

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

DINÂMICA NÃO LINEAR DO PÊNDULO ELÁSTICO: ANÁLISE DO CASO
IDEAL VIA MAPEAMENTO DE POINCARÉ E DO SISTEMA REAL POR
TÉCNICAS DE VISÃO COMPUTACIONAL

Rafael Salandin Moraes

Prof. Dr. Florian Steffen Günther

Rio Claro (SP)

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

RAFAEL SALANDIN MORAES

DINÂMICA NÃO LINEAR DO PÊNDULO ELÁSTICO: ANÁLISE DO
CASO IDEAL VIA MAPEAMENTO DE POINCARÉ E DO SISTEMA
REAL POR TÉCNICAS DE VISÃO COMPUTACIONAL.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro (SP)

2025

M827d Moraes, Rafael Salandin
Dinâmica não linear do pêndulo elástico : análise do caso ideal via mapeamento de Poincaré e do sistema Real por técnicas de visão computacional / Rafael Salandin Moraes. -- Rio Claro, 2025
63 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado e licenciatura - Física) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Florian Steffen Günther

1. Pêndulo elástico. 2. dinâmica não linear. 3. caos. 4. seção de Poincaré. 5. visão computacional. I. Título.

RAFAEL SALANDIN MORAES

DINÂMICA NÃO LINEAR DO PÊNDULO ELÁSTICO:
ANÁLISE DO CASO IDEAL VIA MAPEAMENTO DE
POINCARÉ E DO SISTEMA REAL POR TÉCNICAS DE
VISÃO COMPUTACIONAL.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Florian Steffen Günther

Prof. Dr. Everton Santos Medeiros

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro, 03 de Setembro de 2025.

Assinatura da(o) aluna(o)

Assinatura da(o) orientadora(o)

*Ao verme que primeiro roerá as frias carnes do meu cadáver, dedico como saudosa
lembrança este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processo nº 2024/21697-4. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Agradeço também o Pedro Luis Forti pela ajuda na montagem do experimento e posteriormente em algumas gravações no período em que eu estava afastado, além disso agradeço Anael Fernando Porto, Murilo Vidor Dias, Pedro Henrique Lopes Tranzer, Roberta Berdu e Thiago Ardana Chain pela ajuda com este trabalho.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer um fato que foi me dito uma vez: "a Física pertence à área das ciências *exatas*, e não das ciências *possíveis*" **Florian Steffen Günther**.

Eu gostaria de agradecer às pessoas que estiveram presentes durante esse processo de forma mais indireta, principalmente ao pessoal do “*Coletivo Calvo-Rock-Hackerman*”, Liv, Iza, fer, Dan, que foram as pessoas a quem eu sabia que poderia atormentar durante as férias, e também ao pessoal do “*Partido Güntherista em busca da alegria*”, Thi, Smag, Kubo, Paulinho, Comuna, Ëstër, pessoas às quais eu atormentava durante o semestre, alguns estivessem estudando para provas ou jogando/fazendo alguma no lugar de estar estudando.

Também sou grato aos professores que, de alguma forma, contribuíram com a minha formação, seja com aulas das matérias cursadas, seja com discussões acerca de um tema, ou de ter me aceitado para ser monitor da sua matéria, ou de ter julgado erroneamente que eu não daria mais trabalho do que já dava quando eu procurei para ser meu orientador.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os deuses, dos antigos e esquecidos aos contemporâneos e talvez não reconhecidos ainda, pois sou uma pessoa laica.

*“Sempre foi difícil
Dizer tudo que sinto
Agora
Eu estou
Desaparecendo ”*

TERRAPLANA, “Desaparecendo ”

RESUMO

Este trabalho apresenta uma caracterização do pêndulo elástico, empregando uma metodologia abrangente que busca integrar análises teóricas e experimentais. O objetivo central é estabelecer um paralelo entre as previsões do modelo e as observações empíricas, compreendendo as complexidades inerentes a este sistema físico. Na esfera teórica, a investigação inicia-se com a derivação das equações de movimento a partir dos princípios da mecânica Hamiltoniana, utilizando tanto coordenadas polares quanto cartesianas para uma descrição completa do sistema. A análise numérica subsequente envolve a adimensionalização dessas equações, ao introduzir um parâmetro de controle que quantifica a relação entre as frequências do pêndulo simples e massa-mola. Através de simulações computacionais é feita a análise das trajetórias. As visualizações obtidas por meio das seções de Poincaré permitem visualizar os comportamentos simulados, desde oscilações periódicas até estados caóticos, e o retorno à periodicidade para diferentes parâmetros. Essas seções permitem mapear as regiões de estabilidade e as áreas de comportamento imprevisível no espaço de fase. Paralelamente, a abordagem experimental consistiu no design e na construção de um aparato físico para a observação direta do movimento do pêndulo elástico. Um sistema de visão computacional foi desenvolvido, empregando a biblioteca OpenCV e o algoritmo de rastreamento CSRT, para capturar e analisar a trajetória do pêndulo a partir de gravações de vídeo. Os experimentos foram conduzidos com dois tipos de materiais elásticos: uma mola helicoidal e um elástico de escritório. Para futuras investigações, a teoria pode partir para a consideração de termos dissipativos, como a resistência do ar e o atrito interno da mola, que são observados experimentalmente. Além disso, a expansão do modelo para três dimensões para uma melhor conexão com a realidade. No que tange ao experimento, a otimização do design do acoplamento entre a massa e a mola é fundamental para reduzir torques indesejados que podem induzir movimentos tridimensionais, garantindo que as observações experimentais se aproximem mais das condições ideais do modelo teórico.

Palavras-chave: PÊNDULO ELÁSTICO, DINÂMICA NÃO LINEAR, CAOS, SEÇÃO DE POINCARÉ, VISÃO COMPUTACIONAL

ABSTRACT

This work presents a characterization of the elastic pendulum using a comprehensive methodology that integrates theoretical and experimental analyses. The primary objective is to establish a parallel between model predictions and empirical observations, addressing the inherent complexities of this physical system. Within the theoretical framework, the investigation begins with deriving equations of motion from Hamiltonian mechanics principles, utilizing both polar and Cartesian coordinates for a complete system description. Subsequent numerical analysis involves non-dimensionalizing these equations, introducing a control parameter that quantifies the relationship between the natural frequencies of the simple pendulum and mass-spring subsystems. Trajectory analysis is conducted through computational simulations. Visualizations obtained via Poincaré sections reveal simulated behaviors ranging from periodic oscillations to chaotic states and the return to periodicity under varying parameters. These sections enable mapping of stability regions and unpredictable behavior zones in phase space. Concurrently, the experimental approach involved designing and constructing a physical apparatus for direct observation of the elastic pendulum's motion. A computer vision system was developed using the OpenCV library and CSRT tracking algorithm to capture and analyze pendulum trajectories from video recordings. Experiments employed two elastic materials: a helical spring and an office rubber band. For future investigations, theoretical work could incorporate dissipative terms (e.g., air resistance and internal spring friction) observed experimentally. Additionally, expanding the model to three dimensions would enhance real-world relevance. Regarding experimentation, optimizing the mass-spring coupling design is essential to reduce unwanted torques that induce three-dimensional motion, ensuring experimental observations better approximate the theoretical model's ideal conditions.

Keywords: ELASTIC PENDULUM, NONLINEAR DYNAMICS, CHAOS, POINCARÉ SECTION, COMPUTER VISION

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	Conceitos de Mecânica Analítica	15
2.1.1	Espaços de representação	17
2.1.2	Espaço de Configuração e Espaço de Evento	17
2.1.3	Espaço de Fase e Sistemas Periódicos	17
2.1.4	Seção de Poincaré para Sistemas com Mais de 2 Dimensões	18
2.2	Introdução ao sistema	20
3	ABORDAGEM TEÓRICO-NUMÉRICA	24
3.1	Formulação teórica do sistema	24
3.1.1	Coordenadas polares	24
3.1.2	Coordenadas Cartesianas	26
3.2	Unidades Reduzidas e a Hamiltoniana adimensional	27
3.3	Simulação numérica e resultados	29
3.3.1	Implementação Computacional	29
3.3.2	Análises da seção de Poincaré	30
3.3.3	Seções para Diferentes Parâmetros Adimensionais	32
4	ABORDAGEM EXPERIMENTAL	34
4.1	Visão Computacional	34
4.2	Programa para o rastreamento	35
4.3	Aparato experimental	38
4.4	Resultados	39
4.4.1	Utilizando mola	40
4.4.2	Utilizando elástico	41
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	44
	APÊNDICES	47
	APÊNDICE A – UM BREVE ESTUDO SOBRE MÉTODOS	
	NUMÉRICOS	48

A.1	Simpléctismo e Métodos Numéricos	48
A.1.1	Método de Euler (FPA & LPA)	49
A.1.2	Método de Runge-Kutta 4º Ordem	49
A.1.3	Método de Dormand-Prince 8º Ordem	50
A.2	Comparações dos Resultados entre os Métodos	50
	APÊNDICE B – ANÁLISES DAS TRAJETÓRIA PARA DI-	
	FERENTES f	53
	APÊNDICE C – DIFERENTES TRAJETÓRIAS EXPERIMEN-	
	TAIS	61
C.1	Utilizando Mola	61
C.2	Utilizando elástico	63

1 INTRODUÇÃO

A busca pela compreensão e modelagem dos fenômenos naturais tem sido a força motriz da física desde suas origens. No entanto, a complexidade inerente a muitos sistemas do mundo real frequentemente transcende as descrições lineares, dando origem ao fascinante campo da dinâmica não linear. As raízes históricas dessa área remontam ao final do século XIX, com contribuições seminais que desafiaram as abordagens mecânicas clássicas. Henri Poincaré, figura proeminente desse período, revolucionou o estudo dos sistemas dinâmicos ao investigar o problema dos três corpos. Seus trabalhos pioneiros revelaram a complexidade e a notável sensibilidade às condições iniciais que caracterizam os sistemas não lineares [1], estabelecendo as bases para a compreensão de que, mesmo em sistemas determinísticos, o comportamento futuro pode ser surpreendentemente imprevisível. A evolução da dinâmica não linear, contudo, não se limitou às descobertas de Poincaré. Na década de 1960, Edward Lorenz, ao analisar modelos atmosféricos simplificados, demonstrou a existência de atratores estranhos e a extrema dependência das condições iniciais, popularizando o conceito de caos determinístico e o “efeito borboleta” [2]. É intrigante observar que, em contraste com uma visão estritamente materialista da realidade, onde a existência é definida por sua concretude física, o caos, em sua essência, manifesta-se mais como uma propriedade abstrata das equações matemáticas que governam os sistemas do que como uma entidade puramente material. Nesse sentido, o “materialismo” do caos reside na estrutura lógica que o constitui, e não em uma substância física que o compõe. Assim, quais efeitos teóricos é possível observar na realidade?

Em sua essência, a dinâmica não linear descreve sistemas onde a relação entre causas e efeitos não é proporcional, e pequenas perturbações nas condições iniciais podem desencadear divergências significativas ao longo do tempo. Ao contrário dos sistemas lineares, que podem ser convenientemente decompostos e analisados em partes isoladas, os sistemas não lineares demandam uma abordagem holística, onde as interações intrínsecas entre seus componentes são fundamentais para apreender seu comportamento global [3]. O comportamento caótico, uma das manifestações mais notáveis da dinâmica não linear, é frequentemente confundido com aleatoriedade. No entanto, o caos é um fenômeno intrinsecamente determinístico; embora imprevisível a longo prazo, ele é regido por leis físicas bem definidas. A imprevisibilidade surge da sensibilidade exponencial às condições iniciais, e não de uma aleatoriedade inerente [4]. Em circuitos eletrônicos como o de Chua, o comportamento caótico surge intencionalmente da sua estrutura baseada em integradores analógicos. A não-linearidade introduzida por componentes específicos transforma essa integração contínua em padrões dinâmicos complexos e aperiódicos. [5].

O pêndulo elástico, um sistema físico aparentemente simples, emerge como

um verdadeiro “laboratório” [6] para a exploração de conceitos avançados em dinâmica não linear e caos [7]. Composto por uma massa suspensa por uma mola elástica, seu movimento transcende o comportamento idealizado de um pêndulo simples ou de um oscilador harmônico, especialmente quando as amplitudes de oscilação são consideráveis. Nessas condições, o acoplamento entre a oscilação vertical da mola e o movimento pendular horizontal torna-se proeminente, resultando em uma dinâmica rica e complexa que pode exibir desde oscilações periódicas e quase-periódicas até regimes caóticos [8]. A relevância do estudo do pêndulo elástico não se restringe apenas à sua capacidade de ilustrar didaticamente fenômenos não lineares, mas também à sua aplicabilidade como um modelo análogo em diversas áreas da ciência e engenharia. Por exemplo, ele oferece insights valiosos na análise de estruturas flexíveis sujeitas a vibrações [9], no comportamento dinâmico de cabos suspensos em pontes [10], na complexa dinâmica de corpos celestes em sistemas gravitacionais [11], e até mesmo em modelos biológicos que descrevem movimentos de organismos ou interações moleculares [12]. A investigação aprofundada deste sistema permite não só a validação de teorias e modelos matemáticos, mas também o desenvolvimento e aprimoramento de técnicas experimentais e computacionais aplicáveis a uma vasta gama de problemas físicos, servindo como uma ponte entre a teoria e a observação empírica.

Na literatura se observa que durante o fim da década de 80 na década de 90, surge o interesse em se estudar esse sistemas, onde é publicado os artigos [7], que é revisto na Seção 2.2, além dos artigos [6] onde é feito um estudo generalista sobre os indicativos de caos, a partir da aplicação do Teorema KAM, expoente de Lyapunov, entre outras formas. Há o trabalho feito por [13] onde é feito o estudo dos casos integráveis do sistema. No entanto, o sistema passa por uma época em esquecimento, o interesse no estudo desse sistema, volta recentemente, onde volta a haver publicações sobre esse tema, como o que é feito por [8] com o estudo da dinâmica das energias no mesmo, em que a Hamiltoniana é separada em termos da energia de cada sistema (massa-mola e pêndulo simples) e a energia do acoplamento entre os dois sistemas. E mais recentemente o estudo da geometria do espaço de fase de trajetórias em ilhas de estabilidade [14].

Os objetivos deste trabalho são multifacetados e visam aprofundar a compreensão do pêndulo elástico através de uma abordagem experimental e numérica. Primeiramente, busca-se a caracterização detalhada do comportamento do pêndulo elástico, explorando regimes de movimento que incluem desde oscilações periódicas até comportamentos caóticos. Em segundo lugar, o trabalho visa desenvolver e implementar ferramentas computacionais para a análise e simulação do sistema, permitindo a comparação direta entre os resultados experimentais e as previsões teóricas. Por fim, almeja-se validar a aplicabilidade de modelos teóricos baseados na mecânica Hamiltoniana para descrever a dinâmica complexa do pêndulo elástico, contribuindo para a literatura existente e fornecendo uma base sólida para futuras investigações.

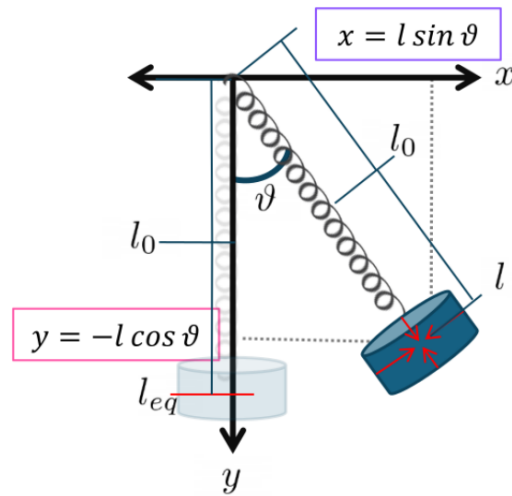


Figura 1 – Esquemática da modelagem do pêndulo elástico, definindo as coordenadas do sistema, mostrando como x e y se relacionam com suas equivalentes polares e o seu ponto de equilíbrio.

Este trabalho está organizado em capítulos que guiam o leitor através da fundamentação teórica, da metodologia experimental e numérica, e da análise dos resultados obtidos. No Capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica abrangente sobre os conceitos fundamentais da mecânica analítica e da dinâmica não linear, com foco nos sistemas periódicos e nos espaços de representação, incluindo o mapeamento de Poincaré. Além disso, são discutidos trabalhos relevantes da literatura que abordam o sistema do pêndulo elástico, como as análises de ordem-caos-ordem e a distribuição de energia em sistemas acoplados. O Capítulo 3 detalha a abordagem teórico-numérica utilizada, apresentando a formulação teórica do sistema em coordenadas polares e cartesianas, a adimensionalização da Hamiltoniana e os métodos de simulação numérica empregados. São também apresentadas as análises da seção de Poincaré e das trajetórias para diferentes parâmetros. O Capítulo 4 descreve a metodologia experimental, incluindo a construção da estação de monitoramento, a aquisição de dados e as técnicas de processamento de imagem para rastreamento do movimento. Finalmente, o Capítulo 5 conclui o trabalho, resumindo as principais descobertas e sugerindo direções para pesquisas futuras.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONCEITOS DE MECÂNICA ANALÍTICA

A Mecânica Analítica oferece duas abordagens complementares para descrever a dinâmica de sistemas físicos: a formulada por Lagrange e a por Hamilton. Ambas utilizam energias e coordenadas generalizadas para tratar de sistemas, especialmente quando há restrições que reduzem os graus de liberdade [15].

Sistemas físicos podem possuir até $6n$ graus de liberdade, sendo 3 graus referentes à translação em cada eixo (x, y, z) e os outros 3 graus referentes a rotações em cada eixo, onde n é o número de corpos. Contudo, simplificações como trabalhar com ponto de massa e não com corpos rígidos reduz os graus de liberdade para $3n$, e as restrições, como a corda fixa em um pêndulo simples, podem reduzir esse número.

É possível, relacionar as coordenadas polares com as coordenadas cartesianas (x, y) ao serem expressas em função de uma única variável generalizada q_1 :

$$\begin{cases} x = l \sin(q), \\ y = -l \cos(q), \end{cases} \quad (2.1)$$

já para o pêndulo elástico, o comprimento l varia, exigindo duas variáveis generalizadas (q_1, q_2) :

$$\begin{cases} x = q_1 \sin(q_2), \\ y = -q_1 \cos(q_2). \end{cases} \quad (2.2)$$

Para sistemas onde as forças aplicadas são conservativas (ou seja, podem ser derivadas de uma função potencial $V(q_i)$), a Função Lagrangiana $\mathcal{L}$ é definida como a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial V :

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.3)$$

A Lagrangiana é uma função das coordenadas generalizadas q_i , das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ e, possivelmente, do tempo t , ou seja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$. Com essa definição, o Princípio de D'Alembert leva diretamente às Equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (2.4)$$

Para cada coordenada generalizada q_i , se encontra uma equação de segunda ordem associada a essa coordenada a partir da Equação de Euler-Lagrange. A resolução dessas equações diferenciais de segunda ordem fornece as equações de movimento do

sistema. A beleza da formulação Lagrangiana reside no fato de que ela permite obter as equações de movimento de forma sistemática, sem a necessidade de lidar diretamente com as forças de restrição, além de ser invariante sob transformações de coordenadas, o que não acontece na mecânica newtoniana [15].

Para transitar da formulação Lagrangiana para a Hamiltoniana, introduzimos o conceito de momento generalizado, ou momento canônico, p_i conjugado à coordenada generalizada q_i . Ele é definido como a derivada parcial da Lagrangiana em relação à velocidade generalizada $\dot{q}_i$:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.5)$$

O momento generalizado p_i usualmente tem unidades de momento linear ou momento angular, dependendo da natureza da coordenada generalizada q_i . Por exemplo, se q_i é uma coordenada linear, p_i é um momento linear; se q_i é um ângulo, p_i é um momento angular.

A Função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ é definida através de uma Transformada Negativa de Legendre da Lagrangiana. Sendo expressa em termos das coordenadas generalizadas q_i , dos momentos generalizados p_i e, dependendo do sistema, do tempo t . A definição da Hamiltoniana é:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (2.6)$$

É fundamental que a Hamiltoniana seja expressa apenas em termos de q_i , p_i e t , e não das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$. Para isso, as velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ devem ser expressas em função de q_i e p_i usando a definição do momento generalizado p_i . Uma vez que a Hamiltoniana é formulada, as equações de movimento do sistema são dadas pelas Equações de Hamilton, ou também chamadas de equações canônicas de Hamilton:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (2.8)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (2.9)$$

Formando um conjunto de $2n + 1$ equações diferenciais de primeira ordem, em contraste com as n equações de segunda ordem da formulação Lagrangiana.

