z) + E^{-\alpha}(z) E^\alpha(z)) \times \right\}. \quad (1.47)$$

A constante multiplicativa no tensor Energia-Momento simplifica-se consideravelmente nas condições para a realização de vértice da álgebra de Kac-Moody: O Casimir quadrático é igual a duas vezes o número de Coxeter dual da álgebra de Lie, que por sua vez é igual ao número de Coxeter devido à álgebra ser “simply-laced” ($Q_\psi = 2\tilde{h} = 2h$, onde $h = \frac{\text{número de raízes de } \mathfrak{g}}{\text{Rank } \mathfrak{g}}$). Portanto, como $k = 1$, temos

$$\frac{1}{2k + Q_\psi} = \frac{1}{2(1 + h)}.$$

A referida equivalência é devida às identidades [39]

$$\times (E^\alpha(z) E^{-\alpha}(z) + E^{-\alpha}(z) E^\alpha(z)) \times = \times (\alpha \cdot H(z))^2 \times, \quad (1.48)$$

e

$$\sum_{\alpha > 0} \alpha \alpha^T = h I_{\text{rank } \mathfrak{g}}.$$

Assim, ao somar-se sobre as raízes positivas, o termo dependente dos operadores E^α em (1.47) torna-se igual a h vezes o primeiro termo. Para se demonstrar (1.48), basta tomarmos

$$\times (E^\alpha(z) E^{-\alpha}(z) + E^{-\alpha}(z) E^\alpha(z)) \times = \lim_{z \rightarrow \zeta} \left(E^\alpha(z) E^{-\alpha}(z) + E^{-\alpha}(z) E^\alpha(z) - \frac{2}{(z - \zeta)^2} \right).$$

Introduzindo-se a realização de vértices, teremos

$$\times (E^\alpha(z)E^{-\alpha}(z) + E^{-\alpha}(z)E^\alpha(z))^\times = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{1}{(z - \zeta)^2} \left(e^{i\alpha \cdot (X(z) - X(\zeta))} + e^{-i\alpha \cdot (X(z) - X(\zeta))} - 2 \right) .$$

Para avaliar-se o limite desejado, devemos aplicar a regra de l'Hospital duas vezes, obtendo-se o resultado (1.48). Assim, o tensor Energia-Momento (1.47) pode ser escrito como

$$T(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{rank} \times H^i(z) H^i(z)^\times . \quad (1.49)$$

Finalmente, vamos considerar a realização de vértices para o caso particular da álgebra $\widehat{sl}(2)$. Neste exemplo específico, teremos apenas um conjunto de osciladores α_n , satisfazendo à relação (1.43). Os geradores da álgebra serão

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n-1} = i\partial_z X(z) , \\ E^\pm(z) &= : e^{\pm i\sqrt{2}X(z)} : = \\ &= e^{\mp\sqrt{2} \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} e^{\pm i\sqrt{2}Q} e^{\pm\sqrt{2}P \ln z} e^{\mp\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} . \end{aligned} \quad (1.50)$$

E as relações de OPE resultarão em

$$\begin{aligned} H(z)H(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} + \text{reg.} , \\ H(z)E^\pm(w) &= \frac{\pm\sqrt{2}E^\pm(w)}{(z-w)} + \text{reg.} , \\ E^\pm(z)E^\mp(w) &= \frac{\pm\sqrt{2}H(w)}{(z-w)} + \frac{1}{(z-w)^2} + \text{reg.} . \end{aligned} \quad (1.51)$$

Tendo em vista as relações de OPE (1.51), podemos construir uma realização para a álgebra $N = 2$ superconforme adicionando um campo fermiônico livre $\psi(z)$, obedecendo (1.31). Os geradores de supersimetria são escritos como

$$G^\pm(z) = E^\pm(z)\psi(z) .$$

Devido á realização em termos de operadores de vértice, o tensor Energia-Momento relativo à álgebra $\widehat{sl}(2)$ pode ser escrito na forma (1.49), que neste caso é igual à expressão (1.25):

$$T(z) = \frac{1}{2} : H^2(z) : .$$

O tensor Energia-Momento relativo ao setor fermiônico será o mesmo que já foi exibido na expressão (1.32):

$$L(z) = \frac{1}{2} : \partial_z \psi(z) \psi(z) : .$$

Os geradores $G^\pm(w)$ serão campos primários de peso conforme $\frac{3}{2}$ com relação ao tensor Energia-Momento total $\mathbf{T}(z) = T(z) + L(z)$ [40]. Assim, a álgebra $N = 2$ superconforme pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(z)\mathbf{T}(w) &= \frac{2\mathbf{T}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \mathbf{T}(w)}{(z-w)} + \frac{\frac{3}{4}}{(z-w)^4} + \text{reg.} , \\ \mathbf{T}(z)G^\pm(w) &= \frac{\frac{3}{2}G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w G(w)}{(z-w)} + \text{reg.} , \\ G^+(z)G^-(w) &= \frac{1}{(z-w)^3} + \frac{\sqrt{2}H(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w) + \sqrt{2}\partial_w H(w)}{(z-w)} + \text{reg.} . \end{aligned} \quad (1.52)$$

Assim, temos uma álgebra $N = 2$ superconforme obtida a través dos operadores de vértice da álgebra $\widehat{sl}(2)$.

Todos os elementos apresentados neste capítulo nos servirão de base para os desenvolvimentos do restante do trabalho, onde estaremos efetuando as deformações destas estruturas algébricas. A deformação destas álgebras produzem complicações adicionais, como por exemplo a estrutura da álgebra de Virasoro q-deformada obtida a partir da realização bosônica não é isomorfa (a menos de termo central) à álgebra de Virasoro q-deformada obtida pela realização fermiônica. portanto não podemos falar de tensor Energia-Momento total, que abranja os dois setores. Também, no caso não-abeliano, não é possível escrever um tensor Energia-Momento na construção de Sugawara que realize uma álgebra fechada, neste caso, somente as componentes deste tensor fecham uma álgebra de OPE. Todos estes fatos serão vistos nos capítulos 2 e 3.

Capítulo 2

Campos Primários em uma Teoria q -Deformada

2.1 Introdução

Nos últimos anos, tem havido um crescente interesse no estudo das álgebras envolventes universais quantizadas. Estas álgebras podem ser estudadas no contexto mais geral das álgebras de Hopf quase triangulares [20] [47] [53] (vide apêndice A para definições). O processo de deformação consiste em se estender uma determinada álgebra $\mathcal{A}$ para uma outra álgebra $\mathcal{A}_q$, dependente de um parâmetro de deformação q , sendo que no limite $q \rightarrow 1$ reobtemos a álgebra inicial [19] [29]. O parâmetro de deformação pode apresentar um grande interesse para a Física. Primeiramente, o parâmetro de deformação estava relacionado à própria quantização dos sistemas integráveis no método do espalhamento inverso quântico, por esta razão, a denominação mais conhecida que as álgebras de Hopf q -deformadas receberam é a de “grupos quânticos” [18].

O parâmetro de deformação de uma álgebra também pode assumir outras interpretações dependendo do contexto em que aparecem em Física. Em modelos de spin, como por exemplo o modelo XXZ , o parâmetro de deformação pode indicar uma anisotropia no sistema [18] [62]. No estudo do efeito Hall quântico [64] [65], o parâmetro de deformação está relacionado ao campo magnético externo agindo sobre os elétrons confinados a um plano, neste caso, foi demonstrado que a degenerescência dos níveis de Landau são classificadas de acordo com uma representação da álgebra $\mathcal{U}_q(sl(2))$. Em teoria de campos, em particular, o interesse por deformações quânticas

está no assim denominado “point-splitting”[17], que evita o problema de divergências ao se escrever o produto de campos no mesmo ponto, isto pode ser uma alternativa para se obter teorias de campo menos divergentes.

As álgebras de Virasoro q -deformadas têm um grande interesse em se tratando de generalizações para as teorias conformes conhecidas. Este tipo de generalização nos permitiria encontrar novas simetrias em modelos físicos bem como novos modelos que obedeceriam às simetrias descritas por estas álgebras. Um dos grandes problemas em aberto com respeito à deformação quântica da álgebra de Virasoro consiste em se encontrar uma estrutura de álgebra de Hopf subjacente a estas novas álgebras.

Um critério seguido em todas as propostas de uma álgebra de Virasoro q -deformada é o limite clássico ($q \rightarrow 1$). Embora em todos os casos encontrados na literatura o limite clássico forneça o resultado correto, encontramos diversas álgebras que figuram como análogos q -deformados da álgebra de Virasoro. Podemos citar uma álgebra que obedece a relações de q -comutação, como no caso onde os geradores são expressos em termos de q -derivadas [2] [17], este tipo de realização é interessante pelo fato de oferecer uma interpretação geométrica mais natural. Também encontramos na literatura álgebras de dois “loops” com infinitos geradores análogos ao tensor Energia-Momento. Estas álgebras não são todas isomorfas entre si [66], dependendo se sua realização é em termos de campos bosônicos [16][57], ou de campos fermiônicos [63]. Um caso também digno de nota é uma álgebra com dois conjuntos infinitos de geradores que foi criada para expressar uma simetria de um modelo de cordas q -deformado [26]. Ainda faz-se necessário citar as álgebras do tipo quadrático que são deformações da álgebra de Virasoro quando se considera construções de Sugawara [7] [34]. Finalmente, para encerrar este incrível “Zoo” de álgebras de Virasoro q -deformadas, encontramos recentemente uma álgebra de parênteses de Poisson do tipo quadrático em um contexto onde vínculos são impostos sobre as correntes associadas a uma álgebra afim quântica em analogia ao método de redução hamiltoniana do modelo WZNW [10]. Esta álgebra será discutida no capítulo 4 deste trabalho.

2.2 A Álgebra de q-Virasoro em Termos de q-Derivadas

A primeira tentativa para se obter uma deformação quântica da álgebra de Virasoro consistiu na substituição dos geradores da álgebra de Witt por um análogo q-deformado. A álgebra de Witt é a álgebra dos geradores infinitesimais das transformações conformes em duas dimensões da forma

$$L_n = -z^{n+1} \partial_z .$$

Estes geradores satisfazem à relação de comutação

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} .$$

Os geradores da álgebra de Witt podem ser substituídos, então, por geradores de forma [17]

$$L_n^q = -\frac{z^n}{(q - q^{-1})} (D(q^2) - 1) , m \in \mathbf{Z} , \quad (2.1)$$

onde $D(q)$ é um operador de dilatações que age sobre funções de z da seguinte maneira:

$$D(q)\phi(z) = \phi(zq) .$$

É fácil verificar que $D^\alpha(q) = D(q^\alpha)$. Podemos, ainda, escrever (2.1) como

$$L_n^q = -z^{n+1} \partial_{q(z)} , \quad (2.2)$$

onde

$$\partial_{q(z)} = \frac{(D(q^2) - 1)}{z(q - q^{-1})}$$

A regra de Leibniz para este tipo de derivação é dada por

$$\partial_{q(z)} f(z) g(z) = f(zq^2) \partial_{q(z)} g(z) + (\partial_{q(z)} f(z)) g(z) .$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} L_n^q L_m^q &= -z^{n+1} \partial_{q(z)} (-z^{m+1} \partial_{q(z)}) = \\ &= z^{m+n+1} q^{m+1} [m+1] \partial_{q(z)} + q^{2m+2} z^{m+n+2} \partial_{q(z)}^2 , \end{aligned}$$

onde

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} . \quad (2.3)$$

Portanto, podemos deduzir a seguinte relação de q-comutação entre os geradores L_n^q :

$$q^{m-n} L_m^q L_n^q - q^{n-m} L_n^q L_m^q = [m - n] L_{m+n}^q . \quad (2.4)$$

Esta álgebra tem um caráter geométrico por ser uma álgebra dos geradores de transformações análogas às transformações conformes no plano quântico. Porém, no plano quântico parametrizado por $(z, \bar{z})$ as coordenadas não comutam, assim não será mais possível dividir a álgebra total em dois setores que comutam entre si, o holomórfico e o anti-holomórfico, como foi feito para as transformações conformes usuais no plano (vide secção 3 do capítulo 1).

A extensão central da álgebra (2.4) foi proposta na referência [2], assumindo a forma

$$q^{m-n} L_m^q L_n^q - q^{n-m} L_n^q L_m^q = [m - n] L_{m+n}^q + \frac{[n]}{[2n]} c \frac{[n+1][n][n-1]}{[3]!} \delta_{m+n,0} ,$$

onde $[x]! = [x][x-1] \dots [1]$. A construção do termo central é feita de forma a se obedecer à relação de Jacobi generalizada a qual obedecem os geradores da álgebra (2.4). No limite $q \rightarrow 1$ recobramos a álgebra de Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{m+n,0} .$$

Para obtermos uma álgebra fechada por relações de comutação, é necessário definirmos uma família infinita de geradores [17]

$$L_n^\alpha = -\frac{z^n}{(q^\alpha - q^{-\alpha})} \left\{ q^{\frac{\alpha n}{2}} D(q^\alpha) - q^{-\frac{\alpha n}{2}} D(q^{-\alpha}) \right\} . \quad (2.5)$$

Estes geradores obedecem à seguinte regra de comutação [63] [17]:

$$[L_m^\alpha, L_n^\beta] = \sum_{\sigma=\pm 1} \left[\frac{1}{2} (\alpha n - \sigma \beta m) \right] \frac{[\alpha + \sigma \beta]}{[\alpha][\sigma \beta]} L_{m+n}^{\alpha+\sigma \beta} . \quad (2.6)$$

Como veremos mais adiante, é possível efetuar-se uma extensão central da álgebra (2.6) utilizando-se uma realização em termos de campos fermiônicos [16].

2.3 Teoria de Campos Primários q-Deformada

Dada uma teoria conforme e um campo primário ϕ com peso conforme δ , a maneira usual de se efetuar a deformação desta teoria conforme é substituindo-se a expressão (1.11),

$$\begin{aligned}\delta_n \phi(z) &= (z^{n+1} \partial_z + \Delta(n+1)z^n) \phi(z) = \\ &= (z \partial_z + \Delta(n+1) - n) z^n \phi(z),\end{aligned}$$

que corresponde a uma transformação conforme infinitesimal, pela forma [56]

$$\delta_n^q \phi(z) = [z \partial_z + \Delta(n+1) - n] z^n \phi(z), \quad (2.7)$$

onde os colchetes $[]$ foram definidos pela expressão (2.3). A expressão (2.7) também pode ser obtida integrando-se o OPE de um análogo ao tensor Energia-Momento com ϕ dado por [56]

$$T(z) \phi(w) = \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left\{ \frac{\phi(wq)}{(z - wq^\Delta)} - \frac{\phi(wq^{-1})}{(z - wq^{-\Delta})} \right\} + \text{reg.} . \quad (2.8)$$

Assim

$$\delta_n^q \phi(w) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \phi(w) .$$

Dado o parâmetro $\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \epsilon_n z^{n+1}$, também podemos escrever um análogo q-deformado para a expressão (1.10)

$$\delta_\epsilon^q \phi(w) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \epsilon_n \delta_n^q \phi(w) ,$$

como

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon^q \phi(w) &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T(z) \phi(w) = \\ &= \epsilon(wq^\Delta) D_{q(w)} \phi(w) + [\Delta] D_{q^\Delta(w)} \epsilon(w) \phi(wq^{-1}),\end{aligned} \quad (2.9)$$

onde a q-derivada $D_{q(w)}$ é definida como

$$D_{q(w)} f(w) = \frac{f(wq) - f(wq^{-1})}{w(q - q^{-1})} .$$

É importante notar dois fatos com respeito à expressão do OPE q-deformado (2.8)

1. Em primeiro lugar, notamos que a teoria q -deformada é menos singular que a teoria usual, pois neste caso temos somente polos simples deslocados ao invés de polos duplos como na expressão (1.15). No entanto, ao efetuarmos o limite $q \rightarrow 1$, retornamos à expressão usual para o OPE de campos primários com o tensor Energia-Momento.
2. Ao realizarmos uma transformação conforme infinitesimal, é interessante que esta possa ser escrita como um comutador a tempos iguais com uma carga geradora, conforme visto na secção 4 do capítulo primeiro. Lembremo-nos que o comutador a tempos iguais é obtido pela diferença entre duas integrais, a primeira avaliada na região $|z| > |w|$ e a segunda em $|w| > |z|$, restando apenas a contribuição no polo $z = w$. Na expressão q -deformada do OPE os polos são deslocados por fatores proporcionais ao parâmetro de deformação q . Portanto, para evitar problemas de causalidade, é necessário que os polos deslocados permaneçam na circunferência $|z| = |w|$, isto é, que tenhamos $|q| = 1$, ou ainda, que o parâmetro de deformação seja uma fase pura: $q = e^{i\alpha}$ com $\alpha \in \mathbf{R}$.

Nas próximas secções, mostraremos algumas realizações possíveis para teorias conformes q -deformadas em termos de campos bosônicos e fermiônicos. Uma característica importante a ser observada é a necessidade de introduzirmos um índice adicional ao tensor Energia-Momento de forma a obtermos uma família infinita de operadores, todos resultando no mesmo tensor Energia-Momento no limite $q \rightarrow 1$. As álgebras de Virasoro q -deformadas resultantes deste processo são álgebras de 2 “loops”. Considerando-se as realizações bosônicas e fermiônicas das álgebras de q -Virasoro, construiremos um análogo q -deformado para a álgebra $N = 1$ Superconforme. O gerador de supersimetria é construído de forma análoga ao caso clássico, visto no primeiro capítulo [7][66].

2.4 Realização Bosônica para a Teoria de Campos Primários q -Deformada

Uma primeira tentativa para a deformação de teorias conformes foi feita considerando-se um conjunto infinito de osciladores α_n , pertencentes a uma álgebra de Heisenberg q -deformada

infinita $H_q(\infty)$, obedecendo à seguinte regra de comutação

$$[\alpha_n, \alpha_m] = [n]\delta_{m+n,0} , \quad (2.10)$$

onde $[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$, conforme definido pela expressão (2.3). Podemos definir uma corrente associada a estes osciladores análoga à corrente (1.24), definida no capítulo primeiro

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n-1} . \quad (2.11)$$

Tendo em vista a relação de comutação (2.10), podemos imediatamente calcular o OPE $H(z)H(w)$ (para mais detalhes de cálculos referentes a este capítulo, vide o apêndice B desta tese)

$$\begin{aligned} H(z)H(w) &= :H(z)H(w): + \frac{1}{(z-w)_q^2} = \\ &= :H(z)H(w): + \frac{1}{w(q-q^{-1})} \left(\frac{1}{(z-wq)} - \frac{1}{(z-wq^{-1})} \right) . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Aqui, os pontos $::$ indicam o ordenamento entre os modos α_n da forma

$$:\alpha_n \alpha_m: = \begin{cases} \alpha_n \alpha_m & n < 0 \\ \alpha_m \alpha_n & n \geq 0 \end{cases} ,$$

e o binomial q -deformado $(z-w)_q^n$ é definido como

$$(z-w)_q^n = \prod_{k=1}^n (z-wq^{n-2k+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} z^k (-w)^{n-k} , \quad (2.13)$$

A expressão mais imediata para um tensor Energia-Momento, definido a partir de (2.11) é da mesma forma que no caso clássico, dado por (1.25)

$$T(z) = \frac{1}{2} : H^2(z) : . \quad (2.14)$$

A expressão do OPE entre o tensor Energia-Momento e a corrente $H(w)$ será dada por

$$T(z)H(w) = \frac{1}{w(q-q^{-1})} \left(\frac{H(wq)}{(z-wq)} - \frac{H(wq^{-1})}{(z-wq^{-1})} \right) + \text{reg.} \quad (2.15)$$

Comparando-se com a expressão (2.8), concluímos que esta é uma teoria de campos primários q -deformada com um campo de dimensão 1. Devido à mudança nos argumentos da corrente H

na expressão (2.15), somos levados a admitir um índice extra na definição do tensor Energia-Momento de forma a se obter uma álgebra fechada que será um análogo q-deformado da álgebra de Virasoro. Assim, definimos uma família indexada por um parâmetro inteiro¹ α da seguinte forma

$$T^\alpha(z) = \frac{1}{2} : H(zq^{\frac{\alpha}{2}})H(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) : . \quad (2.16)$$

Todos os operadores $T^\alpha(z)$, no limite $q \rightarrow 1$ resultam na expressão do tensor Energia-Momento bosônico clássico (1.25). O tensor Energia-Momento definido por (2.14) é o elemento de ordem zero desta família. A simetria $q \leftrightarrow q^{-1}$, apesar de não parecer evidente, pode ser verificada observando-se que o ordenamento normal entre os modos α_n fornece a mesma expressão tanto em T^α como em $T^{-\alpha}$. a expressão geral do OPE $T^\alpha(z)H(w)$ é dada por

$$T^\alpha(z)H(w) = \sum_{\eta=\pm 1} \left\{ \frac{1}{2w(q - q^{-1})} \left(\frac{H(wq^{-\eta\alpha+1})}{(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}} - wq)} - \frac{H(wq^{-\eta\alpha-1})}{(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}} - wq^{-1})} \right) \right\} . \quad (2.17)$$

A álgebra de Virasoro q-deformada para os geradores (2.16) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} T^\alpha(z)T^\beta(w) &= \frac{1}{2wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{T^{\beta-\alpha+1}(wq^{\frac{-\alpha+1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{\beta-\alpha-1}(wq^{\frac{-\alpha-1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{T^{-\beta-\alpha+1}(wq^{\frac{-\alpha+1}{2}})}{z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{-\beta-\alpha-1}(wq^{\frac{-\alpha-1}{2}})}{z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}-1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{T^{\beta+\alpha+1}(wq^{\frac{\alpha+1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{\beta+\alpha-1}(wq^{\frac{\alpha-1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}-1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{T^{-\beta+\alpha+1}(wq^{\frac{\alpha+1}{2}})}{z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{-\beta+\alpha-1}(wq^{\frac{\alpha-1}{2}})}{z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}-1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{4(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1})(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1})(z - wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}+1})(z - wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}-1})} + \\ &+ \frac{1}{4(z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}+1})(z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}-1})(z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}+1})(z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}-1})} + \text{reg.} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ou em uma forma mais condensada

$$T^\alpha(z)T^\beta(w) = \sum_{\epsilon, \zeta, \eta=\pm 1} \left\{ \frac{1}{wq^{\frac{\eta\beta+\zeta\alpha}{2}}(q - q^{-1})} \left(\epsilon \frac{T^{\eta\beta-\zeta\alpha+\epsilon}(wq^{\frac{-\zeta\alpha+\epsilon}{2}})}{(z - wq^{\frac{\eta\beta-\zeta\alpha}{2}+\epsilon})} \right) \right\} +$$

¹Na verdade, não há quaisquer restrições para que o índice α seja inteiro, esta escolha é feita apenas levando-se em conta critérios formais, pois na álgebra, os desvios nos argumentos das funções se processa por potências inteiras e semi-inteiras do parâmetro de deformação q .

$$+ \sum_{\epsilon=\pm 1} \left\{ \frac{1}{4(z - wq^{-(\frac{\beta+\epsilon\alpha}{2})})_q^2(z - wq^{(\frac{\beta+\epsilon\alpha}{2})})_q^2} \right\}. \quad (2.19)$$

No limite $q \rightarrow 1$, recobramos a álgebra dada pela expressão (1.28).

Podemos, ainda, explorar certos paralelos com a teoria usual. Por exemplo, é possível definir um campo $X(z)$, análogo ao de Fubini-Veneziano para o caso q -deformado de forma a se obter

$$H(z) = iD_{q(z)}X(z) = i \frac{(X(zq) - X(zq^{-1}))}{z(q - q^{-1})}. \quad (2.20)$$

Este campo pode ser escrito como uma série infinita em termos de H como

$$X(z) = i \sum_{i=0}^{\infty} zq^{2i+1}(q - q^{-1})H(zq^{2i+1}) + C, \quad (2.21)$$

onde C é uma constante. É fácil verificar esta expressão simplesmente aplicando-se a q -derivada

$$\begin{aligned} iD_{q(z)}X(z) &= i \frac{(X(zq) - X(zq^{-1}))}{z(q - q^{-1})} = \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} (q^{2i+2}H(zq^{2i+2}) - q^{2i}H(zq^{2i})) = \\ &= H(z). \end{aligned}$$

Também podemos facilmente deduzir as expressões para os OPEs relacionados ao campo $X(z)$, obtendo

$$H(z)X(w) = -i \frac{1}{(z - w)},$$

e

$$X(z)X(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]} \left(\frac{w}{z} \right)^n,$$

onde a última expressão acima é o análogo q -deformado da função logarítmica. Este campo de Fubini-Veneziano q -deformado definido pela expressão (2.20) é um forte candidato a descrever uma teoria de cordas q -deformada. A maior dificuldade, no entanto, consiste em definir operadores de vértice apropriados para este campo de forma a se obter amplitudes duais q -deformadas que reproduzam as amplitudes de Virasoro-Shapiro no limite $q \rightarrow 1$.

