

**unesp**  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**MARCELO KENZO TAKAMORI**

**GRÁFICOS DE  $T^2$  PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS**  
**MULTIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS**

Guaratinguetá  
2015

MARCELO KENZO TAKAMORI

GRÁFICOS DE  $T^2$  PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS  
AUTOCORRELACIONADOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso em Graduação em Engenharia de Produção Mecânica, da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Guaratinguetá  
2015

T13  
6g Takamori, Marcelo Kenzo  
Gráficos de  $T^2$  para o monitoramento de processos multivariados  
autocorrelacionados / Marcelo Kenzo Takamori – Guaratinguetá, 2015.  
41 f : il.  
Bibliografia: f. 39-40

Trabalho de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica –  
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de  
Guaratinguetá, 2015.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Marcela Aparecida Guerreiro Machado  
Coorientador: Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa

1. Controle de processo -- Métodos estatísticos 2. Autocorrelação  
(Estatística) 3. Análise multivariada I. Título

CDU 658.511.3

**MARCELO KENZO TAKAMORI**

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE  
DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUADO EM  
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO MECÂNICA"


APROVADO EM SUA FORMA FINAL PÉLO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO MECÂNICA

  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> ARMINDA EUGÊNIA MARQUES CAMPOS  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO  
Orientadora UNESP-FEG

  
Prof. Dr. ANTÔNIO FERNANDO BRANCO COSTA  
UNESP-FEG

  
M.Sc CARLA CRISTINA ALMEIDA LOURES  
Membro externo

## **DADOS CURRICULARES**

### **MARCELO KENZO TAKAMORI**

NASCIMENTO	07.07.1992- SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Mauro Kendi Takamori Denise Takamori
2010/2015	Curso de Graduação Engenharia de Produção Mecânica- Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista

Dedico este trabalho especialmente aos meus pais.  
Obrigado por me sustentarem por todos os anos de  
faculdade, este é o resultado de todo meu esforço e  
dedicação.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a meus pais, *Mauro* e *Denise*. Sem eles, nada de minha trajetória na vida teria sido possível de acontecer. Agradeço também a meus irmãos, *Paula* e *Cássio*, por me darem suporte em minhas decisões.

À minha orientadora, *Prof. Dr<sup>a</sup> Marcela Aparecida Guerreiro Machado*, que acreditou em mim e me incentivou desde 2012, quando fiz minha iniciação científica.

Aos moradores da *República Cabaret*, minha segunda família, com quem aprendi e ainda aprendo algo novo todos os dias, e com quem compartilhei várias risadas e cervejas. Criei um laço de amizade com cada um de vocês, que tenho certeza que levarei por toda minha vida.

À *Dona Cida* e à *Dona Maria*, por trabalharem incansavelmente para deixarem roupa lavada e passada, a casa limpa e a comida pronta, para que pudéssemos nos concentrar integralmente nos estudos.

A meus grandes amigos da turma de Produção, *Bernardo (Flink)*, *Victor (Wickbold)* e *Gian*, praticamente irmãos, com quem trabalhei em grupo em boa parte das atividades do curso, mas com quem, principalmente, sempre pude contar em momentos de alegria e de dificuldade.

A meus amigos de Glasgow, em especial a meus *flatmates*, que fizeram parte do melhor ano da minha vida e que são amizades que carregarei com carinho.

Por fim, agradeço aos membros da *Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá*, funcionários e professores, por me tornarem uma pessoa melhor preparada e serem de imensa influência em minha formação.

TAKAMORI, M. K. **Gráficos de  $T^2$  para o monitoramento de casos multivariados autocorrelacionados**. 2015. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia de Produção Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## RESUMO

Tratando-se de controle estatístico de processos, a análise de casos univariados não é suficiente para muitos tipos de empresa, sendo necessário recorrer a multivariados. Além disso, normalmente faz-se a suposição de que as observações são independentes. No entanto, a violação de tal hipótese indica que há autocorrelação no processo. Nesta pesquisa, por meio de abordagem básica quantitativa para uma pesquisa exploratória e experimental, o alvo de estudo são os gráficos de controle multivariados autocorrelacionados, utilizando a estatística  $T^2$  de Hotelling. Os valores de  $NMA$  foram coletados por meio de simulações em um programa computacional na linguagem FORTRAN, com o intuito de se estudar as propriedades deste gráfico, além de comparar com os dados dos gráficos  $\bar{X}$ . Os resultados indicam que, quanto maior a autocorrelação  $\Psi$  entre as médias, menor o poder de detecção dos gráficos de controle e, comparando com  $\bar{X}$ , o gráfico de  $T^2$  de Hotelling mostrou maior velocidade na detecção de causas especiais no processo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Gráfico de controle;  $T^2$  de Hotelling; autocorrelação.

TAKAMORI, M. K.  **$T^2$  charts for the monitoring of multivariate autocorrelated cases.** 2015. Graduate Work (Graduate in Industrial Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

### **ABSTRACT**

In which refers to statistical process control, the analysis of univariate cases is not enough for many types of company, being necessary to resort to multivariate cases. Besides, it is usually supposed that the observations are independent. However, the violation of this hypothesis indicates the existence of autocorrelation in the process. In this work, by a basic quantitative approach for an exploratory and experimental research, the study target are the multivariate autocorrelated control charts, using Hotelling  $T^2$ . The  $ARL$  values were collected by simulations of a computational program on FORTRAN language, with objective of studying the charts properties, in addition to compare with the  $\bar{X}$  charts. The results show that, the higher the autocorrelation  $\Psi$  between the means, the lower the power of detection of the control charts and, comparing with  $\bar{X}$ , the  $T^2$  Hotelling chart shows higher speed in detecting special causes in the process.

**KEYWORDS:** Control chart; Hotelling  $T^2$ ; autocorrelation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Representação de um gráfico de controle .....	16
Figura 2- Gráfico de $\bar{X}$ (ocorrência de um alarme falso).....	17
Figura 3- Gráfico de $\bar{X}$ (ocorrência de um alarme verdadeiro) .....	17
Figura 4- Elipse de controle para duas variáveis independentes .....	19
Figura 5- Exemplo de gráfico de controle $T^2$ de Hotelling.....	20
Figura 6- Tipos de pesquisa.....	23
Figura 7- Quantidade de artigos com os temas <i>autocorrelation</i> e <i>control charts</i> por ano .....	24
Figura 8- Primeira etapa iterativa do processo de refinamento do limite de controle.....	25
Figura 9- Segunda etapa iterativa do processo de refinamento do limite de controle.....	26
Figura 10- Gráfico comparativo entre $NMA_T$ e $NMA_S$ ( $n=4$ ; $\phi=0,8$ ; $\Psi=0,5$ ) .....	28
Figura 11- Gráfico de $NMA$ para tamanhos de amostra diferentes ( $p=2$ ).....	30
Figura 12- Gráfico comparativo entre $NMA_T$ e $NMA_S$ ( $p=2$ , $n=5$ ).....	31
Figura 13- Gráfico referente à Tabela 4 ( $p=2$ ; $n=4$ ; $\Psi=0,1$ ) .....	32
Figura 14- Gráfico referente à Tabela 5 ( $p=2$ ; $n=4$ ; $\phi_1 = \phi_2 = 0,5$ ) .....	33
Figura 15- Gráfico referente à Tabela 6 ( $p=2$ ; $n=5$ ; $\Psi_1 = 0,0$ ; $\Psi_2 = 0,5$ ).....	34
Figura 16- Gráfico referente à Tabela 5 ( $p=2$ ; $n=5$ ; $\phi_1 = \phi_2 = 0,0$ ) .....	34
Figura 17- Gráfico referente à Tabela 8 ( $p=3$ ; $n=5$ ; $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,5$ ).....	36
Figura 18- Gráfico referente à Tabela 9 ( $p=4$ ; $n=5$ ; $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0,0$ ).....	37
Figura 19- Gráfico comparativo entre $T^2$ e $\bar{X}$ ( $p=2$ ; $n=5$ ; $\Psi_1 = \Psi_2 = 0,1$ ).....	38

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de $NMA_T$ , $NMA_S$ e erros para processos autocorrelacionados ( $n = 1; \phi = 0,8$ ) .....	27
Tabela 2 - Valores de $NMA_T$ , $NMA_S$ e erros para processos autocorrelacionados ( $n = 4; \phi = 0,8$ ) .....	28
Tabela 3 – Valores de $NMA_T$ , $NMA_S$ e os erros para o gráfico de $T^2$ ( $p = 2; n = 4$ e $5$ ) .....	29
Tabela 4 – Valores de $NMA$ para o gráfico $T^2$ de processos autocorrelacionados ( $p = 2; n = 4$ ) .	31
Tabela 5 – Valores de $NMA$ para o gráfico $T^2$ de processos autocorrelacionados ( $p = 2; n = 5$ ) .	32
Tabela 6 – Valores de $NMA$ para o gráfico $T^2$ com $\Psi_i$ diferente ( $p = 2; n = 5$ ) .....	33
Tabela 7 – Valores de $NMA$ para o gráfico $T^2$ de processos autocorrelacionados ( $p = 3; n = 5;$ $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,0$ ).....	35
Tabela 8 – Valores de $NMA$ para o gráfico $T^2$ de processos autocorrelacionados ( $p = 3; n = 5;$ $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,5$ ).....	35
Tabela 9 – Valores de $NMA$ para o gráfico $T^2$ de processos autocorrelacionados ( $p = 4; n = 5;$ $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0,0$ ) .....	36
Tabela 10- Valores de $NMA$ para os gráficos de $T^2$ e $\bar{X}$ para processos bivariados ( $p = 2; n = 5;$ $\Psi_1 = \Psi_2 = 0,1$ ) .....	37
Tabela 11- Valores de $NMA$ para os gráficos de $T^2$ e $\bar{X}$ para processos bivariados ( $p = 2; n = 5;$ $\Psi_1 = \Psi_2 = 0,5$ ) .....	38

## LISTA DE SÍMBOLOS

$X_i$	Variável de interesse $i$
$n$	Número de observações em uma amostra
$p$	Graus de liberdade
$T^2$	Estatística de Hotelling com distribuição de Qui-Quadrado
$T_i^2$	Estatística de Hotelling com distribuição de Qui-Quadrado para a $i$ -ésima amostra
$LSC$	Limite superior de controle
$LIC$	Limite inferior de controle
$LC$	Limite de controle
$NMA$	Número médio de amostras até o sinal
$NMA_0$	Número médio de amostras até o sinal enquanto o processo está sob controle
$NMA_T$	Número médio de amostras até o sinal teórico
$NMA_S$	Número médio de amostras até o sinal, encontrado experimentalmente
$\alpha$	Probabilidade de alarme falso- erro do tipo I
$\beta$	Probabilidade de não-deteccção- erro do tipo II
$pd$	Poder de deteccção do gráfico de controle
$\bar{X}$	Média amostral
$\bar{X}_i$	Média amostral da variável de interesse $i$
$\mu$	Média do processo
$\mu_{0i}$	Média de $X_i$ com o processo em controle
$\mu_0'$	Vetor de médias com o processo em controle
$\mu_1'$	Vetor de médias do processo após a ocorrência da causa especial
$\Sigma_0$	Matriz de covariâncias com o processo em controle
$\rho$	Coefficiente de correlação entre $X_1$ e $X_2$
$\sigma_i^2$	Variância de $X_i$
$\sigma_\alpha$	Desvio padrão com a influência da autocorrelação
$\varepsilon_\alpha$	Erro aleatório, em relação a $\sigma_\alpha$
$\Psi_i$	Coefficiente de autocorrelação da variável $X_i$
$\phi_i$	Coefficiente autoregressivo de $X_i$
$\delta_i$	Deslocamento de média da variável $X_i$ em relação ao seu valor-alvo
$\varepsilon_t$	Erro aleatório
$\sigma_\varepsilon$	Desvio-padrão do erro aleatório

