

ELIAS LEITE MENDONÇA

Teorias duais massivas de *spin-3* em $D=2+1$

ELIAS LEITE MENDONÇA

Teorias duais massivas de *spin-3* em $D=2+1$

Tese a ser apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual
Paulista , para a obtenção do Título de Doutor em
Física na área de partículas e campos.

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá

2012

Mendonça, Elias Leite

M539t

Teorias duais massivas de *spin-3* em $D=2+1$ / Elias Leite Mendonça.

- Guaratinguetá: [s.n.], 2013

85f. : il.

Bibliografia: f. 71 – 75

Tese de doutoradp em Física

Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2013

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

1. Teorias de campos (Física). 2. Campos de calibre (Física).

3. Partículas (Física) I. Título

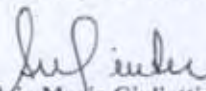
CDU537.8(043)

ELIAS LEITE MENDONÇA

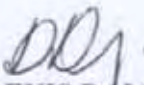
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"DOUTOR EM FÍSICA"

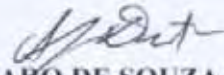
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

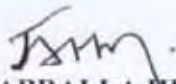
BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA
Unesp-Feg


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF
Unesp-Feg


Prof. Dr. VICTOR OLIVEIRA RIVELLES
IFUSP-USP


Prof. Dr. JOSÉ ABDALLA HELAYEL-NETO
CBPF-RJ

Março de 2013

Este trabalho contou com apoio de:

CAPES e **CNPq** - através do processo 200450/2011-5

Agradeço aos meus pais Zezinho Mendonça e Ana Braga por me fazer feliz, agradeço aos meus irmãos e familiares com quem pude contar nos momentos mais difíceis, com amor agradeço à Jéssica Souza pela alegria de sua convivência e pelo ânimo que me transmite! agradeço à Denis Dalmazi, pela amizade, convivência durante esses dez anos e pelas horas falando de física, por fim agradeço à todos os amigos da UNESP, tem sido de grande prazer conviver com todos!

MENDONÇA, E. L. Teorias duais massivas de *spin-3* em $D=2+1$. 2012, 80f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Resumo

Nessa tese investigaremos as formulações duais que descrevem partículas massivas de spin-3 em $D = 2 + 1$. Faremos isso através da Imersão de Calibre de Noether (*ICN*) e da técnica da ação mestra. Mostraremos que três termos de mistura podem ser utilizados para construir uma ação mestra que então fará a interpolação entre quatro modelos auto-duais de primeira, segunda, terceira e quarta ordem nas derivadas. Um desafio quando tratamos com teorias de spin alto se refere a adição de campos auxiliares que são necessários para evitar a propagação de modos de spin inferior ao desejado. Mostraremos que através das técnicas de dualização é possível determinar as campos auxiliares de forma sistemática e que mesmo com a presença de tais campos os procedimentos de imersão e a técnica da ação mestra funcionam em consonância. Por fim lançamos algumas expectativas sobre a relação entre singletos e dubletos de paridade via procedimento de solda generalizada.

Palavras Chave: Auto-dual, Imersão de Calibre de Noether, ação mestra, spin-3 , Chern-Simons, dualidade.

MENDONÇA, E. L. Massive dual theories of *spin-3* in $D=2+1$. 2012, 80f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Abstract

In this PhD thesis we investigate dual formulations for massive spin-3 particles in $D = 2 + 1$. This is carried out by means of the Noether gauge embedding and the master action technique. We show that three mixing terms can be used in order to interpolate between four self-dual models of first, second, third and fourth order in derivatives. The addition of the necessary auxiliary fields is nontrivial for higher spin theories, the auxiliary fields are needed to avoid the propagation of lower spin modes. We are going to verify that through the dualization techniques it is possible to determine the auxiliary lagrangians in a systematic way. Even in the presence of auxiliary fields the Noether embedment and the master action technique work well. Finally we give some clue on the relationship between parity singlets and parity doublets via generilezed soldering procedure.

Palavras Chave: Self-dual, Noether gauge embedding, master action, spin-3, Chern-Simons, duality.

Sumário

1	Introdução	11
2	Notação e “geometria” para spin-3 em $D = 2 + 1$	16
2.1	Notação	17
2.2	A “geometria” para spin-3	18
3	Os modelos auto-duais de spin-3 e a equivalência via Imersão de Noether	23
3.1	A <i>ICN</i> para os modelos de spin-1 e spin-2	23
3.1.1	Spin-1	23
3.1.2	Spin-2	25
3.2	O modelo auto-dual de primeira ordem	27
3.3	<i>ICN</i> para os modelos de spin-3	32
3.3.1	Do modelo $AD(1)$ para o modelo $AD(2)$	32
3.3.2	Do modelo $AD(2)$ para o modelo $AD(3)$	37
3.3.3	Do modelo $AD(3)$ para o modelo $AD(4)$	40
4	Dualidade via Ação Mestra	44
4.1	Os termos sem conteúdo físico	44
4.1.1	spin-1	44
4.1.2	spin-2	45
4.1.3	spin-3	46
4.2	Ação mestra para spin-1 e spin-2	48

	10
4.3 Ação Mestra interpolando entre $AD(1)$ e $AD(2)$	49
4.4 Ação Mestra interpolando entre $AD(2)$ e $AD(3)$	52
4.5 Ação mestra interpolando entre $AD(3)$ e $AD(4)$	53
5 A relação entre dubletos e singletos de paridade	56
5.1 Dubletos e singletos de paridade de spin-1 e spin-2	57
5.1.1 spin-1	57
5.1.2 spin-2	58
5.2 Dubletos e singletos de paridade de spin-3	62
5.3 Solda dos modelos auto-duais de segunda ordem	64
6 Conclusão	69
A Invariância do termo de Chern-Simons sob (3.82)	77
B Álgebra dos geradores do grupo de Poincarè	79
B.1 spin-1 e spin-2	80
B.2 spin-3	81
C Relação entre as formulações totalmente simétrica e parcialmente simétrica	84

Capítulo 1

Introdução

É uma característica peculiar de espaços-tempo em $D = 2 + 1$ que as teorias de campos de calibre possam ser massivas e sem quebra de simetria local. A massa não nula é devido a um termo do tipo Chern-Simons que porém quebra a paridade. Recentemente no entanto, os autores em [1] demonstraram que a geração de massa para partículas de spin-2 em $D = 2 + 1$, pode ser feita através de uma teoria de campos covariante sob transformações gerais de coordenadas (simetria local) com um termo que preserva paridade. A teoria conhecida como “New massive Gravity” propaga partículas massivas de spin-2 com dois modos propagantes, correspondendo aos spins ± 2 . A questão natural que emerge dessa discussão é a possibilidade de existir outras teorias de campos de calibre vivendo em $D = 2 + 1$ que sejam massivas e sem quebra de paridade. Existiria uma forma sistemática de obtê-las?

Recentemente temos trabalhado com a dualização de teorias de calibre massivas em $D = 2 + 1$. Verificamos que partindo de um modelo auto-dual de primeira ordem nas derivadas (singletos de paridade ¹) para partículas massivas

¹Permita-nos a utilização dessa linguagem. Quando nos referirmos a um único spin $+s$ **ou** $-s$ falaremos em singletos de paridade. Quando falarmos em dubletos de paridade, queremos dizer que determinado modelo descreve dois modos de spin $+s$ e $-s$. Neste sentido o modelo auto dual de spin-1 por exemplo descreve um singlete de paridade $+1$ ou -1 , enquanto o modelo de Proca descreve um dublete de paridade $+1$ e -1 .

de spin-2 é possível através de argumentos de simetria obter uma sequência de quatro modelos auto-duais de primeira, segunda, terceira e quarta ordem nas derivadas [2]. Isso foi feito através da técnica da imersão de calibre de Noether *ICN*. A equivalência quântica entre estes modelos é estabelecida através da técnica da ação mestra [2, 3]. Além disso, generalizando trabalhos anteriores [4, 5, 6] mostramos que é possível através de um método conhecido como solda generalizada unir singletos de paridade com massas distintas e spins $+2$ e -2 em dubletos de paridade. Verificamos que o modelo natural que descreve um dubleto de paridade massivo de spin ± 2 , o modelo de Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli, pode ser obtido através da solda generalizada de dois modelos auto-duais de segunda ordem nas derivadas [7]. Surpreendentemente verificamos que a versão linear da “New Massive Gravity” pode ser obtida ou da solda generalizada de dois modelos auto-duais de terceira ordem nas derivadas [8], ou da solda generalizada dos recém propostos modelos auto-duais de quarta ordem nas derivadas de [2, 9], que possuem uma versão não linear contendo o termo de Chern-Simons gravitacional e termos quadráticos em curvatura.

Os resultados obtidos no contexto de teorias de spin-2 são análogos àqueles que conhecíamos para partículas massivas de spin-1. Seria interessante investigar a possibilidade de fazer o mesmo para partículas massivas de spin > 2 . Nesta tese investigaremos o caso mais simples dentre aqueles de spin alto, as teorias massivas de spin-3.

A tarefa de propor uma teoria livre que descreva partículas de spin alto data de 1936 por Dirac [10] e 1939 por Fierz e Pauli [11]. As premissas básicas que deveriam ser obedecidas eram a invariância de Poincarè e a positividade da energia. Esta última, quando lidamos com spins altos merece uma atenção especial haja visto que na tentativa de descrever uma partícula de spin alto, depara-se com modos de propagação extras com spins mais baixos do que aqueles que se propõe descrever. Quando estes estados possuem energia negativa temos então uma patologia na teoria, ou seja os modos propagantes são fantasmas. Ocorreu então uma preocupação de se estabelecer uma maneira sistemática de

cuidar do espectro dos modelos de spin alto. As primeiras abordagens motivadas nessa direção partiram de Wigner e Bargman [12, 13] que analisaram o problema sob a perspectiva das representações unitárias do grupo de Poincarè, bem como das equações de onda relativísticas para spins altos. Em resumo a conclusão destes trabalhos é um tanto intrigante. O requisito que garante a positividade da energia está de certa forma codificado em algumas condições chamadas de condições de Fierz-Pauli (*FP*). Para uma partícula de spin- s (inteiro) temos as condições de *FP*:

$$(\square - m^2)\phi_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_s} = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial^{\mu_1}\phi_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_s} = 0, \quad (1.2)$$

$$\eta^{\mu_1 \mu_2}\phi_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_s} = 0, \quad (1.3)$$

em que $\phi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s}$ é um campo totalmente simétrico de posto- s . Estas condições devem ser derivadas a partir das equações de movimento. Além disso em $D = 2 + 1$, afim de garantir o spin associado à partícula que estamos descrevendo a seguinte condição deve ser verificada.

$$(P \cdot J_s - sm)_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s} \phi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s} = 0. \quad (1.4)$$

Onde o produto $P \cdot J_s$ faz o papel do vetor de Pauli-Lubanski da teoria de campos. Com $J_s = L + S$ sendo L o momento angular orbital e S o Spin ². Com tais pré requisitos, pode-se dizer que uma determinada formulação lagrangiana é capaz de descrever uma partícula massiva de spin- s .

O primeiro modelo lagrangiano de spin- s inteiro arbitrário, satisfazendo essas condições em $D = 3 + 1$ foi proposto em 1974 por Singh e Hagen ³ [15]. Tal modelo contém em sua formulação campos auxiliares de spins mais baixos que retiram os graus de liberdade espúrios. Em seguida Fronsdal [16] explorou o limite não massivo bem como a extensão para partículas massivas de spin semi inteiro. O limite não massivo traz a simplificação de que todos os campos auxiliares podem

²Mais detalhes serão apresentados no apêndice-B

³Para $s = 2, 3, 4$ já havia um modelo lagrangiano desde 1967 sugerido por S.J Chang [14]

ser desacoplados com exceção daqueles com spin $s-2$. Os campos restantes podem então ser combinados em um campo totalmente simétrico sujeito a uma condição de duplo traço nulo $\eta^{\mu_1\mu_2}\eta^{\mu_3\mu_4}\phi_{\mu_1\dots\mu_s} = 0$ que se aplica evidentemente para $s \geq 4$. Em geral as teorias relativísticas propostas por esses autores são teorias livres e podem ser formuladas num espaço-tempo de Minkowski de dimensão arbitrária.

A formulação geométrica destes modelos foi pela primeira vez abordada por de Wit e Freedman em [17], partindo de uma generalização para spin arbitrário s dos símbolos de Christoffel. Uma visão de certa forma mais simples foi oferecida por [18] para o caso específico de $s = 3$ em $D = 2 + 1$. Nesses trabalhos a analogia com o que sabemos para partículas massivas de spin-2 é estabelecida. São definidos objetos geométricos como os tensores de Riemann, Weyl e Einstein (linearizados), que permitiram por sua vez a elaboração de uma teoria “topologicamente” massiva para spin-3 análoga à gravitação topologicamente massiva (spin-2) de [8] porém num mundo planar. É importante avisar o leitor que aqui não trataremos do problema de interação para partículas de spin alto que tem sido tratado em vários trabalhos na literatura [19, 20, 21, 22].

Esta tese será dividida em cinco capítulos. Começaremos no capítulo dois oferecendo uma introdução às teorias de spin-3. Faremos isso primeiramente definindo uma notação que será comum no decorrer de todo texto e uma relação entre as formulações não simétrica e simétrica utilizadas na descrição de partículas massivas de spin-3 (singlete de paridade de spins $+3$ ou -3). Em seguida definiremos alguns objetos que constituem a “geometria” das teorias de spin-3. No capítulo três apresentaremos alguns resultados para a imersão de calibre de Noether no contexto de teorias de spin-1 e spin-2. Em seguida o modelo auto-dual de primeira ordem nas derivadas para partículas massivas de spin-3 proposto por Aragone e Khoudeir [23], e que nos servirá como ponto de partida para o desenvolver de nosso trabalho será apresentado e mostraremos através das equações de movimento que este modelo de fato descreve uma partícula massiva de spin-3. Partindo do modelo auto-dual de primeira ordem para partículas massivas de spin-3 em $D = 2 + 1$ [23] mostramos com argumentos de simetria que é possível

obter mais três modelos auto-duais, de segunda [24], terceira [18], e quarta ordem nas derivadas [26]. Este último pela primeira vez é apresentado em sua versão completa, levando em conta campos auxiliares para a remoção de graus de liberdade espúrios. No capítulo quatro o método da ação mestra é utilizado. Verificamos uma perfeita consonância entre este método e os resultados obtidos via Imersão de calibre de Noether no capítulo quatro. O método da ação mestra estabelece por sua vez uma equivalência em nível quântico entre os modelos auto-duais. Em particular obtém-se um mapeamento dual entre os modelos auto-duais através da equivalência entre funções de correlação. No capítulo cinco, a relação entre singletos e dubletos de paridade será então estudada. Este capítulo no entanto traz apenas resultados preliminares haja visto que o entendimento completo do papel dos campos auxiliares quando fazemos a solda ainda não está claro para nós. Por fim deixamos algumas conclusões e perspectivas no campo de teorias de spin alto, quando analisadas sob a ótica de métodos de dualização.

Capítulo 2

Notação e “geometria” para spin-3 em $D = 2 + 1$

Neste capítulo vamos falar um pouco sobre alguns aspectos das teorias de spin-3 em $D = 2 + 1$ dimensões em linhas gerais. Como sabemos, as teorias de spin-2 estudadas no nível não linear (quando isso é possível), possuem uma estrutura geométrica que envolve o tensor de curvatura de Riemann, bem como outros objetos geométricos. Neste capítulo, faremos uma breve revisão sobre a geometria de teorias de spin-3 através da referência [18], onde os autores propuseram objetos geométricos para spin-3 análogos àqueles de spin-2 porém linearizados. Nestes trabalhos o campo que descreve um modo de spin-3 é dado por um tensor simétrico de posto-3. No entanto uma formulação em termos de campos parcialmente simétricos também é possível vide [27]. As referências [23, 24] onde os autores utilizam tal formulação nos servirão como ponto de partida. Um desafio é então conectar as formulações simétrica e parcialmente simétrica. A notação que utilizaremos no decorrer de toda a tese será apresentada logo na entrada deste capítulo, isso é o que veremos a seguir.

2.1 Notação

A métrica $\eta_{\mu\nu}$ utilizada nesta tese será $(-, +, +)$. De forma recorrente usaremos algumas abreviações, por exemplo a contração:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha = E^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde $\epsilon^{012} = +1$ e $\epsilon_{012} = -1$. Quando ocorre o produto de dois E 's usaremos frequentemente os resultados

$$E^{\mu\nu} E_\nu{}^\alpha = \square \theta^{\mu\alpha}, \quad (2.2)$$

$$E^{\mu\nu} E^{\alpha\beta} = \square (\theta^{\nu\alpha} \theta^{\mu\beta} - \theta^{\mu\alpha} \theta^{\nu\beta}). \quad (2.3)$$

Onde temos o projetor $\theta_{\mu\nu}$:

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad (2.4)$$

logo, $\theta_{\mu\nu} \theta^\nu{}_\alpha = \theta_{\mu\alpha}$. Por vezes aparecerão nos cálculos simetrizações e antissimetizações. As simetrizações irão obedecer:

$$A_{(\mu} B_{\nu)} = \frac{1}{2} (A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu), \quad (2.5)$$

enquanto as antissimetizações são dadas por:

$$A_{[\mu} B_{\nu]} = \frac{1}{2} (A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu). \quad (2.6)$$

Os estados de spin-3 serão descritos no decorrer desta tese por duas formulações: uma simétrica e outra parcialmente simétrica. Na formulação simétrica usaremos tensores totalmente simétricos com traço não nulo e de posto-3, isto é $\phi_{\mu\nu\lambda}$, com $\phi_\mu = \eta^{\beta\gamma} \phi_{\mu\beta\gamma}$. Note que não utilizamos parênteses nesse caso para explicitar a simetria do tensor. Na formulação parcialmente simétrica usaremos o tensor $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$, cujas propriedades estão relacionadas com o fato da simetria de calibre para spin-3 ser $\delta_\xi \phi_{\mu\nu\lambda} = \partial_{(\mu} \xi_{\nu\lambda)}$ com $\xi = \eta^{\mu\nu} \xi_{\mu\nu} = 0$, generalizando $\delta_\xi f_{\mu\nu} = \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}$ ($s = 2$)¹ e $\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha$ ($s = 1$). Para fazer a passagem de uma

¹Aqui $f_{\mu\nu}$ é a perturbação da métrica de Minkowski, isto é $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}$, portanto simétrica em seus índices, ou seja não usamos novamente parênteses para explicitar a simetria do tensor.

notação parcialmente simétrica $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ para uma notação totalmente simétrica $\phi_{\mu\beta\gamma}$ faremos uso da seguinte mudança de variáveis, vide [27]:

$$\omega_{\mu(\beta\gamma)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\phi_{\mu\beta\gamma} + \frac{1}{4}(\eta_{\lambda\beta}\phi_{\gamma\lambda} + \eta_{\lambda\gamma}\phi_{\beta\lambda}) - \frac{1}{2}\eta_{\beta\gamma}\phi_{\mu\lambda} \right] + (\epsilon_{\mu\nu\beta}\Lambda^\nu{}_\gamma + \epsilon_{\mu\nu\gamma}\Lambda^\nu{}_\beta), \quad (2.7)$$

com $\Lambda_{\mu\nu}(x) = \Lambda_{\nu\mu}(x)$ e $\eta^{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu} = \Lambda = 0$. Mesmo que tivéssemos $\Lambda \neq 0$, (2.7) é invariante por uma transformação de Weyl, ou seja $\delta_\varphi \Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\varphi$. Os fatores numéricos em (2.7) são obtidos de forma a ajustar nossos resultados com os resultados de [18]. Em $D = 2 + 1$, $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ contém 15 componentes independentes. Essa contagem pode ser verificada facilmente notando que este tensor possui em sua definição o número de componentes independentes de um vetor, vezes o número de componentes independentes de um tensor simétrico e sem traço, o que em D dimensões nos deixa com:

$$D \left[\frac{D(D+1)}{2} - 1 \right]. \quad (2.8)$$

Do lado direito de (2.7), temos o número de componentes independentes de um tensor simétrico de posto-3 $\phi_{\mu\nu\lambda}$:

$$\frac{D(D+1)(D+2)}{6}, \quad (2.9)$$

o que em $D = 3$ contribui com 10 componentes, somado ao número de componentes independentes de um tensor simétrico e sem traço de posto-2 $\Lambda_{\mu\nu}$, isto é: $D(D+1)/2 - 1$ o que em $D = 3$ nos dá 5 componentes independentes. Vemos então que a contagem de componentes independentes coincide dos dois lados.

2.2 A “geometria” para spin-3

Vamos agora apresentar algumas definições básicas a respeito da geometria das teorias de spin-3. Vejamos por analogia com o que conhecemos para teorias de calibre de spin-1 e spin-2 como construir a “geometria” das teorias de spin-3. Colocamos geometria entre aspas, pois a analogia que se consegue é um tanto quanto restrita, já que a motivação para se construir os tensores de Riemann, Ricci e Einstein para teorias de spin-2, possui um forte caráter geométrico,

haja visto que são advindas da definição de transporte paralelo, de onde naturalmente define-se a conexão afim ou símbolo de Christoffel. Por outro lado as conexões na teoria linearizada podem ser entendidas como, objetos que sob transformações de coordenadas se transformam de certa forma como o gradiente do parâmetro da transformação. Vamos então estabelecer algumas analogias entre as geometrias das teorias de spin-1, 2 e 3. Começaremos justamente estudando os análogos do símbolo de Christoffel, para em seguida fazer outras definições.

Para teorias de spin-1 diríamos que a conexão é o próprio campo de calibre A_μ , haja visto que sob uma transformação de calibre $\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha$ ou seja o campo varia como gradiente do parâmetro da transformação. No caso de teorias de spin-2 (linearizadas) a transformação de calibre é dada por: $\delta_\xi f_{\mu\nu} = \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}$. A conexão, que se transforma como o gradiente duplo de ξ_ν , é dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \partial_{(\mu} f_{\nu)}^\alpha - \partial^\alpha f_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

de modo que $\delta_\xi \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \partial_\nu \xi^\alpha$.

