

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

VINÍCIUS BARROS DA SILVA

BIFURCAÇÃO DE HOPF: UMA ANÁLISE DE ESCALA

RIO CLARO-SP

2016

VINÍCIUS BARROS DA SILVA

BIFURCAÇÃO DE HOPF: UMA ANÁLISE DE ESCALA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas-Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Licenciado em Física.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Edson Denis Leonel (Orientador).

Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro.

Prof. Dr. Alexandre Mesquita.

Rio Claro, 04 de Novembro de 2016.

A Deus,

Aos meus pais, Francisco e Maria.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela iluminação e proteção ao longo desta jornada, e por conceder-me a graça de concluir a minha graduação no curso de física.

Agradeço a todos os meus familiares, principalmente aos meus pais Francisco e Maria, verdadeiros alicerces da minha vida, por todo o apoio e incentivo à alcançar meus objetivos e sonhos.

Agradeço especialmente ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel pela orientação, paciência e dedicação que sempre teve comigo. Também estendo meus agradecimentos ao Prof. Dr. João Paulo Cerri do departamento de Matemática, pela consultoria e ajuda no desenvolvimento deste trabalho, e os demais professores do departamento de Física da UNESP de Rio Claro.

Aos meus amigos de graduação, obrigado por todos os momentos de alegria e incentivo.

Fico grato, também, à FAPESP pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração desta monografia.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é investigar as propriedades de escala observadas na convergência para o estado estacionário na bifurcação de Hopf supercrítica. O sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica é escrito na sua forma normal de tal maneira que, em coordenadas polares, o mesmo é caracterizado por uma equação radial e outra angular. Determinamos também os expoentes críticos que caracterizam a convergência para o equilíbrio. Para tanto, utilizamos o formalismo de escala similar ao que é aplicado em transições de fase na física estatística. A análise de escala para a bifurcação de Hopf supercrítica revelou, a partir do estudo da equação radial, que no ponto de bifurcação, isto é, quando o parâmetro de controle do qual o sistema depende passa por um valor crítico, que a convergência para o ponto fixo é descrita por uma função homogênea que conduz a três expoentes críticos associados entre si por uma lei de escala. Por outro lado, o estudo da equação angular revelou que a convergência para estado estacionário no ponto de bifurcação também é descrita por uma nova função homogênea que conduz a três novos expoentes críticos. Estes, por sua vez, também encontram-se relacionados entre si pela mesma lei de escala obtida no estudo da equação radial. Após o evento de bifurcação, o estudo da equação radial revelou que a convergência para o estado estacionário passa a ser descrita por uma exponencial com um tempo de relaxação descrito por uma lei de potência, com um expoente δ . Contudo, em relação ao estudo da equação angular, os resultados encontrados para os expoentes críticos, após o evento da bifurcação, sugerem que a convergência para ao estado estacionário, na variável angular, é invariante ao parâmetro de controle do qual o sistema dinâmico depende. Desse modo, o emprego do formalismo de escala na forma normal da bifurcação de Hopf supercrítica levou a determinação dos expoentes críticos, assim como, das propriedades de escala que caracterizam a bifurcação. O conhecimento destes observáveis, por sua vez, permite identificar a classe de universalidade a qual esta bifurcação pertence.

Palavras-Chaves: Bifurcação de Hopf; propriedades de escala; forma normal;

ABSTRACT

The main goal of this work is to explore the evolution towards the steady state at and nearby the supercritical Hopf bifurcation with the ordinary differential equation (ODE) that describes the dynamics written in the normal form. In polar coordinates, the same system is then characterized by an angular and, a radial equation. We applied a scaling formalism similar the one used in statistical mechanics to describe phase transitions. By considering this formalism in the analysis of the radial equation at the bifurcation point, we used a phenomenological description characterized by scaling hypothesis to prove that a homogeneous function with three critical exponents describes the decay to the fixed point. In turn, we discovered these exponents are related to each other by a scaling law of the type $z = \alpha/\beta$. In the other hand, the analysis of the angular equation at the bifurcation point shown that a homogeneous function with three new critical exponents related to each other by the same scaling law discussed previously also describes the decay to the steady state. However, the analysis of the radial equation near the bifurcation point showed the convergence to the equilibrium point is described by an exponential decay with a relaxation time given by a power law of the type $\tau \propto \mu^\delta$, where δ is a critical exponent. However, the analysis of the angular equation near the bifurcation point shown exactly the same critical exponents found at the bifurcation point. To sum up, we obtained by considering the convergence to steady state at and nearby the Hopf bifurcation the scaling properties and the critical exponents that characterizes the bifurcation in study. The knowledge of these exponents allows one to identify to what universality a bifurcation belongs to.