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MCUSUM	Soma acumulativa multivariada (do inglês <i>Multivariate Cumulative Sum</i> )
MEWMA	Média móvel multivariada ponderada exponencialmente (do inglês, <i>Multivariate Exponentially Weighted Moving-Average</i> )
VMAX	Máxima variância

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>14</b>
1.1	OBJETIVO .....	14
1.2	DELIMITAÇÃO .....	15
1.3	JUSTIFICATIVA .....	15
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	15
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	<b>16</b>
2.1	GRÁFICOS DE CONTROLE .....	16
2.1.1	Alarmes nos gráficos de controle .....	16
2.1.2	Desempenho dos gráficos de controle .....	18
2.2	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA PROCESSOS MULTIVARIADOS .....	18
2.2.1	Gráficos de $\bar{X}$ .....	19
2.2.2	$T^2$ de Hotelling .....	20
2.3	PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS .....	21
2.3.1	Autocorrelação entre observações .....	21
2.3.2	Autocorrelação entre médias .....	22
<b>3</b>	<b>MÉTODO DE PESQUISA</b> .....	<b>23</b>
3.1	REFINAMENTO DO LIMITE DE CONTROLE .....	24
<b>4</b>	<b>RESULTADOS ENCONTRADOS</b> .....	<b>27</b>
4.1	ESTUDO UNIVARIADO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS .....	27
4.2	DESEMPENHO DO GRÁFICO DE $T^2$ DE HOTELLING .....	28
4.3	GRÁFICOS DE $T^2$ PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS .....	31
4.4	COMPARAÇÃO DE DESEMPENHOS DOS GRÁFICOS DE $\bar{X}$ E $T^2$ .....	37
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>40</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 30, quando Shewhart (1931) propôs a utilização de gráficos de controle e forneceu a base para suas propriedades, sabe-se que os métodos estatísticos desempenham papel central no monitoramento das principais características da qualidade dos processos de manufatura e de serviço (LEONI, 2014).

Por causa disso, a presença de um Controle de Qualidade eficiente se faz fundamental para o sucesso de empresas que buscam competitividade no mercado e um lugar no topo. Logicamente, aquelas que não dão a devida atenção a tal controle possuem muitas vezes processos com causas especiais, que aumentam os custos da produção e que, conseqüentemente, reduzem a capacidade da produção e o lucro.

Sabe-se da necessidade de se analisar casos multivariados de controle desde a década de 30 (LEONI, 2015). A pesquisa em questão terá como base o uso do gráfico  $T^2$  de Hotelling (HOTELLING, 1947).

Normalmente, considera-se que as observações são independentes entre si. Os processos de manufatura, em geral, são regidos por elementos inerciais, e quando o intervalo entre observações se torna pequeno em relação a estas forças, elas se tornam correlacionadas ao longo do tempo (MONTGOMERY, 2009).

O autor realizou e submeteu artigo no Congresso de Iniciação Científica em 2012, acerca de processos bivariados, e este trabalho de graduação dará continuidade à pesquisa (TAKAMORI, 2012).

### 1.1 OBJETIVO

O objetivo principal da pesquisa foi obter as propriedades do gráfico  $T^2$  de médias, variando-se os valores de variáveis como a autocorrelação e deslocamento da média. Estudou-se o efeito da autocorrelação para casos multivariados, utilizando o gráfico de médias  $T^2$  de Hotelling. Para tal, foi observada a capacidade de detecção dos gráficos, por meio da estatística  $NMA$  (Número médio de amostras até o sinal).

Somado a isto, a pesquisa também teve como objetivo comparar o desempenho de gráficos de  $\bar{X}$ , tendo as variáveis de interesse sendo analisadas separadamente, com os de  $T^2$  de Hotelling.

Com isso, o intuito foi tabelar os resultados obtidos e disponibilizá-los como base para futuras pesquisas.

## 1.2 DELIMITAÇÃO

Não há restrições físicas ou geográficas à resolução da pesquisa, uma vez que baseia-se inteiramente em simulações na linguagem FORTRAN.

Há o pressuposto de que o processo está inicialmente sob controle, para só depois realizar o deslocamento das médias e analisar quão rápido o gráfico detectará essa causa especial.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

Em uma situação ideal, para que se extraiam observações independentes para o controle estatístico do processo, é necessário que as mesmas estejam espaçadas ao longo do tempo (LEONI, 2015). Nos processos industriais, a necessidade de se detectar rapidamente um erro na linha de produção é alta, mas a disponibilidade de tempo, por outro lado, é baixa.

Com isso, torna-se de extrema importância entender mais profundamente o efeito da autocorrelação no desempenho dos gráficos de controle.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho dispõe de mais três capítulos.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos necessários ao completo entendimento da pesquisa. Explica-se o que são gráficos de controle, além de discorrer sobre seus erros e poder de detecção, e são exibidos algumas de suas utilizações em casos multivariados. Posteriormente, é abordada a estatística  $T^2$  de Hotelling, bem como a autocorrelação presente nas variáveis de interesse, o que engloba o tema central do projeto.

O Capítulo 3 apresenta o método de pesquisa, composta pelas etapas necessárias à realização do trabalho e o cronograma previamente estabelecido para tal cumprimento.

O Capítulo 4 é dedicado à apresentação dos resultados, proveniente das simulações de programas computacionais na linguagem FORTRAN. Inicialmente, são exibidos o estudo univariado de processos autocorrelacionados e o desempenho dos gráficos bivariados de  $T^2$  de Hotelling, para enfim serem analisados os gráficos de  $T^2$  para casos multivariados autocorrelacionados. Realiza-se a comparação entre a eficiência dos gráficos  $T^2$  com  $\bar{X}$ .

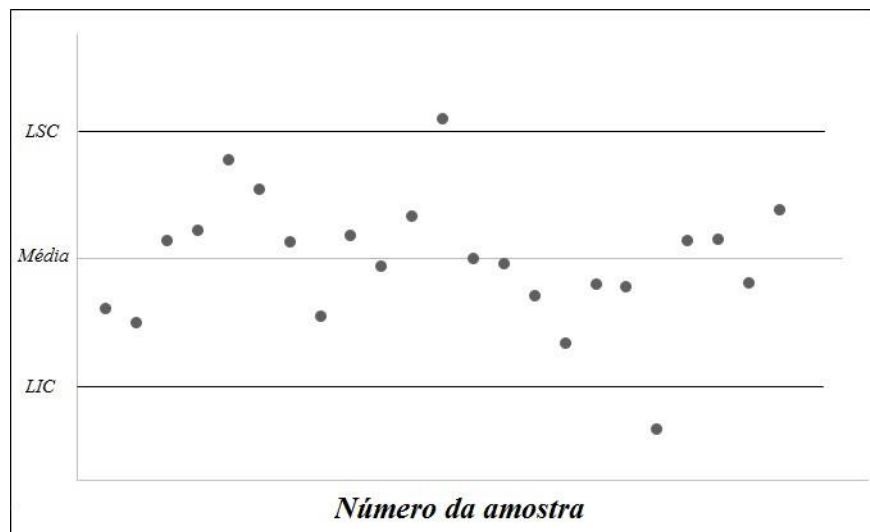
Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões e sugestões para futuras pesquisas, seguido das referências.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 GRÁFICOS DE CONTROLE

Gráficos de controle são a ferramenta mais importante para o controle estatístico do processo para determinar se o processo está se comportando como esperado ou se existem causas especiais para variação. Em sua implementação, o processo é considerado fora de controle quando um ou mais pontos se encontram fora dos limites de controle (DU, HUANG & LV, 2013), expressos por *LSC* e *LIC*. A Figura 1 é um exemplo de como os pontos estariam dispostos em um gráfico de médias.

Figura 1- Representação de um gráfico de controle



Fonte: o próprio autor

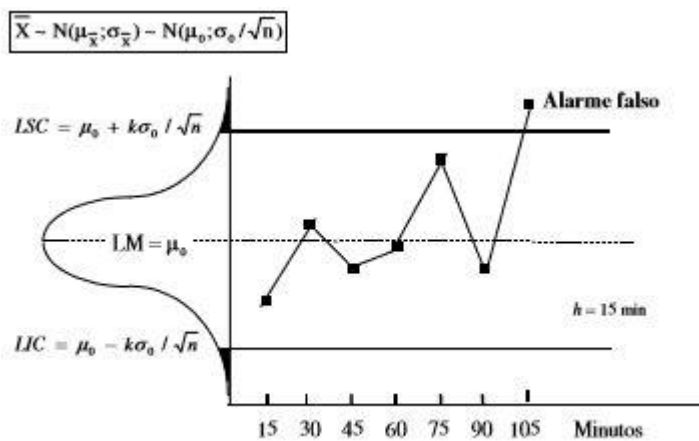
Um sinal gerado por gráficos de controle que indicam que o processo está fora de controle é o suficiente para que os engenheiros sejam capazes de identificar a presença de causas especiais que acarretaram em mudanças significativas no processo. No entanto, eles podem iniciar a pesquisa para determinar essas causas muito antes. Devido a esse atraso, saber quando o processo mudou reduziria o tempo para a pesquisa e conseqüentemente implementaria medidas corretivas e ajustes mais cedo (NIAKI & KHEDMATI, 2013).

#### 2.1.1 Alarmes nos gráficos de controle

Para a análise estatística de um gráfico de controle de médias  $\bar{X}$ , há dois tipos de riscos para os quais deve se atentar. Quando o processo se encontra em um estado de controle estatístico, há o risco  $\alpha$  de que seja sinalizada indevidamente a influência de uma causa especial, quando um valor de  $\bar{X}$  for encontrado fora dos limites de controle (MACHADO, 2009), como visto na Figura 2.

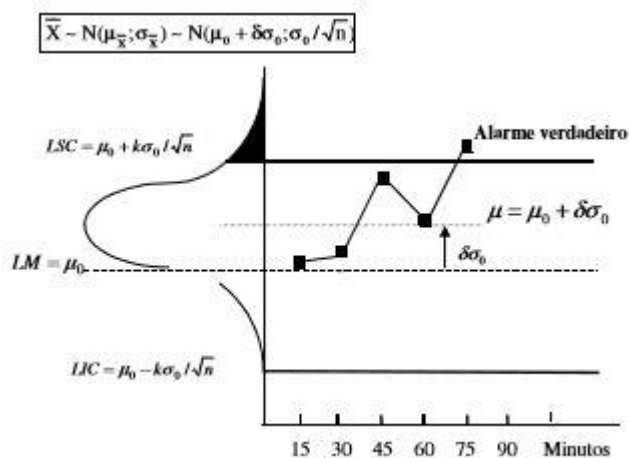
Já a Figura 3 retrata a ocorrência de um alarme verdadeiro no gráfico de  $\bar{X}$ . Quando o processo está fora de controle, ou seja, quando a produção está sendo influenciada por causas especiais, há o risco  $\beta$  de um valor cair dentro dos limites de controle, o que não sinalizaria a presença de anomalias no processo (MACHADO, 2009).