Vejamos qual é a transformação de calibre para teorias spin-3. Neste caso, como temos um campo totalmente simétrico $\phi_{\mu\nu\alpha}$ a transformação é dada por: $\delta_\Lambda \phi_{\mu\nu\alpha} = \partial_{(\mu} \Lambda_{\nu\alpha)}$ onde $\Lambda_{\nu\alpha}$ é simétrico e sem traço. As simetrias locais são necessárias para retirar os modos de spin inferior (potencialmente fantasmas). No caso de spin-3, se $\Lambda_{\mu\nu}$ possuir traço o número de graus de liberdade retirados será excessivo, vide [15]. Temos agora duas definições de conexão de spin, sendo que ambas se transformam como o gradiente do parâmetro $\Lambda_{\mu\nu}$. A primeira delas é de primeira ordem nas derivadas e por construção semelhante à conexão afim para spin-2 dada em (2.10), ou seja:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^\alpha \equiv \partial_{(\mu} \phi_{\nu\lambda)}^\alpha - \partial^\alpha \phi_{\mu\nu\lambda}. \quad (2.11)$$

Desta definição vemos que a transformação de $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^\alpha$ vai com o gradiente do parâmetro $\Lambda_{\mu\nu}$, isto é $\delta_\Lambda \Gamma_{\mu\nu\lambda}^\alpha = \partial_{(\mu} \partial_\nu \Lambda_{\lambda)}^\alpha$. A outra definição de conexão afim é de segunda ordem nas derivadas e dada em função da primeira definição (2.11),

ou seja:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta} &\equiv \partial_{(\mu}\Gamma_{\nu\lambda)}^{\alpha\beta} - 2\partial^\beta\Gamma_{\mu\nu\lambda}^\alpha \\ &\equiv 2\partial_{(\mu}\partial_{\nu}\phi_{\lambda)}^{\alpha\beta} - \partial_{(\mu}\partial^{(\alpha}\phi_{\nu\lambda)}^{\beta)} + 2\partial^\alpha\partial^\beta\phi_{\mu\nu\lambda}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

O símbolo $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta}$ é separadamente simétrico nos conjuntos $(\alpha\beta)$ e $(\mu\nu\lambda)$. Neste caso porém a conexão afim se transforma como um gradiente triplo do parâmetro da transformação geral de coordenadas, ou seja:

$$\delta_\Lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta} = \partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda^{\alpha\beta}.\quad (2.13)$$

Percebemos que no caso de spin-1 a conexão, sob uma transformação geral de coordenadas, vai com uma derivada do parâmetro da transformação. No caso de spin-2 esta vai com duas derivadas do parâmetro. Para spin-3 temos duas definições de conexão: a primeira dada por (2.11) varia com duas derivadas do parâmetro e a segunda, dada por (2.12) com três derivadas. Então, de certa forma a segunda definição é a mais natural dentre as duas. Abaixo veremos como podem ser construídos os tensores de Ricci e Einstein.

As equações de Einstein (partículas de spin-2), derivadas a partir da ação de Einstein-Hilbert $S = \int d^Dx \sqrt{-g}R$ são colocadas da seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.\quad (2.14)$$

O tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$) está escrito em termos do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura R , sendo que:

$$R = g^{\beta\delta}R_{\beta\delta},\quad (2.15)$$

onde:

$$R_{\beta\delta} = \partial_\alpha\Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha\Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\mu\delta}^\alpha\Gamma_{\beta\alpha}^\mu.\quad (2.16)$$

Com a conexão de spin $\Gamma_{\beta\alpha}^\mu$ dada em (2.10). Estes objetos derivam de um tensor mais geral chamado de tensor de curvatura de Riemann como veremos mais tarde. Para a definição dos tensores de Ricci e Einstein para spin-3, a analogia que pode

ser feita é a seguinte: as equações de movimento das partículas livres (sempre de segunda ordem nas derivadas) são sempre proporcionais ao tensor de Ricci, como vimos em (2.14). Desta forma, diríamos que para spin-1 o tensor de Ricci consiste da própria equação de movimento derivada a partir da ação de Maxwell, ou seja $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ com $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Sendo assim, pode-se propor que o tensor de Ricci para spin-3 seja uma generalização direta do tensor dado em (2.16), usando para isso a segunda definição da conexão de spin para spin-3 (de segunda ordem nas derivadas) dada em (2.12). Isso nos leva à:

$$R_{\mu\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\mu\nu\lambda}^\alpha = \square\phi_{\mu\nu\lambda} - \partial_{(\mu}\partial_\alpha\phi_{\nu\lambda)}^\alpha + \partial_{(\mu}\partial_\nu\phi_{\lambda)}^\alpha. \quad (2.17)$$

Aplicando o traço $\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu\lambda}$ na expressão acima, obteremos o equivalente ao escalar de curvatura de Riemann, o qual por sua vez é na realidade um vetor dado por:

$$R_\lambda \equiv 2 \left[\square\phi_\lambda - \partial_\alpha\partial_\beta\phi_{\lambda}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\alpha\phi_\alpha \right]. \quad (2.18)$$

Logo, pode se introduzir um tensor de Einstein definido em termos do tensor de Ricci e seu traço dado pelas expressões (2.17) e (2.18).

$$G_{\mu\nu\lambda} \equiv R_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{(\mu\nu}R_{\lambda)}. \quad (2.19)$$

De fato, a lagrangiana de [15] que descreve partículas de spin-3 sem massa tem como equações de movimento:

$$G_{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (2.20)$$

Basicamente o tensor de curvatura de Riemann consiste de um rotacional aplicado sobre o campo fundamental. Desta forma para spin-1, uma vez que o campo fundamental é A_μ com $\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha$ o tensor de curvatura (de primeira ordem nas derivadas) é dado pelo rotacional invariante $F_{\mu\nu}$. No caso de spin-2 (linearizado) temos o campo fundamental simétrico $f_{\mu\nu}$ que se transforma como $\delta_\xi f_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)}$. Não existe uma combinação de primeira ordem $A\partial_\alpha f_{\mu\nu} + B\partial_\mu f_{\nu\alpha} + \partial_\nu f_{\mu\alpha}$ que seja invariante por $\delta_\xi f_{\mu\nu}$. Portanto o “rotacional” do campo fundamental tem que ser de segunda ordem. Agora o tensor de

Riemann linearizado é dado por:

$$R_{\gamma\rho\lambda\xi}^L(f) = \partial_\gamma\partial_\rho f_{\lambda\xi} - \partial_\xi\partial_\rho f_{\lambda\gamma} + \partial_\lambda\partial_\xi f_{\gamma\rho} - \partial_\rho\partial_\xi f_{\lambda\gamma}. \quad (2.21)$$

O qual é invariante por transformações gerais de coordenadas. Analogamente o “rotacional” do campo fundamental $\phi_{\mu\nu\lambda}$ que é invariante por transformações gerais de coordenadas $\delta_\xi\phi_{\mu\nu\lambda} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu\lambda)}$ define então o tensor de Riemann de terceira ordem nas derivadas:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\alpha\beta\gamma}(\phi) &\equiv \partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\phi_{\mu\nu\lambda} - \partial_\mu\partial_\beta\partial_\gamma\phi_{\alpha\nu\lambda} \\ &- \partial_\alpha\partial_\nu\partial_\gamma\phi_{\mu\beta\lambda} + \partial_\mu\partial_\nu\partial_\gamma\phi_{\alpha\beta\lambda} \\ &- \partial_\alpha\partial_\beta\partial_\lambda\phi_{\mu\nu\gamma} + \partial_\mu\partial_\beta\partial_\lambda\phi_{\alpha\nu\gamma} \\ &+ \partial_\alpha\partial_\nu\partial_\lambda\phi_{\mu\beta\gamma} - \partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\phi_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

As simetrias nos índices desse tensor são generalizações das simetrias do tensor de Riemann para spin-2. Ou seja o tensor é antissimétrico em cada par $[\mu\nu]$, $[\lambda\alpha]$ e $[\beta\gamma]$ e simétrico com respeito a troca dos pares. Ou seja, de spin-1 até spin-3 teríamos $F_{\mu\nu}$, $R_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$ e $R_{[\mu\nu][\alpha\beta][\gamma\lambda]}$.

As definições que foram feitas aqui, a partir de [18], são como dissemos bastante restritas. As definições dos tensores de curvatura de Riemann, Ricci e símbolos de Christoffel segundo a relatividade geral são provenientes de uma descrição verdadeiramente geométrica do espaço tempo. Para spins 1 e 3, do nosso ponto de vista as analogias são de certa forma adaptações que seguem alguma lógica.

Capítulo 3

Os modelos auto-duais de spin-3 e a equivalência via Imersão de Noether

Neste capítulo apresentamos o método de Imersão de Calibre de Noether (*ICN*), tal método consiste basicamente em conferir simetria de calibre à teorias que não são invariantes. Para motivar nosso estudo feito para modelos auto-duais de singletos de paridade de spin-3, vamos fazer uma breve introdução falando sobre alguns resultados conhecidos para spin-1, bem como alguns resultados para spin-2 que obtivemos.

3.1 A *ICN* para os modelos de spin-1 e spin-2

3.1.1 Spin-1

A Lagrangiana que descreve um singlete de paridade de spin-1 em $D = 2 + 1$ é dada pelo modelo auto-dual proposto por [39]:

$$S_{AD}(f^\mu, m) = \int d^3x \left(\frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} f_\alpha \partial_\beta f_\gamma \right), \quad (3.1)$$

composto por um termo de Proca e um termo de Chern-Simons (CS). Sua equação de movimento é dada por

$$f^\nu - \frac{1}{m} \epsilon^{\nu\beta\gamma} \partial_\beta f_\gamma = 0. \quad (3.2)$$

Os modelos auto-duais $\mathcal{L}_{AD}(f^\mu, m)$ e $\mathcal{L}_{AD}(f^\mu, -m)$ descrevem separadamente singletos de paridade $+1$ e -1 . No entanto devido a presença do termo de Proca, ambos não são invariantes pela transformação de calibre $U(1)$, $\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha$. Existem diferentes formas de conferir simetria de calibre a teorias que a não possuem. Um procedimento através do qual isso é possível é conhecido como Imersão de Calibre de Noether ICN , e foi explorado pelos autores de [4] no contexto de teorias de spin-1. Vamos demonstrar o funcionamento deste método diretamente quando falarmos mais a frente do caso de spin-3. Por hora, é suficiente dizer que fazendo a imersão da simetria de calibre $U(1)$ vamos obter uma teoria invariante de calibre e de segunda ordem nas derivadas, tal teoria é chamada de Maxwell Chern-Simons [8]:

$$S_{MCS} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha \right). \quad (3.3)$$

Das equações de movimento derivadas do modelo MCS conclui-se que:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m \epsilon^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = 0. \quad (3.4)$$

No entanto, para uma comparação entre as equações de movimento dos modelos MCS e AD , é interessante escrever essa equação, em termos do que chamamos de forma dual do tensor $F^{\mu\nu}$.

$$F^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta, \quad (3.5)$$

de onde vem naturalmente a identidade de Bianchi:

$$\partial_\mu F^\mu = 0. \quad (3.6)$$

Além disso, invertendo a relação (3.5) e substituindo em (3.4), ficamos com

$$-\epsilon^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha F_\beta + m F^\nu = 0. \quad (3.7)$$

vemos então, vide (3.2), que os modelos MCS e AD descrevem a mesma física classicamente, haja visto que a parte invariante de calibre das equações de movimento do modelo MCS corresponde às equações de movimento do modelo AD .

3.1.2 Spin-2

Vamos usar uma notação parecida com a formulação em termos de formas diferenciais, que utilizamos em [3], e que será usada novamente quando estivermos trabalhando com teorias descrevendo partículas massivas de spin-3. Nessa notação temos o seguinte dicionário:

$$\int (f^2)_{FP} \equiv \int d^3x (f^2 - f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}), \quad (3.8)$$

$$\int f \cdot df \equiv \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} f_{\mu\beta} \partial_\nu f_\alpha^\beta, \quad (3.9)$$

$$\int f \cdot d\Omega(f) \equiv \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} f_{\mu\beta} \partial_\nu \Omega_\alpha^\beta(f). \quad (3.10)$$

Onde $f_{\mu\nu}$ é um tensor de posto-2 arbitrário, com $f = \eta^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$. $\Omega_\mu{}^\nu(f)$ é uma combinação de derivadas dos campos dada por :

$$\Omega_\mu{}^\nu(f) = \epsilon^{\nu\beta\gamma} [\partial_\mu f_{\gamma\beta} - \partial_\beta (f_{\gamma\mu} + f_{\mu\gamma})]. \quad (3.11)$$

A lagrangiana que descreve um singlete de paridade +2 massivo em $D = 2 + 1$ foi construída em completa analogia com o modelo auto-dual de spin-1, pelos autores em [7], ela é dada por ¹:

$$S_{AD1}^{(2)} = \int \left[\frac{m}{2} f \cdot df + \frac{m^2}{2} (f^2)_{FP} \right]. \quad (3.12)$$

Em [2] mostramos que através da técnica da ICN é possível de forma sistemática obter uma sequência de quatro modelos auto-duais impondo sucessivamente simetrias de calibre. A primeira simetria imposta,

$$\delta_\xi f_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu, \quad (3.13)$$

¹ $S_{ADp}^{(s)}$ significa que temos um modelo auto-dual de ordem “ p ” em derivadas e de spin- s

nos leva do modelo de primeira ordem (3.12) para um modelo auto-dual de segunda ordem [7, 43], dado pela soma da ação linearizada ($e_{\mu a} = \eta_{\mu a} + f_{\mu a}$) de EH com um termo de Chern-Simons de primeira ordem.

$$S_{AD2}^{(2)} = \int \left[-\frac{1}{4} f \cdot d\Omega(f) - \frac{m}{2} f \cdot df \right]. \quad (3.14)$$

Verificamos então que o termo de Einstein-Hilbert, que só depende da combinação simétrica $f_{(\mu\nu)}$ possui uma simetria de calibre que o termo de Chern-Simons de primeira ordem não possui, a simetria é dada por:

$$\delta_\Lambda f_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} \Lambda^\alpha. \quad (3.15)$$

Dessa forma é natural fazer novamente a imersão desta simetria através da técnica de *ICN*. O resultado obtido é uma ação de terceira ordem nas derivadas equivalente ao truncamento quadrático nas flutuações ($e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}$) do *dreinbein* da gravidade topologicamente massiva de [8].

$$\begin{aligned} S_{AD2}^{(3)} &= \int d^3x \left[\frac{1}{4} f \cdot d\Omega(f) + \frac{1}{8m} \Omega(f) \cdot d\Omega(f) \right] \\ &= \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} R - \frac{1}{8m} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \left(\partial_\nu \Gamma_{\rho\alpha}^\gamma + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\delta}^\gamma \Gamma_{\alpha\rho}^\delta \right) \right]_{ff}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

O subscrito ff refere-se ao fato de que temos a teoria linearizada. Ocorre neste ponto uma mudança da característica tensorial dos campos envolvidos. No começo, os campos eram não simétricos, porém, como ambos os termos de (3.16) são invariantes sob (3.15) a teoria (3.16) só depende efetivamente da parte simétrica $f_{(\mu\nu)}$. Pode-se pensar que a maneira natural de descrever os modos de spin-2 seria através de campos simétricos desde o princípio, ao invés de campos não simétricos. No entanto o autor em [31] deixa claro que a parte antissimétrica dos campos $f_{[\mu\nu]}$, atuando como se fosse um multiplicador de Lagrange, é necessária para a eliminação de graus de liberdade espúrios de spin-1 quando trabalhamos com um formalismo de primeira ordem como em (3.12). Da mesma forma que o traço f é responsável pela eliminação do modo de spin-0.

Partindo do modelo auto-dual de terceira ordem nas derivadas dado por (3.16) fizemos em [2] a imersão de uma simetria de calibre do tipo Weyl, dada

por:

$$\delta_\eta f_{\mu\nu} = \phi \eta_{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

usando do fato de que o termo de Chern-Simons de terceira ordem é invariante sob tal transformação enquanto o termo de Einstein-Hilbert não é. Isso nos levou, vide [2], a um novo modelo auto-dual de quarta ordem nas derivadas dado pela soma de um termo de Chern-Simons de terceira ordem e um termo de quarta ordem proposto em [1] para compor o que aqueles autores chamaram de “New Massive Gravity” *NMG* em $D = 2 + 1$. O modelo auto-dual é então dado por:

$$\begin{aligned} S_{AD2}^{(4)} &= \int \left[-\frac{1}{4m^2} \Omega(f) \cdot d\Omega(\Omega(f)) - \frac{1}{8m} \Omega(f) \cdot d\Omega(f) \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2m^2} \left(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) + \frac{1}{8m^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \left(\partial_\nu \Gamma_{\rho\alpha}^\gamma + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\delta}^\gamma \Gamma_{\alpha\rho}^\delta \right) \right]_{ff}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

O novo modelo auto-dual de quarta ordem é por sua vez invariante por todas as simetrias de calibre anteriores, isto é por (3.13, 3.15, 3.17). Desde que não temos mais simetrias para ser impostas, e ambos os termos da ação (3.18), são invariantes pelo mesmo conjunto de simetrias, concluímos que a cadeia de modelos descrevendo singletos de spin-2 massivos termina no modelo de quarta ordem. Em [2] chamamos a versão completa (não linear) de (3.18) de gravitação topologicamente massiva de ordem superior (*GT MOS*). Simultaneamente ao nosso trabalho o mesmo modelo gravitacional foi proposto em [9]. Desde então vários aspectos da teoria *GT MOS* estão sendo explorados, vide como exemplos as citações de [2, 9].

3.2 O modelo auto-dual de primeira ordem

Inspirados pelas formulações auto-duais de spin-1 [39] e spin-2 [7], os autores em [23] propuseram um modelo auto-dual de primeira ordem capaz de descrever um singlete de paridade com spins $+3$ ou -3 massivo em $D = 2 + 1$ dimensões. A formulação necessária para descrever tal singlete é a formulação não

simétrica em analogia com o caso de spin-2 [7]. O modelo auto-dual de primeira ordem é dado por:

$$S_1[\omega, A, \phi] = \int d^3x \left[\frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \omega_{\mu(\beta\gamma)} \partial_\nu \omega_\alpha^{(\beta\gamma)} - \frac{m^2}{6} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\beta\gamma\rho} \eta_{\mu\beta} \omega_{\nu(\gamma\delta)} \omega_{\alpha(\rho}{}^{\delta)} \right. \\ \left. + m^2 \omega_\mu A^\mu - 9m \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha - 9m^2 A_\mu A^\mu + m \phi \partial_\mu A^\mu + \frac{m^2}{48} \phi^2 \right]. \quad (3.19)$$

O primeiro termo de (3.19) é análogo ao termo de Chern-Simons de spin-1 e de spin-2 (vide (3.1) e (3.12)), enquanto o termo de massa é o análogo do termo de Proca para spin-1 ou Fierz-Pauli de spin-2. Como a soma destes dois termos não descreve somente um singlete de spin-3 massivo, é necessário acrescentar os demais campos auxiliares à lagrangiana. É necessário primeiramente provar que tal modelo descreve de fato um singlete de paridade com spins $+3$ ou -3 dependendo do sinal da massa “ m ”. Para isso devemos derivar a partir das equações de movimento as chamadas condições de Fierz-Pauli. Eliminando todos os graus de liberdade espúrios. Em seguida, definidos os geradores de translação e rotação para estados de spin-3 devemos estabelecer a partir das equações de movimento a condição de Pauli-Lubanski explicitando dessa forma que o grau de liberdade restante corresponde de fato ao modo de spin $+3$ e -3 vide (1.4). Começamos por analisar as equações de movimento, de (3.19) nós temos a equação de movimento para o campo $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$:

$$H^{\mu(\beta\gamma)} = \frac{\delta S_1[\omega, A, \phi]}{\delta \omega_{\mu(\beta\gamma)}} = -m E^{\mu\alpha} \omega_\alpha^{(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{6} (\eta^{\mu\beta} \omega^\gamma + \eta^{\mu\gamma} \omega^\beta - \omega^{\beta(\mu\gamma)} - \omega^{\gamma(\mu\beta)}) \\ + \frac{m^2}{2} \left(\eta^{\mu\beta} A^\gamma + \eta^{\mu\gamma} A^\beta - \frac{2}{3} \eta^{\beta\gamma} A^\mu \right) = 0. \quad (3.20)$$

Da equação de movimento para o campo vetorial A^μ , temos que:

$$F^\mu = \frac{\delta S_1[\omega, A, \phi]}{\delta A_\mu} = 18 E^{\mu\alpha} A_\alpha - 18 m A^\mu + m \omega^\mu - \partial^\mu \phi = 0. \quad (3.21)$$

Para o campo escalar ϕ temos que:

$$G = \frac{\delta S_1[\omega, A, \phi]}{\delta \phi} = \frac{m^2}{24} \phi + m \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.22)$$

Destas três equações vamos agora derivar as condições de Fierz-Pauli. Primeiramente aplicamos uma derivada ∂_μ à $H^{\mu(\beta\gamma)}$ obtendo:

$$\partial^\beta \omega^\gamma + \partial^\gamma \omega^\beta - \partial_\mu (\omega^{\beta(\gamma\mu)} + \omega^{\gamma(\mu\beta)}) = 2\eta^{\beta\gamma} \partial_\mu A^\mu - 3(\partial^\beta A^\gamma + \partial^\gamma A^\beta). \quad (3.23)$$

A seguir considere a equação: $\epsilon_{\lambda\mu\beta} H^{\mu(\beta\gamma)} + \epsilon^\gamma_{\mu\beta} H^{\mu(\beta)}_{\lambda)} = 0$. Ela nos leva a:

$$\partial^\beta \omega^\gamma + \partial^\gamma \omega^\beta - \partial_\mu (\omega^{\beta(\mu\gamma)} + \omega^{\gamma(\mu\beta)}) = \frac{m}{6} (\epsilon^\beta_{\mu\alpha} \omega^{\alpha(\mu\gamma)} + \epsilon^\gamma_{\mu\alpha} \omega^{\alpha(\mu\beta)}). \quad (3.24)$$

Tomando o traço de $H^{\mu(\beta\gamma)}$, isto é $\eta_{\mu\beta} H^{\mu(\beta\gamma)}$, temos a seguinte equação:

$$E_{\alpha\mu} \omega^{\alpha(\mu\gamma)} + \frac{m}{2} \omega^\gamma + \frac{5m}{3} A^\gamma = 0. \quad (3.25)$$

Isolando ϕ de (3.22) e substituindo em (3.21) teremos:

$$\omega^\gamma = 18A^\gamma - \frac{18}{m} E^{\gamma\nu} A_\nu - \frac{24}{m^2} \partial^\gamma \partial_\nu A^\nu. \quad (3.26)$$

Aplicando as derivadas $\partial_\beta \partial_\gamma$ à (3.23) e (3.24) e tomando a diferença entre estas equações vem que:

$$-4\Box \partial_\mu A^\mu = -\frac{m}{3} E_{\alpha\mu} \partial_\lambda \omega^{\alpha(\mu\lambda)}. \quad (3.27)$$

Em seguida aplicando ∂_γ nas equações (3.25) e usando o resultado de (3.27) concluímos que:

$$\Box \partial_\mu A^\mu = -\frac{m^2}{24} \partial_\mu \omega^\mu - \frac{5m^2}{36} \partial_\mu A^\mu, \quad (3.28)$$

enquanto ∂_γ nas equações (3.26) nos dá:

$$\left(\Box - \frac{3m^2}{4} \right) \partial_\mu A^\mu = -\frac{m^2}{24} \partial_\mu \omega^\mu. \quad (3.29)$$

Usando (3.29) em (3.28) chegamos a conclusão que $\partial_\mu A^\mu = 0 = \partial_\mu \omega^\mu$. Logo de (3.22) concluímos que $\phi = 0$.