Também podemos explorar as propriedades de campos da forma

$$\phi^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z) =: H(zq^{\alpha_1}) \dots H(zq^{\alpha_n}) H(zq^{-\sum_{k=1}^n \alpha_k}): \quad (2.22)$$

sob a atuação dos tensores Energia-Momento T^α . Estes campos não são primários, nem mesmo no limite $q \rightarrow 1$, no entanto, eles podem dar-nos alguma intuição sobre o conceito de spin de um campo no caso q-deformado. A expressão do OPE $T^\alpha(z)\phi^{\beta_1,\dots,\beta_n}(w)$ se escreve, utilizando o teorema de Wick, como

$$\begin{aligned}
T^\alpha(z)\phi^{\beta_1,\dots,\beta_n}(w) &= \frac{1}{2} : H(zq^{\frac{\alpha}{2}})H(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) :: H(wq^{\beta_1}) \dots H(wq^{\beta_n})H(wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k}) : = \\
&= \sum_{\epsilon,\eta=\pm 1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\epsilon \frac{: H(wq^{-\eta\alpha+\beta_i+\epsilon})H(wq^{\beta_1}) \dots H(\widehat{wq^{\beta_i}}) \dots H(wq^{\beta_n})H(wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k}) :}{2wq^{\beta_i}(q-q^{-1})(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_i+\epsilon})} \right) + \right. \\
&+ \left. \epsilon \frac{: H(wq^{\beta_1}) \dots H(wq^{\beta_n})H(wq^{-\eta\alpha-\sum_{k=1}^n \beta_k+\epsilon}) :}{2wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k}(q-q^{-1})(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k+\epsilon})} \right\} + \\
&+ \sum_{\eta=\pm 1} \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{: H(wq^{\beta_1}) \dots H(\widehat{wq^{\beta_i}}) \dots H(\widehat{wq^{\beta_j}}) \dots H(wq^{\beta_n})H(wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k}) :}{2(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_i})_q^2(zq^{-\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_j})_q^2} \right) + \right. \\
&+ \left. \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{: H(wq^{\beta_1}) \dots H(\widehat{wq^{\beta_i}}) \dots H(wq^{\beta_n}) :}{2(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_i})_q^2(zq^{-\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k})_q^2} \right) \right\} + \text{reg.} = \\
&= \sum_{\epsilon,\eta=\pm 1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\epsilon \frac{\phi^{\gamma_1,\dots,\gamma_n}(wq^\delta)}{2wq^{\beta_i}(q-q^{-1})(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_i+\epsilon})} \right) + \right. \\
&+ \left. \epsilon \frac{\phi^{\gamma'_1,\dots,\gamma'_n}(wq^\delta)}{2wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k}(q-q^{-1})(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k+\epsilon})} \right\} + \\
&+ \sum_{\eta=\pm 1} \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\phi^{\rho_1,\dots,\rho_{n-2}}(wq^\sigma)}{2(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_i})_q^2(zq^{-\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_j})_q^2} \right) + \right. \\
&+ \left. \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\phi^{\rho'_1,\dots,\rho'_{n-2}}(wq^{\sigma'})}{2(zq^{\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{\beta_i})_q^2(zq^{-\frac{\eta\alpha}{2}}-wq^{-\sum_{k=1}^n \beta_k})_q^2} \right) \right\} + \text{reg.} , \tag{2.23}
\end{aligned}$$

onde os índices para os campos resultantes são definidos como

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{-\eta\alpha + \epsilon}{(n+1)} , \\
\gamma_j &= \beta_j - \delta , \quad j \neq i , \\
\gamma_i &= \beta_i - \eta\alpha + \epsilon - \delta , \\
\gamma'_j &= \beta_j - \delta , \\
\sigma &= -\frac{(\beta_i + \beta_j)}{(n-1)} , \\
\rho_k &= \beta_k - \sigma , \quad k < i , \\
\rho_k &= \beta_{k+1} - \sigma , \quad i < k < j ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \beta_{k+2} - \sigma \quad , \quad j < k \quad , \\
\sigma' &= \frac{\sum_{j \neq i} \beta_j}{(n-1)} \quad , \\
\rho'_k &= \beta_k - \sigma \quad , \quad k < i \quad , \\
\rho'_k &= \beta_{k+1} - \sigma \quad , \quad i < k \quad .
\end{aligned}$$

É importante observar que o desvio no argumento nos campos resultantes de ordem $(n+1)$, isto é, da mesma ordem que o campo de partida e que foram resultado de uma única contração, é sempre igual a um fator q^δ . O expoente δ depende explicitamente apenas da ordem do tensor Energia-Momento com o qual foi efetuado o OPE e da ordem do campo em questão. Agora, considerando-se apenas o tensor Energia-Momento de ordem zero, teremos $\delta = \frac{\epsilon}{(n+1)}$. Comparando-se com a expressão (2.8), podemos perceber que o spin de um campo pode ser detectado em uma teoria q -deformada pelo desvio no argumento provocado pelo OPE como tensor Energia-Momento. No caso clássico, ie, no limite $q \rightarrow 1$, é sempre possível encontrar campos primários a partir de campos do tipo $H^n(z)$; somando-se uma derivada total de um campo de ordem mais baixa. Este processo é utilizado inclusive para se alterar a carga central de uma álgebra de Virasoro pela adição de uma derivada total (gás de Coulomb). No caso de campos de ordem maior, os campos primários assim construídos satisfazem uma álgebra não-linear denominada álgebra $\mathcal{W}_N$, ainda não foi possível escrever uma álgebra $\mathcal{W}_N$ q -deformada a partir deste contexto.

2.5 Realização Fermiônica para a Teoria de Campos Primário q -Deformada e a Álgebra $N=1$ q -Superconforme

Uma outra classe de teorias q -deformadas de campos conformes foi desenvolvida primeiramente por M. Chaichian e P. Prešnajder para obter uma realização para a álgebra de operadores diferenciais (2.6) em termos de campos fermiônicos [16]. Posteriormente este mesmo tipo de estrutura foi desenvolvido por H.T. Sato cuja motivação foi a de encontrar a classe mais ampla de simetrias obedecida pelos níveis de Landau no efeito Hall quântico [63] [65]. A realização fermiônica da álgebra de Virasoro desenvolvida nestes trabalhos tem como ponto de partida

um campo fermiônico livre $\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_n z^{-n-\frac{1}{2}}$, onde os modos obedecem relações de anti-comutação clássicas

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{m+n,0} .$$

Sendo a forma do campo a mesma que no caso clássico, a diferença na definição do tensor Energia-Momento q-deformado está em sua forma funcional deste em relação ao campo ψ . Assim, definimos uma família de tensores Energia-Momento q-deformados, indexados por um índice inteiro α , como sendo

$$L^\alpha(z) = \frac{1}{[\alpha](q - q^{-1})z} : \psi(zq^{\frac{\alpha}{2}}) \psi(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) : . \quad (2.24)$$

Esta expressão é claramente simétrica por $q \leftrightarrow q^{-1}$ bem como notamos que, devido a estes tensores Energia-Momento serem quadráticos em relação a campos fermiônicos, temos $L^0(z) = 0$. No limite $q \rightarrow 1$, recobramos o tensor Energia-Momento usual (1.32) dado por

$$L(z) = \frac{1}{2} : \partial_z \psi(z) \psi(z) : .$$

Em relação ao tensor Energia-Momento de ordem mais baixa, ie, para $\alpha = 1$, temos uma expressão semelhante a (2.8) para o OPE $L^1(z)\phi(w)$

$$L^1(z)\psi(w) = \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\psi(wq)}{(z - wq^{\frac{1}{2}})} - \frac{\psi(wq^{-1})}{(z - wq^{-\frac{1}{2}})} \right) . \quad (2.25)$$

Portanto, temos uma teoria de campos conformes q-deformada com um campo primário de peso conforme igual a $\frac{1}{2}$. A expressão geral do OPE $L^\alpha(z)\psi(w)$ é dada por

$$L^\alpha(z)\psi(w) = \frac{1}{w(q^\alpha - q^{-\alpha})} \left(\frac{\psi(wq^\alpha)}{(z - wq^{\frac{\alpha}{2}})} - \frac{\psi(wq^{-\alpha})}{(z - wq^{-\frac{\alpha}{2}})} \right) . \quad (2.26)$$

A álgebra de Virasoro q-deformada satisfeita pelos geradores L^α tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} L^\alpha(z)L^\beta(w) &= \frac{1}{[\alpha][\beta]w(q - q^{-1})} \left(\frac{[\alpha + \beta]L^{\alpha+\beta}(wq^{\frac{\alpha}{2}})}{q^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}})} + \right. \\ &+ \frac{[-\alpha - \beta]L^{-\alpha-\beta}(wq^{-\frac{\alpha}{2}})}{q^{\frac{-\beta+\alpha}{2}}(z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}})} - \frac{[\alpha - \beta]L^{\alpha-\beta}(wq^{\frac{\alpha}{2}})}{q^{\frac{-\beta-\alpha}{2}}(z - wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}})} + \\ &- \frac{[-\alpha + \beta]L^{-\alpha+\beta}(wq^{\frac{-\alpha}{2}})}{q^{\frac{\beta+\alpha}{2}}(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}})} + \frac{1}{(z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}})(z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}})} + \\ &\left. - \frac{1}{(z - wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}})(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}})} \right) + \text{reg.} , \end{aligned} \quad (2.27)$$

ou em uma forma mais compacta

$$\begin{aligned}
L^\alpha(z)L^\beta(w) &= \frac{1}{[\alpha][\beta]w(q - q^{-1})} \left\{ \sum_{\eta=\pm 1} \left(\frac{[\eta(\alpha + \beta)]L^{\eta(\alpha+\beta)}(wq^{\frac{\eta\alpha}{2}})}{q^{\eta\frac{(\beta-\alpha)}{2}}(z - wq^{\eta\frac{(\beta+\alpha)}{2}})} + \right. \right. \\
&\quad - \frac{[\eta(\alpha - \beta)]L^{\eta(\alpha-\beta)}(wq^{\frac{\eta\alpha}{2}})}{q^{-\eta\frac{(\beta+\alpha)}{2}}(z - wq^{\eta\frac{(-\beta+\alpha)}{2}})} + \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{(z - wq^{-\frac{\beta+\eta\alpha}{2}})(z - wq^{\frac{\beta+\eta\alpha}{2}})} \right) \right\} + \text{reg.} . \tag{2.28}
\end{aligned}$$

No limite $q \rightarrow 1$, recobramos a álgebra definida no capítulo primeiro pela expressão (1.34).

Esta álgebra claramente não é isomorfa à álgebra de q-Virasoro bosônica (2.18). No entanto, uma realização de (2.18) foi efetuada a partir de um campo fermiônico deformado $\tilde{\psi}$, satisfazendo à seguinte regra de anti-comutação [12] [66]

$$\{\tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_m\} = [n]_+ \delta_{m+n,0} , \tag{2.29}$$

onde $[n]_+ = \frac{q^n + q^{-n}}{2}$. Tendo em vista a regra de anti-comutação acima, podemos verificar que a corrente $\tilde{\psi}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \tilde{\psi}_n z^{-n-\frac{1}{2}}$ obedecerá a uma relação de OPE da seguinte forma

$$\tilde{\psi}(z)\tilde{\psi}(w) = \frac{1}{2} \left(\frac{q^{\frac{1}{2}}}{(z - wq)} + \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{(z - wq^{-1})} \right) . \tag{2.30}$$

O tensor Energia-Momento em questão será da forma

$$\tilde{L}^\alpha(z) = \frac{\tilde{\psi}(zq^{\frac{\alpha}{2}})\tilde{\psi}(zq^{-\frac{\alpha}{2}})}{z(q - q^{-1})} . \tag{2.31}$$

Por fim, podemos agora definir um análogo q-deformado para a álgebra $N = 1$ superconforme (1.35). Primeiramente, é necessário definir uma família de geradores de transformações de supersimetria [7] [16] [66] indexados por um índice α da forma²

$$G^\alpha(z) = H(zq^{\frac{\alpha}{2}})\psi(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) .$$

A relação de OPE satisfeita pelos geradores $G^\alpha(z)$ escreve-se da seguinte maneira:

$$G^\alpha(z)G^\beta(w) = \frac{2q^{\frac{\alpha}{2}}T^{\beta+\alpha}(wq^{\frac{\alpha}{2}})}{z - wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}}} +$$

²É importante observar que todos estes geradores de supersimetria são equivalentes, a teoria continua sendo $N = 1$ supersimétrica. Este índice adicional apenas denota a infinita degenerescência de operadores causada pela deformação .

$$\begin{aligned}
& + \frac{[\beta - \alpha + 1]L^{\beta-\alpha+1}(wq^{\frac{-\alpha+1}{2}})}{q^{\frac{\beta-1}{2}+\alpha}(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1})} + \\
& - \frac{[\beta - \alpha - 1]L^{\beta-\alpha-1}(wq^{\frac{-\alpha-1}{2}})}{q^{\frac{\beta+1}{2}+\alpha}(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1})} + \\
& + \frac{q^{-\frac{\alpha}{2}}}{(z - wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}})(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1})(z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1})} + \text{reg.} , \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Também, para obtermos o fechamento da álgebra, é necessário que tenhamos as relações de OPE entre os tensores Energia-Momento (2.16) e (2.24) e G^α . São elas:

$$\begin{aligned}
T^\alpha(z)G^\beta(w) &= \frac{1}{2wq^{\frac{\beta}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{q^{-\frac{\alpha}{2}}G^{\beta-\alpha+1}(wq^{\frac{-\alpha+1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1}} + \right. \\
& - \frac{q^{-\frac{\alpha}{2}}G^{\beta-\alpha-1}(wq^{\frac{-\alpha-1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}} + \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}G^{\beta+\alpha+1}(wq^{\frac{\alpha+1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}+1}} + \\
& \left. - \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}G^{\beta+\alpha-1}(wq^{\frac{\alpha-1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}-1}} \right) + \text{reg.} , \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$L^\alpha(z)G^\beta(w) = \frac{1}{[\alpha]wq^{-\frac{\beta}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{G^{\beta-\alpha}(wq^{\frac{\alpha}{2}})}{z - wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}}} - \frac{G^{\beta+\alpha}(wq^{\frac{-\alpha}{2}})}{z - wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}}} \right) + \text{reg.} , \quad (2.34)$$

As relações de OPE (2.32), (2.33) e (refumfermiesuper), acrescentadas às relações entre os tensores Energia-Momento (2.18) e (2.27), formam uma álgebra q-deformada análoga à álgebra $N = 1$ superconforme definida no capítulo primeiro. No limite $q \rightarrow 1$, efetivamente recobramos a álgebra (1.35).

Capítulo 3

Construção de Sugawara para o Tensor Energia-Momento q -Deformado e a Álgebra $N = 2$ q -Superconforme

3.1 Introdução

Neste capítulo descreveremos os resultados originais contidos na referência [7]. Primeiramente, trataremos da realização por operadores de vértice da álgebra afim quântica $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ ao nível ($k = 1$). A partir desta construção de vértices, podemos construir, em analogia ao caso clássico, uma álgebra $N = 2$ superconforme q -deformada. Para isto utilizamos os vértices de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ e um campo fermiônico livre para definirmos uma família de geradores de supersimetria $G_\alpha^\pm$. Analisando-se a estrutura de polos obtida pelo cálculo dos OPEs entre os operadores G_α^+ e G_α^+ desta álgebra, define-se o tensor Energia-Momento que se subdivide em duas componentes mutuamente comutantes, uma dependente de campos bosônicos e a outra de campos fermiônicos. A contraparte fermiônica é isomorfa à realização proposta em [63], a qual foi apresentada no capítulo anterior. A contraparte bosônica fornece-nos uma indicativa sobre qual seja a forma do tensor Energia-Momento na construção de Sugawara para uma teoria q -deformada. Este tensor Energia-Momento não fecha uma álgebra, porém, suas componentes satisfazem uma álgebra de OPE do tipo quadrático.

Podemos verificar, através da análise dos termos regulares do OPE entre os operadores de vértice, uma relação de equivalência entre o conteúdo do tensor Energia-Momento escrito na construção de Sugawara e sua parte relativa às correntes da sub-álgebra de Cartan. Esta

relação é análoga a aquela apresentada no capítulo primeiro pela expressão (1.48). Verificamos, ainda, que existe uma classe infinita de operadores que no limite $q \rightarrow 1$ tendem ao tensor Energia-Momento clássico escrito na forma (1.49). Estes operadores não são mais quadráticos nas correntes, mas dependentes de potências de ordem n nas correntes.

Por fim, podemos ver que este tipo de construção de Sugawara para o tensor Energia-Momento pode ser estendido para outras álgebras afins quânticas “simply-laced”.

3.2 Operadores de Vértice para a Álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$

Iniciaremos com a definição da álgebra afim quântica $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ em termos dos geradores de Drinfel'd¹: $E_n^\pm$, H_m , $K^{\pm 1} = q^{\pm \sqrt{2}H_0}$, $D^{\pm 1} = q^{\pm d}$, $\gamma^{\pm 1} = q^{\pm k}$, para $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Estes geradores satisfazem às seguintes relações de comutação [20] [15] [58]

$$\begin{aligned}
[H_n, H_m] &= \frac{[2n]}{2n} \left(\frac{\gamma^n - \gamma^{-n}}{q - q^{-1}} \right) \delta_{m+n,0} \quad , \quad n, m \neq 0 \quad , \\
[K^{\pm 1}, H_n] &= 0 \quad , \quad n \neq 0 \quad , \\
[H_n, E_m^\pm] &= \pm \sqrt{2} \frac{\gamma^{\mp \frac{|n|}{2}} [2n]}{2n} E_{m+n}^\pm \quad , \quad n \neq 0 \quad , \\
K E_n^\pm K^{-1} &= q^{\pm 2} E_n^\pm \quad , \\
[E_n^+, E_m^-] &= \frac{\gamma^{\frac{n-m}{2}} \Psi_{n+m} - \gamma^{\frac{m-n}{2}} \Phi_{n+m}}{q - q^{-1}} \quad , \\
E_{n+1}^\pm E_m^\pm - q^{\pm 2} E_m^\pm E_{n+1}^\pm &= q^{\pm 2} E_n^\pm E_{m+1}^\pm - E_{m+1}^\pm E_n^\pm \quad , \\
D E_n^\pm D^{-1} &= q^n E_n^\pm \quad , \\
D H_n D^{-1} &= q^n H_n \quad , \\
[\gamma^{\pm 1}, x] &= 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2)) \quad .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Estas relações se tornam, no limite $q \rightarrow 1$, as relações de comutação para a álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$

$$\begin{aligned}
[H_n, H_m] &= kn \delta_{m+n,0} \\
[H_n, E_m^\pm] &= \pm \sqrt{2} E_{m+n}^\pm \\
[E_n^\pm, E_m^\mp] &= \pm \sqrt{2} H_{m+n} + kn \delta_{m+n,0}
\end{aligned}$$

¹Para mais detalhes sobre álgebra q-deformadas, veja o apêndice A desta tese.

$$\begin{aligned}
[d, H_n] &= nH_n \\
[d, E_n^\pm] &= nE_n^\pm \\
[k, x] &= 0 \quad , \quad \forall x \in \widehat{sl}(2) .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Definimos as correntes associadas à álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ como

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= \sum_{n \geq 0} \Psi_n z^{-n} = q^{\sqrt{2}H_0} \exp \left\{ \sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n > 0} H_n z^{-n} \right\} , \\
\Phi(z) &= \sum_{n \leq 0} \Phi_n z^{-n} = q^{-\sqrt{2}H_0} \exp \left\{ -\sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n < 0} H_n z^{-n} \right\} , \\
E^\pm(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^\pm z^{-n-1} .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Em posse das relações de comutação (3.1), podemos escrever as relações de OPE entre as correntes $\Psi(z)$, $\Phi(z)$, e $E^\pm(z)$ da seguinte forma ($k = 1$)

$$\begin{aligned}
\Psi(z)\Phi(w) &= \frac{(z - wq^3)(z - wq^{-3})}{(z - wq)(z - wq^{-1})} \Phi(w)\Psi(z) \\
\Psi(z)E^\pm(w) &= q^{\pm 2} \frac{(z - wq^{\mp \frac{5}{2}})}{(z - wq^{\pm \frac{3}{2}})} E^\pm(w)\Psi(z) \\
E^\pm(z)\Phi(w) &= q^{\pm 2} \frac{(z - wq^{\mp \frac{5}{2}})}{(z - wq^{\pm \frac{3}{2}})} \Phi(w)E^\pm(z) \\
E^+(z)E^-(w) &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\Psi(wq^{\frac{1}{2}})}{(z - wq)} - \frac{\Phi(wq^{-\frac{1}{2}})}{(z - wq^{-1})} \right) \\
E^-(z)E^+(w) &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\Phi(wq^{\frac{1}{2}})}{(z - wq)} - \frac{\Psi(wq^{\frac{1}{2}})}{(z - wq^{-1})} \right) \\
E^\pm(z)E^\pm(w) &= \frac{(zq^{\pm 2} - w)}{(z - wq^{\pm 2})} E^\pm(w)E^\pm(z) ,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo estes OPEs, tomados sempre na região $|z| > |w|$. Estas relações de OPE retomam, no limite $q \rightarrow 1$, os OPEs da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$, que são ($k = 1$)

$$\begin{aligned}
H(z)H(w) &= \frac{1}{(z - w)^2} + \text{reg.} , \\
H(z)E^\pm(w) &= \pm \frac{\sqrt{2}E^\pm(w)}{(z - w)} + \text{reg.} , \\
E^\pm(z)E^\mp(w) &= \pm \frac{\sqrt{2}H(w)}{(z - w)} + \text{reg.} ,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

sendo também os OPEs válidos na região $|z| > |w|$.

É possível uma realização em termos de operadores de vértice para a álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$, reproduzindo os OPEs descritos em (3.4) [14] [35]. Para isto, definimos um conjunto de osciladores q -deformados α_n , satisfazendo

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{[2n][n]}{2n} \delta_{m+n,0} ,$$

juntamente com uma álgebra de Heisenberg não deformada, definida pelos geradores Q e P , satisfazendo

$$[Q, P] = i .$$

Levando-se em conta todos estes elementos, podemos finalmente definir o campo de Fubini-Veneziano

$$\xi^\pm(z) = Q - iP \ln z + i \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\mp\frac{1}{2}})^{-n} + i \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\pm\frac{1}{2}})^{-n} . \quad (3.6)$$

Assim, os operadores de vértice se escrevem como

$$\begin{aligned} E^\pm(z) &= : e^{\pm i\sqrt{2}\xi^\pm(z)} : = \\ &= e^{\mp\sqrt{2} \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\mp\frac{1}{2}})^{-n}} e^{\pm i\sqrt{2}Q} e^{\pm\sqrt{2}P \ln z} e^{\mp\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\pm\frac{1}{2}})^{-n}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

As correntes Ψ e Φ também podem ser reescritas em termos dos osciladores α_n e do momento P da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= q^{\sqrt{2}P} \exp \left\{ \sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n>0} \alpha_n z^{-n} \right\} , \\ \Phi(z) &= q^{-\sqrt{2}P} \exp \left\{ -\sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n<0} \alpha_n z^{-n} \right\} . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Com as definições (3.7) e (3.8), fica imediata² a verificação das relações (3.4).

