Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O Teorema Fundamental da Álgebra via Teoria de Homotopia

João Damasceno de Oliveira Marques

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

2016

512 Marques, João Damasceno de Oliveira
M357t O Teorema Fundamental da Álgebra via Teoria de Homotopia/ João Damasceno de Oliveira Marques- Rio Claro: [s.n.], 2016.
61 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientador: Thiago de Melo

1. Álgebra. 2. Grupo Fundamental do Círculo. 3. Topologia. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP - Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

João Damasceno de Oliveira Marques

O Teorema Fundamental da Álgebra via Teoria de Homotopia

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - IGCE - Unesp Rio Claro

Prof. Dr. Luiz Hartmann Jr.
Departamento de Matemática - UFSCar São Carlos

Rio Claro, 20 de dezembro de 2016

A Deus.
À minha família.
Aos meus professores.
Aos meus amigos.
Aos meus alunos.
Dedico

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por alimentar minha fé e permitir que eu cumprisse esta importante etapa da minha vida.

Agradeço exponencialmente à minha mãe, Eurides, por ter me criado com amor. A meu pai, João Damasceno *(in memorian)*, por me ensinar os valores do trabalho, da honestidade e da caridade e aos meus irmãos por acreditarem em mim.

À minha querida esposa, Shayra, por seus constantes incentivos e por ter me acompanhado até aqui afim de que fosse possível concretizar este sonho.

Em especial agradeço, meu orientador, o Prof. Dr. Thiago de Melo, pela paciência com que me orientou, permitindo assim que eu aprendesse e amadurecesse bastante.

A todos os professores e funcionários do IGCE que me ajudaram na conclusão deste trabalho.

Agradeço também ao Instituto Federal do Maranhão e à Secretaria Estadual de Educação do Maranhão pelo apoio e confiança neste processo de estudos de mestrado.

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.

Carl Friedrich Gauss

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra por meio da Teoria de Homotopia. Esta teoria é uma das mais importantes da Topologia Algébrica. Para um melhor entendimento do tema faz-se uma retomada de algumas definições de Topologia Geral, em seguida estuda-se tópicos de homotopia e também o tema a eles relacionado, denominado Grupo Fundamental. De posse destas ideias demonstra-se o Teorema Fundamental da Álgebra. O texto tem como principal referência o livro [5].

Palavras-chave: Álgebra, Grupo Fundamental do Círculo, Topologia.

Abstract

The main objective of this work is the proof of the Fundamental Theorem of Algebra through the Homotopy Theory. This theory is one of the most important in Algebraic Topology. For a better understanding of the subject one recalls some definitions of General Topology, next it is studied homotopy topics and also a related subject, namely Fundamental Group. Making use of these concepts the proof of Fundamental Theorem of Algebra is shown. The main reference for the text is the book [5].

Keywords: Algebra, Fundamental Group of Circle, Topology.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O estudo, por volta do século XIX, de uma geometria cujo foco são as propriedades de figuras geométricas que se conservam quando todas as propriedades métricas são eliminadas, deu origem ao que modernamente denominamos Topologia e que a princípio foi chamada de *Analysis Situs*. Desta forma, a Topologia surge no cenário matemático e hoje se situa como uma das áreas de grande importância da Matemática Moderna.

Neste trabalho demonstraremos o Teorema Fundamental da Álgebra através da Teoria de Homotopia, que é um conteúdo pertencente à Topologia, mais especificamente a uma sub-área desta, denominada Topologia Algébrica, que como o nome indica se presta a estudar problemas de Topologia através da Álgebra. No entanto, nestre trabalho faremos algo inverso, ou seja, estudaremos um problema da Álgebra através da Topologia.

O trabalho terá início com conceitos de topologia geral, tais como: conjuntos abertos e fechados da reta, espaços topológicos, continuidade de funções e homeomorfismo. Daí prosseguiremos para a topologia algébrica através do estudo do grupo fundamental, em que o conceito de homotopia encontra-se inserido.

Em todos os tópicos traremos exemplos com o objetivo de melhor fixá-los. Por fim, usaremos os conceitos estudados para demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que todo polinômio

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

em que n é um inteiro positivo e $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ são números complexos, possui uma raiz, isto é, existe um número complexo α tal que $f(\alpha) = 0$.

Todas as figuras deste trabalho são adaptações das originais encontradas em [5], com exceção das figuras 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10.

2 Topologia da Reta

Neste capítulo, estudaremos as definições de conjunto aberto e fechado da reta, assim como dois teoremas relativos a estes conjuntos. O teorema 2.1 nos servirá para classificar o conjunto dos números reais, que denota-se por $\mathbb{R}$, como a topologia usual da reta no capítulo seguinte. Aqui utilizamos as referências [4] e [6].

2.1 Conjuntos Abertos

Definição 2.1. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Um ponto $a \in X$ é dito* ***ponto interior de*** *X quando existir $\varepsilon > 0$ tal que*

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq X.$$

O conjunto

$$\operatorname{int} X = \{x \in X : x \text{ é ponto interior}\},$$

denotará o ***conjunto de todos os pontos interiores de*** *X.*

Observação 2.1. Pela definição 2.1 sempre é verdade que $\operatorname{int} X \subseteq X$, mas nem sempre ocorre $X \subseteq \operatorname{int} X$ como nos mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1. Seja $X = [0, 3)$. Temos que qualquer $a \in (0, 3)$ é ponto interior de X. De fato, seja

$$\varepsilon = \min\{a, 3 - a\} > 0$$

Logo,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq [0, 3).$$

Contudo, 0 não é ponto interior de X. Com efeito, para todo $\varepsilon > 0$,

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \nsubseteq [0, 3).$$

Portanto,

$$X = [0, 3) \nsubseteq (0, 3) = \operatorname{int} X.$$

Definição 2.2. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é chamado* ***aberto*** *quando $A = \operatorname{int} A$.*

Exemplo 2.2. O conjunto $[0, 3)$ não é aberto. De fato $0 \in [0, 3)$, mas 0 não é ponto interior do conjunto $[0, 3)$ conforme visto no exemplo 2.1.

Exemplo 2.3. O conjunto (a, b) é aberto. De fato, sejam

$$x \in (a, b) \quad \text{e} \quad \varepsilon = \min\{x - a, b - x\} > 0.$$

Logo,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b).$$

Assim $(a, b) = \operatorname{int}(a, b)$.

Exemplo 2.4. Os conjuntos $(-\infty, a)$ e (b, ∞) são conjuntos abertos. De fato, para o primeiro intervalo tomando $x \in (-\infty, a)$, existe $\varepsilon = (a - x) > 0$, tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (-\infty, a).$$

Da mesma forma para todo $x \in (b, \infty)$, existe $\varepsilon = (x - b) > 0$, tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (b, \infty).$$

Exemplo 2.5. Os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais não são abertos. De fato, o conjunto dos números naturais não é aberto, pois para todo $x \in \mathbb{N}$, não existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{N},$$

já que neste intervalo sempre existem números irracionais, por exemplo. Por conseguinte, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset \neq \mathbb{N}$. De forma análoga, mostra-se que os inteiros, os racionais e os irracionais não são conjuntos abertos.

Teorema 2.1. *Sobre os* ***conjuntos abertos da reta*** *podemos afirmar que:*

a) *Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são abertos;*

b) *A união de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto;*

c) *Uma interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Demonstração. a) De fato, conforme a observação 2.1 temos que $\operatorname{int} \emptyset \subseteq \emptyset$. Como o único subconjunto de $\emptyset$ é $\emptyset$, segue que $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$.

Sobre o conjunto $\mathbb{R}$, temos que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ (de fato para todo $\varepsilon > 0$) tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$. Assim, o conjunto $\mathbb{R}$ também é aberto.

b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de abertos. Se $a \in \bigcup A_\lambda$, então existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A_\lambda \subseteq \bigcup A_\lambda.$$

Portanto, a união de uma família qualquer de abertos é um conjunto aberto.

c) Queremos mostrar que se $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos abertos, então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto aberto.

Por indução sobre n temos:

Base de indução. Seja $a \in A_1 \cap A_2$. Como A_1 e A_2 são conjuntos abertos, existem $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subseteq A_1 \quad \text{e} \quad (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \subseteq A_2.$$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, temos que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A_1 \quad \text{e} \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A_2.$$

Logo,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq (A_1 \cap A_2).$$

Daí temos que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto aberto para $n = 2$.

Hipótese de indução. Suponhamos que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ seja aberto.

Mostremos, pela hipótese de indução, que $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i$ é aberto. Para tanto, fazendo $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = B$, temos por base de indução que $B \cap A_{n+1}$ é um conjunto aberto já que B é um conjunto aberto por hipótese de indução e A_{n+1} é outro aberto por hipótese. Logo, $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = B \cap A_{n+1}$ é um conjunto aberto. □

Exemplo 2.6. Consideremos a família de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$

$$A_n = (-1/n, 1/n), n \in \mathbb{N}.$$

Desta família afirmamos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}. \tag{2.1}$$

De fato, devemos mostrar que: (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \{0\}$ e (ii) $\{0\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demonstração de (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \{0\}$. Por absurdo, suponhamos que existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ e $x \neq 0$. Como $|x| > 0$, segue que existe um[1] $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|x| > 1/n_0 > 0$$

Logo, $x \notin (-1/n_0, 1/n_0) = A_{n_0}$ e, portanto, $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Daí segue o resultado.

Demonstração de (ii) $\{0\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. De fato, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $0 \in (-1/n, 1/n)$.

Como o segundo membro da igualdade (2.1) não é um conjunto aberto, já que para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se $(-\varepsilon, \varepsilon) \nsubseteq \{0\}$, concluímos que a **interseção arbitrária de uma família qualquer de conjuntos abertos não é, em geral, aberto.**

2.2 Conjuntos Fechados

Definição 2.3. *Seja $F \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que F é um* ***conjunto fechado*** *se seu complementar em relação a $\mathbb{R}$ denotado por $F^c_{\mathbb{R}}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.*

[1]Pois, o conjunto $\mathbb{R}$ é arquimediano; conforme podemos ver em [4], pp. 75 e 80.

Exemplo 2.7. O conjunto $[a, b]$ é fechado. De fato, o complementar deste conjunto é $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, que é a união de dois conjuntos abertos e portanto, pelo teorema 2.1.b, aberto.

Exemplo 2.8. Os conjuntos $(-\infty, b]$ e $[a, \infty)$ são fechados. De fato, os complementares destes são, respectivamente, os conjuntos abertos (b, ∞) e $(-\infty, a)$.

Exemplo 2.9. O conjunto $\{a\}$ é fechado. De fato, seu complementar é o conjunto aberto $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$.

Exemplo 2.10. O conjunto $(a, b]$ não é aberto nem fechado. De fato esse conjunto não é aberto, pois para $b \in (a, b]$, não existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteq (a, b].$$

Além disso, o complementar de $(a, b]$ é o conjunto $(-\infty, a] \cup (b, \infty)$ que não é aberto, pois para $a \in (-\infty, a] \cup (b, \infty)$, não existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq (-\infty, a] \cup (b, \infty).$$

Teorema 2.2. *Sobre os* ***conjuntos fechados da reta*** *podemos afirmar que:*

a) *Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são fechados;*

b) *A interseção de uma família qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado;*

c) *Uma união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração. a) De fato, $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são fechados, pois seus complementares são, respectivamente, os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ que são abertos; conforme se verificou, pelo teorema 2.1.a.

b) Seja $(F_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma família de fechados em $\mathbb{R}$. Para cada $\alpha \in L$ tomemos o aberto $A_\alpha = F_\alpha^c$. Como
$$(\cap F_\alpha)^c = \cup F_\alpha^c = \cup A_\alpha$$
é um conjunto aberto, pelo teorema 2.1.b, segue que $\cap F_\alpha$ é fechado.

c) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $F_1, F_2, \ldots, F_n$ conjuntos fechados. Tomemos o aberto $A_\alpha = F_\alpha^c$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Temos que

$$(\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha=1}^{n} F_\alpha^c = \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$$

é um conjunto aberto, pelo teorema 2.1.c, segue que $\displaystyle\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$ é fechado. □

Exemplo 2.11. Para a família de conjuntos fechados $F_n = [1/n, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, podemos verificar que
$$\cup[1/n, 1] = (0, 1].$$
De fato, devemos mostrar que: i) $\cup[1/n, 1] \subseteq (0, 1]$ e ii) $(0, 1] \subseteq \cup[1/n, 1]$.

Demonstração de i) $\cup[1/n, 1] \subseteq (0, 1]$. Suponhamos que existe $x \in \cup[1/n, 1]$ e $x \notin (0, 1]$. Como $x \in \cup[1/n, 1]$, segue que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$0 < 1/n_0 < x \leq 1$$

o que é um absurdo. Logo,

$$\cup[1/n, 1] \subseteq (0, 1].$$

Demonstração de ii) $(0, 1] \subseteq \cup[1/n, 1]$. Para todo $x \in (0, 1]$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $1/n_0 < x \leq 1$, ou seja, $x \in]1/n_0, 1]$, consequentemente $x \in [1/n_0, 1]$. Daí $x \in \cup[1/n, 1]$. Logo,

$$(0, 1] \subseteq \cup[1/n, 1].$$

O complementar do conjunto $(0, 1]$ é $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$. Porém, este conjunto não é aberto, já que para $0 \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ não existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq (-\infty, 0] \cup (1, \infty).$$

Consequentemente $(0, 1]$ não é um conjunto fechado. Mas, $\cup[1/n, 1] = (0, 1]$. Daí temos que **uma união de uma família arbitrária de conjuntos fechados, em geral, não é um conjunto fechado.**

3 Espaços Topológicos e Funções Contínuas

3.1 Espaços Topológicos

Neste capítulo, trabalharemos com duas seções. Na primeira seção definiremos topologia, espaços topológicos e conjuntos abertos e fechados de um espaço topológico qualquer. Já na segunda seção definiremos homeomorfismo e continuidade de funções tendo como domínio e contradomínio espaços topológicos quaisquer. Para tanto, utilizamos as referências [5] e [2].