Além de fornecer uma descrição simétrica da dinâmica, a Hamiltoniana tem um significado físico importante. Para sistemas onde a energia potencial não depende explicitamente do tempo e as relações entre coordenadas cartesianas e generalizadas também não dependem explicitamente do tempo (restrições esclerônomas), a Hamiltoniana é igual à energia total do sistema, $\mathcal{H} = E = T + V$. Nesses casos, a Hamiltoniana é uma constante de movimento, o que simplifica ainda mais a análise [15].

2.1.1 Espaços de representação

2.1.2 Espaço de Configuração e Espaço de Evento

Na mecânica clássica, o estado de um sistema é frequentemente descrito pelas posições e velocidades de suas partículas. O espaço de configuração é um conceito fundamental que abstrai a noção de posição. Para um sistema com n partículas livres no espaço tridimensional, seriam necessárias $3n$ coordenadas cartesianas para descrever suas posições. No entanto, quando o sistema está sujeito a restrições (como um pêndulo com comprimento fixo ou uma partícula movendo-se sobre uma superfície), o número de coordenadas independentes necessárias para descrever sua configuração é reduzido. Essas coordenadas independentes são as coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \dots, q_S)$, onde S é o número de graus de liberdade do sistema [15, 16].

O espaço de configuração é o espaço de todas as possíveis configurações instantâneas de um sistema mecânico. Cada ponto neste espaço corresponde a uma configuração do sistema, definida pelos valores das coordenadas generalizadas. É uma variedade matemática onde a dinâmica do sistema pode ser visualizada em termos de sua evolução posicional. A Lagrangiana, por exemplo, é uma função definida sobre o espaço de configuração e suas velocidades generalizadas [15, 16].

Em contraste, o conceito de evento é mais abrangente e intrinsecamente ligado à noção de espaço-tempo. Um evento é um ponto específico no contínuo espaço-tempo, caracterizado por uma localização espacial (três coordenadas) e um instante de tempo (uma coordenada temporal). Em outras palavras, um evento é um acontecimento pontual no universo. Por exemplo, a colisão de duas bolas de bilhar em um determinado local e em um instante preciso é um evento. A formulação da física, especialmente na teoria da relatividade, muitas vezes se baseia na descrição de fenômenos em termos de eventos no espaço-tempo quadridimensional. Enquanto o espaço de configuração descreve o “onde” do sistema em um dado momento, o espaço de evento descreve o “onde e quando” de um acontecimento [15, 16].

2.1.3 Espaço de Fase e Sistemas Periódicos

Enquanto o espaço de configuração descreve as posições de um sistema, a dinâmica completa de um sistema mecânico requer também a consideração de suas velocidades ou, mais fundamentalmente, de seus momentos. É aqui que o espaço de fase se torna essencial. O espaço de fase é um espaço matemático abstrato que representa todos os estados possíveis de um sistema dinâmico. Para um sistema com S graus de liberdade, o espaço de fase é um espaço $2S$ -dimensional, onde cada ponto é definido por um conjunto de coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \dots, q_S)$ e seus respectivos momentos generalizados conjugados $(p_1, p_2, \dots, p_S)$ [15, 16].

Nesse espaço, as trajetórias correspondem às curvas formadas pela variação das posições e dos momentos generalizados ao longo do tempo. Quando a condição $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$ é satisfeita, ou seja, quando a Hamiltoniana do sistema é conservada, as trajetórias no espaço de fase são preservadas. Nesse caso, elas formam curvas fechadas que não podem se cruzar, representando o comportamento conservativo do sistema. Na Figura 2, é apresentada uma representação do espaço de fase para o sistema do pêndulo simples.

No caso unidimensional, o par conjugado (q, p) forma um plano. Assim, um movimento periódico é aquele que se repete: após um período τ , o sistema retorna à mesma posição nesse plano, existem dois casos distintos de periodicidade nesse contexto: a libração e a rotação [15].

Para a libração, tem-se o seguinte caso:

$$\begin{cases} q(t + \tau) = q(t) \\ p(t + \tau) = p(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Formando uma trajetória fechada no espaço de fase, a libração ocorre quando a energia do sistema é menor do que a energia potencial que o confina. Na Figura 2, há a ilustração do caso onde a trajetória apresenta apenas um arco no espaço de configuração, e, na qual se observa a trajetória fechada no espaço de fase, esse comportamento caracteriza a libração do sistema [15].

Já para a rotação, observa-se que $p(t + \tau) = p(t)$, enquanto $q(t + \tau) = q(t) + q_0$. Dessa forma, a trajetória no espaço de fase se torna aberta, ocorrendo quando a energia do sistema é maior que a energia potencial que o confina. Na Figura 2, ilustra-se uma trajetória que forma um círculo com o pivô do pêndulo no centro no espaço de configuração; já para o espaço de fase, observa-se a trajetória aberta resultante [15].

Em sistemas com $S > 1$ graus de liberdade, o espaço de fase não é mais um único plano, mas sim $(2S)$ -dimensional. Nesse contexto, não é necessário que todos os pares (q_i, p_i) tenham periodicidade com a mesma frequência. Assim, a trajetória global no espaço de fase $2S$ -dimensional não é necessariamente uma curva periódica fechada. Se as razões entre as frequências das projeções periódicas em cada plano (q_i, p_i) não forem números racionais, a trajetória no espaço de fase torna-se aberta, preenchendo densamente um toro multidimensional. Nesse caso, o movimento é denominado condicionalmente periódico [15].

2.1.4 Seção de Poincaré para Sistemas com Mais de 2 Dimensões

A seção de Poincaré é uma ferramenta analítica e geométrica indispensável para a compreensão da dinâmica de sistemas complexos, especialmente aqueles que exibem comportamento não-linear e caótico. Ela permite reduzir a dimensionalidade do espaço de fase, transformando a análise de um sistema dinâmico contínuo em um mapa discreto, o que simplifica a visualização e a identificação de padrões.

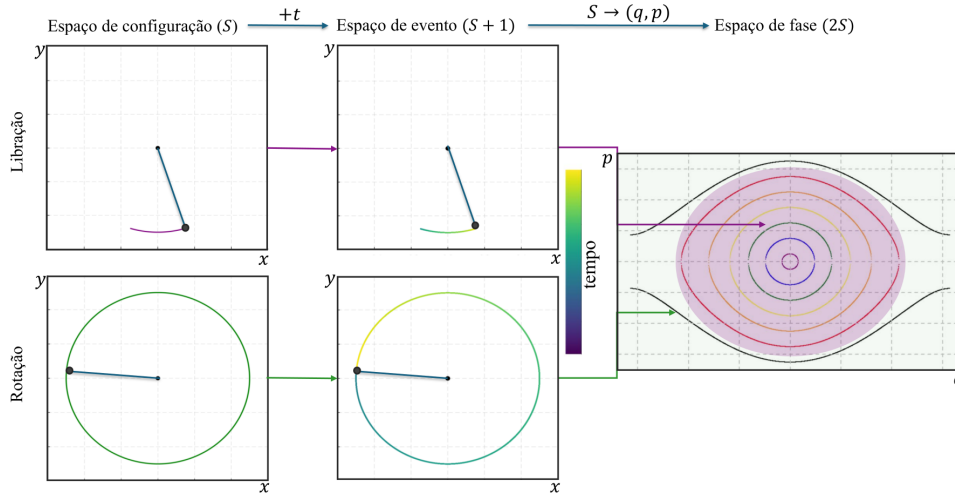


Figura 2 – Espaço de configuração do pêndulo simples, representado pelas duas coordenadas espaciais (x, y) , indicada pela trajetória registrada, com o pêndulo no estado de libração e no estado de rotação. Adicionando o tempo como o eixo por meio da variação da cor da linha graficada, é feito o Espaço de Estado do pêndulo. Passando para o par conjugado, se tem o Espaço de fase do pêndulo simples, exibindo a relação entre q e p , com cada curva tracejada correspondendo a uma diferente energia inicial do sistema, com as curvas fechadas sendo referentes ao estado de libração (Região Roxa/Escura), e as curvas em formato de onda são referentes ao estado de rotação (Região Verde/Clara).

Para a construção da seção, considere um sistema com S graus de liberdade, cujo espaço de fase é descrito pelas coordenadas generalizadas $(q_1, \dots, q_S)$ e pelos momentos generalizados $(p_1, \dots, p_S)$. Para construir uma seção de Poincaré, escolhemos uma condição que define a superfície de seção. Uma escolha comum é fixar uma das coordenadas generalizadas em um valor constante, e observar a trajetória do sistema apenas quando ela cruza essa superfície em uma direção específica [15, 16]. Para um sistema com $S = 2$ graus de liberdade como o pêndulo elástico, o espaço de fase é 4-dimensional (q_1, q_2, p_1, p_2) . Para os sistemas conservativos, é possível “eliminar” uma variável, onde é definido um subespaço 3-dimensional $(q_1, q_2, p_1 | \mathcal{H})$ do espaço de fase que é determinado pela constante $\mathcal{H}$, assim é possível “recuperar” posteriormente essa variável ao isolar o termo na Hamiltoniana. Nesse subespaço uma seção de Poincaré pode ser construída, tomando como caso generalizado, definindo a superfície em $q_1 = 0$ e observando os pontos quando os pontos dessa trajetória cruzam com ela, em alguns casos cabe também determinar o sentido em que os pontos cruzam a superfície, como é apresentado na Figura 3.

A partir do conjunto de pontos registrados no cruzamento com a superfície de seção é formada a seção de Poincaré. O comportamento dos pontos mostra a dinâmica do sistema: Se o sistema é periódico, a seção de Poincaré consistirá em um número finito de pontos discretos. Cada ponto representa um retorno da trajetória à superfície de seção após um período; Se o sistema é quase-periódico, os pontos da seção de Poincaré formarão uma curva fechada, ou uma coleção de curvas fechadas, na superfície de seção, na Figura 3

é representada pelos pontos roxos; Se o sistema é caótico, os pontos da seção de Poincaré geralmente formarão um padrão complexo e fractal, geralmente parecendo pontos dispersos a primeira vista. A distribuição é aparentemente aleatória, mas com estrutura subjacente, na Figura 3 é representada pelos pontos verdes.

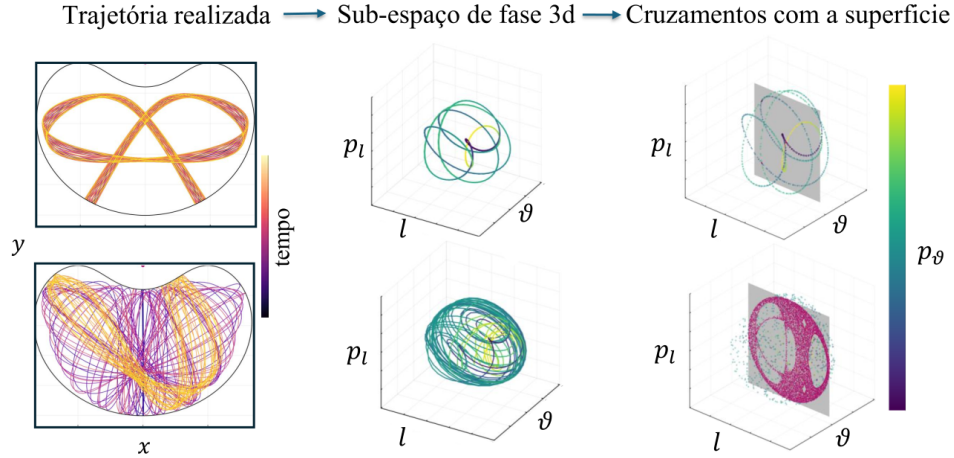


Figura 3 – Construção da seção de Poincaré em $q = 0$, mostrando trajetória quase-periódica e caótica, é feito o subespaço de fase 3-dimensional formado por duas coordenadas e um momento, e por fim a seção de Poincaré construída.

2.2 INTRODUÇÃO AO SISTEMA

O sistema “pêndulo de mola ” ou “pêndulo elástico” é modelado idealmente sendo consistido por uma massa m acoplada a uma mola de massa desprezível, comprimento natural l_0 e constante elástica k , sujeita à gravidade g [7,8,13]. Seus dois graus de liberdade é a direção radial l que é consequência da extensão da mola e a direção angular ϑ que é consequência da oscilação pendular. É construída a função Lagrangeana do sistema, analisando as energias cinéticas T que é encontrada por:

$$\frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}\|^2 \quad (2.11)$$

Com $\dot{\vec{r}}$ sendo o vetor velocidade do ponto de massa do sistema. Onde calculando $\|\dot{\vec{r}}\|^2$ a partir das coordenadas definidas em (2.2) se encontra que:

$$\|\dot{\vec{r}}\|^2 = \dot{l}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 \quad (2.12)$$

Já para a energia potencial V é encontrada a partir das forças que atuam no sistema, a força gravitacional e a força elástica, ao fazer:

$$V = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.13)$$

obtem-se então:

$$V = -mgl \cos \vartheta + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad (2.14)$$

Portanto a função de Lagrange do sistema fica:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}\|^2 - mgl \cos \vartheta - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad (2.15)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (Equação (2.4)), se encontra as equações de movimento sendo:

$$\ddot{l} = l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi - \frac{k}{m}(l - l_0) \quad (2.16)$$

$$\ddot{\varphi} = -2\frac{\dot{l}\dot{\varphi}}{l} - \frac{g}{l}\sin \varphi \quad (2.17)$$

No artigo [7] é apresentado a caracterização da transição ordem-caos-ordem realizada pelo pêndulo e os seus modos de oscilação. Onde é definido o parâmetro adimensional μ , que posteriormente em outro trabalho é denominado f [8], a notação que será mantida neste trabalho é ω^2 , sendo a razão entre os quadrados das frequências do sistema massa-mola e do sistema pêndulo simples.

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega_m^2} \quad (2.18)$$

com $\omega_p = 2\pi\sqrt{l_{eq}/g}$, $\omega_m = 2\pi\sqrt{k/m}$ e l_{eq} é o comprimento de equilíbrio do pêndulo, comprimento esse onde as forças se anulam, portanto, é possível encontrar essa posição ao resolver:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial l}\hat{\mathbf{e}}_l + \frac{1}{l}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\hat{\mathbf{e}}_\vartheta = 0 \quad (2.19)$$

derivando o potencial, obtém-se:

$$[-mg \cos \vartheta + k(l - l_0)]\hat{\mathbf{e}}_l + [mg \sin \vartheta]\hat{\mathbf{e}}_\vartheta = 0 \quad (2.20)$$

como m , g , k , l e l_0 são valores não nulos, para a Equação (2.20) ser satisfeita, ϑ deve ser igual a 0, ou a π . Por conta do sistema de coordenadas definido em Equação (2.2), $\vartheta = 0$ o outro caso indica o ponto de equilíbrio sendo do lado oposto onde ocorre o movimento, com isso $\cos \vartheta = 1$ e $\sin \vartheta = 0$. Assim, isolando l da Equação (2.20) obtêm-se:

$$l = l_{eq} = l_0 + mg/k \quad (2.21)$$

Outro parâmetro definido é referente a energia adimensional. A dinâmica do sistema depende desses dois parâmetros, onde caso ω^2 é muito próximo de zero ou tendendo ao infinito, se tem um comportamento de ordem ao analisar o sistema, o mesmo acontece para a energia. No entanto, em valores intermediários, há a presença de caos, em decorrência ao forte acoplamento entre os sistemas, onde não há uma dominância de frequência de nenhum dos dois sistemas [8].

A caracterização dos “modos” de trajetórias é definida pelos modos **A** (“colina”) e **B** (“vale”) que são trajetórias regulares. Em altas energias há a presença de órbitas quase circulares (**C/C***), na Figura 4 é apresentado às trajetórias.

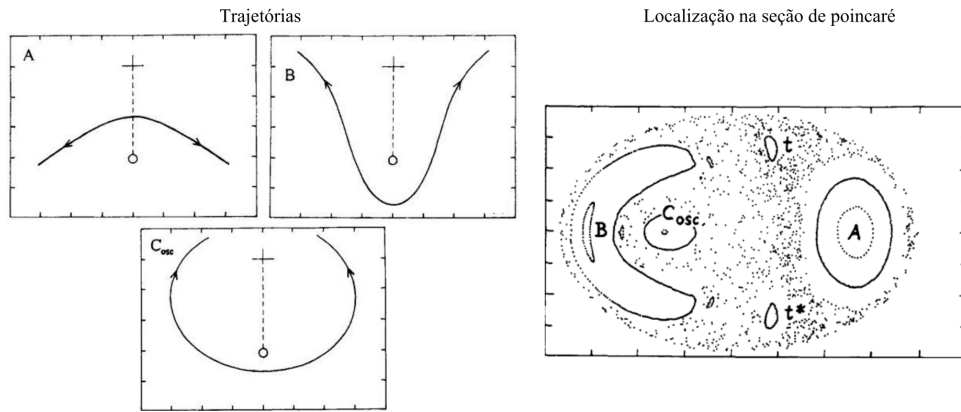


Figura 4 – Modos **A** “colina”, **B** “vale” e C_{osc} , mostrando as trajetórias de cada modo e suas estruturas na seção de Poincaré. Adaptado de [7]

Essas órbitas atuam como um esqueleto dinâmico, havendo também trajetórias “satélites” que são órbitas periódicas ou quase-periódicas (por exemplo, ilhas regulares em torno de **A**), surgem órbitas caóticas, e recombinações de órbitas instáveis, conforme apresentado em 5.

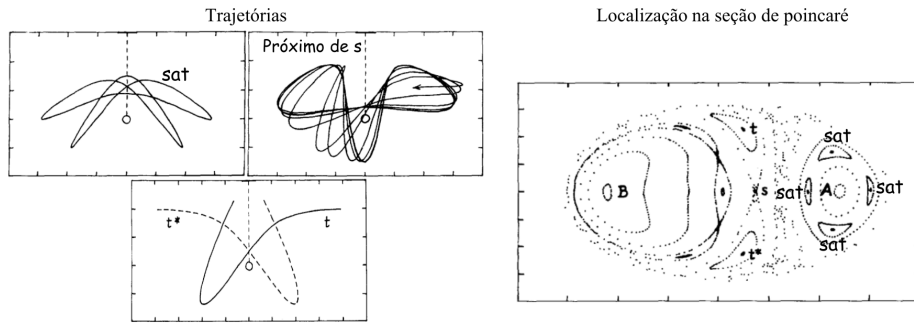


Figura 5 – É apresentadas trajetórias satélites (**sat**) ao modo **A** e ao modo **B** que é uma orbita cáotica proxima do ponto **s**, mostrando as trajetórias de cada modo e suas estruturas na seção de Poincaré. Adaptado de [7]

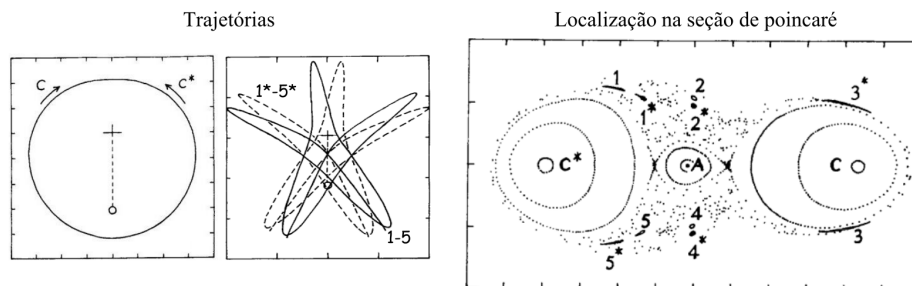


Figura 6 – É apresentadas trajetória de rotação em torno do pivo (C/C^*) e trajetória em formato de estrela do mar $1 - 5$ ou $1^* - 5^*$, mostrando as trajetórias de cada modo e suas estruturas na seção de Poincaré. Adaptado de [7]

Como discutido na introdução, o interesse em estudar esse sistema foi retomado recentemente com os trabalhos [8, 14], além do sistema do pêndulo elástico, se encontra um

interesse em procurar experimentalmente os fenômenos do caos, como é feito recentemente pro sistema de bilhar [17, 18].