Vamos examinar o OPE $E^+(z)E^-(w)$ para uma melhor compreensão da estrutura de polos em uma teoria q -deformada. Temos primeiramente o resultado (vide apêndice B):

$$E^+(z)E^-(w) = \frac{D(z, w)}{(z - wq)(z - wq^{-1})} , \quad (3.9)$$

²No apêndice B deste trabalho, demonstramos algumas identidades envolvendo operadores de vértice

onde

$$D(z, w) = \left(\frac{z}{w}\right)^{\sqrt{2}P} \exp \left\{ -\sqrt{2} \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{[n]} ((zq^{-\frac{1}{2}})^{-n} - (wq^{\frac{1}{2}})^{-n}) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} ((zq^{\frac{1}{2}})^{-n} - (wq^{-\frac{1}{2}})^{-n}) \right\}. \quad (3.10)$$

A dependência na variável w pode ser obtida efetuando-se uma expansão do numerador em uma série de q -Taylor, do tipo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k}(wq)f(wq)}{[2k]!} (z - w)_q^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k+1}(w)f(w)}{[2k+1]!} (z - wq)_q^{2k+1}, \quad (3.11)$$

ou

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k}(wq^{-1})f(wq^{-1})}{[2k]!} (z - w)_q^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k+1}(w)f(w)}{[2k+1]!} (z - wq^{-1})_q^{2k+1}, \quad (3.12)$$

onde a q -derivada $D_q(w)$ é definida da seguinte maneira

$$D_q(w)f(w) = \frac{(f(wq) - f(wq^{-1}))}{w(q - q^{-1})}, \quad (3.13)$$

e os q -binomiais $(z - w)_q^n$ como

$$(z - w)_q^n = \prod_{k=1}^n (z - wq^{n-2k+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} z^k (-w)^{n-k}, \quad (3.14)$$

e $[n]! = [n][n-1]!$. Assim, a expressão (3.9) pode ser escrita como

$$E^+(z)E^-(w) = \frac{1}{(z - w)_q^2} + \\ + \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\Psi(wq^{\frac{1}{2}}) - 1}{(z - wq)} - \frac{\Phi(wq^{-\frac{1}{2}}) - 1}{(z - wq^{-1})} \right) + \text{reg.} = \\ = \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\Psi(wq^{\frac{1}{2}})}{(z - wq)} - \frac{\Phi(wq^{-\frac{1}{2}})}{(z - wq^{-1})} \right) + \text{reg.} \quad (3.15)$$

A parte regular de (3.9) é importante para se definir o tensor Energia-Momento na construção de Sugawara. Utilizaremos a notação ${}_{\times}E^+(w)E^-(w)_{\times}$ para descrever os termos regulares do OPE após ser tomado o limite de pontos iguais ($z \rightarrow w$), assim

$${}_{\times}E^+(w)E^-(w)_{\times} = \lim_{z \rightarrow w} \left\{ E^+(z)E^-(w) - \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\Psi(wq^{\frac{1}{2}})}{z - wq} - \frac{\Phi(wq^{-\frac{1}{2}})}{z - wq^{-1}} \right) \right\}. \quad (3.16)$$

Devido ao caráter não local da expansão de q-Taylor, a expressão (3.16) consiste em uma soma infinita de termos que não vão a zero quando $z \rightarrow w$. Até a primeira ordem em potências de $(q - q^{-1})$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \times E^+(w)E^-(w)\times &= \frac{1}{2[2]w^2(q - q^{-1})^2} \left\{ [q^{-3}(A^1(wq^2) - 1) + (q - q^{-1})]\Psi(wq^{\frac{1}{2}}) \right. \\ &+ \Phi(wq^{-\frac{1}{2}})[q^3(B^1(wq^{-2}) - 1) - (q - q^{-1})] \left. \right\} + \\ &+ \mathcal{O}(q - q^{-1}) , \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde os campos compostos $A^\alpha(w)$ e $B^\alpha(w)$ são definidos como

$$A^\alpha(w) = \Phi^{-1}(wq^{-\frac{\alpha}{2}})\Psi(wq^{\frac{\alpha}{2}}) , \quad (3.18)$$

$$B^\alpha(w) = \Phi(wq^{-\frac{\alpha}{2}})\Psi^{-1}(wq^{\frac{\alpha}{2}}) . \quad (3.19)$$

Quanto aos termos de ordem mais alta, é necessário que conheçamos a estrutura dos termos da expansão de q-Taylor. Uma q-derivada n-ésima tem a seguinte forma [7]

$$D_q^n(z)f(z) = \frac{1}{z^n(q - q^{-1})^n} \sum_{\sigma_0=\pm 1} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}=\pm 1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \sigma_i q^{-i\sigma_i} \right) f\left(zq^{\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i}\right) . \quad (3.20)$$

Observemos que na expansão (3.11), as derivadas de ordem par são no ponto wq , e as de ordem ímpar no ponto w . Já na expansão (3.12), as derivadas de ordem par são aplicadas no ponto wq^{-1} , e as de ordem ímpar são aplicadas no ponto w . Tendo em vista a expressão para a q-derivada de ordem n dada em (3.20), podemos deduzir que todos os termos da expansão de (3.9) são proporcionais a $D(wq^{2k+1})$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, são termos proporcionais a [7]

$$\begin{aligned} D(wq^{2k+1}, w) &= : A^1(wq^2)A^1(wq^4) \dots A^1(wq^{2k}) : \Psi(wq^{\frac{1}{2}}) , \\ D(wq^{-2k-1}, w) &= \Phi(wq^{-\frac{1}{2}}) : B^1(wq^{-2})B^1(wq^{-4}) \dots B^1(wq^{-2k}) : , \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde o ordenamento $::$ indica que todos os campos Ψ estão dispostos à direita dos campos Φ .

3.3 A Álgebra $N = 2$ q-Superconforme

Como foi visto no capítulo primeiro, a construção da álgebra $N = 2$ superconforme requer a definição de dois geradores de supersimetria, $G^\pm(z)$, definidos como [70]

$$G^\pm(z) = E^\pm(z)\psi(z) , \quad (3.22)$$

onde $E^\pm(z)$ são os vértices da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$ e $\psi(z)$ é um campo fermiônico livre. O termo mais singular no OPE $G^+(z)G^-(w)$ consiste em um polo triplo, conforme visto na expressão (1.52). Também vimos que em uma teoria q -deformada, os polos de ordem maior em um OPE são transformados em produtos de polos simples simetricamente deslocados em termos de potências do parâmetro de deformação q . Assim, a primeira tentativa a se propor para os geradores de supersimetria no caso q -deformado seria a mesma expressão (3.22), somente substituindo os vértices de $\widehat{sl}(2)$ pelos vértices da álgebra q -deformada $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$. A expressão do OPE, neste caso seria da forma

$$\begin{aligned}
G^+(z)G^-(w) = & \left\{ \frac{1}{(z-w)(z-wq)} + \frac{q^{\frac{1}{2}}L^1(wq^{\frac{1}{2}})}{(z-wq)} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{(q^{-3}(A^1(wq^2) - 1) + (q - q^{-1}))}{[2]w(q - q^{-1})(z-w)} + \mathcal{O}(q - q^{-1}) \left. \right\} \frac{\Psi(wq^{\frac{1}{2}})}{w(q - q^{-1})} + \\
& - \frac{\Phi(wq^{-\frac{1}{2}})}{w(q - q^{-1})} \left\{ \frac{1}{(z-w)(z-wq^{-1})} + \frac{q^{-\frac{1}{2}}L^{-1}(wq^{-\frac{1}{2}})}{(z-wq^{-1})} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{(q^3(B^1(wq^{-2}) - 1) - (q - q^{-1}))}{[2]w(q - q^{-1})(z-w)} + \mathcal{O}(q - q^{-1}) \left. \right\}, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

onde os termos L^α indicam a contraparte fermiônica do tensor Energia-Momento q -deformado definido por (2.24). Esta expressão é facilmente obtida a partir do OPE entre os vértices dada pela expressão (3.15) e do OPE relativo ao férmion clássico segundo a expressão (1.31) no capítulo primeiro. Devido aos desvios nos argumentos dos campos na expressão (3.23), faz-se necessária a definição de duas famílias de geradores de supersimetria, $G_\alpha^\pm(z)$, definidos como

$$G_\alpha^\pm(z) = E^\pm(zq^{\pm\frac{\alpha}{2}})\psi(zq^{\mp\frac{\alpha}{2}}), \quad (3.24)$$

sendo todos equivalentes. Novamente, a teoria continua sendo $N = 2$, o que ocorre é que a deformação introduz uma degenerescência infinita nos geradores da álgebra. As novas relações de OPE entre os geradores (3.24) podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
G_\alpha^+(z)G_\beta^-(w) = & \frac{\times E^+(wq^{\frac{\beta}{2}+\alpha})E^-(wq^{-\frac{\beta}{2}})\times}{(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}})} + \\
& + \frac{[1 - \alpha - \beta]q^{\frac{1+\beta-\alpha}{2}}L^{1-\alpha-\beta}(wq^{\frac{1-\alpha}{2}})\Psi(wq^{\frac{1-\beta}{2}})}{zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}+1}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{[1 + \alpha + \beta]q^{\frac{1+\beta+\alpha}{2}}\Phi(wq^{\frac{-1-\beta}{2}})L^{1+\alpha+\beta}(wq^{\frac{1+\alpha}{2}})}{zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}-1}} + \\
& + \frac{1}{wq^{-\frac{\beta}{2}}(q - q^{-1})(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}})} \left\{ \frac{\Psi(wq^{\frac{1-\beta}{2}})}{zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}+1}} + \right. \\
& \left. - \frac{\Phi(wq^{\frac{-1-\beta}{2}})}{zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}-1}} \right\} , \tag{3.25}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
{}_{\times}E^{+}(wq^{\frac{\beta}{2}+\alpha})E^{-}(wq^{-\frac{\beta}{2}})_{\times} & = \frac{1}{2[2]w^2q^{-\beta}(q - q^{-1})^2} \left\{ [q^{-3}(A^1(wq^{-\frac{\beta}{2}+2}) - 1) + \right. \\
& + (q - q^{-1})]\Psi(wq^{\frac{-\beta+1}{2}}) + \\
& + \Phi(wq^{\frac{-\beta-1}{2}})[q^3(B^1(wq^{-\frac{\beta}{2}-2}) - 1) + \\
& \left. - (q - q^{-1})] \right\} + \mathcal{O}(q - q^{-1}) . \tag{3.26}
\end{aligned}$$

é a parte regular do OPE entre os vértices conforme já visto pela expressão (3.17). No limite clássico, $q \rightarrow 1$, a expressão (3.25) tende ao OPE $G^{+}(z)G^{-}(w)$ em (1.52). No caso q-deformado, o tensor Energia-Momento total, composto de uma contraparte fermiônica e outra bosônica, não satisfaz uma álgebra fechada, de modo semelhante ao visto no capítulo anterior para a álgebra $N = 1$ q-superconforme, devido ao fato de as álgebras que cada uma das partes satisfaz não serem isomorfas.

Ao analisarmos as expressões (3.25) e (3.26), podemos inferir qual seja a forma do tensor Energia-Momento bosônico a partir dos coeficientes dos polos simples. Tendo em mente o limite clássico correto, dado por

$$T(z) = \frac{1}{2} : H^2(z) : , \tag{3.27}$$

definimos uma família de operadores, caracterizados por dois índices α e β , que no limite $q \rightarrow 1$ recobrem a expressão (reclimiteclassico) da forma

$$T^{\alpha;\beta}(z) = \frac{1}{2[2]z^2(q - q^{-1})^2} \left\{ A^{\alpha}(zq^{\beta}) + B^{\alpha}(zq^{\beta}) - 2 \right\} , \tag{3.28}$$

com A^{α} e B^{α} definidos pelas expressões (3.18) e (3.19), respectivamente. A expressão (3.28) nos fornece um análogo q-deformado para a equivalência entre os termos do tensor Energia-Momento na construção de Sugawara quadráticos em relação aos operadores de “step” e os

termos relativos às correntes associadas à sub-álgebra de Cartan [39] A álgebra relativa a este tensor Energia-Momento não é fechada, no entanto, suas componentes A^α e B^α definem relações de OPE do tipo quadrático. Juntamente com os geradores $G_\alpha^\pm$, satisfazendo (3.25), e L^α , satisfazendo (2.27), temos a álgebra

$$\begin{aligned}
A^\alpha(z)A^\beta(w) &= f(zq^{\frac{\alpha}{2}}; wq^{-\frac{\beta}{2}}) : A^\alpha(z)A^\beta(w) : , \\
B^\alpha(z)B^\beta(w) &= f(zq^{\frac{\alpha}{2}}; wq^{-\frac{\beta}{2}}) : B^\alpha(z)B^\beta(w) : , \\
A^\alpha(z)B^\beta(w) &= f^{-1}(zq^{\frac{\alpha}{2}}; wq^{-\frac{\beta}{2}}) : A^\alpha(z)B^\beta(w) : , \\
B^\alpha(z)A^\beta(w) &= f^{-1}(zq^{\frac{\alpha}{2}}; wq^{-\frac{\beta}{2}}) : B^\alpha(z)A^\beta(w) : , \\
A^\alpha(z)G_\beta^\pm(w) &= q^{\pm 2} \frac{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{\pm(\frac{\beta-5}{2})})}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{\pm(\frac{\beta+3}{2})})} : A^\alpha(z)G_\beta^\pm(w) : , \\
B^\alpha(z)G_\beta^\pm(w) &= q^{\mp 2} \frac{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{\pm(\frac{\beta+3}{2})})}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{\pm(\frac{\beta-5}{2})})} : B^\alpha(z)G_\beta^\pm(w) : , \\
L^\alpha(z)G_\beta^\pm(w) &= \frac{1}{[\alpha]w(q - q^{-1})} \left\{ \frac{G^{\pm(\pm\beta-\alpha)}(wq^{\frac{\alpha}{2}})}{z - wq^{\mp\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}}} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{G^{\pm(\pm\beta+\alpha)}(wq^{-\frac{\alpha}{2}})}{z - wq^{\mp\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}}} \right\} , \tag{3.29}
\end{aligned}$$

onde a estrutura de polos é dada por

$$f(z; w) = \frac{(z - wq)(z - wq^{-1})}{(z - wq^3)(z - wq^{-3})} .$$

Esta álgebra é um análogo q-deformado da álgebra $N = 2$ superconforme (1.52).

Como foi visto na seção anterior, a parte regular da expansão em séries de q-Taylor do OPE entre os vértices de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ é constituída de infinitos termos não nulos quando tomamos o limite $z \rightarrow w$. Esta série é crescente em potências de $(q - q^{-1})$, portanto desaparecendo no limite clássico, no entanto esta expansão nos leva a uma classe bem maior de tensores Energia-Momento q-deformados na construção de Sugawara, todos eles possuindo como limite clássico a expressão (3.27). Podemos ver que os operadores multi-índice

$$\begin{aligned}
T^{\alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_n, \beta_n}(z) &= \frac{1}{2n^2[2]z^2(q - q^{-1})^2} \left\{ : A^{\alpha_1}(zq^{\beta_1}) \cdots A^{\alpha_n}(zq^{\beta_n}) : + \right. \\
&\quad \left. + : B^{\alpha_1}(zq^{\beta_1}) \cdots B^{\alpha_n}(zq^{\beta_n}) : - 2 \right\} , \tag{3.30}
\end{aligned}$$

possuem o limite clássico correto. Como no caso do tensor Energia-Momento (3.28), este também não satisfaz uma álgebra fechada, porém, suas componentes

$$A^{\alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_n, \beta_n}(z) =: A^{\alpha_1}(zq^{\beta_1}) \cdots A^{\alpha_n}(zq^{\beta_n}) : , \quad (3.31)$$

e

$$B^{\alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_n, \beta_n}(z) =: B^{\alpha_1}(zq^{\beta_1}) \cdots B^{\alpha_n}(zq^{\beta_n}) : , \quad (3.32)$$

satisfazem duas álgebras de OPE isomorfas do tipo

$$\begin{aligned} & A^{\alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_n, \beta_n}(z) A^{\gamma_1, \delta_1; \dots; \gamma_m, \delta_m}(w) = \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m f(zq^{\beta_i + \frac{\alpha_i}{2}}; wq^{\delta_j - \frac{\gamma_j}{2}}) : A^{\alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_n, \beta_n}(z) A^{\gamma_1, \delta_1; \dots; \gamma_m, \delta_m}(w) : \quad . \end{aligned} \quad (3.33)$$

É importante notar que o OPE (3.25) naturalmente produz termos do tipo (3.31) e (3.32), pois, de acordo com (3.21), temos

$$D(wq^{2k+1}, w) = A^{1, 2; 1, 4; \dots; 1, 2k}(w) \Psi(wq^{\frac{1}{2}}) ,$$

e

$$D(wq^{-2k-1}, w) = \Phi(wq^{-\frac{1}{2}}) B^{1, -2; 1, -4; \dots; 1, -2k}(w) .$$

Estes são casos particulares onde $\alpha_i = 1$ e $\beta_i = 2i$, no caso de A , e $\beta_i = -2i$ no caso de B , neste caso, um cancelamento notável de polos pode ser efetuado, no qual dos $2mn$ polos existentes, somente $2m$, restarão.

3.4 Construção de Sugawara e os Operadores de Vértice para a Álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N+1))$

Para construirmos os operadores de vértice da álgebra q -deformada $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N+1))$, é necessária a definição de osciladores α_n^i , onde $i = 1 \dots N$ e $n \in \mathbb{Z}$, satisfazendo as relações de comutacao [35]

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = \frac{[K_{ij}n][n]}{2n} \delta_{m+n, 0} \quad ; \quad i = 1 \dots N , \quad (3.34)$$

onde K_{ij} é a matriz de Cartan da álgebra de Lie subjacente $sl(N+1)$. Também temos os modos zero, Q^i e P^i , satisfazendo às relações de comutação usuais

$$[Q^i, P^j] = i\delta^{ij}.$$

As relações de comutação (3.34), recobram, no limite $q \rightarrow 1$, as relações usuais para a sub-álgebra de Heisenberg de $\widehat{sl}(N+1)$ na base de Chevalley, ie

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = K_{ij} n \delta_{m+n,0}.$$

Sejam as raízes simples de $sl(N+1)$ indexadas por β_i , com $i = 1 \dots N$. Para cada raiz simples, nós podemos associar, na álgebra de correntes q-deformada $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N+1))$, os vértices $E_i^\pm$ e as correntes Ψ_i e Φ_i , da forma

$$\begin{aligned} E_i^\pm(z) &= \exp \left\{ \mp \sqrt{2} \sum_{n < 0} \frac{\alpha_n^i}{[n]} (zq^{\mp \frac{1}{2}})^{-n} \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \mp \sqrt{2} \sum_{n > 0} \frac{\alpha_n^i}{[n]} (zq^{\pm \frac{1}{2}})^{-n} \right\} e^{\pm i \sqrt{2} Q^i} z^{\pm \sqrt{2} P^i}, \\ \Psi_i(z) &= q^{\sqrt{2} P^i} \exp \left\{ \sqrt{2} (q - q^{-1}) \sum_{n > 0} \alpha_n^i z^{-n} \right\}, \\ \Phi_i(z) &= q^{-\sqrt{2} P^i} \exp \left\{ -\sqrt{2} (q - q^{-1}) \sum_{n < 0} \alpha_n^i z^{-n} \right\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

satisfazendo às relações de OPE [7] [35]

$$\begin{aligned} E_i^+(z) E_i^-(w) &\sim \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left\{ \frac{\Psi_i(wq^{\frac{1}{2}})}{z - wq^1} - \frac{\Phi_i(wq^{-\frac{1}{2}})}{z - wq^{-1}} \right\}, \\ E_i^-(z) E_i^+(w) &\sim \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left\{ \frac{\Phi_i(wq^{\frac{1}{2}})}{z - wq^1} - \frac{\Psi_i(wq^{-\frac{1}{2}})}{z - wq^{-1}} \right\}, \\ E_i^+(z) E_j^-(w) &= \frac{(z - w)}{z} : E_i^+(z) E_j^-(w) :, i = j \pm 1, \\ \Psi_i(z) E_i^\pm(w) &= q^{\pm 2} \frac{(z - wq^{\mp \frac{5}{2}})}{(z - wq^{\pm \frac{3}{2}})} E_i^\pm(w) \Psi_i(z), \\ \Psi_i(z) E_j^\pm(w) &= \frac{(z - wq^{\pm \frac{1}{2}})}{(z - wq^{\mp \frac{3}{2}})} E_j^\pm(w) \Psi_i(z) \quad i = j \pm 1, \\ E_i^\pm(z) \Phi_i(w) &= q^{\pm 2} \frac{(z - wq^{\mp \frac{5}{2}})}{(z - wq^{\pm \frac{3}{2}})} \Phi_i(w) E_i^\pm(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_i^\pm(z)\Phi_j(w) &= \frac{(z - wq^{\pm\frac{1}{2}})}{(z - wq^{\mp\frac{3}{2}})}\Phi_j(w)E_i^\pm(z) \quad i = j \pm 1 \quad , \\
\Psi_i(z)\Phi_i(w) &= \frac{(z - wq^3)(z - wq^{-3})}{(z - wq)(z - wq^{-1})}\Phi_i(w)\Psi_i(z) \quad , \\
\Psi_i(z)\Phi_j(w) &= \frac{(z - w)^2}{(z - wq^2)(z - wq^{-2})}\Phi_j(w)\Psi_i(z) \quad i = j \pm 1 \quad .
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Para uma raiz positiva não simples, $\beta = \beta_i + \beta_{i+1} + \dots + \beta_{i+s}$, $0 \leq s \leq N - i$, nós definimos os produtos normalmente ordenados [35]

$$\begin{aligned}
E_\beta^+(z) &= : E_i^+(zq^i)E_{i+1}^+(zq^{i+1}) \dots E_{i+s}^+(zq^{i+s}) : \quad , \\
E_\beta^-(z) &= : E_{i+s}^-(zq^{i+s})E_{i+s-1}^-(zq^{i+s-1}) \dots E_i^-(zq^i) : \quad , \\
\Psi_\beta(z) &= \Psi_i(zq^i)\Psi_{i+1}(zq^{i+1}) \dots \Psi_{i+s}(zq^{i+s}) \quad , \\
\Phi_\beta(z) &= \Phi_i(zq^i)\Phi_{i+1}(zq^{i+1}) \dots \Phi_{i+s}(zq^{i+s}) \quad .
\end{aligned} \tag{3.37}$$

As regras de OPE para (3.37) podem ser obtidas utilizando-se as relações básicas para os operadores associados às raízes simples dadas em (3.36). Em particular, o OPE entre $E_\alpha^+(z)$ e $E_\beta^-(w)$ se escreve como [7]

$$\begin{aligned}
\zeta(q, z)E_\beta^+(z)E_\beta^-(w) &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left\{ \frac{\Psi_\beta(wq^{\frac{1}{2}})}{z - wq^1} - \frac{\Phi_\beta(wq^{-\frac{1}{2}})}{z - wq^{-1}} \right\} + \\
&+ \frac{1}{2[2]w^2q^2(q - q^{-1})^2} \left\{ [q^{-3}(A_\beta^1(wq^2) - 1) + (q - q^{-1})]\Psi_\beta(wq^{\frac{1}{2}}) + \right. \\
&+ \left. \Phi_\beta(wq^{-\frac{1}{2}})[q^3(B_\beta^1(wq^{-2}) - 1) - (q - q^{-1})] \right\} + \mathcal{O}(q - q^{-1}) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

onde

$$\zeta(q, z) = z^{2(s-1)}q^{i(2s-1)+s(s+1)} \quad ,$$

é um fator de normalização introduzido apenas para cancelar os fatores que aparecem nos OPEs relativos aos vértices associados a raízes vizinhas. A razão algébrica mais evidente para o aparecimento deste fatores reside no fato de as raízes não simples não obedecerem a relações de comutação, mas sim de q-comutação, para poderem satisfazer às relações de Serre para álgebras quânticas. Os campos A_α^k e B_α^k em (3.38) são definidos como

$$\begin{aligned}
A_\beta^k(z) &= : A_i^k(zq^i)A_{i+1}^k(zq^{i+1}) \dots A_{i+s}^k(zq^{i+s}) : \quad , \\
B_\beta^k(z) &= : B_i^k(zq^i)B_{i+1}^k(zq^{i+1}) \dots B_{i+s}^k(zq^{i+s}) : \quad .
\end{aligned}$$

Assim, a proposta para o tensor Energia-Momento na construção de Sugawara para a álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N+1))$ é da forma [7]

$$T^{k,l}(z) = \frac{1}{2(2+N)[2]z^2(q-q^{-1})^2} \left\{ \sum_{i=1}^N [A_i^k(zq^l) + B_i^k(zq^l) - 2] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{\beta > 0} [A_\beta^k(zq^l) + B_\beta^k(zq^l) - 2] \right\} . \quad (3.39)$$

As componentes do tensor Energia-Momento (3.39), A_α^k e B_α^k também satisfazem uma álgebra fechada do mesmo tipo da apresentada na seção anterior nas expressões (3.29) e (3.33). No limite $q \rightarrow 1$, nós recobramos o tensor Energia-Momento usual na construção de Sugawara [39]

$$T(z) = \frac{1}{2(1+h)} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \times H_i^2(z) \times + \sum_{\beta > 0} \times E^\beta(z) E^{-\beta}(z) + E^{-\beta}(z) E^\beta(z) \times \right\} , \quad (3.40)$$

onde h é o número de Coxeter dual³, conforme visto no capítulo primeiro, e os ordenamentos são feitos em relação aos modos normais das correntes de $\widehat{sl}(N+1)$. Novamente, para o nível 1, a contribuição dos termos quadráticos nos operadores de “step” são proporcionais aos termos relativos às correntes da sub-álgebra de Cartan [39]

$$\times E^\beta(z) E^{-\beta}(z) + E^{-\beta}(z) E^\beta(z) \times = \times (\beta \cdot H(z))^2 \times .$$

O estudo do tensor Energia-Momento na construção de Sugawara ainda constitui-se um problema a ser explorado. Uma outra perspectiva para o estudo deste tipo de construção foi proposta por E. Frenkel e N. Reshetikhin na referência [34]), utilizando a realização de Wakimoto para álgebras afins deformadas, nesta referência, os autores encontraram uma álgebra de Virasoro q -deformada do tipo quadrático.

Também é importante nos referirmos à proposta efetuada por H. J. De Vega e N. Sanches na referência [26], neste trabalho, os autores propuseram, a partir dos osciladores q -deformados para a álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$, novos operadores de vértice, diferentes dos apresentados em (3.7), para descrever uma deformação da teoria de cordas. Nesta mesma referência são propostas uma ação q deformada para a teoria de cordas e um tensor Energia-Momento canônico para esta ação, constituído de uma soma infinita de termos quadráticos nas correntes porém com

³Para a álgebra $sl(N+1)$, nós temos $h = N+1$

argumentos deslocados por potências do parâmetro de deformação. Muito embora a álgebra de Virasoro q -deformada por eles obtida não seja fechada, foi possível aos autores calcular amplitudes duais modificadas que no limite clássico recobram as amplitudes duais de Virasoro-Shapiro, possibilitando, assim uma nova fenomenologia de cordas.

Redução Hamiltoniana do Modelo

WZW

4.1. Hamiltoniana

Como já foi mencionado, a primeira etapa da redução hamiltoniana é a obtenção da forma hamiltoniana do sistema. Para isso, é necessário reescrever a ação em termos das variáveis canônicas. A ação do modelo WZW pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu X^\alpha \partial_\nu X^\alpha + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu X^\alpha \partial_\nu X^\beta \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \partial_\mu X^\alpha \partial_\nu X^\beta \partial_\rho X^\gamma \partial_\sigma X^\delta \Omega_{\alpha\beta\gamma\delta} \right)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski, $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita, X^α são as coordenadas do espaço-tempo e $\Omega_{\alpha\beta}$ e $\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ são os coeficientes da expansão da ação em potências das coordenadas. A primeira etapa da redução hamiltoniana é a obtenção das variáveis canônicas a partir desta ação.