Agora definindo os vetores $S_\alpha = \partial_\beta \partial_\gamma \omega_\alpha^{(\beta\gamma)}$ e $T_\alpha = \partial^\mu \partial^\lambda \omega_{\mu(\lambda\alpha)}$, se fizermos $\partial_\beta \partial_\gamma H^{\mu(\beta\gamma)}$ e $\partial_\mu \partial_\beta H^{\mu(\beta\gamma)}$ teremos respectivamente:

$$E^{\mu\alpha} S_\alpha + \frac{m}{3} (T^\mu + \Box A^\mu) = 0, \quad (3.30)$$

$$\Box \omega^\gamma + 3\Box A^\gamma = T^\gamma + S^\gamma. \quad (3.31)$$

Em seguida tomando $E_{\mu\beta}H^{\mu(\beta\gamma)}$ usando os resultados anteriores é possível determinar:

$$T^\gamma = \square\omega^\gamma - 3\square A^\gamma + \frac{16m}{3}E^{\gamma\beta}A_\beta - \frac{16m^2}{9}A^\gamma. \quad (3.32)$$

De (3.32) e (3.31) determina-se S^γ como sendo:

$$S^\gamma = 6\square A^\gamma - \frac{16m}{3}E^{\gamma\beta}A_\beta + \frac{16m^2}{9}A^\gamma. \quad (3.33)$$

Aplicando $E^{\beta\gamma}$ em (3.25) concluimos que:

$$S^\beta - T^\beta + \square\omega^\beta + \frac{32m}{3}E^{\beta\gamma}A_\gamma - 9\square A^\beta = 0. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.32) e (3.33) em (3.34) teremos após algum cálculo $A_\gamma = 0$. Sendo assim concluimos a partir de (3.26) que: $\omega_\gamma = 0$. De volta com estes resultados em (3.31) e (3.34) temos $T^\mu = 0 = S^\mu$. Além disso com $A_\gamma = 0 = \omega_\gamma$ em (3.23) nós temos a transversalidade dos campos $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$, isto é:

$$\partial_\mu(\omega^{\beta(\gamma\mu)} + \omega^{\gamma(\beta\mu)}) = 0. \quad (3.35)$$

Usando os resultados anteriores concluimos após aplicar $E_{\lambda\mu}$ em (3.20) que:

$$\left(\square - \frac{m^2}{9}\right)\omega_\lambda^{(\beta\gamma)} = 0. \quad (3.36)$$

Neste ponto a massa poderia então ser redefinida por um fator 3, no entanto manteremos a mesma notação de [23]. De volta com todos os resultados em (3.25), e aplicando ∂_γ à (3.23) conclui-se que $\partial_\gamma\omega^{\mu(\beta\gamma)} = 0$. Com isso conclui-se que a parte antissimétrica dos campos $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ é nula, ou seja:

$$\omega^{\mu(\beta\gamma)} - \omega^{\beta(\mu\gamma)} = 0. \quad (3.37)$$

Portanto as condições de Fierz-Pauli (1.1, 1.2, 1.3) foram satisfeitas a partir das equações de movimento. É oportuno neste momento definirmos os geradores de translação e rotação para estados de spin-3. Este gerador é obtido a partir da expressão geral de [28], e então temos:

$$(J_3^\alpha)_{\mu\nu\rho}^{\beta\gamma\lambda} = \frac{i}{12}\epsilon_{(\mu}^{\alpha(\beta}\delta_{\nu}^{\gamma)}\delta_{\rho)}^{\lambda)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{3} (\epsilon_\mu^{\alpha\beta} \mathcal{I}_{S\nu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\nu^{\alpha\beta} \mathcal{I}_{S\mu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\rho^{\alpha\beta} \mathcal{I}_{S\nu\mu}^{\gamma\lambda} \\
&+ \epsilon_\mu^{\alpha\gamma} \mathcal{I}_{S\nu\rho}^{\beta\lambda} + \epsilon_\nu^{\alpha\gamma} \mathcal{I}_{S\mu\rho}^{\beta\lambda} + \epsilon_\rho^{\alpha\gamma} \mathcal{I}_{S\nu\mu}^{\beta\lambda} \\
&+ \epsilon_\mu^{\alpha\lambda} \mathcal{I}_{S\nu\rho}^{\beta\gamma} + \epsilon_\nu^{\alpha\lambda} \mathcal{I}_{S\mu\rho}^{\beta\gamma} + \epsilon_\rho^{\alpha\lambda} \mathcal{I}_{S\nu\mu}^{\beta\gamma}) , \tag{3.38}
\end{aligned}$$

onde:

$$\mathcal{I}_{S\mu\nu}^{\beta\gamma} = \frac{(\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\gamma + \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\gamma)}{2}, \tag{3.39}$$

é a identidade simétrica de posto-2. O gerador de rotações J_3 dado por (3.38) obedece as seguintes relações:

$$(J_3^\alpha)_{\mu\nu\rho}^{\beta\gamma\lambda} (J_3^\alpha)^{\sigma\phi\omega}_{\beta\gamma\lambda} = s(s+1) \mathcal{I}_{\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega}, \tag{3.40}$$

com $s = 3$ neste caso. Na última expressão temos:

$$\mathcal{I}_{\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega} = -\mathcal{I}_{S\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega} + \frac{1}{18} [\delta_{\mu\nu}(\delta_\rho^\phi \delta^{\omega\sigma} + \delta^{\sigma\phi} \delta_\rho^\omega + \delta_\rho^\sigma \delta^{\omega\phi}) + (\rho \leftrightarrow \nu) + (\mu \leftrightarrow \rho)]. \tag{3.41}$$

Onde:

$$\mathcal{I}_{S\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega} = \frac{1}{3} (\delta_\mu^\sigma \mathcal{I}_{S\nu\rho}^{\phi\omega} + \delta_\mu^\phi \mathcal{I}_{S\nu\rho}^{\sigma\omega} + \delta_\mu^\omega \mathcal{I}_{S\nu\rho}^{\sigma\phi}), \tag{3.42}$$

é a identidade simétrica de posto-3. Além da relação (3.40) temos também a álgebra:

$$[(J_3^\alpha)_{\mu\nu\rho}^{\beta\gamma\lambda}, (J_3^\xi)^{\sigma\phi\omega}_{\beta\gamma\lambda}] = i\epsilon_\delta^{\xi\alpha} (J_3^\delta)^{\sigma\phi\omega}_{\mu\nu\rho}. \tag{3.43}$$

Por fim, de (3.20) demonstra-se a relação de Pauli-Lubanski, dada por:

$$(P \cdot J_3 - sm)_{\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega} \omega_{\sigma\phi\omega} = 0. \tag{3.44}$$

As relações (3.43) e (3.40) estão demonstradas no apêndice - B. Aqui $s = 3$ e $\omega_{\sigma\phi\omega}$ é totalmente simétrico e sem traço, como foi demonstrado através das condições de Fierz-Pauli. Já que apresentamos algumas características das teorias de spin-3 massivas, vamos no próximo capítulo apresentar alguns resultados que conhecemos para teorias de spin-1 e spin-2 massivas sob a perspectiva de alguns métodos de dualização. Em seguida de posse dessas motivações vamos aplicar estes métodos às teorias de spin-3.

3.3 ICN para os modelos de spin-3

3.3.1 Do modelo $AD(1)$ para o modelo $AD(2)$

Primeiramente é necessário dizer que vamos nos basear na seguinte notação:

$$\xi_{\mu(\beta\gamma)} = E_{\mu}^{\lambda} \omega_{\lambda(\beta\gamma)}, \quad (3.45)$$

onde temos o campo parcialmente simétrico $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ com traço nulo com respeito ao par de índices simétricos, isto é $\eta^{\beta\gamma} \omega_{\mu(\beta\gamma)} = 0$, porém $\eta^{\mu\beta} \omega_{\mu(\beta\gamma)} = \omega_{\gamma} \neq 0$. Nos depararemos com a combinação dada por:

$$\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) = 3(\xi_{\beta(\mu\gamma)} + \xi_{\gamma(\mu\beta)} - \xi_{\mu(\beta\gamma)}) - 2\eta_{\beta\gamma} \xi_{\mu}, \quad (3.46)$$

que possui a mesma simetria de $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$. É importante diferenciar duas situações. Quando escrevermos $\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega)$ queremos dizer que $\Omega_{\mu(\beta\gamma)}$ depende de $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ através de $\xi_{\mu(\beta\gamma)}$. Quando somente estivermos nos referindo a estrutura tensorial usaremos um til:

$$\tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) = 3(\omega_{\beta(\mu\gamma)} + \omega_{\gamma(\mu\beta)} - \omega_{\mu(\beta\gamma)}) - 2\eta_{\beta\gamma} \omega_{\mu}. \quad (3.47)$$

Neste caso $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ é um campo fundamental, no sentido de que não depende de outro campo. Por exemplo (3.46) pode ser escrita como: $\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) = \tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(\xi)$.

Devido ao termo de massa em $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$, a ação (3.19) não é invariante sob a transformação de calibre que deixa apenas o termo do tipo Chern-Simons invariante, isto é:

$$\delta_{\tilde{\Lambda}} \omega_{\mu(\beta\gamma)} = \partial_{\mu} \tilde{\Lambda}_{(\beta\gamma)}. \quad (3.48)$$

Com $\eta^{\beta\gamma} \tilde{\Lambda}_{(\beta\gamma)} = 0$. Vamos então impor esta simetria de calibre ao modelo auto-dual de primeira ordem com o intuito de obter uma ação invariante, a qual de nossa experiência anterior sabemos que será de segunda ordem nas derivadas. Primeiramente vamos reescrever a ação (3.19) fazendo:

$$\begin{aligned} S_{AD1}^{(3)}[\omega, A] &= \int d^3x \left[-\frac{m}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\mu(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{6} (\omega_{\mu} \omega^{\mu} - \omega_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\beta(\mu\gamma)}) + m^2 \omega_{\mu} A^{\mu} \right. \\ &\quad \left. + j_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\mu(\beta\gamma)} \right] + S[A], \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde reescrevemos o termo massivo e adicionamos um termo de fonte $j_{\mu(\beta\gamma)}$ o qual nos permite mais a frente estabelecer o mapeamento dual entre os modelos. A lagrangiana $S[A]$ contém o campo auxiliar vetorial necessário para descrever corretamente um singlete de spin-3 massivo e é dada por:

$$S[A] = \int d^3x \left[-9m \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha - 9m^2 A_\mu A^\mu - 12(\partial_\mu A^\mu)^2 \right] \quad (3.50)$$

O procedimento de imersão de calibre de Noether, consiste em modificar a ação original, não invariante, adicionado a ela um termo quadrático (invariante de calibre) no tensor de Euler. Neste sentido garantimos a imersão das equações de movimento. Sendo assim, seja o tensor de Euler com respeito ao campo de spin-3:

$$\delta S_{AD1}^{(3)} = \int d^3x K^{\mu(\beta\gamma)} \delta \omega_{\mu(\beta\gamma)}, \quad (3.51)$$

com

$$\begin{aligned} K^{\mu(\beta\gamma)} &= -m \xi^{\mu(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{6} (\eta^{\mu\beta} \omega^\gamma + \eta^{\mu\gamma} \omega^\beta - \omega^{\beta(\mu\gamma)} - \omega^{\gamma(\mu\beta)}) \\ &+ \frac{m^2}{2} f^{\mu(\beta\gamma)}(A) + j^{\mu(\beta\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Note que $\eta_{\beta\gamma} K^{\mu(\beta\gamma)} = 0$ e:

$$f^{\mu(\beta\gamma)}(A) = \eta^{\beta\mu} A^\gamma + \eta^{\gamma\mu} A^\beta - \frac{2}{3} \eta^{\beta\gamma} A^\mu. \quad (3.53)$$

Fazemos agora nossa primeira iteração na ação original, modificando-a através da soma de um termo proporcional ao tensor de Euler. Para fazer isso é necessária, a introdução de um campo auxiliar com as mesmas propriedades de $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$, o qual vamos chamar de $a_{\mu(\beta\gamma)}$, tal que se acopla ao tensor de Euler da seguinte forma:

$$S_1 = S_{AD1}^{(3)} - \int d^3x a_{\mu(\beta\gamma)} K^{\mu(\beta\gamma)}. \quad (3.54)$$

O subscrito “1” na ação acima refere-se à primeira iteração que estamos fazendo. Agora, seja a variação de calibre da ação acima tomada com respeito aos campos de spin-3:

$$\delta_{\tilde{\Lambda}} S_1 = \int d^3x K^{\mu(\beta\gamma)} \delta_{\tilde{\Lambda}} \omega_{\mu(\beta\gamma)} - \int d^3x K^{\mu(\beta\gamma)} \delta_{\tilde{\Lambda}} a_{\mu(\beta\gamma)} - \int d^3x \delta_{\tilde{\Lambda}} K^{\mu(\beta\gamma)} a_{\mu(\beta\gamma)}, \quad (3.55)$$

percebemos que se a variação do campo auxiliar coincide com a variação do campo de spin-3, isto é:

$$\delta_{\tilde{\Lambda}} \omega_{\mu(\beta\gamma)} = \delta_{\tilde{\Lambda}} a_{\mu(\beta\gamma)} = \partial_{\mu} \tilde{\Lambda}_{(\beta\gamma)}, \quad (3.56)$$

então teremos:

$$\delta_{\tilde{\Lambda}} S_1 = - \int d^3x \delta_{\tilde{\Lambda}} K^{\mu(\beta\gamma)} a_{\mu(\beta\gamma)}. \quad (3.57)$$

Tomando a variação do tensor de Euler com respeito à transformação de calibre (3.48), e substituindo de volta em (3.57), conclui-se que uma ação da forma:

$$S_2 = S_1 - \int d^3x \left[a_{\mu(\beta\gamma)} K^{\mu(\beta\gamma)} - \frac{m^2}{6} (a_{\mu} a^{\mu} - a_{\mu(\beta\gamma)} a^{\beta(\mu\gamma)}) \right], \quad (3.58)$$

onde o subscrito “2” refere-se à segunda iteração. A ação S_2 é então invariante sob a transformação de simetria (3.48) que queremos impor. Resta agora resolver a equação de movimento para os campos auxiliares em termos do tensor de Euler. Pode-se fazer isso de forma simples mas, levando em conta que os detalhes são demasiadamente técnicos, vamos suprimi-los no momento. O resultado pode ser organizado da seguinte forma:

$$a_{\mu(\beta\gamma)} = -\frac{\tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(K)}{m^2} \quad , \quad a_{\gamma} = -\frac{\tilde{\Omega}_{\gamma}(K)}{m^2}. \quad (3.59)$$

Onde usamos a combinação $\tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}$ dada por (3.47) ou seja:

$$\tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(K) = 3(K_{\beta(\mu\gamma)} + K_{\gamma(\mu\beta)} - K_{\mu(\beta\gamma)}) - 2\eta_{\beta\gamma} K_{\mu} \quad , \quad \tilde{\Omega}_{\gamma}(K) = \eta^{\mu\beta} \tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(K). \quad (3.60)$$

Desta forma temos:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 \\ &+ \int d^3x \left\{ \frac{K^{\mu(\beta\gamma)} \tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(K)}{m^2} + \frac{1}{6m^2} \left[\tilde{\Omega}_{\mu}(K) \tilde{\Omega}^{\mu}(K) - \tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(K) \tilde{\Omega}^{\beta(\mu\gamma)}(K) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Substituindo (3.60) temos então:

$$S_2 = S_1 - \frac{3}{2m^2} \int d^3x \left[2K_{\mu(\beta\gamma)} K^{\beta(\mu\gamma)} - K_{\mu(\beta\gamma)} K^{\mu(\beta\gamma)} \right]. \quad (3.62)$$

É oportuno comentar que os termos acrescentados a S_1 em (3.61) são quadráticos no tensor de Euler o que garante que as equações de movimento de S_1 , ou seja, $K_{\mu(\beta\gamma)} = 0$ estão imersas nas equações de movimento $\delta S_2 = 0$. Isso é típico da *ICN*. A substituição do tensor de Euler (3.52) em (3.61) nos leva por fim a uma ação invariante pela transformação de calibre (3.48).

$$S_2 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)} \Omega^{\mu(\beta\gamma)}(\omega) + \frac{m}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\mu(\beta\gamma)} + 2m \xi_{\mu} A^{\mu} - j_{\mu(\beta\gamma)} F^{\mu(\beta\gamma)}(\omega, A) \right] + S'[A], \quad (3.63)$$

onde temos $\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega)$ segundo nossa definição dada em (3.46). $F^{\mu(\beta\gamma)}$ e $S'[A]$ aparecem em (3.64) e (3.68), respectivamente. Como $\delta \xi_{\mu(\beta\gamma)} = E_{\mu}^{\lambda} \delta \omega_{\lambda(\beta\gamma)} = 0$ sob (3.48), logo o primeiro termo de (3.63), que é de segunda ordem, é invariante sob (3.48). Este termo faz um papel análogo ao termo de Einstein-Hilbert quando tratávamos do caso de spin-2. É possível, como pode-se ver no apêndice-C, pela mudança de variáveis dada em (2.7), escrevê-lo em termos de um campo totalmente simétrico $\phi_{\mu\beta\gamma}$, e então demonstrar que ele na verdade é o termo cinético proposto originalmente por Singh e Hagen em [15] para descrever a partícula de spin-3 sem massa. Aqui ele foi gerado a partir do modelo auto-dual de primeira ordem (3.19) via imersão da simetria (3.48). Da mesma forma que o termo de Maxwell é gerado a partir do modelo auto-dual de spin-1 quando partimos de (3.1) para (3.3), vide em mais detalhes em [25]. Além disso notamos como de costume uma mudança no sinal do termo de Chern-Simons com relação a ação de primeira ordem e também uma mudança do tipo de termo de interação entre os campos de spin-3 $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ e os campos auxiliares vetoriais A_{μ} . Na ação de primeira ordem a interação era do tipo $m^2 \omega_{\mu} A^{\mu}$ enquanto que agora temos $2m \xi_{\mu} A^{\mu}$ o qual é também invariante de calibre. O mapeamento dual entre as equações de movimento da ação de segunda ordem S_2 e as equações de movimento da ação de primeira ordem S_1 pode ser obtido através do dual $F^{\mu(\beta\gamma)}$:

$$F^{\mu(\beta\gamma)}(\omega, A) = \frac{\Omega^{\mu(\beta\gamma)}(\omega)}{m} + f^{\mu(\beta\gamma)}(A). \quad (3.64)$$

Onde $f^{\mu(\beta\gamma)}(A)$ está definido em (3.53). De posse desse mapeamento dual, devemos ser capazes de recuperar as equações de movimento do modelo auto-dual

de primeira ordem a partir das equações de movimento do modelo auto-dual de segunda ordem. Derivando as equações de movimento para os campos vetoriais A_μ a partir de (3.63) teremos:

$$18E^{\alpha\beta}A_\beta + mF^\alpha - 9mA^\alpha - \partial^\alpha\phi = 0. \quad (3.65)$$

Por outro lado derivando as equações de movimento com respeito aos campos $\omega^{\mu(\beta\gamma)}$ temos:

$$-mE^\mu{}_\alpha F^{\alpha(\gamma\beta)} + m\xi^{\mu(\beta\gamma)} = 0. \quad (3.66)$$

Da definição de $F^{\mu(\beta\gamma)}$ dada em (3.64) nós temos:

$$\begin{aligned} m\xi^{\beta(\mu\gamma)} &= -\frac{m^2}{6}(F^{\gamma(\mu\beta)} + F^{\mu(\gamma\beta)}) + \frac{m^2}{6}(\eta^{\mu\beta}F^\gamma + \eta^{\gamma\beta}F^\mu) \\ &+ \frac{m^2}{2}(\eta^{\mu\beta}A^\gamma + \eta^{\gamma\beta}A^\mu) - \frac{m^2}{3}\eta^{\mu\gamma}A^\beta. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Substituindo então este resultado em (3.66) teremos exatamente a equação de movimento do modelo auto-dual de primeira ordem (3.20) com a troca de $\omega_{\mu(\beta\gamma)} \rightarrow F_{\mu(\beta\gamma)}$. Sendo assim a equivalência entre S_1 e S_2 pelo menos no nível das equações de movimento fica demonstrada.

Observamos por fim que a ação envolvendo os campos auxiliares também sofreu uma alteração passando de $S[A]$ dada por (3.50) para $S'[A]$ dada por:

$$S'[A] = \int d^3x \left[-9m \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha - \frac{32m^2}{3} A_\mu A^\mu - 12(\partial_\mu A^\mu)^2 \right]. \quad (3.68)$$

Onde notamos que a única mudança nessa lagrangiana vem do fato que o procedimento de imersão contribuiu com um termo de $-(5m^2/3)A_\mu A^\mu$. A lagrangiana de campos auxiliares se alterou de tal forma a manter a descrição coerente de um modo massivo de spin-3. Nosso resultado pode ser comparado com o resultado proposto por Aragone e Khoudeir na referência [24] onde os autores propõem uma ação de segunda ordem. A única diferença vem do fato de que é necessário uma redefinição dos campos vetoriais sendo que nosso campo vetorial vem acrescido de um fator multiplicativo 2. Ou seja, $2A_\mu = A_\mu^{(AK)}$ onde o super escrito refere-se aos autores daquele trabalho. Ao contrário da referência [24], aqui a lagrangiana

de campos auxiliares foi gerada automaticamente a partir da imersão de simetria e não teve que ser fixada a posteriori. Na próxima seção mostraremos que é possível através da técnica de imersão obter agora um modelo auto-dual de terceira ordem descrevendo uma partícula de spin $+3$ ou -3 massiva em $D = 2 + 1$ (singleto de paridade).