Definição 3.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção T de subconjuntos de X é uma **topologia** em X se possui as seguintes propriedades:*

a) *X e $\emptyset$ pertencem a T;*

b) *A união arbitrária de elementos de T pertence a T;*

c) *A interseção finita de elementos de T pertence a T.*

*O par (X, T) é chamado **espaço topológico** e os elementos de T chamam-se **conjuntos abertos.** Quando não houver dúvida em relação a topologia, faremos referência a este espaço simplesmente pelo conjunto X.*

Exemplo 3.1. Seja U a coleção de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Então U é uma topologia em $\mathbb{R}$, pelo teorema 2.1, denominada de **topologia usual da reta.**

Exemplo 3.2. Consideremos as seguintes coleções de subconjuntos de $X = \{a, b, c, d, e\}$:

- $T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$
- $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$
- $T_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$

A coleção T_1 é uma topologia em X já que possui as três propriedades da definição 3.1. Já T_2 não é, pois o conjunto

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

não pertence a T_2, contrariando assim a propriedade (b). A coleção T_3 também não é uma topologia em X, pois o conjunto

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\}$$

não pertence a T_3, contrariando a propriedade (c).

Exemplo 3.3. Seja D a coleção de todos os subconjuntos de X. D é uma topologia em X, pois possui todas as propriedades da definição 3.1. Esta topologia é chamada **topologia discreta** e X, juntamente com esta topologia, é denominado **espaço topológico discreto**, ou simplesmente **espaço discreto.**

Exemplo 3.4. A coleção $I = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia em X, denominada **topologia indiscreta** ou **topologia trivial**.

Exemplo 3.5. Sejam o conjunto X e T_f a coleção de todos os subconjuntos U de X tais que $X - U$ é finito ou todo X. Então T_f é uma topologia em X, denominada **topologia do complementar finito**, pois:

1) $\emptyset$ e X pertencem a T_f;

De fato, $X - \emptyset$ é o próprio X e $X - X = \emptyset$ é finito.

2) $\bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$ pertence a T_f;

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família arbitrária de elementos de T_f. Mostremos que $\bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$ pertence a T_f.

Da teoria elementar de conjuntos tem-se

$$X - \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in L} (X - U_\alpha).$$

Este último conjunto é finito, visto que cada conjunto $X - U_\alpha$ é finito e a interseção de uma família arbitrária de finitos é finito.

3) $\bigcap_{\alpha=1}^{n} U_\alpha$ pertence a T_f.

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ uma família finita de elementos de T_f. Mostremos que $\bigcap_{\alpha=1}^{n} U_\alpha$ pertence a T_f.

Da teoria elementar de conjuntos tem-se

$$X - \bigcap_{\alpha=1}^{n} U_\alpha = \bigcup_{\alpha=1}^{n} (X - U_\alpha)$$

Este último conjunto é finito, pois é uma união finita de conjuntos finitos.

Definição 3.2. *Supondo que T e T' são duas topologias em um dado conjunto X,*

- *T é mais fina que T' quando $T \supseteq T'$.*
- *T é menos fina que T' quando $T \subseteq T'$.*
- *T e T' são comparáveis quando $T \supseteq T'$ ou $T \subseteq T'$.*

Exemplo 3.6. Dada uma topologia T e as topologias discreta (D) e indiscreta (I), tem-se sempre

$$I \subseteq T \subseteq D.$$

Logo, D é mais fina que T que por sua vez é mais fina que I.

Definição 3.3. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto F de X é um* ***conjunto fechado*** *quando seu complementar é aberto.*

Exemplo 3.7. A coleção

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

define uma topologia em $X = \{a, b, c, d, e\}$. Os subconjuntos fechados de X são $\emptyset$, X, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, e\}$, $\{a\}$ pois são os complementares dos abertos de X. Notemos que há subconjuntos de X, tais como $\{b, c, d, e\}$, que são simultaneamente abertos e fechados, assim como existem, por exemplo $\{a, b\}$, aqueles que não são abertos nem fechados.

Exemplo 3.8. Seja X um espaço topológico discreto. Então todo subconjunto de X é também fechado, pois seu complementar é um aberto. Assim, em um espaço discreto, qualquer conjunto é tanto aberto quanto fechado.

Definição 3.4. *Seja X um espaço topológico com topologia T. Se Y é um subconjunto de X, a coleção*

$$T_Y = \{Y \cap U : U \in T\}$$

é uma topologia em Y, denominada ***topologia relativa*** *a Y. O espaço topológico (Y, T_Y) é chamado de um* ***subespaço*** *de (X, T).*

Exemplo 3.9. Considere a topologia $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ em $X = \{a, b, c, d, e\}$ e o subconjunto $Y = \{a, d, e\}$ de X. Observemos que:

- $X \cap Y = Y$
- $\emptyset \cap Y = \emptyset$
- $\{a\} \cap Y = \{a\}$
- $\{c, d\} \cap Y = \{d\}$
- $\{a, c, d\} \cap Y = \{a, d\}$
- $\{b, c, d, e\} \cap Y = \{d, e\}$

Logo, a topologia relativa em Y é

$$T_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}.$$

Exemplo 3.10. Seja a topologia usual U em $\mathbb{R}$ e o intervalo $Y = [3, 8]$. O intervalo $[3, 5)$ é um conjunto aberto na topologia relativa em Y, pois $[3, 5) = (2, 5) \cap [3, 8]$(O intervalo $(2, 5)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$). Temos, assim, que **um conjunto pode ser aberto em um subespaço sem que seja aberto no espaço inteiro**.

3.2 Funções Contínuas

Nesta seção, daremos uma definição de continuidade que incluirá aquelas dadas sobre a reta, o plano e o espaço. Daí, estudaremos algumas propriedades das funções contínuas, das quais muitas são generalizações diretas de conceitos que se aprendem sobre funções contínuas em Análise.

Definição 3.5. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ se diz **contínua** se para cada subconjunto aberto V de Y, o conjunto $U = f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.*

Observação 3.1. O conjunto $f^{-1}(V)$ representa todos os pontos $x \in X$ tais que $f(x) \in V$.

Pela definição percebemos que a continuidade de funções não depende apenas da função f, mas também das topologias especificadas no domínio e no contradomínio de f. Desse modo, uma função $f : X \to Y$ pode ser contínua ou não, dependendo das topologias definidas em X e Y. Assim podemos dizer que f **é contínua relativamente às topologias em X e Y**.

Exemplo 3.11. Seja $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ uma topologia em $X = \{a, b, c, d\}$ e seja $T^* = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$ uma topologia em $Y = \{x, y, z, w\}$. Dadas as funções $f : X \to Y$ definida por

$$f(a) = y,\ f(b) = z,\ f(c) = w \quad \text{e} \quad f(d) = z$$

e $g : X \to Y$ definida por

$$g(a) = x,\ g(b) = x,\ g(c) = z \quad \text{e} \quad g(d) = w$$

tem-se que f **é contínua**, pois a imagem inversa de cada elemento de T^* em Y é elemento de T em X. Já g **não é contínua**, pois $\{y, z, w\} \in T^*$, mas sua imagem inversa $\{c, d\} \notin T$.

Exemplo 3.12. Considere um espaço discreto (X, D) e (Y, T) um espaço topológico qualquer. Então toda função $f : X \to Y$ é contínua, pois, se V é um aberto em Y, sua imagem inversa $f^{-1}(V)$ é um aberto em X, já que todo subconjunto de um espaço discreto é aberto.

Exemplo 3.13. Se (X, T) é um espaço topológico e (Y, I) é um espaço indiscreto, então qualquer função $f : X \to Y$ é contínua. De fato, só há dois abertos em Y e:

- $\emptyset \in I$ e $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in T$
- $Y \in I$ e $X = f^{-1}(Y) \in T$

Construção de funções contínuas

Uma maneira muito utilizada para construção de funções contínuas em análise é tomar somas, diferenças, produtos ou quocientes de funções contínuas com valores reais. Um teorema[1] similar a este a menos do domínio das funções envolvidas é que: Se[2] $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas, então $f + g, f - g, f \cdot g$ são contínuas e f/g é contínua se $g(x) \neq 0$ para cada $x \in X$. Uma pergunta que nos surge naturalmente é: Como construir funções entre dois espaços topológicos quaisquer? A esta pergunta temos o teorema a seguir.

Teorema 3.1 (Regras para construir funções contínuas)**.** *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

[1] A demostração deste teorema pode se ver em [5] p. 131.
[2] O domínio das funções f e g é um espaço topológico qualquer.

a) **Função Constante.** *Uma função constante $f : X \to Y$ é continua.*

b) **Inclusão.** *Se A é um subespaço de X, a função inclusão $i : A \hookrightarrow X$ é contínua.*

c) **Composição.** *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então a aplicação $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

d) **Restrição do Domínio.** *Se $f : X \to Y$ é contínua e A é um subespaço de X, então a função restrita $f|A : A \to Y$ é contínua.*

e) **Restrição do Contradomínio.** *Seja $f : X \to Y$ contínua. Se Z é um subespaço de Y que contém o conjunto imagem $f(X)$, então a função $g : X \to Z$ obtida ao restringir o contradomínio de f, é contínua.*

f) **Extensão do Contradomínio.** *Seja $f : X \to Y$ contínua. Se Z é um espaço com Y como subespaço, então a função $g : X \to Z$ obtida ao extender o contradomínio de f, é contínua.*

g) **Continuidade Local.** *A aplicação $f : X \to Y$ é contínua se X puder ser escrito como uma união de abertos A_α tais que $f|A_\alpha$ é contínua para cada α.*

Demonstração. a) Seja $a \in Y$ um valor fixado qualquer. Queremos mostrar que a função constante $f : X \to Y$ dada por $f(x) = a$ para todo $x \in X$ é contínua. Para tanto, tomemos um aberto U de Y. Caso $a \in U$, temos $f^{-1}(U) = X$ e se $a \notin U$, temos $f^{-1}(U) = \emptyset$. Em todo caso $f^{-1}(U)$ é um aberto de X.

b) Seja U um aberto de X, segue que $i^{-1}(U) = \{x \in A : i(x) \in U\} = \{x \in A : x \in U\} = U \cap A$, que é um aberto de A por definição de topologia de subespaço.

c) Se U é um aberto de Z, então $g^{-1}(U)$ é um aberto de Y, pois g é contínua e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é um aberto de X, já que f também é contínua. Mas $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Logo, $(g \circ f)^{-1}(U)$ é um aberto de X.

d) A função $f|A$ é equivalente a composição da aplicação inclusão $i : A \hookrightarrow X$ com a aplicação $f : X \to Y$, ambas contínuas. Daí, devido ao resultado acima; segue o resultado.

e) Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $f(X) \subseteq Z \subseteq Y$, mostremos que a função $g : X \to Z$ obtida de f é contínua. Se U é um aberto de Z, segue que $U = Z \cap B$ para algum aberto B de Y. Visto que Z contém o conjunto imagem $f(X)$; $f^{-1}(B) = g^{-1}(U)$. Mas $f^{-1}(B)$ é um aberto de X. Logo, $g^{-1}(U)$ é um aberto de X.

f) Para mostrar que $g : X \to Z$ é contínua se Z tiver Y como subespaço, basta observar que g é equivalente a composição das funções $f : X \to Y$ e $i : Y \hookrightarrow Z$, ambas contínuas.

g) Seja U um aberto de Y. Então,

$$f^{-1}(U) \cap A_\alpha = (f|A_\alpha)^{-1}(U),$$

visto que ambos os membros da igualdade acima são expressões que representam o conjunto dos pontos x que pertencem a A_α tais que $f(x) \in U$. Como $f|A_\alpha$ é contínua; segue que o conjunto $(f|A_\alpha)^{-1}(U)$ é um aberto de A_α e portanto um aberto de X,[3] pois A_α é um aberto de X. Mas

$$f^{-1}(U) = \bigcup_\alpha (f^{-1}(U) \cap A_\alpha)$$

Logo, $f^{-1}(U)$ é um aberto de X. □

Dando prosseguimento a construção de funções contínuas em que o domínio e o contradomínio são espaços topológicos quaisquer, temos o teorema a seguir.

Teorema 3.2 (Lema da Colagem). *Sejam X e Y espaços topológicos e A e B subconjuntos fechados de X tais que $A \cup B = X$. Sejam $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ funções contínuas satisfazendo a condição $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Então a função $h : X \to Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ g(x), & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Vamos mostrar que se F é um subconjunto fechado de Y, então $h^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de X.

Seja F um subconjunto fechado de Y. Visto que f é contínua, $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de A, logo é um fechado de X,[4] pois A é um fechado de X. De modo similar, $g^{-1}(F)$ é um fechado de B e consequentemente é um fechado de X. Mas

$$h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$$

e portanto $h^{-1}(F)$ é um fechado de X, pois é a união de dois fechados. □

Observação 3.2. Este teorema também contempla o caso de A e B serem conjuntos abertos de X.

Exemplo 3.14. Definamos uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Cada sentença desta função é uma função contínua e seus valores coincidem na interseção de seus domínios que são dois conjuntos fechados cuja união é igual ao domínio de h. Logo, pelo lema da colagem, h é contínua.

Exemplo 3.15. A função

$$h(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x < 0, \\ x + 2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

define uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e cada sentença desta função é uma função contínua. Porém h não é contínua, pois a imagem inversa do aberto $(1, 3)$ é o conjunto $[0, 1)$ que não é aberto.

[3] Isso ocorre, devido ao Lema 16.2 de [5], p. 89. Este lema, diz que: Dado Y um subespaço de X. Se U é um aberto de Y e Y é um aberto de X, então U é um aberto de X.

[4] Isso ocorre devido ao Teorema 17.3 de [5], p. 95. Este teorema, diz que: Dado Y um subespaço de X. Se A é um fechado de Y e Y é um fechado de X, então A é um fechado de X.