Para isso, é necessário reescrever a ação em termos das variáveis canônicas. A ação do modelo WZW pode ser escrita como

Capítulo 4

Redução Hamiltoniana do Modelo WZNW

4.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos alguns aspectos do processo de redução Hamiltoniana do modelo WZNW que consiste na eliminação de graus de liberdade no modelo através da imposição de vínculos. Este modelo surgiu no contexto da bosonização não-Abeliana [59][72] em teorias de campos bi-dimensionais.

O modelo WZNW possui um interesse “per si” devido à presença de um termo de interação de natureza topológica [72], sendo assim um exemplo de teoria de campos onde a topologia é importante para a compreensão da Física do modelo.

Um outro aspecto importante relativo ao modelo WZNW é o fato de suas correntes de Noether satisfazerem uma álgebra de Kac-Moody associada à álgebra de Lie do Grupo de Gauge do modelo [49]. Estas correntes de Noether são campos primários de uma teoria conforme cujo Tensor Energia-Momento é escrito na forma de Sugawara [49].

Uma propriedade notável do modelo WZNW foi descoberta no final da década de 80 e gerou toda uma série de desenvolvimentos posteriores. Trata-se do processo de redução Hamiltoniana [5] [32]. Foi observado que ao se impor certos vínculos às correntes do modelo WZNW, podemos obter outras teorias de campos conformes como as teorias de Toda Conformes, dependendo do grupo de gauge do modelo original. O caso mais simples consiste na teoria de Liouville, obtida pela redução do modelo quando o grupo de gauge é $SL(2)$. A álgebra dos

parênteses de Poisson entre as correntes conservadas do modelo (Kac-Moody), após a imposição destes vínculos também sofre uma redução . As correntes restantes realizam uma álgebra conforme estendida $\mathcal{W}_N$ [6], sendo a mais simples a álgebra de Virasoro no caso onde o grupo de gauge é $SL(2)$. Um outro exemplo de redução Hamiltoniana do modelo WZNW está relacionado a teorias apresentando soluções tipo buraco negro como em cordas em campos de Fundo [13] [41] [73]. As álgebras resultantes são do tipo quadrática e são denominadas V -álgebras [13]. O mais interessante nesta classe de modelos reside no fato de os setores quirais não comutarem mas satisfazerem um tipo de álgebra deformada.

Em nosso trabalho, do qual apresentaremos os resultados originais neste capítulo [10], apenas nos preocuparemos com a álgebra das correntes. Ainda não foram encontradas teorias de campos que obedeçam a simetrias conformes q -deformadas, portanto, ao invés de partirmos de uma ação , partimos de uma álgebra afim quântica; em nosso caso trata-se da álgebra $U_q(sl(2))$. A partir das relações de *OPE* entre as correntes da álgebra, conseguimos definir comutadores, e por conseguinte, parênteses de Poisson entre elas. Tomando-se vínculos análogos aos vínculos clássicos [41] podemos através do método dos parênteses de Dirac, obter, de uma forma sistemática, uma álgebra que será uma q -deformação da álgebra de Virasoro conforme obtida em [6]. Esta nova classe de álgebras de Virasoro q -deformadas apresentam relações de comutação possuindo termos quadráticos [10].

4.2 O Modelo WZNW

Um aspecto importante apresentado em teorias de campos a 2 dimensões é a existência de transformações não locais relacionando campos fermiônicos e campos bosônicos. Por exemplo, a teoria de férmions não massivos, cuja Lagrangeana se escreve como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi$$

é totalmente equivalente à teoria de um campo escalar livre sem massa, cuja Lagrangeana é dada por [21]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi .$$

Outro exemplo é o da equivalência entre o modelo de Thirring massivo e o modelo de Sine-Gordon quântico [21]. A expressão de ψ em função do campo ϕ tem uma forma deveras complicada de carácter não local [54]. No entanto, as expressões bilineares dos férmions possuem expressões simples. Por exemplo, a corrente

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi,$$

se escreve como

$$J^\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi. \quad (4.1)$$

O modelo de WZNW surgiu ao tentar-se estender o conceito de bosonização para teorias com simetrias de gauge não abelianas. Primeiramente, é necessário reescrever (4.1) em uma forma apropriada para generalizações. Portanto, definimos um elemento U do campo abeliano $U(1)(O(2))$ por $U = \exp(i\sqrt{4\pi}\phi)$. Assim, a corrente (4.1) se escreve como

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = -\frac{i}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}U^{-1}\partial_\nu U = \\ &= -\frac{i}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}(\partial_\nu U)U^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aqui a ordem dos fatores ainda não importa pois o grupo é abeliano. Nas coordenadas do cone de luz temos ainda

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{i}{2\pi}U^{-1}\partial_+U, \\ J_- &= -\frac{i}{2\pi}(\partial_-U)U^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Em uma teoria fermiônica, a corrente vetorial $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e a corrente axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ são conservadas. Levando-se em conta que em $1 + 1$ dimensões, a corrente axial pode ser escrita como $\epsilon^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_\nu\psi$, as leis de conservação das correntes em termos dos férmions podem ser reescritas em termos de (4.3) como $\partial_+J_- = \partial_-J_+ = 0$.

Para generalizar-se para uma teoria não abeliana envolvendo férmions, vamos considerar N férmions de Majorana $\psi^i (i = 1 \dots n)$ com simetria $O(N) \times O(N)$. A ação para estes campos se escreve como

$$S = \sum_k \int d^2x \frac{i}{2} \bar{\psi}^k \not{\partial} \psi^k.$$

As componentes do férmion de Majorana se desacoplam quiralmente

$$\psi^i = \begin{pmatrix} \psi_+^i(x^+) \\ \psi_-^i(x^-) \end{pmatrix}.$$

Assim, as correntes quirais se escrevem como

$$\begin{aligned} J_+^{ij} &= -i\psi_+^i\psi_+^j \\ J_-^{ij} &= -i\psi_-^i\psi_-^j, \end{aligned} \quad (4.4)$$

e as leis de conservação são expressas como $\partial_- J_+^{ij} = \partial_+ J_-^{ij} = 0$.

As correntes para o grupo não abeliano $O(N)$ são da mesma forma que (4.3), utilizando-se o elemento $g \in O(N)$ temos

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{i}{2\pi} g^{-1} \partial_+ g \\ J_- &= -\frac{i}{2\pi} (\partial_- g) g^{-1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

É fácil verificar que $\partial_+ J_- = 0$ e $\partial_- J_+ = 0$ são compatíveis.

A ação mais óbvia que descreveria a dinâmica de g seria dada pelo modelo quiral

$$S = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \text{Tr}(\partial_\mu g \partial_\mu g^{-1}), \quad (4.6)$$

pois é uma teoria renormalizável e com invariância quiral. Porém, por várias razões esta ainda não é a teoria desejada. O motivo mais imediato é o fato de as equações de movimento de (4.6) serem

$$\partial_\mu (g^{-1} \partial_\mu g) = 0$$

e não as desejadas

$$\partial_- (g^{-1} \partial_+ g) = 0 \quad ; \quad \partial_+ ((\partial_- g) g^{-1}) = 0.$$

A ação do modelo quiral pode ser adicionada a um termo de origem topológica denominado termo de Wess-Zumino. Trabalhando em um espaço Euclideano, podemos imaginar o espaço-tempo como uma esfera bi-dimensional S^2 . Como $\pi_2(O(N)) = 0$, podemos estender

uma função $g : S^2 \rightarrow O(N)$ para uma função $\bar{g} : S^3 \rightarrow O(N)$ (da bola sólida cujo bordo é o espaço-tempo no grupo $O(N)$). O termo de Wess-Zumino é escrito como

$$\Gamma[g] = \frac{1}{24\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g) .$$

A ação Γ possui uma ambigüidade em sua definição devido ao fato de haverem modos inequivalentes de se estender g a $\bar{g}$, as possibilidades topologicamente distintas são classificadas pelo grupo de homotopia $\pi_3(O(N)) = \mathbf{Z}$.

Assim, a forma mais geral para a ação governando o campo g é

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \text{Tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g) + \\ &+ \frac{n}{24\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g) . \end{aligned} \quad (4.7)$$

As equações de movimento serão dadas por

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\lambda^2} \partial_\mu (g^{-1} \partial^\mu g) - \frac{n}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (g^{-1} \partial_\nu g) = \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{n}{8\pi} \right) \partial_- (g^{-1} \partial_+ g) + \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{n}{8\pi} \right) \partial_+ (g^{-1} \partial_- g) . \end{aligned}$$

Para $\lambda^2 = \frac{4\pi}{n}$, ($n > 0$), temos a equação

$$\partial_- (g^{-1} \partial_+ g) = 0 ,$$

e por conjugação de paridade, obtemos a equação

$$\partial_+ ((\partial_- g) g^{-1}) = 0$$

para $\lambda^2 = -\frac{4\pi}{n}$, ($n < 0$). A constante de acoplamento λ^2 é sempre positiva. Também podemos escrever a variação desta ação em termos das correntes de Noether

$$\delta S = \int d^2x (J_+ \delta A_- + J_- \delta A_+) ,$$

com $J_\pm$ dados por (4.5) e

$$A_\pm = g^{-1} \partial_\pm g .$$

As correntes $J_\pm$ pertencem à álgebra de Lie associada ao grupo de gauge do modelo, portanto podemos escrever

$$J_\pm = J_\pm^a T^a ,$$

onde $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$. Efetuando-se a complexificação das coordenadas $x_+ \rightarrow z, x_- \rightarrow \bar{z}$ temos

$$\begin{aligned} J_+^a(x^+) \rightarrow J^a(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^a z^{-n-1} \\ J_-^a(x^-) \rightarrow \bar{J}^a(\bar{z}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_n^a \bar{z}^{-n-1} \end{aligned}$$

As componentes J_n^a e $\bar{J}_n^a$ obedecem a duas álgebras de Kac-Moody independentes [49]

$$\begin{aligned} [J_n^a, J_m^b] &= if^{abc} J_{m+n}^c + kn\delta^{ab}\delta_{m+n,0} \\ [\bar{J}_n^a, \bar{J}_m^b] &= if^{abc} \bar{J}_{m+n}^c + kn\delta^{ab}\delta_{m+n,0} \\ [J_n^a, \bar{J}_m^b] &= 0, \end{aligned}$$

onde k é um fator que depende das constantes de acoplamento presentes na ação .

Portanto, o modelo WZNW é um exemplo de teoria de campos bi-dimensional que possui uma simetria dada por uma álgebra de dimensão infinita. Além do mais, como foi visto no Capítulo 1, existe uma simetria conforme subjacente a este modelo sendo o tensor Energia-Momento escrito quadraticamente em termos das correntes, esta é a construção de Sugawara descrita pela fórmula (1.40). As correntes

$$J^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^a z^{-n-1},$$

são campos primários em relação a este tensor Energia-Momento, conforme visto pela expressão (1.41).

4.3 Exemplos de Redução Hamiltoniana do modelo WZNW

Tomemos o modelo WZNW, cuja ação (4.7) será escrita daqui em diante como

$$\begin{aligned} S &= -\frac{k}{2} \int d^2x \text{Tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g) + \\ &+ \frac{k}{3} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Os campos g são elementos do grupo de gauge do modelo e portanto podem ser escritos em termos de campos mais elementares

$$g(x, t) = e^{i\beta_a(x,t)T^a},$$

onde os elementos T^a são os geradores da álgebra de Lie associada.

O exemplo mais simples a ser considerado é o caso onde o grupo de gauge é $U(1)$. Neste caso $T^a = I$ e $g = e^{i\phi I}$, assim a ação (4.8) equivale à ação de Klein-Gordon não massiva.

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi .$$

Para podermos efetuar exemplos em grupos não compactos, é necessário fazermos uso da fórmula de Polyakov-Wiegman [59] para expressarmos (4.8) no caso em que $g = ABC$:

$$\begin{aligned} S[ABC] &= S[A] + S[B] + S[C] + \\ &+ k \int d^2x \text{Tr}[A^{-1}(\partial_- A)(\partial_+ B)B^{-1} + \\ &+ B^{-1}(\partial_- B)(\partial_+ C)C^{-1} + \\ &+ A^{-1}(\partial_- A)B(\partial_+ C)C^{-1}B^{-1}] . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para o caso $SL(2)$ com os geradores

$$E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

podemos escrever um elemento g de um grupo não compacto na seguinte forma (decomposição de Gauss)

$$g = e^{\chi E_-} e^{\frac{\phi}{2} H} e^{\psi E_+} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\phi}{2}} & \psi e^{\frac{\phi}{2}} \\ \chi e^{\frac{\phi}{2}} & \chi \psi e^{\frac{\phi}{2}} + e^{-\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} . \quad (4.10)$$

Utilizando a expressão (4.9) temos que [5]

$$S[g] = -\frac{k}{2} \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_+ \phi \partial_- \phi + 2(\partial_+ \chi)(\partial_- \psi) e^\phi \right) . \quad (4.11)$$

Esta é a ação do modelo WZNW escrita em termos dos campos constituintes.

As correntes

$$J = g^{-1} \partial_+ g \quad \bar{J} = -(\partial_- g) g^{-1}$$

para o elemento de grupo g dado por (4.10) podem ser escritas como

$$J = J_{E_-} E_+ + J_{E_+} E_- + J_H H$$

$$\begin{aligned}
J_{E_-} &= \partial_+ \psi + \psi \partial_+ \phi - \psi^2 (\partial_+ \chi) e^\phi \\
J_{E_+} &= e^\phi \partial_+ \chi \\
J_H &= \frac{1}{2} \partial_+ \phi - \psi (\partial_+ \chi) e^\phi \\
\bar{J} &= \bar{J}_{E_+} E_+ + \bar{J}_{E_-} E_- + \bar{J}_H H \\
\bar{J}_{E_-} &= -\partial_- \psi e^\phi \\
\bar{J}_{E_+} &= -\partial_- \chi - \partial_- \phi \chi + \partial_- \psi \chi^2 e^\phi \\
\bar{J}_H &= -\frac{1}{2} \partial_- \phi + (\partial_- \chi) \psi e^\phi .
\end{aligned}$$

O processo de redução consiste em impor vínculos às correntes para reduzir o número de campos da teoria. Por exemplo, se tomarmos os vínculos

$$\begin{aligned}
J_H &\approx 0 \quad \bar{J}_H \approx 0 , \\
J_{E_+} - \mu &\approx 0 , \\
\bar{J}_{E_-} + \bar{\mu} &\approx 0 ,
\end{aligned}$$

conseguiremos eliminar os campos ψ e χ da ação . Assim a expressão reduzida de (4.11) se escreve como

$$S[g] = -\frac{k}{2} \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_+ \phi \partial_- \phi + 2\mu \bar{\mu} e^{-\phi} \right) ,$$

que é o modelo de Liouville. As correntes restantes J_{E_-} e $\bar{J}_{E_+}$ também podem ser reescritas em termos do campo ϕ como

$$\begin{aligned}
J_{E_-} &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{2} (\partial_+ \phi)^2 + \partial_+^2 \phi \right) \\
\bar{J}_{E_+} &= -\frac{1}{2\bar{\mu}} \left(\frac{1}{2} (\partial_- \phi)^2 + \partial_-^2 \phi \right) .
\end{aligned}$$

Este é o exemplo mais simples de redução Hamiltoniana para o caso onde o grupo de gauge do modelo é $SL(2)$. Para os casos onde o grupo de gauge é um grupo G (não compacto), os modelos obtidos por redução Hamiltoniana são os modelos de Toda conformes. Os vínculos apropriados a serem impostos às correntes neste caso serão de forma a anular as correntes relativas à sub-álgebra de Cartan e tornar constantes as correntes relativas às raízes,

deixando restar apenas um número de correntes igual ao rank da álgebra associada. As ações reduzidas serão da forma

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_+ \phi^a \partial_- \phi_a + 2\mu^a \mu_a e^{k_{ab} \phi^b} \right),$$

onde k_{ab} é a matriz de Cartan da álgebra associada.

4.4 Redução da Álgebra de Correntes

A partir desta secção estaremos tratando apenas da álgebra de correntes sem nos preocuparmos com a ação de teoria de campos subjacente. Estaremos também estabelecendo uma notação que será consistente com o restante do trabalho, inclusive com a versão q -deformada a ser descrita na secção seguinte deste capítulo.

As relações de comutação da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$, descritas em termos dos geradores na base de Cartan-Weyl $(H_n, E_n^\pm, k)$ são

$$\begin{aligned} [H_n, H_m] &= kn\delta_{m+n,0} \\ [H_n, E_m^\pm] &= \pm\sqrt{2}E_{m+n}^\pm \\ [E_n^\pm, E_m^\mp] &= \pm\sqrt{2}H_{m+n} + kn\delta_{m+n,0} \\ [k, H_n] &= [k, E_n^\pm] = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $(k = 1)$. Primeiramente vamos definir as correntes associadas aos geradores de $sl(2)$:

Este mesmo exemplo pode também ser feito de uma outra maneira, totalmente equivalente a esta que apresentamos: Tomemos, agora, as correntes em termos das variáveis $z = e^{ix}$ e $w = e^{iy}$, como sendo

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n z^{-n}, \\ E^\pm(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^\pm z^{-n}. \end{aligned}$$

Utilizando as relações de comutação (4.12), teremos os seguintes comutadores

$$[H(z), H(w)] = -z\partial_z \delta\left(\frac{z}{w}\right),$$

$$\begin{aligned}
[H(z), E^\pm(w)] &= \pm\sqrt{2}E^\pm(w)\delta\left(\frac{z}{w}\right), \\
[E^\pm(z), E^\mp(w)] &= \pm\sqrt{2}H(w)\delta\left(\frac{z}{w}\right) - z\partial_z\delta\left(\frac{z}{w}\right),
\end{aligned}$$

onde a função $\delta(z)$ é uma função delta formal, definida como

$$\delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}. \quad (4.13)$$

A partir do princípio da correspondência, é possível escrever os parênteses de Poisson associados a estes comutadores:

$$\begin{aligned}
\{H(z), H(w)\} &= iz\partial_z\delta\left(\frac{z}{w}\right), \\
\{H(z), E^\pm(w)\} &= \mp i\sqrt{2}E^\pm(w)\delta\left(\frac{z}{w}\right), \\
\{E^\pm(z), E^\mp(w)\} &= \mp i\sqrt{2}H(w)\delta\left(\frac{z}{w}\right) + iz\partial_z\delta\left(\frac{z}{w}\right).
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Com os vínculos, escritos da forma

$$\begin{aligned}
\chi_1(z) &= H(z) \approx 0 \\
\chi_2(z) &= E^+(z) - 1 \approx 0,
\end{aligned} \quad (4.15)$$

teremos a matriz de Dirac dada por

$$\Delta(z, w) = \begin{pmatrix} iz\partial_z\delta\left(\frac{z}{w}\right) & -i\sqrt{2}\delta\left(\frac{z}{w}\right) \\ i\sqrt{2}\delta\left(\frac{z}{w}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz inversa,

$$\Delta^{-1}(z, w) = \begin{pmatrix} a(z, w) & b(z, w) \\ c(z, w) & d(z, w) \end{pmatrix},$$

pode ser obtida facilmente, tendo em vista a relação de ortogonalidade

$$\oint \frac{dz}{2\pi iz} z^{m-n} = \delta_{m,n}. \quad (4.16)$$

Assim, efetuando-se as expansões

$$a(z, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{w}\right)^{-n},$$

$$\begin{aligned}
b(z, w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left(\frac{z}{w} \right)^{-n}, \\
c(z, w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{z}{w} \right)^{-n}, \\
d(z, w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \left(\frac{z}{w} \right)^{-n},
\end{aligned}$$

teremos a matriz de Dirac inversa dada por

$$\Delta^{-1}(z, w) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \delta \left(\frac{z}{w} \right) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \delta \left(\frac{z}{w} \right) & -\frac{i}{2} z \partial_z \delta \left(\frac{z}{w} \right) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz satisfará a seguinte relação coma matriz de Dirac:

$$\oint \frac{du}{2\pi i u} \Delta_{ij}(z, u) \Delta_{jk}(u, w) = \delta_{ik} \delta \left(\frac{z}{w} \right).$$

Agora, seguindo a mesma relação de ortogonalidade dada por (4.16), podemos calcular os parênteses de Dirac relativos à corrente restante, obtendo

$$\begin{aligned}
\{E^-(z), E^-(w)\}_D &= i(E^-(z) + E^-(w))z\partial_z \delta \left(\frac{z}{w} \right) + \\
&- \frac{i}{2}(z\partial_z)^3 \delta \left(\frac{z}{w} \right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Uma expressão mais conhecida para estes parênteses de Dirac pode ser dada utilizando-se a seguinte mudança de variáveis

$$z = e^{ix} \quad ; \quad w = e^{iy},$$

com estas novas variáveis, temos

$$iz\partial_z \delta \left(\frac{z}{w} \right) = \partial_x \delta(x - y).$$

Assim, a expressão (4.17) resulta em [5]

$$\{E^-(x), E^-(y)\}_D = -\partial_y E^-(y) \delta(x - y) + 2E^-(y) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} \delta'''(x - y). \tag{4.18}$$

Um outro exemplo importante de redução para esta mesma álgebra se dá com a imposição de um único vínculo

$$\chi(x) = H(x) \approx 0. \tag{4.19}$$

A matriz de Dirac, neste caso, possui uma única entrada

$$\Delta(x, y) = \delta'(x - y) , \quad (4.20)$$

cujas inversa é

$$\Delta^{-1}(x, y) = -\frac{1}{2}\epsilon(x - y) , \quad (4.21)$$

onde $\epsilon(x - y)$ é definida como

$$\epsilon(x - y) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < y \\ 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x > y . \end{cases}$$

A álgebra de parênteses de Dirac entre as correntes restantes $E^\pm(x)$ é quadrática e tem um caráter não local [13][41]

$$\begin{aligned} \{E^\pm(x), E^\pm(y)\} &= -E^\pm(x)E^\pm(y)\epsilon(x - y) \\ \{E^\pm(x), E^\mp(y)\} &= \pm E^\pm(x)E^\mp(y)\epsilon(x - y) + \delta'(x - y) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Esta álgebra é denominada V álgebra e desempenha um papel importante na descrição de soluções tipo buraco negro no modelo de WZNW [13].

Também podemos expressar este exemplo em termos das variáveis $z = e^{ix}$ e $w = e^{iy}$. O vínculo (4.19) é dado por

$$\chi(z) = H(z) \approx 0 . \quad (4.23)$$

E a matriz de Dirac (4.20) constitui-se de um único elemento, dado por

$$\Delta(z, w) = iz\partial_z\delta\left(\frac{z}{w}\right) , \quad (4.24)$$

cujas inversa é

$$\Delta^{-1}(z, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} \left(\frac{z}{w}\right)^{-n} . \quad (4.25)$$

A álgebra de parênteses de Dirac expressa por (4.22) passa a ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \{E^\pm(z), E^\pm(w)\} &= -2iE^\pm(z)E^\pm(w) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{w}\right)^{-n} \\ \{E^\pm(z), E^\mp(w)\} &= \pm 2iE^\pm(z)E^\mp(w) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{w}\right)^{-n} + iz\partial_z\delta\left(\frac{z}{w}\right) . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sendo esta expressão totalmente equivalente a (4.22).