Key words: Hopf bifurcation; scaling properties; normal form;

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. BIFURCAÇÕES LOCAIS	14
2.1. INTRODUÇÃO	14
2.2. CONCEITO DE ESTABILIDADE ESTRUTURAL	15
2.3. BIFURCAÇÕES DE CODIMENSÃO UM.....	16
2.3.1. Bifurcação Sela-nó	16
2.3.2. Bifurcação Transcrítica	18
2.3.3. Bifurcação de Forquilha.....	19
2.3.4. Bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf	22
3. ANÁLISE DE ESCALA EM BIFURCAÇÕES LOCAIS	25
3.1. INTRODUÇÃO	25
3.2. CONVERGÊNCIA PARA O PONTO FIXO	26
3.3. HIPÓTESES DE ESCALA.....	27
3.4. ANÁLISE DE ESCALA NA BIFURCAÇÃO SELA-NÓ.....	31
3.5. ANÁLISE DE ESCALA NA BIFURCAÇÃO TRANSCRÍTICA	32
3.6. ANÁLISE DE ESCALA NA BIFURCAÇÃO SUPERCRÍTICA DE FORQUILHA ..	33
4. BIFURCAÇÃO DE HOPF: UMA ANÁLISE DE ESCALA	35
4.1. INTRODUÇÃO	35
4.2. FORMA NORMAL DA BIFURCAÇÃO DE HOPF	36
4.3. ANÁLISE DE ESCALA DA FORMA NORMAL DA BIFURCAÇÃO DE HOPF	43
5. CONCLUSÕES	59
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61

1. INTRODUÇÃO

A teoria de bifurcações encontra-se particularmente interessada no estudo da mudança do comportamento topológico associado a um fluxo de soluções de um sistema dinâmico que pode ser descrito por uma equação diferencial [1] ou por um mapa discreto [2]. Onde, neste trabalho, entende-se por *mapas discretos* sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de forma discreta. Todavia, uma bifurcação geralmente ocorre quando a alteração de um determinado parâmetro de controle produz uma mudança qualitativa no fluxo de soluções do sistema. Como exemplo de parâmetro de controle podemos considerar a seguinte equação

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Onde é evidente que os pontos para os quais $\frac{dx}{dt} = 0$ resultam em

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}.$$

Dependendo se μ for maior que zero ou menor que zero, o fluxo de soluções do sistema será modificado. De forma geral, as bifurcações são divididas em dois tipos: locais e globais [3]. As bifurcações locais ocorrem quando a alteração do parâmetro de controle provoca uma mudança na estabilidade associada a um ponto fixo. Por outro lado as bifurcações globais costumam ocorrer quando conjuntos invariantes, por exemplo, atratores caóticos, colidem com variedades instáveis, o que acarreta na destruição do atrator [4,5]. Denomina-se *atrator* um ponto ou conjunto de pontos para os quais as trajetórias de fase convergem para tempos suficientemente longos.

Recentemente, houve significativos avanços no estudo da evolução dinâmica e, conseqüentemente, da convergência para os pontos fixos em três bifurcações locais, transcritical, forquilha e duplicação de período em uma família de mapeamentos discretos do tipo logístico-like [6,7]. Nestes estudos fez-se o uso do formalismo de escala de tal maneira que os sistemas dinâmicos analisados detiveram certos observáveis descritos por uma lei de escala e expoentes críticos. Estes últimos, por outro lado, descrevem a convergência para o estado estacionário no sistema dinâmico. Apesar disso, pouco se parece conhecer sobre a natureza dos expoentes críticos, bem como da lei de escala para sistemas dinâmicos escritos nas chamadas formas normais.

Desse modo, o ponto de interesse é generalizar a investigação para bifurcações em fluxos de equações diferenciais, particularmente investigando o comportamento dos expoentes críticos e da lei de escala nas chamadas formas normais, com interesse na bifurcação de Hopf [8]. Um determinado sistema dinâmico exhibe a bifurcação de Hopf quando a alteração do parâmetro de controle deste sistema conduz a uma mudança na estabilidade do ponto fixo de foco atrator para foco repulsor com o surgimento de um ciclo limite assintoticamente estável. Um

ciclo limite tratá-se, por sua vez, de uma órbita fechada e isolada que pode aparecer no espaço de fases de sistemas dinâmicos não lineares.

Com base nisso, o principal objetivo do presente trabalho consiste em investigar as propriedades de escala, bem como, determinar os expoentes críticos que caracterizam a bifurcação de Hopf escrita em sua forma normal. Nesse contexto, a proposta deste trabalho visa investigar e caracterizar a bifurcação de Hopf em sua forma normal a partir do uso do formalismo de escala.

O trabalho de conclusão de curso estrutura-se em três capítulos. No primeiro capítulo são discutidos e classificados alguns tipos de bifurcações locais como Sela-nó, Transcrítica e Forquilha, que se desdobra em: supercrítica e subcrítica. No final, são discutidas as características gerais da bifurcação de Hopf. No segundo capítulo, será abordada a aplicação do formalismo de escala e a determinação dos expoentes críticos que caracterizam as bifurcações Sela-nó, Transcrítica e Forquilha supercrítica. Por fim, no terceiro capítulo, é abordada a análise de escala para a forma normal da bifurcação de Hopf, determinando, numérica e analiticamente, os expoentes críticos que a caracterizam.

2. BIFURCAÇÕES LOCAIS

2.1. INTRODUÇÃO

Dentro da dinâmica não linear, a teoria de bifurcações encontra-se particularmente interessada no estudo sobre a mudança do comportamento topológico de um fluxo de soluções. Este fluxo, por sua vez, pode estar associado a sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ou por mapeamentos discretos¹.

Segundo Luiz Henrique Monteiro (2002), o termo bifurcação foi originalmente proposto por Poincaré em 1885 para referir-se às mudanças qualitativas observadas no retrato de fases de um sistema dinâmico quando algum parâmetro de controle do sistema passa por um valor crítico.