Figura 2- Gráfico de  $\bar{X}$  (ocorrência de um alarme falso)



Fonte: (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

Figura 3- Gráfico de  $\bar{X}$  (ocorrência de um alarme verdadeiro)



Fonte: (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

O erro do tipo I, ou seja, alarme falso, indica equivocadamente a presença de uma causa especial na produção, o que pode levar à interrupção da produção e a uma futura desconfiança quanto à validade do gráfico, caso isso volte a ocorrer com frequência. Já o erro do tipo II, o que significa ignorar um alarme verdadeiro, induz a uma conclusão errônea de que não há a presença de uma anomalia na produção, o que compromete a qualidade dos itens produzidos (CARRÉ, 2012).

### 2.1.2 Desempenho dos gráficos de controle

Para intervalo fixo de tempo entre as amostras, o desempenho dos gráficos de controle é dado pelo número médio de amostras até o sinal (*NMA*). O projeto do gráfico de controle impõe os parâmetros que determinam o valor de tal medida: o tamanho da amostra  $n$ , o intervalo de tempo  $h$  entre retirada de amostras e o fator  $k$  de abertura dos limites de controle. Os riscos  $\alpha$  e  $\beta$  e o custo de inspeção também são influenciados por esses parâmetros (COSTA; MACHADO, 2003).

Para o caso de o processo estar sob controle estatístico, o cálculo do número médio de amostras até o sinal se dá por  $NMA_0 = 1/\alpha$ . Espera-se que este valor seja alto, indicando que há a ocorrência de poucos alarmes falsos. Já para quando o processo está fora de controle, o cálculo passa a ser  $NMA = 1/p_d$ , sendo  $p_d$  o poder de detecção e  $p_d = 1 - \beta$  (MACHADO, 2009).

## 2.2 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA PROCESSOS MULTIVARIADOS

A análise estatística multivariada lida com diversas variáveis simultaneamente. Isso é comprovadamente bem sucedido em diferentes áreas do conhecimento como medicina, sociologia, finanças, educação, biologia, psicologia (GAMESALINGAM; KUMAR, 2011), além de ser fundamental para o Controle Estatístico do Processo (CEP).

Há diversos tipos de gráficos de controle disponíveis para a análise multivariada, como MCUSUM, MEWMA e VMAX, além dos gráficos de  $\bar{X}$  e de  $T^2$  de Hotelling.

Os gráficos de controle de MCUSUM (*Multivariate Cumulative Sum*) e MEWMA (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*) são usualmente utilizados para os casos em que há a necessidade de se detectar pequenos ou médios deslocamentos da média (CHUA; MONTGOMERY, 1991).

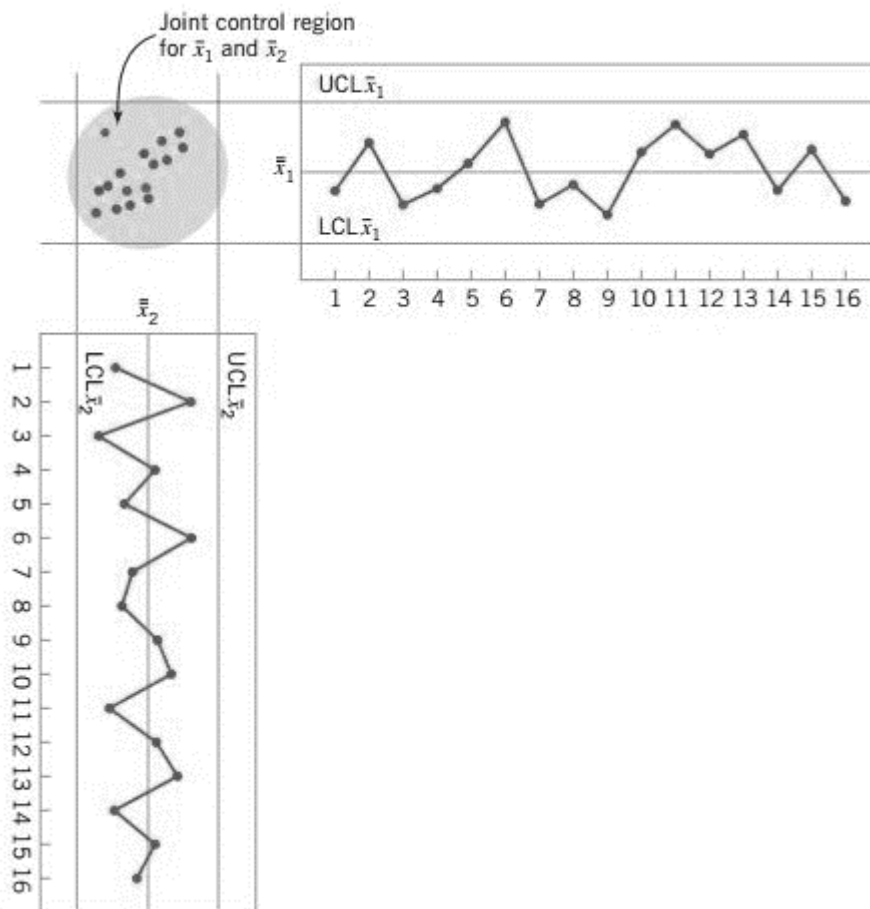
O gráfico da máxima variância VMAX, em um processo bivariado, possui suas duas características de qualidade  $X_1$  e  $X_2$  seguindo uma distribuição normal. O cálculo das variâncias amostrais padronizadas é detalhado por Machado (2009).

### 2.2.1 Gráficos de $\bar{X}$

Há vários tipos de gráficos de controle a serem usados hoje. Provavelmente, o gráfico mais comumente recorrido é o gráfico de  $\bar{X}$ . Usualmente é recomendado que este gráfico controle a média do processo e que, simultaneamente, haja outro tipo de gráfico, como da amplitude  $R$  ou da variância  $S^2$ , para controlar sua variabilidade (FARAZ e SANIGA, 2013).

É possível se representar graficamente o desempenho de um processo bivariado no gráfico de  $\bar{X}$ , como visto na Figura 4. No caso, são variáveis independentes, que criam uma elipse de controle no gráfico.

Figura 4- Elipse de controle para duas variáveis independentes



Fonte: (MONTGOMERY, 2009)

Há duas desvantagens que podem ser notadas no uso da elipse de controle. Primeiramente, é perdida a ideia de pontos plotados sequencialmente ao longo do tempo, mas a maior desvantagem é que é difícil construir tal elipse para processos multivariados, ou seja, processos com três ou mais características de controle (MONTGOMERY, 2009).

### 2.2.2 $T^2$ de Hotelling

Para o monitoramento do vetor de médias de duas ou mais características de qualidade, o gráfico de controle baseado na estatística  $T^2$  para o monitoramento de processos multivariados (HOTELLING, 1947) é o dispositivo estatístico mais comumente utilizado.

O gráfico de controle  $T^2$  é utilizado no monitoramento simultâneo de  $p$  variáveis de interesse. Quando já se conhece o vetor das médias e a matriz de covariâncias,  $\mu_0$  e  $\Sigma_0$ , de um processo  $p$ -variado com distribuição normal, a estatística de Hotelling para a  $i$ -ésima amostra é dada pela Equação 1.

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\bar{X}_i - \mu_0) \quad (1)$$

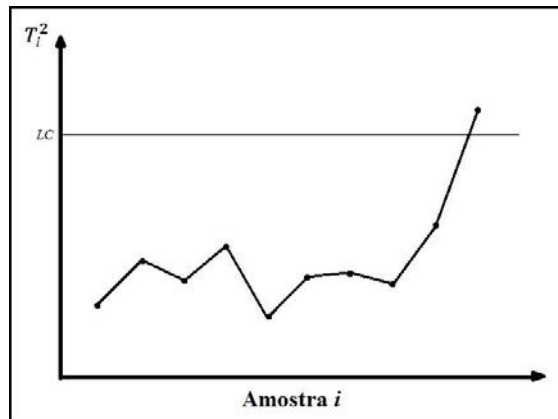
onde  $\bar{X}_i$  é o vetor das médias amostrais dos  $p$  parâmetros para a amostra  $i$  e  $n$  é o tamanho da  $i$ -ésima amostra. Quando o processo está sob controle,  $T_i^2$  segue uma distribuição de qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade.

Para  $p=2$ , ou seja, quando o caso bivariado, tem-se que  $\mu'_0 = (\mu_{01}; \mu_{02})$  e  $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ , sendo  $\rho$  o coeficiente de correlação entre  $X_1$  e  $X_2$ . Neste caso, a estatística de  $T^2$  é dada pela Equação 2.

$$T^2 = \frac{n}{|\Sigma|} [\sigma_2^2 (\bar{X}_1 - \mu_{01})^2 + \sigma_1^2 (\bar{X}_2 - \mu_{02})^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 (\bar{X}_2 - \mu_{02})(\bar{X}_1 - \mu_{01})] \quad (2)$$

A Figura 5 é uma representação gráfica de como seria a disposição de um gráfico de controle que utiliza a estatística  $T^2$  de Hotelling.

Figura 5- Exemplo de gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling



Fonte: o próprio autor.

### 2.3 PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Para avaliar a performance do gráfico de médias, Shewhart fez duas suposições: as observações são independentes e o processo está sujeito a causas especiais que o deslocarão de seu alvo (FRANCO *et al*, 2014).

Shewhart não explorou o caso em que as medidas dentro de uma amostra são autocorrelacionadas. Em vários processos contínuos, a autocorrelação está presente e reduz a performance estatística dos gráficos de controle (FRANCO *et al*, 2014).

Os processos de manufatura, em geral, são regidos por elementos inerciais, e quando o intervalo entre observações se torna pequeno em relação a estas forças, elas se tornam correlacionadas ao longo do tempo (MONTGOMERY, 2009).