4.5 Redução da Álgebra de Correntes: Caso q -Deformado

Nesta secção estaremos considerando os resultados inéditos obtidos ao estender-se o processo de redução a álgebras q -Deformadas. Tomemos o caso da álgebra $U_q(sl(2))$, gerada pelas correntes $\Psi(z)$, $\Phi(z)$, e $E^\pm(z)$ satisfazendo as relações ($k = 1$).

$$\begin{aligned}
 \Psi(z)\Phi(w) &= \frac{(z - wq^3)(z - wq^{-3})}{(z - wq)(z - wq^{-1})}\Phi(w)\Psi(z) \\
 \Psi(z)E^\pm(w) &= q^{\pm 2} \frac{(z - wq^{\mp \frac{5}{2}})}{(z - wq^{\pm \frac{3}{2}})}E^\pm(w)\Psi(z) \\
 \Phi(z)E^\pm(w) &= q^{\pm 2} \frac{(z - wq^{\mp \frac{3}{2}})}{(z - wq^{\pm \frac{5}{2}})}E^\pm(w)\Phi(z) \\
 [E^+(z), E^-(w)] &= \frac{1}{(q - q^{-1})} \left(\Psi(wq^{\frac{1}{2}})\delta\left(\frac{zq^{-1}}{w}\right) - \Phi(wq^{-\frac{1}{2}})\delta\left(\frac{zq^1}{w}\right) \right) \\
 [E^-(z), E^+(w)] &= \frac{1}{(q - q^{-1})} \left(\Phi(zq^{-\frac{1}{2}})\delta\left(\frac{zq^{-1}}{w}\right) - \Psi(zq^{\frac{1}{2}})\delta\left(\frac{zq^1}{w}\right) \right) \\
 E^\pm(z)E^\pm(w) &= \frac{(zq^{\pm 2} - w)}{(z - wq^{\pm 2})}E^\pm(w)E^\pm(z), \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

onde

$$\delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}$$

é uma função delta formal, recobrando sua forma tradicional quando $z = e^{ix}$. As correntes $E^\pm(z)$ são escritas em termos de seus modos normais $E_n^\pm$ como

$$E^\pm(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^\pm z^{-n}.$$

As correntes $\Phi(z)$ e $\Psi(z)$ são definidas como

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= q^{-\sqrt{2}H_0} \exp \left\{ -\sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n<0} H_n z^{-n} \right\}, \\
 \Psi(z) &= q^{\sqrt{2}H_0} \exp \left\{ \sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n>0} H_n z^{-n} \right\}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a expressão

$$\frac{\Psi(z) - \Phi(z)}{\sqrt{2}(q - q^{-1})}$$

corresponde, no limite $q \rightarrow 1$, à corrente $H(z)$ clássica. A partir das relações (4.27), vamos construir comutadores entre todas as correntes para podermos definir os parênteses de Poisson. Faremos explicitamente um caso para descrevermos o processo:

$$[\Psi(z), \Phi(w)] = \Psi(z)\Phi(w) - \Phi(w)\Psi(z) ,$$

somamos e subtraímos um termo

$$\frac{(z - wq^3)(z - wq^{-3})}{(z - wq)(z - wq^{-1})} \Phi(w)\Psi(z) ,$$

assim

$$\begin{aligned} [\Psi(z), \Phi(w)] &= \Psi(z)\Phi(w) - \Phi(w)\Psi(z) + \\ &+ \frac{(z - wq^3)(z - wq^{-3})}{(z - wq)(z - wq^{-1})} \Phi(w)\Psi(z) - \frac{(z - wq^3)(z - wq^{-3})}{(z - wq)(z - wq^{-1})} \Phi(w)\Psi(z) = \\ &= \Phi(w)\Psi(z) \left(\frac{zw(q + q^{-1} - q^3 - q^{-3})}{(z - wq)(z - wq^{-1})} \right) = \\ &= \Phi(w)\Psi(z)(q^2 - q^{-2})(q^{-1} - q) \left(\frac{\frac{w}{z}}{\left(1 - \frac{wq}{z}\right)\left(1 - \frac{wq^{-1}}{z}\right)} \right) = \\ &= -\Phi(w)\Psi(z)(q^2 - q^{-2}) \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{wq}{z}\right)} - \frac{1}{\left(1 - \frac{wq^{-1}}{z}\right)} \right) , \end{aligned}$$

onde utilizamos nesta última passagem a identidade

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{wq}{z}\right)\left(1 - \frac{wq^{-1}}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{w}{z}(q - q^{-1})} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{wq}{z}\right)} - \frac{1}{\left(1 - \frac{wq^{-1}}{z}\right)} \right) .$$

Agora, podemos transformar os polos em séries formais do tipo

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n \geq 0} x^n .$$

Temos, assim,

$$\begin{aligned} [\Psi(z), \Phi(w)] &= \Phi(w)\Psi(z)(q^2 - q^{-2}) \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{wq^{-1}}{z} \right)^n - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{wq}{z} \right)^n \right) = \\ &= \Phi(w)\Psi(z)(q^2 - q^{-2}) \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq}{w} \right)^{-n} - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right)^{-n} \right) \end{aligned}$$

As outras relações de comutação relativas à álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ são dadas por:

$$\begin{aligned}
[\Psi(z), \Phi(w)] &= \Phi(w)\Psi(z)(q^2 - q^{-2}) \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq}{w} \right)^{-n} - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right)^{-n} \right), \\
[\Phi(z), \Psi(w)] &= \Phi(z)\Psi(w)(q^2 - q^{-2}) \left(\sum_{n < 0} \left(\frac{zq}{w} \right)^{-n} - \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right)^{-n} \right), \\
[\Psi(z), E^\pm(w)] &= E^\pm(w)\Psi(z)(q^{\pm 2} - 1) \left(-q^{\mp 2} + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{\mp \frac{3}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
[E^\pm(z), \Psi(w)] &= -E^\pm(z)\Psi(w)(q^{\pm 2} - 1) \left(1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{\pm \frac{3}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
[\Phi(z), E^\pm(w)] &= -E^\pm(w)\Phi(z)(q^{\pm 2} - 1) \left(q^{\mp 2} + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{\mp \frac{5}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
[E^\pm(z), \Phi(w)] &= E^\pm(z)\Phi(w)(q^{\pm 2} - 1) \left(-1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{\pm \frac{5}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
[E^+(z), E^-(w)] &= \frac{1}{(q - q^{-1})} \left(\Psi(wq^{\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right) - \Phi(wq^{-\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq}{w} \right) \right), \\
[E^-(z), E^+(w)] &= \frac{1}{(q - q^{-1})} \left(\Phi(wq^{-\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right) - \Psi(wq^{\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq}{w} \right) \right), \\
[E^\pm(z), E^\pm(w)] &= \frac{1}{2}(q^{\pm 2} - 1) \left\{ E^\pm(w)E^\pm(z) \left(1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{\mp 2}}{w} \right)^{-n} \right) + \right. \\
&\quad \left. - E^\pm(z)E^\pm(w) \left(1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \leq 0} \left(\frac{zq^{\pm 2}}{w} \right)^{-n} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Pelo princípio da correspondência, teremos os seguintes parênteses de Poisson

$$\begin{aligned}
\{\Psi(z), \Phi(w)\} &= -i\Phi(w)\Psi(z)(q^2 - q^{-2}) \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq}{w} \right)^{-n} - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right)^{-n} \right), \\
\{\Phi(z), \Psi(w)\} &= -i\Phi(z)\Psi(w)(q^2 - q^{-2}) \left(\sum_{n < 0} \left(\frac{zq}{w} \right)^{-n} - \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right)^{-n} \right), \\
\{\Psi(z), E^\pm(w)\} &= -iE^\pm(w)\Psi(z)(q^{\pm 2} - 1) \left(-q^{\mp 2} + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{\mp \frac{3}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
\{E^\pm(z), \Psi(w)\} &= iE^\pm(z)\Psi(w)(q^{\pm 2} - 1) \left(1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{\pm \frac{3}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
\{\Phi(z), E^\pm(w)\} &= iE^\pm(w)\Phi(z)(q^{\pm 2} - 1) \left(q^{\mp 2} + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{\mp \frac{5}{2}}}{w} \right)^{-n} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{E^\pm(z), \Phi(w)\} &= -iE^\pm(z)\Phi(w)(q^{\pm 2} - 1) \left(-1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{\pm \frac{5}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
\{E^+(z), E^-(w)\} &= -\frac{i}{(q - q^{-1})} \left(\Psi(wq^{\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right) - \Phi(wq^{-\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq}{w} \right) \right), \\
\{E^-(z), E^+(w)\} &= -\frac{i}{(q - q^{-1})} \left(\Phi(zq^{-\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq^{-1}}{w} \right) - \Psi(zq^{\frac{1}{2}}) \delta \left(\frac{zq}{w} \right) \right), \\
\{E^\pm(z), E^\pm(w)\} &= \frac{i}{2}(q^{\pm 2} - 1) \left\{ E^\pm(z)E^\pm(w) \left(1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \leq 0} \left(\frac{zq^{\pm 2}}{w} \right)^{-n} \right) + \right. \\
&\quad \left. - E^\pm(w)E^\pm(z) \left(1 + (1 + q^{\mp 2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{\mp 2}}{w} \right)^{-n} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Com os vínculos análogos aos vínculos clássicos (4.15), dados por

$$\begin{aligned}
\chi_1(z) &= \frac{\Psi(z) - \Phi(z)}{\sqrt{2}(q - q^{-1})} \approx 0, \\
\chi_2(z) &= E^+(z) - 1 \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

podemos escrever a matriz de Dirac como

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(z, w) &= \frac{i[2]}{2} z D_q(z) \delta \left(\frac{z}{w} \right), \\
\Delta_{12}(z, w) &= -\frac{i[2]}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{-\frac{3}{2}}}{w} \right)^{-n} + \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{-\frac{5}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
\Delta_{21}(z, w) &= \frac{i[2]}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{\frac{5}{2}}}{w} \right)^{-n} + \sum_{n < 0} \left(\frac{zq^{\frac{3}{2}}}{w} \right)^{-n} \right), \\
\Delta_{22}(z, w) &= -\frac{i[2]}{2} (q - q^{-1}) \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{zq^{-2}}{w} \right)^{-n} - \sum_{n \leq 0} \left(\frac{zq^2}{w} \right)^{-n} \right).
\end{aligned}$$

Novamente, valendo-se da relação de ortogonalidade (4.16), podemos calcular a matriz inversa

$$\Delta_q^{-1}(z, w) = \begin{pmatrix} a(z, w) & b(z, w) \\ c(z, w) & d(z, w) \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}
a(z, w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{w} \right)^{-n}, \\
b(z, w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left(\frac{z}{w} \right)^{-n},
\end{aligned}$$

$$c(z, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{z}{w} \right)^{-n},$$

$$d(z, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \left(\frac{z}{w} \right)^{-n},$$

Ao efetuarmos a relação

$$\oint \frac{du}{2\pi i u} \Delta_{ij}(z, u) \Delta_{jk}^{-1}(u, w) = \delta_{ik} \delta \left(\frac{z}{w} \right),$$

obtemos as equações para os modos a_n , b_n , c_n , e d_n , são elas:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ b_0 &= -\frac{i\sqrt{2}}{[2]}, \\ c_0 &= \frac{i\sqrt{2}}{[2]}, \\ d_0 &= 0, \end{aligned}$$

para os modos zero,

$$\begin{aligned} i \frac{[2]}{\sqrt{2}} a_n q^{-\frac{5n}{2}} - \frac{i}{2} [2] (q - q^{-1}) c_n q^{2n} &= 0 \\ i \frac{[2]}{2} \frac{a_n}{(q - q^{-1})} (q^{-n} - q^n) - i \frac{[2]}{\sqrt{2}} c_n q^{\frac{3n}{2}} &= 1 \\ i \frac{[2]}{\sqrt{2}} b_n q^{-\frac{5n}{2}} - \frac{i}{2} [2] (q - q^{-1}) d_n q^{2n} &= 1 \\ i \frac{[2]}{2} \frac{b_n}{(q - q^{-1})} (q^{-n} - q^n) - i \frac{[2]}{\sqrt{2}} d_n q^{\frac{3n}{2}} &= 0, \end{aligned}$$

para $n > 0$, e

$$\begin{aligned} i \frac{[2]}{\sqrt{2}} a_n q^{-\frac{3n}{2}} + \frac{i}{2} [2] (q - q^{-1}) c_n q^{-2n} &= 0 \\ i \frac{[2]}{2} \frac{a_n}{(q - q^{-1})} (q^{-n} - q^n) - i \frac{[2]}{\sqrt{2}} c_n q^{\frac{5n}{2}} &= 1 \\ i \frac{[2]}{\sqrt{2}} b_n q^{-\frac{3n}{2}} + \frac{i}{2} [2] (q - q^{-1}) d_n q^{-2n} &= 1 \\ i \frac{[2]}{2} \frac{b_n}{(q - q^{-1})} (q^{-n} - q^n) - i \frac{[2]}{\sqrt{2}} d_n q^{\frac{5n}{2}} &= 0, \end{aligned}$$

para $n < 0$. O resultado destas equações é dado por

$$a_n = \frac{2i}{[2]} (q - q^{-1}) \left(\frac{1}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right)$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{-i2\sqrt{2}q^{-\frac{n}{2}}}{[2]} \left(\frac{1}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \\
c_n &= \frac{i2\sqrt{2}q^{-\frac{9n}{2}}}{[2]} \left(\frac{1}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \\
d_n &= \frac{i2[n]q^{-2n}}{[2]} \left(\frac{1}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right),
\end{aligned}$$

para $n > 0$, e

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{-2i}{[2]}(q - q^{-1}) \left(\frac{1}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \\
b_n &= \frac{-i2\sqrt{2}q^{\frac{9n}{2}}}{[2]} \left(\frac{1}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \\
c_n &= \frac{i2\sqrt{2}q^{\frac{n}{2}}}{[2]} \left(\frac{1}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \\
d_n &= \frac{i2[n]q^{2n}}{[2]} \left(\frac{1}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right),
\end{aligned}$$

para $n < 0$. Temos, assim

$$\begin{aligned}
a(z, w) &= \frac{2i(q - q^{-1})}{[2]} \left\{ \sum_{n>0} \left(\frac{1}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n<0} \left(\frac{1}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \right\} \\
b(z, w) &= -\frac{i\sqrt{2}}{[2]} - \frac{i2\sqrt{2}}{[2]} \sum_{n>0} \left(\frac{q^{-\frac{n}{2}}}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \\
&\quad - \frac{i2\sqrt{2}}{[2]} \sum_{n<0} \left(\frac{q^{\frac{9n}{2}}}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \\
c(z, w) &= \frac{i\sqrt{2}}{[2]} + \frac{i2\sqrt{2}}{[2]} \sum_{n<0} \left(\frac{q^{\frac{n}{2}}}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \\
&\quad + \frac{i2\sqrt{2}}{[2]} \sum_{n>0} \left(\frac{q^{-\frac{9n}{2}}}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \\
d(z, w) &= -\frac{2i}{[2]} z D_q(z) \left\{ \sum_{n>0} \left(\frac{q^{-2n}}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n<0} \left(\frac{q^{2n}}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \right\}.
\end{aligned}$$

Podemos, portanto calcular os parênteses de Dirac relativos à corrente restante $E^-(z)$, que será

escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\{E^-(z), E^-(w)\}_D &= \frac{i}{2}[2](q - q^{-1})E^-(z)E^-(w) \left\{ \sum_{n<0} \left(\frac{zq^{-2}}{w} \right)^{-n} - \sum_{n>0} \left(\frac{zq^2}{w} \right)^{-n} \right\} + \\
&+ i[2](q - q^{-1})E^-(z)E^-(w) \left\{ \sum_{n<0} \left(\frac{q^{-n}}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \right. \\
&- \left. \sum_{n>0} \left(\frac{q^n}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \right\} + \\
&+ 2iE^-(z)zD_q(z) \left\{ \sum_{n<0} \left(\frac{q^{6n}}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \right. \\
&+ \left. \sum_{n>0} \left(\frac{q^{2n}}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \right\} + \\
&+ 2iE^-(w)zD_q(z) \left\{ \sum_{n<0} \left(\frac{q^{-2n}}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \right. \\
&+ \left. \sum_{n>0} \left(\frac{q^{-6n}}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \right\} + \\
&- \frac{2i}{[2]}(zD_q(z))^3 \left\{ \sum_{n<0} \left(\frac{q^{2n}}{2q^{3n} - q^n + q^{-n}} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} + \right. \\
&+ \left. \sum_{n>0} \left(\frac{q^{-2n}}{2q^{-3n} - q^{-n} + q^n} \right) \left(\frac{z}{w} \right)^{-n} \right\}. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Esta álgebra é um análogo q deformado da álgebra de Virasoro, no limite $q \rightarrow 1$, recobramos a expressão (4.17). Note que ao escrevermos a álgebra (4.29), utilizamos o pressuposto que a nível de parênteses de Poisson, portanto em um contexto clássico, os campos de uma teoria comutam. Se não fizermos uso deste princípio, os parênteses de Dirac obtidos não oferecerão uma anti-simetria com relação às variáveis z e w nos termos quadráticos.

Capítulo 5

Conclusões

Ao longo deste trabalho, apresentamos alguns resultados originais relativos à deformação quântica de teorias conformes:

- Em primeiro lugar, expusemos, na secção 4 do segundo capítulo, uma discussão sobre a caracterização do spin conforme de um campo em uma teoria q -deformada em duas dimensões. Em particular, a expressão do OPE entre o tensor Energia-Momento bosônico q -deformado e um campo composto por um produto de $n + 1$ campos de spin 1, do tipo (2.22), dado pela expressão (2.23), constitui-se em um cálculo original. Com este cálculo, pudemos propor uma caracterização para o spin em termos dos desvios no argumento dos campos por fatores multiplicativos que são potências do parâmetro de deformação q .
- No capítulo terceiro, estão expostos os resultados publicados na referência [7]. Propusemos uma versão q -deformada para a álgebra $N = 2$ superconforme em (3.29). Os geradores de supersimetria foram tomados a partir dos operadores de vértice associados à álgebra afim q -deformada $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$ e de um campo fermiônico livre. Devido à não localidade da estrutura de polos nos OPEs q -deformados, somos levados a definir uma família infinita de operadores equivalentes rotulados por um índice adicional, todos estes operadores, no limite clássico, recobram os geradores de supersimetria usuais.
- Também encontramos uma família de operadores caracterizados por dois índices, relacionados ao parâmetro de deformação, que são os análogos q -deformados para o tensor

Energia-Momento escrito na construção de Sugawara, estes operadores são dados pela expressão (3.28). Estes operadores foram obtidos considerando-se a parte regular do OPE entre os vértices da álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$. A parte regular dos OPEs em uma teoria q -deformada, onde os polos são deslocados simetricamente em potências de q , pode ser obtida pela expansão dos numeradores em séries de q -Taylor. Estes tensores Energia-Momento q -deformados não satisfazem a uma álgebra fechada, que seria uma álgebra de q -Virasoro, no entanto, suas componentes satisfazem a uma álgebra de OPE do tipo quadrático.

- Devido ao caráter não local das séries de q -Taylor, que faz com que a parte regular do OPE entre os vértices seja constituída de um número infinito de termos quando se é efetuado o limite de pontos iguais. Pudemos observar a existência de uma classe mais ampla de operadores multi-índices que também são análogos do tensor Energia-Momento na construção de Sugawara (3.30). Mais uma vez, estes operadores não satisfazem a uma álgebra fechada, somente suas componentes fecham uma álgebra do tipo quadrático, como visto na expressão (3.33).
- Ainda no capítulo 3, na secção 4, extendemos a construção do análogo q -deformado do tensor Energia-Momento na forma de Sugawara para as álgebras afins quânticas associadas a uma álgebra de Lie “simply-laced” $\mathfrak{g}$. Utilizamos a realização de operadores de vértice para a álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N+1))$ e a partir da parte regular de seus OPEs, obtemos a expressão (3.39).
- Finalmente, no capítulo 4, na secção 5, obtivemos uma nova álgebra de Virasoro q -deformada a partir da imposição de vínculos às correntes da álgebra afim quântica $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$, em um processo análogo ao da redução hamiltoniana do modelo WZNW. A partir das relações de OPE entre as correntes da álgebra, obtivemos os comutadores associados, e conseqüentemente, os parênteses de Poisson, utilizando o princípio da correspondência. Pelo método de Dirac, obtivemos a álgebra satisfeita pela corrente restante, esta álgebra é dada pela expressão (4.29).

Muitos problemas concernentes à deformação quântica de álgebras conformes ainda permanecem sem solução. Uma questão fundamental consiste em se encontrar uma estrutura de álgebra de Hopf adequada para as álgebras de q -Virasoro existentes. Uma classificação das possíveis deformações de álgebras conformes bem como uma teoria de representações são problemas que ainda necessitam de uma resposta conclusiva.

Em particular, as representações de álgebras de q -Virasoro expostas no capítulo 2, podem ter características muito interessantes. O fato de os geradores destas álgebras possuírem um índice adicional pode implicar na existência de graus de liberdade extras em teorias conformes, o que indica que a deformação revela simetrias ocultas que no limite clássico são degeneradas. O efeito Hall quântico é o melhor exemplo de sistema físico onde uma simetria de q -Virasoro pode ser observada, neste caso, o parâmetro de deformação está relacionado à intensidade do campo magnético externo. Dois problemas importantes com respeito à representação destas álgebras podem ser formulados:

1. A classificação das representações de acordo com a carga central e a análise das possíveis teorias físicas associadas. Os modelos minimais associados a estas álgebras poderiam trazer grandes avanços teóricos no estudo de modelos estatísticos em duas dimensões que possam apresentar anisotropias.
2. A teoria de representações destas álgebras quando o parâmetro de deformação é uma raiz da unidade. Neste caso, o número de estados é finito o que implica na limitação do número de campos primários com determinado peso conforme em uma teoria bidimensional.

Uma outra classe de problemas interessantes consiste em se encontrar teorias de campos em duas dimensões que obedeçam a simetrias conformes q -deformadas. Existem duas alternativas para se obter teorias de campos q -deformadas:

1. Pode-se deformar o espaço-tempo, obtendo-se então um espaço onde as coordenadas não são mais comutativas. Utiliza-se então o programa da geometria não-comutativa [22] [23] [24] para se construir ações de teorias de campos sobre estes espaços [67] [71].

2. Pode-se também considerar o espaço-tempo usual e procurar-se teorias altamente não lineares que satisfaçam a estas simetrias. Um exemplo deste tipo de perspectiva pode ser encontrado na referência [51], onde se encontra uma hamiltoniana para uma partícula “clássica” que obedeça a uma simetria quântica.

É de particular interesse o estudo da deformação da teoria de cordas, devido ao fato de a teoria de cordas ser um exemplo por excelência de teoria conforme bem como ter sido a teoria que originou vários desenvolvimentos posteriores em teorias conformes, como por exemplo os operadores de vértice. A teoria de cordas constitui-se um dos grandes marcos na física teórica nestas últimas décadas e provocou grandes desenvolvimentos tanto em física teórica com em matemática pura.

Apêndice A

Álgebras de Hopf e Deformações

A.1 Introdução

Neste trabalho, apresentamos diversos tipos de álgebras deformadas e discutimos o papel do parâmetro de deformação em teorias de campos. Em particular, foi mostrado ao longo deste trabalho que ao introduzirmos uma deformação em uma teoria, tornamos esta menos divergente. Entretanto, faltou-nos discutir o contexto mais amplo para se falar em deformações de álgebras, as álgebras de Hopf. Neste apêndice, discutiremos o conceito de álgebra de Hopf, com os exemplos mais relevantes para as discussões efetuadas neste trabalho. Também analisaremos o conceito de deformação de uma álgebra de Hopf, fundamental para a teoria dos grupos quânticos.

Este trabalho concentrou-se no estudo da deformação da álgebra de Virasoro. No entanto, até o presente momento encontrar-se uma estrutura de álgebra de Hopf adequada para as álgebras de Virasoro q -deformadas presentes na literatura continua um problema em aberto. O avanço mais significativo nesta direção foi efetuado a nível clássico (sem deformação). Pode-se encontrar uma estrutura de bi-álgebra de Lie para a álgebra de Witt, que é a álgebra dos geradores infinitesimais das transformações conformes em duas dimensões, bem como para a álgebra de Virasoro, que é a extensão central da álgebra de Witt, vide referência [68].

O propósito deste apêndice é o de apresentar os conceitos algébricos a nível de revisão sem explicitar detalhes de cálculos. Seguiremos basicamente as referências [18] e [69] para apresentarmos as álgebras de Hopf e seus exemplos bem como a teoria de deformações. Outras referências importantes e completas sobre o assunto são [20] [47] e [53]. Também neste

apêndice, discutimos alguns aspectos das álgebras afins quânticas, ou álgebras de Kac-Moody q-deformadas, que estão presentes em quase todas as seções desta tese.

A.2 Álgebras de Hopf

Uma álgebra associativa com unidade (A, m, η) sobre o corpo $\mathbf{C}$ constitui-se de um espaço vetorial A sobre $\mathbf{C}$ munido de uma aplicação linear

$$\begin{aligned} m : A \otimes A &\rightarrow A \\ (a \otimes b) &\mapsto ab \quad ; \quad \forall a, b \in A, \end{aligned} \tag{A.1}$$

denominada multiplicação, ou produto. Também, A é munido de uma unidade

$$\begin{aligned} \eta : \mathbf{C} &\rightarrow A \\ \alpha &\mapsto \alpha 1 \quad ; \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Estas duas operações satisfazem aos seguintes axiomas

$$\begin{aligned} m \circ (m \otimes id) &= m \circ (id \otimes m), \\ m \circ (id \otimes \eta) &= m \circ (\eta \otimes id). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Estes axiomas também podem ser representados graficamente:

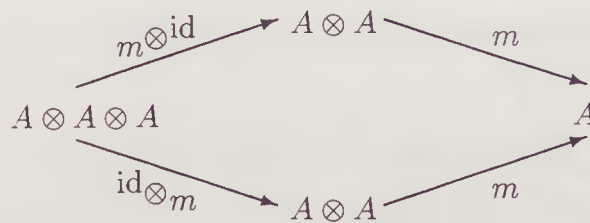


Figura A.1: Associatividade.

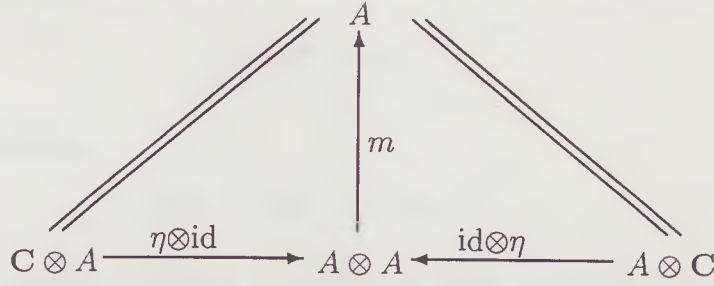


Figura A.2: Axioma da unidade.

Se a multiplicação m também satisfizer

$$m(a \otimes b) = m(b \otimes a) \quad ; \quad \forall a, b \in A, \quad (\text{A.4})$$

então a álgebra A é dita ser comutativa.