3.3.2 Do modelo $AD(2)$ para o modelo $AD(3)$

Nesta seção partiremos do modelo de segunda ordem obtido na seção anterior o qual é invariante pela simetria de calibre (3.48) e vamos impor uma nova simetria de calibre. A exemplo do que fizemos para spin-2 pensamos em utilizar uma generalização da simetria (3.15) que usamos para ir do modelo de segunda para o modelo de terceira ordem naquele caso. Essa generalização consiste no que segue:

$$\delta_\Phi \omega_{\mu(\beta\gamma)} = \epsilon_{\mu\beta\rho} \Phi_{\gamma}^{(\rho)} + \epsilon_{\mu\gamma\rho} \Phi_{\beta}^{(\rho)}. \quad (3.69)$$

Não é difícil verificar que o termo de segunda ordem em (3.63) é invariante por esta simetria. Porém o mesmo não é verdade para o termo de Chern-Simons de primeira ordem. Sendo assim podemos novamente usar o procedimento de imersão de Noether. De (3.63) calculamos o novo tensor de Euler, agora de segunda ordem, e obtemos:

$$\begin{aligned} K_{(2)}^{\mu(\beta\gamma)} &= E^\mu{}_\lambda \left(\Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) + m \omega^{\lambda(\beta\gamma)} + f^{\lambda(\beta\gamma)}(A) - \frac{1}{m} \tilde{\Omega}^{\lambda(\beta\gamma)}(j) \right) \\ &\equiv E^\mu{}_\lambda \tilde{K}^{\lambda(\beta\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Neste ponto note que foi possível fatorar um operador $E^\mu{}_\lambda$ em (3.70), isso vai ser importante mais a frente. Em seguida propomos a primeira iteração da forma:

$$S_1 = S_{AD2}^{(3)} - \int d^3x \, b_{\mu(\beta\gamma)} K^{\mu(\beta\gamma)}, \quad (3.71)$$

com $b_{\mu(\beta\gamma)}$ um campo auxiliar com as mesmas propriedades de $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$. Logo, com respeito a transformação de calibre (3.69) a ação $S_2^{(1)}$ tem a seguinte variação:

$$\delta_\Phi S_2 = -\frac{m}{2} \int d^3x \, \delta(b_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda b^{\lambda(\beta\gamma)}). \quad (3.72)$$

Ou seja:

$$S_2 = S_1 - \int d^3x \left(b_{\mu(\beta\gamma)} K_{(2)}^{\mu(\beta\gamma)} - \frac{m}{2} b_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda b^{\lambda(\beta\gamma)} \right), \quad (3.73)$$

é por construção invariante pela simetria de calibre (3.69). Como havíamos dito anteriormente, já que é possível fatorar um operador $E^\mu{}_\lambda$ na expressão para o tensor de Euler (3.70), podemos então reescrever $S_2^{(2)}$ de forma que:

$$\begin{aligned} S_2 = & S_1 + \int d^3x \left[\frac{m}{2} \left(b_{\mu(\beta\gamma)} - \frac{\tilde{K}_{\mu(\beta\gamma)}^{(2)}}{m} \right) E^\mu{}_\lambda \left(b^{\lambda(\beta\gamma)} - \frac{\tilde{K}^{\lambda(\beta\gamma)}_{(2)}}{m} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2m} \tilde{K}_{\mu(\beta\gamma)}^{(2)} E^\mu{}_\lambda \tilde{K}^{\lambda(\beta\gamma)}_{(2)} \right], \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $\tilde{K}^{\lambda(\beta\gamma)}$ está definido em (3.70). Fazendo agora $b^{\lambda(\beta\gamma)} \rightarrow b^{\lambda(\beta\gamma)} + \tilde{K}^{\lambda(\beta\gamma)}/m$, o primeiro termo entre colchetes em (3.74) se desacopla gerando um termo do tipo $b_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda b^{\lambda(\beta\gamma)}$ que não possui conteúdo físico. Após integrar no campo auxiliar $b^{\lambda(\beta\gamma)}$ ficamos com:

$$S_2 = S_1 - \frac{1}{2m} \int d^3x \tilde{K}_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \tilde{K}^{\lambda(\beta\gamma)}. \quad (3.75)$$

Note agora que embora o acréscimo a S_2 feito em (3.75) não seja quadrático em $K^{\mu(\beta\gamma)}$, sua variação funcional é proporcional a $E^\mu{}_\lambda \tilde{K}^{\lambda(\beta\gamma)} = K^{\mu(\beta\gamma)}$, o que garante que as equações de movimento de S_2 , isto é $K^{\mu(\beta\gamma)} = 0$ estejam imersas nas equações de movimento $\delta S_2 = 0$. Substituindo $\tilde{K}_{\mu(\beta\gamma)}$ de (3.70) teremos após alguma álgebra:

$$\begin{aligned} S_{AD3}^{(3)} = & \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)} \Omega^{\mu(\beta\gamma)}(\omega) - \frac{1}{2m} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) \right. \\ & \left. - f_{\mu(\beta\gamma)}(A) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) - j_{\mu(\beta\gamma)} G^{\mu(\beta\gamma)}(\omega, A) \right] + S''[A], \end{aligned} \quad (3.76)$$

que é uma ação de terceira ordem em derivadas, invariante pelas simetrias de calibre (3.48) e (3.69). Neste caso temos o dual $G^{\mu(\beta\gamma)}$ acompanhando o termo de fonte em (3.79) dado por:

$$G^{\mu(\beta\gamma)} = -\frac{1}{m} \Omega^{\mu(\beta\gamma)} \left(\frac{\Omega}{m} + f \right) + f^{\mu(\beta\gamma)}(A). \quad (3.77)$$

Os autores em [18] denominaram esse modelo, em analogia com o caso de spin-2, de modelo topologicamente massivo para partículas de spin-3. O segundo

termo entre colchetes em (3.76) corresponde a um termo do tipo Chern-Simons topológico de terceira ordem nas derivadas. Como era esperado o termo de interação (terceiro em (3.76)) entre os campos de spin-3 e os campos auxiliares foi modificado de forma a se tornar invariante pela simetria imposta. A equivalência entre este modelo e os dois modelos obtidos anteriormente pode ser estudada fazendo o mapeamento dual $\omega_{\mu(\beta\gamma)} \rightarrow G_{\mu(\beta\gamma)}$. Assim como no caso anterior a lagrangiana de campos auxiliares sofreu uma alteração de tal forma que a ação total continue descrevendo de forma coerente um modo massivo de spin-3. Dessa vez a contribuição é para o termo de Chern-Simons vetorial e a ação de campos auxiliares é dada por:

$$S''[A] = \int d^3x \left[-\frac{32m}{3} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha - \frac{32m^2}{3} A_\mu A^\mu - 12(\partial_\mu A^\mu)^2 \right]. \quad (3.78)$$

Ou seja tivemos uma contribuição de $(-5m/3)\epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha$ quando passamos de $SD(2)$ para $SD(3)$. Essa teoria de terceira ordem pode ser comparada com a teoria topologicamente massiva de spin-3 proposta por [18]. Para fazer isso precisamos fazer uma comparação entre a formulação parcialmente simétrica conhecida como *frame-like* na literatura que utilizamos até aqui e a formulação em termos de campos totalmente simétricos utilizada em [18]. Essa comparação entre as formulações pode ser encontrada no apêndice - A. Aqui vamos reescrever nosso resultado (3.76) em termos de campos totalmente simétricos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_3[\phi, A] = & \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \phi_{\mu\beta\gamma} G^{\mu\beta\gamma}(\phi) - \frac{3}{2m} \phi_{\beta\nu\lambda} E^\beta{}_\mu G^{\mu\nu\lambda}(\phi) - \frac{4}{\sqrt{3}} A_\mu G^\mu(\phi) \right. \\ & \left. + \tilde{j}_{\mu\beta\gamma} \left(-\frac{3}{m^2} E^\mu{}_\rho G^{\rho\beta\gamma}(\phi) - \frac{\sqrt{3}}{m} \eta^{\beta\gamma}(E^{\mu\rho} A_\rho + mA^\mu) \right) \right] + S''[A], \end{aligned} \quad (3.79)$$

com o tensor de Einstein $G_{\mu\beta\gamma}(\phi)$ dado em (2.19). Se fizermos as mudanças $m = 3\tilde{m}$ e $A_\mu = \tilde{A}_\mu/4\sqrt{3}$ recuperamos exatamente a ação de terceira ordem proposta por [18]. Onde $\tilde{m}$ e $\tilde{A}_\mu$ são a massa e campo vetorial respectivamente usados naquele trabalho. Para a adaptação do termo de fonte, que agora deve se acoplar a campos totalmente simétricos, utilizamos uma mudança de variáveis

igual a utilizada para os campos $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$, ou seja:

$$j_{\mu(\beta\gamma)} = \frac{\tilde{j}_{\mu\beta\gamma}}{\sqrt{3}} + \frac{\eta_{\mu\beta}\tilde{j}_{\gamma} + \eta_{\mu\gamma}\tilde{j}_{\beta}}{4\sqrt{3}} - \frac{\eta_{\beta\gamma}\tilde{j}_{\mu}}{2\sqrt{3}}. \quad (3.80)$$

Dessa forma, notamos que o termo de fonte se acopla aos campos totalmente simétricos na forma de uma ação de Chern-Simons de terceira ordem, como podemos ver comparando-o com o segundo termo de (3.79).

Na próxima seção iremos fazer a imersão de uma nova simetria de calibre que nos levará a um modelo de quarta ordem em derivadas. A simetria é como veremos, uma generalização da simetria utilizada para irmos do modelo $SD(1)$ para o modelo $SD(2)$, (3.48).

3.3.3 Do modelo $AD(3)$ para o modelo $AD(4)$

Na primeira seção deste capítulo utilizamos a simetria (3.48) onde tínhamos um parâmetro arbitrário tensorial de posto 2 simétrico e sem traço em seus índices. Pode-se verificar que o termo de Chern-Simons de terceira ordem escrito em termos de campos totalmente simétricos, é invariante com respeito a uma generalização dessa simetria onde tem-se um parâmetro simétrico arbitrário e com **traço não nulo**, ou seja:

$$\delta_{\Lambda}\phi_{\mu\beta\gamma} = \partial_{(\mu}\Lambda_{\beta\gamma)}, \quad (3.81)$$

com $\Lambda_{\beta\gamma} = \Lambda_{\gamma\beta}$. O termo de Einstein-Hilbert por outro lado, bem como o termo de interação entre o campo vetorial A_{μ} e o campo de spin-3 $\phi_{\mu\nu\lambda}$ não são invariantes sob essa simetria. Dessa forma podemos fazer a imersão desta simetria no modelo $SD(3)$. Antes de prosseguir porém precisamos fazer algumas considerações. Note que o tensor $G_{\mu\beta\gamma}$ esta presente nos três primeiros termos da ação (3.79). Seria então conveniente reescrever nossa ação explicitando um operador de segunda ordem contido em $G_{\mu\nu\lambda}$ para prosseguir com o procedimento de imersão. Essa tarefa pode ser evitada notando que na formulação não simétrica isso é mais fácil de ser feito. Olhando para a expressão (3.76) notamos que existe um operador $E^{\mu}_{\lambda}\Omega^{\lambda(\beta\gamma)}$ comum a três dos termos da ação. No entanto, haja

visto que iremos optar por fazer a imersão de calibre utilizando a notação não simétrica, devemos fazer uma redefinição da simetria de calibre (3.81) para os campos não simétricos. Em termos destes campos a simetria é um tanto quanto mais complicada e pode ser reescrita usando (3.81) em (2.7) como:

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda \omega_{\lambda(\beta\gamma)} &= \partial_{(\lambda} \Lambda_{\beta\gamma)} + \frac{\eta_{\lambda\beta}}{4} (\partial_\gamma \Lambda + 2\partial^\alpha \Lambda_{\alpha\gamma}) \\ &+ \frac{\eta_{\lambda\gamma}}{4} (\partial_\beta \Lambda + 2\partial^\alpha \Lambda_{\alpha\beta}) - \frac{\eta_{\gamma\beta}}{2} (\partial_\lambda \Lambda + 2\partial^\alpha \Lambda_{\alpha\lambda}).\end{aligned}\quad (3.82)$$

Calculando o tensor de Euler a partir da ação (3.76) nós temos:

$$K^{\mu(\beta\gamma)} = -E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) - \frac{1}{m} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\Omega) - E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(f(A)) + \frac{1}{m^2} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\Omega(j)).\quad (3.83)$$

Sendo assim propomos:

$$S_1 = S_{AD3}^{(3)} - \int d^3x a_{\mu(\beta\gamma)} K^{\mu(\beta\gamma)},\quad (3.84)$$

de forma que quando fazemos a variação com respeito à simetria de calibre (3.82), tendo em vista que os últimos três termos de (3.83) são invariantes, ficamos com:

$$\delta_\Lambda S_1 = \frac{1}{2} \int d^3x \delta_\Lambda (a_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(a)),\quad (3.85)$$

já que usamos para a variação do campo auxiliar $\delta_\Lambda a_{\mu(\beta\gamma)} = \delta_\Lambda \omega_{\mu(\beta\gamma)}$. Logo é evidente que a ação:

$$S_2 = S_1 - \int d^3x \left[a_{\mu(\beta\gamma)} K^{\mu(\beta\gamma)} + \frac{1}{2} a_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(a) \right],\quad (3.86)$$

é invariante sob (3.82). Notamos anteriormente que, como todos os termos compondo o tensor de Euler possuem em comum um operador de segunda ordem dado por $E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}$, como pode ser verificado na expressão (3.83), é possível colocá-lo em evidencia de tal forma que:

$$\begin{aligned}K^{\mu(\beta\gamma)} &= -E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)} \left(\omega + \frac{1}{m} \Omega(\omega) + f(A) - \frac{1}{m^2} \Omega(j) \right) \\ &= -E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(b).\end{aligned}\quad (3.87)$$

Onde definimos $b_{\mu(\beta\gamma)}$ dado por:

$$b_{\mu(\beta\gamma)} = \omega_{\mu(\beta\gamma)} + \frac{1}{m} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) + f_{\mu(\beta\gamma)}(A) - \frac{1}{m^2} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(j).\quad (3.88)$$

Logo podemos reescrever S_2 tal que:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 - \int d^3x \left[-a_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(b) + \frac{1}{2} a_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(a) \right] \\ &= S_1 - \int d^3x \left[\frac{1}{2} (a_{\mu(\beta\gamma)} - b_{\mu(\beta\gamma)}) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(a - b) - \frac{1}{2} b_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(b) \right]. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Agora, se fizermos $a_{\mu(\beta\gamma)} \rightarrow a_{\mu(\beta\gamma)} + b_{\mu(\beta\gamma)}$, o primeiro termo em (3.89) se desacopla e podemos integrar no campo auxiliar $a_{\mu\beta\gamma}$.² Fazendo isso, após alguma álgebra temos uma ação de terceira ordem nas derivadas dada por:

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2} \int d^3x b_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(b) \quad (3.90)$$

Substituindo $b_{\mu(\beta\gamma)}$ dado pela expressão (3.87), teremos após algum cálculo a ação de quarta ordem nas derivadas:

$$\begin{aligned} S_{AD4}^{(3)} &= \int d^3x \left[\frac{1}{2m} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) + \frac{1}{2m^2} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\Omega) \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{m} f_{\mu(\beta\gamma)}(A) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\Omega) - \frac{1}{m^3} \tilde{\Omega}_{\mu(\beta\gamma)}(j) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\Omega) - j_{\mu(\beta\gamma)} H^{\mu(\beta\gamma)}(A) \right] \\ &+ S'''(A). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Com:

$$H^{\mu(\beta\gamma)} = -\frac{1}{m} \Omega^{\mu(\beta\gamma)}(G) + f^{\mu(\beta\gamma)}(A). \quad (3.92)$$

Onde agora temos a seguinte ação auxiliar:

$$S'''(A) = \int d^3x \left[-\frac{32}{3} A_\mu \square \theta^{\mu\nu} A_\nu - \frac{32m}{3} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha - \frac{32m^2}{3} A_\mu A^\mu \right] \quad (3.93)$$

Não há na literatura uma ação de quarta ordem nas derivadas descrevendo um singlete de spin-3 massivo em $D = 2 + 1$. Em [34] os autores oferecem uma equação de movimento de quarta ordem, mas não apresentam uma ação de onde se deriva esta equação de movimento. Além disso os mesmos autores não

²É fundamental que o primeiro termo de (3.89) não tenha conteúdo físico para que possa realmente ser dispensado sem consequências para o espectro da teoria. Veremos que isso é o que acontece com este termo por se tratar de um termo de Chern-Simons de terceira ordem. A demonstração pode ser encontrada na seção 5.1 do próximo capítulo.

levam em conta os campos auxiliares necessários para a descrição coerente do singlete de paridade. Aqui apresentamos o modelo completo, com uma ação de campos auxiliares deduzida de forma sistemática a partir da sequência de modelos auto-duais. Até o momento não verificamos a possibilidade de nossa ação de quarta ordem dar origem as equações de movimento de [34]. Outro fato importante é que em [34] os autores propõem um modelo de quinta e outro de sexta ordem nas derivadas. Através das técnicas de dualização utilizadas nessa tese, até o momento não conseguimos prosseguir com a sequência de modelos auto-duais até sexta ordem. Isso se deve ao fato de não conhecermos novas simetrias para impor sobre o modelo de quarta ordem. Como vimos no decorrer de nossos cálculos a ação de campos auxiliares é a princípio uma teoria auto-dual de spin-1 somado um termo de fixação de calibre. Esta ação mudou para uma teoria de Maxwell-Chern-Simons-Proca, quando chegamos no modelo de quarta ordem. É curioso pensar como ficará a ação de campos auxiliares para o modelo de quinta e sexta ordem.

Capítulo 4

Dualidade via Ação Mestra

Até o momento a equivalência entre os modelos é vislumbrada somente no nível clássico, olhando para as equações de movimento levando em conta o mapeamento dual. A equivalência entre os modelos, no entanto deve ser garantida ao nível quântico. O método pelo qual podemos abordar essa questão é conhecido como método da ação mestra. Neste capítulo mostraremos como estabelecer a equivalência quântica entre as quatro formulações de modelos auto-duais de spin-3 que estamos estudando nessa tese. Contaremos com o fato de que alguns dos termos que estamos usando não possuem conteúdo físico, isto é, suas equações de movimento possuem solução geral do tipo puro calibre. Veremos a seguir quais termos são deste tipo e podem ser utilizados como termos de mistura [44] para compor uma ação mestra que interpole entre os modelos auto-duais.

4.1 Os termos sem conteúdo físico

4.1.1 spin-1

Quando estamos trabalhando com teorias de spin-1 e queremos construir uma ação mestra que interpole entre os modelos auto-dual e Maxwell-Chern-Simons, utilizamos como termo de mistura um termo de Chern-Simons abeliano

dado pela lagrangiana:

$$S_{CS1} = \frac{m}{2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha. \quad (4.1)$$

Ao derivar as equações de movimento com respeito ao campo vetorial teremos:

$$E^{\mu\alpha} A_\alpha = 0. \quad (4.2)$$

Percebemos que neste caso a solução geral para essa equação diferencial de primeira ordem é uma solução do tipo puro calibre, isto é $A_\mu = \partial_\mu \Lambda(x)$ onde $\Lambda(x)$ é uma função arbitrária de x^μ . Note ainda que aplicando o símbolo $\epsilon_{\mu\beta\gamma}$ a (4.2), resulta que $F_{\beta\gamma} = \partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta = 0$. É sabido que quando a curvatura de spin-1 $F_{\beta\gamma}$ (vide seção 2.3.1) é nula temos uma solução do tipo puro calibre. Como (4.1) é invariante por transformações de calibre podemos eliminar A_μ na concha de massa completamente e assim concluímos que (4.1), com condições de contorno triviais, isto é $A_\mu(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, não tem conteúdo físico.

4.1.2 spin-2

Vejamos agora para spin-2 em $D = 2+1$ quais termos podem ser usados como termos de mistura. Teremos logo de início, um termo do tipo Chern-Simons, de primeira ordem nas derivadas:

$$S_{CS2}^{(1)} = \frac{m}{2} \int f \cdot df = \frac{m}{2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} f_{\mu\nu} \partial_\nu f_\alpha{}^\nu, \quad (4.3)$$

com $f_{\mu\nu}$ não simétrico. Assim como acontece no caso de spin-1, (4.3) possui solução geral do tipo puro calibre, isto é $f_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu$. Note que neste caso a ação de Chern-Simons será invariante com respeito à transformação linear de coordenadas $\delta f_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu$.

Também podemos usar como termo de mistura um termo de Einstein-Hilbert linearizado ($e_{\mu a} = \eta_{\mu a} + f_{\mu a}$), o qual é de segunda ordem nas derivadas. Mostramos em [25] que tal termo pode ser escrito da seguinte forma:

$$S_{EHl} = -\frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} R = \frac{1}{4} \int f \cdot d\Omega(f) = -\frac{1}{2} \int d^3x f_{(\mu\nu)} E^{\mu\alpha} E^{\nu\beta} f_{(\alpha\beta)}. \quad (4.4)$$

Das equações de movimento com respeito ao campo agora simétrico $f_{(\mu\nu)}$ teremos:

$$E^{\mu\alpha} E^{\nu\beta} f_{(\alpha\beta)} = 0. \quad (4.5)$$

Aplicando duas vezes o símbolo de Levi-Civita a (4.5), teremos:

$$\epsilon_{\mu\gamma\rho}\epsilon_{\nu\lambda\xi} E^{\mu\alpha} E^{\nu\beta} f_{(\alpha\beta)} = R_{\gamma\rho\lambda\xi}^L(f) = 0. \quad (4.6)$$

O resultado desta operação é o tensor de Riemann linearizado $R_{\gamma\rho\lambda\xi}^L(f)$ dado em (4.6), um objeto simétrico pela troca dos pares anti-simétricos $[\gamma\rho]$ e $[\lambda\xi]$ o que prova que a ação de Einstein-Hilbert linearizada não possui conteúdo físico em $D = 2 + 1$ ¹. A solução geral de (2.21) (vide [18]) é do tipo puro calibre $f_{(\mu\nu)} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$. Podemos eliminar completamente $f_{(\mu\nu)}$ pois (4.4) é invariante sob $\delta f_{(\mu\nu)} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$.

Além dos dois termos (4.3) e (4.4) contamos ainda com um termo de Chern-Simons de terceira ordem. Este termo é de natureza topológica, ou seja, não depende da métrica explicitamente, portanto não contribui para o tensor energia momento. Na forma linearizada, vide [25], o termo pode ser reescrito como $f^{(\mu\nu)} \square \theta_{\mu\alpha} E_{\nu\beta} f^{(\alpha\beta)} / 2m$ e pode-se mostrar que a solução da equação de movimento derivada desta lagrangiana também é puro calibre. Vejamos quais termos poderemos usar como termos de mistura para spin-3.

4.1.3 spin-3

Para spin-3 a primeira alternativa óbvia é um termo do tipo Chern-Simons de primeira ordem nas derivadas. Este termo pelo mesmo motivo observado para spins 1 e 2 não possui conteúdo físico pois sua ação é da forma:

$$S_{CS3}^{(1)} = \frac{m}{2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\alpha} \omega^{\mu(\beta\gamma)} \partial^\nu \omega^{\alpha(\beta\gamma)}, \quad (4.7)$$

e das equações de movimento observa-se que a solução geral é do tipo puro calibre ou seja: $\omega_{\mu(\beta\gamma)} = \partial_\mu \Lambda_{(\beta\gamma)}$.