#### 2.3.1 Autocorrelação entre observações

Para a autocorrelação entre as observações, considera-se que as observações das variáveis de interesse a serem monitoradas compõem um modelo autoregressivo de primeira ordem, comum em aplicações (ATIENZA *et al*, 1998). Para o caso univariado, as observações  $X_t$  para um processo autoregressivo de primeira ordem são dadas pela Equação 3 (MORETTIN; TOLOI, 2004):

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad t=1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

onde  $\mu$  é a média do processo,  $\phi$  é o coeficiente autoregressivo e  $\varepsilon_t$  é o erro aleatório, i.i.d.,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ . Além disso, a variância do modelo é expressa pela Equação 4 (MORETTIN; TOLOI, 2004):

$$\sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi^2) \quad (4)$$

### 2.3.2 Autocorrelação entre médias

No entanto, o modelo utilizado neste projeto é referente a autocorrelação entre as médias, levando-se em consideração, além do coeficiente autoregressivo  $\phi$ , a influência do coeficiente de autocorrelação  $\Psi$ . Com isso, as observações  $X_t$  comportam-se como mostra a Equação 5:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

No cálculo da Equação 5, o erro aleatório é dado por  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\alpha)$  e calcula-se o valor de  $\sigma_\alpha$  como mostrado na Equação 6:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\Psi}{(1 - \Psi)} \cdot (1 - \phi^2)} \quad (6)$$

### 3 MÉTODO DE PESQUISA

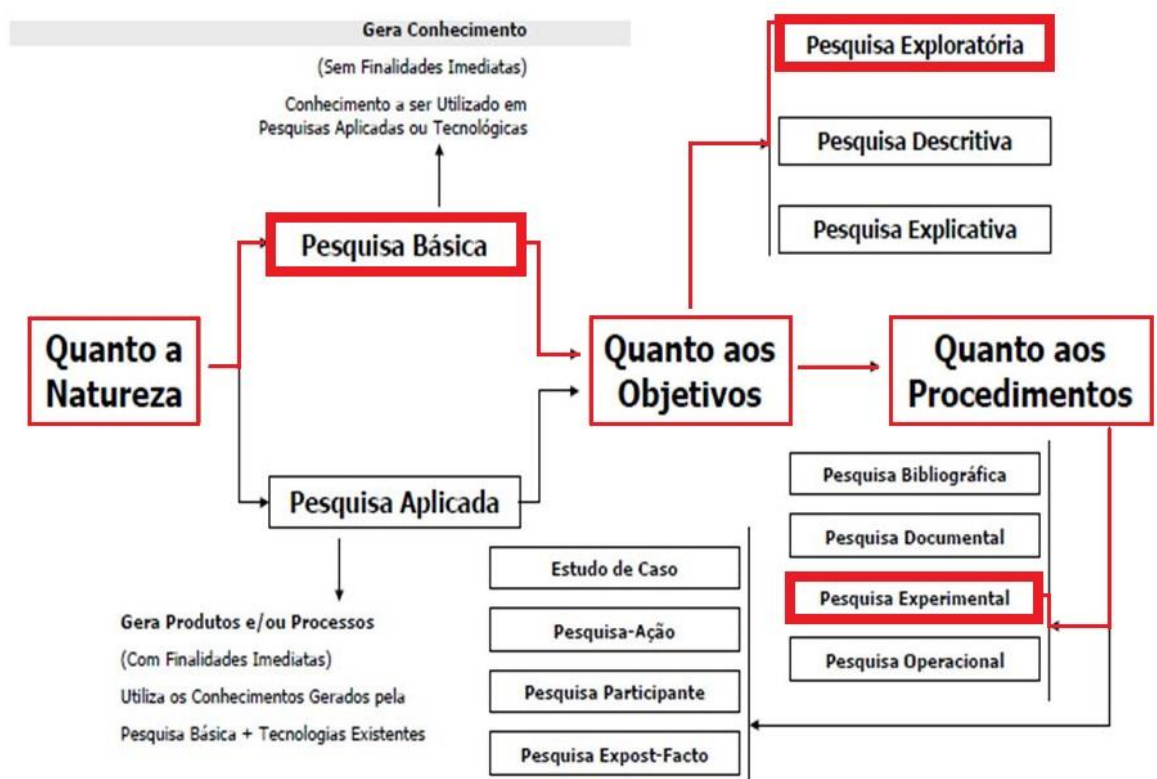
A presente pesquisa adota uma abordagem quantitativa, por se tratar de valores gerados por simulações da linguagem computacional no FORTRAN. Segundo Fonseca (2002), a pesquisa quantitativa se utiliza da linguagem matemática para, dentre outros motivos, estabelecer relações entre as variáveis.

Quanto à natureza, a pesquisa pode ser classificada como básica.

Quanto aos objetivos, considera-se a pesquisa como sendo exploratória, como visto na Figura 6, uma vez que tem objetiva-se proporcionar maior familiaridade com o problema, tornando-o mais explícito (GIL, 2007).

Quanto aos procedimentos, trata-se de uma pesquisa experimental. De acordo com Gil (2007), esta tipologia consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis com potencial para influenciá-lo, e observar o comportamento de tal objeto.

Figura 6- Tipos de pesquisa



Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

As atividades executadas para o andamento da pesquisa estão descritas no Quadro 1.

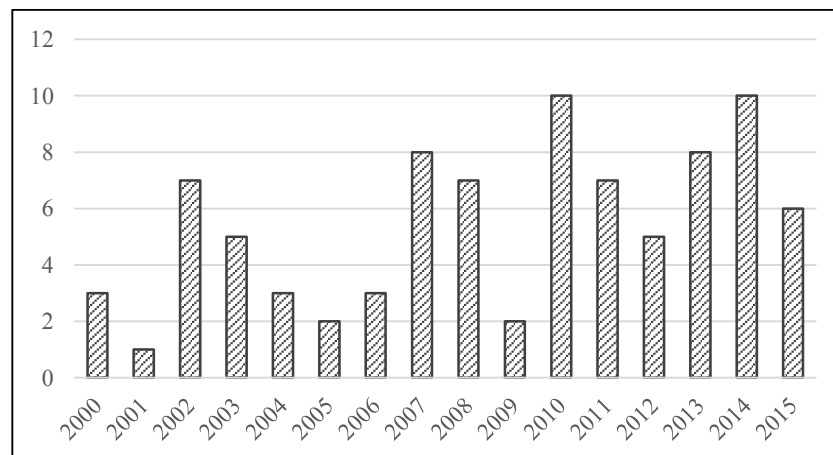
Quadro 1- Atividades realizadas para a conclusão do projeto

1. Revisão bibliográfica
2. Elaboração do programa inicial de simulação em FORTRAN
3. Teste do programa inicial, para a comparação de casos já abordados na literatura
4. Extensão do item 2 para casos multivariados autocorrelacionados
5. Geração de resultados
6. Análise e tabulação dos resultados
7. Elaboração do Trabalho de Graduação
8. Elaboração de artigos científicos

Fonte: o próprio autor

A autocorrelação tem sido um tema cada vez mais relevante ao longo dos anos. A pesquisa foi realizada utilizando-se o termo *autocorrelation* no campo *Keywords* em um conhecido banco de dados. Para a área de Engenharia, foram apresentados mais de 2300 resultados desde o ano de 2000, e, adicionando o termo *control charts* em *Keywords*, obteve-se os resultados mostrados na Figura 7.

Figura 7- Quantidade de artigos com os temas *autocorrelation* e *control charts* por ano



Fonte: o próprio autor

### 3.1 REFINAMENTO DO LIMITE DE CONTROLE

Para o funcionamento do programa, adotou-se  $NMA_0 = 200,0$  e os deslocamentos inicialmente são nulos, ou seja, o processo está sob controle. A princípio, o valor de  $LC$  era desconhecido. Para tal, fez-se necessário que, ao início de todas as simulações, um

refinamento de  $LC$  fosse realizado. Sabe-se que, caso o  $NMA_S$  for menor que  $NMA_0$ , é necessário que  $LC$  seja aumentado, para que um número menor de amostras seja detectado como erro. O mesmo vale para o caso inverso, se  $NMA_S$  for maior que  $NMA_0$ , o valor de  $LC$  deve ser reduzido.

Figura 8- Primeira etapa iterativa do processo de refinamento do limite de controle

```

do
  fl = 0.0
  total = 0.0
  media(1)=0.0
  media(2)=0.0

  do
    call chfac (k, cov, 2, tol, irank, rsig, ldrsig)
    call rnavn (nr, k, rsig, ldrsig, r, ldr)

    ma(1)=0
    ma(2)=0
    do j=1,2,1
      do i=1,nr,1
        ma(j) = ma(j) + (media(j) + shift(j) + r(i,j))/nr
      end do
      media(j) = phi(j)*media(j) + sigmalfa(j)*rnnof()
    end do

    b(1)=0
    b(2)=0
    call linrg (n, cov, lda, ain, ldainv)
    do i=1,2,1
      do j=1,2,1
        b(i) = b(i) + ain(i,j)*ma(j)
      end do
    end do
    t2=0
    do i=1,2,1
      t2 = t2 + ma(i)*b(i)
    end do
    t2 = nr*t2
    if(t2 > lc) then
      fl = fl + 1
    end if
    total = total + 1
    if(fl > 999) exit
  end do
  nex = total/1000.0
  print*,lc
  print*, nex

  if (nex > nma + 200.0 .or. nex < nma - 200.0) then
    i = 1.0
  else if (nex > nma + 50 .or. nex < nma - 50) then
    i = 2.0
  end if

  if (nex < nma + 1) then
    lc = lc + 10**(-i)
  end if
  if (nex > nma - 1) then
    lc = lc - 10**(-i)
  end if

  if((nma-nex)>-50.and.(nma-nex)<50)exit
end do

```

Fonte: o próprio autor

A Figura 8 é referente a um caso bivariado. Após ser estabelecido um valor arbitrário de  $LC$  e ser definido que as médias de ambas as variáveis são nulas, o primeiro laço gera valores de  $T^2$ , de tamanho de amostra 5, até que haja 1000 amostras acima de  $LC$ . Com isso, calcula-se o  $NMA_S$ , e compara-se com o  $NMA_0$ . Esta primeira sessão de refinamento é uma série de iterações que analisa a diferença modular entre os dois valores. Se for maior que 200,0,

adiciona-se ou subtrai-se 0,1 de  $LC$ , e se for menor que 200,0 e maior que 50, o acréscimo ou decréscimo é de 0,01. Quando a diferença modular entre  $NMA_S$  e  $NMA_0$  menor que 50, passa-se então para uma etapa de refinamento mais preciso.

Figura 9- Segunda etapa iterativa do processo de refinamento do limite de controle

```

do
  fl = 0.0
  total = 0.0
  media = 0.0

  do
    call chfac (k, cov, 2, tol, irank, rsig, ldrsig)
    call rnmvn (nr, k, rsig, ldrsig, r, ldr)

    ma(1)=0
    ma(2)=0
    do j=1,2,1
      do i=1,nr,1
        ma(j) = ma(j) + (media(j) + shift(j) + r(i,j))/nr
      end do
      media(j) = phi(j)*media(j) + sigmalfa(j)*rnnof()
    end do

    b(1)=0
    b(2)=0
    call linrg (n, cov, lda, ain, ldainv)
    do i=1,2,1
      do j=1,2,1
        b(i) = b(i) + ain(i,j)*ma(j)
      end do
    end do
    t2=0
    do i=1,2,1
      t2 = t2 + ma(i)*b(i)
    end do
    t2 = nr*t2
    if(t2 > lc) then
      fl = fl + 1
    end if
    total = total + 1
    if(fl > 7999) exit
  end do
  nexp=total/8000.0
  print*,lc
  print*, nexp

  erro= 100*(nma-nexp)/nma
  if(erro>0.5 .and. erro<0.5) exit
  if (erro>-2 .and. erro<2) then
    x = 1.0003
  else if (erro>-5 .and. erro<5) then
    x=1.0006
  else
    x=1.0009
  end if

  if (nexp < nma) then
    lc = lc*x
  end if
  if (nexp > nma) then
    lc = lc*(2-x)
  end if
end do

```

Fonte: o próprio autor

A segunda etapa do processo de refinamento, representada na Figura 9, é semelhante à primeira. São gerados valores de  $T^2$  até que haja 8000 amostras fora do limite. Calcula-se então o erro percentual entre  $NMA_S$  e  $NMA_0$ . O aumento ou decréscimo do limite de controle é dado percentualmente, variando entre 0,3%, 0,6% e 0,9%. São realizadas iterações até que o erro seja menor que 0,5%. Sendo assim, encontra-se o valor de  $LC$  desejado, para então ser analisada a simulação com o deslocamento de médias.