Como exemplo de álgebra comutativa temos a álgebra das funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbf{C}$, de um espaço topológico compacto X no corpo dos números complexos, $A = \mathcal{C}(X)$. A multiplicação de funções é dada ponto a ponto, ie

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad ; \quad \forall x \in X,$$

e a unidade é a função identicamente igual a 1.

Um outro exemplo mais elaborado de álgebra associativa com unidade, desta vez não-comutativa, é o da álgebra de matrizes $n \times n$ com elementos em $\mathbf{C}$, $A = M_n(\mathbf{C})$. A multiplicação é dada pelo produto ordinário de matrizes e a unidade é dada pela matriz identidade $n \times n$, $I = (\delta_{ij})_{i,j=1\dots n}$.

Seja uma álgebra (A, m, η) . Consideremos o espaço dual $A^* = \text{Hom}(A, \mathbf{C})$, ie, o conjunto dos funcionais lineares $\ell : A \rightarrow \mathbf{C}$. A multiplicação m em A induz uma estrutura adicional em A^* , denominada co-multiplicação, ou co-produto

$$\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*, \quad (\text{A.5})$$

que opera como

$$\Delta(\ell)(a \otimes b) = \ell(ab) \quad ; \quad \forall \ell \in A^*, \forall a, b \in A.$$

Também a unidade η em A induz uma estrutura em A^* denominada co-unidade

$$\epsilon : A^* \rightarrow \mathbf{C} , \quad (\text{A.6})$$

definida da seguinte maneira:

$$\epsilon(\ell) = \ell(1) \quad ; \quad \forall \ell \in A^* .$$

Em geral, um espaço vetorial complexo A munido de duas estruturas, uma co-multiplicação, ou co-produto, Δ e uma co-unidade ϵ , satisfazendo os axiomas

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes id) \circ \Delta \\ (id \otimes \epsilon) \circ \Delta &= (\epsilon \otimes id) \circ \Delta = id , \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

é uma co-álgebra. Uma co-álgebra é dita ser co-comutativa se o co-produto satisfizer

$$\Delta = \sigma \circ \Delta , \quad (\text{A.8})$$

onde o símbolo σ significa o morfismo de permutação do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} \sigma : A \otimes A &\rightarrow A \otimes A \\ (a \otimes b) &\mapsto (b \otimes a) . \end{aligned}$$

Os axiomas da co-associatividade e da co-unidade podem também ser representados graficamente como

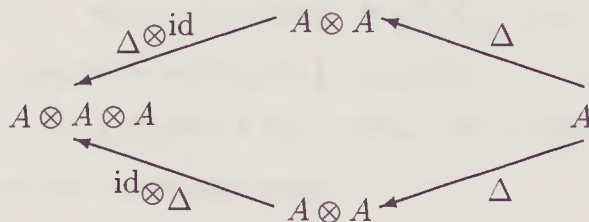


Figura A.3: Co-associatividade.

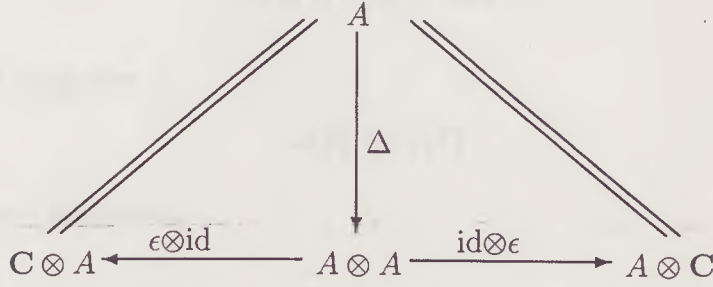


Figura A.3: Axioma da co-unidade.

Tendo estes conceitos em vista, podemos definir o que vem a ser uma bi-álgebra. Uma bi-álgebra $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon)$, é uma álgebra que também possui estrutura de co-álgebra e onde o co-produto e a co-unidade são morfismos de álgebras, ie

$$\Delta(ab) = \Delta(a) \cdot \Delta(b) \quad ; \quad \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b) . \quad (\text{A.9})$$

A noção de bi-álgebra é simétrica com respeito a dualização, ie, se $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon)$, então temos a bi-álgebra $(A^*, m^*, \eta^*, \Delta^*, \epsilon^*)$, com as operações definidas por

$$m^*(\ell_1 \otimes \ell_2)(a) = (\ell_1 \otimes \ell_2)(\Delta(a)) \quad ; \quad \forall \ell_1, \ell_2 \in A^*, \forall a \in A$$

$$\Delta^*(\ell)(a \otimes b) = \ell(ab) \quad ; \quad \forall \ell \in A^* \forall a, b \in A$$

$$\eta^* = \epsilon$$

$$\epsilon^*(\ell) = \ell(1) \quad ; \quad \forall \ell \in A^*$$

Como exemplos de bi-álgebras, podemos citar

1. A álgebra das funções a valores complexos de $M_n(\mathbb{C})$, denotada por $\mathcal{C}(M_n(\mathbb{C}))$. O produto de funções novamente é definido puntualmente e a unidade é a função identicamente igual a um. Esta álgebra é comutativa, pois o produto em $\mathbb{C}$ é claramente comutativo. O co-produto é definido como

$$\Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2) ,$$

onde aqui utilizamos o seguinte isomorfismo relativo a $A = \mathcal{C}(X)$:

$$A \otimes A \simeq \mathcal{C}(X \times X) .$$

A co-unidade é dada por

$$\epsilon(f) = f(I) ,$$

onde I é a matriz identidade.

2. A álgebra das funções polinomiais a valores complexos em $M_n(\mathbf{C})$, denotada por $\mathcal{C}_{POL}(M_n(\mathbf{C}))$.

Esta álgebra é gerada pelas funções lineares

$$t_{ij}(g) = g_{ij} \quad ; \quad g \in M_n(\mathbf{C}) \quad ; i, j = 1 \dots n ,$$

onde g_{ij} é o elemento i, j da matriz $g \in M_n(\mathbf{C})$. Portanto, esta álgebra é isomorfa à álgebra dos polinômios a n^2 variáveis

$$A = \mathbf{C}[t_{11}, \dots, t_{nn}] \simeq \mathbf{C}[t_{ij}] .$$

O co-produto é dado por

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj} , \tag{A.10}$$

e a co-unidade por

$$\epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij} . \tag{A.11}$$

3. A álgebra livre gerada por n^2 variáveis t_{ij} para $i, j = 1 \dots n$, não comutativas, $A = \mathcal{C} \langle t_{ij} \rangle$. Esta é a álgebra dos polinômios não-comutativos nas variáveis t_{ij} , ou em outras palavras, são as palavras compostas pelo alfabeto cujas letras são t_{ij} . O co-produto e a co-unidade desta álgebra são os mesmos dados no exemplo anterior por (A.10) e (A.11) respectivamente. Esta álgebra não é nem comutativa, nem co-comutativa.

Finalmente, para completar este quadro de definições, vamos definir o que vem a ser uma álgebra de Hopf. Uma bi-álgebra $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ é dita ser uma álgebra de Hopf se estiver munida de um anti-homomorfismo de álgebra $S : A \rightarrow A$ denominado antípoda, ie

$$S(ab) = S(b)S(a) , \tag{A.12}$$

satisfazendo o axioma

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon . \tag{A.13}$$

Este axioma pode ser representado graficamente como

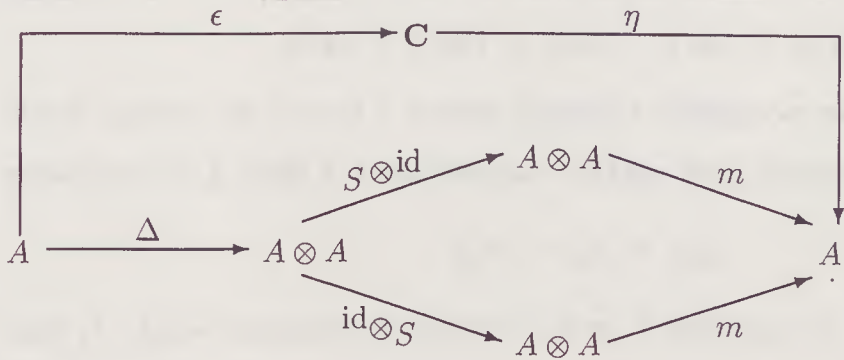


Figura A.4: Axioma da antipoda.

Os dois exemplos mais importantes de álgebras de Hopf para as aplicações desenvolvidas pelos físicos são

1. A álgebra das funções a valores complexos sobre um grupo de Lie G , $A = \mathcal{C}(G)$. Esta álgebra também é comutativa pois o produto é definido puntualmente. O co-produto é do mesmo tipo dado no exemplo 1 da lista anterior

$$\Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2) ,$$

e a co-unidade é dada por

$$\epsilon(f) = f(e) ,$$

onde e é o elemento unidade do grupo. Finalmente, a antípoda é definida da seguinte forma:

$$S(f)(g) = f(g^{-1}) .$$

2. A álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Esta álgebra é definida como sendo o quociente da álgebra tensorial sobre $\mathfrak{g}$,

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n} ,$$

pelo bi-módulo livre gerado pelos elementos do tipo

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] .$$

Assim,

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \rangle .$$

Outra maneira de vermos a mesma álgebra é definindo-a como sendo a álgebra livre gerada por $\{x_i\}$, onde x_i é um elemento da base de $\mathfrak{g}$, quocientada pela relação

$$x_i x_j - x_j x_i = c_{ij}^k x_k ,$$

onde c_{ij}^k são as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$. A estrutura de álgebra de Hopf em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é dada pelas relações

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad ; \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1 , \\ \epsilon(x) &= 0 \quad ; \quad \epsilon(1) = 1 , \\ S(x) &= -x \quad ; \quad x \in \mathfrak{g} . \end{aligned} \tag{A.14}$$

Observe que esta álgebra é co-comutativa, pela definição do co-produto, no entanto não é comutativa, por ser uma álgebra livre. Este exemplo será importante para o que vai ser discutido a seguir.

É importante também dizer que as álgebras dos exemplos 1) e 2) da lista acima são duais uma a outra no sentido de álgebras de Hopf.

A.3 Deformação Quântica de uma Bi-Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ munida de uma operação co-antissimétrica $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, tal que $\sigma \circ \psi = -\psi$, satisfazendo a condição de 1-cociclo

$$\psi([x, y]) = [\psi(x), y] + [x, \psi(y)] ,$$

com a definição

$$[x, y \otimes z] = [x, y] \otimes z + y \otimes [x, z] ,$$

é dita ser uma bi-álgebra de Lie. Uma deformação quântica de uma bi-álgebra de Lie $(A_{(0)}, m_{(0)}, \eta_{(0)}, \Delta)$ é uma álgebra não comutativa e não co-comutativa, $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon)$, sobre o anel $\mathbf{C}[[h]]$ das séries formais dependentes do parâmetro de quantização h . O espaço A é o módulo livre sobre $\mathbf{C}[[h]]$ gerado por $A_{(0)}$. O limite clássico é obtido fazendo-se $h = 0$, ou seja, tomando-se o quociente $A/hA \simeq A_{(0)}$. O novo produto m , que será denotado por $m(a \otimes b) = a \star b$, possui uma estrutura da forma

$$a \star b = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(a, b) h^i ,$$

onde $f_i : A \otimes A \rightarrow A$. Denotando-se o mapeamento quociente canônico por $\pi : A \rightarrow A_{(0)}$, podemos descrever um esquema completo de quantização $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ sobre $(A_{(0)}, m_{(0)}, \eta_{(0)}, \Delta_{(0)}, \epsilon_{(0)}, \psi)$, pelas regras

- $A/hA \simeq A_{(0)}$,
- $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta = \Delta_{(0)} \circ \pi$,
- $m_{(0)} \circ (\pi \otimes \pi) = \pi \circ m$,
- $\pi \circ \eta = \eta_{(0)}$,
- $\epsilon \circ \pi = \epsilon_{(0)}$,
- $\psi(\pi(a)) = \pi \left(\frac{1}{h} (\Delta(a) - \sigma \circ \Delta(a)) \right), \forall a \in A$.

Ainda é importante mencionar que o completamento topológico em A para que as somas infinitas façam sentido é realizado na topologia h -ádica.

Vamos considerar, a título de exemplo, a deformação da álgebra de Hopf $\mathcal{U}(sl(2))$, gerada pelos elementos da base de $sl(2)$

$$E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} [H, E^\pm] &= \pm 2E^\pm, \\ [E^+, E^-] &= H. \end{aligned}$$

Há duas sub-álgebras de Borel contidas em $\mathcal{U}(sl(2))$, a sub-álgebra de Borel positiva $\mathcal{U}^+(sl(2))$, gerada por E^+ e H , e a sub-álgebra de Borel negativa $\mathcal{U}^-(sl(2))$, gerada por E^- e H . Discutiremos o caso da deformação quântica de $\mathcal{U}^+(sl(2))$, sendo o outro caso análogo, após será feita a junção das duas álgebras deformadas, resultando na álgebra deformada $\mathcal{U}_q(sl(2))$, onde $q = e^h$. É fácil verificar que a aplicação

$$\psi(H) = 0 \quad ; \quad \psi(E^+) = 2(H \otimes E^+ - E^+ \otimes H),$$

torna $\mathcal{U}^+(sl(2))$ uma bi-álgebra de Lie. Para quantizar, devemos encontrar um co-produto Δ , co-associativo, que no limite $h \rightarrow 0$ seja o co-produto definido em (A.14) e que satisfaça

$$\psi(\pi(a)) = \pi \left(\frac{1}{h} (\Delta(a) - \sigma \circ \Delta(a)) \right). \quad (\text{A.15})$$

Em termos de potências de h , este novo co-produto Δ pode ser escrito como

$$\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} \Delta_{(i)}, \quad (\text{A.16})$$

onde $\Delta_{(i)} : A \rightarrow A \otimes A$. No limite clássico temos

$$\begin{aligned} \Delta_{(0)}(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, \\ \Delta_{(0)}(E^+) &= E^+ \otimes 1 + 1 \otimes E^+. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Utilizando a expressão (A.15) e a co-associatividade, podemos calcular termo a termo os coeficientes de (A.16). Para $\Delta_{(1)}$ temos

$$\begin{aligned} \psi(H) &= 0 = \Delta_{(1)}(H) - \sigma \circ \Delta_{(1)}(H), \\ \psi(E^+) &= 2(H \otimes E^+ - E^+ \otimes H) = \Delta_{(1)}(E^+) - \sigma \circ \Delta_{(1)}(E^+). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Que tem como soluções não triviais as expressões

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)}(H) &= 0, \\ \Delta_{(1)}(E^+) &= (H \otimes E^+ - E^+ \otimes H). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Utilizando-se a co-associatividade, obtemos a seguinte relação de recorrência

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (\Delta_{(k)} \otimes 1 - 1 \otimes \Delta_{(k)}) \Delta_{(i-k)} = 0, \quad (\text{A.20})$$

onde

$$\binom{i}{k} = \frac{i!}{k!(i-k)!}.$$

Dos resultados anteriores podemos obter os co-produtos parciais $\Delta_{(i)}$, da forma

$$\begin{aligned} \Delta_{(i)}(H) &= 0 \quad ; \quad i \geq 1, \\ \Delta_{(i)}(E^+) &= H^i \otimes E^+ + (-1)^i E^+ \otimes H^i. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Por fim, obtemos para o co-produto deformado a expressão

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, \\ \Delta(E^+) &= E^+ \otimes q^{-H} + q^H \otimes E^+, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

onde introduzimos o parâmetro de deformação $q = e^h$. Utilizando-se os axiomas de álgebras de Hopf, podemos calcular as outras operações em $\mathcal{U}_q^+(sl(2))$:

$$\begin{aligned} \epsilon(H) &= 0 \\ \epsilon(E^+) &= 0 \\ S(H) &= -H \\ S(E^+) &= -q^{-1}E^+. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} t &= q^H, \\ e &= q^H E^+, \end{aligned}$$

podemos reescrever a álgebra de Hopf $\mathcal{U}_q^+(su(2))$ como

$$tt^{-1} = 1 = t^{-1}t,$$

$$\begin{aligned}
tet^{-1} &= q^2 e, \\
\Delta(e) &= e \otimes 1 + t \otimes e, \\
\Delta(t) &= t \otimes t, \\
\epsilon(e) &= 0 \quad ; \quad \epsilon(t) = 1, \\
S(e) &= -t^{-1}e \quad ; \quad S(t) = t^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Da mesma forma, para $\mathcal{U}_q^-(su(2))$ temos

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= q^H, \\
f &= E^- q^{-H},
\end{aligned}$$

obedecendo as relações

$$\begin{aligned}
\bar{t}\bar{t}^{-1} &= 1 = \bar{t}^{-1}\bar{t}, \\
\bar{t}f\bar{t}^{-1} &= q^{-2}f, \\
\Delta(f) &= f \otimes \bar{t}^{-1} + 1 \otimes e, \\
\Delta(\bar{t}) &= \bar{t} \otimes \bar{t}, \\
\epsilon(e) &= 0 \quad ; \quad \epsilon(\bar{t}) = 1, \\
S(f) &= -f\bar{t} \quad ; \quad S(\bar{t}) = \bar{t}^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Para se unir as duas álgebras de Hopf q -deformadas construídas acima, utiliza-se o método do “quantum double”. Dadas duas álgebras de Hopf, $(A, m_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A, S_A)$ e $(B, m_B, \eta_B, \Delta_B, \epsilon_B, S_B)$ e uma forma bilinear não degenerada

$$\langle, \rangle : A \times B \rightarrow \mathbf{C},$$

satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned}
\langle a^i, b_j b_k \rangle &= \langle \Delta_A(a^i), b_j \otimes b_k \rangle, \\
\langle a^i a^j, b_k \rangle &= \langle a^j \otimes a^i, \Delta_B(b_k) \rangle, \\
\langle 1^A, b_i \rangle &= \epsilon_B(b_i) \quad ; \quad \langle a^i, 1_B \rangle = \epsilon_A(a^i), \\
\langle S_A(a^i), S_B(b_j) \rangle &= \langle a^i, b_j \rangle,
\end{aligned} \tag{A.26}$$

então existe uma álgebra de Hopf D que contém A e B como sub-álgebras e cujas operações, restritas a estas sub-álgebras, coincide com as operações destas e cuja base é formada pelo produto dos elementos das bases de A e B . Esta álgebra D é dita ser o “quantum double” de $(A, B, \langle, \rangle)$. No “quantum double” é válida a seguinte relação : Para $a^i \in A$ e $b_j \in B$, temos

$$b_j a^i = \sum \langle a^{i(1)}, S(b_{j(1)}) \rangle \langle a^{i(3)}, b_{j(3)} \rangle a^{i(2)} b_{j(2)} \in D, \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\sum a^{i(1)} \otimes a^{i(2)} \otimes a^{i(3)} \equiv \Delta_A^{(2)}(a^i),$$

$$\sum b_{j(1)} \otimes b_{j(2)} \otimes b_{j(3)} \equiv \Delta_B^{(2)}(b_j).$$

e

$$\Delta^{(n-1)} : A \rightarrow A^{\otimes n}$$

tal que $\Delta^{(1)} = \Delta$ e $\Delta^{(n)} = (\Delta \otimes id)\Delta^{(n-1)}$.

Para $q \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, com $q^2 \neq 1$, consideremos $A = \mathcal{U}_q^+(sl(2))$ e $B = \mathcal{U}_q^-(su(2))$. Utilizando as propriedades (A.26) sobre os elementos das bases de A e B , teremos

$$\begin{aligned} \langle te, \bar{t} \rangle &= \langle e \otimes t, \bar{t} \otimes \bar{t} \rangle \\ &= \langle e, \bar{t} \rangle \langle t, \bar{t} \rangle, \\ \langle te, \bar{t} \rangle &= q^2 \langle et, \bar{t} \rangle = q^2 \langle t \otimes e, \bar{t} \otimes \bar{t} \rangle \\ &= q^2 \langle e, \bar{t} \rangle \langle t, \bar{t} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Para demonstrar que $\langle t, \bar{t} \rangle \neq 0$, utilizamos a identidade

$$\begin{aligned} 1 &= \langle t, 1 \rangle = \langle t, \bar{t} \cdot \bar{t}^{-1} \rangle \\ &= \langle t, \bar{t} \rangle \langle t, \bar{t}^{-1} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

assim

$$\langle t, \bar{t} \rangle = \langle t, \bar{t}^{-1} \rangle^{-1} \neq 0.$$

como $q^2 \neq 1$, temos $\langle e, \bar{t} \rangle = 0$. De maneira análoga obtemos que $\langle t, f \rangle = 0$.

Comparando-se

$$\begin{aligned} \langle te, f \rangle &= \langle e \otimes t, \Delta(f) \rangle = \langle e, f \rangle \langle t, \bar{t}^{-1} \rangle + \langle e, 1 \rangle \langle t, f \rangle \\ &= \langle e, f \rangle \langle t, \bar{t}^{-1} \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle te, f \rangle &= q^2 \langle et, f \rangle = q^2 \langle t \otimes e, \Delta(f) \rangle = q^2 \langle t, f \rangle \langle e, \bar{t}^{-1} \rangle + q^2 \langle t, 1 \rangle \langle e, f \rangle \\ &= q^2 \langle e, f \rangle ,\end{aligned}$$

onde $\langle e, f \rangle \neq 0$, devido à forma ser não degenerada. Assim obtemos

$$\langle t, \bar{t} \rangle = q^{-2} = \langle t, \bar{t}^{-1} \rangle^{-1} .$$

Vamos escolher a normalização

$$\langle e, f \rangle = \frac{-1}{q - q^{-1}} .$$

Vamos utilizar a relação (A.27) para calcular ft , $\bar{t}e$, e fe . Conhecendo

$$\Delta^{(2)}(t) = t \otimes t \otimes t ,$$

$$\Delta^{(2)}(\bar{t}) = \bar{t} \otimes \bar{t} \otimes \bar{t} ,$$

e

$$\Delta^{(2)}(e) = e \otimes 1 \otimes 1 + t \otimes e \otimes 1 + t \otimes t \otimes e ,$$

$$\Delta^{(2)}(f) = f \otimes \bar{t}^{-1} \otimes \bar{t}^{-1} + 1 \otimes f \otimes \bar{t}^{-1} + 1 \otimes 1 \otimes f ,$$

podemos obter

$$\begin{aligned}ft &= \langle t, S(f) \rangle \langle t, \bar{t}^{-1} \rangle t \bar{t}^{-1} \\ &+ \langle t, S(1) \rangle \langle t, \bar{t}^{-1} \rangle tf + \langle t, S(1) \rangle \langle t, f \rangle t \cdot 1 \\ &= q^2 tf ,\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}\bar{t}e &= \langle e, S(\bar{t}) \rangle \langle 1, \bar{t} \rangle 1 \cdot t \\ &+ \langle t, S(\bar{t}) \rangle \langle 1, \bar{t} \rangle e \bar{t} + \langle t, S(\bar{t}) \rangle \langle e, \bar{t} \rangle t \bar{t} \\ &= q^2 e \bar{t} ,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}fe &= \langle e, S(f) \rangle \langle 1, \bar{t}^{-1} \rangle 1 \cdot \bar{t}^{-1} \\ &+ \langle t, S(1) \rangle \langle 1, \bar{t}^{-1} \rangle ef + \langle t, S(1) \rangle \langle e, f \rangle t \cdot 1 \\ &= -\langle e, f \rangle \bar{t}^{-1} + ef + \langle e, f \rangle t .\end{aligned} \tag{A.31}$$

Utilizando a normalização para $\langle e, f \rangle$, temos

$$[e, f] = \frac{t - \bar{t}^{-1}}{q - q^{-1}} .$$

Assim, fazendo $t = \bar{t}$, temos as relações completas para $\mathcal{U}_q(sl(2))$ dadas por [18]

$$\begin{aligned} tet^{-1} &= q^2 e , & tft^{-1} &= q^{-2} f , \\ [e, f] &= \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}} , \\ \Delta(e) &= e \otimes 1 + t \otimes e , \\ \Delta(f) &= f \otimes t^{-1} + 1 \otimes f , \\ \Delta(t) &= t \otimes t , \\ \epsilon(e) &= 0 = \epsilon(f) \quad ; \quad \epsilon(t) = 1 , \\ S(e) &= -t^{-1}e \quad ; \quad S(f) = -ft \quad ; \quad S(t) = t^{-1} . \end{aligned} \tag{A.32}$$

Ou, em termos da base E^+ , E^- , e H :

$$\begin{aligned} [H, E^\pm] &= \pm 2E^\pm , \\ [E^+, E^-] &= [H] , \\ \Delta(E^\pm) &= E^\pm \otimes q^{-H} + q^H \otimes E^\pm , \\ \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H , \\ \epsilon(E^\pm) &= 0 = \epsilon(H) , \\ S(E^\pm) &= -q^{\mp 1} E^\pm \quad ; \quad S(H) = -H . \end{aligned} \tag{A.33}$$

Para uma álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$, também é possível efetuar-se a quantização de sua álgebra universal envolvente, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. A álgebra resultante, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, tem como geradores t_i , e_i e f_i , com $i = 1 \dots \text{Rank}_{\mathfrak{g}}$, obedecendo [18] [20]

$$\begin{aligned} t_i t_j &= t_j t_i \quad ; \quad t_i t_i^{-1} = t_i^{-1} t_i = 1 , \\ t_i e_j t_i^{-1} &= q_i^{a_{ij}} e_j \quad ; \quad t_i f_j t_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}} f_j , \\ [e_i, f_j] &= \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (e_i)^{1-a_{ij}-m} e_j (e_i)^m = 0 \quad ; \quad (i \neq j) , \\
& \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (f_i)^{1-a_{ij}-m} f_j (f_i)^m = 0 \quad ; \quad (i \neq j) , \\
& \Delta(t_i) = t_i \otimes t_i , \\
& \Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i \quad ; \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i , \\
& \epsilon(e_i) = 0 = \epsilon(f_i) \quad ; \quad \epsilon(t_i) = 1 , \\
& S(e_i) = -t_i^{-1} e_i \quad ; \quad S(f_i) = -f_i t_i \quad ; \quad S(t_i) = t_i^{-1} , \tag{A.34}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q! [m-n]_q!} ,$$

e a_{ij} é a matriz de Cartan da álgebra. Aqui utilizamos a notação $q_i = q^{d_i}$ onde os números d_i são de tal forma que $d_i a_{ij}$ seja uma matriz simétrica. As relações (A.34) ainda podem ser escritas em termos da base $H_i, E_i^\pm$, como

$$\begin{aligned}
& [H_i, H_j] = 0 , \\
& [H_i, E_j^\pm] = \pm a_{ij} E_i^\pm , \\
& [E_i^+, E_j^-] = \delta_{ij} [H_i]_{q_i} , \\
& [E_i^\pm, E_j^\pm] = 0 \quad ; \quad \text{if } a_{ij} = 0 , \\
& \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (E_i^\pm)^{1-a_{ij}-m} E_j^\pm (E_i^\pm)^m = 0 \quad ; \quad (i \neq j) , \\
& \Delta(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i , \\
& \Delta(E_i^\pm) = E_i^\pm \otimes q_i^{H_i} + q_i^{-H_i} \otimes E_i^\pm , \\
& \epsilon(H_i) = 0 = \epsilon(E_i^\pm) , \\
& S(H_i) = -H_i \quad ; \quad S(E_i^\pm) = -q^{-\rho} E_i^\pm q^\rho , \tag{A.35}
\end{aligned}$$

onde $\rho = \sum_i H_i$. É importante notar que em uma álgebra deformada nem todos os geradores obedecerão relações de comutação, devido às relações polinomiais descritas acima, denominadas

relações de Serre q -deformadas, alguns geradores de raízes não simples podem obedecer a relações de q -comutação.