Em outras palavras, toda vez que uma pequena perturbação de um parâmetro de controle associado a um sistema dinâmico, descrito por equações diferenciais ou por mapas discretos, conduz a mudanças no seu respectivo retrato de fase², dizemos que ocorre um fenômeno conhecido como bifurcação.

Todavia, a teoria de bifurcações é dividida em duas vertentes: as bifurcações locais e globais. Costuma-se definir como bifurcação local aquela em que a alteração do parâmetro de controle conduz a uma mudança na estabilidade associada ao ponto fixo do sistema. Por outro lado, denominam-se como bifurcações globais aquelas que costumam ocorrer quando conjuntos invariantes, a exemplo atratores caóticos³, colidem com variedades instáveis, acarretando na destruição do atrator caótico [4,5].

¹ Denomina-se *mapa* sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de maneira discreta [9, p. 66].

² Um dado par de valores (x, \dot{x}) define o *estado* de um determinado sistema dinâmico. O *diagrama de fases* ou *retrato de fases* mostra como esse *estado* evolui à medida que o tempo passa. [9, p. 19].

³ Denomina-se *atrator* um ponto ou um conjunto de pontos para os quais as trajetórias de fase convergem para tempos suficientemente longos [10, p. 39]. Os *atratores caóticos* são assim chamados por possuírem uma forma geométrica não usual, mas, ao mesmo tempo, apresentarem um expoente de Lyapunov positivo [10, p. 21].

Para Savi [11], as bifurcações locais tratam-se de mudanças no comportamento topológico do fluxo de soluções do sistema em uma região limitada do espaço de fases⁴, por exemplo, os pontos fixos. De tal maneira que o procedimento de análise consiste, para este caso, de estudar os diferentes tipos de soluções com a variação dos parâmetros de controle. As bifurcações globais, por outro lado, são caracterizadas como bifurcações do tipo não-locais, portanto, conclusões sobre estas bifurcações não podem ser obtidas a partir da análise local.

De outra forma, pode-se dizer que bifurcações locais descrevem todas as mudanças no espaço de fase que podem ser previstas estudando-se o campo vetorial nas vizinhanças de um ponto fixo ou de uma órbita fechada. Ao passo que, as bifurcações globais são aquelas em que a análise local não permite inferir em nada sobre as mudanças das órbitas no retrato de fase.

Com base no que foi discutido, os objetivos deste capítulo se resumem em discutir e classificar alguns tipos de bifurcações locais de codimensão⁵ em equações diferenciais ordinárias. Em particular apresentaremos as bifurcações: Sela-nó, transcritical e forquilha, que se subdivide em supercrítica e subcrítica. Antes, porém, iniciaremos o capítulo discutindo outra ideia intimamente relacionada com a teoria de bifurcações, a estabilidade estrutural.

2.2. CONCEITO DE ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Suponha um sistema bidimensional dado por:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \mu) \text{ e } \frac{dy}{dt} = g(x, y, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

onde μ é um parâmetro de controle. Sistemas dinâmicos que procuram representar sistemas físicos, geralmente, dependem de um ou mais parâmetros conhecidos como *parâmetros de controle*. Por exemplo, na equação diferencial que descreve o

⁴ Suponha $f(x, \dot{x})$ um campo de forças, o espaço da variável $x \in \mathfrak{R}^n$ é chamado de espaço de configurações do sistema mecânico, enquanto que o espaço da variável $(x, \dot{x}) \in \mathfrak{R}^{2n}$ é chamado *espaço de fases* do sistema [12, p. 21].

⁵ *Codimensão* é o número mínimo de parâmetros que devem ser variados de forma a se observar certo tipo de bifurcação [9, p. 135].

oscilador harmônico simples, o parâmetro de controle é a frequência natural de oscilação (w_0).

Todavia, o retrato de fases do sistema dinâmico encontra-se intimamente relacionado com o valor deste parâmetro, uma vez que, a mais irrisória alteração do mesmo pode criar ou destruir pontos fixos, assim como, ciclos- limite. Portanto, dizemos que se as equações que definem o sistema (1) tiverem uma perturbação suficientemente pequena gerando assim um novo fluxo de soluções que é topologicamente equivalente aquele associado ao sistema original, sem a perturbação, dizemos que sistema dinâmico exibe estabilidade estrutural [3, p. 258, 259].

Em outras palavras, se o fluxo de soluções preservar a estrutura topológica do sistema dinâmico, mesmo havendo alterações nas equações que o definem, diz-se então que mesmo é estruturalmente estável.

2.3. BIFURCAÇÕES DE CODIMENSÃO UM

Nesta seção são apresentados e classificados alguns tipos de bifurcações locais de codimensão um em equações diferenciais ordinárias. Segundo Luiz Henrique Monteiro (2002), a codimensão de uma bifurcação, nada mais é, que o número de parâmetros que variam de tal maneira a produzir a bifurcação. Ou seja, estaremos interessados em classificar bifurcações locais que contam com apenas um único parâmetro de controle. A presente seção está baseada em [3], [6], [7] e [10].