## 4 RESULTADOS ENCONTRADOS

### 4.1 ESTUDO UNIVARIADO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Antes de se desenvolver o programa computacional desejado para simular os casos multivariados autocorrelacionados, foi necessário um programa inicial mais simples, para verificar a validade dos resultados e compará-los aos encontrados na literatura. Para tal, o alvo de estudo foram os casos univariados autocorrelacionados, como mostra o programa presente no Apêndice A.

Para o cálculo do erro entre os resultados obtidos com as simulações e os resultados teóricos existentes utilizou-se a Equação 5.

$$Erro = 100\% \frac{NMA_T - NMA_S}{NMA_T} \quad (5)$$

onde  $NMA_T$  é o número médio de amostras até o sinal teórico e  $NMA_S$  é o número médio de amostras até o sinal experimentalmente.

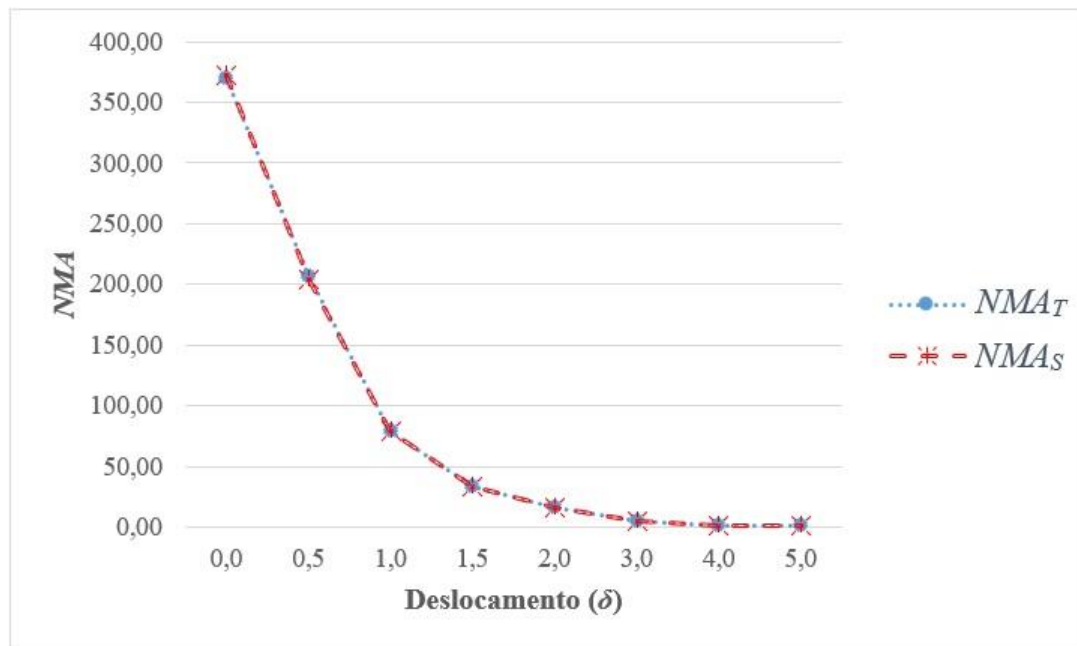
A partir de simulações do programa inicial, foi possível coletar dados suficientes para que fosse verificada a validade, comprovada pelo baixo erro encontrado, como visto nas Tabelas 1 e 2, sendo possível dar continuidade à pesquisa para programas mais complexos.

Tabela 1 - Valores de  $NMA_T$ ,  $NMA_S$  e erros para processos autocorrelacionados ( $n=1$ ;  $\phi=0,8$ )

$\delta$	$\Psi = 0,1$			$\Psi = 0,5$			$\Psi = 0,9$		
	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)
0,0	370,40	364,95	1,47	370,40	365,79	1,24	370,40	364,95	1,47
0,5	168,50	167,94	0,33	238,00	231,17	0,35	339,40	336,94	0,72
1,0	51,80	51,89	0,17	106,30	106,07	0,22	270,00	268,44	0,58
1,5	18,70	18,66	0,21	49,20	49,22	0,04	198,90	198,94	0,02
2,0	8,10	7,96	1,73	24,90	25,32	1,69	142,70	142,56	0,09
3,0	2,40	2,43	1,25	7,90	7,93	0,35	73,40	73,55	1,14
4,0	1,30	1,28	1,69	3,10	3,12	0,65	41,00	40,93	0,17
5,0	1,00	1,04	4,40	1,60	1,61	0,81	23,90	23,73	0,71

Tabela 2 - Valores de  $NMA_T$ ,  $NMA_S$  e erros para processos autocorrelacionados ( $n=4$ ;  $\phi=0,8$ )

$\delta$	$\Psi = 0,1$			$\Psi = 0,5$			$\Psi = 0,9$		
	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)
0,0	370,40	365,94	1,20	370,40	372,80	0,65	370,50	375,14	1,28
0,5	74,20	73,69	0,69	206,00	203,97	0,99	333,10	334,48	1,07
1,0	14,10	14,07	0,21	79,50	78,87	0,79	266,50	266,64	0,05
1,5	4,10	4,03	1,71	33,90	33,91	0,03	195,50	196,91	1,24
2,0	1,80	1,76	2,44	16,10	15,92	1,12	138,50	137,76	0,53
3,0	1,00	1,02	2,40	4,50	4,64	3,11	71,40	69,69	2,39
4,0	1,00	1,00	0,00	1,70	1,70	0,24	39,00	38,81	0,49
5,0	1,00	1,00	0,00	1,10	1,10	0,01	22,60	22,52	0,35

Figura 10- Gráfico comparativo entre  $NMA_T$  e  $NMA_S$  ( $n=4$ ;  $\phi=0,8$ ;  $\Psi=0,5$ )

Fonte: o próprio autor

#### 4.2 DESEMPENHO DO GRÁFICO DE $T^2$ DE HOTELLING

Quando o processo está sendo monitorado por um gráfico convencional do tipo  $T^2$  (i.e., com parâmetros constantes), uma amostra de tamanho  $n$  é escolhida aleatoriamente em um espaço de tempo  $t$ . Então, com os valores da variável  $T^2$  obtidos das amostras, constrói-se um

gráfico com limite de controle  $LC$ , conhecido também como limite de ação. Um valor de  $T^2$  que ultrapasse o limite de controle é um sinal de que o processo não está em controle, e necessita de ajustes. Quando o vetor de médias do processo está centrado no alvo ( $\mu = \mu_0$ ), é pouco provável que um valor de  $T^2$  seja superior ao  $LC$ ; se isto acontecer, pode considerar-se que se trata de um alarme falso, pois o gráfico indevidamente assinala um desajuste. Tem-se que  $LC = \chi_{p,\alpha}^2$ , onde  $\alpha$  é a probabilidade de alarme falso e  $p$  é o número de variáveis a serem monitoradas.

Após estudarem-se os processos univariados autocorrelacionados, elaborou-se, na linguagem FORTRAN, o segundo código computacional, e foi usado para avaliar o desempenho do gráfico de  $T^2$  destinado ao monitoramento do vetor de médias de processos bivariados.

Neste estudo, foi adotado  $NMA_0 = 200,0$  e o número de valores por amostras de 4 e 5. Adota-se que as variáveis originais são bivariadas e distribuídas normalmente com a matriz de covariâncias e o vetor de médias dados respectivamente por  $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\mu' = \mu'_0 = (0; 0)$ . Com a ocorrência da causa especial, o vetor de médias  $\mu$  do processo se altera de  $\mu'_0 = (0; 0)$  para  $\mu'_1 = (\mu_{01} + \delta_1; \mu_{02} + \delta_2)$ , sendo  $\delta_1$  e  $\delta_2$  os deslocamentos das médias.

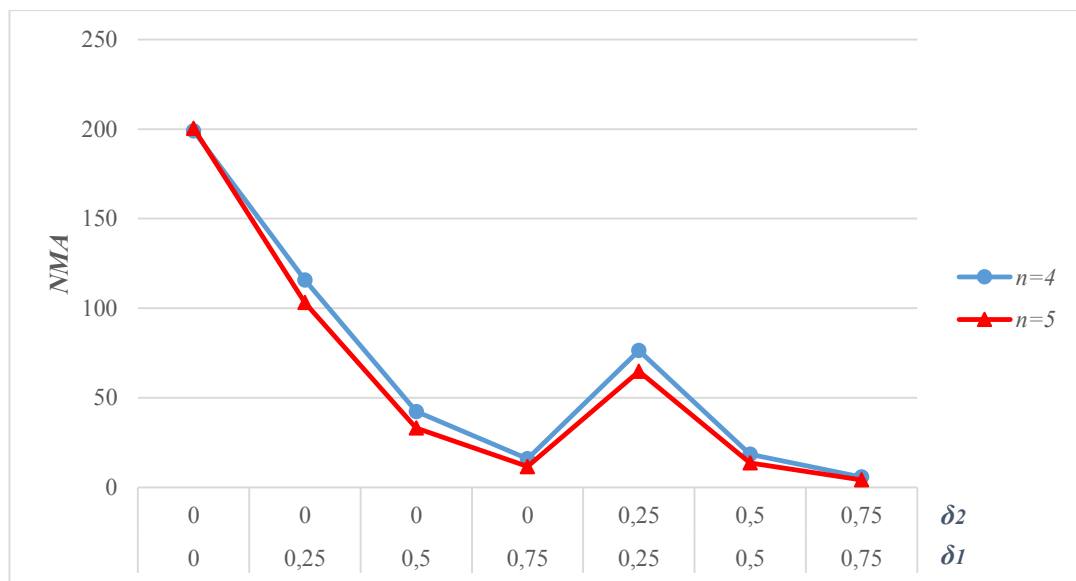
O valor de  $NMA$  é uma divisão simples entre o número de amostras que excedem o  $LC$  e o número total de amostras geradas, que, neste caso e em todos os outros da pesquisa, foi de 10000 amostras. Calcula-se então o erro de acordo com a equação (5).