A.4 Álgebras Afins q -Deformadas

A importância das álgebras de Kac-Moody pode ser constatada nas mais diversas áreas da Física moderna. Entre algumas aplicações podemos citar as teorias conformes, onde desempenham um papel fundamental na descrição das simetrias dos sistemas em duas dimensões, os sistemas integráveis, como hierarquias de Toda, a teoria de cordas, modelos estatísticos, entre outros.

A motivação para se quantizar uma álgebra de Kac-Moody surgiu com a tentativa de se resolver exatamente modelos de spin, como o modelo XXZ, através de operadores de vértice. Atualmente, existe um grande número de resultados concernentes a álgebras afins q -deformadas, Tornando possível o estudo de simetrias ainda mais amplas nos sistemas físicos.

Seja uma álgebra de Lie afim, ou de Kac-Moody, $\widehat{\mathfrak{g}}$, definida em termos dos geradores h_i , e_i , f_i e d , para $i = 0 \dots \text{Rank}_{\mathfrak{g}}$, associada à matriz de Cartan a_{ij} satisfazendo às relações de comutação

$$\begin{aligned}
 [h_i, h_j] &= 0 \\
 [h_i, e_j] &= a_{ij}e_j \\
 [h_i, f_j] &= -a_{ij}f_j \\
 [e_i, f_j] &= \delta_{ij}h_i \\
 [d, h_i] &= 0 \\
 [d, e_i] &= \delta_{i0}e_i \\
 [d, f_i] &= -\delta_{i0}f_i \\
 ad(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) &= 0 \\
 ad(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

(As últimas duas fórmulas são denominadas relações de Serre). É possível deformar a álgebra universal envolvente de $\widehat{\mathfrak{g}}$, obtendo-se assim a álgebra $\mathcal{U}_q\widehat{\mathfrak{g}}$, que descritas em termos dos geradores

$e_i, f_i, k_i^{\pm 1}$ e $D^{\pm 1}$, para $i = 0 \dots \text{Rank}_{\mathbf{g}}$, possui relações semelhantes às descritas em (A.34) para uma álgebra universal envolvente quantizada de uma álgebra de Lie $\mathbf{g}$, são elas

$$\begin{aligned}
k_i k_j &= k_j k_i \quad ; \quad k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1 \, , \\
k_i e_j k_i^{-1} &= q_i^{a_{ij}} e_j \quad ; \quad k_i f_j k_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}} f_j \, , \\
[e_i, f_j] &= \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \, , \\
D e_i D^{-1} &= q^{\delta_{i0}} e_i \, , \\
D f_i D^{-1} &= q^{-\delta_{i0}} f_i \, , \\
D k_i &= k_i D \, , \\
\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (e_i)^{1-a_{ij}-m} e_j (e_i)^m &= 0 \quad ; \quad (i \neq j) \, , \\
\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (f_i)^{1-a_{ij}-m} f_j (f_i)^m &= 0 \quad ; \quad (i \neq j) \, , \\
\Delta(k_i) &= k_i \otimes k_i \, , \\
\Delta(e_i) &= e_i \otimes 1 + k_i \otimes e_i \quad ; \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes k_i^{-1} + 1 \otimes f_i \, , \\
\Delta(D) &= D \otimes D \, , \\
\epsilon(e_i) &= 0 = \epsilon(f_i) \quad ; \quad \epsilon(k_i) = 1 \quad ; \quad \epsilon(D) = 1 \, , \\
S(e_i) &= -k_i^{-1} e_i \quad ; \quad S(f_i) = -f_i k_i \quad ; \quad S(k_i) = k_i^{-1} \quad ; \quad S(D) = D^{-1} \, , \quad (\text{A.37})
\end{aligned}$$

Podemos também escrever as relações para uma álgebra afim q-deformada na base proposta por Drinfel'd [20][29] [58], $E_n^{\pm i}$, H_m^i , $K_i^{\pm 1}$, $\gamma^{\pm 1}$ e $D^{\pm 1}$, para $i = 1 \dots \text{Rank}_{\mathbf{g}}$, $n \in \mathbf{Z}$ e $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Esta base fornece um análogo q-deformado para a álgebra de “loops” centralmente estendida. Um exemplo deste tipo de base no caso da álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ foi mostrado no capítulo terceiro desta tese. As relações gerais para os elementos da base de Drinfel'd são dadas por

$$\begin{aligned}
\gamma \gamma^{-1} &= 1 = \gamma^{-1} \gamma \quad ; \quad D D^{-1} = 1 = D^{-1} D \, , \\
[\gamma^{\pm 1}, x] &= 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{U}_q(\widehat{\mathbf{g}}) \, , \\
K_i K_j &= K_j K_i \quad ; \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \, , \\
K_i H_n^j &= H_n^j K_i \quad ; \quad D K_i = K_i D \, ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_i E_n^{\pm j} K_i^{-1} &= q_i^{\pm a_{ij}} E_n^{\pm j}, \\
D E_n^{\pm i} D^{-1} &= q^n E_n^{\pm i}, \\
D H_n^i D^{-1} &= q^n H_n^i, \\
[H_n^i, H_m^j] &= \frac{[a_{ij}n]_{q_i}}{n} \left(\frac{\gamma^n - \gamma^{-n}}{q_j - q_j^{-1}} \right) \delta_{m+n,0}, \quad n, m \neq 0, \\
[H_n^i, E_m^{\pm j}] &= \pm \frac{\gamma^{\mp \frac{|n|}{2}} [a_{ij}n]_{q_i}}{n} E_{m+n}^{\pm j}, \quad n \neq 0, \\
[E_n^{\pm i}, E_m^{\pm j}] &= \delta^{ij} \frac{\gamma^{\frac{n-m}{2}} \Psi_{n+m}^i - \gamma^{\frac{m-n}{2}} \Phi_{n+m}^i}{q_i - q_i^{-1}}, \\
E_{n+1}^{\pm i} E_m^{\pm j} - q_i^{\pm a_{ij}} E_m^{\pm j} E_{n+1}^{\pm i} &= q_i^{\pm a_{ij}} E_n^{\pm i} E_{m+1}^{\pm j} - E_{m+1}^{\pm j} E_n^{\pm i}, \\
\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} \sum_{\sigma \in S_{(1-a_{ij})}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} & E_{n_{\sigma(1)}}^{\pm i} \cdots E_{n_{\sigma(m)}}^{\pm i} E_p^{\pm j} E_{n_{\sigma(m+1)}}^{\pm i} \cdots E_{n_{\sigma(1-a_{ij})}}^{\pm i} = 0 \quad ; \quad (i \neq j),
\end{aligned} \tag{A.38}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \Psi_n^i z^{-n} &= K_i \exp \left\{ (q_i - q_i^{-1}) \sum_{n > 0} H_n^i z^{-n} \right\}, \\
\sum_{n \leq 0} \Phi_n^i z^{-n} &= K_i^{-1} \exp \left\{ -(q_i - q_i^{-1}) \sum_{n < 0} H_n^i z^{-n} \right\}.
\end{aligned}$$

As duas últimas relações também são denominadas relações de Serre q -deformadas. No limite $q \rightarrow 1$, as relações (A.38) se tornam as relações de comutação para uma álgebra de Kac-Moody na base de Chevalley.

Os tópicos expostos neste apêndice têm a função de contextualizar as discussões efetuadas nesta tese sob o ponto de vista de álgebras de Hopf. Não se pretendeu aqui discutir pormenorizadamente cada um dos conceitos definidos. Também pode haver diferenças de notação entre o aqui exposto e o restante do trabalho, isto devido à diversidade de fontes bibliográficas consultadas. No entanto, no decorrer dos capítulos desta tese, onde desenvolvemos nossos resultados, tivemos o cuidado de manter a notação coerente.

Apêndice B

Comutadores e OPE 's, Alguns Detalhes de Cálculos

Neste Apêndice faremos detalhadamente os cálculos de resultados apresentados nos capítulos 1 e 2. Apresentaremos, sempre que possível uma comparação entre os casos clássico e q -deformado.

B.1 Campos Primários

Como foi visto, a transformação conforme infinitesimal de um campo primário $\phi(w)$ pode ser escrita em termos do OPE entre o tensor Energia-Momento e o Campo.

$$\delta_\epsilon \phi(z) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) R(T(z)\phi(w)) .$$

Utilizando-se

$$T(z)\phi(w) = \frac{\Delta\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\phi(w)}{(z-w)} ,$$

temos

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi(z) &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) \left(\frac{\Delta\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\phi(w)}{(z-w)} \right) \\ &= \Delta\partial_w\epsilon(w)\phi(w) + \epsilon(w)\partial_w\phi(w) . \end{aligned}$$

Podemos ainda ver de outra maneira, fazendo $\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^{n+1}$

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n \delta_n \phi(w) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \left(\frac{\Delta\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\phi(w)}{(z-w)} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n ((n+1)\Delta w^n \phi(w) + w^{n+1} \partial_w \phi(w)) . \end{aligned}$$

Assim

$$\delta_n \phi(w) = (n + 1)\Delta w^n \phi(w) + w^{n+1} \partial_w \phi(w) .$$

Podemos ainda escrever $\delta_n \phi(w)$ como

$$\delta_n \phi(w) = ((n + 1)\Delta + w \partial_w - n) w^n \phi(w) .$$

A partir desta expressão, podemos definir um q -análogo da seguinte forma

$$\delta_n^q \phi(w) = [(n + 1)\Delta + w \partial_w - n] w^n \phi(w) .$$

onde

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} .$$

Este análogo q -deformado também pode ser obtido a partir de um OPE como

$$T(z) \phi(w) = \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\phi(wq)}{(z - wq^\Delta)} - \frac{\phi(wq^{-1})}{(z - wq^{-\Delta})} \right) .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta_n^q \phi(w) &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{n+1}}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\phi(wq)}{z - wq^\Delta} - \frac{\phi(wq^{-1})}{z - wq^{-\Delta}} \right) = \\ &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left((wq^\Delta)^{n+1} \phi(wq) - (wq^{-\Delta})^{n+1} \phi(wq^{-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(q^{\Delta(n+1)} w^n \phi(wq) - q^{-\Delta(n+1)} w^n \phi(wq^{-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(q^{\Delta(n+1)} q^{-n} q^{w\partial_w} (w^n \phi(w)) - q^{-\Delta(n+1)} q^n q^{-w\partial_w} (w^n \phi(w)) \right) = \\ &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(q^{\Delta(n+1)-n+w\partial_w} - q^{-\Delta(n+1)+n-w\partial_w} \right) w^n \phi(w) = \\ &= [(n + 1)\Delta + w \partial_w - n] w^n \phi(w) . \end{aligned}$$

Ou também podemos colocar em termos de $\epsilon(z)$

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^q \phi(w) &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\epsilon(z)}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{\phi(wq)}{z - wq^\Delta} - \frac{\phi(wq^{-1})}{z - wq^{-\Delta}} \right) = \\ &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\epsilon(wq^\Delta) \phi(wq) - \epsilon(wq^{-\Delta}) \phi(wq^{-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\epsilon(wq^\Delta) \phi(wq) - \epsilon(wq^\Delta) \phi(wq^{-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon(wq^\Delta) \phi(wq^{-1}) - \epsilon(wq^{-\Delta}) \phi(wq^{-1}) \right) = \\ &= \epsilon(wq^\Delta) D_{q^\Delta(w)} \phi(w) + [\Delta] (D_{q^\Delta(w)} \epsilon(w)) \phi(w) , \end{aligned}$$

onde a q -derivada $D_{q(w)}$ é definida como

$$D_{q(w)}f(w) = \frac{(f(wq) - f(wq^{-1}))}{w(q - q^{-1})}. \quad (\text{B.1})$$

B.2 Teorias Conformes, Realização Bosônica

Primeiramente vamos efetuar os OPE 's relativos ao campo de Fubini Veneziano e suas derivadas. O campo de Fubini Veneziano se escreve como

$$X(z) = Q - iP \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n},$$

onde

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{m+n,0} \quad ; \quad [Q, P] = i. \quad (\text{B.2})$$

Assim temos

$$\begin{aligned} X(z)X(w) &= (Q - iP \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n})(Q - iP \ln w + i \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m}{m} w^{-m}) = \\ &= :X(z)X(w): - i \ln z [P, Q] - \sum_{n>0, m<0} \frac{[\alpha_n, \alpha_m]}{mn} z^{-n} w^{-m} = \\ &= :X(z)X(w): - \ln z - \sum_{n>0, m<0} \frac{n\delta_{m+n}}{mn} z^{-n} w^{-m} = \\ &= :X(z)X(w): - \ln z + \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \\ &= :X(z)X(w): - \ln z - \ln \left(1 - \left(\frac{w}{z}\right)\right) = \\ &= :X(z)X(w): - \ln(z - w). \end{aligned}$$

Outros OPE 's importantes são

$$\begin{aligned} \partial_z X(z)X(w) &= \partial_z(-\ln(z - w)) = -\frac{1}{(z - w)} \\ \partial_z X(z) : X^n(w) : &= -\frac{n}{(z - w)} : X^{n-1}(w) : \\ \partial_z X(z)\partial_w X(w) &= \partial_z \partial_w(-\ln(z - w)) = -\frac{1}{(z - w)^2}. \end{aligned}$$

Com estes OPE 's fundamentais, podemos reproduzir os resultados da secção 5 do capítulo primeiro. Por exemplo, para

$$H(z) = i\partial_z X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n-1}$$

podemos ter

$$H(z)H(w) = -\partial_z X(z)\partial_w X(w) = \frac{1}{(z-w)^2}$$

ou, de outra maneira

$$\begin{aligned} H(z)H(w) &= :H(z)H(w): + \sum_{n>0, m<0} [\alpha_n, \alpha_m] z^{-n-1} w^{-m-1} = \\ &= \frac{1}{zw} \sum_{n>0} n \left(\frac{w}{z}\right)^n + :H(z)H(w): \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} nx^n &= x\partial_x \sum_{n>0} x^n = x\partial_x \left(\frac{x}{1-x}\right) \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

temos finalmente

$$\begin{aligned} H(z)H(w) &= :H(z)H(w): + \frac{1}{zw} \frac{\left(\frac{w}{z}\right)}{\left(1 - \left(\frac{w}{z}\right)\right)^2} \\ &= :H(z)H(w): + \frac{1}{(z-w)^2} . \end{aligned}$$

Com o tensor Energia-Momento dado por

$$T(z) = -\frac{1}{2} : (\partial_z X(z))^2 : = \frac{1}{2} : H^2(z) : ,$$

teremos

$$\begin{aligned} T(z)X(w) &= -\frac{1}{2} : (\partial_z X(z))^2 : X(w) = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_z X(z) \left(-\frac{2}{(z-w)}\right) = \\ &= \frac{\partial_z X(z)}{(z-w)} = \frac{\partial_w X(w)}{(z-w)} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(z)H(w) &= \frac{1}{2} : H^2(z) : H(w) = \frac{H(z)}{(z-w)^2} = \\ &= \frac{H(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w H(w)}{(z-w)} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(z) : e^{i\alpha X(w)} : &= T(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha)^n : X^n(w) : = \\
&= -\frac{1}{2} : (\partial_z X(z))^2 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha)^n : X^n(w) : = \\
&= \frac{1}{(z-w)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha)^n n : \partial_z X(z) X^{n-1}(w) : + \\
&- \frac{1}{2(z-w)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha)^n (n-1) : X^{n-2}(w) : + \text{reg.} = \\
&= \frac{i\alpha}{(z-w)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (i\alpha)^{n-1} : \partial_w X(w) X^{n-1}(w) : + \\
&+ \frac{\frac{\alpha^2}{2}}{(z-w)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (i\alpha)^{n-2} : X^{n-2}(w) : + \text{reg} = \\
&= \frac{: \partial_w e^{i\alpha X(w)} :}{(z-w)} + \frac{\alpha^2 : e^{i\alpha X(w)} :}{2(z-w)^2} + \text{reg}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \frac{1}{4} : H^2(z) :: H^2(w) : = \\
&= \text{reg} + \frac{1}{4} \left(4 \frac{: H(z)H(w) :}{(z-w)^2} + \frac{2}{(z-w)^4} \right) = \\
&= \text{reg} + \frac{: H^2(w) :}{(z-w)^2} + \frac{: H'(w)H(w) :}{(z-w)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} = \\
&= \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{T'(w)}{(z-w)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \text{reg} .
\end{aligned}$$

No caso q -deformado, conforme visto no capítulo 2, temos a corrente

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n-1}$$

com

$$[\alpha_n, \alpha_m] = [n] \delta_{m+n,0} .$$

O OPE , neste caso, resulta em

$$\begin{aligned}
H(z)H(w) &= : H(z)H(w) : + \sum_{n>0, n<0} [n] \delta_{m+n,0} z^{-n-1} w^{-m-1} = \\
&= : H(z)H(w) : + \frac{1}{zw} \sum_{n>0} [n] \left(\frac{w}{z} \right)^n = \\
&= : H(z)H(w) : + \frac{1}{zw(q-q^{-1})} \sum_{n>0} \left(\left(\frac{wq}{z} \right)^n - \left(\frac{wq^{-1}}{z} \right)^n \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= : H(z)H(w) : + \frac{1}{zw(q - q^{-1})} \left(\frac{\left(\frac{wq}{z}\right)}{1 - \left(\frac{wq}{z}\right)} - \frac{\left(\frac{wq^{-1}}{z}\right)}{1 - \left(\frac{wq^{-1}}{z}\right)} \right) = \\
&= : H(z)H(w) : + \frac{1}{w(q - q^{-1})} \left(\frac{1}{(z - wq)} - \frac{1}{(z - wq^{-1})} \right) = \\
&= : H(z)H(w) : + \frac{1}{(z - w)_q^2},
\end{aligned}$$

onde o binomial q -deformado $(z - w)_q^n$ foi definido como

$$(z - w)_q^n = \prod_{k=1}^n (z - wq^{n-2k+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} z^k (-w)^{n-k}, \quad (\text{B.3})$$

com $[n]! = [n][n-1]!$. Assim, a álgebra de Virasoro bosônica q -deformada escrita em termos dos operadores $T^\alpha(z)$, definidos como

$$T^\alpha(z) = \frac{1}{2} : H(zq^{\frac{\alpha}{2}})H(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) :,$$

se escreve da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
T^\alpha(z)T^\beta(w) &= \left(\frac{1}{2} : H(zq^{\frac{\alpha}{2}})H(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) : \right) \left(\frac{1}{2} : H(wq^{\frac{\beta}{2}})H(wq^{-\frac{\beta}{2}}) : \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left\{ : H(zq^{\frac{\alpha}{2}})H(zq^{-\frac{\alpha}{2}})H(wq^{\frac{\beta}{2}})H(wq^{-\frac{\beta}{2}}) : + \right. \\
&+ \frac{: H(zq^{\frac{\alpha}{2}})H(wq^{-\frac{\beta}{2}}) :}{wq^{\frac{\beta}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{1}{(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}+1})} - \frac{1}{(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}-1})} \right) + \\
&+ \frac{: H(zq^{\frac{\alpha}{2}})H(wq^{\frac{\beta}{2}}) :}{wq^{-\frac{\beta}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{1}{(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}+1})} - \frac{1}{(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}-1})} \right) + \\
&+ \frac{: H(zq^{-\frac{\alpha}{2}})H(wq^{-\frac{\beta}{2}}) :}{wq^{\frac{\beta}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{1}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}+1})} - \frac{1}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}-1})} \right) + \\
&+ \frac{: H(zq^{-\frac{\alpha}{2}})H(wq^{\frac{\beta}{2}}) :}{wq^{-\frac{\beta}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{1}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}+1})} - \frac{1}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}-1})} \right) + \\
&+ \frac{1}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}})_q^2 (zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}})_q^2} + \\
&\left. + \frac{1}{(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - wq^{\frac{\beta}{2}})_q^2 (zq^{\frac{\alpha}{2}} - wq^{-\frac{\beta}{2}})_q^2} \right\},
\end{aligned}$$

o que resulta em

$$T^\alpha(z)T^\beta(w) = \frac{1}{wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}}(q - q^{-1})} \left(\frac{T^{\beta-\alpha+1}(wq^{\frac{-\alpha+1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{\beta-\alpha-1}(wq^{\frac{-\alpha-1}{2}})}{z - wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}}(q-q^{-1})} \left(\frac{T^{-\beta-\alpha+1}(wq^{\frac{-\alpha+1}{2}})}{z-wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{-\beta-\alpha-1}(wq^{\frac{-\alpha-1}{2}})}{z-wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}-1}} \right) + \\
& + \frac{1}{wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(q-q^{-1})} \left(\frac{T^{\beta+\alpha+1}(wq^{\frac{\alpha+1}{2}})}{z-wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{\beta+\alpha-1}(wq^{\frac{\alpha-1}{2}})}{z-wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}-1}} \right) + \\
& + \frac{1}{wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}}(q-q^{-1})} \left(\frac{T^{-\beta+\alpha+1}(wq^{\frac{\alpha+1}{2}})}{z-wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}+1}} - \frac{T^{-\beta+\alpha-1}(wq^{\frac{\alpha-1}{2}})}{z-wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}-1}} \right) + \\
& + \frac{1}{4(z-wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}+1})(z-wq^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1})(z-wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}+1})(z-wq^{\frac{-\beta+\alpha}{2}-1})} + \\
& + \frac{1}{4(z-wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}+1})(z-wq^{\frac{-\beta-\alpha}{2}-1})(z-wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}+1})(z-wq^{\frac{\beta+\alpha}{2}-1})} + \text{reg.} .
\end{aligned}$$

B.3 Teorias Conformes, Realização Fermiônica

Seja o campo fermiônico¹

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_n z^{-n-\frac{1}{2}},$$

onde $\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{m+n}$. Podemos calcular o *OPE* entre $\psi(z)$ e $\psi(w)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\psi(z)\psi(w) &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_n \psi_m z^{-n-\frac{1}{2}} w^{-m-\frac{1}{2}} = \\
&= \text{reg} + \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{m=-\frac{1}{2}}^{-\infty} \psi_n \psi_m z^{-n-\frac{1}{2}} w^{-m-\frac{1}{2}} = \\
&= \text{reg} + \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{m=-\frac{1}{2}}^{-\infty} (-\psi_n \psi_m + \delta_{m+n,0}) z^{-n-\frac{1}{2}} w^{-m-\frac{1}{2}} = \\
&= \text{reg} + \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^n z^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \text{reg} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{w}{z} \right)^n = \text{reg} + \frac{1}{z(1 - \frac{w}{z})} = \\
&= \text{reg} + \frac{1}{(z-w)}.
\end{aligned}$$