3 ABORDAGEM TEÓRICO-NUMÉRICA

3.1 FORMULAÇÃO TEÓRICA DO SISTEMA

3.1.1 Coordenadas polares

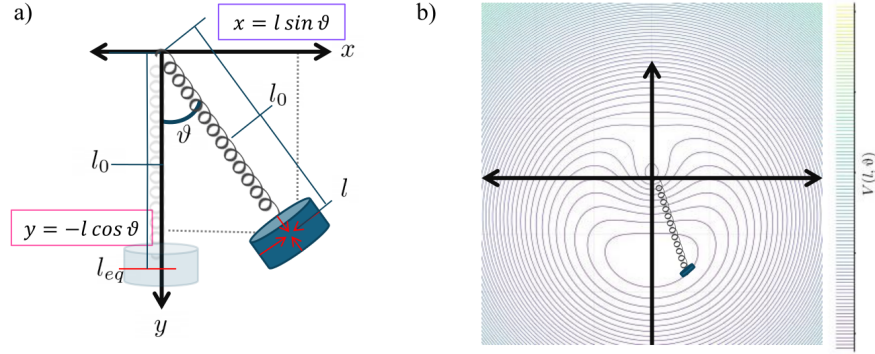


Figura 7 – Esquemática da modelagem do pêndulo elástico. a) São apresentadas as coordenadas do sistema, mostrando como x e y se relacionam com suas equivalentes polares. b) É exibida as linhas equipotenciais que confina o sistema dependendo de sua energia

Para a modelagem do pêndulo elástico é montada a função Lagrangeana do sistema, conforme apresentado na Seção 2.2 Equação (2.15) a transição para a Hamiltoniana é feita por $\mathcal{H} = p_l \dot{l} + p_\vartheta \dot{\vartheta} - \mathcal{L}$, onde os momentos generalizados são encontrados aplicando a Equação (2.5) na função Lagrangiana:

$$p_l = m\dot{l}, \quad p_\vartheta = ml^2\dot{\vartheta}. \quad (3.1)$$

Reescrevendo a Hamiltoniana, temos:

$$\mathcal{H} = \frac{p_l^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2ml^2} - mgl \cos(\vartheta) + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2. \quad (3.2)$$

As equações de movimento são encontradas aplicando as Equações (2.7):

$$\dot{l} = \frac{p_l}{m}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{ml^2}, \quad (3.3)$$

$$\dot{p}_l = -\frac{p_\vartheta^2}{ml^3} + mg \cos(\vartheta) - k(l - l_0), \quad \dot{p}_\vartheta = -mgl \sin(\vartheta). \quad (3.4)$$

Essas equações descrevem a dinâmica do pêndulo elástico em coordenadas polares.

Como a Hamiltoniana $\mathcal{H}(l, p_l, \vartheta, p_\vartheta)$ é conservada no tempo, é possível eliminar uma das variáveis e determiná-la em função das demais, assim temos:

$$p_\vartheta = p_\vartheta(l, p_l, \vartheta \mid \mathcal{H}), \quad (3.5)$$

onde p_ϑ é

$$p_\vartheta(l, p_l, \vartheta \mid \mathcal{H}) = \sqrt{2ml^2 \left(\mathcal{H} - \frac{p_l^2}{2m} + mgl \cos \vartheta - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \right)} \quad (3.6)$$

Podemos encontrar os valores máximos e mínimos para a elongação da mola que o sistema pode ter, esses pontos podem ser encontrados fazendo $p_l = p_\vartheta = 0$, e subtraindo $\mathcal{H}$ em ambos os lados, têm-se:

$$\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - mgl - \mathcal{H} = 0. \quad (3.7)$$

Multiplicando por 2 e expandindo $(l - l_0)^2 = l^2 - 2l_0l + l_0^2$, temos

$$kl^2 - (2kl_0 + 2mg)l + (kl_0^2 - 2\mathcal{H}) = 0. \quad (3.8)$$

A solução desta equação quadrática é dada por

$$l^* = \frac{2kl_0 + 2mg \pm \sqrt{(2kl_0 + 2mg)^2 - 4k(kl_0^2 - 2\mathcal{H})}}{2k}. \quad (3.9)$$

Em particular, se assumirmos para fins ilustrativos que o nível de energia de referência é $\mathcal{H} = 0$, o discriminante torna-se

$$\Delta = (2kl_0 + 2mg)^2 - 4k^2l_0^2 = 4mg(2kl_0 + mg). \quad (3.10)$$

Assim, as soluções para l são

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{mg}{k} \left(2l_0 + \frac{mg}{k} \right)}. \quad (3.11)$$

De maneira mais geral, considerando um nível de energia arbitrário $\mathcal{H}$, o discriminante incorpora um termo adicional, e as soluções para l passam a ser

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{mg}{k} \left(2l_0 + \frac{mg}{k} \right) + \frac{2\mathcal{H}}{k}}. \quad (3.12)$$

como definido pela Equação (2.21), é possível reescrever os comprimentos extremos atingidos pelo sistema como

$$\begin{cases} l_{\min} = l_{\text{eq}} - \sqrt{\frac{mg}{k} \left(2l_0 + \frac{mg}{k} \right) + \frac{2\mathcal{H}}{k}} \\ l_{\max} = l_{\text{eq}} + \sqrt{\frac{mg}{k} \left(2l_0 + \frac{mg}{k} \right) + \frac{2\mathcal{H}}{k}} \end{cases} \quad (3.13)$$

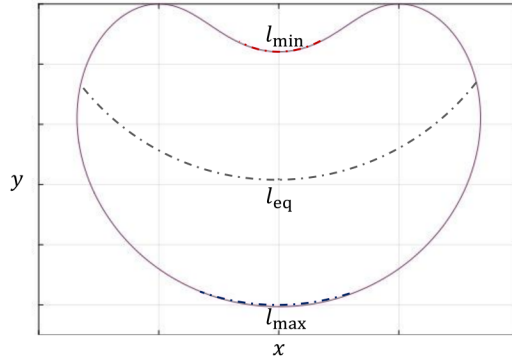


Figura 8 – É apresentada a curva equipotencial que confina as trajetória, uma parte da curva ilustrando onde são os comprimentos mínimos e máximos, e uma circunferencia de raio igual a l_{eq} .

3.1.2 Coordenadas Cartesianas

Podemos fazer o análogo em coordenadas cartesianas, novamente considerando uma massa m conectada a uma mola de comprimento natural l_0 e constante elástica k , sob ação gravitacional g . O vetor posição é $\vec{r} = (x, y)$ com origem no ponto de fixação, onde o eixo y aponta para cima.

As energias do sistema são escritas como

$$T = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (3.14)$$

semelhante a Equação (2.11), para a energia cinética, e

$$U = mgy + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0\right)^2 \quad (3.15)$$

para a energia potencial do sistema, semelhante a Equação (2.14), assim, podemos escrever a lagrangiana do sistema como:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0\right)^2 \quad (3.16)$$

os momentos generalizados são encontrados ao aplicar a Equação (2.5) em (3.16)

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad (3.17)$$

Assim, podemos agora aplicar a transformada de Legendre para encontrar a função Hamiltoniana, essa função pode ser verificada em [8].

$$\mathcal{H} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L} \quad (3.18)$$

$$= p_x\left(\frac{p_x}{m}\right) + p_y\left(\frac{p_y}{m}\right) - \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} - mgy - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2\right] \quad (3.19)$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0\right)^2 \quad (3.20)$$

É encontrado então as equações canônicas para a descrição do movimento do sistema por meio .

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad (3.21)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \quad (3.22)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -k(l - l_0)\frac{x}{l} \quad (3.23)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -mg - k(l - l_0)\frac{y}{l} \quad (3.24)$$

como que o sistema em polares é $(x, y) = (l \sin(\vartheta), -l \cos(\vartheta))$ e sabemos que as condições de equilíbrio são em $l = l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ e $\vartheta = 0$, então agora em cartesianas, o equilíbrio agora é em $(x_{eq}, y_{eq}) = (0, -(l_0 + \frac{mg}{k}))$, além disso $y_{min} = -l_{min}$ e $y_{max} = -l_{max}$

Outra forma de escrever os momentos p_x e p_y para o caso do pêndulo elástico é relacioná-lo com a derivada das coordenadas definidas em (2.2), onde se obtém:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{l} \sin \vartheta + l \dot{\vartheta} \cos \vartheta, \\ \dot{y} = -\dot{l} \cos \vartheta + l \dot{\vartheta} \sin \vartheta. \end{cases} \quad (3.25)$$

assim, multiplicando m em ambos os lados e isolando $\dot{l}$ e $l \dot{\vartheta}$ das Equações (3.1) , é possível escrever Equação (3.25) como:

$$\begin{cases} p_x = p_l \sin \vartheta + \frac{p_\vartheta}{l} \cos \vartheta, \\ p_y = p_l \cos \vartheta + \frac{p_\vartheta}{l} \sin \vartheta. \end{cases} \quad (3.26)$$

3.2 UNIDADES REDUZIDAS E A HAMILTONIANA ADIMENSIONAL

Em nosso sistema, temos constantes como m, g, k, l_0 , cujas dimensões podem não ser consistentes, o que pode causar dificuldades computacionais. Dessa forma, buscamos escrevê-las em sua forma de unidades reduzidas, de forma semelhante ao que é realizado em simulações de dinâmica molecular [19]. Para isso, buscaremos expressar as dimensões das constantes em termos de m .

Tabela 1 – Parâmetros e suas unidades de medida e unidades reduzidas.

Parâmetro	Unidade de Medida	Unidade Reduzida
m	Kg	$[m]$
k	Kg/s ²	$\left[\frac{g \cdot m}{l_0} \right]$
g	m/s ²	$\left[\frac{l_0 \cdot k}{m} \right]$
l_0	m	$\left[\frac{g}{k \cdot m} \right]$
$\mathcal{H}$	J	$[g \cdot l_0 \cdot m]$

A transição de unidades de medida convencionais para unidades reduzidas, como apresentado na Tabela 1, é um passo fundamental para a adimensionalização de um sistema físico. As unidades reduzidas são construídas a partir de uma escolha arbitrária de uma ou mais grandezas de referência (neste caso, a massa m), permitindo que as demais grandezas sejam expressas em termos dessa referência. As unidades reduzidas se mostram importantes para realizar a comparação com o experimento, onde ao definir as unidades com base nos valores da massa e mola escolhida para o experimento.

Essa escolha de unidades reduzidas facilita a identificação e a formulação de parâmetros adimensionais, que são razões de grandezas físicas que resultam em um número puro, sem unidades. Esses parâmetros são cruciais porque governam o comportamento do sistema independentemente da escala. Assim procuramos reescrever a Equação Hamiltoniana (Equação (3.2)) em forma adimensional, análogo ao apresentado em [8, 13]. Para tal, introduz-se o parâmetro adimensional ω^2 , definido como a razão:

$$\omega^2 = \frac{mg}{kl_0} \quad (3.27)$$

que quantifica o balanço entre a força gravitacional e a força elástica de referência, é considerado um “pêndulo” com o comprimento equivalente ao comprimento natural da mola l_0 , por uma questão de simplicidade, as consequências dessa escolha que difere da escolha realizada em que considera o pêndulo de comprimento l_{eq} [8, 13] não se apresentam neste trabalho, já que ambos l_{eq} e l_0 são constantes no sistema. Define-se a variável adimensional para o comprimento instantâneo da mola:

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (3.28)$$

Para o tempo, adota-se a escala característica associada à oscilação radial da mola. Partindo da frequência angular natural do sistema massa-mola,

$$\tilde{t} = t \cdot \omega_m = t \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.29)$$

Esta transformação elimina as dependências dimensionais do sistema, reduzindo os parâmetros físicos originais (m, k, g, l_0) à relação adimensional ω^2 .

O momento generalizado p_λ é obtido mediante a transformação canônica:

$$p_\lambda = p_l \frac{\partial l}{\partial \lambda} = p_l \cdot l_0 \quad (3.30)$$

Substituindo Equação (3.28) e Equação (3.30) na Hamiltoniana original (Equa-

ção (3.2)), obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{p_\lambda^2}{2ml_0^2} + \frac{p_\vartheta^2}{2m\lambda^2 l_0^2} + mgl_0\lambda \cos \vartheta + \frac{kl_0^2}{2}(\lambda - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2ml_0^2} \left(p_\lambda^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\lambda^2} \right) + \omega^2 l_0^2 k \lambda \cos \vartheta + \frac{kl_0^2}{2}(\lambda - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2ml_0^2} \left(p_\lambda^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\lambda^2} \right) + kl_0^2 \left(\omega^2 \lambda \cos \vartheta + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \right)\end{aligned}$$

Definindo a Hamiltoniana reduzida $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}/(kl_0^2)$:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2mkl_0^4} \left(p_\lambda^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\lambda^2} \right) + \omega^2 \lambda \cos \vartheta + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \quad (3.31)$$

Introduzem-se os momentos adimensionais:

$$\tilde{p}_\lambda = \frac{p_\lambda}{\sqrt{mk} l_0^2}, \quad \tilde{p}_\vartheta = \frac{p_\vartheta}{\sqrt{mk} l_0^2} \quad (3.32)$$

resultando na expressão final adimensionalizada:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(\tilde{p}_\lambda^2 + \frac{\tilde{p}_\vartheta^2}{\lambda^2} \right) + \omega^2 \lambda \cos \vartheta + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \quad (3.33)$$

O processo para a Hamiltoniana em cartesianas adimensional é análogo, resultando em:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\tilde{p}_x^2}{2} + \frac{\tilde{p}_y^2}{2} - \omega^2 \tilde{y} + (\tilde{l} - 1)^2 \quad (3.34)$$

Embora esta abordagem seja semelhante à utilizada por [8], a expressão final diverge devido à diferença no sistema de referência: enquanto no trabalho citado analisa-se a deformação da mola em relação ao comprimento natural l_0 , neste estudo considera-se o comprimento total do pêndulo (do pivô ao centro de massa).

A partir da Equação (3.33), o momento angular adimensionalizado é explicitado como:

$$\tilde{p}_\vartheta = \sqrt{\lambda^2 \left[2 \left(\tilde{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\tilde{p}_\lambda^2 - \omega^2 \lambda \cos \vartheta - \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \right) \right]} \quad (3.35)$$

As extensões radial mínima e máxima são dadas por:

$$\begin{cases} \lambda_{\min} = 1 + \omega^2 - \sqrt{(\omega^2 + 1)^2 + 2(\tilde{\mathcal{H}} - \omega^2)} \\ \lambda_{\max} = 1 + \omega^2 + \sqrt{(\omega^2 + 1)^2 + 2(\tilde{\mathcal{H}} - \omega^2)} \end{cases} \quad (3.36)$$

3.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

3.3.1 Implementação Computacional

A implementação das soluções numéricas se dá por meio da Linguagem Julia, onde por meio da biblioteca “*DifferentialEquations.jl*” [20] é possível utilizar diferentes

métodos numéricos para a solução das equações. Assim, é definido as Equações (3.3), (3.4) e (3.32), o parametro definido pela Equação (3.27), e o intervalo de integração do sistema no código. É utilizado o método Dormand-Prince de Oitava Ordem [21] neste trabalho por ter uma ótima convergência perante outros métodos, havendo um erro de conservação de energia na ordem de 10^{-16} sendo muito proximo do zero da maquina. Mas detalhes sobre os métodos numéricos é apresentado no Apêndice A.

É definido as unidades reduzidas como $m = g = l_0 = 1.0$, portanto o parâmetro de controle pode ser escrito como:

$$\omega^2 = 1/k \quad (3.37)$$

sendo assim ao variar o valor do parâmetro seria equivalente a realizar simulações com diferentes molas, mas a massa utilizada se mantem a mesma.

É apresentado então as seções de Poincaré para os sistemas definidos por $\mathcal{H} = 0, 0$; $\vartheta_0 = p_{l,0} = 0, 0$; o comprimento inicial varia em $l_{\text{init}} \in [l_{\text{min}}, l_{\text{max}}]$, o momento angular inicial é calculado pela Equação (3.6), o tempo final sendo 10000 s, passo de integração $dt = 10^{-6}$.

Anteriormente, na Seção 2.1.4, discutiu-se o aspecto teórico das seções de Poincaré. Agora, aborda-se sua construção do ponto de vista computacional. Ao utilizar métodos numéricos para a resolução das equações canônicas de movimento, obtêm-se quatro *arrays* com os valores de l , ϑ , p_l e p_ϑ para cada passo de integração, resultando na discretização de uma trajetória contínua.

Para realizar o corte considerando a superfície $\vartheta = 0$, analisa-se o *array* referente aos valores de ϑ , verificando-se as trocas de sinal entre valores consecutivos. Dessa forma, identificam-se os intervalos onde ocorre o cruzamento com a superfície.

Entretanto, essa abordagem não garante a obtenção dos valores exatos de l , p_l e p_ϑ no momento exato do cruzamento. Para contornar essa limitação, torna-se necessária a utilização de interpolação por spline. Construindo-se uma função $S(t)$ que interpola suavemente os pontos discretos do *array* referente a ϑ no intervalo detectado pelo algoritmo, obtém-se uma representação contínua e diferenciável da evolução temporal do ângulo.

Esta função interpoladora permite utilizar métodos numéricos, como o algoritmo de Brent, para localizar com certa precisão os instantes t^* onde $S(t^*) = 0$, tipicamente atingindo a tolerância numérica da máquina. Uma vez determinados os instantes t^* , constroem-se outros *arrays* com os valores de l , p_l e p_ϑ nesses instantes específicos, que por sua vez permitem construir as seções de Poincaré.

3.3.2 Análises da seção de Poincaré

A seção de Poincaré geralmente é apresentada apenas o corte do espaço de fase (l, p_l) . Por se tratar de um hipervolume, a análise completa do espaço de fase requer os

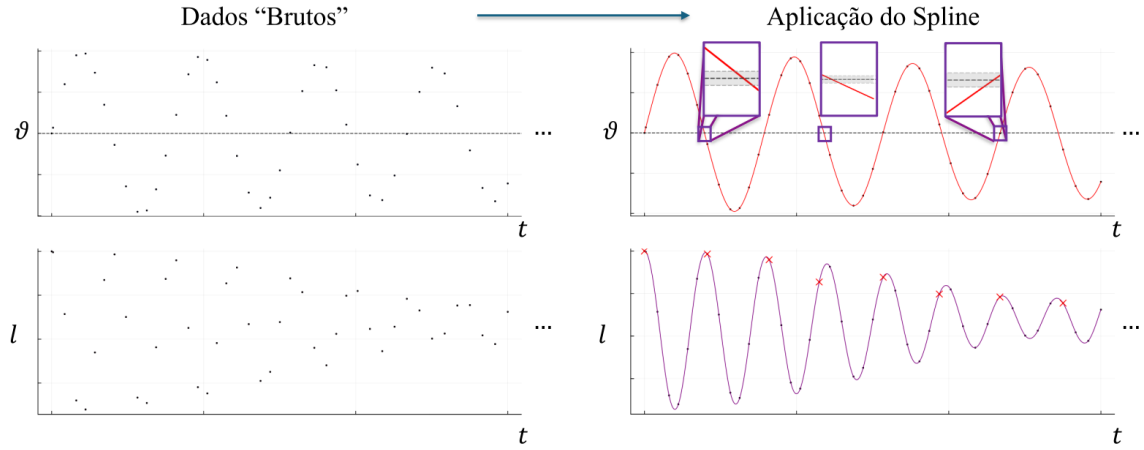


Figura 9 – À esquerda, apresentam-se as séries temporais para l e ϑ resultantes da integração numérica; à direita, mostram-se as séries temporais com o *spline* aplicado, incluindo *zooms* nas regiões onde ϑ cruza o valor $\vartheta = 0$. Na série referente a l , marcam-se os valores nos instantes de cruzamento.