Definição 3.6. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função bijetora. Se a função f e a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ são contínuas, então f é chamada de* ***homeomorfismo****.*

A condição de que f^{-1} seja contínua significa que para cada conjunto aberto U de X, a imagem inversa de U mediante a aplicação $f^{-1} : Y \to X$ é um aberto de Y. Porém, a imagem inversa de U mediante a aplicação f^{-1} é o mesmo que a imagem direta de U mediante a aplicação f. Por isso, outro modo de definir um homeomorfismo é verificar que em uma correspondência bijetora $f : X \to Y$, ocorre

$$f(U) \text{ é um aberto de } Y \text{ se, e somente se, } U \text{ é um aberto de } X.$$

Este comentário mostra que um homeomorfismo $f : X \to Y$ proporciona uma correspondência bijetiva, não somente entre X e Y, mas também entre as coleções de conjuntos abertos de X e Y. Em consequência, qualquer propriedade de X que se expresse completamente em termos da topologia de X (ou seja, em termos dos conjuntos abertos de X) dá, via f, a propriedade correspondente para o espaço Y. A esta propriedade se denomina **propriedade topológica de** X.

Definição 3.7. *Seja $f : X \to Y$ uma função injetora, onde X e Y são espaços topológicos. Seja $Z = f(X)$, considerado como um subespaço de Y; segue que a função $f' : X \to Z$, obtida ao restringir o contradomínio de f, é bijetora. Se f' for um homeomorfismo de X com Z, dizemos que a aplicação $f : X \to Y$ é uma* ***imersão topológica****, ou simplesmente uma* ***imersão, de*** X ***em*** Y.

Exemplo 3.16. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ é um homeomorfismo. De fato, definindo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante a equação $g(y) = \dfrac{1}{3}(y - 1)$, podemos verificar que $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$ para todos os números reais x e y. Segue que f é bijetora e $g = f^{-1}$ é sua inversa; a continuidade de f e g é devido ao fato das duas serem funções polinomiais em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.17. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ é um homeomorfismo. De fato, tomando $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}$, tem-se $f(f^{-1}(y)) = y$ e $f^{-1}(f(x)) = x$. Além disso, f e f^{-1} são funções racionais e como tais são contínuas em seus domínios.

Exemplo 3.18. A função $g : (a, b) \to (-1, 1)$ dada por $g(x) = \dfrac{2x - 2b}{b - a} + 1$ é um homeomorfismo. De fato, tomando $g^{-1} : (-1, 1) \to (a, b)$ definida por $g^{-1}(y) = \dfrac{(b - a)y + a + b}{2}$, então podemos verificar que $g^{-1}(g(y)) = y$ e $g(g^{-1}(x)) = x$; a continuidade de g e g^{-1} decorre do fato de serem polinomiais.

Exemplo 3.19. Os conjuntos $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ são homeomorfos. De fato, dos dois últimos exemplos, temos que $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $g : (a, b) \to (-1, 1)$ e $g^{-1} : (-1, 1) \to (a, b)$ são bijetoras e contínuas. Como a composição de bijetoras é bijetora, segue que $f \circ g : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $(f \circ g)^{-1} : \mathbb{R} \to (a, b)$ são funções bijetoras. Além disso; são contínuas, pelo teorema 3.1.c.

Exemplo 3.20. Denotando por S^1 o círculo de raio 1 e centro $(0,0)$, subespaço do $\mathbb{R}^2$, e seja $f : [0,1) \to S^1$ a aplicação definida por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Pelas propriedades das funções trigonométricas f é bijetora e contínua, porém a sua inversa f^{-1} não é contínua. A imagem mediante f do conjunto aberto $U = [0, 1/4) = [0,1) \cap \ (-1, 1/4)$ do domínio, por exemplo, não é aberto em S^1, visto que não há nenhum aberto V do $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S^1 = f(U)$; segue que f não é um homeomorfismo (Figura 3.1).

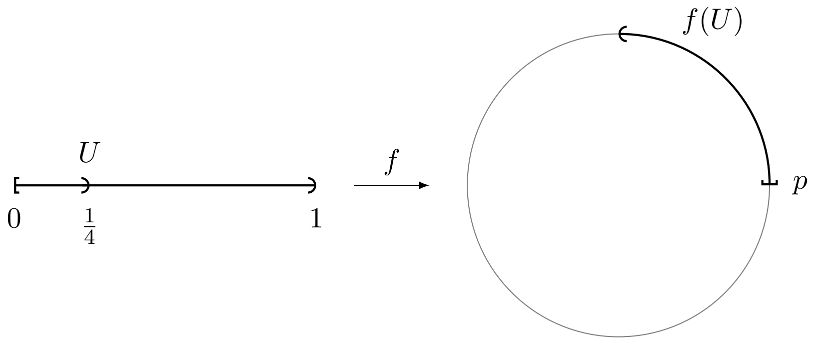

Figura 3.1: Exemplo de não homeomorfismo

Observação 3.3. Este exemplo mostra que uma função bijetora pode ser contínua sem ser um homeomorfismo.

Exemplo 3.21. A função $g : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ obtida da função f do exemplo anterior ao extender sua imagem é uma aplicação contínua injetiva que não é uma imersão, pois f conforme vimos não é um homeomorfismo.

4 O Grupo Fundamental

Determinar se dois espaços topológicos dados são homeomorfos é um problema básico em topologia, mas não trivial. Em geral, não há um método para resolver este problema, o que se faz é utilizar técnicas aplicáveis em casos particulares. Conforme a definição 3.6, verificar se dois espaços são homeomorfos consiste em construir uma aplicação bijetora contínua que tenha inversa contínua. Mas construir entre tais espaços, aplicações contínuas é um problema que exige algumas técnicas, como as desenvolvidas na seção 3.2.

Demonstrar que dois espaços não são homeomorfos é uma questão diferente. Para isso, devemos provar que não existe aplicação bijetora contínua com inversa contínua entre esses espaços. Se pudermos encontrar alguma propriedade topológica que exista em um espaço, mas não no outro, então o problema estará resolvido — os espaços não podem ser homeomorfos. Por exemplo[1], o intervalo fechado $[0, 1]$ não é homeomorfo ao intervalo aberto $(0, 1)$, porque o primeiro espaço é compacto e o segundo não.

Neste capítulo, relacionaremos estruturas topológicas de um espaço com a Álgebra, neste sentido verifica-se que espaços homeomorfos possuem estruturas algébricas isomorfas. Por meio da teoria de homotopia por caminhos construiremos o grupo fundamental, em seguida mostraremos que o grupo fundamental do círculo é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros e por fim demonstraremos o Teorema Fundamental da Álgebra. Para tanto, utilizamos as referências [5] e [3] na seção 4.1 e nas seguintes [5] e [1].

4.1 Homotopia por Caminhos

Antes de definir o Grupo Fundamental de um espaço X, vamos falar de caminhos em X e da relação de equivalência entre eles, conhecida como homotopia por caminhos. Posteriormente, definiremos certa operação sobre a coleção das classes de equivalência que a transforma num grupoide.

Definição 4.1. *Se f e g são aplicações contínuas do espaço X no espaço Y, dizemos que f é homotópica a g se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \to Y$ tal que*

$$F(x, 0) = f(x) \quad e \quad F(x, 1) = g(x)$$

*para cada $x \in X$, em que $I = [0, 1]$. A aplicação F é chamada **homotopia** entre f e g que denotaremos por $F : f \simeq g$ ou simplesmente por $f \simeq g$ para indicar que f é **homotópica** a g. Se $f \simeq g$ e g é uma aplicação constante, dizemos que f é homotopicamente nula.*

[1] Os intervalos $[0, 1]$ e $(0, 1)$ estão sendo no momento tratados como subespaços de $\mathbb{R}$.

Podemos imaginar uma homotopia como uma família a um parâmetro de aplicações contínuas de X em Y. Se pensarmos no parâmetro t como representante do tempo, então a homotopia F descreve uma deformação contínua da aplicação f na aplicação g, quando t varia de 0 a 1.

Consideremos agora o caso especial no qual f é um caminho em X de x_0 a x_1, isto é, $f : [0,1] \to X$ é uma aplicação contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, em que x_0 é chamado de ponto inicial e x_1 de ponto final do caminho f. Neste sentido usaremos, por conveniência, o intervalo $I = [0,1]$ como o domínio de todos os caminhos.

Definição 4.2. *Dois caminhos f e g em X são homotópicos por caminhos se têm o mesmo ponto inicial x_0 e o mesmo ponto final x_1, e se existe uma aplicação contínua $F : I \times I \to X$ tal que*

$$F(s,0) = f(s) \quad e \quad F(s,1) = g(s);$$

$$F(0,t) = x_0 \quad e \quad F(1,t) = x_1,$$

para $s, t \in I$. A aplicação F recebe o nome de ***homotopia por caminhos*** *entre f e g que denotaremos por $F : f \simeq_p g$ ou simplesmente por $f \simeq_p g$ para indicar que f é* ***homotópica por caminhos*** *a g* (Figura 4.1).

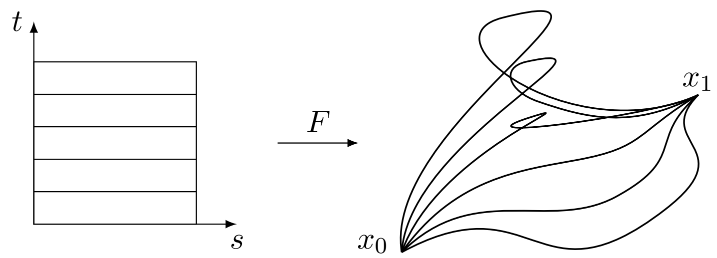

Figura 4.1: Homotopia por caminhos

A primeira condição diz simplesmente que F é uma homotopia entre f e g, e a segunda diz que, para cada t, a aplicação f_t, definida pela equação $f_t(s) = F(s,t)$, é um caminho de x_0 para x_1, ou seja, a primeira condição diz que F representa uma maneira contínua de deformar o caminho f no caminho g, e a segunda diz que os pontos extremos dos caminhos permanecem fixos durante a deformação.

Teorema 4.1. *As relações $\simeq$ e $\simeq_p$ são relações de equivalência.*

Demonstração. De fato, estas relações pssuem as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

a) Propriedade Reflexiva. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. A aplicação $F : X \times I \to Y$ definida por $F(x,t) = f(x)$ é uma homotopia entre f e f, pois F é contínua pela continuidade de f e $F(x,0) = F(x,1) = f(x)$. No caso em que f é um caminho de x_0 para x_1, temos $F(0,t) = f(0) = x_0$ e $F(1,t) = f(1) = x_1$, ou seja, f é também homotópica por caminho a f.

b) Propriedade Simétrica. Sejam $f,\ g : X \to Y$ duas aplicações contínuas. Sendo $F : X \times I \to Y$ uma homotopia entre f e g, segue que $G : X \times I \to Y$ definida por $G(x,t) = F(x, 1-t)$ é uma homotopia entre g e f. De fato,

$$G(x,0) = F(x,1) = g(x) \quad e \quad G(x,1) = F(x,0) = f(x)$$

e G é contínua, pela continuidade de F.

Além disso, se F é uma homotopia de caminhos, G também é, pois

$$G(0,t) = F(0,1-t) = x_0 \quad e \quad G(1,t) = F(1,1-t) = x_1.$$

c) Propriedade Transitiva. Suponhamos que $f \simeq g$ e $g \simeq h$. Provemos que $f \simeq h$. Seja F uma homotopia entre f e g, e G uma homotopia entre g e h. Definamos $H : X \times I \to Y$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & \text{para } t \in [0,1/2], \\ G(x,2t-1), & \text{para } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

A aplicação G está bem definida já que, para $t = 1/2$, temos que

$$F(x,2t) = F(x,1) = g(x) = G(x,0) = G(x,2t-1).$$

Dado que H é contínua nos subconjuntos fechados $X \times [0,1/2]$ e $X \times [1/2,1]$ de $X \times I$, então, pelo Lema da Colagem (Teorema 3.2), H é contínua em todo $X \times I$. Além disso, temos que:

$$H(x,0) = F(x,0) = f(x) \text{ e } H(x,1) = G(x,1) = h(x).$$

Portanto, $f \simeq h$.

Considerando F e G homotopias por caminhos, segue que: $H(0,t) = F(0,2t) = x_0$ para $t \in [0,1/2]$ e $H(0,t) = G(0,2t-1) = x_0$ para $t \in [1/2,1]$.

Daí, $H(0,t) = x_0$ para $t \in [0,1]$. Além disso, $H(1,t) = F(1,2t) = x_1$ para $t \in [0,1/2]$ e $H(1,t) = G(1,2t-1) = x_1$ para $t \in [1/2,1]$. Daí, $H(1,t) = x_1$ para $t \in [0,1]$.

Portanto, $f \simeq_p h$ (Figura 4.2). □

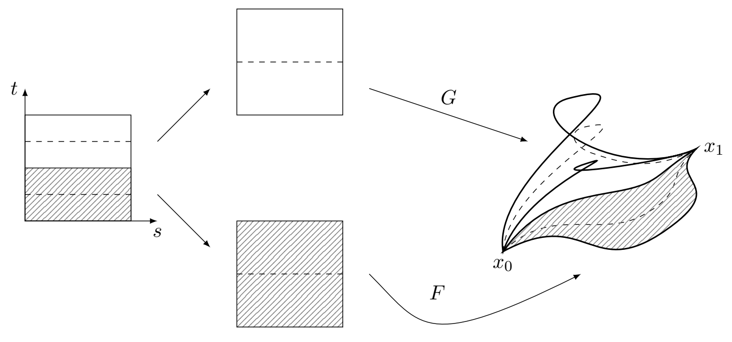

Figura 4.2: Transitividade da relação $\simeq_p$

Observação 4.1. As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas **classes de homotopia**. A classe de homotopia de uma aplicação contínua $f : X \to Y$ indica-se pelo símbolo $[f]$.