¹É conhecido que a ação de Einstein-Hilbert completa, isto é $S = \int d^3x \sqrt{-g} R$ não possui graus de liberdade propagantes, vide por exemplo [8].

Podemos também utilizar um termo de Singh-Hagen como termo de mistura, o qual é o análogo do termo de Einstein-Hilbert ($s = 2$) e de Maxwell ($s = 1$) para $s = 3$. Tal ação (vide apêndice-C) pode ser escrita tanto na sua forma não simétrica quanto na forma simétrica:

$$S_{SH} = \frac{1}{2} \int d^3x \omega_{\mu(\beta\gamma)} E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) = \frac{1}{2} \int d^3x \phi_{\mu\nu\alpha} G^{\mu\nu\alpha}(\phi), \quad (4.8)$$

onde temos a relação entre $\omega_{\mu\nu\alpha}$ e $\phi_{\mu\nu\alpha}$ dada por (2.7). Das equações de movimento concluímos que o tensor de Einstein (2.19) é nulo, ou seja:

$$G_{\mu\nu\lambda}(\phi) = 0, \quad (4.9)$$

o que por sua vez implica que o tensor de Ricci (dado por (2.17)) $R_{\mu\nu\lambda} = 0$. Note que $\delta_\xi S_{SH} = 0$ onde $\delta_\xi \omega_{\mu(\beta\gamma)} = \partial_\mu \xi_{(\beta\gamma)}$ com $\eta^{\beta\gamma} \tilde{\xi}_{(\beta\gamma)} = 0$. Em [18] demonstra-se que a solução geral de (4.9) é $\phi_{\mu\nu\lambda} = \partial_{(\mu} \tilde{\Lambda}_{\beta\gamma)}$ onde $\tilde{\Lambda} = \eta^{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$, ou seja solução puro calibre. Logo a ação de Singh-Hagen (4.8) não possui conteúdo físico em $D = 2 + 1$.

Além do termo de Singh-Hagen, podemos usar também como termo de mistura um termo de Chern-Simons de terceira ordem nas derivadas. Este termo (vide apêndice-C) pode ser escrito tanto na forma parcialmente simétrica como na forma simétrica.

$$S_{CS3}^{(3)} = \frac{1}{2m} \int d^3x \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) = \frac{3}{2m} \int d^3x \phi_{\mu\nu\lambda} E^\mu{}_\gamma G^{\gamma\nu\lambda}(\phi). \quad (4.10)$$

Recentemente os autores de [34] sugeriram que o análogo mais natural do tensor de Einstein para spin-3 seja um tensor de posto-3 de terceira ordem nas derivadas ao invés de um tensor de posto-2 como proposto em [18]. Este tensor de posto-3 é em certo sentido uma versão mais natural do tensor de Einstein. Vejamos sua forma:

$$\tilde{G}_{\mu\nu\rho} = E_{(\mu}{}^\alpha E_\nu{}^\beta E_{\rho)}{}^\gamma \phi_{\alpha\beta\gamma}. \quad (4.11)$$

Podemos mostrar (vide apêndice-C) que a ação de Chern-Simons de terceira ordem pode ser reescrita em termos deste tensor, o que por sua vez nos dá:

$$S_{CS3}^{(3)} = \frac{1}{2} \int d^3x \phi_{\mu\nu\lambda} \tilde{G}^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \int d^3x \phi_{\mu\nu\lambda} E^{\mu\alpha} E^{\nu\beta} E^{\lambda\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma}. \quad (4.12)$$

Essa formulação deixa evidente a simetria de calibre $\delta\phi_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{(\alpha}\Lambda_{\beta\gamma)}$ com $\Lambda_{\beta\gamma} = \Lambda_{\gamma\beta}$ e sem restrição sobre o seu traço. Observe a semelhança entre (4.12) e (4.4). É isso que justifica (4.11).

Dessa vez, vemos que aplicando três símbolos de Levi-Civita às equações de movimento, ou seja:

$$\epsilon^\gamma_{\mu\nu}\epsilon^\delta_{\lambda\alpha}\epsilon^\rho_{\beta\gamma}\tilde{G}_{\gamma\delta\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{\mu\nu\lambda\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (4.13)$$

com $R_{\mu\nu\lambda\alpha\beta\gamma}$ dado por (2.22). Desta forma está demonstrado segundo teorema de [18] que o termo de Chern-Simons de terceira ordem não possui conteúdo físico, portanto, também pode ser usado como termo de mistura na construção de uma ação mestra que interpole entre modelos auto-duais de spin-3. Portanto, temos pelo menos três tipos de termos de primeira, segunda e terceira ordem sem conteúdo físico que podem ser utilizados em provas de dualidade via ação mestra.

4.2 Ação mestra para spin-1 e spin-2

O método da mestra consiste em adicionar a lagrangiana auto-dual, no caso de spin-1, dada por (3.1), um termo de mistura entre os campos originais e campos duais. O critério necessário para a determinação do termo de mistura é que este não tenha conteúdo físico. Sabemos da seção anterior quais termos são os candidatos e podemos dessa forma construir a ação mestra. A ação que interpola entre os modelos *AD* e *MCS* foi pela primeira vez proposta por [8] e é dada por:

$$S_M = \int d^3x \left[\frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} (A_\mu - f_\mu) \partial_\nu (A_\alpha - f_\alpha) + j_\mu f^\mu \right]. \quad (4.14)$$

Após uma série de manipulações, e através de algumas mudanças de variáveis não é difícil verificar que os modelos *AD* e *MCS* podem ser resgatados através da ação mestra que foi proposta.

Com a adição do termo de fonte deriva-se uma equivalência entre funções

de correlação. de onde concluímos que

$$\langle f_{\mu_1}(x_1) \dots f_{\mu_N}(x_N) \rangle_{AD} = \left\langle \frac{F_{\mu_1}(x_1)}{m} \dots \frac{F_{\mu_N}(x_N)}{m} \right\rangle_{MCS} + T.C. \quad (4.15)$$

Onde F^μ nada mais é que o tensor dual dado por (3.5). $T.C$ refere-se a termos de contato, decorrentes do fato de que temos termos quadráticos na fonte após integração gaussiana em um dos campos. Por exemplo para a função de dois pontos isso nos daria:

$$\langle f_{\mu_1}(x_1) f_{\mu_2}(x_2) \rangle_{AD} = \left\langle \frac{F_{\mu_1}(x_1)}{m} \frac{F_{\mu_2}(x_2)}{m} \right\rangle_{MCS} + \frac{\eta_{\mu_1\mu_2} \delta(x_1 - x_2)}{m^2} \quad (4.16)$$

Em [3], e posteriormente em [2], propusemos também uma ação mestra interpolando entre os modelos auto-duais de spin-2. A ação é dada pela soma de três termos de mistura sem conteúdo físico ao modelo auto dual de primeira ordem:

$$\begin{aligned} S_M = & \int \left[\frac{m}{2} f \cdot df + \frac{m^2}{2} (f^2)_{FP} - \frac{m}{2} (f - A) \cdot d(f - A) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} (h - A) \cdot d\Omega(h - A) + \frac{1}{4m} \Omega(h - g) \cdot d\Omega(h - g) + j_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nas referências [2, 3] apresentamos de forma detalhada a prova da equivalência quântica entre os quatro modelos auto-duais de spin-2, comparando as funções de correlação. Demonstramos também em [32, 33], que através da técnica da ação mestra é possível obter uma relação de dualidade entre os modelos descrevendo dubletos e singletos de paridade massivos de spin-2. Na próxima seção apresentamos a ação mestra que fará a interpolação entre os quatro modelos auto-duais de spin-3 que apresentamos através do método da *ICN*.

4.3 Ação Mestra interpolando entre $AD(1)$ e $AD(2)$

A ação mestra será construída a partir do modelo auto dual de primeira ordem (3.19), adicionando a ele termos de mistura sem conteúdo físico. Neste caso

podemos usar o termo de Chern-Simons de primeira ordem, o termo de Einstein-Hilbert de segunda ordem bem como o termo de Chern-Simons de terceira ordem. A demonstração de que tais termos de mistura possuem soluções do tipo puro calibre segue da seção 4.1.3. Com isso temos:

$$\begin{aligned}
S_M = & \int \left[\frac{m}{2} \omega \cdot d\omega + \frac{m^2}{6} (\omega^2)_{SH} - \frac{m}{2} (\omega - g) \cdot d(\omega - g) \right. \\
& + \frac{1}{2} (h - g) \cdot d\Omega(h - g) - \frac{1}{2m} \Omega(h - \tilde{f}) \cdot d\Omega(h - \tilde{f}) \\
& \left. + \frac{m^2}{2} \omega_{\mu(\beta\gamma)} f^{\mu(\beta\gamma)}(A) + j_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\mu(\beta\gamma)} \right]. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

O subscrito SH refere-se a Singh-Hagen. $f_{\mu(\beta\gamma)}$ é dado por (3.53) e $g_{\mu(\beta\gamma)}$, $h_{\mu(\beta\gamma)}$, $\tilde{f}_{\mu(\beta\gamma)}$ são novos campos. Note que iniciamos com uma notação semelhante àquela de spin-2 onde:

$$\int (\omega^2)_{SH} = \int d^3x (\omega_\mu \omega^\mu - \omega_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\mu(\beta\gamma)}), \quad (4.19)$$

$$\int \omega \cdot d\omega = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} \omega_{\mu(\beta\gamma)} \partial_\nu \omega_\alpha^{(\beta\gamma)}, \quad (4.20)$$

$$\int \omega \cdot d\Omega(\omega) = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} \omega_{\mu(\beta\gamma)} \partial_\nu \Omega_\alpha^{(\beta\gamma)}. \quad (4.21)$$

Já que adicionamos como termos de mistura, os termos de Chern-Simons de primeira ordem, o termo de Einstein-Hilbert de segunda ordem e o termo de Chern-Simons de terceira ordem são todos sem conteúdo físico. É então trivial recuperar o modelo auto dual de primeira ordem a partir desta ação mestra simplesmente fazendo as seguintes mudanças de variáveis nesta ordem $\tilde{f} \rightarrow \tilde{f} + h$, $h \rightarrow h + g$ e $g \rightarrow g + \omega$. Desta forma os três termos de mistura em S_M se desacoplam o que nos habilita integrar funcionalmente em h , g e $\tilde{f}$ respectivamente sem afetar o espectro da teoria original pois nenhum deles possui conteúdo físico. Em seguida obtemos, derivando com respeito às fontes, a seguinte correlação:

$$\langle \omega_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots \omega_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_M = \langle \omega_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots \omega_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_{AD1}. \quad (4.22)$$

Por outro lado levamos em conta que se fizermos somente as mudanças $\tilde{f} \rightarrow \tilde{f} + h$ e $h \rightarrow h + g$ e em seguida integrarmos funcionalmente sobre $\tilde{f}$ e h

ficamos com:

$$S_M = \int \left[\frac{m}{2} \omega \cdot d\omega + \frac{m^2}{6} (\omega^2)_{SH} - \frac{m}{2} (\omega - g) \cdot d(\omega - g) + m^2 \omega_\mu A^\mu + j_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\mu(\beta\gamma)} \right], \quad (4.23)$$

que pode ser reorganizada sem dificuldade da seguinte forma:

$$S_M = \int \left(\omega_{\mu(\beta\gamma)} \tilde{g}^{\mu(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{6} (\omega^2)_{SH} - \frac{m}{2} g \cdot dg \right). \quad (4.24)$$

Onde:

$$\tilde{g}^{\mu(\beta\gamma)} = m \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu g_\alpha^{(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{2} f^{\mu(\beta\gamma)}(A) + j^{\mu(\beta\gamma)}. \quad (4.25)$$

Em (4.24) temos um termo quadrático e um termo linear em ω . Isso nos sugere integrar sobre ω de modo a obter uma ação em g . Uma forma de fazer isso é obtendo as equações de movimento de ω , e em seguida inverter ω em função de g . Derivando de (4.24) as equações de movimento para $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ temos:

$$\tilde{g}^{\mu(\beta\gamma)} = -\frac{m^2}{6} (\eta^{\mu\beta} \omega^\gamma + \eta^{\mu\gamma} \omega^\beta - \omega^{\beta(\mu\gamma)} - \omega^{\gamma(\mu\beta)}), \quad (4.26)$$

de onde temos também que, $\tilde{g}^\gamma = -m^2 \omega^\gamma / 2$. Após alguma manipulação, temos:

$$\omega_{\mu(\beta\gamma)} = \frac{1}{m^2} \tilde{\Omega}^{\mu(\beta\gamma)}(\tilde{g}). \quad (4.27)$$

Substituindo este resultado em (4.24) ficamos agora com:

$$S_M = \int \left[\frac{3}{2m^2} (2\tilde{g}_{\mu(\beta\gamma)} \tilde{g}^{\beta(\mu\gamma)} - \tilde{g}_{\mu(\beta\gamma)} \tilde{g}^{\mu(\beta\gamma)}) - \frac{m}{2} g \cdot dg \right]. \quad (4.28)$$

Substituindo (4.25) em (4.28) ficamos com uma ação de segunda ordem:

$$S_M = S_2 = \int \left[-\frac{1}{2} g \cdot d\Omega(g) - \frac{m}{2} g \cdot dg - \frac{m}{2} f(A) \cdot dg + j_{\mu(\beta\gamma)} F^{\mu(\beta\gamma)}(g, A) + \mathcal{O}(j^2) \right] + S'[A], \quad (4.29)$$

que é exatamente a ação do modelo auto-dual de segunda ordem de [23] incluindo a nova ação para o campo auxiliar A_μ dada em (3.68). Agora, derivando com respeito ao termo de fonte em (4.18) e (4.29) vamos ter:

$$\langle \omega_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots \omega_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_{SD1} = \langle F_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots F_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_{SD2} + T.C. \quad (4.30)$$

Onde temos o termo de fonte acoplado à combinação invariante $F_{\mu(\beta\gamma)}$ dada na expressão (3.64). Além disso, podemos facilmente demonstrar que o termo de interação entre os campos de spin-3 e os campos vetoriais é o mesmo obtido anteriormente usando o método de *ICN*, ou seja $-\frac{m}{2}f(A) \cdot dg = 2m\xi_\mu A^\mu$, o qual também é invariante de calibre sob (3.48). As equações de movimento invariantes de calibre do modelo auto-dual de segunda ordem correspondem às equações de movimento do modelo auto-dual de primeira ordem via mapeamento dual de $\omega_{\mu(\beta\gamma)} \rightarrow F_{\mu(\beta\gamma)}$ onde $F_{\mu(\beta\gamma)}$ é dado por (3.64).

4.4 Ação Mestra interpolando entre $AD(2)$ e $AD(3)$

Consideremos novamente a ação mestra escrita em (4.18). Fazendo $\tilde{f} \rightarrow \tilde{f} + h$, porém sem fazer a mudança $h \rightarrow h + g$ a ação mestra pode então ser desenvolvida até (4.29), com a seguinte diferença:

$$\begin{aligned} S_M = & \int \left[-\frac{1}{2}g \cdot d\Omega(g) - \frac{m}{2}g \cdot dg + \frac{1}{2}(h - g) \cdot d\Omega(h - g) \right. \\ & \left. - \frac{m}{2}f(A) \cdot dg - j_{\mu(\beta\gamma)}F^{\mu(\beta\gamma)}(g, A) + \mathcal{O}(j^2) \right] + S'[A]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Não é difícil mostrar que:

$$\int h \cdot d\Omega(g) = \int g \cdot d\Omega(h). \quad (4.32)$$

Por isso podemos reescrever (4.31) tal que:

$$\begin{aligned} S_M = & \int \left[-\frac{m}{2}g \cdot dg - g \cdot d\Omega(h) - mg \cdot df(A) \right. \\ & \left. + \frac{1}{m}g \cdot d\Omega(j) + \frac{1}{2}h \cdot d\Omega(h) - j_{\mu(\beta\gamma)}F^{\mu(\beta\gamma)} + \mathcal{O}(j^2) \right] + S'[A] \end{aligned} \quad (4.33)$$

que pode ser reorganizada como:

$$\begin{aligned} S_M = & \int \left[-\frac{m}{2}(g + C) \cdot d(g + C) + \frac{m}{2}C \cdot dC + \frac{1}{2}h \cdot d\Omega(h) - j_{\mu(\beta\gamma)}F^{\mu(\beta\gamma)}(A) \right] \\ & + S'[A]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Onde definimos:

$$C = \frac{\Omega(h)}{m} - \frac{\Omega(j)}{m^2} + f(A). \quad (4.35)$$

Fazendo $g \rightarrow g - C$ em (4.34), o primeiro termo se desacopla, e como ficamos com um termo gaussiano podemos integrar sobre g . Após substituir C ficamos com:

$$S_M = S_3 = \int \left[\frac{1}{2} h \cdot d\Omega(h) + \frac{1}{2m} \Omega(h) \cdot d\Omega(h) + f(A) \cdot d\Omega(h) + j_{\mu(\beta\gamma)} G^{\mu(\beta\gamma)}(h, A) + \mathcal{O}(j^2) \right] + S''[A]. \quad (4.36)$$

Onde temos o dual $G^{\mu(\beta\gamma)}(h, A)$ dado por (3.77), o que nos dá o mapeamento dual:

$$\omega^{\mu(\beta\gamma)} \leftrightarrow G^{\mu(\beta\gamma)} = -\frac{1}{m} \Omega^{\mu(\beta\gamma)}(F) + f^{\mu(\beta\gamma)}(A), \quad (4.37)$$

com F dado pela expressão (3.64) e $S''[A]$ dado por (3.78). Logo, o resultado coincide exatamente com (3.79) fazendo a mudança dos campos não simétricos para os campos simétricos dada em (2.7). Derivando com respeito ao termo de fonte em (4.18) e (4.36) temos a equivalência das funções de correlação:

$$\langle \omega_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots \omega_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_{AD1} = \langle G_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots G_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_{AD3+T.C.} \quad (4.38)$$

Observe que $G_{\mu(\beta\gamma)}$ é invariante sob as transformações de simetria (3.48 e 3.69). Na próxima seção, faremos a interpolação entre o modelo auto-dual de terceira ordem e um modelo auto-dual de quarta ordem nas derivadas.

4.5 Ação mestra interpolando entre $AD(3)$ e $AD(4)$

Sem fazer nenhuma das mudanças de variáveis na ação (4.18) podemos desenvolver nossos cálculos até o ponto de (4.36), e teríamos:

$$S_M = \int \left[\frac{1}{2} h \cdot d\Omega(h) + \frac{1}{2m} \Omega(h) \cdot d\Omega(h) - \frac{1}{2m} \Omega(h - \tilde{f}) \cdot d\Omega(h - \tilde{f}) + f(A) \cdot d\Omega(h) + j_{\mu(\beta\gamma)} G^{\mu(\beta\gamma)}(h, A) + \mathcal{O}(j^2) \right] + S''[A]. \quad (4.39)$$

É óbvio que fazendo $\tilde{f} \rightarrow \tilde{f} + h$ recuperamos o modelo auto-dual de terceira ordem. Por outro lado não fazendo a mudança de variáveis a ação (4.39) pode

ser reescrita como:

$$S_M = \int \left[\frac{1}{2} (h - \tilde{C}) \cdot d\Omega(h - \tilde{C}) - \frac{1}{2} \tilde{C} \cdot d\Omega(\tilde{C}) - \frac{1}{2m} \Omega(\tilde{f}) \cdot d\Omega(\tilde{f}) \right. \\ \left. + j_{\mu(\beta\gamma)} G^{\mu(\beta\gamma)}(A) \right] + S''[A] \quad (4.40)$$

onde temos $\tilde{C}$ dado por:

$$\tilde{C} = \frac{1}{m} \Omega(\tilde{f}) + f(A) - \frac{1}{m^2} \tilde{\Omega}(j). \quad (4.41)$$

Fazendo $h \rightarrow h + \tilde{C}$, após algum cálculo teremos então uma ação de quarta ordem na variável $\tilde{f}_{\mu(\beta\gamma)}$ que pode ser escrita como:

$$S_M = S_{AD4}^{(3)} = \int \left[-\frac{1}{2m} \Omega(\tilde{f}) \cdot d\Omega(\tilde{f}) - \frac{1}{2m^2} \Omega(\tilde{f}) \cdot d\Omega(\Omega(\tilde{f})) \right. \\ \left. - \frac{1}{m} \Omega(\tilde{f}) \cdot d\Omega(f(A)) - j_{\mu(\beta\gamma)} H^{\mu(\beta\gamma)} + \mathcal{O}(j^2) \right] + S'''[A]. \quad (4.42)$$

O resultado que obtivemos é exatamente o mesmo encontrado via método da imersão de calibre de Noether (vide 4.42). A ação auxiliar é dada pela expressão (3.93), contendo agora um termo de Maxwell na ação. Os demais termos estão em sua forma explícita na expressão (3.91). Para derivar identidades entre funções de correlação entre o modelo auto-dual de primeira ordem e o modelo auto-dual de quarta ordem devemos explicitar o termo de fonte em (4.42). Isso pode ser feito notando que:

$$\omega^{\mu(\beta\gamma)} \leftrightarrow H^{\mu(\beta\gamma)} = -\frac{1}{m} \Omega^{\mu(\beta\gamma)}(G) + f^{\mu(\beta\gamma)}(A), \quad (4.43)$$

onde temos G dado pela expressão (4.37). Note que $H^{\mu(\beta\gamma)}$ é invariante sob as transformações de simetria (3.48, 3.69, 3.82). Derivando as funções de correlação com respeito aos termos de fonte do modelo auto-dual de primeira e quarta ordem temos:

$$\langle \omega_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots \omega_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_{AD1} = \langle H_{\mu_1(\beta_1\gamma_1)}(x_1) \dots H_{\mu_N(\beta_N\gamma_N)}(x_N) \rangle_{AD4+T.C.} \quad (4.44)$$

Isso nos leva à conclusão de que os quatro modelos auto-duais são quanticamente equivalentes segundo os mapeamentos duais (4.30), (4.38) e (4.44). Essa equivalência só foi possível graças ao fato de que os termos de Chern-Simons de primeira e terceira ordem bem como o termo de Singh-Hagen são todos sem conteúdo físico, ou seja triviais em $D = 2 + 1$. Com esses mapeamentos duais e de posse das equações de movimento somos capazes de recuperar a partir das equações de movimento dos modelos auto-duais de ordem maior as equações de movimento do modelo auto-dual de primeira ordem.