Tabela 3 – Valores de  $NMA_T$ ,  $NMA_S$  e os erros para o gráfico de  $T^2$  ( $p=2$ ;  $n = 4$  e  $5$ )

		$n$					
		4			5		
$\delta_1$	$\delta_2$	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)	$NMA_T$	$NMA_S$	Erro (%)
0	0	200,00	198,98	0,51	200,00	200,38	0,19
0,25	0	115,53	115,76	0,20	103,32	103,18	0,14
0,50	0	41,91	42,30	0,93	32,95	33,16	0,64
0,75	0	15,78	15,96	1,14	11,39	11,59	1,76
0,25	0,25	76,87	76,41	0,60	64,71	64,73	0,03
0,50	0,5	18,49	18,48	0,05	13,64	13,69	0,37
0,75	0,75	5,76	5,76	0,02	4,13	4,17	0,97

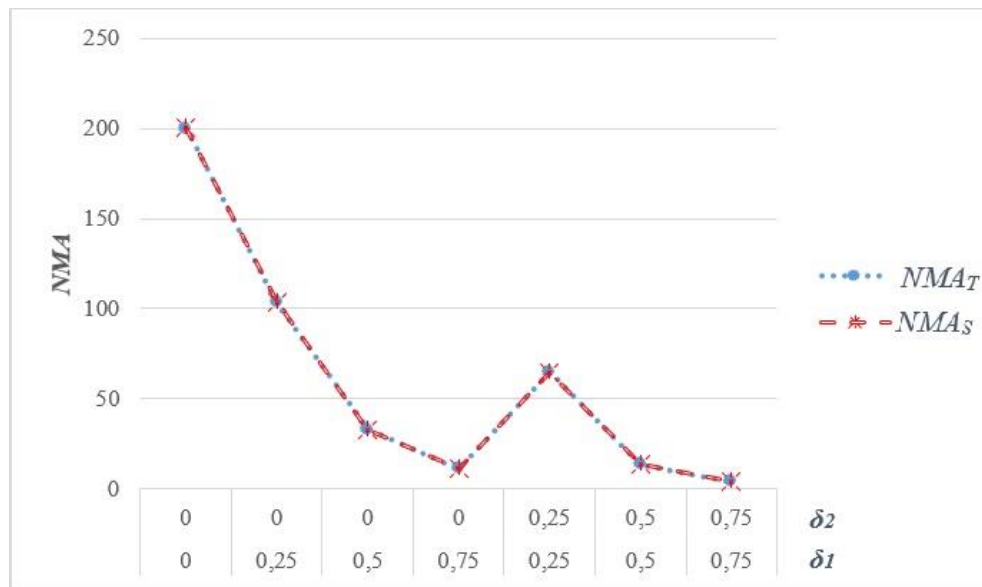
Analisando a Tabela 3, observa-se que quanto maior o deslocamento no vetor de médias, ou seja, quanto maior o valor de  $\delta_1$  e/ou  $\delta_2$ , mais rápido se detecta o alarme falso do processo, ou seja, menor o  $NMA$ . O mesmo ocorre com o aumento do número amostral  $n$ , em que se percebe o crescimento do poder de detecção do gráfico. Por exemplo, para  $\delta_1 = 0,25$  e  $\delta_2 = 25$ , o  $NMA_S$  diminui de 76,41 para 64,73 quando  $n$  aumenta de 4 para 5.

Figura 11- Gráfico de  $NMA$  para tamanhos de amostra diferentes ( $p=2$ )



Fonte: o próprio autor

Observa-se também que os resultados obtidos nas simulações do código computacional se mostraram bastante satisfatórios, uma vez que se aproximaram dos resultados teóricos, apresentando uma margem de erro inferior a 2%. Ressalta-se que a validação de tal código elaborado depende dos erros. Quanto menor o erro referente ao código, mais confiável será seu desempenho. Considera-se aceitável para este estudo um erro de no máximo 2%.

Figura 12- Gráfico comparativo entre  $NMA_T$  e  $NMA_S$  ( $p=2, n=5$ )

Fonte: o próprio autor

#### 4.3 GRÁFICOS DE $T^2$ PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

No processo de elaboração do terceiro código computacional referente à pesquisa, utilizou-se como base uma combinação entre o primeiro e o segundo programa, já que estes se mostraram bastante confiáveis quanto a seus resultados. Para esta etapa do projeto, desejava-se obter as propriedades do gráfico de  $T^2$  para o monitoramento de processos bivariados autocorrelacionados.

Nas Tabelas 4 e 5, mantém-se  $\phi_i$  constante, e  $\Psi$  varia entre 0,1, 0,5 e 0,7. Percebe-se que o parâmetro  $\phi$  pouco interfere nos valores de  $NMA$ , como é facilmente visto quando se compara, para  $\Psi=0,7$  e  $\delta_1 = \delta_2 = 0,50$ , o  $NMA$  encontrado para  $\phi_1 = \phi_2 = 0,0$  (129,79) e o de  $\phi_1 = \phi_2 = 0,5$  (129,41).

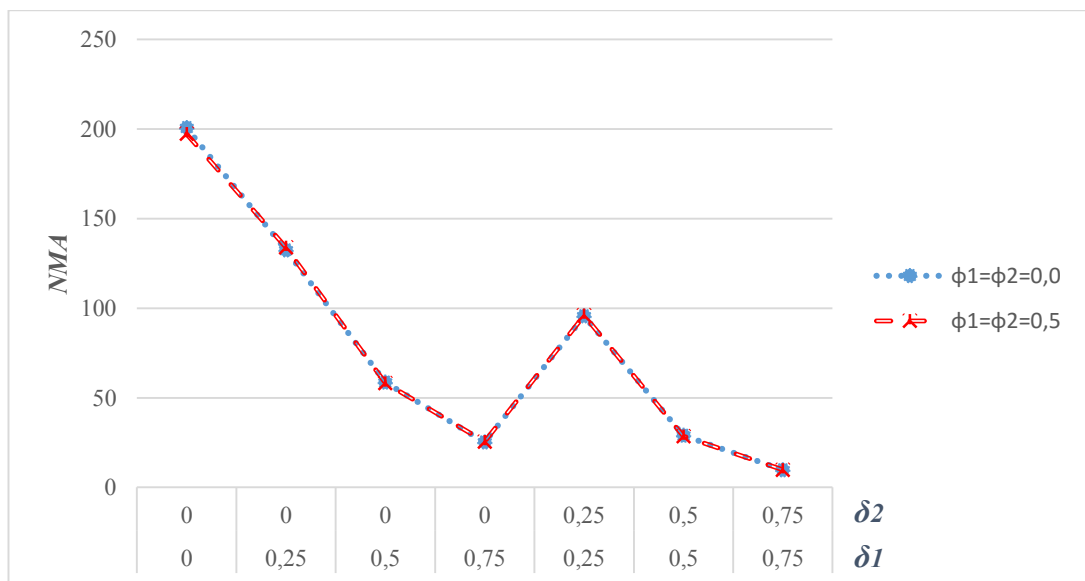
Tabela 4 – Valores de  $NMA$  para o gráfico  $T^2$  de processos autocorrelacionados ( $p=2; n=4$ )

		$\phi_1 = \phi_2 = 0,0$			$\phi_1 = \phi_2 = 0,5$			
		$\Psi$	0,1	0,5	0,7	0,1	0,5	0,7
$LC$			15,27	52,91	109,09	15,27	52,91	109,09
$\delta_1$	$\delta_2$	$NMA$	$NMA$	$NMA$	$NMA$	$NMA$	$NMA$	$NMA$
0,00	0,00		200,73	199,85	199,06	197,31	195,02	196,73

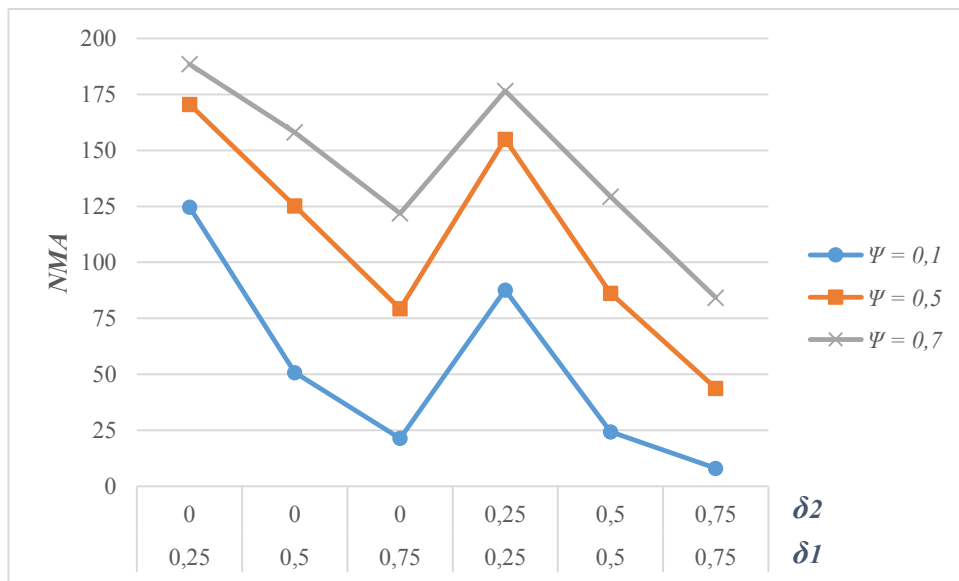
0,25	0,00	132,51	175,22	189,39	133,99	173,90	187,42
0,50	0,00	58,61	127,49	155,95	58,24	123,83	158,51
0,75	0,00	25,20	82,82	120,43	25,45	80,97	119,67
0,25	0,25	95,60	153,60	171,15	96,01	156,40	172,57
0,50	0,50	28,97	87,15	127,86	28,50	88,48	129,01
0,75	0,75	9,74	45,49	83,07	9,75	46,08	82,86

Tabela 5 – Valores de  $NMA$  para o gráfico  $T^2$  de processos autocorrelacionados ( $p=2; n=5$ )

		$\phi_1 = \phi_2 = 0,0$			$\phi_1 = \phi_2 = 0,5$		
$\Psi$		0,1	0,5	0,7	0,1	0,5	0,7
$LC$		16,46	63,67	134,35	16,46	63,67	134,35
$\delta_1$	$\delta_2$	$NMA$	$NMA$	$NMA$	$NMA$	$NMA$	$NMA$
0,00	0,00	197,53	201,68	203,18	199,52	196,73	197,77
0,25	0,00	124,07	177,87	191,15	124,71	170,56	188,56
0,50	0,00	51,48	125,99	159,46	50,77	125,21	158,08
0,75	0,00	20,76	80,67	123,46	21,41	79,27	121,89
0,25	0,25	87,62	154,88	181,85	87,69	155,03	176,57
0,50	0,50	24,53	87,61	129,79	24,33	86,21	129,41
0,75	0,75	8,03	45,61	86,09	8,04	43,77	84,23

Figura 13- Gráfico referente à Tabela 4 ( $p=2; n=4; \Psi=0,1$ )

Fonte: o próprio autor

Figura 14- Gráfico referente à Tabela 5 ( $p=2; n=4; \phi_1 = \phi_2 = 0,5$ )

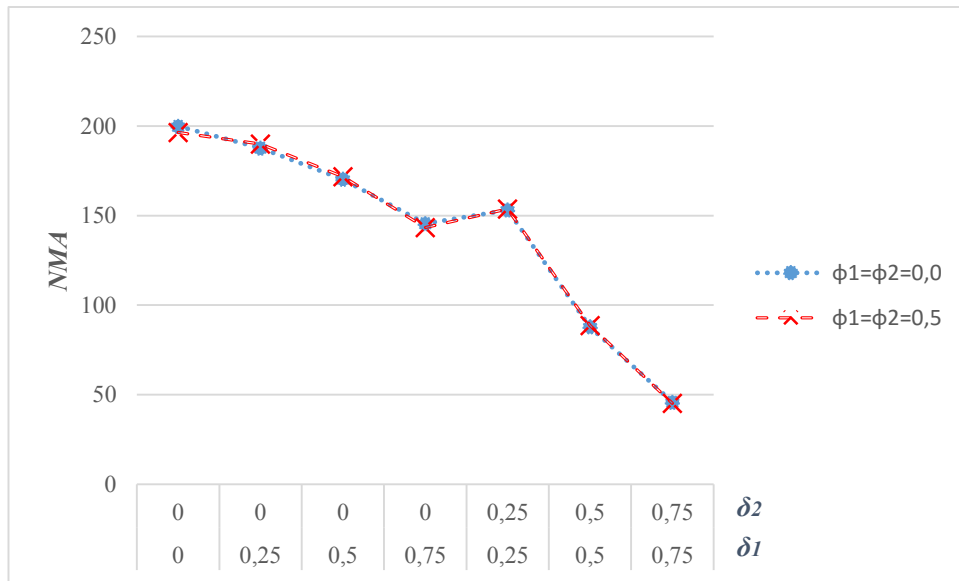
Fonte: o próprio autor

A Tabela 6 apresenta  $\Psi$  diferente para cada uma das duas variáveis. Mais uma vez, prova-se que  $\phi_i$  exerce baixa influência sobre o resultado de NMA, quando se compara os valores entre  $\phi_1 = \phi_2 = 0,0$  e  $\phi_1 = \phi_2 = 0,5$ . É interessante se observar também que, tendo um mesmo deslocamento, mas em uma variável com autocorrelação diferente, os resultados são bastante divergentes, como mostra a Figura X.