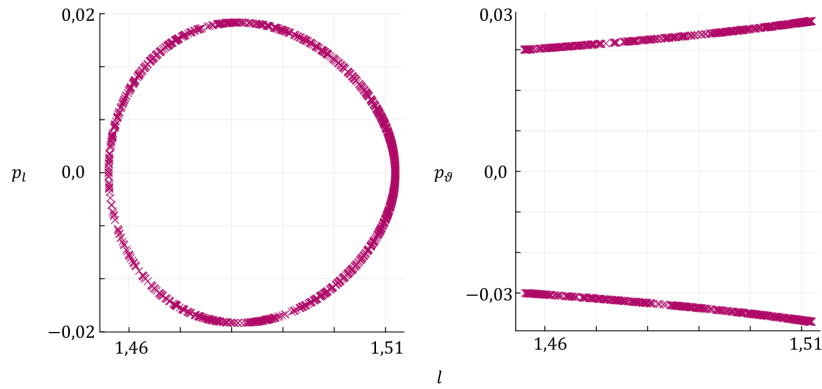


Figura 10 – Apresenta-se a seção de Poincaré construída com os valores obtidos pelos cruzamentos, conforme ilustrado na Figura 9.

quatro cortes: (l, p_l) , (l, p_θ) , (ϑ, p_l) e (ϑ, p_θ) . É definido um sistema por meio do parâmetro de controle arbitrário e posição inicial l_{init} variando no intervalo $[l_{\text{min}}, l_{\text{max}}]$, enquanto o momento generalizado $p_{\vartheta 0}$ foi calculado a partir da Equação (3.6). A análise dessas projeções em coordenadas cartesianas também é relevante. Pelas Equações (2.2) e as suas derivadas (Equação (3.26)), é possível concluir que a superfície $\vartheta = 0$ equivale a $x = 0$ (pois $x = l \sin \vartheta$), espera-se que as projeções em x também formem uma linha. Para y (onde $y = -l \cos \vartheta$), as projeções em y são espelhadas em relação às de l . Além disso, na projeção (y, p_x) não se observa o formato de “gota” presente em (l, p_θ) , uma vez que $p_x = \frac{p_\vartheta}{l}$. Assim, na Figura 11 é apresentado cortes com os pontos que cruzam a superfície $\vartheta = 0$.

Em coordenadas cartesianas, a ausência do termo l evita o afunilamento característico da seção de Poincaré em coordenadas polares, como pode ser visto na Figura 11. Das Equações (3.28), (3.30) e (3.32), como as relações entre as coordenadas e momentos generalizados dimensionais para os mesmos na forma adimensional são

resumidas a multiplicações com constantes, e, por já se trabalhar com as unidades reduzidas, os resultados da dinâmica resultante da Hamiltoniana adimensional serve como uma normalização dos resultados, assim, é apresentado os resultados a partir dessa conversão da Hamiltoniana dimensional para a adimensional.

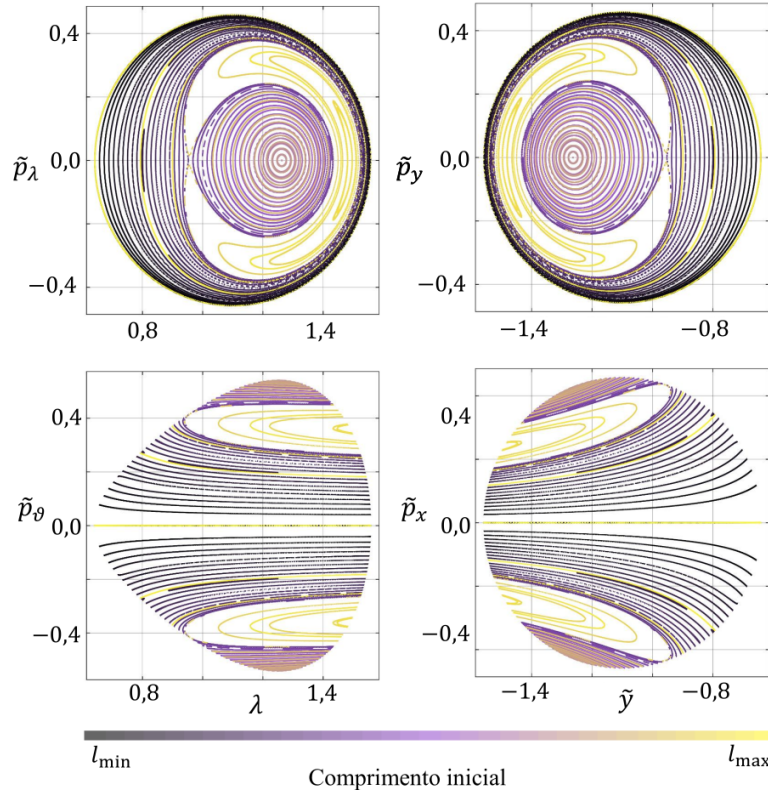


Figura 11 – É apresentado a seção de Poincaré para $\omega^2 = 0.1$ como exemplo, para ilustrar as mudanças que ocorrem nas seções de Poincaré ao mudar de coordenadas entre polares e cartesianas.

Uma pergunta que pode ser feita é “qual é a melhor escolha para definir a seção de Poincaré pro sistema?”, o que é um tema interessante e é previsto de ser abordado melhor em outro trabalho.

3.3.3 Seções para Diferentes Parâmetros Adimensionais

Os valores de ω^2 são 0,153; 0,425; 0,645; 1,0 e 9,48, com os valores 0.425 e 0.645 sendo aproximados com o parâmetro adimensional dos sistemas experimentais.

É observado na Figura 12 que as trajetórias realizada pelos sistemas definidos pelo parâmetro adimensional entre zero e um, apresentam trajetórias caóticas e trajetórias quase-periodicas ou periodicas, onde próximos do comprimento mínimo e máximo há comportamento caótico, assim entrando em uma região de ordem onde o termo gravitacional é mais forte, transiciona novamente para uma região de caos e posteriormente entrando em uma região com o termo elástico mais dominante. Isso acontece já que, ao variar λ_{init} no intervalo $[\lambda_{\text{min}}, \lambda_{\text{max}}]$, vai ocorrer uma transição caos-ordem-caos causado pelo valor de $\tilde{p}_{\theta,0}$

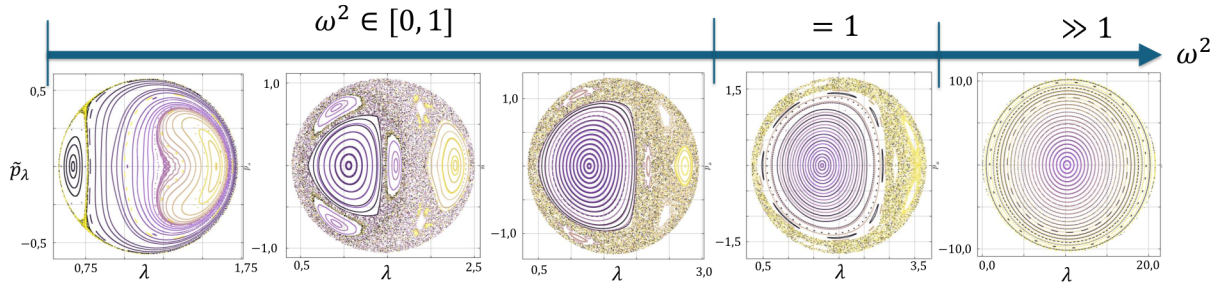


Figura 12 – É apresentado a evolução da seção de Poincaré conforme o parametro de controle varia nas condições $\omega^2 \in [0, 1]$, posteriormente na condição $\omega^2 = 1$ e por fim $\omega^2 \gg 1$, onde é observado uma trasição de uma seção de Poincaré em relativa ordem com o modo “vale” dominando, e conforme ω^2 aumenta, o modo de oscilação “colina” passa a dominar as ilhas de estabilidade. Para valores intermediários de ω^2 o acoplamento forte entre os sistemas faz com que surja o mar caótico nas seções que eventualmente desaparece novamente em $\omega^2 \gg 1$.

calculado onde, por conta da conservação de energia, $\mathcal{H} = 0 \therefore T = V$, e como foi definido $\tilde{p}_{\lambda,0} = 0$ então $\tilde{p}_{\vartheta,0} = \sqrt{2\lambda^2(V)}$, onde próximo a linha definida pela posição de equilíbrio do sistema, o momento conjugado de theta atinge o valor máximo, assim há uma energia cinética angular maior que domina o sistema. Conforme o valor de $\tilde{p}_{\vartheta,0}$ diminui, o modo de oscilação radial começa a dominar o sistema surgindo um forte acoplamento entre as duas oscilações que gera as trajetórias caóticas, com isso acontecendo para λ_{init} proximo de λ_{min} ou de λ_{max} .

Outra forma de observar como o sistema se modifica conforme varia o parâmetro ω^2 , onde para valores mais baixos, o sistema massa mola domina, havendo uma predominância do modo de oscilação “vale” sobre o modo “colina”, e partir do seu aumento, a frequência do sistema pêndulo simples começa a ser mais significativo, e assim também trazendo uma maior presença do modo “colina” e “satélites” em relação ao “vale”, além de haver mais trajetórias caóticas, quando $\omega^2 \gg 1$ as oscilações angulares é dominante, reduzindo significativamente o caos no sistema, com as trajetórias se tornando puramente quase-periódicas e periódicas, com as trajetórias periódicas consistindo nos movimentos dos sistemas massa-mola e pêndulo simples desacoplados, e os quase-periódicos no movimento acoplado dos dois sistemas. No Apêndice B é apresentado com mais detalhes as seções de Poncaré para cada parâmetro e as trajetórias realizadas.

4 ABORDAGEM EXPERIMENTAL

Na etapa experimental do trabalho, os esforços acabaram se concentrando na montagem experimental, seja na construção do aparato experimental ou no programa de rastreio, assim o tempo para a coleta de dados se tornou menor do que era esperado no início. Apesar disso, foi possível identificar dificuldades e convergências entre o experimento e a teoria para o sistema. Assim, é esperado que em trabalhos futuros seja possível ter mais tempo para a realização experimental.

4.1 VISÃO COMPUTACIONAL

Na área de visão computacional, o rastreamento de objetos é uma tarefa comum que consiste em determinar as posições de um ou mais objetos em uma imagem ou, no caso de um vídeo, é determinado para uma sequência de imagens formadas pelos *frames*. Essa tarefa pode ser realizada tanto com dados pré-gravados quanto com imagens em tempo real [22].

No processamento digital de imagens, as informações são armazenadas como três matrizes que representam os valores das cores vermelho, verde e azul (RGB) de cada pixel, ou outros espaços de cor como o Hue Value Saturation (HSV). Para localizar o objeto desejado, o rastreamento consiste basicamente em identificar as submatrizes cujos valores sejam os mais próximos das matrizes que representam o objeto-alvo [22].

Devido à relevância dessa técnica na área da tecnologia, diversos pacotes de software foram desenvolvidos para oferecer ferramentas de uso relativamente simples, permitindo sua aplicação em diferentes contextos de forma acessível e eficiente. Para este trabalho, se demonstrou mais eficiente o uso do método CSRT.

O CSRT (Channel and Spatial Reliability Tracker) é uma abordagem computacional para rastreamento visual que integra técnicas de processamento de imagens com otimização matemática, sendo particularmente eficaz em ambientes dinâmicos. Fundamenta-se em dois componentes complementares: confiabilidade espacial e confiabilidade de canais, que asseguram precisão durante variações de aparência do objeto, oclusões parciais e interferências de fundo complexo [23].

A confiabilidade espacial soluciona o problema essencial de discriminar o objeto-alvo de elementos distratores no plano de fundo, especialmente durante oclusões parciais ou quando o objeto possui forma irregular. Para tanto, o rastreador utiliza um mapa binário dinâmico $\mathbf{m}$ que funciona como máscara espacial adaptativa, gerada quadro a quadro mediante um modelo MRF (Markov Random Field). Este modelo estabelece relações espaciais entre pixels e incorpora restrições de suavidade, integrando múltiplas fontes de

informação: histogramas de cores HSV atualizados dinamicamente para distinguir objeto e fundo, e um kernel Epanechnikov modificado que prioriza regiões centrais, baseado na observação empírica de que o núcleo de objetos em movimento mantém maior estabilidade frente a deformações. Durante a otimização do filtro de correlação discriminativo $\mathbf{h}$, este mapa impõe a restrição $\mathbf{h} \equiv \mathbf{m} \odot \mathbf{h}$, onde $\odot$ é o produto elemento a elemento entre as matrizes, confinando o filtro exclusivamente às regiões identificadas como confiáveis. Esta restrição é resolvida eficientemente pelo método ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers), que decompõe o problema em subetapas iterativas processadas no domínio da frequência via o método FFT (Fast Fourier Transform) [23].

Paralelamente, a confiabilidade de canais aborda a heterogeneidade descritiva em características multiespectrais. O rastreador emprega dois descritores complementares: Histograms of Oriented Gradients (HoG), que capturam informações estruturais mediante distribuições de gradientes locais, e ColorNames, que mapeiam cores para categorias linguísticas (como "vermelho" ou "azul"), proporcionando invariância a variações sutis de tonalidade. Para cada canal, calcula-se uma ponderação adaptativa $\tilde{w}_d$ combinando: a confiabilidade de aprendizado $\tilde{w}_d^{(\text{lrn})} = \max(\mathbf{f}_d \star \mathbf{h}_d)$, com $\star$ indicando a correlação circular entre $\mathbf{f}_d$ e $\mathbf{h}_d$ indicando a adequação do filtro aos dados de treinamento; e a confiabilidade de detecção $\tilde{w}_d^{(\text{det})} = \max(1 - \rho_d^{\max 2} / \rho_d^{\max 1}, 0.5)$, quantificando ambiguidades espaciais pela razão entre picos de resposta. A ponderação final $\tilde{w}_d$ determina a influência relativa de cada canal durante a localização [23].

A posição do objeto é determinada por $\tilde{\mathbf{g}} = \sum_{d=1}^{N_c} (\mathbf{f}_d \star \mathbf{h}_d) \cdot \tilde{w}_d$, expressão que sintetiza as contribuições de todos os canais, privilegiando descritores altamente discriminativos e atenuando a influência de canais degradados [23].

4.2 PROGRAMA PARA O RASTREAMENTO

Foi desenvolvido um programa computacional utilizando a biblioteca OpenCV do Python, junto de outras bibliotecas para cálculos necessários, que emprega o rastreador CSRT para monitorar o pêndulo a partir de gravações de vídeo. O código para a análise de vídeo é aplicado através de uma classe abrangente que encapsula todo o fluxo de processamento, desde a calibração espacial até a extração de dados dinâmicos. Inicialmente, o vídeo é aberto e a taxa de quadros é validada para garantir precisão temporal. No primeiro frame, o usuário calibra a escala do sistema real selecionando manualmente os vértices de um quadrado de referência (50x50 cm), cujos pontos são ordenados automaticamente e usados para calcular uma matriz de homografia que converte coordenadas de pixels para metros. Em seguida, o usuário define a região de interesse (ROI) contendo o objeto pendular, o ROI atua como elemento central na operação do CSRT, estabelecendo a base física sobre a qual os mecanismos de confiabilidade espacial e de canais operam. Inicialmente, o ROI

fornece o contexto geométrico para construção do mapa de confiabilidade espacial dinâmico $\mathbf{m}$. Dentro desta região, são gerados histogramas HSV que alimentam o modelo MRF, permitindo discriminar primeiro plano e fundo. Simultaneamente, um kernel Epanechnikov modificado prioriza regiões centrais do ROI, adaptando-se proporcionalmente às dimensões da caixa delimitadora.

Paralelamente, o ROI serve como fonte de dados para a confiabilidade de canais. Características multispectrais (*HoG* para forma, *ColorNames* para cor) são extraídas exclusivamente dentro desta região, alimentando o cálculo dos pesos dinâmicos $\tilde{w}_d$, a cada frame, há uma saída ponderada $\tilde{\mathbf{g}}$ que determina a nova posição e escala do ROI. Do ROI, temos as informações de $\vec{r}(t)$, $h(t)$ e $w(t)$, onde $\vec{r}(t) = (u(t), v(t))$ descreve o canto superior esquerdo do ROI até a origem, $h(t)$ é a altura e $w(t)$ é a largura da região, assim para fazer uma suavização dos dados, é definido cinco pontos em x e em y , temos então $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\vec{x}(t) = u(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = v(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

onde é feito a média

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{tracker}}(t) &= 0.7 (0.2x_1(t) + 0.6x_3(t) + 0.2x_5(t)) + 0.3 \left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i(t) \right) \\ \bar{y}_{\text{tracker}}(t) &= 0.7 (0.2y_1(t) + 0.6y_3(t) + 0.2y_5(t)) + 0.3 \left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i(t) \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

A partir destes valores é definido o vetor posição do objeto $\vec{r}_{\text{tracker}}(t) = (\bar{x}_{\text{tracker}}(t), \bar{y}_{\text{tracker}}(t))$, mas essa descrição do vetor é em relação a origem da imagem, como ilustrado na Figura 13.

Com o decorrer do tempo, o objeto acaba deformando o tamanho do ROI por diversas razões (por exemplo, ao se aproximar ou afastar da câmera, rotações do objeto, variações de iluminação, ilustrado na Figura 14), assim para suavizar essas variações, é aplicado as médias apresentadas nas Equações (4.2).

À medida que cada posição é rastreada, as coordenadas são transformadas para o sistema métrico usando a homografia e armazenadas junto com seus respectivos instantes temporais.

Quando terminado o rastreo, é buscado definir a origem do sistema, fazendo uma traslação de $(0, 0)$ para $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$, que é definido respectivamente por:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T_f} \sum_{t=T_i}^{T_f} x_{\text{tracker}}(t), \quad \langle y \rangle = \frac{1}{T_f} \sum_{t=T_i}^{T_f} y_{\text{tracker}}(t) \quad (4.3)$$

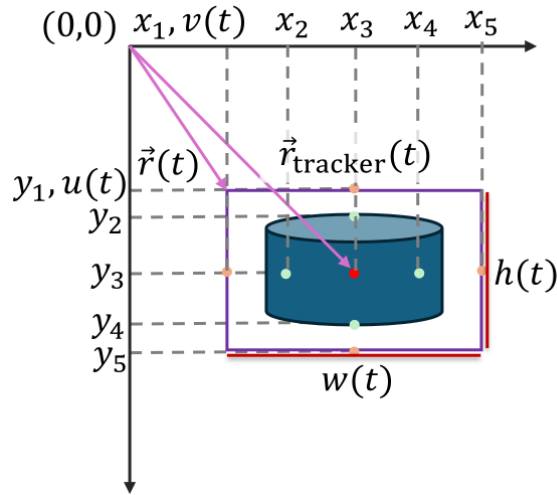


Figura 13 – Esquematização de como é registrado as posições do objeto apartir do ROI, e também a distriuições dos pontos nos dois eixos para poder fazer uma média da onde seria o centro do objeto, consequentemente os valores de $\vec{r}_{\text{tracker}}(t)$.

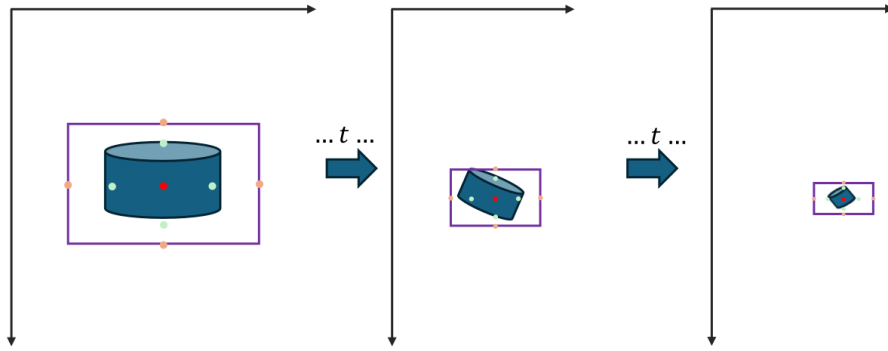


Figura 14 – Representação do possíveis comportamentos de remensionalização do ROI.

No entanto, usar $\langle y \rangle$ como origem do eixo y, não acaba sendo vantajoso para descrever o sistema de coordenadas “real” do objeto, como é possível observar em Figura 15, assim, é calculado $\langle y_i \rangle$, que é definido por:

$$\langle y_i \rangle = \frac{1}{|\mathcal{I}_\epsilon|} \sum_{t \in \mathcal{I}_\epsilon} y_{\text{tracker}}(t), \text{ onde, } \mathcal{I}_\epsilon = \{t \in [T_{\text{inicial}}, T_{\text{final}}] \mid |x_w(t) - \langle x \rangle| \approx 0\} \quad (4.4)$$

Ou seja, é calculado a média de y no corte $x = 0$ o que faz então $\langle y \rangle \approx y_{\text{eq}}$.