Capítulo 5

A relação entre dubletos e singletos de paridade

É possível através da técnica da solda, estabelecer uma relação entre dubletos e singletos de paridade. Mostraremos que através da teoria de Proca, a qual descreve um dubleto de paridade ± 1 , é possível baixando a ordem com a introdução de um campo auxiliar e em seguida fazendo uma rotação de 45° no espaço dos campos obter um par de modelos auto-duais de primeira ordem. Em seguida mostraremos que a mesma coisa é possível no contexto de teorias de spin-2. Faremos isso a partir da teoria de Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli que descreve um dubleto de paridade ± 2 , e então da mesma forma como fizemos para spin-1 obteremos um par de modelos auto-duais descrevendo singletos de paridade. Nossa proposta para este capítulo é esboçar de forma especulativa e preliminar como é estabelecida a relação entre singletos e dubletos de paridade de spin-3. Aqui, de antemão teremos uma dificuldade extra que advém do fato de que as teorias de spin-3 necessitam de um campo auxiliar vetorial para a retirada de graus de liberdade espúrios que não estão contidos no campo de posto-3 $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$. Não sabemos a princípio como fazer a solda dos modelos levando em conta as lagrangianas de campos auxiliares. Por isso vamos tratar apenas do setor de spin-3. É óbvio então que as lagrangianas consideradas possuirão patologias, ou

seja, sem campos auxiliares as teorias irão carregar fantasmas de spin mais baixo em seu espectro. Porém, do nosso ponto de vista isso serve como um laboratório para um futuro entendimento mais profundo sobre o papel dos campos auxiliares na decomposição de dubletos em singletos de paridade.

5.1 Dubletos e singletos de paridade de spin-1 e spin-2

5.1.1 spin-1

A forma natural pela qual se descreve um dubleto de paridade de paridade $+1$ e -1 massivo em $D = 2 + 1$ dimensões é através do modelo de Proca. O modelo consiste da adição de um termo massivo quadrático no campo A_μ à lagrangiana de Maxwell.

$$S_P = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right). \quad (5.1)$$

A adição do termo de massa quebra uma simetria importante da teoria de Maxwell, a simetria de calibre

$$\delta_\Lambda A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \quad (5.2)$$

A equação de movimento do modelo de Proca é:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (5.3)$$

A princípio A_μ possui três componentes independentes em $D = 2 + 1$. A condição $\partial_\mu A^\mu = 0$ conhecida como condição de transversalidade ¹, elimina um grau de liberdade correspondente à propagação de um modo de spin-0, nos deixando-nos

¹A condição de transversalidade é consequência direta das equações de movimento (o que pode ser visto aplicando ∂_ν à (5.3)) e tem papel importante na eliminação de graus de liberdade espúrios. Em $D = 3 + 1$ dimensões, temos $n = 2s + 1$ graus de liberdade. Com $s = 1$ temos 4 componentes independentes e a condição de transversalidade eliminando uma componente nos deixa com três modos de propagação.

com duas componentes de spin $+1$ e -1 que estão misturadas nas equações de movimento. Em $D = 2 + 1$ dimensões pode-se mostrar que é possível desacoplar estes graus de liberdade físicos de forma local. Existe assim, um par de densidades de lagrangiana associadas a estas projeções. A estas lagrangianas damos o nome de auto-duais. Vejamos como isso acontece. Primeiramente baixamos a ordem do modelo de Proca adicionando um campo auxiliar B_μ elementar, obtendo uma teoria de Proca linearizada.

$$\mathcal{L}_{PL} = \frac{1}{2} B^\mu B_\mu - \epsilon^{\mu\nu\alpha} B_\mu \partial_\nu A_\alpha + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu. \quad (5.4)$$

Note que integrando no campo auxiliar B_μ recuperamos o termo de Maxwell. Se agora fizermos uma rotação de 45° , teremos:

$$B_\mu \rightarrow \frac{m}{\sqrt{2}} \tilde{B}_\mu + \frac{m}{\sqrt{2}} \tilde{A}_\mu \quad ; \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{A}_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_\mu. \quad (5.5)$$

Temos dois modelos auto-duais desacoplados, com spins distintos $+1$ e -1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m^2}{2} \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{A}_\mu \partial_\nu \tilde{A}_\alpha + \frac{m^2}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{B}_\mu \tilde{B}^\mu + \frac{m}{2} \tilde{B}_\mu \partial_\nu \tilde{B}_\alpha \\ &= \mathcal{L}_{AD}(\tilde{A}_\mu, m) + \mathcal{L}_{AD}(\tilde{B}_\mu, -m). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Da mesma forma que podemos separar os spins $+1$ e -1 descritos pelo modelo de Proca, através da rotação (5.5) podemos também unilas novamente através da técnica de Solda como foi explorado pelos autores em [6] segundo uma transformação de simetria. Da mesma forma, usando do fato de que os modelos auto-duais de primeira ordem obtidos em (5.6) são quanticamente equivalentes aos modelos de Maxwell-Chern-Simons os autores em [5], sem o uso das equações de movimento, generalizaram o procedimento de solda usando modelos *MCS* com massas e spins distintos, resultando daí um modelo *MCS*-Proca ou Auto-Dual Generalizado de spin-1 ADG_1 .

5.1.2 spin-2

Para descrever um dubleto de spin ± 2 somos naturalmente levados a considerar algumas analogias com o que sabemos para spin-1. Pode-se então

perguntar quais seriam os termos equivalentes aos termos de Maxwell e Proca de forma a compor uma teoria como aquela estudada na seção anterior. Uma forma de descrever uma partícula massiva de spin-2 em D dimensões é através da lagrangiana de Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli *EHFP*:

$$S_{EHFP} = \int d^D x \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial_\nu h_{\lambda\mu} \partial^\nu (h^{\lambda\mu} + h^{\mu\lambda})}{2} + \partial_\nu h \partial^\nu h - 2\partial_\nu h^{\lambda\nu} \partial_\lambda h \right. \\ \left. + \partial_\nu h^{\nu\lambda} \partial^\mu h_{\lambda\mu} + \frac{\partial_\nu h_{\lambda\mu} (\partial^\lambda h^{\nu\mu} + \partial^\mu h^{\lambda\nu})}{2} + m^2 (h^2 - h_{\mu\nu} h^{\nu\mu}) \right]. \quad (5.7)$$

O campo fundamental dessa teoria, $h_{\mu\nu}$, consiste de uma flutuação do *dreinbein*, $e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica plana de Minkowski com assinatura $(-, +, +)$. A expansão até a ordem quadrática em $h_{\mu\nu}$ da ação de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} R, \quad (5.8)$$

fornece-nos o termo de dinâmica da ação (5.7). Enquanto o termo de massa equivalente ao termo de Proca, é conhecido como termo de Fierz-Pauli.

Em $D=2+1$ dimensões, podemos reescrever a ação de *EHFP* da seguinte forma:

$$S_{EHFP} = \int d^3 x \left[\frac{1}{2m^2} T_{\mu\nu} T^{\nu\mu} - \frac{1}{4m^2} T^2 + \frac{m^2}{2} (h^2 - h_{\mu\nu} h^{\nu\mu}) \right], \quad (5.9)$$

onde $T_{\mu\nu} \equiv m \epsilon_{\mu\alpha\beta} \partial^\alpha h^\beta_\nu$ com traço $T = T^\mu_\mu$. Da forma como reescrevemos a ação em $D = 2 + 1$ é fácil verificar que o termo de massa em (5.9) quebra a simetria de calibre

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu. \quad (5.10)$$

Mantendo um paralelo com o que fizemos para spin-1, vamos obter agora o modelo auto-dual para partículas de spin-2 em $D = 2 + 1$ através da adição de um campo auxiliar elementar $W_{\mu\nu}$ que nos permite baixar a ordem, vide [25], da densidade de lagrangiana (5.9) que é de segunda ordem, da seguinte forma:

$$S_{EHFP}^{(1)} = \int d^3 x \left[\frac{m^2}{2} (W^2 - W_{\mu\nu} W^{\nu\mu}) + W_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} (h^2 - h_{\mu\nu} h^{\nu\mu}) \right]. \quad (5.11)$$

Fazendo $W_{\mu\nu} \rightarrow (\tilde{W}_{\mu\nu} - \tilde{h}_{\mu\nu})/\sqrt{2}$ e $h_{\mu\nu} \rightarrow (\tilde{h}_{\mu\nu} + \tilde{W}_{\mu\nu})/\sqrt{2}$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
S_{EHFP}^{(1)} &= \int d^3x \left[\frac{m^2}{2}(\tilde{W}^2 - \tilde{W}_{\mu\nu}\tilde{W}^{\nu\mu}) + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\tilde{W}_{\mu\nu}\partial_\alpha\tilde{W}_\beta{}^\nu \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{2}(\tilde{h}^2 - \tilde{h}_{\mu\nu}\tilde{h}^{\nu\mu}) - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\tilde{h}_{\mu\nu}\partial_\alpha\tilde{h}_\beta{}^\nu \right] \\
&= S_{AD_2}^{(1)}(+m) + S_{AD_2}^{(1)}(-m).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Temos então a ação para uma teoria auto-dual de primeira ordem (3.12), originalmente obtida por [7], descrevendo um singlete massivo de spin $+2$ ou um de spin -2 em $D = 2 + 1$. Assim como para spin-1 podemos repetir o procedimento de solda unindo novamente os singletos de paridade $+2$ e -2 num modelo de dubleto. No nosso trabalho de mestrado [25] mostramos que a solda de dois modelos auto-duais de segunda ordem (3.14) de [7], leva-nos a um resultado análogo àquele obtido para spin-1 ou seja um modelo de Einstein-Hilbert-Chern-Simons-Fierz-Pauli ou Auto-dual Generalizado de spin-2 ADG_2 dado por:

$$\begin{aligned}
S_{Solda} &= S_{AD_2}^{(2)}(+m_+) \oplus S_{AD_2}^{(2)}(-m_-) \\
&= \int \left[-\frac{f \cdot d\Omega(f)}{4} + \frac{(m_+ - m_-)}{2} f \cdot df + \frac{m_+ m_-}{2} (f^2)_{FP}, \right]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

onde o símbolo “ $\oplus$ ” significa solda. O primeiro termo de (5.13) corresponde ao termo de Einstein-Hilbert, o segundo ao termo do tipo Chern-Simons (de primeira ordem em derivadas) e por fim, de uma forma construtivista, geramos o termo de massa não trivial de Fierz-Pauli proposto pela primeira vez em [41, 42]. Se fizermos $m_+ = m_-$ teremos um modelo análogo ao modelo de Proca, ou seja, o modelo de Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli. Já no início do período de doutorado, curiosamente verificamos que o caso de spin-2 poderia ser mais explorado. Fizemos então a solda de dois modelos auto-duais de terceira ordem nas derivadas [8] de massas e spins distintos, isto é $+m_+$ e $-m_-$, o resultado apresentado em [33] nos permitiu concluir que a solda destes modelos nos leva a um modelo de dubleto consistindo da soma de três termos, sendo eles o termo-K [1] de quarta ordem nas derivadas, um termo de Chern-Simons gravitacional de terceira ordem [8] e um termo de Einstein-Hilbert. De modo que quando tomamos $m_+ = m_-$, recuperamos

a teoria “*New Massive Gravity*” de [1] na forma linearizada. Surpeendentemente, em [33] verificamos que fazendo em seguida a solda de dois modelos auto-duais de quarta ordem temos exatamente o mesmo resultado obtido a partir da solda dos modelos de terceira ordem, ou seja:

$$\begin{aligned}
S_{Solda} &= S_{AD_2}^{(3)}(+m_+) \oplus S_{AD_2}^{(3)}(-m_-) \\
&= S_{AD_2}^{(4)}(+m_+) \oplus S_{AD_2}^{(4)}(-m_-) \\
&= \left[\sqrt{-g}R - \frac{m_+ - m_-}{2m_+m_-} \epsilon^{\mu\nu\rho} \Gamma_{\mu\gamma}^\epsilon \left(\partial_\nu \Gamma_{\epsilon\rho}^\gamma + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\delta}^\gamma \Gamma_{\rho\epsilon}^\delta \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{-g}}{m_+m_-} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) \right]_{ff}, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

com $S_{AD_2}^{(3)}$ e $S_{AD_2}^{(4)}$ dados por (3.16) e (3.18) respectivamente. A idéia básica do mecanismo de solda generalizada foi apresentada em detalhes nas referências [32, 33]. Uma vez que iremos fazer o mesmo procedimento a seguir para teorias de spin-3 isso ficaria um pouco repetitivo, portanto escolhemos apresentar somente os principais resultados. No entanto, haja visto que uma situação parecida pode talvez acontecer com teorias de spin-3, vamos entender porque os resultados da solda de dois modelos auto-duais de terceira ordem e a solda de dois modelos auto-duais de quarta ordem nos dão o mesmo resultado.

O ponto chave é que existe uma certa liberdade na definição da corrente de Noether devido a uma integração por partes. Em ambos os modelos, $S_{AD_2}^{(3)}$ e $S_{AD_2}^{(4)}$ podemos escrever:

$$\delta S_{Solda} = \delta \left(S_{AD_2}^{(r)}(A) + S_{AD_2}^{(r)}(B) \right) = \int d^3x J^{(r)} \partial^p \omega, \tag{5.15}$$

com A e B sendo campos tensoriais de posto-2 quaisquer que estão sendo soldados. Além disso $r = 3, 4$, e o símbolo ∂^p representa algum operador diferencial de ordem p cuja forma específica não tem importância e pode ser diferente em cada caso. Então, ao passo que $S_{AD_2}^{(r)}$ contém um termo de ordem r e outro de ordem $r - 1$ a liberdade devido a integração por partes nos permite escolher um operador de ordem p desde que $p = 0, 1, 2 \dots r - 1$. Isso por sua vez nos dá as seguintes

correntes de Noether:

$$J^{(3)} = \partial^{3-p}D + \partial^{2-p}C \quad , \quad (5.16)$$

$$J^{(4)} = \partial^{4-p}C + \partial^{3-p}D \quad . \quad (5.17)$$

Aqui temos, $C = A + \alpha B$ e $D = m_+A - \alpha m_-B$ e $\alpha = \sqrt{m_+/m_-}$. Após a adição de um campo auxiliar apropriado H tal que $\delta H = -\partial^p\omega$, concluiremos que:

$$\left(S_{AD_2}^{(r)}(A) + S_{AD_2}^{(r)}(B) + \int d^3x J^{(r)}H \right) = \int d^3x \delta J^{(r)}H, \quad (5.18)$$

nos casos em que temos trabalhado temos o seguinte:

$$\delta J^{(3)} = -(m_+ - \alpha^2 m_-)\partial^{3-2p}\delta H - (1 + \alpha^2)\partial^{2-2p}\delta H \quad , \quad (5.19)$$

$$\delta J^{(4)} = -(1 + \alpha^2)\partial^{4-2p}\delta H - (m_+ - \alpha^2 m_-)\partial^{3-2p}\delta H \quad . \quad (5.20)$$

Para evitar qualquer dinâmica para os campos auxiliares, a escolha $\alpha^2 = m_+/m_-$ deve ser feita. Além disso se escolhermos:

$$\left. \begin{array}{l} r = 3 \Rightarrow p = 1 \\ r = 4 \Rightarrow p = 2 \end{array} \right\} \delta J^{(r)} = -(1 + \alpha^2)\delta H. \quad (5.21)$$

Ambas as correntes de Noether (5.16, 5.17) terão então termos de primeira e segunda ordem, embora $S_{AD_2}^{(r)}$ seja de ordem “ r ”, com $r = 3, 4$. Na lagrangiana de solda aparecem termos quadráticos na corrente, e isso por sua vez nos leva a uma teoria com termos de ordem 4, 3 e 2 o que corresponde precisamente ao modelo auto-dual generalizado obtido em (5.14). Na verdade o mesmo argumento vale para a solda generalizada dos modelos auto-duais de segunda ordem (5.13), bem como para a solda dos modelos de Maxell-Chern-Simons de spin-1.

5.2 Dubletos e singletos de paridade de spin-3

Analogamente ao que se conhece para spins mais baixos, vamos escrever de forma intuitiva uma possível ação que descreva um dubleto de spin-3. O

natural é considerar o termo de segunda ordem de Singh e Haggen adicionando a ele o termo de massa presente no modelo auto-dual de primeira ordem, ou seja:

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)} \Omega^{\mu(\beta\gamma)}(\omega) + \frac{m^2}{6} (\omega^\mu \omega_\mu - \omega_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\beta(\mu\gamma)}) \right]. \quad (5.22)$$

O procedimento de solda levando em conta os campos auxiliares necessários para descrever um dubleto de spin-3 está sob investigação. Aqui trataremos somente o setor de spin-3 e obviamente a teoria não descreverá corretamente o dubleto de spin-3. Porém isso nos servirá como um bom laboratório para no futuro realizar a solda envolvendo campos auxiliares. Vamos começar reproduzindo o que fizemos para spin-1 e spin-2. Ou seja baixando a ordem de (5.22) e em seguida fazendo uma rotação de 45° no espaço dos campos. Baixando a ordem do modelo acima com a adição de um campo auxiliar $b_{\mu(\beta\gamma)}$ temos a seguinte teoria de primeira ordem nas derivadas:

$$S^{(1)} = \int d^3x \left[\frac{1}{6} (b^\mu b_\mu - b_{\mu(\beta\gamma)} b^{\beta(\mu\gamma)}) - b_{\mu(\beta\gamma)} \xi^{\mu(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{6} (\omega^\mu \omega_\mu - \omega_{\mu(\beta\gamma)} \omega^{\beta(\mu\gamma)}) \right], \quad (5.23)$$

fazemos agora uma rotação de 45 graus nos campos, tal que:

$$b_{\mu(\beta\gamma)} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{2}} c_{\mu(\beta\gamma)} + \frac{m}{\sqrt{2}} a_{\mu(\beta\gamma)}, \quad (5.24)$$

$$\omega_{\mu(\beta\gamma)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} a_{\mu(\beta\gamma)} - \frac{1}{\sqrt{2}} c_{\mu(\beta\gamma)}. \quad (5.25)$$

Substituindo de volta em (5.23), teremos um par de lagrangianas correspondentes somente ao setor de spin-3 dos modelos auto-duais de primeira ordem.

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \int d^3x \left[\frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} a_{\mu(\beta\gamma)} \partial_\nu a_\alpha^{(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{6} (a^\mu a_\mu - a_{\mu(\beta\gamma)} a^{\beta(\mu\gamma)}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} c_{\mu(\beta\gamma)} \partial_\nu c_\alpha^{(\beta\gamma)} + \frac{m^2}{6} (c^\mu c_\mu - c_{\mu(\beta\gamma)} c^{\beta(\mu\gamma)}) \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Da mesma forma como ocorreu para spins 1 e 2. Notamos que é possível separar as helicidades misturadas no modelo de dubletos em um par de lagrangianas desacopladas por uma rotação descrevendo spins opostos. Na próxima seção, a exemplo do que fizemos em [32, 33] iremos analisar a solda dos setores de spin-3 dos modelos auto-duais de segunda e terceira ordem.

5.3 Solda dos modelos auto-duais de segunda ordem

A solda de dois modelos de Maxwell-Chern-Simons nos serviu de inspiração para a solda de dois modelos auto-duais de segunda ordem para partículas massivas de spin-2. Portanto é um caminho natural tentar fazer a solda de dois modelos auto-duais de segunda ordem para partículas massivas de spin-3 desconsiderando o campo auxiliar vetorial. Iremos fazer essa abordagem utilizando somente os setores de spin-3. Sendo assim partimos das ações:

$$S_+^{(2)} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)}(a) \Omega^{\mu(\beta\gamma)} + \frac{m_+}{2} a_{\mu(\beta\gamma)} \xi^{\mu(\beta\gamma)}(a) \right], \quad (5.27)$$

$$S_-^{(2)} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)}(b) \Omega^{\mu(\beta\gamma)} - \frac{m_-}{2} b_{\mu(\beta\gamma)} \xi^{\mu(\beta\gamma)}(b) \right]. \quad (5.28)$$

As ações acima descrevem setores com massas diferentes e spins +3 e -3, as teorias carregam no espectro fantasmas de spin mais baixo. Ambos modelos são invariantes por transformações rígidas da forma $\delta_\phi a_{\mu(\beta\gamma)} = \phi_{\mu(\beta\gamma)}$ e $\delta_\phi b_{\mu(\beta\gamma)} = \phi_{\mu(\beta\gamma)}$. O procedimento de solda consiste em elevar essas simetrias à nível local relacionando-as da seguinte forma:

$$\delta_\phi a_{\mu(\beta\gamma)} = \phi_{\mu(\beta\gamma)} \quad , \quad \delta_\phi b_{\mu(\beta\gamma)} = \alpha \phi_{\mu(\beta\gamma)}, \quad (5.29)$$

com $\phi_{\mu(\beta\gamma)} = \phi_{\mu(\beta\gamma)}(x)$ e α uma constante arbitrária a priori. Levando em conta estas transformações locais teremos, após somar as variações de ambas, o seguinte resultado:

$$\delta_\phi (S_+^{(2)} + S_-^{(2)}) = \int d^3x J_{\mu(\beta\gamma)} \delta \xi^{\mu(\beta\gamma)}(\phi), \quad (5.30)$$

onde temos a corrente de Noether dada por:

$$J_{\mu(\beta\gamma)} = \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(h) + m_+ \tilde{h}_{\mu(\beta\gamma)}, \quad (5.31)$$

com:

$$h_{\mu(\beta\gamma)} = a_{\mu(\beta\gamma)} + \alpha b_{\mu(\beta\gamma)} \quad , \quad \tilde{h}_{\mu(\beta\gamma)} = m_+ a_{\mu(\beta\gamma)} - \alpha m_- b_{\mu(\beta\gamma)}. \quad (5.32)$$

Desta forma estamos verificando que a soma simplesmente das ações de segunda ordem por si só não é invariante sob as transformações locais (5.28). Iremos então adicionar um campo auxiliar que tenha uma transformação de simetria apropriada tal que cancele exatamente (5.30). Portanto, seja o campo auxiliar $H_{\mu(\beta\gamma)}$ com transformação de simetria dada por $\delta H_{\mu(\beta\gamma)} = -\delta\xi_{\mu(\beta\gamma)}(\phi)$. Logo:

$$\delta \left(S_+^{(2)} + S_-^{(2)} + \int d^3x H^{\mu(\beta\gamma)} J_{\mu(\beta\gamma)} \right) = \int d^3x H^{\mu(\beta\gamma)} \delta J_{\mu(\beta\gamma)}. \quad (5.33)$$

Calculando a variação da corrente de Noether temos:

$$\delta J_{\mu(\beta\gamma)} = \delta\Omega_{\mu(\beta\gamma)} + (m_+ - \alpha^2 m_-) \delta\phi_{\mu(\beta\gamma)}. \quad (5.34)$$