2.3.1. Bifurcação Sela-nó

Considere a seguinte equação diferencial,

$$\dot{x} = \mu - x^2 = f(x), \quad (2)$$

onde $x \in \mathbb{R}$ é uma varável dinâmica e μ é o parâmetro de controle. Para determinar os pontos para os quais $\dot{x} = \mathbf{0}$, isto é, os pontos fixos da equação (2), é necessário encontrar um ponto x^* tal que $f(x^*) = \mathbf{0}$. Para isso, devemos resolver a equação $\dot{x} = \mathbf{0}$. Essa solução nos leva a dois pontos de equilíbrio

$$x^*_1 = \sqrt{\mu} \text{ e } x^*_2 = -\sqrt{\mu}. \quad (3)$$

Estes pontos fixos são reais para $\mu \geq 0$. A estabilidade dos pontos de equilíbrio é obtida a partir da análise da derivada primeira de $f(x)$ em relação a x , avaliada nos pontos de equilíbrio. Portanto, teremos que

$$\frac{df(x)}{dx} = -2x. \quad (4)$$

Se $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*} < 0$, o ponto de equilíbrio é dito ser assintoticamente estável. Para $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*} > 0$, o ponto de equilíbrio passa a ser instável à medida que $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*} = 0$ estabelece a mudança de estabilidade do sistema e, conseqüentemente, caracteriza o chamado ponto de bifurcação.

Realizando a análise da estabilidade do ponto fixo $x^*_1 = \sqrt{\mu}$ tem-se que $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*_1} = -2\sqrt{\mu}$, que é um número negativo, portanto $x^*_1 = \sqrt{\mu}$ é dito ser assintoticamente estável. Para o ponto fixo $x^*_2 = -\sqrt{\mu}$ nota-se um resultado diferente, uma vez que, $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*_2} = 2\sqrt{\mu}$ é um número positivo, portanto $x^*_2 = -\sqrt{\mu}$ é um ponto de equilíbrio instável.

Graficamente, pode-se mostrar como as soluções de equilíbrio variam em função do parâmetro μ a partir de um diagrama de bifurcação [3]. Neste diagrama, soluções assintoticamente estáveis são representadas por linhas cheias ao passo que as soluções instáveis são dadas por linhas tracejadas como mostra a figura 2.1. As flechas presentes neste diagrama descrevem a evolução temporal de $x(t)$, para um determinado valor de μ e uma condição inicial $x(0)$.

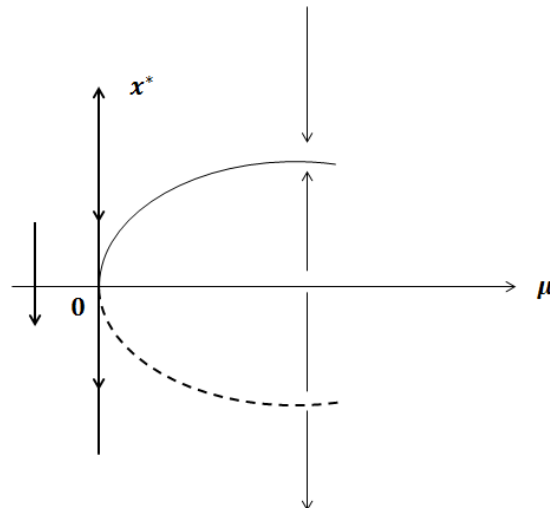


Figura 2.1- Esboço da bifurcação Sela-nó. O equilíbrio estável é um nó (ramo superior); o equilíbrio instável é uma sela (ramo inferior).

Analisando figura 2.1 nota-se que em $\mu = 0$ ocorre o nascimento dos pontos fixos $x^*_{1,2}$ de tal forma que x^*_1 é assintoticamente estável enquanto que x^*_2 é instável.

Enfim, a partir da análise local da equação diferencial (2) obtiveram-se dois pontos de equilíbrio, um assintoticamente estável representado, no diagrama de bifurcação, por um nó e outro instável representado por um ponto de sela hiperbólico. Esta bifurcação é classificada como bifurcação Sela-nó.

2.3.2. Bifurcação Transcrítica

Consideremos agora a equação

$$\dot{x} = \mu x - x^2 = f(x). \quad (5)$$

Os pontos fixos associados à equação (5) são obtidos resolvendo $f(x) = 0$, portanto teremos como soluções os seguintes pontos fixos

$$x^*_1 = 0 \text{ e } x^*_2 = \mu. \quad (6)$$

A estabilidade local é obtida a partir da derivada primeira de $f(x)$ de (5) com relação a x . Logo, veremos que

$$\frac{df(x)}{dx} = \mu - 2x. \quad (7)$$

Realizando a análise da estabilidade do ponto fixo $x^*_1 = 0$ tem-se que $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x_1^*} = \mu$, isto é, se $\mu > 0$, x^*_1 é dito ser um ponto de equilíbrio instável ao passo que se $\mu < 0$, x^*_1 passa a ser um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Todavia, para o ponto fixo $x^*_2 = \mu$ tem-se uma situação contrária dado que $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x_2^*} = -\mu$, ou seja, se para $\mu > 0$ x^*_2 é um ponto fixo assintoticamente estável, para $\mu < 0$ x^*_2 passará a ser instável.