Usando $(\langle x \rangle, \langle y_i \rangle)$ como origem do sistema, se tem então toda a trajetória contida na parte negativa do eixo y, e para fazer o ajuste com o deslocamento que o objeto teria no sistema real, é por fim definido a origem em $(\langle x \rangle, \langle y_i \rangle - \langle y \rangle)$, assim a posição final do objeto é calculada sendo:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{traj}} \\ y_{\text{traj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{tracker}} - \langle x \rangle \\ y_{\text{tracker}} - (\langle y_i \rangle - \langle y \rangle) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

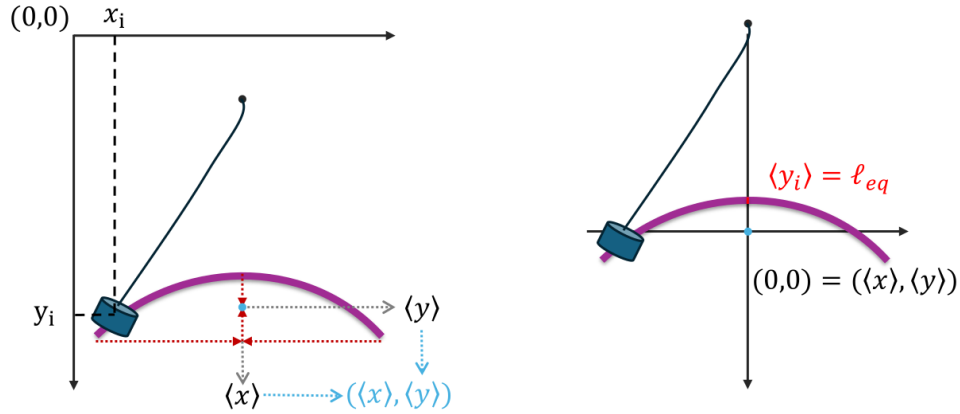


Figura 15 – Esquema inicial do sistema de coordenadas dos dados obtidos pelo rastreo do objeto, e a translação feita para a origem

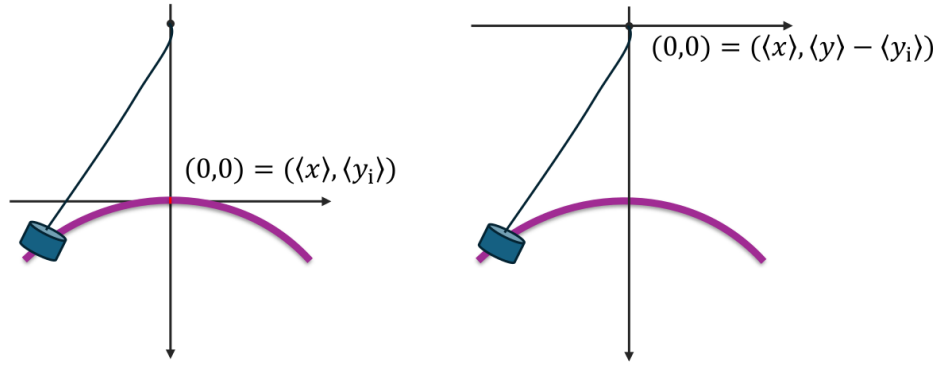


Figura 16 – Esquema final do sistema de coordenadas dos dados obtidos pelo rastreo do objeto, e a translação feita para a origem

Por fim os dados processados alimentam algoritmos numéricos que calculam grandezas físicas como comprimento dinâmico, ângulo instantâneo, componentes de energia, constantes elásticas e coeficientes de dissipação, além de gerar gráficos da trajetória, seção de poincaré e um *Temporal Color Code* que é terceira forma de visualizar a trajetória realizada, no entanto, na parte das estimativas de constantes, código precisa de algumas correções, assim, foi utilizado código julia para o cálculo das constantes elásticas e o cálculo da seção de poincaré do sistema. Para o cálculo das velocidades do objeto rastreado é utilizado o filtro de Kalman [24]. A constante elástica k é determinada aplicando a FFT para os dados de $(y - t)$ onde é encontrado a frequência dominante, assim é calculado k por meio de

$$k = 4\pi^2 f_{\text{dominante}}^2 \quad (4.6)$$

4.3 APARATO EXPERIMENTAL

Na primeira realização experimental, foram realizadas gravações em dois planos ortogonais, possibilitando a reconstrução da trajetória completa em três dimensões, em vez

de apenas duas, com o pêndulo elástico sendo montado com equipamentos disponibilizadas pelo laboratório de física II, composto pelo suporte para a haste, as massas e a mola (Figura 17).

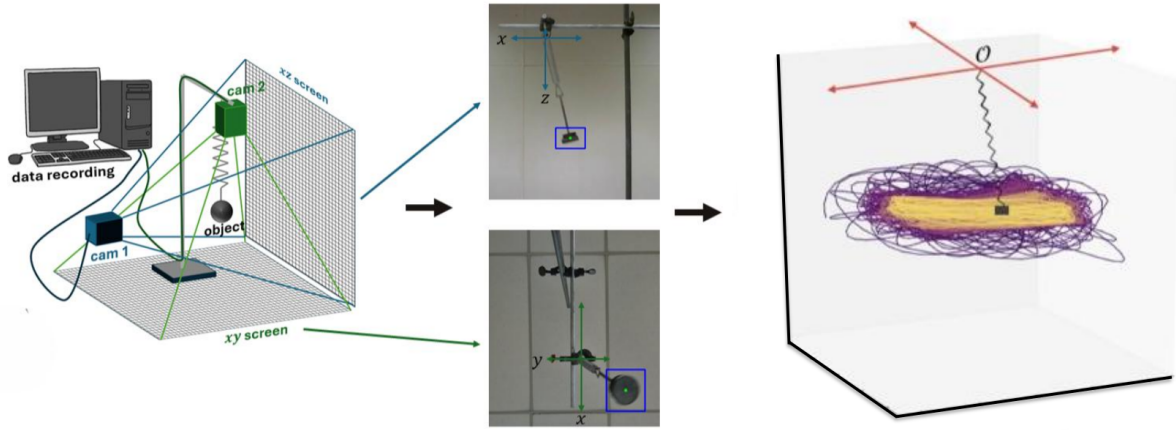


Figura 17 – Esquematização do setup experimental: exibe a montagem do sistema, a configuração das câmeras para a gravação das trajetórias em diferentes planos e a trajetória do pêndulo obtida a partir dos dados coletados.

Com base nos resultados preliminares, propôs-se a construção de um aparato experimental controlado, implementando melhorias em três eixos principais. Na calibração óptica, grids de referência foram posicionados no plano de fundo para correção de distorções de imagem e isolamento visual do pêndulo, garantindo aquisição de dados sem interferências visuais por questões ambientais. Paralelamente, a otimização mecânica incluiu a substituição do suporte original por uma estrutura rígida de baixa vibração, reduzindo a dissipação de energia por amortecimento estrutural e aumentando a fidelidade das medições dinâmicas. Por fim, a modularidade do projeto foi priorizada, permitindo ajustes parametrizáveis no sistema para adaptação a demandas experimentais emergentes, (Figura 18).

Houve posteriormente a troca da mola utilizada por elásticos de escritório, em uma tentativa de reduzir os efeitos observados por conta das componentes de força que atuavam na mola helicoidal (Figura 19).

4.4 RESULTADOS

Com o aparato experimental feito e com o *software* capturando os dados, é então realizado a análises das trajetórias apresentadas, antes de realizar movimentos que possuem oscilação angular, foi realizado o sistema massa-mola, para a determinação da constante elástica tanto da mola, quanto do elástico, mas medidas do comprimento natural do sistema para cada material elástico é de $l_{0,mola} = 0,225 \text{ m}$ e $l_{0,elástico} = 0,175 \text{ m}$, o valor da gravidade foi determinada sendo $g = 9,7858486 \text{ m/s}^2$ por [25], e a massa é de $m = 0,022 \text{ g}$.

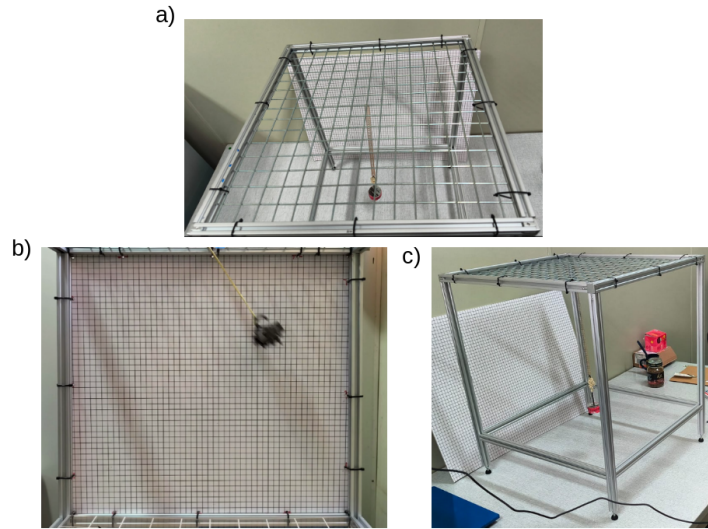


Figura 18 – Imagens do Setup experimental construído. a) visão superior, b) visão frontal na região que há o movimento do objeto, c) visão diagonal contemplando o suporte como um todo, não só partes dele.

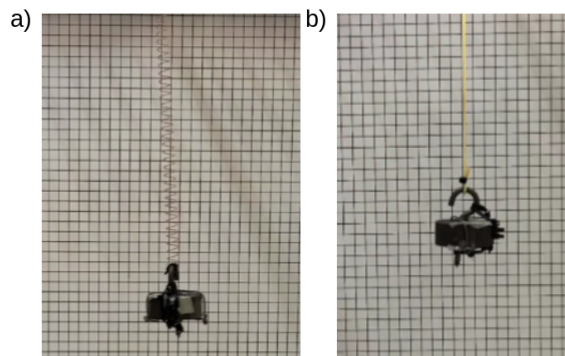


Figura 19 – a) Massa com mola utilizados nas trajetórias capturadas, b) Massa com elástico utilizado.

4.4.1 Utilizando mola

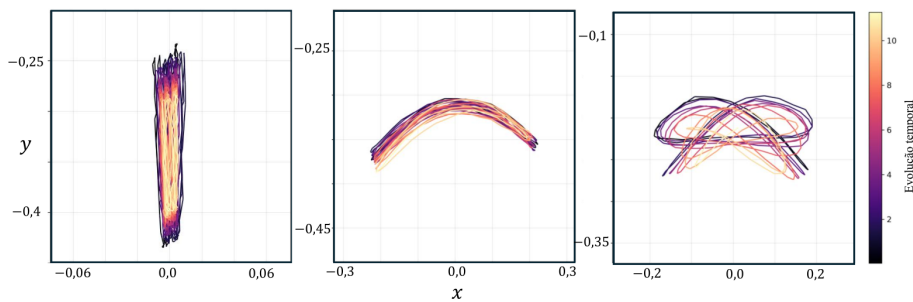


Figura 20 – Trajetórias registradas utilizando mola helicoidal, sendo observadas trajetórias nos modos: “Colina” e “Satélite”, além do próprio movimento massa-mola.

Utilizando a mola, o valor encontrado para $k \approx 1,49 \text{ N/m}$, assim o parâmetro adimensional para o sistema é $\omega^2 \approx 0,644604$; portanto, $\omega^2 \in [0, 1]$ para essa configuração

é possível trajetórias caóticas. É observadas trajetórias quase-periódicas e periódicas (vide Figura 20) com leves dissipações de energia, além disso, uma das principais discrepâncias entre o modelo teórico e o experimento, além da questão da dissipações, é a questão de haver troca de planos de oscilações, devido a componentes de forças atuando no sistema que não foram considerados, como um centro de massa desalinhado com o acoplamento com a mola, dissipações de energia no eixo da mola que fazia a mesma rotacionar um certo ângulo a cada oscilação, e até mesmo deformidades na mola que fazia com que as suas forças externas não fossem compensadas.

Uma das primeiras tentativas de evitar a troca de planos, foi utilizar gravações com pouca oscilações enquanto o movimento ainda é no plano original, acontece que isso faz com que se tenha uma menor quantidade de cruzamentos na superfície de Poincaré em $x = 0$, fazendo então ter menos pontos e uma imagem menos clara do movimento, no entanto, há coisas interessantes de se observar nessas imagens, como será apresentadas em mais detalhes no apêndice C

4.4.2 Utilizando elástico

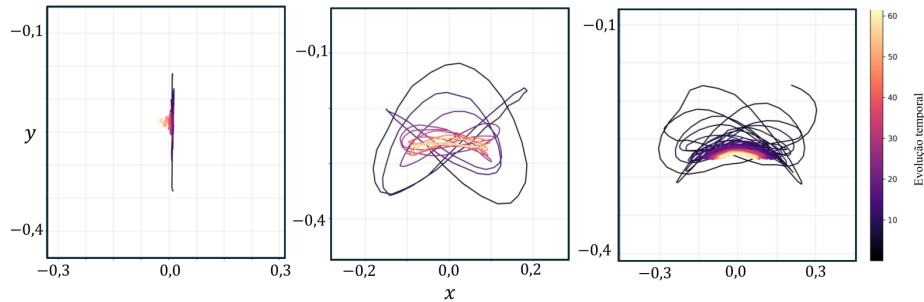


Figura 21 – Trajetórias registradas utilizando elástico de escritório, sendo observadas trajetórias sendo atraídas para o modo “colina”, além do próprio movimento massa-mola.

Utilizando o elástico, o valor encontrado para $k \approx 2,89 \text{ N/m}$, assim o parâmetro adimensional para o sistema é $\omega^2 \approx 0,452026$; portanto, $\omega^2 \in [0, 1]$ para essa configuração é possível trajetórias caóticas. Apesar do elástico ter resolvido uma parte das “forças parasitas” que atuam no sistema, ainda há deslinhamentos entre o vínculo da massa com o elástico e o centro de massa que eventualmente causam novamente a troca de planos, além disso, o elástico tem uma dissipação interna muito alta, o que é muito interessante já que com a mola há a impressão que uma trajetória cai em um atrator (vide Figuras 45 e 44), agora é possível observar que a trajetória é atraída para um atrator que é o modo “colina” (vide Figuras 47 e 48).

No Apêndice C é apresentada a trajetória em mais detalhes discutindo as mesmas juntas a suas seções de Poincaré.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentado, é uma ramificação do trabalho total, onde foi apresentado os resultados e as discussões que faziam sentido para o mesmo.

É iniciado o trabalho com a pergunta "Quais efeitos téóricos é possível observar na realidade?", assim, é feito o estudo teórico por meio de revisão bibliográfica e simulação do sistema e estudo experimental por meio da construção do aparato experimental (suporte moldável para a realização do experimento) e a construção de um software para que seja possível fazer um rastreamento da posição do pêndulo e assim possibilitando fazer as análises das trajetórias e assim fazer essa comparação com os resultados téóricos. Além disso, é partido do modelo teórico mais simples, ou seja, o sistema do pêndulo elástico é descrito como um ponto de massa com dois graus de liberdade se movimentando em (l, ϑ) em um potencial gravitacional acoplado com o potencial harmônico. O que trouxe diferenças nos resultados que eram esperados, no entanto, experimentalmente foi procurado minimizar essas diferenças, ou seja, é procurado realizar trajetórias "o mais plana possível".

Nos estudos da teoria, mais especificamente, nas derivações das equações de movimento e posteriormente a simulação do sistema, foi possível fazer a análise das trajetórias por meio dos espaços de eventos e fase. Pelo espaço de eventos, é realizado um gráfico dos valores de x e y , sendo a posição do ponto no gráfico e os valores do tempo sendo a cor do ponto no gráfico, e assim é mostrada a evolução da trajetória em uma figura, além disso, nesse mesmo gráfico é mostrado o contorno do potencial que o sistema estaria confinado. Pelo espaço de fase, já que teríamos um hipervolume formado por (x, y, p_x, p_y) , ou em polares $(l, \vartheta, p_l, p_\vartheta)$, é utilizado a seção de Poincaré e assim é feito quatro projeções $(x - p_x, y - p_x, x - p_y, y - p_y)$ - semelhante em polares. As simulações foram feitas definindo os parâmetros $m, k, l_{relaxada}, g, p_l, \vartheta$ e $\mathcal{H}$ em unidades reduzidas, e é variado os valores de l_{init} e $p_{\vartheta,0}$, assim foi possível fazer um mapeamento do espaço de fase com uma superfície em $x = 0$ onde é observado estruturas como as ilhas de estabilidade e o mar caótico, além disso por meio do espaço de eventos é possível ver qual foi o trajeto realizado, revelando diferentes padrões em trajetórias quase-periódicas e as trajetórias do mar caótico que não revelam um padrão. Posteriormente é feito as derivações das equações do sistema adimensional definindo um parâmetro adimensional ω^2 , onde se $\omega^2 \in [0, 1]$ há presença do caos nas seções de poincaré, no entanto conforme ω^2 se torna muito maior que 1, o caos vai se perdendo, e dependendo das condições iniciais (l_{init}) o sistema tem comportamento de pêndulo ou de massa-mola.

No experimento do projeto, buscou-se inicialmente desenvolver uma estrutura com menor dissipação energética que o modelo anterior e um *software* para rastreamento do pêndulo, configurável para análises dinâmicas personalizadas. Após a construção do

aparato experimental, observa-se que o movimento mantém-se planar durante as primeiras oscilações, porém, subsequente e progressivamente, manifesta-se uma troca espontânea do plano de oscilação, e inevitavelmente a dissipação energética decorrente do atrito interno da mola, resistência do ar e microdeformações materiais. Esta transição dinâmica ocorre devido a componentes de força transversais por causa de mínimos desalinhamentos construtivos entre o eixo da mola e o centro de massa da carga suspensa, que geram torques inerciais perpendiculares ao plano original de movimento. Durante a oscilação, desvios angulares na fixação da mola induzem forças de Euler que atuam ortogonalmente à trajetória primária, enquanto a geometria helicoidal da mola transforma forças axiais em componentes transversais. A dissipação energética progressiva amplifica este efeito, reduzindo a estabilidade do movimento planar e permitindo que acoplamentos não-lineares entre graus de liberdade transfiram energia cinética para direções perpendiculares, reorientando o plano oscilatório segundo um processo análogo a uma precessão induzida por imperfeições do sistema real.

Em uma tentativa de mitigar o fenômeno de troca do plano de oscilação, substituiu-se a mola helicoidal por elásticos. Esta abordagem atenuou parcialmente a instabilidade planar, mas introduziu novas limitações dinâmicas: o material elástico, embora menos suscetível a torções parasitas, apresentou maior rigidez e fragilidade estrutural, com rupturas ocorrendo dependendo das elongações iniciais. Adicionalmente, observou-se significativa elevação na dissipação energética intrínseca, atribuível à histerese viscoelástica do material. Como consequência, o sistema frequentemente exibiu uma trajetória que rapidamente convergia para um atrator periódico, onde a trajetória estabilizava-se em uma órbita estável até a dissipação total de sua energia.

Era esperado que os resultados das duas vertentes do projeto tivessem maior convergência, mas devido às dificuldades encontradas e efeitos não descritos no modelo simplificado, as conexões entre teoria e experimento tornaram-se mais qualitativas do que quantitativas. Essas “pontes” manifestam-se principalmente através de semelhanças observáveis, por meio da caracterização das trajetórias em modos “vale”, “colina”, “satélites”, etc, além de proporcionar diretrizes para futuras melhorias, tanto na busca de materiais elásticos com melhor equilíbrio entre resistência mecânica e flexibilidade, quanto na sofisticação do modelo teórico mediante inclusão da terceira dimensão espacial e mecanismos dissipativos realistas. A partir dos parâmetros experimentais m , k , l_{relaxada} e g , calculou-se o parâmetro adimensional ω^2 para ambos os sistemas, obtendo $\omega_{\text{mola}}^2 \approx 0,645$ e $\omega_{\text{elástico}}^2 \approx 0,452$. Embora estes valores sugiram regimes caóticos ($\omega^2 \ll 1$), observaram-se exclusivamente órbitas periódicas, indicando que o sistema opera em uma região de estabilidade dinâmica restrita. Esta contenção decorre de limitações materiais como a deformabilidade finita dos elementos elásticos e dissipação da energia, combinadas com vinculações experimentais que confinaram o comprimento inicial l_{init} e ângulo θ_0 à bacia de atração periódica.