Agora, notamos facilmente que o segundo termo da expressão imediatamente acima pode ser cancelado [5] com uma escolha $\alpha^2 = m_+/m_-$. Desta forma a variação da corrente de Noether fica dada por:

$$\delta J_{\mu(\beta\gamma)} = -(1 + \alpha^2) \delta\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(H). \quad (5.35)$$

Substituindo do lado direito de (5.33), teremos após alguma álgebra a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \delta \left(S_+^{(2)} + S_-^{(2)} \right) = \\ & - \delta \left[\int d^3x \left(H^{\mu(\beta\gamma)} J_{\mu(\beta\gamma)} + 3(1 + \alpha^2) H^{\mu(\beta\gamma)} H_{\beta(\mu\gamma)} - \frac{3(1 + \alpha^2)}{2} H^{\mu(\beta\gamma)} H_{\mu(\beta\gamma)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Usando as equações de movimento para o campo auxiliar temos $H_{\mu(\beta\gamma)}$ em função de $J_{\mu(\beta\gamma)}$.

$$H_{\mu(\beta\gamma)} = -\frac{1}{6(1 + \alpha^2)} (J_{\beta(\mu\gamma)} + J_{\gamma(\mu\beta)} - \eta_{\mu\beta} J_\gamma - \eta_{\mu\gamma} J_\beta). \quad (5.37)$$

Substituindo (5.37) em (5.36) vamos ter a ação correspondente à solda de dois modelos auto-duais de segunda ordem descrevendo os setores de spin 3. Essa ação é dada por:

$$S_{solda} = S_+^{(2)} + S_-^{(2)} + \frac{1}{6(1 + \alpha^2)} \int d^3x (J_\mu J^\mu - J_{\mu(\beta\gamma)} J^{\beta(\mu\gamma)}). \quad (5.38)$$

Resta-nos agora fazer a substituição de (5.31) em (5.38). Isto nos leva a:

$$\begin{aligned}
S_{solda} = & S_+^{(2)} + S_-^{(2)} + \frac{1}{6(1+\alpha^2)} \int d^3x \left(\Omega_\mu(h) \Omega^\mu(h) + 2\Omega_\mu(h) \tilde{h}^\mu + \tilde{h}_\mu \tilde{h}^\mu \right. \\
& \left. - \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(h) \Omega^{\beta(\mu\gamma)}(h) - 2\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(h) \tilde{h}^{\beta(\mu\gamma)} - \tilde{h}_{\mu(\beta\gamma)} \tilde{h}^{\beta(\mu\gamma)} \right), \quad (5.39)
\end{aligned}$$

que pode ser reescrito após alguns cálculos em função de uma única combinação dos campos invariante sob (5.29):

$$f_{\mu(\beta\gamma)} = \alpha a_{\mu(\beta\gamma)} - b_{\mu(\beta\gamma)}. \quad (5.40)$$

Em termos desta combinação invariante, temos a seguinte expressão para a ação correspondente à solda dos modelos auto-duais:

$$\begin{aligned}
S_{solda} = & \frac{1}{(1+\alpha^2)} \int d^3x \left[\frac{1}{2} \xi_{\mu(\beta\gamma)} \Omega^{\mu(\beta\gamma)}(f) + \frac{(m_+ - m_-)}{2} f_{\mu(\beta\gamma)} \xi^{\mu(\beta\gamma)}(f) \right. \\
& \left. + \frac{m_+ m_-}{6} (f_\mu f^\mu - f_{\mu(\beta\gamma)} f^{\beta(\mu\gamma)}) \right]. \quad (5.41)
\end{aligned}$$

O resultado acima, embora não corresponda a uma descrição completa da partícula massiva de spin-3 em $D = 2 + 1$ nos dá uma luz sobre a relação entre os singletos e dubletos de paridade de spin-3. Notamos que o resultado, no que diz respeito ao setor de spin-3, é bastante similar ao resultado que encontramos ao soldar os singletos de paridade de spin-1 e 2 em [32, 33]. Para massas iguais o termo de Chern-Simons de primeira ordem é cancelado e obtemos a teoria incompleta proposta em (5.23) para descrever um dubleto de spin-3. Outra questão importante, já observada no caso de spin-2 é que sob a ótica desse método estamos gerando de maneira original o termo massivo para spin-3, o qual possui uma estrutura não trivial $(f_\mu f^\mu - f_{\mu(\beta\gamma)} f^{\beta(\mu\gamma)})$. O termo de massa da forma como foi escrito foi proposto em [23] por inspiração da formulação não simétrica de Vasiliev [27]. A ação obtida aqui não contém campos auxiliares. Como foi observado em [24, 36, 35] a ação completa deve conter campos auxiliares a fim de descrever corretamente apenas dois estados de spins ± 3 .

Devemos fazer uma observação sobre o termo de massa de (5.22). Utilizando a mudança de variáveis que relaciona as duas notações (parcialmente

simétrica e totalmente simétrica) dada por (2.7), o termo cinético de (5.22) corresponde ao termo cinético de [36] (vide apêndice - C). Porém, segundo a mesma mudança de variáveis o termo de massa de (5.22) resulta em ²:

$$\frac{m^2}{6}(\omega^\mu\omega_\mu - \omega_{\mu(\beta\gamma)}\omega^{\beta(\mu\gamma)}) = -\frac{m^2}{18}[\phi_{\mu\beta\gamma}\phi^{\mu\beta\gamma} - 3\alpha\phi_\mu\phi^\mu], \quad (5.42)$$

com $\alpha = 7/8$. Como nossa massa corresponde a três vezes a massa utilizada em [36] ($m = 3\tilde{m}$), a única diferença que temos está no fator α de [36], que segundo aqueles autores deveria ser $\alpha = 1$. A diferença está na lagrangiana auxiliar. Como sabemos, para descrever corretamente o dubleto de spin-3, é necessário acrescentar uma lagrangiana auxiliar tal que esta remova os graus de liberdade espúrios. Neste ponto é possível verificar que dependendo da escolha das lagrangianas auxiliares podemos ter $\alpha = 1$ ou $\alpha = 7/8$ como obtivemos aqui. Uma lagrangiana possível com campos auxiliares escalares é dada por:

$$\begin{aligned} S = & \int d^3x \left[\frac{1}{2}\phi_{\mu\nu\lambda}G^{\mu\nu\lambda}(\phi) - \frac{m^2}{2}(\phi_{\mu\nu\lambda}\phi^{\mu\nu\lambda} - 3\alpha\phi_\mu\phi^\mu) \right. \\ & \left. - 3m a_1 \phi_\mu \partial^\mu W + \frac{b_1 m^2}{2} W^2 + \frac{c_1}{2} W \square W \right], \end{aligned} \quad (5.43)$$

com W um campo escalar qualquer. Para eliminar a propagação de modos de spin-1 dados por $\phi_\mu = \eta^{\nu\alpha}\phi_{\mu\nu\alpha}$ e $\partial^\nu\partial^\alpha\phi_{\mu\nu\alpha}$ obtém-se $\alpha = 1$ (vide [36]). Enquanto a eliminação de modos propagantes de spin-0 dados por $\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\phi_{\mu\nu\alpha}$, $\partial^\mu\phi_\mu$ e W requer, fixando-se por exemplo $a_1 = 1/3$, que $b_1 = 18$ e $c_1 = -8/3$ (vide [18]).

No entanto verificamos que existe uma lagrangiana auxiliar que utiliza um campo vetorial dada por:

$$\begin{aligned} S = & \int d^3x \left[\frac{1}{2}\phi_{\mu\nu\lambda}G^{\mu\nu\lambda}(\phi) - \frac{m^2}{2}(\phi_{\mu\nu\lambda}\phi^{\mu\nu\lambda} - 3\alpha\phi_\mu\phi^\mu) \right. \\ & \left. - 3m^2 a_2 \phi_\mu A^\mu + \frac{b_2}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{c_2 m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{d_2}{2} A_\mu \square A^\mu \right]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Neste caso, temos modos propagantes de spin-1 dados por: $\phi_\mu = \eta^{\nu\alpha}\phi_{\mu\nu\alpha}$, A_μ e $\partial^\nu\partial^\alpha\phi_{\mu\nu\alpha}$ e modos propagantes de spin-0 dados por: $\partial_\mu A^\mu$, $\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\phi^{\mu\nu\alpha}$ e $\partial_\mu\phi^\mu$.

²Desprezando um termo de massa quadrático em $\Lambda_{\mu\nu}$, vide (2.7), pois $\Lambda_{\mu\nu}$ não aparece no termo cinético de Singh-Hagen em 5.22, ou seja está totalmente desacoplado de $\phi_{\mu\nu\lambda}$ e portanto é nulo na concha de massa.

Novamente, olhando para as equações de movimento, é possível verificar que agora temos duas possibilidades para descrever corretamente um dubleto de spin-3. Ou seja, $\alpha = 1$ e $d_2 = 9a_2^2/4 = b_2$ ou $\alpha = 7/8$ e $d_2 = 0$. Quando $d_2 = 0$ os valores das constantes arbitrárias são: $c_2 = -24a_2$, $b_2 = -32a_2^2/9$. Logo, isso nos assegura que o termo de massa utilizado aqui (parcialmente simétrico), está de acordo com o termo de massa totalmente simétrico, com $\alpha = 7/8$.

Capítulo 6

Conclusão

Uma das grandes dificuldades no trato de teorias de spin alto diz respeito a necessidade de se incluir campos auxiliares à teoria com o objetivo de remover graus de liberdade espúrios, que quase sempre estão relacionados a estados com energia negativa.

Verificamos através da Imersão de Calibre de Noether que uma generalização das simetrias de calibre que havíamos usado no caso das teorias de spin-2, vide [2], permite-nos obter uma sequência de quatro modelos auto-duais de spin-3 de primeira, segunda, terceira e quarta ordem nas derivadas. Os dois primeiros modelos auto-duais foram propostos por Aragone e Khoudeir [23, 24], como uma generalização natural daqueles modelos de spin-2 propostos pelos mesmos autores em [7]. Não havia uma conexão entre estes modelos. Aqui mostramos que o modelo de segunda ordem pode ser obtido a partir do primeiro via imersão da simetria de calibre $\delta_\Lambda \omega_{\mu(\beta\gamma)} = \partial_\mu \Lambda_{\beta\gamma}$. Assim como ocorre para teorias de spin-2, é possível conectar este modelo auto-dual de segunda ordem à um terceiro modelo auto-dual de terceira ordem nas derivadas [18], o qual havia sido proposto por Deser e Damour como sendo uma versão de spin-3 da teoria topologicamente massiva de spin-2 de [8]. Isso foi possível através da imersão da simetria $\delta_\Phi \omega_{\mu(\beta\gamma)} = \epsilon_{\mu\beta\rho} \Phi_{\gamma}^{(\rho)} + \epsilon_{\mu\gamma\rho} \Phi_{\beta}^{(\rho)}$.

Um novo modelo de quarta ordem nas derivadas foi obtido nesta tese

através da imersão de uma generalização da simetria de Weyl utilizada em [2] para a obtenção do modelo auto-dual de quarta ordem de spin-2. O procedimento de imersão foi concluído usando a formulação não simétrica utilizada nos trabalhos [23, 24, 27]. Embora a formulação simétrica introduzida por [18, 17] seja mais simples e natural, encontramos uma dificuldade técnica para a utilização da técnica de *ICN* nesse formalismo. O modelo auto-dual de quarta ordem está nessa tese em sua versão completa, levando em conta os termos auxiliares que retiram estados de energia negativa do espectro da teoria.

O que garante que este modelo auto-dual de quarta ordem está livre de fantasmas é sua equivalência a nível quântico com os demais modelos auto-duais de ordem mais baixa. Essa equivalência foi verificada através da técnica da ação mestra, vide [2, 3]. Propusemos uma ação mestra interpolando entre os quatro modelos auto-duais de forma muito semelhante aquilo que fizemos para spin-2 em [3]. Usamos três termos de mistura para a construção da ação mestra, os quais foram o termo de Chern-Simons de [23], o termo de segunda ordem de Singh-Hagen [15] que como observado em [18] não possui conteúdo físico, e por fim o termo de Chern-Simons de terceira ordem de [18]. A demonstração de que este termo é de fato sem conteúdo físico segue mais facilmente da forma como foi escrito em [34]. A relação do modelo auto-dual de quarta ordem com as equações de movimento de quarta ordem de [34] ainda está sob estudo.

Em resumo obtivemos explicitamente uma relação de dualidade entre os modelos de primeira, segunda e terceira ordem de spins $+3$ ou -3 em $D = 2+1$ já existentes na literatura, vide [23, 24, 18] e deduzimos um novo modelo auto-dual de quarta ordem. Em particular, as lagrangianas do campo auxiliar vetorial para os modelos de segunda, terceira e quarta ordem necessárias para a eliminação de fantasmas, foi gerada automaticamente a partir da lagrangiana correspondente do modelo auto-dual de primeira ordem.

A relação entre os modelos de singleto e os modelos de dubleto fica comprometida em virtude da presença dos campos auxiliares. Como vimos no último capítulo conseguimos realizar a solda dos modelos auto-duais de spin-3 se levarmos

em conta somente os setores de spin-3. Dessa forma, os resultados preliminares indicam uma semelhança com o que verificamos para o caso de teorias de spin-2. A soma de dois modelos auto-duais de segunda ordem nas derivadas com massas e spins distintos leva a um modelo de dubleto de spin-3. Que ao que tudo indica contém fantasmas em seu espectro, haja visto que não possui as correções de campos auxiliares como observado nas referências [24, 36, 35].

Referências Bibliográficas

- [1] BERGSHOEFF. E. A, Hohm. O, Townsend. P.K, *Massive Gravity in Three Dimensions*, Phys.Rev.Lett. 102 201301 (2009).
- [2] DALMAZI. D, Mendonça. E. L., *A New spin-2 self-dual model in $D=2+1$* , JHEP 0909 011 (2009).
- [3] DALMAZI. D, Mendonça. E. L., *Dual descriptions of spin two massive particles in $D=2+1$ via master actions*, Phys.Rev. D79 045025 (2009).
- [4] ANACLETO. M. A, Ilha. A, Nascimento. J. R. S, Ribeiro. R. F, Wotzasek. C, *Dual equivalence between selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical $U(1)$ charged matter*, Phys. Lett. B504: 268-274, (2001).
- [5] DALMAZI. D, Dutra. A. S, Abreu. E. M. C, *Generalizing the Soldering procedure*, Phys. Rev. D74: 025015, 025015 (2006).
- [6] BANERJEE. R, Kumar.S, *Selfduality and soldering in odd dimensions*, Phys. Rev. D60: 085005, (1999).
- [7] ARAGONE. C, Khoudair. A, *Selfdual Massive Gravity*, Phys. Lett. B173: 141-144, (1986).
- [8] DESER. S, Jackiw. R, Templeton.S; *Topologically Massive Gauge Theories* *Annals of Physics*, Annals Phys.140:372-411, (1982).
- [9] ANDRINGA. R, Bergshoeff. E. A., de Roo. M., Hohm. O., Sezgin. E., Townsend. P.K., *Massive 3D Supergravity*, Class.Quant.Grav. 27 025010 (2010).

- [10] DIRAC. P, *Relativistic Wave Equations*, Proc. Roy. Soc. A, 155, 447-459, (1936).
- [11] FIERZ. M, Pauli. W, *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*, Proc. R. Soc. Lond. A, 173, 211-232 (1939).
- [12] WIGNER. E. P, *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group* Annals Math 40, 149, (1939); [Nuclear Phys. Proc. Suppl. 6, 9] (1989).
- [13] BARGMANN. V, Wigner .E P, *Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations* Proc. Nat. Acad. Sci. 34, 211, (1948).
- [14] CHANG. S. J, *Lagrange Formulation for Systems with Higher Spin* , Phys. Rev. 161, 1308 (1967).
- [15] SINGH. L. P. S., Hagen C. R, *Lagrangian formulation for arbitrary spin. I. The boson case*, Phys. Rev. D v9 -4 (1974).
- [16] FRONSDAL C. *Massless fields with integer spins*, Phys. Rev. D v18 -10 (1978).
- [17] de WIT. B, Freedman. D. Z, *Systematic of Higher Spins Gauge Fields*, Phys. Rev. D v21 -2 (1980).
- [18] DAMOUR. T, Deser. S, “*Geometry*” of *spin-3 gauge theories*, Annales de l’I.H.P., section A, tome 47, -3 277-377, (1987).
- [19] BOULANGER. N, *Algebraic aspects of gravity and higher spin gauge fields*, PhD Thesis ULB (2003).
- [20] BOULANGER. N, Damour T, Gualtieri. L, Henneaux. M, *Inconsistency of interacting, multigraviton theories*, Nucl.Phys. B597 127-171 (2001).

- [21] FUSTER. A, Henneaux. M, *BRST quantization: A Short review*, Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. 2 939-964 (2005).
- [22] FOTOPOULOS. A, Tsulaia. M, *Gauge Invariant Lagrangians for Free and Interacting Higher Spin Fields. A Review of the BRST formulation*, Int.J.Mod.Phys. A24 1-60. (2009).
- [23] ARAGONE. C., Khoudeir. A., *Self-dual spin-4 and 3 theories*, hep-th 9307004v1 (1993).
- [24] ARAGONE. C., Khoudeir. A., *Massive triadic Chern-Simons spin-3 theory*, hep-th 9310048v1 (1993).
- [25] MENDONÇA. E. L. *Teorias auto-duais para partículas massivas de spin-2*, dissertação - FEG-UNESP (2009).
- [26] DALMAZI. D., Mendonça. L. E., *Massive spin-3 self-dual models via dualization procedures*, em preparação.
- [27] VASILIEV. M. A., “*Gauge*” *form of description of massless fields with arbitrary spin*, Yad. Fiz. 32, 855-861 (1980).
- [28] ARIAS P. J., *Dualidad en teorías de spin-2 masivo en dimensión 2+1*, tese de doutorado, arxiv. 0912.5106v2, (2010).
- [29] DALMAZI. D, Mendonça. E. L, *Quantum equivalence between the self-dual and the Maxwell-Chern-Simons models nonlinearly coupled to $U(1)$ scalar fields*, J. Phys. A39: 9355-9363, (2006).
- [30] GOMES. M. O. C. Malacarne. L. C, Silva A. J. da, *On the equivalence of the selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions*, Phys. Lett. B439: 137-141, (1998).
- [31] GAITAN. R, *On the Coupling Problem of Higher Spin Fields in 2+1 Dimension*, tese de doutorado, arXiv:0711.2498, (2007).

- [32] DALMAZI. D, Mendonça. E. L, *Generalized soldering of ± 2 helicity states in $D = 2 + 1$* , Phys.Rev.D80:025017,(2009).
- [33] DALMAZI. D, Mendonça. E. L, *Duality of parity doublets of helicity ± 2 in $D = 2 + 1$* , Phys.Rev.D82:105009,(2010).
- [34] BERGSHOEFF. E. A, Hohm. O, Townsend. P.K, *On higher derivatives in 3D gravity and higher spin gauge theories*, Annals of Physics 325, 1118-1134 (2010).
- [35] RAHMAN. M. R., *Interacting Massive Higher Spins Fields*, Tese de doutorado - New York University - (2009).
- [36] ARAGONE. C., Deser. S., Yang. Z., *Massive higher spins from dimensional of gauge fields*, Annals of Physics 179, 76-96 (1987).
- [37] JACKIW. R, Nair. V. P, *Relativistic wave equations for anyons*, Phys. Rev. D43: 1933-1942,(1991).
- [38] BINEGAR. B, *Relativistic Field Theories in three dimensions*, J Math Physics 23, 1511 (1982).
- [39] TOWNSEND. P. K, Pilch. K, Nieuwenhuizen. P van, *Selfduality in Odd Dimensions*, Phys. Lett. 136B: 38, (1984).
- [40] DALMAZI. D, Mendonça. E. L., *On the duality of spin-3 theories in $D = 2 + 1$* , em preparação.
- [41] FIERZ. M, *Force-free particles with any spin.*, Helv.Phys.Acta 12:3-37, (1939).
- [42] FIERZ. M, Pauli. W, *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field.*, Proc.Roy.Soc.Lond.A173:211-232, (1939).
- [43] DESER. S, McCarthy. J. G *Selfdual formulations of $D=3$ gravity theories*, Phys. Lett. B246: 441-444, (1990).

- [44] DALMAZI. D, *Generalized duality between local vector theories in $D = 2 + 1$* , JHEP 0608:040, (2006).

Apêndice A

Invariância do termo de Chern-Simons sob (3.82)

Aqui vamos demonstrar que o termo de Chern-Simons de terceira ordem de spin-3 escrito em termos dos campos não simétricos é invariante sob a transformação de calibre (3.82), para isso note que:

$$\delta\mathcal{L}_{CS} = -\frac{6}{m}E_{\mu}^{\lambda}E_{\rho}^{\beta}\Omega^{\rho(\mu\gamma)}(\omega)\delta\omega_{\lambda(\beta\gamma)} + \frac{3}{m}E_{\mu}^{\lambda}E^{\mu}_{\rho}\Omega^{\rho(\beta\gamma)}(\omega)\delta\omega_{\lambda(\beta\gamma)}, \quad (\text{A.1})$$

fazendo a substituição de (3.82) em (A.1) teremos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{CS} &= -\frac{6}{m} \left[E_{\mu}^{\lambda}E_{\rho}^{\beta}\Omega^{\rho(\mu\gamma)}(\omega)\partial_{\gamma}\Lambda_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}E_{\mu\beta}E_{\rho}^{\beta}\Omega^{\rho(\mu\gamma)}(\omega)\partial_{\gamma}\Lambda \right. \\ &+ E_{\mu\beta}E_{\rho}^{\beta}\Omega^{\rho(\mu\gamma)}(\omega)\partial^{\alpha}\Lambda_{\alpha\gamma} - E_{\mu}^{\lambda}E_{\gamma\rho}\Omega^{\rho(\mu\gamma)}(\omega)\partial^{\alpha}\Lambda_{\alpha\gamma} \\ &\left. - E_{\mu}^{\lambda}E^{\mu}_{\rho}\Omega^{\rho(\beta\gamma)}(\omega)\partial_{\beta}\Lambda_{\lambda\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Vamos agora fazer a substituição de $\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega)$ dada por (3.46). Após alguns cálculos obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{CS} &= -\frac{18\Box}{m} \left(-\theta^{\lambda\nu}E^{\beta\rho}\omega_{\nu(\rho\gamma)}\partial^{\gamma}\Lambda_{\beta\lambda} - \theta^{\beta\nu}E^{\mu\lambda}\omega_{\nu(\mu\gamma)}\partial^{\gamma}\Lambda_{\beta\lambda} \right. \\ &+ \theta^{\lambda\rho}E_{\gamma}^{\nu}\omega_{\nu(\rho\mu)}\partial^{\mu}\Lambda_{\lambda\gamma} - E^{\lambda\nu}\omega_{\nu(\mu\gamma)}\partial^{\mu}\Lambda_{\lambda}^{\gamma} \left. \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a expressão para $\theta_{\mu\nu}$ dada em (2.4) vamos obter após algumas manipulações a seguinte expressão para a variação da lagrangiana de Chern-Simons:

$$\delta\mathcal{L}_{CS} = -\frac{18\Box}{m} (\theta^{\rho\delta} E^{\mu\gamma} + \theta^{\gamma\rho} E^{\delta\mu} + \theta^{\mu\rho} E^{\gamma\delta}) \omega_{\delta(\mu\rho)} \Box \partial_\alpha \Lambda^\alpha_\gamma. \quad (\text{A.4})$$

Note agora uma sutileza de espaços-tempo $D = 2 + 1$. Nesta dimensão temos a validade da seguinte identidade aplicável a um vetor arbitrário a_μ :

$$\epsilon_{[\mu\nu\gamma} a_{\beta]} = \epsilon_{\beta\mu\gamma} a_\nu - \epsilon_{\beta\nu\gamma} a_\mu + \epsilon_{\mu\nu\gamma} a_\beta - \epsilon_{\mu\nu\beta} a_\gamma = 0. \quad (\text{A.5})$$

A expressão acima pode ser extendida para o seguinte sistema de equações:

$$\epsilon_{[\mu\nu\gamma} \theta_{\beta\rho]} = \epsilon_{\beta\mu\gamma} \theta_{\nu\rho} - \epsilon_{\beta\nu\gamma} \theta_{\mu\rho} + \epsilon_{\mu\nu\gamma} \theta_{\beta\rho} - \epsilon_{\mu\nu\beta} \theta_{\gamma\rho} = 0 \quad (\text{A.6})$$

com ρ variando de 0 a 2. Agora se aplicarmos ∂^ν a (A.6) vamos obter exatamente a expressão entre parênteses de (A.4). Logo concluímos que:

$$\theta^{\rho\delta} E^{\mu\gamma} + \theta^{\gamma\rho} E^{\delta\mu} + \theta^{\mu\rho} E^{\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.7})$$

ou seja, a ação de Chern-Simons é invariante pela simetria de calibre (3.82), como queríamos demonstrar.