Tabela 6 – Valores de NMA para o gráfico  $T^2$  com  $\Psi_i$  diferente ( $p=2; n=5$ )

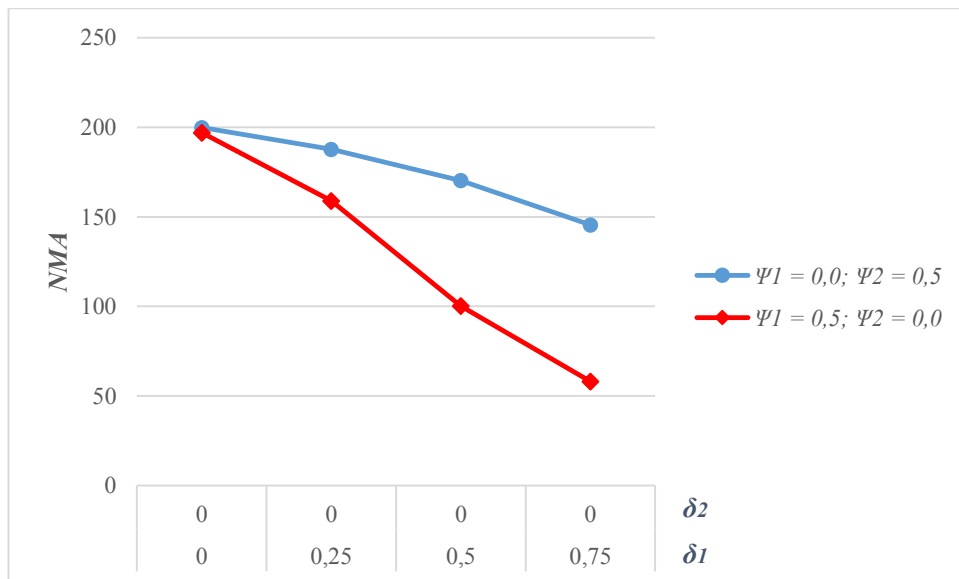
		$\phi_1 = \phi_2 = 0,0$		$\phi_1 = \phi_2 = 0,5$	
		$\Psi_1 = 0,0$	$\Psi_1 = 0,5$	$\Psi_1 = 0,0$	$\Psi_1 = 0,5$
		$\Psi_2 = 0,5$	$\Psi_2 = 0,0$	$\Psi_2 = 0,5$	$\Psi_2 = 0,0$
<i>LC</i>		48,31	48,31	48,31	48,31
$\delta_1$	$\delta_2$	<i>NMA</i>	<i>NMA</i>	<i>NMA</i>	<i>NMA</i>
0,00	0,00	199,84	196,96	196,38	197,85
0,25	0,00	187,67	158,92	189,95	160,01
0,50	0,00	170,24	100,24	171,66	99,63
0,75	0,00	145,50	58,08	143,40	58,14
0,25	0,25	153,12	155,38	153,73	156,45
0,50	0,50	87,88	88,39	88,61	88,69
0,75	0,75	45,77	45,09	45,28	45,45

Figura 15- Gráfico referente à Tabela 6 ( $p=2; n=5; \Psi_1 = 0,0; \Psi_2 = 0,5$ )



Fonte: o próprio autor

Figura 16- Gráfico referente à Tabela 5 ( $p=2; n=5; \phi_1 = \phi_2 = 0,0$ )



Fonte: o próprio autor

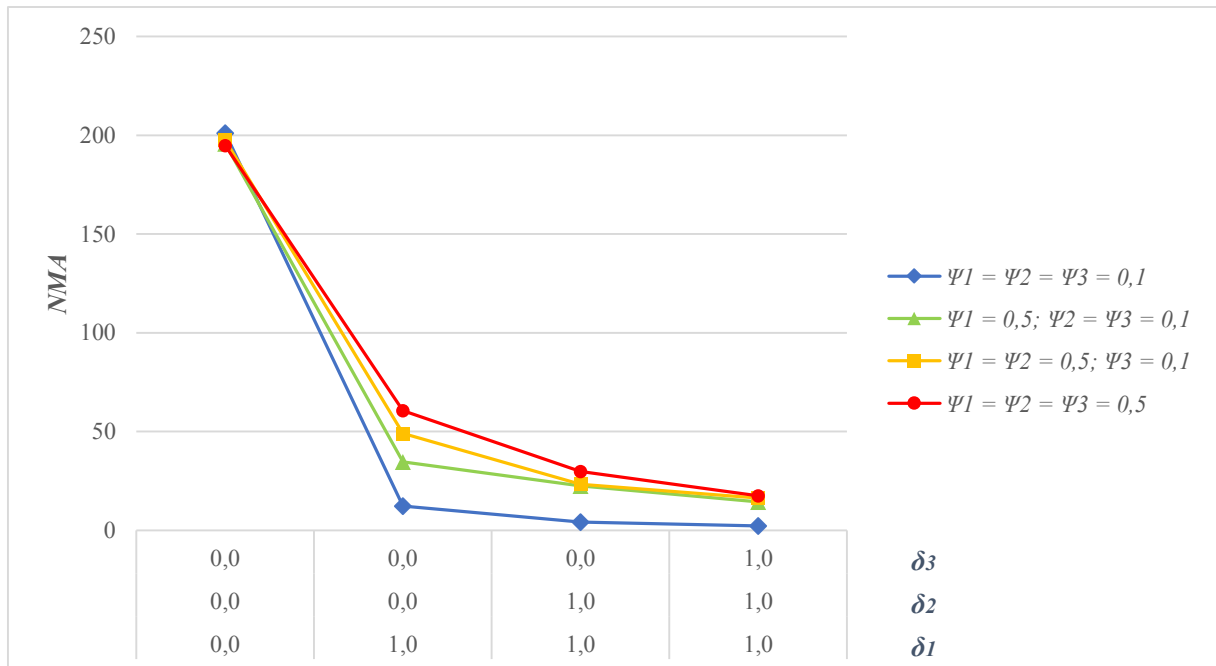
O código computacional foi ampliado para o estudo de casos multivariados, ou seja, para  $p=3$  e 4.

Tabela 7 – Valores de  $NMA$  para o gráfico  $T^2$  de processos autocorrelacionados ( $p=3$ ;  $n=5$ ;  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,0$ )

			$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$LC$
			0,1	0,1	0,1	19,94
			0,5	0,1	0,1	50,91
			0,5	0,5	0,1	65,15
			0,5	0,5	0,5	76,84
$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$				
0,0	0,0	0,0	197,49	196,36	197,43	195,34
1,0	0,0	0,0	12,03	35,66	50,45	61,30
0,0	1,0	0,0	12,28	100,77	50,26	61,26
0,0	0,0	1,0	12,19	100,46	114,97	61,80
1,0	1,0	0,0	4,16	22,46	23,53	29,26
1,0	0,0	1,0	4,21	22,65	33,10	30,02
0,0	1,0	1,0	4,24	49,54	32,80	30,46
1,0	1,0	1,0	2,31	14,53	16,58	17,21

Tabela 8 – Valores de  $NMA$  para o gráfico  $T^2$  de processos autocorrelacionados ( $p=3$ ;  $n=5$ ;  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,5$ )

			$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$LC$
			0,1	0,1	0,1	19,94
			0,5	0,1	0,1	50,91
			0,5	0,5	0,1	65,15
			0,5	0,5	0,5	76,84
$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$				
0,0	0,0	0,0	201,09	195,67	197,51	194,83
1,0	0,0	0,0	12,25	34,61	49,09	60,66
0,0	1,0	0,0	12,18	100,35	49,13	62,30
0,0	0,0	1,0	11,99	99,85	111,65	61,74
1,0	1,0	0,0	4,15	22,58	23,26	29,75
1,0	0,0	1,0	4,19	22,71	34,05	29,82
0,0	1,0	1,0	4,24	49,74	33,42	29,20
1,0	1,0	1,0	2,29	14,38	16,33	17,56

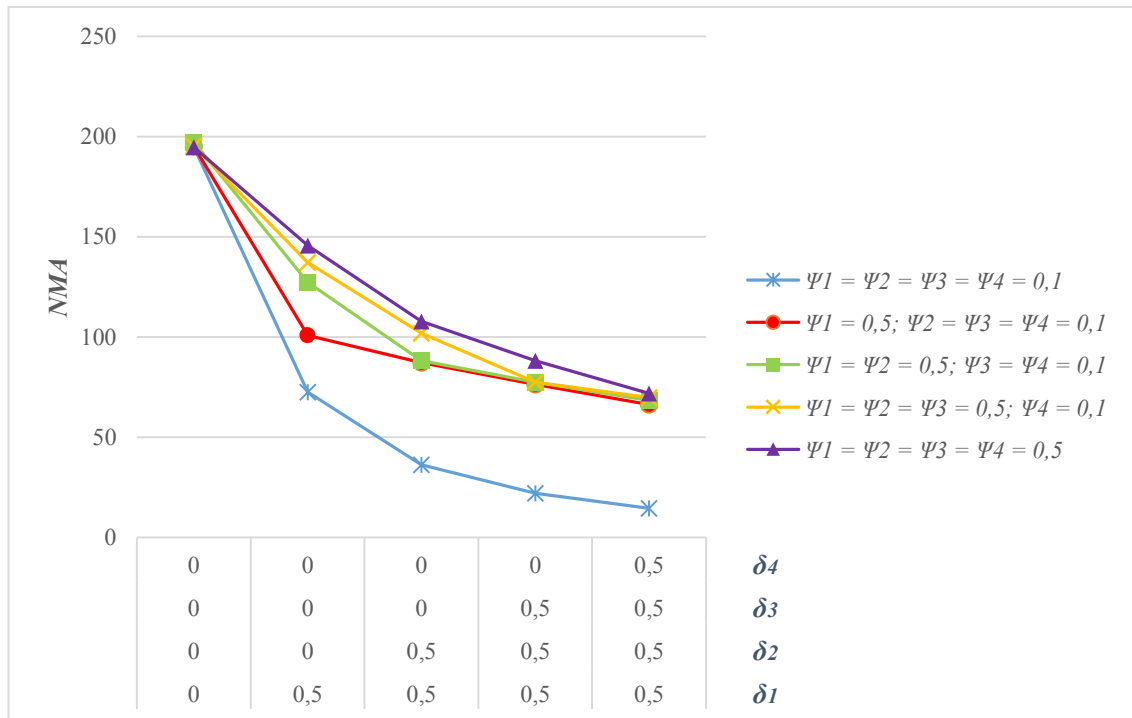
Figura 17- Gráfico referente à Tabela 8 ( $p=3; n=5; \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,5$ )