Exemplo 4.1. Sejam $f,\ g : X \to \mathbb{R}^2$ funções contínuas. Então $f \simeq g$. De fato, tomando

$$F : X \times I \to \mathbb{R}^2 \ \text{ definida por } \ F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

segue que F está bem definida e é contínua, pois cada termo que a compõe é uma função contínua. Além disso, $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$. A essa homotopia denominamos **homotopia linear.** Nesta homotopia temos que para cada $x \in X$ fixo e t variando de 0 a 1, o ponto $F(x,t)$ percorre o segmento de reta que liga o ponto $f(x)$ ao ponto $g(x)$.

Caso f e g sejam caminhos de x_0 a x_1, teremos $F(0,t) = x_0$ e $F(1,t) = x_1$. Logo, $f \simeq_p g$ (Figura 4.3). Em geral, se A é um subespaço convexo do $\mathbb{R}^n$ (isto significa que para dois pontos quaisquer a e b de A, o segmento de reta que os une está contido em A), então dois caminhos quaisquer f, g em A de x_0 a x_1 são homotópicos por caminhos em A, já que a homotopia linear F entre eles mantém sua imagem em A.

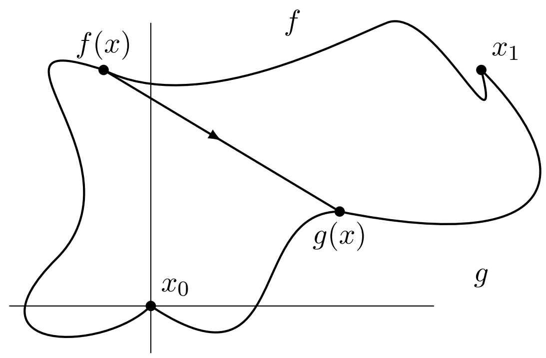

Figura 4.3: Homotopia linear

Exemplo 4.2. Seja X o conjunto não convexo $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Os caminhos $f(t) = (\cos \pi t,\ \operatorname{sen} \pi t)$ e $g(t) = (\cos \pi t,\ 2 \operatorname{sen} \pi t)$ em X são homotópicos por caminhos pela homotopia linear em X. De fato, tomando

$$F : I \times I \to X \ \text{ por } \ F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x),$$

temos que F está bem definida e é contínua, pois cada um de seus termos é uma função contínua em X. Além disso, tem-se

$$F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x);$$

$$F(0,t) = (1,0) = x_0 \ \text{ e } \ F(1,t) = (-1,0) = x_1.$$

Mas, construir uma homotopia linear entre o caminho h dado por $h(t) = (\cos \pi t, -\operatorname{sen} \pi t)$ em X e f não é possível. A homotopia linear entre g e f assim como a impossibilidade de uma homotopia linear entre f e h estão ilustradas pela Figura 4.4.

Certamente não existe uma homotopia por caminhos em X entre f e h. Tal fato, não é surpresa; intuitivamente está claro que não há possibilidade de deformar f em h,

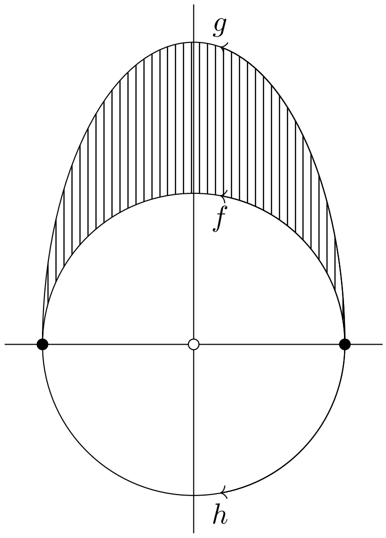

Figura 4.4: Homotopia em espaço não convexo.

mantendo os extremos dos caminhos em x_0 e x_1, passando pela origem sem iniciar uma descontinuidade. Este último caso ilustra a necessidade de se conhecer o espaço do contradomínio antes de poder decidir se dois caminhos são homotópicos por caminhos ou não. Os caminhos f e h podem ser homotópicos por caminhos se estiverem em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 4.1. *Sejam $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Demonstração. Seja $F : X \times I \to Y$ uma homotopia entre f e f' e $G : Y \times I \to Z$ uma homotopia entre g e g'. A função $H : X \times I \to Z$ definida por

$$H(s,t) = G(F(s,t),t),$$

é uma homotopia entre $g \circ f$ e $g' \circ f'$, porque

- H está bem definida,
- H é contínua por ser composição de contínuas,
- $H(s,0) = G(F(s,0),0) = g(F(s,0)) = g(f(s)) = (g \circ f)(s)$,
- $H(s,1) = G(F(s,1),1) = g'(F(s,1)) = g'(f'(s)) = (g' \circ f')(s)$. □

Definição 4.3. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ aplicações contínuas. Definimos a composição entre classes de homotopia por*

$$[g] \circ [f] = [g \circ f].$$

Devido a proposição 4.1, nota-se que $[g \circ f]$ não depende das escolhas de $f \in [f]$ e $g \in [g]$, isto é, a composição sobre classes de homotopia está bem definida.

Definição 4.4. *Seja f um caminho em X de x_0 a x_1 e g um caminho em X de x_1 a x_2. Definamos o produto f por g que denotaremos por $f * g$ como o caminho $h : I \to X$ dado por*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \textit{para } s \in [0,1/2], \\ g(2s-1), & \textit{para } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

A aplicação h está bem definida, pois para $s = 1/2$, $f(2s) = f(1) = x_1 = g(0) = g(2s-1)$. Além disso, h é contínua pelo Lema da Colagem. Pensemos em h como o caminho cuja primeira metade é o caminho f e cuja segunda metade é o caminho g.

Proposição 4.2. *Sejam $f, f' : I \to X$ caminhos em X de x_0 a x_1 e $g, g' : I \to X$ caminhos em X de x_1 a x_2. Se $f \simeq_p f'$ e $g \simeq_p g'$, então $f * g \simeq_p f' * g'$.*

Demonstração. Sejam $F : f \simeq_p f'$ e $G : g \simeq_p g'$ duas homotopias por caminhos. Definamos $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{para } s \in [0,1/2], \\ G(2s-1,t), & \text{para } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{2}$ tem-se

$$F(2s,t) = F(1,t) = x_1 = G(0,t) = G(2s-1,t)$$

e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso

- $H(s,0) = F(2s,0) = f(2s)$ para $s \in [0, \frac{1}{2}]$ e $H(s,0) = G(2s-1,0) = g(2s-1)$ para $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, em que $f(1) = x_1 = g(0)$. Assim, $H(s,0) = (f * g)(s)$;
- $H(s,1) = F(2s,1) = f'(2s)$ para $s \in [0, \frac{1}{2}]$ e $H(s,1) = G(2s-1,1) = g'(2s-1)$ para $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, em que $f'(1) = x_1 = g'(0)$. Assim, $H(s,1) = (f' * g')(s)$;
- $H(0,t) = F(0,t) = x_0$ e $H(1,t) = G(1,t) = x_2$.

Portanto, $f * g \simeq_p f' * g'$ (Figura 4.5). □

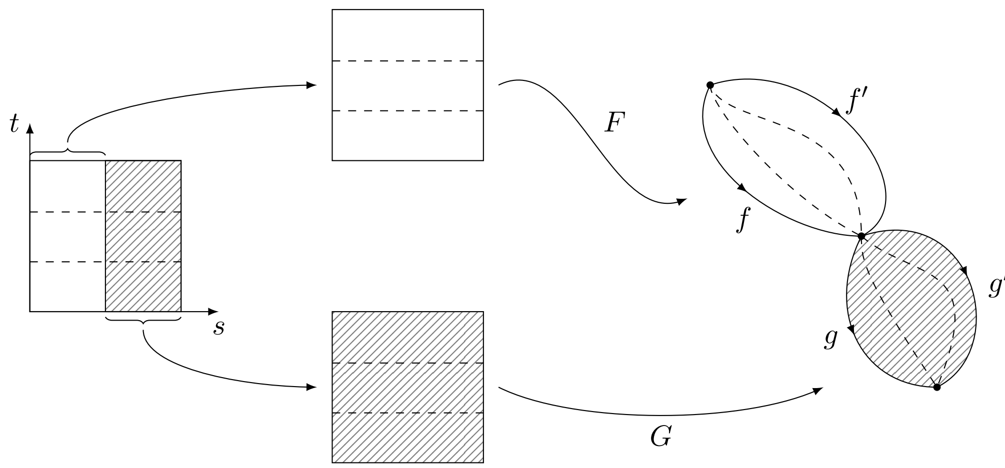

Figura 4.5: Ilustração para $f * g \simeq_p f' * g'$

Definição 4.5. *Seja $[f]$ a classe de homotopia por caminhos em X com início em x_0 e fim em x_1, e $[g]$ a classe de homotopia por caminhos em X com início em x_1 e fim em x_2. Definamos o produto destas classes por*

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Da proposição 4.2, verifica-se que $[f * g]$ não depende das escolhas de $f \in [f]$ e $g \in [g]$, isto é, o **produto sobre as classes de homotopia por caminhos** está bem definido. Além disso, este produto satisfaz propriedades semelhantes aos axiomas de grupo. Estas propriedades se conhecem como **propriedades de grupoide de** $*$. Uma diferença destas propriedades para as propriedades de grupos é que $[f] * [g]$ não está definida para qualquer par de classes, senão unicamente para aqueles nos quais $f(1) = g(0)$, tal fato envolve todos os representantes de $[f]$ e $[g]$.

Proposição 4.3. *Seja $k : X \to Y$ uma aplicação contínua e F uma homotopia por caminhos em X entre f e g. Então $k \circ F$ é uma homotopia por caminhos em Y entre $k \circ f$ e $k \circ g$.*

Demonstração. Sabemos que F é contínua por ser uma homotopia e $k \circ f$ e $k \circ g$ são também contínuas por serem composições de contínuas. Notemos que

- $(k \circ F)(s, 0) = k(F(s, 0)) = k(f(s)) = (k \circ f)(s)$,
- $(k \circ F)(s, 1) = k(F(s, 1)) = k(g(s)) = (k \circ g)(s)$,
- $(k \circ F)(0, t) = k(F(0, t)) = k(x_0) = y_0$,
- $(k \circ F)(1, t) = k(F(1, t)) = k(x_1) = y_1$.

Portanto, $k \circ F : k \circ f \simeq_p k \circ g$. □

Proposição 4.4. *Se $k : X \to Y$ é uma aplicação contínua e se f e g são caminhos em X com $f(1) = g(0)$, então*

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g).$$

Demonstração. Seja $h = f * g$ o caminho em X dado por

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{para } s \in [0, 1/2], \\ g(2s - 1), & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Segue que $(k \circ f) * (k \circ g)$ é o caminho em Y definido por

$$(k \circ h)(s) = \begin{cases} (k \circ f)(2s), & \text{para } s \in [0, 1/2], \\ (k \circ g)(2s - 1), & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Portanto, $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$. □

Teorema 4.2. *A operação $*$ sobre as classes de homotopia por caminhos em um espaço topológico X possui as seguintes propriedades:*

a) Associativa. *Se $[f] * ([g] * [h])$ estiver bem definida, então $([f] * [g]) * [h]$ estará bem definida e são iguais.*

b) Neutro à direita e à esquerda. *Sejam $x \in X$ e o caminho constante $e_x : I \to X$ tal que $e_x(s) = x$ para todo $s \in I$. Se f é um caminho em X de x_0 para x_1, então*

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \text{ e } [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

c) Inversos. *Dado o caminho f em X de x_0 para x_1, defina $\bar{f}(s) = f(1-s)$. Então*

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \text{ e } [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Demonstração. **a) Associativa:** Primeiramente escrevemos $(f * g) * h$:

$$((f*g)*h)(s) = \begin{cases} (f*g)(2s), & \text{para } s \in [0,1/2], \\ h(2s-1), & \text{para } s \in [1/2,1], \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(4s), & \text{para } s \in [0,1/4], \\ g(4s-1), & \text{para } s \in [1/4,1/2], \\ h(2s-1), & \text{para } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Ilustramos este caminho pelo seguinte diagrama:

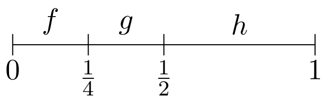

Figura 4.6: Ilustração para $(f * g) * h$

Analogamente escrevemos $f * (g * h)$:

$$(f*(g*h))(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{para } s \in [0,1/2], \\ (g*h)(2s-1), & \text{para } s \in [1/2,1], \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(2s), & \text{para } s \in [0,1/2], \\ g(4s-2), & \text{para } s \in [1/2,3/4], \\ h(4s-3), & \text{para } s \in [3/4,1]. \end{cases}$$

Ilustremos este caminho pelo seguinte diagrama:

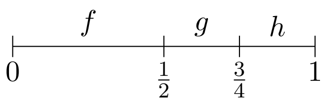

Figura 4.7: Ilustração para $f * (g * h)$

Para determinarmos uma homotopia entre $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$, juntemos os esquemas anteriores (Figura 4.8).

A representação algébrica do seguimento de extremidades $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ é $s = \dfrac{t+1}{4}$ e o de extremidades $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ é $s = \dfrac{t+2}{4}$. Assim, para $t \in I$ temos:

- $f(\alpha_1(s))$ para $s \in \left[0, \dfrac{t+1}{4}\right]$;

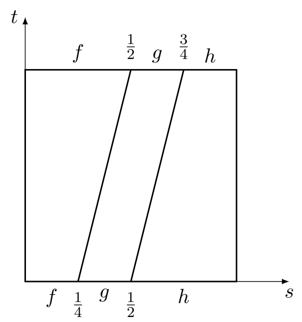

Figura 4.8: Homotopia entre $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$

- $f(\alpha_2(s))$ para $s \in \left[\dfrac{t+1}{4}, \dfrac{t+2}{4}\right]$;
- $f(\alpha_3(s))$ para $s \in \left[\dfrac{t+1}{4}, 1\right]$;

em que α_1, α_2 e α_3 são os homeomorfismos:

- $\alpha_1 : \left[0, \dfrac{t+1}{4}\right] \to I,\ \alpha_1(s) = \dfrac{4s}{t+1}$;
- $\alpha_2 : \left[\dfrac{t+1}{4}, \dfrac{t+2}{4}\right] \to I,\ \alpha_2(s) = 4s - t - 1$;
- $\alpha_3 : \left[\dfrac{t+2}{4}, 1\right] \to I,\ \alpha_3(s) = \dfrac{t-4s+2}{t-2}$.