À vista disso, percebe-se que esta bifurcação é caracterizada por uma troca de estabilidades em torno de $\mu = 0$ já que o ponto fixo x^*_1 é assintoticamente estável para $\mu < 0$, contudo passa a ser instável quando $\mu > 0$ na medida em que ocorre o oposto com o ponto x^*_2 . Este tipo de bifurcação é classificado como transcritical. A figura 2.2 a seguir ilustra a bifurcação transcritical que se dá em $\mu = 0$.

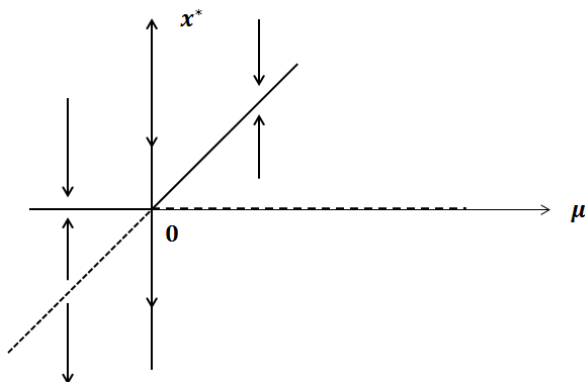


Figura 2.2-Esboço da bifurcação transcritical que ocorre em $\mu = 0$. O ramo $x = 0$ perde estabilidade no ponto de bifurcação $(x, \mu) = (0, 0)$ ao passo que o ramo $x = \mu$ ganha estabilidade a partir desse ponto.

2.3.3. Bifurcação de Forquilha

Esta bifurcação se desdobra em dois tipos: (i) supercritical e (ii) subcritical. Iniciaremos a discussão com o caso (i), ou seja, com a bifurcação de forquilha supercritical.

2.3.3a. Bifurcação Supercritical de Forquilha

Suponha uma equação diferencial dada por

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = f(x). \quad (8)$$

Os pontos fixos são obtidos a partir da solução de $f(x) = 0$. Portanto, teremos como soluções os seguintes pontos fixos

$$x^*_1 = 0 \text{ e } x^*_{2,3} = \pm\sqrt{\mu}. \quad (9)$$

Onde as soluções $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{\mu}$ são reais se, e somente se, $\mu \geq 0$. Para analisarmos a estabilidade associada aos pontos fixos devemos determinar a derivada primeira de $f(x)$, da equação (8), em relação a x . Portanto, ficaremos com

$$\frac{df(x)}{dx} = \mu - 3x^2. \quad (10)$$

Avaliando a derivada nos pontos fixos teremos que: (i) $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*_1} = \mu$, isto nos mostra que x^*_1 é instável para $\mu > 0$ e assintoticamente estável para $\mu < 0$; (ii) $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*_2} = -2\mu$, desta forma x^*_2 é assintoticamente estável para $\mu > 0$ e instável para $\mu < 0$; (iii) $x^*_3 = -\sqrt{\mu}$ possui as mesmas características, em termos de estabilidade, de $x^*_2 = \sqrt{\mu}$, portanto x^*_3 será assintoticamente estável para $\mu > 0$ e instável para $\mu < 0$.

Em $\mu = 0$ ocorre o nascimento de dois pontos fixos assintoticamente estáveis, $x^*_{2,3}$, na medida em que o ponto de equilíbrio x^*_1 perde sua estabilidade. Este tipo de bifurcação é classificado como supercrítica de forquilha. A figura 2.3 ilustra a bifurcação supercrítica de forquilha que ocorre em $\mu = 0$.

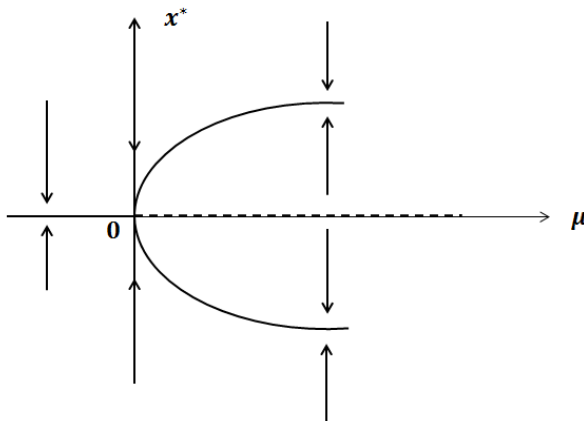


Figura 2.3- Esboço da bifurcação supercrítica de forquilha em $(x, \mu) = (0, 0)$.

2.3.3b. Bifurcação Subcrítica de Forquilha

Suponha uma EDO dada por

$$\dot{x} = \mu x + x^3 = f(x). \quad (11)$$

Os pontos fixos são obtidos a partir da solução de $f(x) = 0$. Portanto, teremos como soluções os seguintes pontos fixos

$$x^*_1 = 0 \text{ e } x^*_{2,3} = \pm\sqrt{-\mu}, \quad (12)$$

onde as soluções $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{-\mu}$ são reais se, e somente se, $\mu \leq 0$. Para analisarmos a estabilidade associada aos pontos fixos devemos determinar a derivada primeira de $f(x)$, da equação (11), em relação a x . Portanto, ficaremos com

$$\frac{df(x)}{dx} = \mu + 3x^2. \quad (13)$$

Avaliando a derivada nos pontos fixos teremos que: (i) $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*_1} = \mu$, isto nos mostra que x^*_1 é instável para $\mu > 0$ e assintoticamente estável para $\mu < 0$. Avaliando a equação (13) nos pontos de equilíbrio $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{-\mu}$ temos

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^*_{2,3}} = 2|-\mu|. \quad (14)$$

No entanto, (14) se trata de uma quantidade não negativa. Portanto, os pontos fixos $x^*_{2,3}$ são instáveis. A figura 2.4 ilustra a bifurcação subcrítica de forquilha.