REFERÊNCIAS

- 1 POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, v. 13, p. 1–270, 1890.
- 2 LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- 3 STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1994.
- 4 GLEICK, J. *Chaos: Making a New Science*. [S.l.]: Viking Penguin, 1987.
- 5 CHUA, L. O. The chua circuit: An overview. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 3, n. 4, p. 737–749, 1993.
- 6 CUERNO, R.; Fernández Rañada, A.; Ruiz-Lorenzo, J. J. Deterministic chaos in the elastic pendulum: A simple laboratory for nonlinear dynamics. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 60, n. 1, p. 73–79, jan. 1992. ISSN 0002-9505. 7 pages, 6 figures. PACS nrs.: 05.45.+b, 03.20.+i. MR1145312 (92j:70028). Disponível em: <https://hdl.handle.net/10016/7159>.
- 7 van der Weele, J.; de Kleine, E. The order—chaos—order sequence in the spring pendulum. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 228, n. 1, p. 245–272, 1996. ISSN 0378-4371. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437195004262>.
- 8 C. de Sousa, M.; MARCUS, F.; L. Caldas, I.; L. Viana, R. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 509, p. 1110–1119, 2018. ISSN 0378-4371. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437118308148>.
- 9 CUVALCI, O.; ERTAS, A. Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 118, n. 4, p. 558–563, 1996.
- 10 KUMAR, P.; GANGULI, A.; BENIPAL, G. S. Mechanics of cable-suspended beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 14, n. 10, p. 1875–1891, 2017.
- 11 MOULTON, F. R. *An Introduction to Celestial Mechanics*. [S.l.]: Dover Publications, 1970.
- 12 ZEEBROECK, M. V.; TIJSKENS, E.; LIEDEKERKE, P. V. Determination of the dynamical behaviour of biological materials during impact using a pendulum device. *Journal of Sound and Vibration*, v. 266, n. 3, p. 543–556, 2003.
- 13 KUZNETSOV, S. V. The motion of the elastic pendulum. *Regul. Chaotic Dyn.*, v. 4, n. 3, p. 3–12, 1999. ISSN 1560-3547.
- 14 ACOSTA-ZAMORA, K. P.; GONZÁLEZ, J. N.; GONZÁLEZ, A.; RAMOS, E. Characterization of a spring pendulum phase-space trajectories. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 34, n. 2, p. 023119, 02 2024. ISSN 1054-1500. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/5.0183419>.

- 15 NOLTING, W. *Theoretical Physics 2*. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- 16 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3. ed. New York: Addison-Wesley, 2002.
- 17 VASCONCELOS, J. V. A. *Interação Robo-Ambiente no Bilhar do Estádio de Bunimovich*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2025. Disponível em: <https://ppgfa.ufrpe.br/sites/default/files/testes-dissertacoes/INTERACAO%20ROBO-AMBIENTE%20NO%20BILHAR%20DO%20ESTADIO%20DE%20BUNIMOVICH.pdf>.
- 18 QUIRINO, R. V. A. *Elaboração em Modelagem 3D de um Robô em Arduino: Aplicação Experimental de uma Partícula Ativa no Bilhar Limão*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2025. Disponível em: <https://ppgfa.ufrpe.br/sites/default/files/testes-dissertacoes/ELABORA%C3%87%C3%83O%20EM%20MODELAGEM%203D%20DE%20UM%20ROB%C3%94%20EM%20ARDUINO%20APLICA%C3%87%C3%83O%20EXPERIMENTAL%20DE%20UMA%20PART%C3%8DCULA%20ATIVA%20NO%20BILHAR%20LIM%C3%83O.pdf>.
- 19 ALLEN, M.; TILDESLEY, D. *Computer Simulation of Liquids*. Clarendon Press, 1989. (Computer Simulation of Liquids). ISBN 9780198556459. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=O32VXB9e5P4C>.
- 20 RACKAUCKAS, C.; NIE, Q. Differentialequations.jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia. *Journal of Open Research Software*, Ubiquity Press, v. 5, n. 1, p. 15, 2017.
- 21 DORMAND, J. R.; PRINCE, P. J. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, p. 19–26, 1980.
- 22 SZELISKI, R. *Computer Vision*. London: Springer, 2011.
- 23 LUKEŽIČ, A.; VOJÍŘ, T.; ZAJC, L. Čehovin; MATAS, J.; KRISTAN, M. Discriminative correlation filter tracker with channel and spatial reliability. *International Journal of Computer Vision*, v. 126, n. 7, p. 671–688, jul 2018. ISSN 1573-1405. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11263-017-1061-3>.
- 24 PEI, Y.; BISWAS, S.; FUSSELL, D. S.; PINGALI, K. *An Elementary Introduction to Kalman Filtering*. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1710.04055>.
- 25 ZIEMATH, E. C.; SANTARINE, G.; FILHO, W. M.; DOURADO, J. C. *DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL NO BAIRRO SANTANA, RIO CLARO – SP*. 1998. Acessado em: 15 jul. 2025. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Departamentos47/fisica635/g___fisica_gravid.pdf.
- 26 STUCHI, T. J. Symplectic integrators revisited. *Brazilian Journal of Physics*, v. 32, n. 4, p. 637–654, 2002.
- 27 PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- 28 CROMER, A. Stable solutions using the euler approximation. *American Journal of Physics*, v. 49, n. 5, p. 455–459, 1981.

-
- 29 HAIRER, E.; NØRSETT, S. P.; WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- 30 BEZANSON, J.; EDELMAN, A.; KARPINSKI, S.; SHAH, V. B. Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM Review*, v. 59, n. 1, p. 65–98, 2017.
- 31 RACKAUCKAS, C.; NIE, Q. Differentialequations.jl – a performant and feature rich ecosystem for solving differential equations in julia. *Journal of Open Research Software*, v. 5, n. 1, p. 15, 2017.

Apêndices

APÊNDICE A – UM BREVE ESTUDO SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS

Esse apêndice traz uma discussão referente aos métodos numéricos que podem ser utilizados para resolver as equações canônicas de movimento, de forma a justificar a utilização do método de Dormand-Prince para a integração numérica das equações canônicas do pêndulo elástico, conforme citado na Seção 3.3.1

A.1 SIMPLÉCTISMO E MÉTODOS NUMÉRICOS

O simpléctismo é uma propriedade fundamental dos sistemas hamiltonianos que garante a preservação da estrutura geométrica do espaço de fase ao longo do tempo. No espaço de fase, as coordenadas generalizadas q_i e os momentos generalizados p_i formam pares conjugados (q, p) . Essa preservação implica que o volume no espaço de fase, medido pela forma diferencial $dq_1 \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dq_S \wedge dp_S$, permanece constante ao longo do tempo, de acordo com o teorema de Liouville. Essa propriedade garante que a evolução temporal do sistema seja determinística e reversível. Métodos numéricos tradicionais, como o Runge-Kutta, não mantêm essa propriedade, ocasionando erros acumulativos na energia e distorcendo as trajetórias, sobretudo em simulações de longo prazo. Para superar esse problema, foram desenvolvidos métodos numéricos simplécticos, que preservam a estrutura geométrica e asseguram a conservação de propriedades qualitativas essenciais, como a energia em sistemas fechados [26]. Assim, o uso de métodos simplécticos é fundamental para garantir simulações precisas e fisicamente consistentes de sistemas hamiltonianos.

No entanto, nem sempre é viável aplicar integradores simplécticos, seja por limitações computacionais ou pela natureza do problema. Nesses casos, uma alternativa é recorrer a técnicas de projeção. Essa abordagem consiste em, após cada passo de um método numérico tradicional, projetar o estado calculado de volta para a variedade que preserva os invariantes do sistema, como a energia, mitigando o acúmulo de erros. Dessa forma, mesmo que o integrador original não preserve rigorosamente a estrutura simpléctica.

Na mecânica, as equações de movimento determinam o deslocamento dos objetos e formam Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), que, em muitos casos, são não lineares. Para a maioria desses casos, não há solução analítica, o que torna os métodos numéricos a única possibilidade de estudo desses problemas. É importante mencionar que existem diversos tipos de algoritmos que exploram propriedades inerentes ao problema de interesse, como a conservação de certas grandezas [27].

Com métodos numéricos, é possível obter soluções muito próximas dos valores verdadeiros, sendo a precisão um indicador da qualidade do método utilizado. Entre os

diferentes enfoques numéricos para resolver EDOs, existe a classe dos métodos numéricos simpléticos, projetados para resolver as equações de Hamilton. Métodos mais simples, e portanto mais fáceis de implementar, são os métodos numéricos explícitos e implícitos. Os métodos explícitos calculam um novo estado do sistema após um intervalo de tempo finito Δt utilizando apenas os estados anteriores. Já os métodos implícitos incluem termos que dependem do estado atual ou até de estados auxiliares futuros [27].

A partir das equações encontradas para o pêndulo simples, foi estudada a resolução das mesmas pelos métodos numéricos, como os métodos de Euler, Euler-Cromer e o Runge-Kutta de 4ª ordem, para uma melhor compreensão do comportamento de um sistema hamiltoniano simples e da conservação de energia por cada método.

A.1.1 Método de Euler (FPA & LPA)

O método de Euler é um método de integração simples. Contudo, esse método não apresenta uma boa conservação de energia. Sua aplicação pode ser feita de forma simples como apresentado a seguir [27]:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= f(x_n) \cdot \Delta t + y_n, \\x_{n+1} &= k \cdot \Delta t + x_n.\end{aligned}$$

Essa abordagem é simples, no entanto, não é um método simplético e, em particular, não conserva energia. Outra característica do método de Euler é que ele é de primeira ordem, ou seja, o erro por passo é proporcional ao quadrado do passo utilizado. Por isso, torna-se muito impreciso em relação ao resultado esperado de um sistema.

Existe uma variação do método de Euler chamada método de Euler-Cromer, que é um método simplético. Embora ainda seja de primeira ordem, o método de Euler-Cromer conserva a energia quase integralmente. Ele pode ser usado no caso de um sistema de EDOs. Ao atualizar sequencialmente cada grandeza, a atualização do segundo parâmetro é feita utilizando o valor já atualizado do primeiro parâmetro, em vez do seu valor anterior. Assim, temos [28]:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= f(x_{n+1}) \cdot \Delta t + y_n, \\x_{n+1} &= k \cdot \Delta t + x_n.\end{aligned}$$

A.1.2 Método de Runge-Kutta 4º Ordem

O método Runge-Kutta é, na realidade, uma família de métodos numéricos, englobando tanto os métodos de Euler e Euler-Cromer, como também o Método de Dormand-Prince. A família ainda inclui uma diversidade de métodos implícitos e explícitos, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) é o membro da família mais utilizado devido à sua precisão e simplicidade. Ele pertence à classe dos métodos de passo único

explícitos e é capaz de resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) com um erro global de ordem $O(\Delta t^4)$ [27]. No RK4, a solução é obtida por meio de uma combinação ponderada de avaliações da função derivada, realizadas em pontos diferentes dentro do intervalo de integração. A principal vantagem do RK4 é sua precisão relativamente alta para passos de tempo moderados, sem a necessidade de métodos mais complexos ou computacionalmente custosos. Contudo, ele não é um método simplético, o que pode levar à perda de conservação de energia em sistemas hamiltonianos.

A.1.3 Método de Dormand-Prince 8º Ordem

O método de Dormand-Prince de 8ª ordem (DP8) é uma extensão avançada dos métodos de Runge-Kutta, projetada para fornecer soluções numéricas de alta precisão com controle adaptativo do passo de tempo. Este método é amplamente utilizado em problemas de dinâmica complexa e simulações científicas, devido à sua capacidade de equilibrar eficiência computacional e precisão [21].

O método DP8 emprega uma fórmula de 8ª ordem para calcular a solução principal y_{n+1} , enquanto utiliza uma fórmula embutida de ordem inferior para estimar uma solução auxiliar $\hat{y}_{n+1}$. A diferença entre essas duas soluções, dada por:

$$E_{n+1} = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1},$$

é usada como uma estimativa do erro local de truncamento. Com base nesse erro, o tamanho do próximo passo de tempo Δt_{n+1} é ajustado de forma adaptativa para garantir que o erro permaneça dentro de uma tolerância máxima especificada (ϵ).

O tamanho do próximo passo é calculado pela fórmula [29]:

$$\Delta t_{n+1} = 0.9 \cdot \Delta t_n \cdot \left(\frac{\epsilon}{\|E_{n+1}\|} \right)^{1/(p+1)},$$

Caso o erro estimado exceda a tolerância ($\|E_{n+1}\| > \epsilon$), o passo atual é rejeitado, e um novo Δt_{n+1} é calculado com base em um tamanho de passo reduzido. Isso garante que o método mantenha a precisão desejada.

A.2 COMPARAÇÕES DOS RESULTADOS ENTRE OS MÉTODOS

Para a análise dos métodos numéricos é utilizado o sistema do pêndulo simples, que é definido pela Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{p_\vartheta^2}{2ml^2} - mgl \cos \vartheta \quad (\text{A.1})$$

assim, é feito, utilizando inicialmente a linguagem de programação *R* onde foi implementado os métodos numéricos de Euler, Euler-Cromer e Runge-Kutta, e posteriormente por

praticidade, foi utilizado o pacote “*DifferentialEquations.jl*” da linguagem de programação *Julia* para o método de Dormand-Prince [21, 30, 31], programas que fazem a integração numérica do sistema, assim é observado como é feita a evolução da energia do sistema perante aos erros numéricos associados a cada método.

Na Figura 22, é possível observar o comportamento de cada método, onde: para o método de Euler tradicional, há uma forte dissipação de energia atingindo o valor de $\Delta E = 1,25$. Já, o método Euler-Cromer se mostra muito mais estável, oscilando entorno da linha definida por $\Delta E = 0,0$. No caso do método de Runge-Kutta de 4ª ordem e Dormand-Prince de 8ª ordem, a estabilidade é enormemente aprimorada, onde a primeira vista estão juntos na linha definida pela conservação de energia.

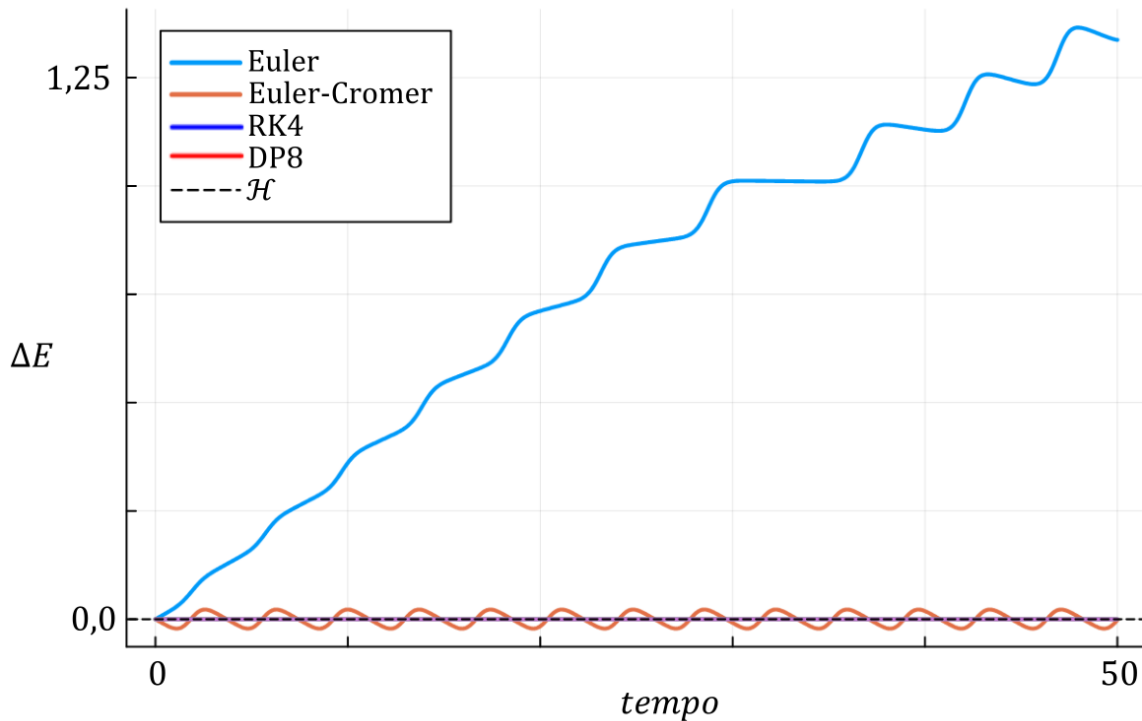


Figura 22 – Evolução da variação da energia de um pêndulo simples simulado pelo método de Euler, método de Euler-Cromer, Runge-Kutta 4 e Dormand-Prince.

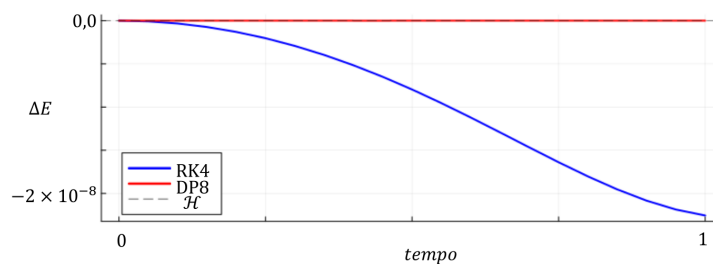


Figura 23 – Zoom feito para a comparação entre a variação de energia pelos métodos de Runge-Kutta 4 e de Dormand-Prince, durante o primeiro segundo simulado, onde o método de Dormand-Prince mantém-se sobreposta com a linha que indica que a energia é conservada.

Na Figura 23, mostra que embora o método de Runge-Kutta apresente uma conservação de energia superior aos métodos de Euler e Euler-Cromer, é preferível que se utilize o método de Dormand-Prince, já que este método demonstra uma variação de energia significativamente menor, além do fato dele ter como característica o passo de integração adaptativo, onde ele se adapta conforme o erro de integração associado ao passo, para que haja um maior controle do erro numérico associado aos resultados. Essa característica é especialmente relevante para sistemas com múltiplos graus de liberdade, como o pêndulo elástico, que se movimenta em várias dimensões. Nessas condições, a variação de energia impede que se garanta a equivalência entre a trajetória inicial e a trajetória em momentos posteriores. Assim, a busca por métodos que apresentem uma excelente conservação de energia ou que sejam simpléticos torna-se fundamental para simulações precisas e estáveis.

APÊNDICE B – ANÁLISES DAS TRAJETÓRIA PARA DIFERENTES f

Esse apêndice apresenta de forma mais completa as seções de Poincaré apresentadas na Seção 3.3.3

As Figuras 24, 28, 32, 36 e 40 apresentam as seções de Poincaré da Figura 12 de uma forma mais completa, em um grid 2x2, com a primeira coluna sendo referente ao sistema em polares e na segunda coluna com o sistema em cartesianas. Nessas seções é observado que as trajetórias realizada pelos sistemas definidos pelo parâmetro adimensional entre zero e um, apresentam trajetórias caóticas e trajetórias quase-periodicas ou periodicas, onde próximos do comprimento mínimo e máximo há comportamento caótico, assim entrando em uma região de ordem onde o termo gravitacional é mais forte, transiciona novamente para uma região de caos e posteriormente entrando em uma região com o termo elástico mais dominante. Isso acontece já que, ao variar λ_{init} no intervalo $[\lambda_{\text{min}}, \lambda_{\text{max}}]$, vai ocorrer uma transição caos-ordem-caos causado pelo valor de $\tilde{p}_{\vartheta,0}$ calculado onde, por conta da conservação de energia, $\mathcal{H} = 0 \therefore T = V$, e como foi definido $\tilde{p}_{\lambda,0} = 0$ então $\tilde{p}_{\vartheta,0} = \sqrt{2\lambda^2(V)}$, onde próximo a linha definida pela posição de equilíbrio do sistema, o momento conjulgado de theta atinge o valor máximo, assim há uma energia cinética angular maior que domina o sistema. Conforme o valor de $\tilde{p}_{\vartheta,0}$ diminui, o modo de oscilação radial começa a dominar o sistema surgindo um forte acoplamento entre os dois sistemas que gera as trajetórias caóticas, com isso acontecendo para λ_{init} proximo de λ_{min} ou de λ_{max} .

Após cada uma das seções, são apresentadas trajetórias selecionadas representando regiões de ordem, caos e novamente ordem. Além disso, caracterizam-se algumas trajetórias conforme o método proposto em [7]. Os modos principais **A** (“colina”), **B** (“vale”) e **sat** (“satélites”) são explicitamente identificados, enquanto as trajetórias caóticas ou aquelas que convergem para modos não fundamentais permanecem sem esta indicação.