Apêndice B

Álgebra dos geradores do grupo de Poincarè

Para o estudo dos modos massivos de spin- s faz-se necessário a determinação dos invariantes quadráticos de Casimir da álgebra de Poincarè. Para uma partícula de massa “ m ” estes assumem os seguintes valores: $P_\mu P^\mu = -m^2$ e $P_\mu \mathcal{J}^\mu = s m$, onde s é o spin da partícula. Aqui temos os geradores:

$$P_\mu = i\partial_\mu \quad ; \quad \mathcal{J}_\mu = L_\mu + S_\mu, \quad (\text{B.1})$$

com momento angular orbital L_μ e spin S_μ . P_μ e J_μ satisfazem à álgebra:

$$[\mathcal{J}^\mu; \mathcal{J}^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\lambda} \mathcal{J}_\lambda \quad (\text{B.2})$$

$$[P^\mu; \mathcal{J}^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\lambda} P_\lambda \quad (\text{B.3})$$

$$[P^\mu; P^\nu] = 0 \quad (\text{B.4})$$

Para um auto-estado qualquer $|\phi\rangle$ temos então as equações de Klein-Gordon e Pauli-Lubanski respectivamente:

$$(P_\mu P^\mu + m^2)|\phi\rangle = 0 \quad ; \quad (P_\mu \mathcal{J}^\mu - sm)|\phi\rangle = 0. \quad (\text{B.5})$$

Como, $P_\mu \mathcal{J}^\mu = P_\mu S^\mu$, o spin é definido como $s = -P \cdot S / \sqrt{P^2}$.

Vejamos agora uma representação para $\mathcal{J}_\mu$ para spins-1, 2 e 3 e como checar as expressões (3.40, 3.43). Em [28] o autor nos apresenta uma expressão

generalizada para qualquer spin inteiro $s = n$, para o operador $\mathcal{J}_\mu$. A expressão é a seguinte:

$$(\mathcal{J}_{n\alpha})_{\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n} = -\epsilon_{\alpha\beta\lambda} x^\beta P^\lambda \mathcal{I}_{\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n} + \frac{i}{n!(n-1)!} \epsilon_{(\nu_1\alpha}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \dots \delta_{\nu_n}^{\mu_n)}. \quad (\text{B.6})$$

Supõe-se que os operadores estavam sobre um tensor totalmente simétrico de posto- n $\phi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}$ onde o primeiro termo do lado direito de (B.6) corresponde ao momento angular orbital usual (ou seja o produto vetorial entre vetor posição e momento linear), acompanhado de uma identidade $\mathcal{I}$ totalmente simétrica. O segundo termo é a generalização do vetor spin para qualquer inteiro, ou seja $S_{n\mu}$. Para mais detalhes sobre (B.6) vide por exemplo [28, 37, 38].

B.1 spin-1 e spin-2

Uma partícula massiva de spin-1 é descrita em termos de um campo vetorial, ou seja A_μ . Sobre este campo realizamos a álgebra de Poincarè em $D = 2 + 1$ levando em conta a generalização (B.6):

$$(P_\mu)_\beta^\alpha = i\delta_\beta^\alpha \partial_\mu \quad ; \quad (S_{1\mu})_\beta^\alpha = i\epsilon_{\mu\beta}^\alpha. \quad (\text{B.7})$$

Sendo assim $(\mathcal{J}_\mu)_\beta^\alpha = -\epsilon_{\mu\rho\lambda} x^\rho (P^\lambda)_\beta^\alpha + (S_{1\mu})_\beta^\alpha$. O vetor spin $S_{1\mu}$, satisfaz as seguintes relações:

$$[S_{1\mu}, S_{1\nu}] = -i\epsilon_{\mu\nu\alpha} S_1^\alpha, \quad (\text{B.8})$$

$$(S^\mu)^{\alpha\beta} (S_\mu)_{\alpha\gamma} = s(s+1)\delta_\gamma^\beta, \quad (\text{B.9})$$

e usando (B.7) não é difícil verificar que isto é verdade com $s = 1$.

Para spin-2, usamos um campo simétrico e sem traço sob o qual é possível a realização da álgebra dos geradores de Poincarè. No entanto o operador $S_{2\mu}$ não é tão simples, deduzindo-o a partir de (B.6) ficamos com:

$$(S_2^\mu)^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{i}{2} (\delta^{\alpha\rho} \epsilon^{\beta\mu\sigma} + \delta^{\beta\rho} \epsilon^{\alpha\mu\sigma} + \delta^{\alpha\sigma} \epsilon^{\beta\mu\rho} + \delta^{\beta\sigma} \epsilon^{\alpha\mu\rho}), \quad (\text{B.10})$$

e verifica-se com um pouco mais de trabalho que este operador satisfaz:

$$[(S_2^\mu)^{\alpha\beta\rho\sigma}, (S_{2\nu})_{\sigma\rho\lambda\gamma}] = i\epsilon_{\nu\delta}^\mu (S_2^\delta)^{\alpha\beta\rho\sigma}, \quad (\text{B.11})$$

$$(S_2^\mu)^{\alpha\beta\rho\sigma}(S_{2\mu})_{\sigma\rho\lambda\gamma} = s(s+1)\mathcal{I}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}, \quad (\text{B.12})$$

com $s = 2$. A identidade de posto-2 é então definida como:

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda} = \frac{1}{2}(\delta_\lambda^\alpha \delta_\gamma^\beta + \delta_\gamma^\alpha \delta_\lambda^\beta) - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda}. \quad (\text{B.13})$$

Note que a identidade é simétrica e sem traço.

B.2 spin-3

Neste caso o spin é dado por:

$$(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}_{\mu\nu\rho} = \frac{i}{12}\epsilon_{(\mu}^{\alpha(\beta}\delta_{\nu}^{\gamma}\delta_{\rho)}^{\lambda)}, \quad (\text{B.14})$$

que pode ser reescrito abrindo as simetrizações em $(\mu\nu\rho)$ e em seguida em $(\beta\gamma\lambda)$ (sem nenhum fator de normalização) em função da parte com traço não nulo da identidade de posto-2, ou seja, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}_{\mu\nu\rho} &= \frac{i}{3} \left(\epsilon_\mu^{\alpha\beta} I_{\nu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\nu^{\alpha\beta} I_{\mu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\rho^{\alpha\beta} I_{\nu\mu}^{\gamma\lambda} \right. \\ &+ \epsilon_\mu^{\alpha\beta} I_{\nu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\nu^{\alpha\beta} I_{\mu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\rho^{\alpha\beta} I_{\nu\mu}^{\gamma\lambda} \\ &+ \left. \epsilon_\mu^{\alpha\beta} I_{\nu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\nu^{\alpha\beta} I_{\mu\rho}^{\gamma\lambda} + \epsilon_\rho^{\alpha\beta} I_{\nu\mu}^{\gamma\lambda} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde temos: $I_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu)/2$.

Vejamos agora como verificar a equação (3.40). Para isso teremos que fazer: $(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}_{\mu\nu\rho}(S_{3\alpha})^{\sigma\phi\omega}_{\beta\gamma\lambda}$. Resta apenas fazer o produto termo a termo e em seguida somar todos os resultados. Note que o resultado do produto do primeiro termo de $(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}_{\mu\nu\rho}$ por todos os outros termos de $(S_{3\alpha})^{\sigma\phi\omega}_{\beta\gamma\lambda}$ nos levará ao seguinte:

$$-\frac{1}{9} \left[4(\delta_\mu^\sigma I_{\nu\rho}^{\phi\omega} + \delta_\mu^\phi I_{\nu\rho}^{\sigma\omega} + \delta_\mu^\omega I_{\nu\rho}^{\sigma\phi}) - 2\delta_{\mu\gamma}\delta^{\beta\sigma} I_{\nu\rho}^{\gamma\lambda} I_{\beta\lambda}^{\phi\omega} - 2\delta_{\mu\gamma}\delta^{\beta\phi} I_{\nu\rho}^{\gamma\lambda} I_{\beta\lambda}^{\sigma\omega} - 2\delta_{\mu\gamma}\delta^{\beta\omega} I_{\nu\rho}^{\gamma\lambda} I_{\beta\lambda}^{\sigma\phi} \right]. \quad (\text{B.16})$$

O resultado do produto do segundo termo de $(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}_{\mu\nu\rho}$ por todos os termos de $(S_{3\alpha})^{\sigma\phi\omega}_{\beta\gamma\lambda}$ é igual ao resultado de (B.16) trocando $(\mu \leftrightarrow \nu)$. O resultado do terceiro é igual ao do primeiro trocando $(\mu \leftrightarrow \rho)$ e assim por diante. É possível ao final

de muitos cálculos e após algum arranjo somar todas as contribuições e organizar o resultado de forma que:

$$\begin{aligned}
(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}(S_{3\alpha})^{\sigma\phi\omega} &= -4(\delta_\mu^\sigma I_{\nu\rho}^{\phi\omega} + \delta_\mu^\phi I_{\nu\rho}^{\sigma\omega} + \delta_\mu^\omega I_{\nu\rho}^{\phi\sigma}) \\
&+ \frac{2}{3}[\delta_{\mu\nu}(\delta_\rho^\phi \delta^{\omega\sigma} + \delta^{\sigma\phi} \delta_\rho^\omega + \delta_\rho^\sigma \delta^{\omega\rho}) \\
&+ (\rho \leftrightarrow \nu) + (\rho \leftrightarrow \mu)].
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Por fim definindo a identidade de posto-3, ficamos com:

$$(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}(S_{3\alpha})^{\sigma\phi\omega} = 12 \mathcal{I}_{\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega}, \tag{B.18}$$

onde temos o fator $12 = s(s+1)$ com $s = 3$ e dessa forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega} &= -\frac{1}{3}(\delta_\mu^\sigma I_{\nu\rho}^{\phi\omega} + \delta_\mu^\phi I_{\nu\rho}^{\sigma\omega} + \delta_\mu^\omega I_{\nu\rho}^{\phi\sigma}) \\
&+ \frac{1}{18}[\delta_{\mu\nu}(\delta_\rho^\phi \delta^{\omega\sigma} + \delta^{\sigma\phi} \delta_\rho^\omega + \delta_\rho^\sigma \delta^{\omega\rho}) \\
&+ (\rho \leftrightarrow \nu) + (\rho \leftrightarrow \mu)].
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Resta agora verificar a álgebra de spin (3.43). Vejamos como proceder, como temos:

$$[(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}; (S_{3\xi})^{\sigma\phi\omega}] = (S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}(S_{3\xi})^{\sigma\phi\omega} - (S_3^\xi)^{\sigma\phi\omega}(S_{3\alpha})^{\beta\gamma\lambda}. \tag{B.20}$$

Usando a expressão (B.15) podemos fazer o produto termo a termo. No primeiro termo do lado direito da expressão imediatamente acima fazendo o produto do primeiro termo de $(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}$ vezes todos os termos de $(S_{3\xi})^{\sigma\phi\omega}$ teremos:

$$-\frac{1}{9} \left[\epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\xi}^\sigma I_{\nu\rho}^{\phi\omega} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\xi}^\phi I_{\nu\rho}^{\sigma\omega} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\xi}^\omega I_{\nu\rho}^{\phi\sigma} \right] + (\beta \leftrightarrow \nu) + (\beta \leftrightarrow \rho) \tag{B.21}$$

Seguindo com as manipulações, veremos que o produto do segundo termo de $(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}$ vezes todos os termos de $(S_{3\xi})^{\sigma\phi\omega}$ será igual ao resultado anterior trocando $(\mu \leftrightarrow \nu)$. Prosseguindo com uma análise deste tipo para o produto de todos os termos e somando todos os resultados concluímos que:

$$\begin{aligned}
(S_3^\alpha)^{\beta\gamma\lambda}(S_{3\xi})^{\sigma\phi\omega} &= -\frac{1}{3} \left[\epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\xi}^\sigma I_{\nu\rho}^{\phi\omega} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\nu\xi}^\sigma I_{\beta\rho}^{\phi\omega} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\rho\xi}^\sigma I_{\nu\beta}^{\phi\omega} \right. \\
&+ \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\xi}^\phi I_{\nu\rho}^{\sigma\omega} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\nu\xi}^\phi I_{\beta\rho}^{\sigma\omega} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\rho\xi}^\phi I_{\nu\beta}^{\sigma\omega} \\
&+ \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\xi}^\omega I_{\nu\rho}^{\phi\sigma} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\nu\xi}^\omega I_{\beta\rho}^{\phi\sigma} + \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\rho\xi}^\omega I_{\nu\beta}^{\phi\sigma} \left. \right] \\
&- \frac{1}{3}[(\mu \leftrightarrow \nu) - (\mu \leftrightarrow \rho)].
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Logo quando tomarmos a diferença em (B.20) teremos:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{3} \{ \epsilon_\mu^{\alpha\beta} \left[\epsilon_{\beta\xi}^\sigma I_{\nu\rho}^{\phi\omega} + \epsilon_{\nu\xi}^\sigma I_{\beta\rho}^{\phi\omega} + \epsilon_{\rho\xi}^\sigma I_{\nu\beta}^{\phi\omega} + \epsilon_{\beta\xi}^\phi I_{\nu\rho}^{\sigma\omega} + \epsilon_{\beta\xi}^\omega I_{\nu\rho}^{\phi\sigma} \right] \\
& + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\mu \leftrightarrow \rho) \} - (\xi \leftrightarrow \alpha). \tag{B.23}
\end{aligned}$$

O objetivo agora é separar um $\epsilon_{\xi\delta}^\alpha$ em todos os termos. Note por exemplo que:

$$\epsilon_\mu^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\xi}^\sigma - \epsilon_{\mu\xi}^\beta \epsilon_\beta^{\alpha\sigma} = \epsilon_{\xi\delta}^\alpha \epsilon_\mu^{\sigma\delta}. \tag{B.24}$$

Algo semelhante pode ser feito para todos os outros termos, e o resultado final nos leva à conclusão de que:

$$\left[(S_3^\alpha)_{\mu\nu\rho}^{\beta\gamma\lambda}, (S_{3\xi})_{\beta\gamma\lambda}^{\sigma\phi\omega} \right] = i \epsilon_{\xi\delta}^\alpha (S_3^\delta)_{\mu\nu\rho}^{\sigma\phi\omega}. \tag{B.25}$$

Como queríamos demonstrar.

Apêndice C

Relação entre as formulações totalmente simétrica e parcialmente simétrica

Nessa tese utilizamos duas notações. Uma formulação é escrita em termos de campos totalmente simétricos e foi utilizada por exemplo em [18]. A outra formulação é escrita em termos de campos não simétricos a qual foi primeiramente introduzida por [27] e posteriormente utilizada por [23, 24]. A ação de Singh-Hagen [15] de segunda ordem nas derivadas foi originalmente proposta em termos de um campo totalmente simétrico $\phi_{\mu\nu\lambda}$ em D dimensões espaço temporais. No entanto, vamos considerar $D = 2 + 1$, isso implica que os fatores numéricos em (C.1) não dependem da dimensão D como no caso de spin-2 (Fierz-Pauli) e spin-1 (Maxwell):

$$S_{SH} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\phi_{\mu\nu\lambda} \square \phi^{\mu\nu\lambda} + 3(\partial^\mu \phi_{\mu\nu\lambda})^2 + 6\phi_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \phi^{\mu\nu\lambda} - 3\phi_\mu \square \phi^\mu + \frac{3}{2}(\partial_\mu \phi^\mu)^2 \right] \quad (C.1)$$

Como vimos na seção 2.2 desta tese, através da definição dos objetos geométricos tais como os tensores de Riemann e Einstein, os autores em [18] reescreveram (C.1) da seguinte forma:

$$S_{SH} = \frac{1}{2} \int d^3x \phi_{\mu\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda}(\phi). \quad (C.2)$$

onde, como sabemos, $G^{\mu\nu\lambda}(\phi)$ é o tensor de Einstein dado em (2.19).

Por outro lado, sabemos que é possível utilizar uma formulação não-simétrica em termos dos campos $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$. Nessa formulação a ação de Singh-Hagen (C.1) fica:

$$S_{SH} = \frac{1}{2} \int d^3x \xi^{\mu(\beta\gamma)} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) = -\frac{1}{2} \int d^3x \omega \cdot d\Omega(\omega). \quad (C.3)$$

Onde temos $\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega)$ dado em (3.46). Para checar que (C.3) corresponde de fato à (C.1) devemos utilizar a mudança de variáveis dada em (2.7) em (C.3). De posse de (2.7) podemos reescrever $\Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) &= \sqrt{3}(E_\beta{}^\lambda \phi_{\lambda\mu\gamma} + E_\gamma{}^\lambda \phi_{\lambda\mu\beta}) - E_\mu{}^\lambda \phi_{\lambda\beta\gamma} \\ &- \frac{\sqrt{3}}{2}(\eta_{\mu\gamma} E_\beta{}^\lambda \phi_\lambda + \eta_{\mu\beta} E_\gamma{}^\lambda \phi_\lambda - 2\eta_{\beta\gamma} E_\mu{}^\lambda \phi_\lambda) \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2}(E_{\beta\mu} \phi_\gamma + E_{\gamma\mu} \phi_\beta). \end{aligned} \quad (C.4)$$

Usando as identidades (2.2, 2.3) nas passagens que se seguem pode-se demonstrar a equivalência entre as duas formulações. Portanto temos em resumo:

$$\frac{1}{2} \int d^3x \phi_{\mu\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda}(\phi) = \frac{1}{2} \int d^3x \xi^{\mu(\beta\gamma)} \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) = -\frac{1}{2} \int d^3x \omega \cdot d\Omega(\omega). \quad (C.5)$$

Vejamos agora a relação entre as formulações para o termo de Chern-Simons topológico de terceira ordem nas derivadas. A versão primeiramente apresentada por [18] pode ser escrita como:

$$S_{CS} = \frac{1}{6m} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta}{}_\mu \partial_\alpha \phi_{\beta\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda}, \quad (C.6)$$

quando expandimos a expressão acima fazendo uso do tensor de Einstein dado em (2.19), ficamos com:

$$\begin{aligned} S_{CS} &= \frac{1}{2m} \int d^3x \left[-\phi_{\beta\nu\lambda} E^\beta{}_\mu \square \phi^{\mu\nu\lambda} + 2\phi_{\beta\nu\lambda} E^\beta{}_\mu \partial_\gamma \partial^\nu \phi^{\gamma\mu\lambda} \right. \\ &- \left. 2\phi_{\beta\nu\lambda} E^\beta{}_\mu \partial^\nu \partial^\lambda \phi^\mu + \phi_\beta E^\beta{}_\mu \square \phi^\mu \right]. \end{aligned} \quad (C.7)$$

Por outro lado, obtivemos via notação não simétrica a seguinte expressão para o termo de Chern-Simons de terceira ordem:

$$S_{CS} = -\frac{1}{2m} \int d^3x \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) = \frac{1}{2m} \int \Omega(\omega) d\Omega(\omega). \quad (C.8)$$

É possível verificar que após substituir (C.4) em (C.8) temos a seguinte relação entre as notações:

$$S_{CS} = -\frac{1}{2m} \int d^3x \Omega_{\mu(\beta\gamma)}(\omega) E^\mu{}_\lambda \Omega^{\lambda(\beta\gamma)}(\omega) = \frac{1}{2m} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta}{}_\mu \partial_\alpha \phi_{\beta\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda}. \quad (\text{C.9})$$

Note que há uma diferença por um fator 3 entre as duas formulações, já que o lado direito de (C.9) originalmente vai com $1/6m$, vide (3.79).

Os autores em [34] sugerem que o termo que aqui chamamos de Chern-Simons de terceira ordem seja na verdade o equivalente natural de um termo de Einstein-Hilbert. Na notação utilizada naquele trabalho o termo de terceira ordem é escrito da seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \phi^{\mu\nu\lambda} \mathcal{G}_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \int d^3x \phi^{\mu\nu\lambda} E_\mu{}^\alpha E_\nu{}^\beta E_\lambda{}^\gamma \phi_{\alpha\beta\gamma}. \quad (\text{C.10})$$

Esta formulação se relaciona com as duas utilizadas aqui nesta tese através da seguinte igualdade:

$$-\frac{1}{2} \int d^3x \phi^{\mu\nu\lambda} E_\mu{}^\alpha E_\nu{}^\beta E_\lambda{}^\gamma \phi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6m} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta}{}_\mu \partial_\alpha \phi_{\beta\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda}. \quad (\text{C.11})$$

Como vimos, esta última notação foi útil para a demonstração de que o termo de Chern-Simons não possui conteúdo físico. Como demonstramos na seção 5.1 desta tese.