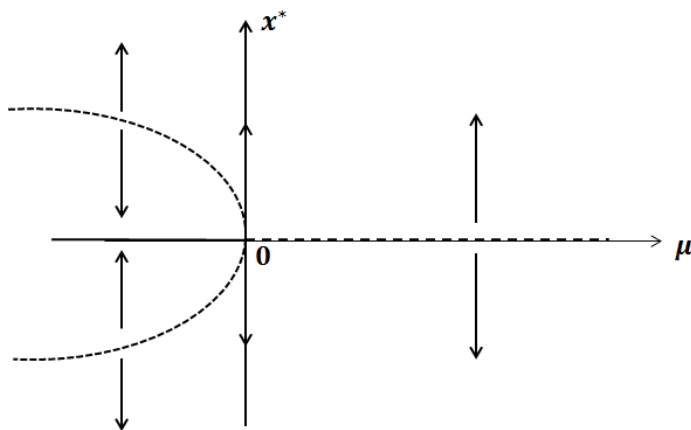


Figura 2.4- Esboço da bifurcação subcrítica de forquilha.

2.3.4. Bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf

Consideremos um sistema de equações diferenciais dependente de um parâmetro μ

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2) = f(x, y, \mu), \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(\mu - x^2 - y^2) = g(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{15}$$

com $\mu \in \mathbb{R}$. Neste caso, como estamos lidando com um sistema bidimensional os pontos fixos só poderão ser obtidos a partir das soluções de $f(x, y, \mu) = g(x, y, \mu) = 0$. No entanto, nota-se que para qualquer $\mu \in \mathbb{R}$, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (15) com matriz jacobiana, A , dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz jacobiana A são $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. De acordo com o critério para a classificação dos pontos de equilíbrio (ver Refs. [3,10]), se os autovalores da matriz jacobiana formarem um par complexo conjugado, temos, para $\mu \in \mathbb{R}$, que as trajetórias são descritas por espirais em torno do ponto fixo, que passa a ser chamado de *foco* [9, p. 31]. De tal maneira que

- a) Se $\mu < 0$, as trajetórias de fase convergem para o ponto fixo definindo o que é conhecido como *foco atrator assintoticamente estável*;
- b) Se $\mu > 0$, as trajetórias de fase afastam-se do ponto fixo definindo um *foco repulsor*. O *foco repulsor* é dito ser *instável*;
- c) Se $\mu = 0$, tem-se um equilíbrio elíptico ou degenerado, isto é, as trajetórias são descritas por um centro, que se trata basicamente de um ponto estável, mas não assintoticamente estável;

Em outras palavras, a partir do critério de classificação da estabilidade dos pontos de fixos, pode-se dizer que o equilíbrio associado ao sistema (15) é

caracterizado por uma perda de estabilidade em $\mu = 0$, uma vez que, para $\mu < 0$ o equilíbrio é estável e caracterizado por um *foco atrator* enquanto que para $\mu > 0$ o equilíbrio passa a ser instável caracterizado por um *foco repulsor*.

Considerando agora $\mu > 0$, o sistema (15) pode ser reescrito em coordenadas polares (16). Desse modo, temos que

$$\frac{dr}{dt} = r(\mu - r^2) \text{ e } \frac{d\varphi}{dt} = 1. \quad (16)$$

Aqui r representa a coordenada radial e φ a coordenada angular. A partir do sistema (16) pode-se concluir que, para $\mu > 0$, existe uma órbita periódica estável de raio $r^* = \sqrt{\mu}$. O comportamento das soluções é determinado pelo valor de μ como ilustra a figura 2.5.

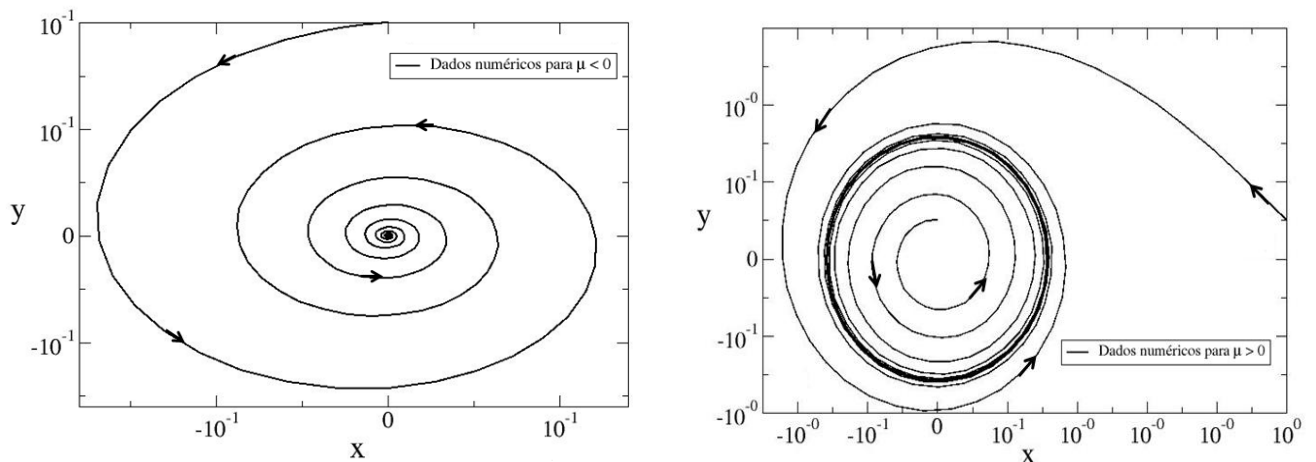


Figura 2.5- Esboço da bifurcação de Hopf.