Definamos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{4s}{t+1}\right), & \text{para } s \in [0, (t+1)/4], \\ g(4s-1-t), & \text{para } s \in [(t+1)/4, (t+2)/4], \\ h\left(\dfrac{t-4s+2}{t-2}\right), & \text{para } s \in [(t+2)/4, 1]. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{t+1}{4}$ tem-se $f\left(\dfrac{4s}{t+1}\right) = f(1) = x_1 = g(0) = g(4s-1-t)$ e para $s = \dfrac{t+2}{4}$ tem-se $g(4s-1-t) = g(1) = x_2 = h(0) = h\left(\dfrac{t-4s+2}{t-2}\right)$; e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \begin{cases} f(4s), & \text{para } s \in [0, 1/4], \\ g(4s-1), & \text{para } s \in [1/4, 1/2], \\ h(2s-1), & \text{para } s \in [1/2, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f*g)(2s), & \text{para } \ s \in [0, 1/2], \\ h(2s-1), & \text{para } \ s \in [1/2, 1], \end{cases} \\ &= ((f*g)*h)(s), \ \text{para } s \in I; \end{aligned}$$

$$H(s,1) = \begin{cases} f(2s), & \text{para } s \in [0,1/2], \\ g(4s-2), & \text{para } s \in [1/2,3/4], \\ h(4s-3), & \text{para } s \in [3/4,1], \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(2s), & \text{para } s \in [0,1/2], \\ (g*h)(2s-1), & \text{para } s \in [1/2,1], \end{cases}$$
$$= (f*(g*h))(s), \text{ para } s \in I;$$
$$H(0,t) = f(0) = x_0 \text{ e } H(1,t) = h(1) = x_3.$$

Portanto, $(f*g)*h \simeq_p f*(g*h)$.

b) Neutro à direita e à esquerda: Mostremos primeiramente que a operação $*$ admite neutro à direita, ou seja, $f \simeq_p f * e_{x_1}$. Para tanto, observemos o diagrama:

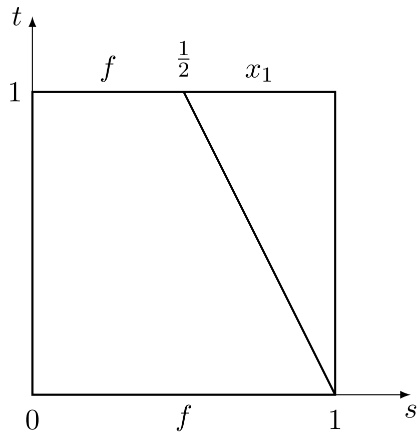

Figura 4.9: Homotopia entre f e $f * e_{x_1}$

A representação algébrica do seguimento de extremidades $(1/2,1)$ e $(1,0)$ é $s = \dfrac{2-t}{2}$. Assim, para $t \in I$ temos $f(\alpha(s))$, para $s \in \left[0, \dfrac{2-t}{2}\right]$, em que α é o homeomorfismo
$$\alpha : \left[0, \frac{2-t}{2}\right] \to I, \ \alpha(s) = \frac{2s}{2-t}.$$

Definamos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2s}{2-t}\right), & \text{para } s \in [0,(2-t)/2], \\ x_1, & \text{para } s \in [(2-t)/2,1]. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{2-t}{2}$ tem-se $f\left(\dfrac{2s}{2-t}\right) = f(1) = x_1$ e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso, temos:

$$
\begin{aligned}
H(s,0) &= \begin{cases} f(s), & \text{para } \ s \in [0,1], \\ x_1, & \text{para } \ s = 1, \end{cases} \\
&= f(s), \quad \text{para } \ s \in I; \\
H(s,1) &= \begin{cases} f(2s), & \text{para } \ s \in [0,1/2], \\ x_1, & \text{para } \ s \in [1/2,1], \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(2s), & \text{para } \ s \in [0,1/2], \\ e_{x_1}(2s-1), & \text{para } \ s \in [1/2,1], \end{cases} \\
&= (f * e_{x_1})(s), \quad \text{para } \ s \in I; \\
H(0,t) &= f(0) = x_0 \text{ e } H(1,t) = x_1.
\end{aligned}
$$

Portanto, $f \simeq_p f * e_{x_1}$.

Mostremos agora que a operação $*$ admite neutro à esquerda, ou seja, $f \simeq_p e_{x_0} * f$. Para tanto, observemos o esquema:

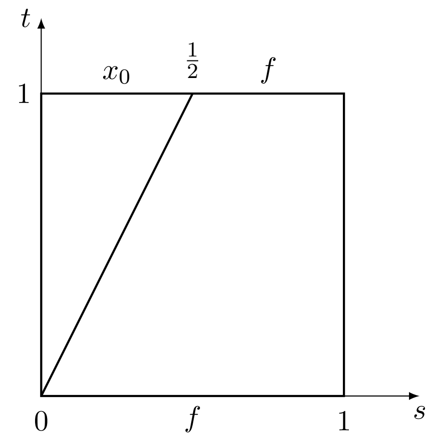

Figura 4.10: Homotopia entre f e $e_{x_0} * f$

A representação algébrica do seguimento de extremidades $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $(0,0)$ é $s = \dfrac{t}{2}$.

Assim, para $t \in I$ temos $f(\alpha(s))$, para $s \in \left[\frac{t}{2}, 1\right]$, em que α é o homeomorfismo

$$
\alpha : \left[\frac{t}{2}, 1\right] \to I, \ \ \alpha(s) = \frac{t-2s}{t-2}.
$$

Definamos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$
H(s,t) = \begin{cases} x_0, & \text{para } \ s \in [0, t/2], \\ f\left(\dfrac{t-2s}{t-2}\right), & \text{para } \ s \in [t/2, 1]. \end{cases}
$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{t}{2}$ tem-se $x_0 = f(0) = f\left(\dfrac{t-2s}{t-2}\right)$ e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
H(s,0) &= \begin{cases} x_0, & \text{para } \ s = 0, \\ f(s), & \text{para } \ s \in [0,1], \end{cases} \\
&= f(s), \quad \text{para } \ s \in I; \\
H(s,1) &= \begin{cases} x_0, & \text{para } \ s \in [0,1/2], \\ f(2s-1), & \text{para } \ s \in [1/2,1], \end{cases} \\
&= \begin{cases} e_{x_0}(2s), & \text{para } \ s \in [0,1/2], \\ f(2s-1), & \text{para } \ s \in [1/2,1], \end{cases} \\
&= (e_{x_0} * f)(s), \quad \text{para } \ s \in I; \\
H(0,t) &= x_0 \text{ e } H(1,t) = f(1) = x_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $f \simeq_p e_{x_0} * f$.

c) Inverso: Queremos mostrar que $\bar{f}$ é o inverso de f. Para tanto, devemos mostrar que $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$ e $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

i) Mostremos que $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$. Para tanto, Definamos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2ts), & \text{para } \ s \in [0,1/2], \\ f(2t(1-s)), & \text{para } \ s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

H está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{2}$ tem-se $f(2ts) = f(t) = f(2t(1-s))$ e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
H(s,0) &= f(0) = x_0 = e_{x_0}(s) \text{ para } s \in I; \\
H(s,1) &= \begin{cases} f(2s), & \text{para } \ s \in [0,1/2], \\ f(2(1-s)) = \bar{f}(2s-1), & \text{para } \ s \in [1/2,1], \end{cases} \\
&= (f * \bar{f})(s) \text{ para } s \in I; \\
H(0,t) &= H(1,t) = f(0) = x_0.
\end{aligned}$$

Portanto, $e_{x_0} \simeq_p f * \bar{f}$.

ii) Mostremos que $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$. Para tanto, Definamos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} \bar{f}(2ts), & \text{para } \ s \in [0,1/2], \\ \bar{f}(2t(1-s)), & \text{para } \ s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

H está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{2}$ tem-se $\bar{f}(2ts) = \bar{f}(t) = \bar{f}(2t(1-s))$

e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
H(s,0) &= \bar{f}(0) = x_1 = e_{x_1}(s) \text{ para } s \in I;\\
H(s,1) &= \begin{cases} \bar{f}(2s), & \text{para } \; s \in [0,1/2],\\ \bar{f}(2(1-s)) = f(2s-1), & \text{para } \; s \in [1/2,1], \end{cases}\\
&= (\bar{f} * f)(s) \text{ para } s \in I;\\
H(0,t) &= H(1,t) = \bar{f}(0) = x_1.
\end{aligned}
$$

Portanto, $e_{x_1} \simeq_p \bar{f} * f$. □

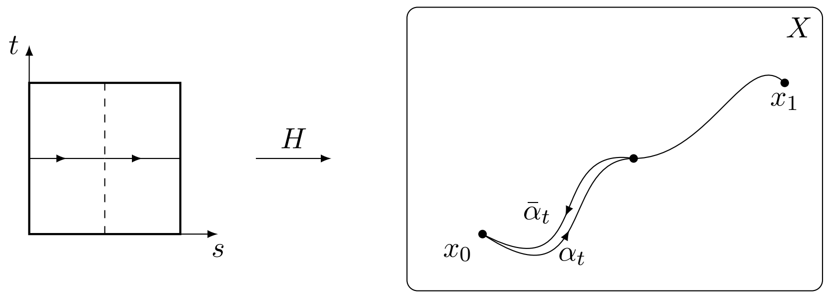

Figura 4.11: Homotopia para $e_{x_1} \simeq_p \bar{f} * f$

O conjunto das classes de homotopia por caminhos em um espaço topológico X, munido da operação $*$ bem definida, é denominado o **grupoide fundamental** de X.

4.2 Grupo Fundamental

O conjunto das classes de homotopia por caminhos em um espaço X munido da operação $*$ não é um grupo, porque o produto entre dois elementos deste conjunto não está sempre definido. No entanto, se tivermos um ponto $x_0 \in X$, denominado ponto base, que sirva como início e fim de um conjunto de caminhos deste espaço, o impedimento acima é excluído e o conjunto de classes de homotopia por caminhos baseados em x_0 será um grupo munido da operação $*$, denominado grupo fundamental de X.

Nesta seção estudaremos o grupo fundamental e deduziremos algumas de suas propriedades. Em particular, provaremos que o grupo fundamental é um invariante topológico do espaço X, o qual tem importância relevante no estudo de problemas de homeomorfismos.

Definição 4.6. *Seja X um espaço topológico e x_0 um ponto de X. Um caminho em X com início e fim em x_0 é denominado laço com base em x_0. O conjunto das classes de homotopia por laços com base em x_0 munido da operação $*$, denomina-se* **Grupo Fundamental de X com ponto base** x_0, *o qual denota-se por* $\pi_1(X, x_0)$.

A afirmação de que a operação $*$ restringida a $\pi_1(X, x_0)$ satisfaz os axiomas de grupo decorre do teorema 4.2. Neste caso, $[e_{x_0}]$ é o elemento neutro e $[\bar{f}]$ é o inverso de $[f]$.

Exemplo 4.3. Seja o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ e o laço constante e_{x_0} cuja imagem é o ponto x_0 e f um laço em $\mathbb{R}^n$ com ponto base em x_0. Então $[f] = [e_{x_0}]$, ou seja, $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ é o grupo trivial (composto somente do elemento neutro). De fato, definindo $F : I \times I \to \mathbb{R}^n$ por

$$F(s,t) = tx_0 + (1-t)f(s),$$

temos que F está bem definida, por tratar-se da soma de dois produtos de escalares por vetores do $\mathbb{R}^n$ e é contínua, pois é a soma de funções contínuas. Além disso, tem-se: $F(s,0) = f(s)$, $F(s,1) = e_{x_0}(s) = x_0$ e $F(0,t) = F(1,t) = x_0$. Portanto, $f \simeq_p e_{x_0}$.

Em geral, se X é um subconjunto convexo do $\mathbb{R}^n$, então $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial. Em particular, a bola unitária B^n do $\mathbb{R}^n$ dada por $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ tem grupo fundamental trivial.

Uma questionamento natural é se a escolha do ponto base afeta a estrutura do grupo fundamental. Esta situação trataremos a seguir.

Definição 4.7. *Seja α um caminho em X de x_0 a x_1. Definamos a aplicação $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ por*

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

que denominaremos de ***alfa-chapéu*** *ou* ***conjugação por alfa*** (Figura 4.12).

A aplicação $\hat{\alpha}$ está bem definida, pois a operação $*$ está bem definida. Se f é um laço baseado em x_0, então $\bar{\alpha} * f * \alpha$ é um laço baseado em x_1. Isto nos mostra que $\hat{\alpha}$ é uma aplicação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(X, x_1)$ e depende unicamente das classes de homotopia por caminhos de α.

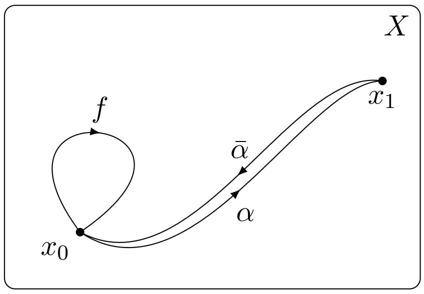

Figura 4.12: Conjugação por α: $\hat{\alpha}$

Teorema 4.3. *A aplicação $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Devemos mostrar que: (i) $\hat{\alpha}$ é um homomorfismo, ou seja, $\hat{\alpha}([f]*[g]) = \hat{\alpha}([f])*\hat{\alpha}([g])$ e (ii) $\hat{\alpha}$ é uma função bijetora, ou seja, $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$ e $\hat{\alpha}(\hat{\beta}([g])) = [g]$, para alguma função $\hat{\beta} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$.