Fonte: o próprio autor

Tabela 9 – Valores de  $NMA$  para o gráfico  $T^2$  de processos autocorrelacionados ( $p=4; n=5; \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0,0$ )

				$\Psi_1$	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5
				$\Psi_2$	0,1	0,1	0,5	0,5	0,5
				$\Psi_3$	0,1	0,1	0,1	0,5	0,5
				$\Psi_4$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5
				$LC$	23,03	52,67	67,08	78,65	89,09
$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$						
0,0	0,0	0,0	0,0	194,98	195,28	197,27	195,33	194,73	
0,5	0,0	0,0	0,0	72,58	100,84	127,42	137,22	145,79	
0,5	0,5	0,0	0,0	36,27	87,25	88,30	102,03	107,86	
0,5	0,5	0,5	0,0	22,04	76,34	77,57	77,59	88,27	
0,5	0,5	0,5	0,5	14,54	66,39	68,36	69,92	71,88	

Figura 18- Gráfico referente à Tabela 9 ( $p=4; n=5; \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0,0$ )



Fonte: o próprio autor

#### 4.4 COMPARAÇÃO DE DESEMPENHOS DOS GRÁFICOS DE $\bar{X}$ E $T^2$

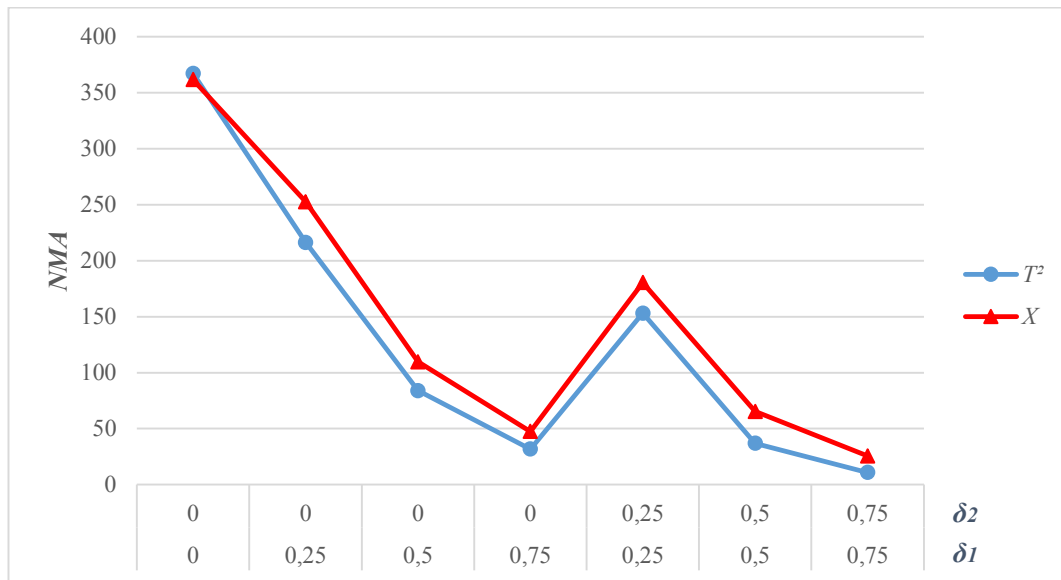
Para esta etapa do trabalho, utilizou-se o mesmo programa computacional, com a diferença de que o  $NMA_0$  é de 370,4, referente a um limite de controle de  $3\sigma$ . A comparação foi feita em relação aos dados de Machado e Pasin (2012), em que são analisados os gráficos de controle  $\bar{X}$  univariados para o monitoramento de processos bivariados. Com isso, foi possível se obter as Tabelas 10 e 11.

Tabela 10- Valores de  $NMA$  para os gráficos de  $T^2$  e  $\bar{X}$  para processos bivariados ( $p=2; n=5; \Psi_1 = \Psi_2 = 0,1$ )

		$\phi_1 = 0,0$		$\phi_1 = 0,8$		$\phi_2 = 0,0$		$\phi_2 = 0,8$	
		$T^2$	$\bar{X}$	$T^2$	$\bar{X}$	$T^2$	$\bar{X}$	$T^2$	$\bar{X}$
$\delta_1$	$\delta_2$								
0,00	0,00	371,51	372,51	371,39	374,61	370,84	344,81	367,31	361,72
0,25	0,00	223,2	235,88	221,70	234,80	223,45	249,26	216,25	252,64

0,50	0,00	83,76	96,64	83,98	94,22	83,41	107,08	83,96	109,62
0,75	0,00	31,72	38,43	31,68	37,65	32,02	49,01	31,71	47,42
0,25	0,25	150,51	174,19	151,92	175,78	151,15	182,97	153,14	180,48
0,50	0,50	37,47	55,51	37,20	58,21	37,09	59,07	36,95	65,32
0,75	0,75	11,07	20,71	11,15	22,51	10,82	22,58	10,90	25,61

Figura 19- Gráfico comparativo entre  $T^2$  e  $\bar{X}$  ( $p=2; n=5; \Psi_1 = \Psi_2 = 0,1$ )



Fonte: o próprio autor

Tabela 11- Valores de  $NMA$  para os gráficos de  $T^2$  e  $\bar{X}$  para processos bivariados ( $p=2; n=5; \Psi_1 = \Psi_2 = 0,5$ )

		$\phi_1 = 0,0$		$\phi_1 = 0,8$		$\phi_2 = 0,0$		$\phi_2 = 0,8$	
		$T^2$	$\bar{X}$	$T^2$	$\bar{X}$	$T^2$	$\bar{X}$	$T^2$	$\bar{X}$
$\delta_1$	$\delta_2$								
0,00	0,00	368,44	369,40	368,18	371,15	366,27	362,63	362,52	369,40
0,25	0,00	317,77	328,25	322,36	324,36	322,24	335,20	315,11	328,25
0,50	0,00	220,66	234,69	220,99	222,41	217,18	264,68	219,79	234,69
0,75	0,00	136,26	148,26	133,24	144,97	137,62	190,96	132,18	148,26
0,25	0,25	276,49	291,64	279,14	296,78	283,52	293,07	273,59	291,64
0,50	0,50	146,20	177,83	147,50	188,27	144,56	183,79	147,62	177,83
0,75	0,75	72,58	95,28	70,32	106,95	72,84	103,74	70,03	95,28

## 5 CONCLUSÃO

Tendo em vista a proposta inicial do trabalho, chega-se à conclusão de que os objetivos foram alcançados.

O coeficiente autoregressivo  $\phi$  tem o efeito de aumentar a variabilidade das amostras, mas não possui influência significativa no valor final do *NMA*. Isto se observa na semelhança de resultados para valores de  $\phi$  diferentes e  $\Psi_i$  constantes, além de o fato de um  $\phi$  maior exigir mais iterações do refinamento, para ao final estabelecer o mesmo valor de *LC*.

Por outro lado, verificou-se forte influência por parte do coeficiente de autocorrelação  $\Psi$ , assim como esperado, nos resultados de *NMA* obtidos. Além de forçar um aumento significativo no valor do limite de controle, foi possível observar que, para um maior valor de  $\Psi$  e um mesmo deslocamento de médias, o *NMA* aumentava, o que indica que são necessárias mais amostras para se detectar que o processo está fora de controle.

Além disso, o objetivo secundário de se comparar o desempenho entre gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $T^2$  foi verificado e, conforme já esperado, o segundo se mostrou mais ágil para detectar o deslocamento nas médias.

Ao mesmo tempo em que aceitar a autocorrelação reduz o tempo entre amostras, neste trabalho percebeu-se que, quanto maior a autocorrelação, maior o *NMA*. Como sugestão para futuras pesquisas, propõe-se que se faça uma análise de sensibilidade, para se encontrar um ponto ótimo entre a autocorrelação e o tempo de detecção da causa especial.

## REFERÊNCIAS

- ATIENZA, O. O.; TANG, L. C.; ANG, B. W.; A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v.30, p.340-350, 1998.
- CARRÉ, R. A. **Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados**. 2012. 52 f. Monografia de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.
- CHUA, M. K., MONTGOMERY, D. C. A Multivariate Quality Control Scheme. **International Journal of Quality & Reliability Management**, Vol. 8 Iss 6 pp. 29-46, 1991.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. Controle Estatístico de Qualidade. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 334 p., 2005.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Estudo das propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 15, 2003a, Marília. **CD ROM**. Marília: Universidade Estadual Paulista, 2003a, 1p.
- DU, S.; HUANG, D.; LV, J. Recognition of concurrent control chart patterns using wavelet transform decomposition and multiclass support vector machines. **Computers & Industrial Engineering**, v. 66, p.683-695, 2013.
- FARAZ, A.; SANIGA, E. Multiobjective genetic algorithm approach to the economic statistical design of control charts with an application to  $\bar{X}$  and  $S^2$  charts. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 29, p. 407-415, 2013.
- FRANCO, B. C. et al. Economic design of Shewhart control charts for monitoring autocorrelated data with skip sampling strategies. **International Journal of Production Economics**, v. 151, p. 121–130, Maio 2014.
- FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.
- GAMESALINGAM, S., KUMAR, K. Detection of financial distress via multivariate statistical analysis. **Managerial Finance**, Vol. 27, Iss 4, pp. 45 – 55, 2011.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.
- HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. **Techniques of Statistical Analysis**, p. 111-184, New York, McGraw Hill, 1947.
- LEONI, R. C. **Gráfico de Hotelling com esquemas especiais de amostragem para o monitoramento de processos bivariados autocorrelacionados**. 2015. 140p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

MACHADO, M. A. G. **Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados**. 2009. 158f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

MACHADO, M. A. G.; PASIN, M. A. V. **Gráficos de  $\bar{X}$  univariados para o monitoramento de processos bivariados cujo vetor de médias oscila com o tempo**. In: 1ª FASE CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 24, 2012, Guaratinguetá. Publicação dos trabalhos apresentados no XXIV CIC. Guaratinguetá: Universidade Estadual Paulista, 2012, 4p.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. Sixth Edition. Joh Wiley & Sons, Inc., New York, New York, 2009.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. **Análise de Séries Temporais**. 1ª. Ed., São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2004, 535 p.

NIAKI, S. T. A.; KHEDMATI, M. Estimating the change point of the parameter vector of a multivariate Poisson processes monitored by a multi-attribute  $T^2$  control chart. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 64, p. 1625-1642, 2013.

OLIVEIRA, J. O. **Item/Capítulo de Método Científico- Estrutura e informações principais**. Material de apoio, Trabalho de Formatura, 2015.

SHEWHART, W. A. **Economic control of quality of manufactured product**. New York: D. Van Nostrand Company, 1931.

TAKAMORI, M. K. **Gráficos de  $T^2$  para o monitoramento de processos bivariados cujo vetor de médias oscila com o tempo**. In: 1ª FASE CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 24, 2012, Guaratinguetá. Publicação dos trabalhos apresentados no XXIV CIC. Guaratinguetá: Universidade Estadual Paulista, 2012, 4p.