Na figura 2.5, nota-se que a mudança no parâmetro μ leva a uma troca da estabilidade do ponto fixo, isto é, passa-se de um equilíbrio estável para um ciclo limite ⁶ estável que envolve o equilíbrio instável em $\mu > 0$. O sentido de rotação, por sua vez, é dado pelo sinal de $\frac{d\varphi}{dt}$. Como neste caso, $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, as órbitas de fase giram no sentido anti-horário, que é o sentido de crescimento de φ .

Em vista disso, diz-se que uma bifurcação que liga o equilíbrio a um movimento periódico com oscilações regulares é chamada de *bifurcação de Hopf supercrítica*. Segundo Henrique Alves Monteiro [3], E. Hopf estabeleceu as condições para que um sistema qualquer n-dimensional apresentasse a ocorrência deste tipo de bifurcação, veja [9, apêndice H]. No entanto, essa bifurcação já havia sido discutida por Poincaré, em 1892, e estudada por Andronov, em 1929, para um sistema bidimensional. Assim como a bifurcação de Forquilha ou “*pitchfork*” que se desdobra no caso supercrítico e subcrítico, é importante mencionar que a bifurcação de Hopf também pode se apresentar na forma subcrítica.

⁶ De acordo com Henri Poincaré, um *ciclo limite* trata-se de uma trajetória fechada e isolada, que pode existir no diagrama de fases de sistemas dinâmicos não lineares [3, p. 273].

3. ANÁLISE DE ESCALA EM BIFURCAÇÕES LOCAIS

3.1. INTRODUÇÃO

Vimos que sistemas dinâmicos que procuram representar sistemas físicos reais geralmente apresentam uma dependência com relação a certos parâmetros de controle. A alteração, mesmo que pequena, destes parâmetros conduz a mudanças significativas no retrato de fases desses sistemas.

Segundo E. D. Leonel (2015), o fluxo de soluções antes e após a uma bifurcação, devido a mudanças nos parâmetros de controle, geralmente acaba ocasionando uma mudança na estabilidade associada ao ponto fixo. Em outras palavras, uma bifurcação, quando ocorre devido à alteração dos parâmetros de controle, gera uma mudança no comportamento topológico do fluxo de soluções do sistema dinâmico.

Todavia, na física estatística ou na mecânica estatística, mudanças na estrutura espacial do sistema dinâmico, que se devem particularmente a variações de parâmetros de controle, estão relacionadas com um fenômeno conhecido como transição de fase [13, 14, 15], que, por sua vez, pode ser descrita a partir de leis de escala [13, 16, 17].

Desse modo, alterações nos valores dos parâmetros de controle geralmente conduzem a alterações nos retratos de fase de sistemas dinâmicos, de tal forma que estas perturbações ocasionam uma mudança topológica no fluxo de soluções do sistema, caracterizando o fenômeno conhecido como bifurcação.

Não obstante, sabe-se também que as modificações nas estruturas espaciais dos sistemas dinâmicos estão relacionadas com o fenômeno da transição de fase, visto que, próximo a ela, o sistema adquire certos observáveis que nos permitem inferir sobre a convergência para o ponto fixo.

O estudo da convergência para o ponto fixo é sempre caracterizado em termos da distância ao ponto fixo. [...] A convergência para o ponto fixo, no ponto de bifurcação, é descrita por uma função homogênea generalizada conduzindo a três expoentes críticos: α , β , e z , estes expoentes, por sua vez, estão relacionados entre si a partir de uma lei de escala. Nas proximidades da bifurcação, a convergência para o ponto fixo é dada por uma função exponencial. O tempo de relaxação é descrito a partir de uma lei de potência cujo argumento é o parâmetro que fornece a distância da bifurcação, caracterizado por um expoente δ [10, p. 82].

O autor deixa claro na citação acima que a convergência para o ponto fixo, ao olharmos para o ponto e para as vizinhanças de uma bifurcação, é caracterizada por função de escala e expoentes críticos. Estes expoentes nos possibilitam identificar a classe de universalidade a qual a bifurcação pertence.

Com base no que foi discutido, o presente capítulo tem como objetivo investigar as propriedades de escala das bifurcações locais, bem como, determinar os expoentes críticos que as caracterizam a partir do emprego do formalismo de escala semelhante ao da mecânica estatística.