Demonstração de (i): $\hat{\alpha}([f] * [g]) = \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g])$. De fato, tomando $[f]$ e $[g]$ em $\pi_1(X, x_0)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}([f] * [g]) &= [\bar{\alpha}] * ([f] * [g]) * [\alpha] \\
&= [\bar{\alpha}] * [f] * [e_{x_0}] * [g] * [\alpha] \\
&= [\bar{\alpha}] * [f] * ([\alpha] * [\bar{\alpha}]) * [g] * [\alpha] \\
&= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\
&= \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]).
\end{aligned}$$

Demonstração de (ii): $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$ e $\hat{\alpha}(\hat{\beta}([g])) = [g]$. Afim de mostrar essa segunda parte, definamos $\hat{\beta} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ por

$$\hat{\beta}([g]) = [\bar{\beta}] * [g] * [\beta] \text{ em que } \beta = \bar{\alpha}.$$

Tomando $[f]$ em $\pi_1(X, x_0)$ e $[g]$ em $\pi_1(X, x_1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) &= [\bar{\beta}] * ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * [\beta] \\ &= [\alpha] * ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * [\bar{\alpha}] \\ &= ([\alpha] * [\bar{\alpha}]) * [f] * ([\alpha] * [\bar{\alpha}]) \\ &= [f]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(\hat{\beta}([g])) &= [\bar{\alpha}] * ([\bar{\beta}] * [g] * [\beta]) * [\alpha] \\ &= [\beta] * ([\bar{\beta}] * [g] * [\beta]) * [\bar{\beta}] \\ &= ([\beta] * [\bar{\beta}]) * [g] * ([\beta] * [\bar{\beta}]) \\ &= [g].\end{aligned}$$

□

Corolário 4.1. *Se X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são pontos de X, então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Demonstração. Tomando x_0 e x_1, pontos do espaço conexo X, tem-se sempre um caminho α de x_0 a x_1 em X e um laço f com ponto base x_0. Pela definição de $\hat{\alpha}$ temos que a cada $[f]$ em $\pi_1(X, x_0)$ teremos o correspondente $\hat{\alpha}[f] \in \pi_1(X, x_1)$. Mas $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo. Daí, segue o resultado. □

Isto nos mostra que mudar o ponto base em um espaço conexo por caminhos não altera o grupo fundamental.

Definição 4.8. *Um espaço X é dito* ***simplesmente conexo*** *se é conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial para algum $x_0 \in X$ e, portanto, para todo $x_0 \in X$. Com frequência expressamos o fato de que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial escrevendo $\pi_1(X, x_0) = 0$.*

Lema 4.1. *Em um espaço simplesmente conexo X, dois caminhos quaisquer com mesmo ponto inicial e final são homotópicos por caminhos.*

Demonstração. Sejam α e β dois caminhos de x_0 a x_1. Então $\alpha * \bar{\beta}$ é um laço em X com base em x_0. Como X é simplesmente conexo, este laço é homotópico por caminho ao laço constante baseado em x_0. Desta forma, tem-se

$$[\alpha] = [\alpha] * [\bar{\beta} * \beta] = [\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] = [\beta].$$

Portanto, $\alpha \simeq_p \beta$. □

Definição 4.9. *Seja $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ uma aplicação contínua em que $h(x_0) = y_0$. Definimos $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ por*

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

A aplicação h_* denominamos **homomorfismo induzido por** *h relativo ao ponto base x_0.*

A aplicação h_* está bem definida. Para verificarmos este fato, consideremos $F : I \times I \to (X, x_0)$ uma homotopia entre os laços f e f' baseados em x_0. Consequentemente,

$$F(s,0) = f(s),\ \ F(s,1) = f'(s) \text{ e } F(0,t) = F(1,t) = x_0.$$

Mas, $h \circ F : I \times I \to (Y, y_0)$ é uma homotopia entre $h \circ f$ e $h \circ f'$, pois

$$(h \circ F)(s,0) = (h \circ f)(s),\ \ (h \circ F)(s,1) = (h \circ f')(s) \text{ e } (h \circ F)(0,t) = (h \circ F)(1,t) = y_0$$

e é contínua por ser composição de contínuas.

Para verificar que h_* **é um homomorfismo**, tomemos $[f]$ e $[g] \in \pi_1(X, x_0)$, assim $h_*([f]*[g]) = h_*([f*g]) = [h\circ(f*g)] = [(h\circ f)*(h\circ g)] = [h\circ f]*[h\circ g] = h_*([f])*h_*([g])$. Portanto, $h_*([f] * [g]) = h_*([f]) * h_*([g])$.

Proposição 4.5. *Se $G : X \times I \to Y$ é uma homotopia entre as aplicações $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $h' : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, então $h_* = h'_*$.*

Demonstração. Seja f um laço em X baseado em x_0, segue da propriedade reflexiva de uma relação de homotopia que $f \simeq f$. Como $h \simeq h'$ temos, pela proposição 4.1, que

$$h \circ f \simeq h' \circ f.$$

Além disso,

$$(h \circ f)(0) = (h \circ f)(1) = y_0 \text{ e } (h' \circ f)(0) = (h' \circ f)(1) = y_0,$$

ou seja, $h \circ f$ e $h' \circ f$ são laços baseados em y_0. Assim,

$$h \circ f \simeq_p h' \circ f.$$

Mas, $h_*([f]) = [h \circ f]$ e $h'_*([f]) = [h' \circ f]$. Consequentemente $h_*([f]) = h'_*([f])$.

Portanto, $h_* = h'_*$. □

Proposição 4.6. *Se $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é uma aplicação constante, então h_* é homotopicamente nula.*

Demonstração. Seja $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, segue que $h_*([f]) = [h \circ f]$. Mas $h \circ f = e_{y_0}$, consequentemente $h_*([f]) = [e_{y_0}]$. Portanto, h_* é homotopicamente nula. □

Teorema 4.4. *Se $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $k : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ são contínuas, então $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Se $i : (X, x_0) \to (X, x_0)$ é a aplicação identidade, então i_* é o homomorfismo identidade.*

Demonstração. Seja $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ tem-se:

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_*([h \circ f]) = k_*(h_*([f])) = (k_* \circ h_*)([f]).$$

Portanto, $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ e $i_*([f]) = [i \circ f]$. Mas i é a aplicação identidade. Logo, $i_*([f]) = [f]$, ou seja, $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade. □

Corolário 4.2. *Se $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é um homeomorfismo entre X e Y, então h_* é um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Seja $k : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ a inversa de h, $i : (X, x_0) \to (X, x_0)$ a aplicação identidade em X e $j : (Y, y_0) \to (Y, y_0)$ a aplicação identidade em Y. Queremos mostrar que os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ são isomorfos. Para tanto, mostraremos que $k_* \circ h_* = i_*$ e $h_* \circ k_* = j_*$. Do teorema 4.4, tem-se $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$ e $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$ em que i_* e j_* são, respectivamente, os homomorfismos identidades induzidos por i e j. Portanto, $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ são grupos isomorfos. □

Este corolário nos diz que espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos, em outras palavras é um invariante topológico.

4.3 Espaços de Recobrimento

Vimos, no exemplo 4.3, que qualquer subespaço convexo do $\mathbb{R}^n$ tem grupo fundamental trivial; concentraremos agora na tarefa de procurar alguns grupos fundamentais que não são triviais. Uma das ferramentas mais usadas para este propósito é a noção de espaço de recobrimento, o qual estudaremos nesta seção.

Definição 4.10. *Seja $p : E \to B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Um conjunto aberto U de B é dito* **uniformemente coberto** *por p, se sua imagem inversa $p^{-1}(U)$ puder ser escrita como uma união de abertos disjuntos V_α de E, tais que para cada α, a restrição de p a V_α é um homeomorfismo de V_α em U. A coleção $\{V_\alpha\}$ é denominada uma partição de $p^{-1}(U)$ em* **fibras**.

Se um conjunto aberto U de B está uniformemente coberto por p, costuma-se ilustrar o conjunto $p^{-1}(U)$ como uma pilha de fatias, todas com a mesma forma e tamanho que U, flutuando no ar sobre U, em que a aplicação p as comprime sobre U (Figura 4.13).

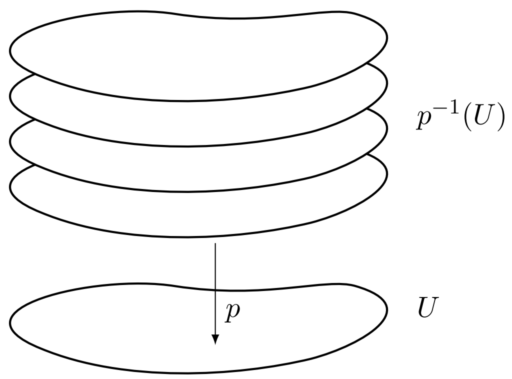

Figura 4.13: Aberto U uniformemente coberto por p

Definição 4.11. *Seja $p : E \to B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se todo ponto b de B tem uma vizinhança U_b que está uniformemente coberta por p, então dizemos que p é uma* **aplicação de recobrimento** *(ou, simplesmente, um recobrimento) e E é um* **espaço de recobrimento** *de B.*

Observação 4.2. Se $p : E \to B$ é uma aplicação de recobrimento, então para cada $b \in B$, o subespaço $p^{-1}(b)$ de E tem a topologia discreta. De fato, cada fibra V_α é um aberto em E e intersecta o conjunto $p^{-1}(b)$ em um único ponto. Portanto, este ponto é um aberto em $p^{-1}(b)$.

Exemplo 4.4. Seja X um espaço topológico e $i : X \to X$ a aplicação identidade deste espaço. Então i é uma aplicação de recobrimento (trivial). Em geral, seja E o espaço $X \times \{1, \dots, n\}$ consistindo em n cópias disjuntas de X. A aplicação $p : E \to X$ dada por $p(x, i) = x$, para todo i, é novamente uma aplicação de recobrimento (trivial). Neste caso, podemos ilustrar todo espaço E como uma pilha de fatias sobre X.

Na prática, frequentemente restringe-se a espaços de recobrimentos que são conexos por caminhos, afim de eliminar recobrimentos triviais do tipo pilhas de fatias.

Teorema 4.5. *A aplicação $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada pela equação*

$$p(x) = (\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x)$$

é uma aplicação de recobrimento.

Podemos representar p como uma aplicação que enrola a reta real $\mathbb{R}$ ao redor do círculo S^1 e, nesse processo, aplica cada intervalo $[n, n+1]$ sobre S^1.

Demonstração. Tomando o subconjunto U de S^1 consistindo naqueles pontos cuja primeira coordenada é positiva, o conjunto $p^{-1}(U)$ consiste naqueles pontos x nos quais $\cos 2\pi x$ é positivo, a saber a união dos intervalos

$$V_n = (n - \frac{1}{4},\ n + \frac{1}{4}),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ (Figura 4.14).

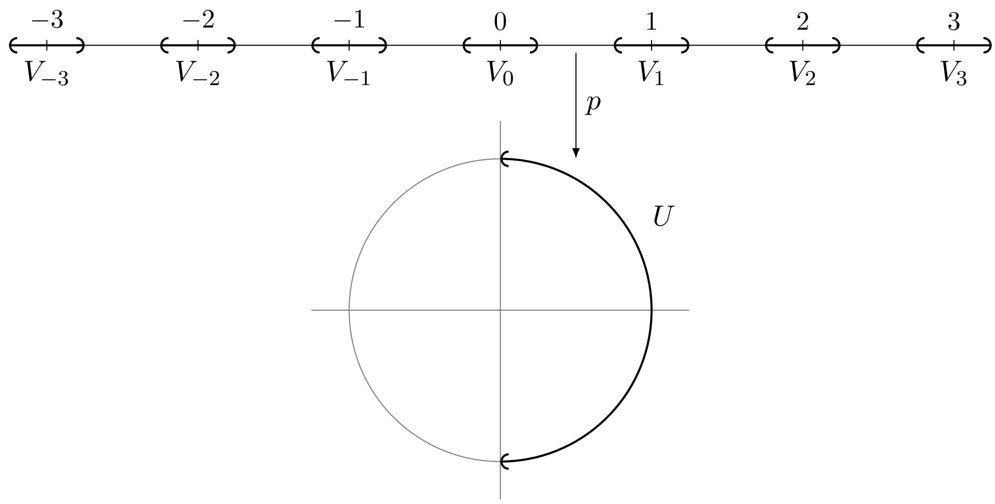

Figura 4.14: Recobrimento de S^1

Contudo, a aplicação p, restrita a qualquer intervalo fechado $\bar{V_n}$ é injetiva porque $\operatorname{sen} 2\pi x$ é estritamente monótona em tais intervalos. Além disso, p leva $\bar{V_n}$ sobrejetivamente sobre $\bar{U}$ e V_n sobre U, pelo teorema do valor intermediário. Dado que $\bar{V_n}$ é compacto, $p|\bar{V_n}$ é um homeomorfismo entre $\bar{V_n}$ e $\bar{U}$. Em particular, $p|V_n$ é um homeomorfismo entre V_n e U.

Podemos aplicar um raciocínio similar nas intersecções de S^1 com os semiplanos abertos superior e inferior, e com o semiplano aberto esquerdo. Estes conjuntos abertos recobrem S^1 e cada um destes está regularmente coberto por p. Portanto, $p : \mathbb{R} \to S^1$ é um recobrimento. $\square$

4.4 Grupo Fundamental do Círculo

As ideias que serão tratadas na definição 4.12 até a definição 4.13 terão como objetivo principal a criação de um embasamento teórico para a demonstração do teorema 4.7. As demonstrações dos lemas e teoremas deste intervalo de ideias não serão aqui tratadas, porém o leitor pode consultá-las em [5] pp. 342-345.