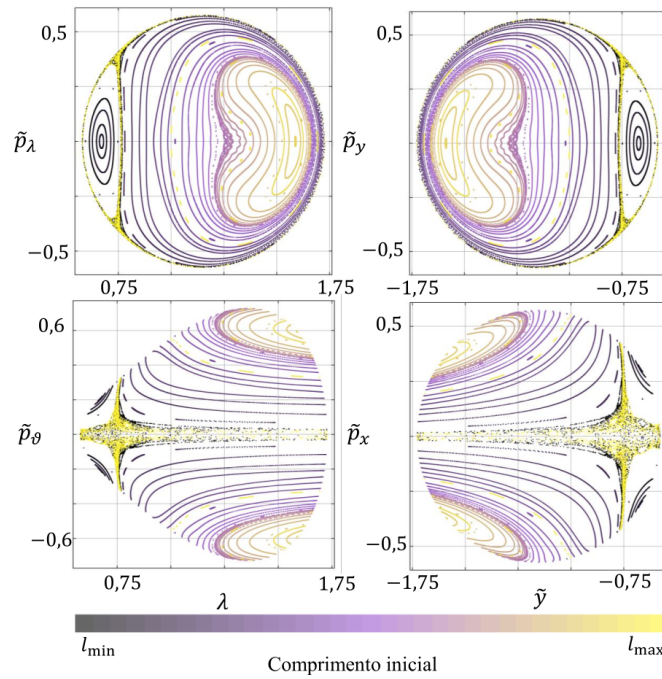


Figura 24 – Realizada a simulação do pêndulo, para $\omega^2 = 0,153$, variando a posição inicial no intervalo $[l_{\min}, l_{\max}]$, observa-se uma transição ordem $\rightarrow$ caos $\rightarrow$ ordem em sua seção de poincaré.

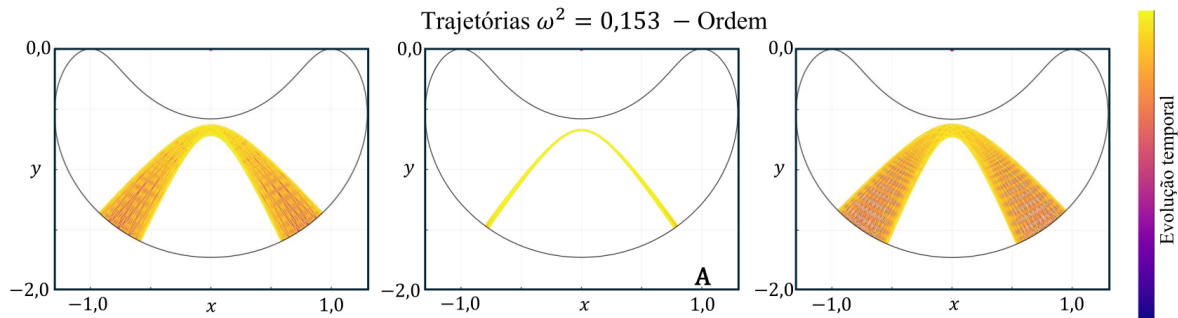


Figura 25 – Trajetórias envolta do modo “colina”

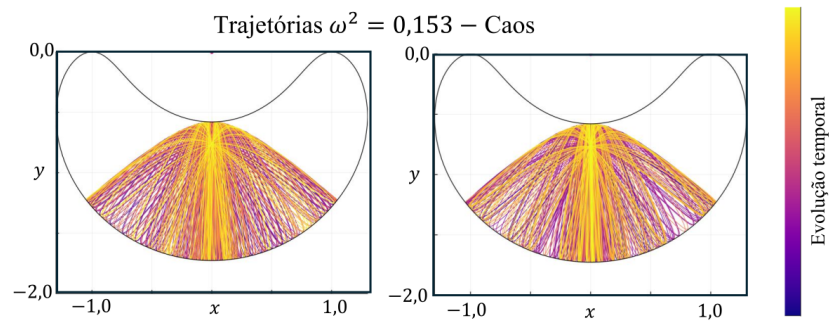


Figura 26 – Trajetórias localizadas no “fino” mar caótico apresentado na seção.

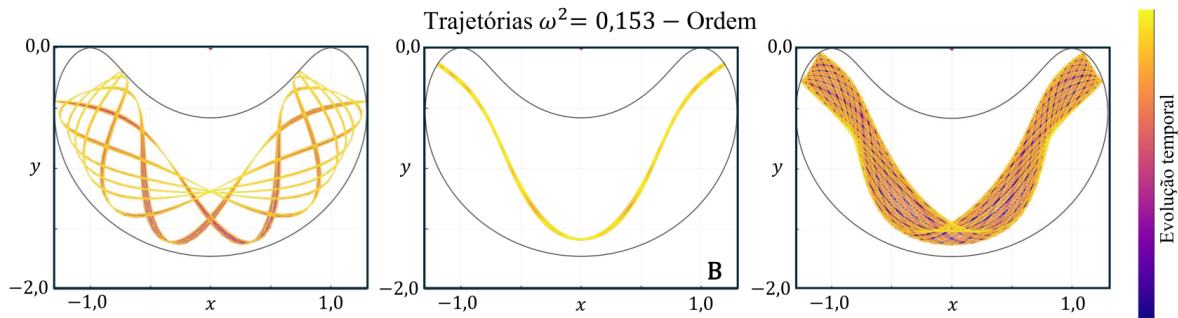


Figura 27 – Trajetórias envolta do modo “vale”.

Para $\omega^2 = 0,153$ há a presença de uma fina estrutura que compõe o mar cáotico (Figura 26, as trajetórias periódicas consistem dos modos “colina” (Figura 25) e “vale” (Figura 27), com essa escolha de condições iniciais, não foi observado “satélites”.

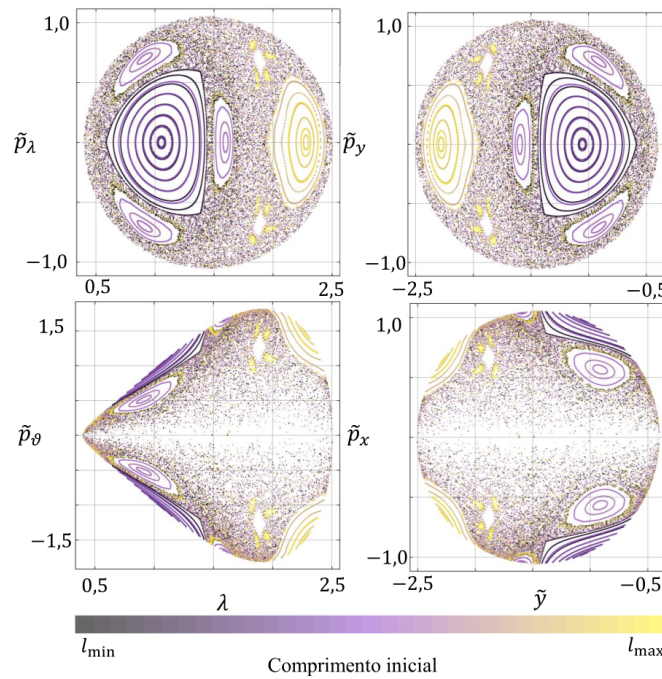


Figura 28 – Realizada a simulação do pêndulo, para $\omega^2 = 0,425$, variando a posição inicial no intervalo $[l_{\min}, l_{\max}]$, observa-se uma transição ordem $\rightarrow$ caos $\rightarrow$ ordem em sua seção de poincaré.

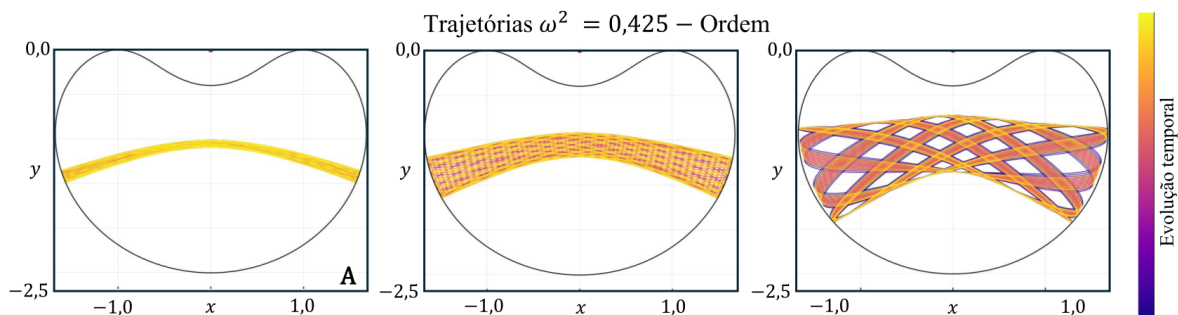


Figura 29 – Trajetórias envolta do modo “colina”

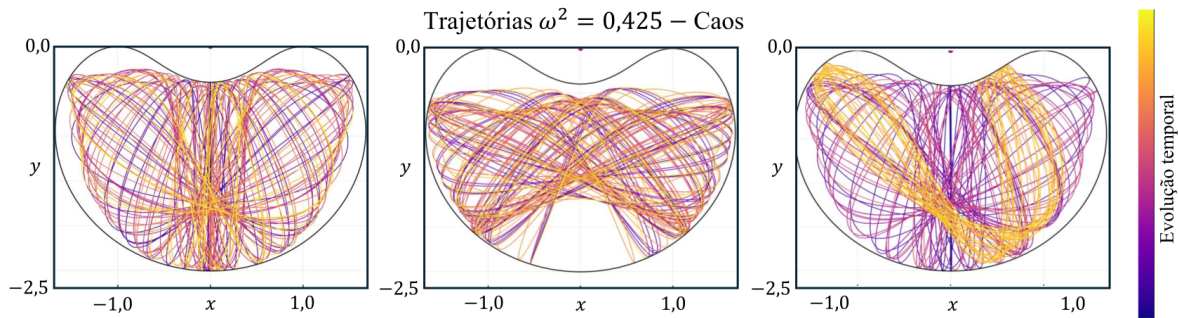


Figura 30 – Trajetórias localizadas no mar cáotico apresentado na seção.

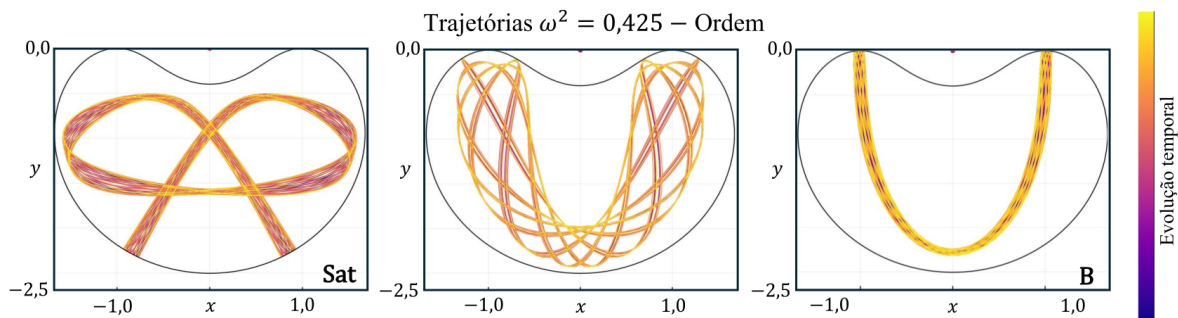


Figura 31 – Trajetória “satélite”, e trajetórias envolta do modo “vale”

Para $\omega^2 = 0,425$ há a presença de uma estrutura mais densa que compõe o mar cáotico (Figura 30), as trajetórias periódicas consistem dos modos “colina”(Figura 29), “satélites” e “vale” (Figura 31).

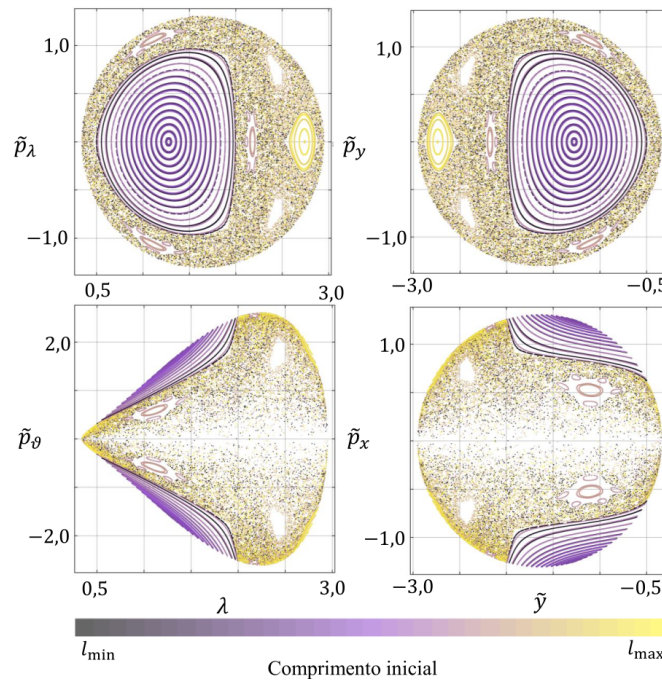


Figura 32 – Realizada a simulação do pêndulo, para $\omega^2 \approx 0,645$, variando a posição inicial no intervalo $[l_{\min}, l_{\max}]$, observa-se uma transição ordem $\rightarrow$ caos $\rightarrow$ ordem em sua seção de poincaré.

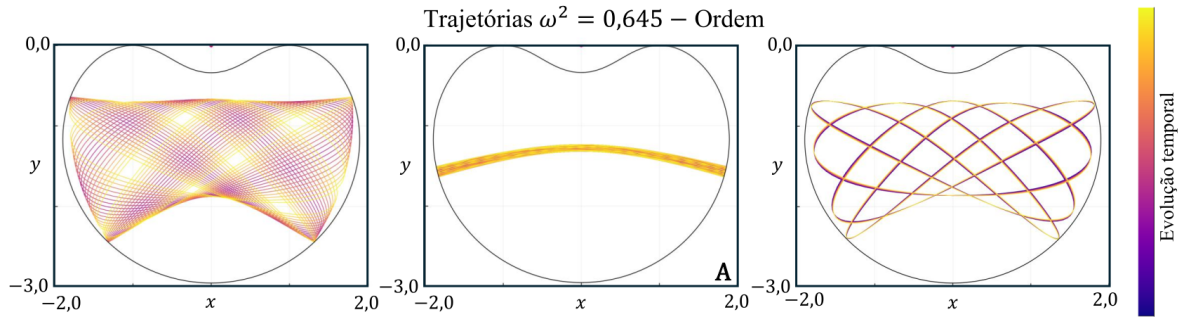


Figura 33 – Trajetórias envolta do modo “colina”

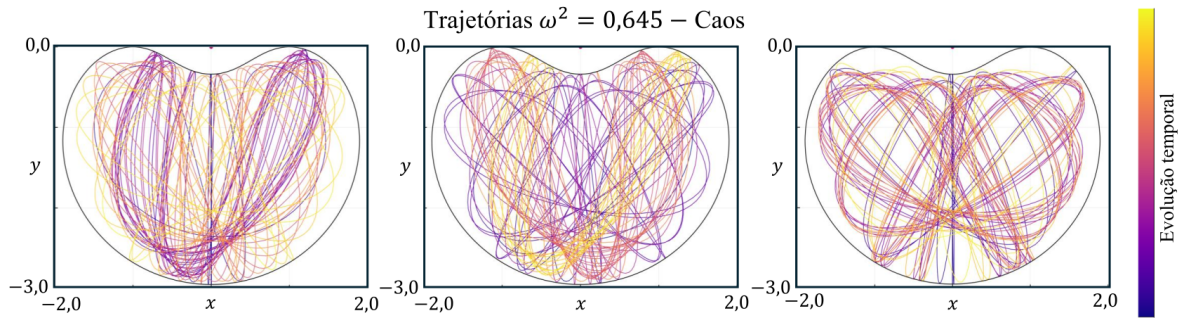


Figura 34 – Trajetórias localizadas no mar cáotico apresentado na seção.

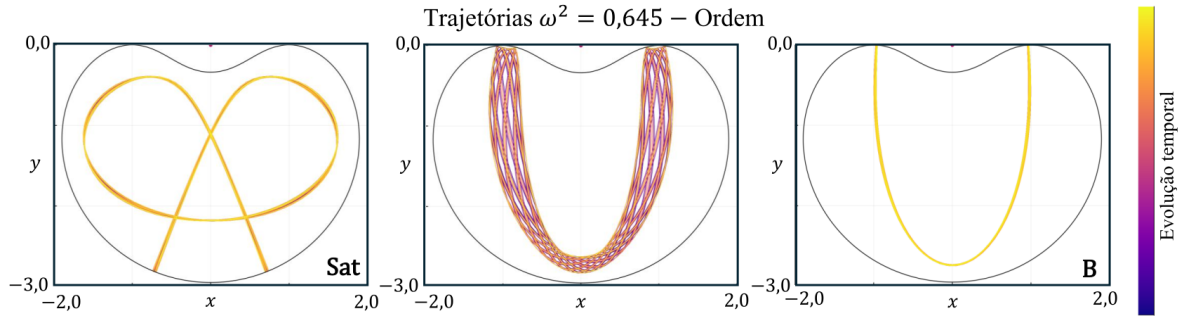


Figura 35 – Trajetória “satélite”, e trajetórias envolta do modo “vale”

Para $\omega^2 = 0,645$ há a presença de uma estrutura mais densa que compõe o mar cáotico (Figura 34), as trajetórias periódicas consistem dos modos “colina” (Figura 33), “satélites” e “vale” (Figura 35). Há uma diminuição na presença de “satélites”.

Quando $\omega^2 = 1$, as forças gravitacional e elástica se equilibram. Contudo, ainda surgem trajetórias caóticas, especialmente para comprimentos iniciais l_0 próximos a $l_{\min}$ e $l_{\max}$ já que os valores do momento angular inicial $p_{\theta,0}$ serão elevados.

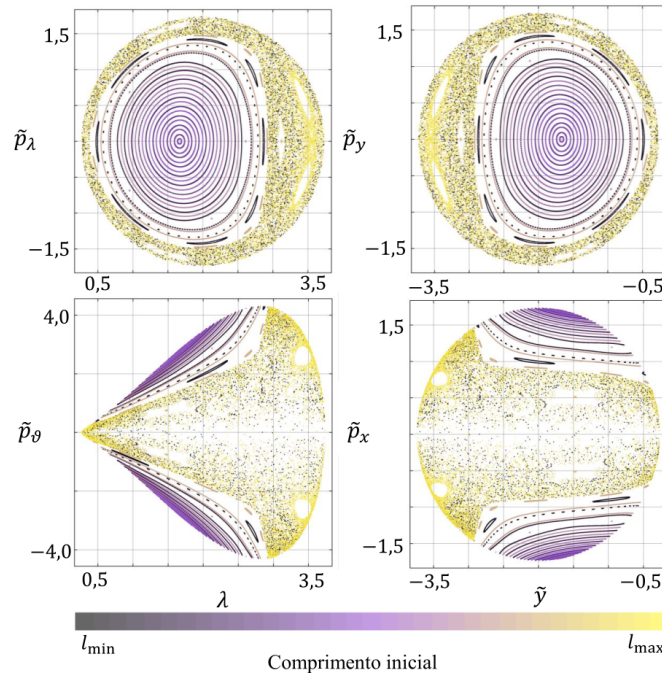


Figura 36 – Realizada a simulação do pêndulo, para $\omega^2 = 1$, variando a posição inicial no intervalo $[l_{\text{min}}, l_{\text{max}}]$, observa-se uma transição ordem $\rightarrow$ caos $\rightarrow$ ordem em sua seção de poincaré.