Como foi visto na secção 6 do capítulo 1, o tensor Energia- Momento canônico para uma teoria de férmions livres em 2 dimensões é

$$L(z) = \frac{1}{2} : \partial_z \psi(z) \psi(z) : .$$

¹Trataremos aqui somente do setor de Ramond

Podemos ver facilmente que o campo $\psi(w)$ é um campo primário de peso conforme igual a $\frac{1}{2}$ em relação a este tensor Energia-Momento:

$$\begin{aligned}
 L(z)\psi(w) &= \frac{1}{2} : \partial_z \psi(z) \psi(z) : \psi(w) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial_z \psi(z)}{z-w} - \frac{1}{2} \psi(z) \partial_z \left(\frac{1}{z-w} \right) + \text{reg} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial_w \psi(w)}{z-w} + \frac{1}{2} \psi(z) \frac{1}{(z-w)^2} + \text{reg} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \psi(w)}{(z-w)} + \text{reg}
 \end{aligned}$$

A álgebra satisfeita pelo tensor Energia-Momento $L(z)$ é da forma

$$\begin{aligned}
 L(z)L(w) &= \frac{1}{4} : \partial_z \psi(z) \psi(z) :: \partial_w \psi(w) \psi(w) : = \\
 &= \text{reg} + \frac{1}{4} \left(\frac{: \partial_z \psi(z) \psi(w) :}{(z-w)^2} - \frac{: \psi(z) \partial_w \psi(w) :}{(z-w)^2} + \right. \\
 &\quad - \frac{: \partial_z \psi(z) \partial_w \psi(w) :}{(z-w)} + \frac{2 : \psi(z) \psi(w) :}{(z-w)^3} + \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^4} \right) = \\
 &= \text{reg} + \frac{1}{4} \left(\frac{4 : \partial_w \psi(w) \psi(w) :}{(z-w)^2} + \frac{2 : \partial_w^2 \psi(w) \psi(w) :}{(z-w)} + \frac{1}{(z-w)^4} \right) = \\
 &= \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w L(w)}{(z-w)} + \frac{\frac{1}{4}}{(z-w)^4} + \text{reg}
 \end{aligned}$$

No caso q -deformado, o tensor Energia-Momento se escreve como

$$L^\alpha(z) = \frac{1}{[\alpha](q - q^{-1})z} : \psi(zq^{\frac{\alpha}{2}}) \psi(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) :$$

Assim, a relação de Campo Primário se escreve como

$$\begin{aligned}
 L^\alpha(z)\psi(w) &= \frac{1}{[\alpha](q - q^{-1})z} : \psi(zq^{\frac{\alpha}{2}}) \psi(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) : \psi(w) = \\
 &= \frac{1}{[\alpha](q - q^{-1})z} \left(\frac{\psi(zq^{\frac{\alpha}{2}})}{(zq^{-\frac{\alpha}{2}} - w)} - \frac{\psi(zq^{-\frac{\alpha}{2}})}{(zq^{\frac{\alpha}{2}} - w)} \right) = \\
 &= \frac{1}{w(q^\alpha - q^{-\alpha})} \left(\frac{\psi(wq^\alpha)}{(z - wq^{\frac{\alpha}{2}})} - \frac{\psi(wq^{-\alpha})}{(z - wq^{-\frac{\alpha}{2}})} \right),
 \end{aligned}$$

e a álgebra de Virasoro fermiônica q -deformada se escreve como

$$L^\alpha(z)L^\beta(w) = \frac{1}{[\alpha][\beta](q - q^{-1})^2 wz} : \psi(zq^{\frac{\alpha}{2}}) \psi(zq^{-\frac{\alpha}{2}}) :: \psi(zq^{\frac{\beta}{2}}) \psi(zq^{-\frac{\beta}{2}}) : =$$

Iniciando o cálculo pelos modos zero, temos

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{2}P \ln z} e^{-i\sqrt{2}Q} &= e^{-i\sqrt{2}Q} e^{\sqrt{2}P \ln z} e^{-2i \ln z [P, Q]} = \\ &= z^{-2} e^{-i\sqrt{2}Q} e^{\sqrt{2}P \ln z} . \end{aligned}$$

O ordenamento dos modos α_n , por sua vez, resulta em

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{m} w^{-m}} &= \\ &= e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{m} w^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} \exp \left\{ -2 \sum_{n>0, m<0} \frac{n \delta_{m+n,0}}{mn} z^{-n} w^{-m} \right\} = \\ &= e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{m} w^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} \exp \left\{ 2 \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\frac{w}{z} \right)^n \right\} = \\ &= e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{m} w^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} \exp \left\{ -2 \ln \left(1 - \left(\frac{w}{z} \right) \right) \right\} = \\ &= \frac{z^2}{(z-w)^2} e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{m} w^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} . \end{aligned}$$

Ao colocar-se todos estes elementos juntamente, obtemos

$$\begin{aligned} E^+(z) E^-(w) &= \frac{: E^+(z) E^-(w) :}{(z-w)^2} = \\ &= \frac{e^{-\sqrt{2} \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{n} (z^{-n} - w^{-n})} e^{\sqrt{2}P \ln \left(\frac{z}{w} \right)} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{n} (z^{-n} - w^{-n})}}{(z-w)^2} . \end{aligned}$$

Para encontrarmos a dependência em termos da variável w , basta expandirmos o numerador em séries de Taylor ao redor de $z = w$. O resultado se escreve como

$$\begin{aligned} E^+(z) E^-(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{\sqrt{2} (\sum_{n<0} \alpha_n w^{-n-1} + \frac{P}{w} + \sum_{n>0} \alpha_n w^{-n-1})}{(z-w)} + \text{reg.} = \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{\sqrt{2} H(w)}{(z-w)} + \text{reg.} . \end{aligned} \tag{B.4}$$

No caso q -deformado, isto é, para a álgebra $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(2))$, temos os seguintes vértices [7][14]

$$E^\pm(z) = : e^{\pm i\sqrt{2}\xi^\pm(z)} : ,$$

onde

$$\xi^\pm(z) = Q - iP \ln z + i \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\mp \frac{1}{2}})^{-n} + i \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\pm \frac{1}{2}})^{-n} ,$$

com

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{[2n][n]}{2n} \delta_{m+n,0} \quad ; \quad [Q, P] = i \quad . \quad (\text{B.5})$$

No cálculo do OPE $E^+(z)E^-(w)$, o ordenamento dos modos zero é idêntico ao caso anterior, a diferença reside no ordenamento dos modos α_n :

$$\begin{aligned} & e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\frac{1}{2}})^{-n}} e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{[m]} (wq^{\frac{1}{2}})^{-m}} = \\ & = e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{[m]} (wq^{\frac{1}{2}})^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\frac{1}{2}})^{-n}} \exp \left\{ -2 \sum_{n>0, m<0} \frac{[2n][n] \delta_{m+n,0}}{[m][n] 2n} z^{-n} w^{-m} q^{-\frac{1}{2}(m+n)} \right\} = \\ & = e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{[m]} (wq^{\frac{1}{2}})^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\frac{1}{2}})^{-n}} \exp \left\{ \sum_{n>0} \frac{[2n]}{[n]n} \left(\frac{w}{z} \right)^n \right\} = \\ & = e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{[m]} (wq^{\frac{1}{2}})^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\frac{1}{2}})^{-n}} \exp \left\{ \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{wq}{z} \right)^n + \left(\frac{wq^{-1}}{z} \right)^n \right) \right\} = \\ & = e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{[m]} (wq^{\frac{1}{2}})^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\frac{1}{2}})^{-n}} \exp \left\{ -\ln \left(1 - \left(\frac{wq}{z} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{wq^{-1}}{z} \right) \right) \right\} = \\ & = \frac{z^2}{(z - wq)(z - wq^{-1})} e^{\sqrt{2} \sum_{m<0} \frac{\alpha_m}{[m]} (wq^{\frac{1}{2}})^{-m}} e^{-\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} (zq^{\frac{1}{2}})^{-n}} . \end{aligned}$$

Assim, temos

$$E^+(z)E^-(w) = \frac{D(z, w)}{(z - wq)(z - wq^{-1})} ,$$

onde

$$\begin{aligned} D(z, w) &= \left(\frac{z}{w} \right)^{\sqrt{2}P} \exp \left\{ -\sqrt{2} \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{[n]} ((zq^{-\frac{1}{2}})^{-n} - (wq^{\frac{1}{2}})^{-n}) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} ((zq^{\frac{1}{2}})^{-n} - (wq^{-\frac{1}{2}})^{-n}) \right\} . \end{aligned}$$

Para se encontrar a dependência na variável w , basta expandir o numerador em uma série de q -Taylor, segundo uma das expressões abaixo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k}(wq)f(wq)}{[2k]!} (z - w)_q^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k+1}(w)f(w)}{[2k+1]!} (z - wq)_q^{2k+1} ,$$

ou

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k}(wq^{-1})f(wq^{-1})}{[2k]!} (z - w)_q^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_q^{2k+1}(w)f(w)}{[2k+1]!} (z - wq^{-1})_q^{2k+1} ,$$

onde as q -derivadas e os q -binomiais foram definidas neste apêndice pelas expressões (B.1) e (B.3) respectivamente e $[n]! = [n][n-1]!$. Tanto uma quanto outra expressão conduzem ao

mesmo resultado, diferindo apenas pela ordem em que os termos estão arranjados nesta série infinita. As duas também equivalem à série de Taylor usual, diferindo também apenas por um rearranjo dos termos.

Para conseguirmos obter os termos de ordem superior na expansão de $D(z, w)$, vamos verificar, primeiramente que a forma geral para uma q -derivada de ordem n é dada por

$$D_q^n(z)f(z) = \frac{1}{z^n(q - q^{-1})^n} \sum_{\sigma_0=\pm 1} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}=\pm 1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \sigma_i q^{-i\sigma_i} \right) f\left(zq^{\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i}\right).$$

Isto é facilmente demonstrável por indução:

1. Para $n = 1$ temos

$$D_q(z)f(z) = \frac{1}{z(q - q^{-1})} (f(zq) - f(zq^{-1})).$$

2. Supondo ser a fórmula válida para n , temos então

$$\begin{aligned} D_q^{n+1}f(z) &= \frac{1}{z(q - q^{-1})} (D_q^n(zq)f(zq) - D_q^n(zq^{-1})f(zq^{-1})) = \\ &= \frac{1}{z(q - q^{-1})} \sum_{\sigma_n=\pm 1} \sigma_n D_q^n(zq^{\sigma_n})f(zq^{\sigma_n}) = \\ &= \frac{1}{z(q - q^{-1})} \sum_{\sigma_n=\pm 1} \left\{ \sigma_n \frac{1}{z^n q^{n\sigma_n} (q - q^{-1})^n} \times \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\sigma_0=\pm 1} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}=\pm 1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \sigma_i q^{-i\sigma_i} \right) f\left(zq^{\sigma_n + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{z^{n+1}(q - q^{-1})^{n+1}} \sum_{\sigma_0=\pm 1} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_n=\pm 1} \left(\prod_{i=0}^n \sigma_i q^{-i\sigma_i} \right) f\left(zq^{\sum_{i=0}^n \sigma_i}\right). \end{aligned}$$

Como foi visto no capítulo 3, devido à forma da expansão em q -Taylor, somente aparecerão termos proporcionais a $D(wq^{2k+1}, w)$ e a $D(wq^{-(2k+1)}, w)$. Assim temos

$$\begin{aligned} D(wq^{2k+1}, w) &= \left(\frac{wq^{2k+1}}{w} \right)^{\sqrt{2}P} \exp \left\{ -\sqrt{2} \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{[n]} ((wq^{2k+\frac{1}{2}})^{-n} - (wq^{\frac{1}{2}})^{-n}) \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} ((wq^{2k+\frac{3}{2}})^{-n} - (wq^{-\frac{1}{2}})^{-n}) \right\} = \\ &= (q^{2k+1})^{\sqrt{2}P} \exp \left\{ \sqrt{2} \sum_{n<0} \frac{\alpha_n}{[n]} w^{-n} (q^{-\frac{n}{2}} - q^{-2kn-\frac{n}{2}}) \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\alpha_n}{[n]} w^{-n} (q^{\frac{n}{2}} - q^{-2kn-\frac{3n}{2}}) \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando as identidades

$$q^{-\frac{n}{2}} - q^{-2kn-\frac{n}{2}} = q^{-\frac{n}{2}}(1 - q^{-2kn}) = q^{-\frac{3n}{2}}(q^n - q^{-n}) \sum_{i=0}^{k-1} q^{-2in},$$

e

$$q^{\frac{n}{2}} - q^{-2kn-\frac{3n}{2}} = q^{\frac{n}{2}}(1 - q^{-2(k+1)n}) = q^{-\frac{n}{2}}(q^n - q^{-n}) \sum_{i=0}^k q^{-2in},$$

temos

$$\begin{aligned} D(wq^{2k+1}, w) &= (q^{2k+1})^{\sqrt{2}P} \exp \left\{ \sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n < 0} \alpha_n w^{-n} q^{-\frac{3n}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} q^{-2in} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \sqrt{2}(q - q^{-1}) \sum_{n > 0} \alpha_n w^{-n} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=0}^k q^{-2in} \right\} = \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} \Phi^{-1}(wq^{-\frac{1}{2}+2(k-i)}) \right) \left(\prod_{j=0}^k \Psi(wq^{\frac{1}{2}+2(k-j)}) \right) = \\ &= : A^1(wq^2) A^1(wq^4) \dots A^1(wq^{2k}) : \Psi(wq^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Semelhantemente, para $D(wq^{-(2k+1)}, w)$, temos

$$\begin{aligned} D(wq^{-(2k+1)}, w) &= \left(\prod_{i=0}^k \Phi(wq^{-\frac{1}{2}-2i}) \right) \left(\prod_{j=0}^{k-1} \Psi^{-1}(wq^{\frac{1}{2}-2j}) \right) = \\ &= \Phi(wq^{-\frac{1}{2}}) : B^1(wq^{-2}) B^1(wq^{-4}) \dots B^1(wq^{-2k}) : , \end{aligned}$$

onde

$$A^\alpha(w) = \Phi^{-1}(wq^{-\frac{\alpha}{2}}) \Psi(wq^{\frac{\alpha}{2}}),$$

e

$$B^\alpha(w) = \Phi(wq^{-\frac{\alpha}{2}}) \Psi^{-1}(wq^{\frac{\alpha}{2}}).$$

Bibliografia

- [1] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla and K.D. Rothe: “Non-Perturbative Methods in 2-Dimensional Quantum Field Theory”, World Scientific (1991).
- [2] N. Aizawa and H. Sato: “q-Deformation of the Virasoro Algebra with Central Extension”, Phys. Lett. B256 (1991) 185.
- [3] D.J. Amit: “Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena”, World Scientific (1984).
- [4] O. Babelon: “EXCHANGE FORMULA AND LATTICE DEFORMATION OF THE VIRASORO ALGEBRA” Phys. Lett. B238 (1990) 234.
- [5] J. Balog, L. Fehér, P. Forgács, L. O’Raifeartaigh and A. Wipf: “LIOUVILLE AND TODA THEORIES AS CONFORMALLY REDUCED WZNW THEORIES”, Phys. Lett. B227 (1989) 214.
- [6] J. Balog, L. Fehér, P. Forgács, L. O’Raifeartaigh and A. Wipf: “Kac-Moody realization of $\mathcal{W}$ -algebras”, Phys. Lett. B244 (1990) 435.
- [7] E. Batista, J.F. Gomes and I.J. Lautenschleguer: “Non Abelian Sugawara Construction and the q-Deformed N=2 Superconformal Algebra”, Journal of Physics A: Mathematical and General 29 (1996) 6281-6293.
- [8] E. Batista, J.F. Gomes and I.J. Lautenschleguer: “Sugawara Construction of the q-Deformed Energy-Momentum Tensor”, 1995 XVI Brazilian National Meeting on Particles and Fields (1996) 347.

- [9] E. Batista, J.F. Gomes and I.J. Lautenschleguer: "Primary fields in a q-deformed theory", 1995 XVI Brazilian National Meeting on Particles and Fields (1996) 350.
- [10] E. Batistã, J.F. Gomes and I.J. Lautenschleguer: preprint IFT em preparação.
- [11] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov: "Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory", Nucl. Phys. B241 (1984) 333.
- [12] A.A. Belov and K.D. Chaltikian: "Q-DEFORMATION OF VIRASORO ALGEBRA AND LATTICE CONFORMAL THEORIES", Mod. Phys. Lett. A Vol.8 No13 (1993) 1233.
- [13] A. Bilal: "Nonabelian Toda Theory: A Completely Integrable Model for Strings on a Black Hole Background", Nucl. Phys B422 (1994) 258.
- [14] A.H. Bougourzi and M.A. El Gradechi: "Vertex Realization of the $\mathcal{U}_q(\widehat{su}(2))_2$ Quantum Current Algebra", J. Group Theor. Phys. 1 (1993) 39.
- [15] A.H. Bougourzi and L. Vinet: "A Quantum Analog of the Boson-Fermion Correspondence", Int. J. Mod. Phys. A10 (1995) 923.
- [16] M. Chaichian and P. Prešnajder: "Sugawara Construction and the q-Deformation of Virasoro (Super)Algebra", Phys. Lett. B277 (1992) 109.
- [17] M. Chaichian and P. Prešnajder: "q-Virasoro algebra, q-conformal dimensions and free q-superstring", Nucl. Phys. B482 (1996) 466.
- [18] Z. Chang: "QUANTUM GROUP AND QUANTUM SYMMETRY", Phys. Reports 262 (1995) 137.
- [19] V. Chari and A. Pressley: "Notes on Quantum Groups", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 18A (1990) 207.
- [20] V. Chari and A. Pressley: "A Guide to Quantum Groups", Cambridge (1994).
- [21] S. Coleman: "Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model", Phys. Rev. D11 (1975) 2088.

- [22] A. Connes: "Non-commutative Differential Geometry", Publ. I.H.E.S. 62 (1988) 673.
- [23] A. Connes: "Noncommutative Geometry", Academic Press (1994).
- [24] R. Coquereaux: "Noncommutative geometry and theoretical physics", J. Geom. Phys. Vol.6 No3 (1989) 425.
- [25] R. Cuerno, G. Sierra y C. Gomes: "TEORÍAS DE CAMPOS CONFORMES, SISTEMAS INTEGRABLES Y GRUPOS CUÁNTICOS", Salamanca (1991).
- [26] H.J. De Vega and N. Sánchez: "QUANTUM GROUP GENERALIZATION OF STRING THEORY", Phys. Lett. B216 (1989) 97.
- [27] J. Distler and H. Kawai: "Conformal Field Theory and 2-D Quantum Gravity or Who's Afraid of Joseph Liouville?", Nucl. Phys. B321 (1989) 509.
- [28] L. Dolan: "The Beacon of Kac-Moody Symmetry for Physics", preprint hep-th/9601117 (1996).
- [29] V.G. Drinfel'd: "Quantum Groups", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, A.M. Gleason (ed.), American Mathematical Society (1986) 798.
- [30] L.D. Fadeev, E.K. Sklyanin and L.A. Takhtajan: "The quantum inverse scattering problem I", Theoret. Math. Phys. 40 (1979) 194.
- [31] L.D. Fadeev and L.A. Takhtajan: "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons", Springer-Verlag (1987).
- [32] L. Fehér, L. O'Raiheartaigh, P. Ruelle, I Tsutsui and A. Wipf: "ON HAMILTONIAN REDUCTION OF THE WESS-ZUMINO-NOVIKOV-WITTEN THEORIES", Phys. Rep. 222 No1 (1992) 1.
- [33] B.L. Feign and E.V. Frenkel: "Representations of Affine Kac-Moody Algebras and Bosonization", in *Physics and Mathematics of Strings*, L. Brink et al (eds.), World Scientific (1990) 271.

- [34] E.V. Frenkel and N. Reshetikhin: "QUANTUM AFFINE ALGEBRAS AND DEFORMATIONS OF THE VIRASORO AND $\mathcal{W}$ -ALGEBRAS", Comm. Math. Phys. 178 (1996) 237.
- [35] I.B. Frenkel and N. Jing: "Vertex representations of quantum affine algebras", Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol.85 (1988) 9373.
- [36] S. Fubini and G. Veneziano: "Duality in Operator Formalism", Il Nuovo Cim. 67A (1970) 29.
- [37] S. Fubini, A.J. Hanson and R. Jackiw: "New Approach to Field Theory", Phys Rev. D Vol.7 No6 (1973) 1732.
- [38] P. Ginsparg: "Applied Conformal Field Theory" , in "*Champs, Cordes et Phénomènes Critiques/Fields, Strings and Critical Phenomena*" Les Houches, Session XLIX, 1988, Elsevier (1989).
- [39] P. Goddard and D. Olive: "KAC MOODY AND VIRASORO ALGEBRAS IN RELATION TO QUANTUM PHYSICS", Int. J. of Mod. Phys. A vol.1 No2 (1986) 303.
- [40] P. Goddard and A. Schwimmer: "FACTORING OUT FREE FERMIONS AND SUPERCONFORMAL ALGEBRAS", Phys. Lett. B214 (1988) 209.
- [41] J.F. Gomes: "Field theory in group manifolds and integrable models", in "*Topics in Theoretical Physics*", V.C. Aguilara-Navarro, D. Galetti, B.M. Pimentel and L. Tomio (eds.) Edição IFT (1995).
- [42] M.B. Green, J.H. Schwartz and E. Witten: "SUPERSTRING THEORY", Cambridge (1987).
- [43] J.E. Humphreys: "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Springer-Verlag (1972).
- [44] N. Jacobson: "Basic Algebra II", W.H. Freeman and Co. (1980).

- [45] M. Jimbo: "A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation", *Lett. Math. Phys.* 10 (1985) 63.
- [46] V.G. Kac and A.K. Raina: "Bombay Lectures On Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Algebras", *Advanced Series in Mathematical Physics Vol.2*, World Scientific (1987).
- [47] C. Kassel: "Quantum Groups", Springer-Verlag (1995).
- [48] S.M. Khoroshkin and V.N. Tolstoy: "On Drinfeld's realization of quantum affine algebras", *J. Geom. Phys.* 11 (1993) 445.
- [49] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov: "CURRENT ALGEBRA AND WESS-ZUMINO MODEL IN TWO DIMENSIONS", *Nucl. Phys.* B247 (1984) 83.
- [50] S. Lang: "ALGEBRA", Addison-Wesley (1969).
- [51] A. Lorek and J. Wess: "Dynamical Symmetries in q -Deformed Quantum Mechanics", preprint MPI-PhT/95-1, GK-MP 9502/17 (1995).
- [52] S. Majid: "Hopf algebras for physics at the Planck scale", *Class. Quantum Grav.* 5 (1989) 1587.
- [53] S. Majid: "Foundations of Quantum Group Theory", Cambridge (1995).
- [54] S. Mandelstam: "Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation", *Phys. Rev.* D11 (1975) 3026.
- [55] Yu.I. Manin: "Quantum Groups and Non-commutative Geometry", *Publ. CRM* (1988).
- [56] C.H. Oh and K. Singh: "Conformal Properties of Primary Fields in a q -Deformed Theory", *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 (1992) L149.
- [57] C.H. Oh and K. Singh: "Realizations of the q -Heisenberg and q -Virasoro Algebras", preprint hep-th/9408001 (1994).

- [58] J.U.H. Petersen: “Representations at a Root of Unity of q -Oscillators and Quantum Kac-Moody Algebras”, PhD Thesis, hep-th/9409079 (1994).
- [59] A.M. Polyakov and P.B. Wiegmann: “Theory of Nonabelian Goldstone Bosons”, Phys. Lett B131 (1983) 121.
- [60] A.M. Polyakov: “The Theory of Turbulence in Two Dimensions”, Nucl. Phys. B396 (1993) 367.
- [61] P. Roche: “Introduction to Quantum Groups and Applications to Mathematical Physics”, Lecture Notes-São Carlos (1994).
- [62] H. Saleur and J.B. Zuber: “Integrable Lattice Models and Quantum Groups”, preprint SPhT/90-071 (1990).
- [63] H. Sato: “Nonlocal Virasoro symmetry of massless fermions in two dimensions”, Nucl. Phys. B393 (1993) 442.
- [64] H. Sato: “LANDAU LEVELS AND QUANTUM GROUP”, Mod. Phys. Lett. A Vol.9 No5 (1994) 451.
- [65] H. Sato: “Quantum Group and q -Virasoro Symmetries in Fermion Systems”, Prog. Theor. Phys. Vol.93 No1 (1995) 195.
- [66] H. Sato: “OPE formulae for deformed super-Virasoro algebras”, Nucl. Phys. B471 (1996) 553.
- [67] P. Schupp: “Quantum Groups, Non-Commutative Differential Geometry and Applications”, hep-th/9312075 (1993).
- [68] E.J. Taft: “Witt and Virasoro algebras as Lie bialgebras”, J. Pure Appl. Alg. 87 (1993) 301.
- [69] L.A. Takhtajan: “LECTURES ON QUANTUM GROUPS”, in “*Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory*”, M.L. Ge and B.H. Zhao (eds.), World Scientific (1992).

- [70] G. Waterson: "BOSONIC CONSTRUCTION OF AN $N = 2$ EXTENDED SUPERCONFORMAL THEORY IN TWO DIMENSIONS" Phys. Lett. B171 (1986) 77.
- [71] P. Watts: "Differential Geometry on Hopf Algebras and Quantum Groups", PhD Thesis (1994).
- [72] E. Witten: "Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions", Commun. Math. Phys. 92 (1984) 455.
- [73] E. Witten: "On String Theory and Black Holes", Phys. Rev. D44 (1991) 314.