Definição 4.12. *Seja $p : E \to B$ uma aplicação. Se f é uma aplicação contínua de algum espaço X em B, um* **levantamento** *de f é uma aplicação $\tilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Exemplo 4.5. Seja $p : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x)$. O caminho $f : [0,1] \to S^1$ começando em $b_0 = (1,0)$ e dado por $f(x) = (\cos \pi x,\ \operatorname{sen} \pi x)$ possui levantamento $\tilde{f}(s) = \dfrac{s}{2}$ iniciando em 0 e terminando em $\dfrac{1}{2}$. O caminho $g(s) = (\cos \pi s,\ -\operatorname{sen} \pi s)$ possui levantamento $\tilde{g}(s) = -\dfrac{s}{2}$, que inicia em 0 e termina em $-\dfrac{1}{2}$. O caminho $h(s) = (\cos 4\pi s,\ \operatorname{sen} 4\pi s)$ possui levantamento $\tilde{h}(s) = 2s$ iniciando em 0 e terminando em 2. A Figura 4.15 ilustra este exemplo.

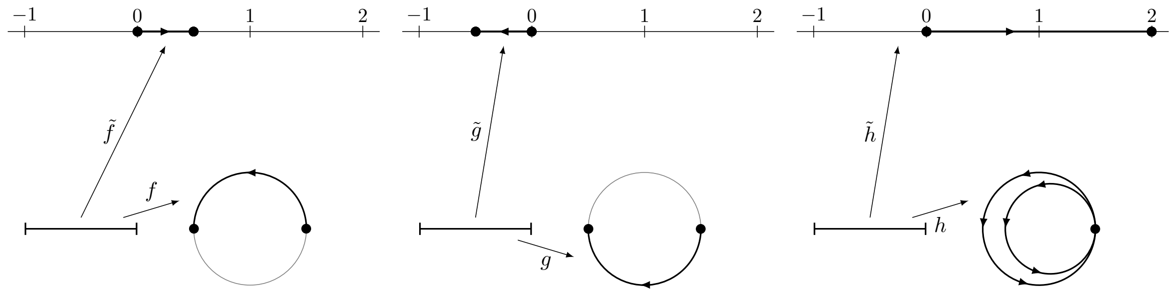

Figura 4.15: Levantamentos para caminhos em S^1

A existência de levantamentos quando p é um recobrimento é uma ferramenta importante no estudo dos espaços de recobrimentos e do grupo fundamental. O Lema 4.2 nos diz que dado um recobrimento p de um espaço E num espaço B, os caminhos em B podem ser levantados, o exemplo 4.5 ilustra esta situação. Já o Lema 4.3 nos indica a possibilidade de uma homotopia por caminhos em B ser levantada. Estes dois Lemas enunciamos a seguir.

Lema 4.2. *Seja $p : E \to B$ um recobrimento com $p(e_0) = b_0$. Qualquer caminho $f : [0,1] \to B$ iniciando em b_0 tem um único levantamento $\tilde{f}$ em E começando em e_0.*

Lema 4.3. *Sejam $p : E \to B$ um recobrimento com $p(e_0) = b_0$ e $F : I \times I \to B$ uma aplicação contínua com $F(0,0) = b_0$. Existe um único levantamento de F, $\tilde{F} : I \times I \to E$ tal que $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Se F é uma homotopia por caminhos, então $\tilde{F}$ é uma homotopia por caminhos.*

Teorema 4.6. *Sejam $p : E \to B$ um recobrimento com $p(e_0) = b_0$, f e g caminhos em B de b_0 a b_1 cujos respectivos levantamentos são $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ em E iniciando em e_0. Se f e g são homotópicas por caminho, então $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ terminam no mesmo ponto em E e são homotópicas por caminho.*

Definição 4.13. *Sejam $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ um recobrimento, $[f]$ um elemento do $\pi_1(B, b_0)$ e $\tilde{f}$ o levantamento de f que inicia em e_0. Definimos a aplicação $\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ por*

$$\phi([f]) = \tilde{f}(1).$$

Teorema 4.7. *O Grupo Fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros.*

Demonstração. Sejam o recobrimento $p : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$, $e_0 = 0$ e $p(e_0) = b_0 = (1, 0)$. Primeiramente mostremos que $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. Para tanto mostremos que:

(i) $p^{-1}(b_0) \subseteq \mathbb{Z}$. De fato, se $n \in p^{-1}(b_0)$, tem-se $p(n) = b_0$. Logo, $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\mathbb{Z} \subseteq p^{-1}(b_0)$. De fato, se $n \in \mathbb{Z}$, segue imediatamente que $p(n) = b_0$. Consequentemente $p^{-1}(b_0) = n$. Logo, $n \in p^{-1}(b_0)$.

Mostremos agora que a aplicação apresentada na definição anterior,

$$\phi : \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$$

é um isomorfismo de grupos. Para tanto, mostremos que:

(iii) ϕ é uma **aplicação sobrejetora**. De fato, seja n um ponto de $p^{-1}(b_0)$. Como $\mathbb{R}$ é conexo por caminhos, segue que existe um caminho $\tilde{f}$ em $\mathbb{R}$ de 0 até n. Logo, pela definição 4.12, $p \circ \tilde{f} = f$ em que f é um caminho em S^1 com início em b_0 e $\tilde{f}$ é o levantamento de f. Assim,

$$\begin{cases} p \circ \tilde{f}(0) = p(\tilde{f}(0)) = p(0) = b_0, \\ p \circ \tilde{f}(1) = p(\tilde{f}(1)) = p(n) = b_0, \end{cases}$$

ou seja, $p \circ \tilde{f}$ é um laço em S^1 baseado em b_0. Consequentemente $[p \circ \tilde{f}] \in \pi_1(S^1, b_0)$. Logo, $\phi([p \circ \tilde{f}]) = \phi([f]) = \tilde{f}(1) = n$. Portanto, $\phi([f]) = n$.

(iv) ϕ é uma **aplicação injetora**. De fato, tomemos $n \in \mathbb{Z}$ na imagem de ϕ e as classes $[f]$ e $[h]$ do domínio de ϕ tais que $\phi([f]) = \phi([h]) = n$. Sejam $\tilde{f}, \tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ os levantamentos de $f, h : I \to S^1$ respectivamente. Segue que $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(0) = 0$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{h}(1) = n$. Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo e $\tilde{f}$ e $\tilde{h}$ tem mesmo ponto inicial e final, então $\tilde{f}$ e $\tilde{h}$ são homotópicos por caminhos, ou seja, existe uma função contínua $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{H}(s, 0) = 0,\ \tilde{H}(s, 1) = n,\ \tilde{H}(0, t) = \tilde{f}(t) \text{ e } \tilde{H}(1, t) = \tilde{h}(t)\ \forall\ s, t \in I.$$

Observemos agora a função $H : I \times I \to S^1$ definida por $H = p \circ \tilde{H}$. Como p e $\tilde{H}$ são contínuas, H também é contínua por ser uma composição delas, além disso tem-se

$$\begin{cases} H(s, 0) = (p \circ \tilde{H})(s, 0) = p(\tilde{H}(s, 0)) = p(0) = b_0, \\ H(s, 1) = (p \circ \tilde{H})(s, 1) = p(\tilde{H}(s, 1)) = p(n) = b_0, \\ H(0, t) = (p \circ \tilde{H})(0, t) = p(\tilde{H}(0, t)) = p(\tilde{f}(t)) = (p \circ \tilde{f})(t) = f(t), \\ H(1, t) = (p \circ \tilde{H})(1, t) = p(\tilde{H}(1, t)) = p(\tilde{h}(t)) = (p \circ \tilde{h})(t) = h(t). \end{cases}$$

Portanto, $H : f \simeq_p h$, ou seja, $[f] = [h]$.

(v) ϕ é um **homomorfismo.** De fato, tomando $[f]$ e $[g]$ em $\pi_1(S^1, b_0)$, sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, respectivamente, os levantamentos de f e g, caminhos em $\mathbb{R}$ com início em 0. Sejam $n = \tilde{f}(1)$ e $m = \tilde{g}(1)$. Segue por definição de ϕ que $\phi([f]) = n$ e

$\phi([g]) = m$. Definamos o caminho $\tilde{\tilde{g}}$ por $\tilde{\tilde{g}}(s) = n + \tilde{g}(s)$. Como $p(n + x) = p(x)$, tem-se:

$$(p \circ \tilde{\tilde{g}})(s) = p(\tilde{\tilde{g}}(s)) = p(n + \tilde{g}(s)) = p(\tilde{g}(s)) = (p \circ \tilde{g})(s) = g(s).$$

Isto nos diz que $\tilde{\tilde{g}}$ é um levantamento de g que inicia em n. Então, o produto $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ está bem definido, pois $\tilde{f}(1) = n = n + \tilde{g}(0) = \tilde{\tilde{g}}(0)$ e é um levantamento que inicia em 0, já que $p \circ (\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}) = (p \circ \tilde{f}) * (p \circ \tilde{\tilde{g}}) = f * g$. Além disso, $\tilde{\tilde{g}}(1) = n + \tilde{g}(1) = n + m$. Mas,

$$(\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}})(s) = \begin{cases} \tilde{f}(2s), & \text{para } s \in [0, 1/2], \\ \tilde{\tilde{g}}(2s-1), & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Assim, $(\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}})(1) = \tilde{\tilde{g}}(1) = m + n$. Portanto, $\phi([f] * [g]) = \phi([f * g]) = (\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}})(1) = m + n = \phi([f]) + \phi([g])$. □

4.5 Grupo Fundamental de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Teorema 4.8. *Seja $x_0 \in S^1$. A inclusão $j : (S^1, x_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$ induz um isomorfismo do grupo fundamental.*

Demonstração. Seja $r : (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0) \to (S^1, x_0)$ uma aplicação contínua definida por $r(x) = \dfrac{x}{||x||}$, em que $||x||$ denota a distância de x à origem $(0,0)$ do plano $\mathbb{R}^2$, a qual chamamos norma de x. Mostremos que r_* é o inverso de j_*. Consideremos a composição

$$(S^1, x_0) \xhookrightarrow{j} (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0) \xrightarrow{r} (S^1, x_0).$$

Esta composição é igual à aplicação identidade em S^1, isto é, $r \circ j = id : (S^1, x_0) \to (S^1, x_0)$. Portanto pela propriedade de homomorfismo induzido, $r_* \circ j_*$ é o homomorfismo identidade em $\pi_1(S^1, x_0)$, ou seja, $r_* \circ j_* = id_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$. Para mostrar que $j_* \circ r_*$ é o homomorfismo identidade em $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$, tomemos $[f] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$, de onde segue que $(j_* \circ r_*)([f]) = j_*(r_*[f]) = [j \circ r \circ f]$. Tomando $g = j \circ r \circ f$, então $g : I \to (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$, será um laço em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ baseado em x_0, definido por

$$g(s) = \frac{f(s)}{||f(s)||}.$$

A situação anterior é ilustrada pela Figura 4.16. Mostremos agora que g é homotópica por caminhos a f. Para tanto, definamos $F : I \times I \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por

$$F(s,t) = t\frac{f(s)}{||f(s)||} + (1-t)f(s).$$

Como $F(s,0) = f(s)$, $F(s,1) = g(s)$, $F(0,t) = F(1,t) = x_0$, logo, $f \simeq_p g$. Mas, $(j_* \circ r_*)([f]) = [g]$ e consequentemente $(j_* \circ r_*)([f]) = [f]$. Portanto,

$$j_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 - (0,0), x_0)$$

é um **isomorfismo induzido por j no grupo fundamental**. □

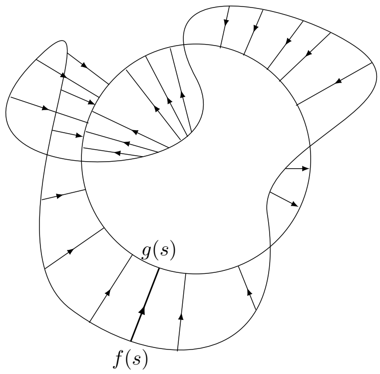

Figura 4.16: Normalização de uma curva ao redor da origem

A prova deste teorema deu certo porque foi possível deformar o caminho f em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, no caminho $r \circ f$ em S^1 ($f : I \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; $r : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to S^1$; $r \circ f : I \to S^1$). Uma outra maneira de visualizar esta prova é notar que podemos deformar o espaço $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no espaço S^1, traçando segmentos de retas com pontos extremos em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e S^1 tais que as retas correspondentes aos segmentos passem por $(0,0)$. Assim, o caminho f é deformado no caminho $r \circ f$; a esta deformação denominamos **retração por deformação forte de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ em S^1**. Analisar a prova deste modo nos conduz a uma generalização do teorema anterior, ou seja, ao teorema a seguir:

Teorema 4.9. *Seja $x_0 \in S^{n-1}$. A inclusão $j : (S^{n-1}, x_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n - 0, x_0)$ induz um isomorfismo do grupo fundamental.*

Definição 4.14. *Seja A um subespaço de X. Dizemos que A* **é um retrato de** *X, se existir uma aplicação contínua $r : X \to A$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in A$. A aplicação r denominamos* **retração de X em A**.

Proposição 4.7. *Se A é um retrato de X, então o homomorfismo de grupos fundamentais induzido pela inclusão $j : A \hookrightarrow X$ é injetor.*

Demonstração. Como A é um retrato de X, temos que existe uma retração $r : X \to A$ em que $r(x) = x$ para todo $x \in A$. Desta forma,

$$(r \circ j)(a) = r(j(a)) = r(a) = a = id_A(a)$$

Logo, $(r \circ j)_* = (id_{(A,a)})_* = id_{\pi_1(A,a)}$. Portanto, j_* é uma aplicação injetora. $\square$

Definição 4.15. *Seja A um subespaço de X. Então A é denominado um* **retrato por deformação forte de** *X, se existir uma aplicação contínua $H : X \times I \to X$ tal que*

$$\begin{cases} H(x,0) = x \text{ para } x \in X \\ H(x,1) \in A \text{ para } x \in X \\ H(a,t) = a \text{ para } a \in A \text{ e } t \in I. \end{cases}$$

A aplicação H é chamada de **retração por deformação forte**.