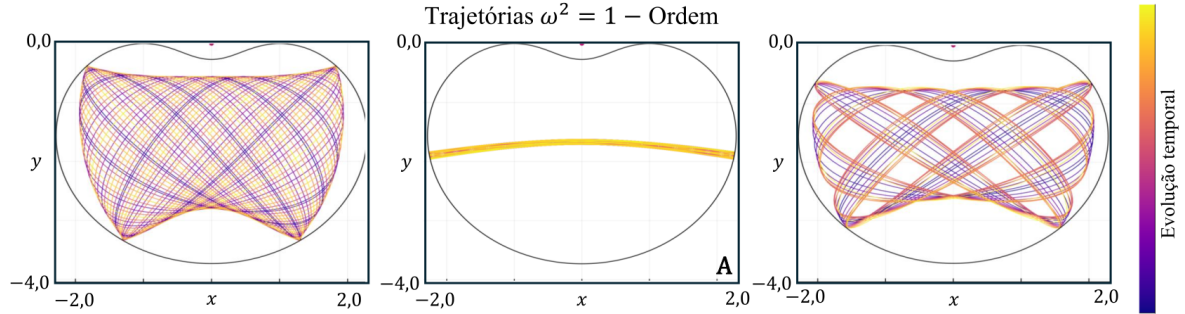


Figura 37 – Trajetórias envolta do modo “colina”

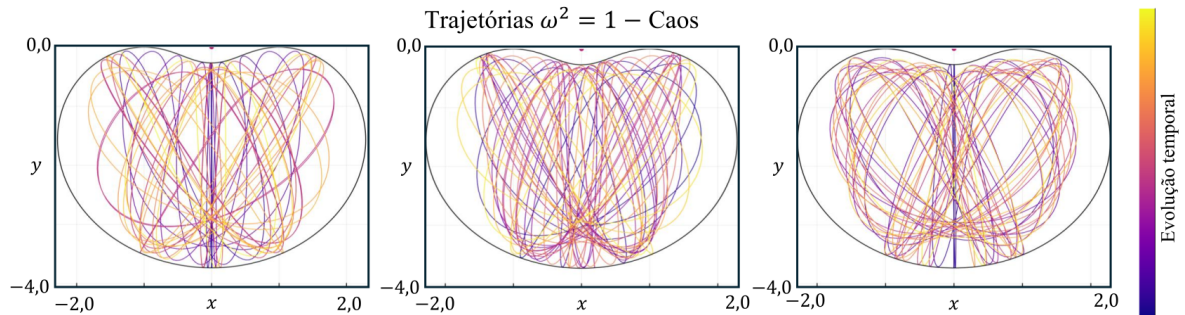


Figura 38 – Trajetórias localizadas no mar caótico apresentado na seção.

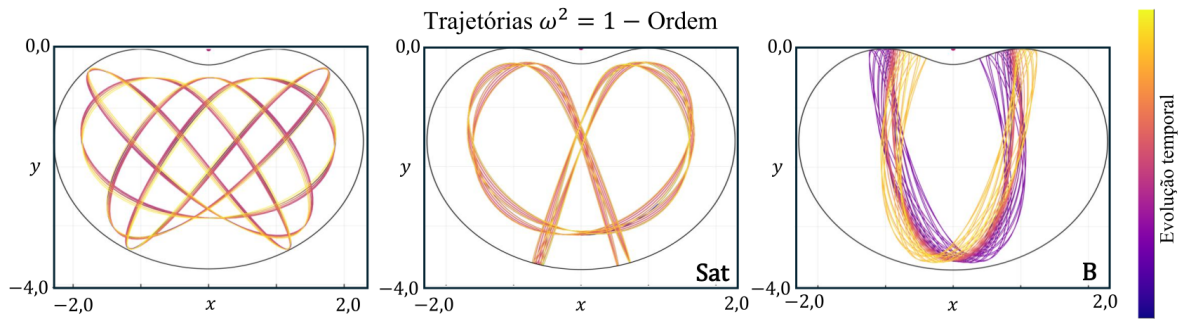


Figura 39 – Trajetória “satélite”, e trajetórias envolta do modo “vale”

Para $\omega^2 = 1,0$ há a presença da estrutura que compõe o mar caótico, agora novamente ficando menos densa no espaço. As trajetórias periódicas consistem dos modos “colina”(Figura 37), “satélites” e “vale” (Figura 39).

Quando $\omega^2 \gg 1$ as trajetórias caóticas começam se tornarem puramente trajetórias quase-periódicas e periódicas, variando entre o comportamento de massa-mola até pêndulo simple e posteriormente retornando ao massa-mola, há trajetórias com as oscilações acopladas, mas não são caóticas.

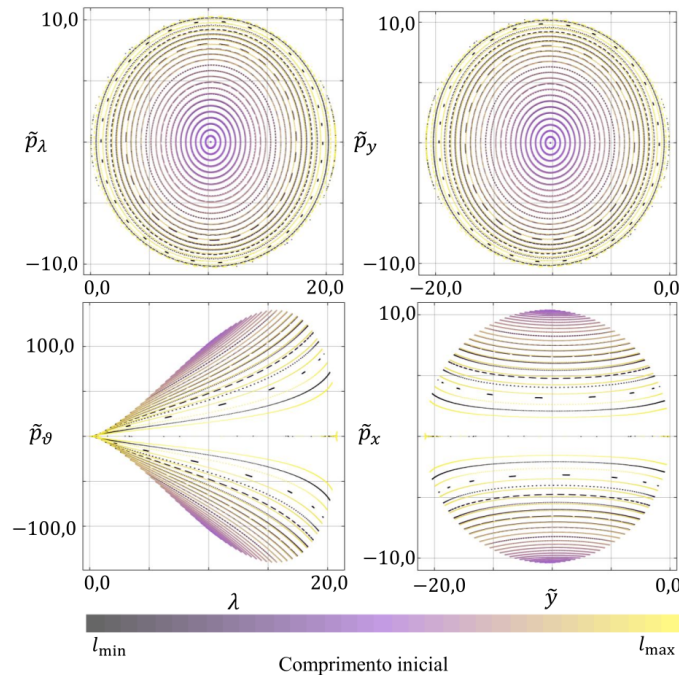


Figura 40 – Realizada a simulação do pêndulo, para $\omega^2 \approx 9,425$, variando a posição inicial no intervalo $[l_{\min}, l_{\max}]$.

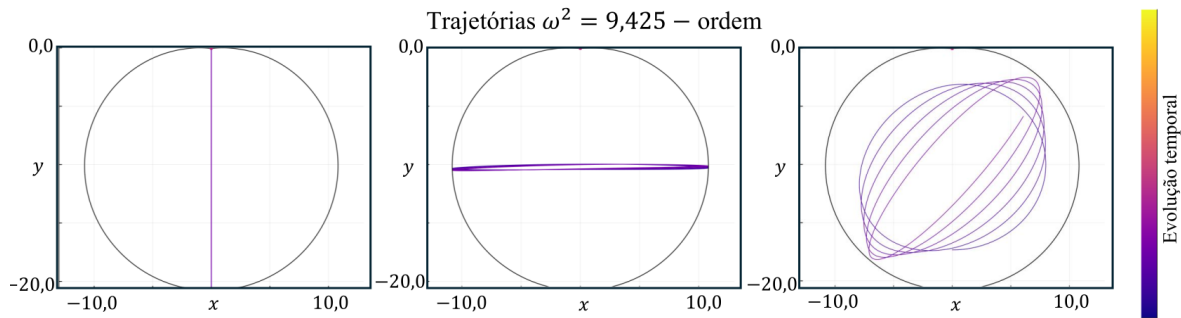


Figura 41 – Trajetórias realizada pelo sistema massa-mola e pêndulo simples, além de um acoplamento não caótico dos dois movimentos.

Para $\omega^2 = 9,425$ não há a presença do mar caótico, as trajetórias periódicas consistem nos movimentos dos sistemas massa-mola e pêndulo simples desacoplados, e no movimento acoplado dos dois sistemas.

É possível observar na análise das seções de Poincaré (Figuras 24, 28, 32, 36, 40) como que cada estrutura vai evoluindo conforme $\omega^2 \rightarrow \infty$ e o termo gravitacional vai dominando o sistema.

APÊNDICE C – DIFERENTES TRAJETÓRIAS EXPERIMENTAIS

Com o aparato experimental feito e com o *software* caputrando os dados, é então realizado a análises das trajetórias apresentadas, antes de realizar movimentos que possuem oscilação angular, foi realizado o sistema massa-mola, para a determinação da constante elástico tanto da mola, quanto do elástico, mas medidas do comprimento natural do sistema para cada material elástico é de $l_{0,mola} = 0,225m$ e $l_{0,elástico} = 0,175m$, o valor da gravidade foi determinada sendo $g = 9,7858486m/s^2$ por [25], e a massa é de $m = 0,022g$.

C.1 UTILIZANDO MOLA

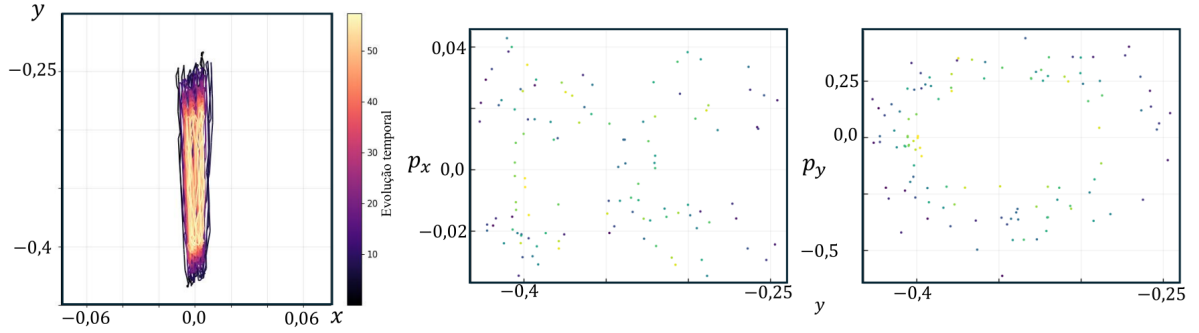


Figura 42 – Trajetória registrada pelo sistema massa-mola e a seção de poincaré obitido.

Utilizando a mola, o valor encontrado para $k \approx 1,49[N/m]$, assim o parâmetro adimensional para o sistema é $\omega^2 \approx 0,644604$; portanto, $\omega^2 \in [0, 1]$ para essa configuração é possível trajetórias caóticas.

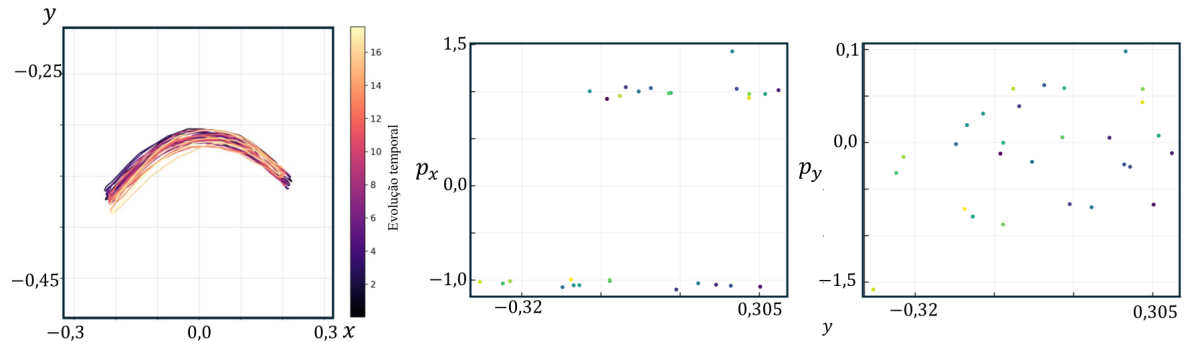


Figura 43 – Trajetória registrada e a seção de poincaré obtida, essa trajetória é caracterizada pelo modo “colina”.

Por questão do tempo, há poucos pontos que cruzam com a superfície de Poincaré, no entanto, na Figura 43 é possível observar um efeito na trajetória que não foi

observado no modelo teórico, por conta de que na realidade, o sistema pêndulo elástico é dissipativo, assim, é encontrado na seção de Poincaré uma maior dispersão nos pontos que deveriam formar um “anel”.

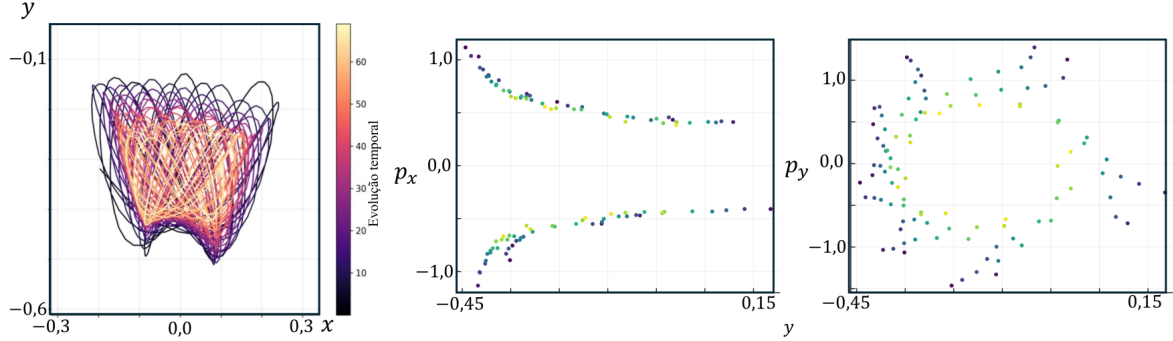


Figura 44 – Trajetória registrada e a seção de poincaré obtida.

Na Figura 44 há uma presença maior de pontos que cruzam a superfície, assim sendo mais visível as estruturas da seção de poincaré, além de observar uma espiração para o centro na seção composta dos eixos $y - p_y$, que indica um atrator, com a trajetória iniciando em um “satélite” até dissipar energia até o modo “colina”.

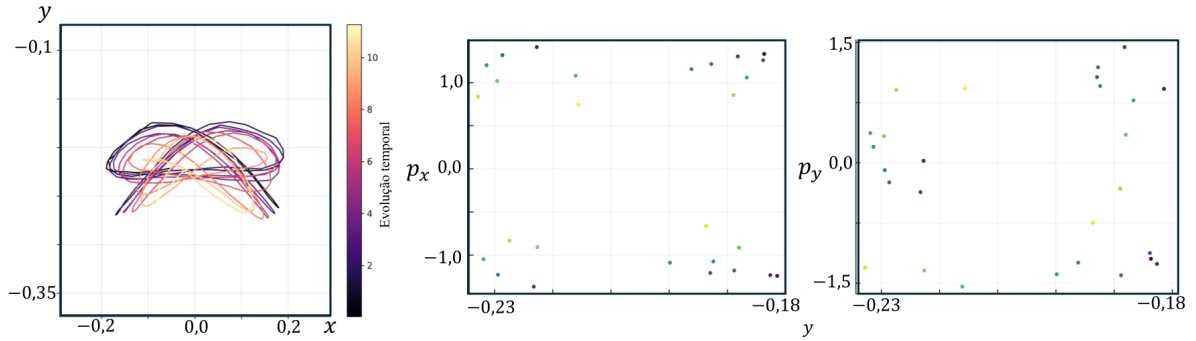


Figura 45 – Trajetória registrada e a seção de poincaré obtida. A trajetória é caracterizada como “satélite” inicialmente.

Já na Figura 45, a seção não tem muitos pontos, no entanto, é possível visualizar melhor o início da trajetória em um “satélite” que vai cair em um atrator com uma maior evolução temporal.

É observadas trajetórias quase-periódicas com leves dissipações de energia, além disso, uma das principais discrepâncias entre o modelo teórico e o experimento, além da questão das dissipações, é a questão de haver troca de planos de oscilações, devido a componentes de forças atuando no sistema que não foram considerados, como um centro de massa desalinhado com o acoplamento com a mola, dissipações de energia no eixo da mola que fazia a mesma rotacionar um certo ângulo a cada oscilação, e até mesmo deformidades na mola que fazia com que as suas forças externas não fossem compensadas.

Uma das primeiras tentativas de evitar a troca de planos, foi utilizar gravações com pouca oscilações enquanto o movimento ainda é no plano original, acontece que isso faz com que se tenha uma menor quantidade de cruzamentos na superfície de poincaré em $x = 0$, fazendo então ter menos pontos, assim, uma imagem menos clara do movimento, no entanto, há coisas interessantes de se observar nas mesmas.

C.2 UTILIZANDO ELÁSTICO

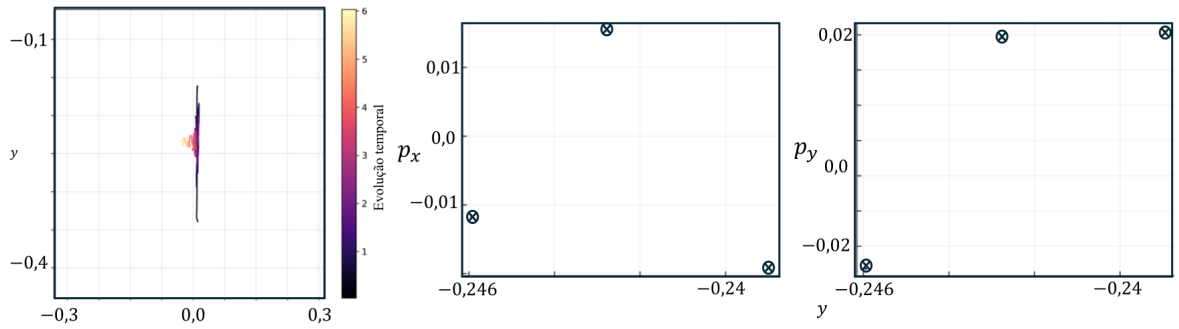


Figura 46 – Trajetória registrada.

Utilizando o elástico, o valor encontrado para $k \approx 2,89N/m$, assim o parametro adimensional para o sistema é $\omega^2 \approx 0,452026$; portanto, $\omega^2 \in [0, 1]$ para essa configuração é possível trajetórias caóticas. Na Figura 46 não há cruzamento com a seção de poincaré, quando a energia esta quase toda dissipada e a massa oscilava em torno de y_{eq} , ela rotaciona, causando uma translação no Tracker, assim $\langle x \rangle$ não define uma superfície muito interessante para esse caso.

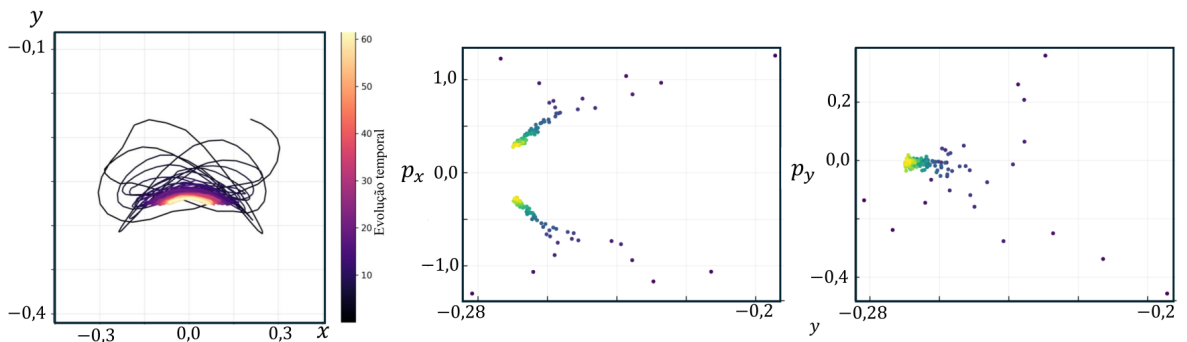


Figura 47 – Trajetória registrada e a seção de poincaré obtida. A trajetória é atraída para um atrator no modo “colina”

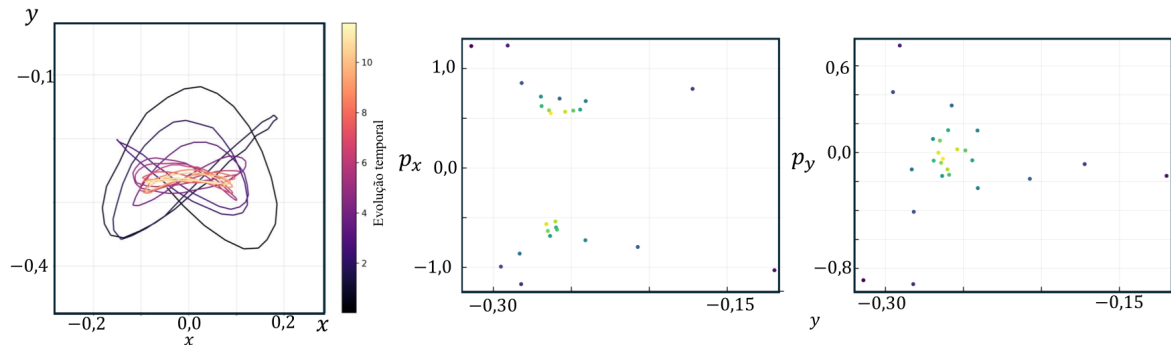


Figura 48 – Trajetória registrada e a seção de poincaré obtida. A trajetória é atraída para um atrator no modo “colina”

Apesar do elástico ter resolvido uma parte das “forças parasitas” que atuam no sistema, ainda há desalinhamentos entre o vínculo da massa com o elástico e o centro de massa que eventualmente causam novamente a troca de planos, além disso, o elástico tem uma dissipação interna muito alta, o que é muito interessante já que com a mola há a impressão que uma trajetória cai em um atrator (vide Figuras 45 e 44), agora é possível observar que a trajetória é atraída para um atrator que é o modo “colina” (vide Figuras 47 e 48).