Dito de outro modo, o espaço A é um retrato por deformação forte de X, se X puder ser deformado gradualmente em A, em que cada ponto de A permanece fixo durante a deformação. No final da deformação, ocorre uma retração de X para A, aplicando x em $H(x,1)$.

Exemplo 4.6. A aplicação $H : (\mathbb{R}^n - 0) \times I \to (\mathbb{R}^n - 0)$ definida por

$$H(x,t) = t\frac{x}{||x||} + (1-t)x$$

é uma retração por deformação forte do $\mathbb{R}^n - 0$ no S^{n-1}, visto que

$$\begin{cases} H(x,0) = 0\frac{x}{||x||} + (1-0)x \ = x, & \forall x \in \mathbb{R}^n - 0, \\ H(x,1) = 1\frac{x}{||x||} + (1-1)x = \frac{x}{||x||} \in S^{n-1}, & \forall x \in \mathbb{R}^n - 0, \\ H(\frac{x}{||x||}, t) = t\frac{\frac{x}{||x||}}{||\frac{x}{||x||}||} + (1-t)\frac{x}{||x||} = \frac{x}{||x||} \in S^{n-1}, & \forall\, t \in I. \end{cases}$$

Teorema 4.10. *Seja A um retrato por deformação forte de X e $a_0 \in A$. Então a inclusão*

$$j : (A, a_0) \hookrightarrow (X, a_0)$$

induz um isomorfismo do grupo fundamental.

Demonstração. Como A é um retrato por deformação forte de X, segue que existe uma retração por deformação forte $H : X \times I \to X$ tal que

$$\begin{cases} H(x,0) = x = id_X(x), \quad \forall x \in X, \\ H(x,1) \in A, \quad \forall x \in X, \\ H(a,t) = a, \ \forall a \in A \text{ e } \forall t \in I. \end{cases}$$

Seja $r : (X, a_0) \to (A, a_0)$ a aplicação definida por $r(x) = H(x,1)$ e seja a composição

$$A \overset{j}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{r} A \overset{j}{\hookrightarrow} X.$$

Queremos mostrar que $j_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ é isomorfismo induzido por j do grupo fundamental. Para tanto, devemos mostrar que:

(i) $(r \circ j)_* = id_{\pi_1(A,a_0)}$. De fato,

$$(r \circ j)(a) = r(j(a)) = r(a) = H(a,1) = a = id_A(a), \text{ou seja, } \ r \circ j = id_{(A,a_0)}.$$

Portanto, $(r \circ j)_* = (id_{(A,a_0)})_* = id_{\pi_1(A,a_0)}$.

(ii) $(j \circ r)_* = id_{\pi_1(X,a_0)}$. De fato, temos $(j \circ r)(x) = j(r(x)) = j(H(x,1)) = j(a) = a = H(x,1) = r(x)$. Consequentemente,

$$\begin{cases} H(x,0) = id_X(x), \\ H(x,1) = r(x) = (j \circ r)(x), \\ H(a_0,t) = a_0 = id_X(a_0) = (j \circ r)(a_0). \end{cases}$$

Logo, $j \circ r \simeq id_{(X,a_0)}$. Portanto, $(j \circ r)_* = (id_{(X,a_0)})_* = id_{\pi_1(X,a_0)}$. $\square$

Exemplo 4.7. Seja B o eixo z do $\mathbb{R}^3$. Consideremos o espaço $\mathbb{R}^3 - B$. O plano $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \{0\}$ é um retrato por deformação forte de $\mathbb{R}^3 - B$, pois existe a aplicação contínua $H : (\mathbb{R}^3 - B) \times I \to \mathbb{R}^3 - B$ definida por

$$H(x,y,z,t) = (x,y,(1-t)z); \; x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

que é uma retração por deformação forte. De fato, temos:

$$\begin{cases} H(x,y,z,0) = (x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - B, \\ H(x,y,0,t) = (x,y,0), \quad \forall (x,y,0) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \times \{0\} \text{ e } \forall t \in I, \\ H(x,y,z,1) = (x,y,0) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \{0\}, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - B. \end{cases}$$

O lema[2] a seguir tem importância especial na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, neste sentido ele é usado nas etapas 2 e 3 da demonstração que apresentaremos. Este lema também será usado na demonstração da proposição 4.8.

Lema 4.4. *Seja $h : S^1 \to X$ uma aplicação contínua. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *h é homotopicamente nula,*

(ii) *h se estende para uma aplicação contínua $k : B^2 \to X$,*

(iii) *h_* é o homomorfismo trivial do grupo fundamental.*

Proposição 4.8. *A aplicação inclusão $j : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é homotopicamente nula. A aplicação identidade $id : S^1 \to S^1$ não é homotopicamente nula.*

Demonstração. De fato, do exemplo 4.6, sabemos que existe uma retração por deformação forte do $\mathbb{R}^2 - 0$ no S^1. Segue, do teorema 4.8, que

$$j_* : \pi_1(S^1, a_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, a_0)$$

é um isomorfismo. Assim, j_* é injetora e portanto não trivial. Do teorema 4.4, i_* é o homomorfismo identidade, consequentemente i_* não é trivial.

Portanto, das equivalências do Lema 4.4, segue o resultado. □

4.6 Teorema Fundamental da Álgebra

Um resultado básico na teoria dos números complexos diz que toda equação polinomial

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

de grau n com coeficientes complexos tem n raízes complexas (a menos da multiplicidade de suas raízes). Este resultado é uma consequência natural do Teorema Fundamental da Álgebra. Este Teorema nos diz que a equação acima tem pelo menos uma raiz complexa. A demonstração do mesmo pode ser feita de variadas formas. Pode, por exemplo, ser feita utilizando técnicas de álgebra, ou com a teoria de funções analíticas de uma variável complexa, neste caso o teorema surge como um corolário do Teorema de Liouville. Uma outra forma é usar teoria de homotopia que foi desenvolvida neste trabalho e é neste sentido que faremos a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

[2]Uma demonstração do lema 4.4 pode ser consultada em [5], p. 349

Teorema 4.11. (Teorema Fundamental da Álgebra) *Uma equação polinomial*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

de grau n (inteiro positivo) com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz complexa.

Demonstração. **1ª Etapa:** Consideremos a aplicação $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = z^n$, em que z é um número complexo cujo módulo é 1. Provemos que o homomorfismo induzido por f, $f_* : \pi_1(S^1, b_0) \to \pi_1(S^1, b_0)$ em que $b_0 = (1, 0)$, é uma aplicação injetora.

Seja $p_0 : I \to S^1$ o laço em S^1 baseado em b_0, definido por

$$p_0(s) = e^{2\pi is} = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s).$$

Sua imagem pela função f_* tem como um dos seus representantes, o laço em S^1 baseado em b_0

$$f(p_0(s)) = (e^{2\pi is})^n = (\cos 2\pi ns, \operatorname{sen} 2\pi ns).$$

Tomando o recobrimento $p : (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, b_0)$, definido por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$, segue que os levantamentos dos laços p_0 e $f \circ p_0$ que iniciam em 0 são, respectivamente, os caminhos $\tilde{p_0}(s) = s$ e $\widetilde{(f \circ p_0)}(s) = ns$. Desta forma, pelo isomorfismo $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$, o laço p_0 corresponde ao inteiro 1 enquanto o laço $f \circ p_0$ corresponde ao inteiro n. Assim, f_* é a "multiplicação por n" no grupo fundamental de S^1. Logo, f_* é injetora.

2ª Etapa: Mostremos que se $g : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ é a aplicação $g(z) = z^n$ tal que $|z| = 1$, então g não é homotopicamente nula.

A aplicação g é igual a aplicação f da primeira etapa composta com a aplicação inclusão $j : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Vimos que f_* é injetora. Notemos também que S^1 é um retrato de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, pelo exemplo 4.6. Consequentemente, pela proposição 4.7, j_* é injetora. Além disso, pelo teorema 4.4, $g_* = j_* \circ f_*$. Segue que, g_* é injetora por ser composição de injetoras. Assim, g_* não é trivial. Logo, pelo lema 4.4, g não é homotopicamente nula.

3ª Etapa: Provemos agora um caso especial do teorema. Dada a equação polinomial

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

suponhamos que

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1.$$

Agora mostremos que esta equação tem raiz dentro da bola unitária B^2. Para tanto, suponhamos que não há raiz. Desta forma consideremos a aplicação $k : B^2 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definida por

$$k(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Se h é a restrição de k a S^1, segue que h se estende a uma aplicação da Bola unitária B^2 em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Assim, pelo Lema 4.4, h é homotopicamente nula.

Por outro lado, a aplicação $F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dada por

$$F(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)$$

é uma homotopia entre g e h. De fato, F está bem definida já que em nenhum momento é igual a zero, pois:

$$\begin{aligned}|F(z,t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)| \\ &\geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0.\end{aligned}$$

Além disso,

- F é contínua,
- $F(z,0) = z^n = g(z)$,
- $F(z,1) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = h(z)$.

Mas g ser homotópica a h é um absurdo, porque g não é homotopicamente nula e h é homotopicamente nula. Logo, a equação

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

têm pelo menos uma raiz na bola unitária B^2.

4ª Etapa: Provemos agora o caso geral. Seja a equação polinomial

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Observemos que se

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1,$$

recaímos no caso especial provado na etapa 3.

Caso contrário tem-se

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| \geq 1.$$

Neste caso tomando $z = cy$ em que c é um número real positivo e substituindo na equação original, teremos

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

ou

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

Se esta última equação possui uma raiz $y = y_0$, então a equação original possui uma raiz $z_0 = cy_0$.

Tomando um c suficientemente grande, afim de que

$$|\frac{a_{n-1}}{c}| + |\frac{a_{n-2}}{c^2}| + \cdots + |\frac{a_0}{c^n}| < 1,$$

por exemplo, tomando $c = 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$, tem-se

$$\frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{c} < 1$$

ou

$$|\frac{a_{n-1}}{c}| + \cdots + |\frac{a_1}{c}| + |\frac{a_0}{c}| < 1,$$

consequentemente

$$|\frac{a_{n-1}}{c}| + |\frac{a_{n-2}}{c^2}| + \cdots + |\frac{a_0}{c^n}| < 1,$$

ou seja, fizemos que nossa equação original recaísse no caso particular discutido na terceira etapa da demonstração.

Portanto, a equação

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

sempre admitirá pelo menos uma raiz no campo dos números complexos. □

Observações

A demonstração anterior foi feita considerando um polinômio mônico, porém é válida para qualquer polinômio de grau $n > 0$, pois caso o polinômio não seja mônico, dividimos o mesmo pelo coeficiente dominante.

Outro fato a ser notado é que o domínio e o contradomínio da função polinomial correspondente à equação

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

é o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Caso fosse o conjunto dos números reais, teríamos que provar que qualquer função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau $n \geq 1$ definida por

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

com a seguinte restrição $|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$ admite raízes no intervalo $[-1, 1]$. Mas, tal fato nem sempre ocorre, por exemplo, a equação

$$x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{25} = 0$$

não tem raiz neste intervalo. Isto nos mostra que restringir o domínio da família de funções polinomiais mônicas de grau $n \geq 1$ ao conjunto dos números reais faz com que a prova do Teorema Fundamental da Álgebra falhe.

Podemos notar também que os argumentos da prova do teorema, quando adaptados para $\mathbb{R}$, não são válidos, pois neste caso teríamos que lidar com funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}-\{0\}$, este último, homotopicamente equivalente a dois pontos, e daí não temos mais o grupo fundamental do círculo envolvido.

Conclusão

O objetivo principal do trabalho foi alcançado, a saber: a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra através da Teoria de Homotopia.

A princípio, o projeto teria início com o capítulo 3. Mas, afim de termos um suporte básico da teoria de Topologia Geral necessário para o entendimento de alguns termos desenvolvidos no trabalho, achamos por bem iniciar com um capítulo sobre Topologia da Reta, neste sentido o estudo da disciplina de Análise Matemática ministrada pela Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato ajudou bastante no seu desenvolvimento.

Depois do capítulo sobre topologia da reta, trabalhamos conceitos de espaços topológicos gerais e construção de funções contínuas entre espaços quaisquer. Depois prosseguimos com o estudo do grupo fundamental (aqui, assim como a disciplina Análise Matemática ajudou no desenvolvimento do capítulo 2, o estudo da disciplina Aritmética e Álgebra desenvolvida pela Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi ajudou no desenvolvimento teórico do Grupo Fundamental).

Durante o desenvolvimento do trabalho, o orientando teve algumas dificuldades de entendimento dos conteúdos, boa parte destas dificuldades foram sanadas pela boa didática de nossa principal referência, ou seja, do livro [5], porém quando as dificuldades persistiam a orientação do Prof. Dr. Thiago de Melo fora fundamental para saná-las.

Em suma, os conhecimentos tratados durante o trabalho, tais como: homotopia, grupo fundamental e espaços de recobrimento são importantíssimos não somente para o entendimento do nosso principal objetivo, mas também porque principiam o estudo da topologia algébrica permitindo assim uma base para futuras pesquisas nesta área.

Referências

[1] R. F. Brown. Elementary consequences of the noncontractibility of the circle. *The American Mathematical Monthly*, 81(3):247–252, 1974.

[2] A. K. M. Libardi, J. P. Vieira, and T. de Melo. *Invariantes Topológicos.* Cultura Acadêmica, São Paulo, 2012.

[3] E. L. Lima. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. IMPA, Rio de Janeiro, 4ª edition, 2012.

[4] E. L. Lima. *Curso de Análise*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, 14ª edition, 2013.

[5] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, Upper Saddle River, 2nd edition, 2000.

[6] W. A. Neves. *Uma Introdução à Análise Real.* Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2014.