3.2. CONVERGÊNCIA PARA O PONTO FIXO

Neste capítulo é discutido o formalismo da convergência para o ponto fixo na bifurcação e em suas vizinhanças com o propósito de descrever o procedimento para a obtenção dos expoentes críticos que caracterizam as bifurcações discutidas no capítulo 2. Em particular, destacaremos a obtenção dos expoentes críticos para as bifurcações: Sela-nó, transcritical e supercritical de forquilha. O presente capítulo encontra-se baseado em [10], [6] e [7].

Para poder discutir sobre o formalismo de escala consideremos a convergência para o ponto fixo da EDO (2) abordada no capítulo 2.

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 = f(x); \mu \in \mathfrak{R}. \quad (2)$$

Vimos que em $\mu = 0$ ocorre uma bifurcação caracterizada por um ramo superior estável (nó) e um ramo inferior instável (sela). Os pontos fixos são $x^*_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$ para $\mu \geq 0$. A partir da análise da estabilidade constatou-se que: (i) x^*_1 é assintoticamente estável para $\mu > 0$, dessa maneira qualquer condição inicial

próxima de sua vizinhança irá convergir para ele com o passar do tempo; (ii) x^*_2 é instável para $\mu > 0$, assim qualquer condição inicial próxima de sua vizinhança irá se afastar dela com o passar do tempo.

No entanto, isto nos leva a questionar sobre o quão rápido é essa convergência para o ponto fixo e se ela depende da condição inicial escolhida. Como será mostrado, a convergência para o ponto fixo dependerá da condição inicial e a rapidez com a qual isto ocorre dependerá da não linearidade da equação diferencial. A figura 3.1 ilustra o comportamento de x vs t para as soluções da equação (2) considerando diferentes condições iniciais x_0 .

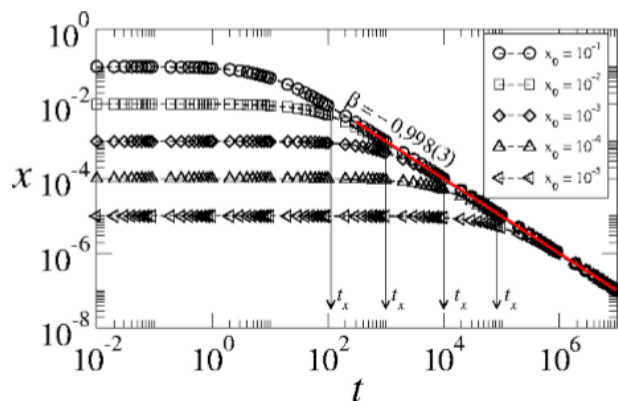


Figura 3.1- Esboço do comportamento de x vs. t para diferentes condições iniciais. Fonte: [10, p. 83]

Analisando a figura 3.1 nota-se que, dependendo da condição inicial x_0 , a órbita fica estacionada em um platô constante por um longo intervalo de tempo até que eventualmente ocorra uma mudança de comportamento levando-a a um regime de decaimento dado por uma lei de potência. Além disso, ainda na figura 3.1, nota-se que o tempo de *crossover*, isto é, o tempo em que ocorre a mudança de comportamento do platô constante para o regime de decaimento, também depende da condição inicial.

3.3. HIPÓTESES DE ESCALA

Com base no comportamento de x vs. t ilustrado na figura 3.1 é possível elaborar algumas hipóteses para poder descrever como se dá a convergência para o ponto fixo na bifurcação, ou seja, em $\mu = 0$.

1. Para tempos suficientemente pequenos, isto é, $t \ll t_x$, a convergência para o ponto fixo será dada por

$$x(t) \propto x_0^\alpha, \quad (17)$$

onde, x_0 é a distância inicial do ponto fixo, α é um expoente crítico e t_x é o tempo característico onde ocorre a mudança do platô constante para o regime de decaimento.

2. Para tempos longos, isto é, $t \gg t_x$, teremos a seguinte hipótese

$$x(t) \propto t^\beta, \quad (18)$$

onde β é um expoente crítico que define a convergência para o estado estacionário.

3. O tempo característico t_x que marca a mudança do platô constante ao regime de decaimento é dado por

$$t_x \propto x_0^z, \quad (19)$$

onde z é o expoente crítico responsável pela dependência do *crossover* t_x com a distância inicial x_0 .

De posse destas três hipóteses de escala é possível analisar a convergência para o ponto fixo a partir de uma função homogênea generalizada definida como

$$x(x_0, t) = lx(l^a x_0, l^b t), \quad (20)$$

onde l é um fator de escala, a e b são expoentes característicos.

Como l é um fator de escala, podemos escolhê-lo como $l^a x_0 = 1$. Portanto, veremos que

$$l = x_0^{-\frac{1}{a}}. \quad (21)$$

Levando (21) em (20), ficaremos com o seguinte resultado

$$x(x_0, t) = x_0^{-\frac{1}{a}} x\left(1, x_0^{-\frac{b}{a}} t\right). \quad (22)$$

Assumindo $x(1, x_0^{\frac{b}{a}}t)$ constante, para $t \ll t_x$, veremos que ao comparar (22) com a equação (17) da primeira hipótese de escala chegamos à conclusão de que $\alpha = -\frac{1}{a}$.

Escolhendo agora $l^b t = 1$ teremos que

$$l = t^{-\frac{1}{b}}. \quad (23)$$

Substituindo (23) em (20) veremos que

$$x(x_0, t) \propto t^{-\frac{1}{b}}. \quad (24)$$

Comparando (24) com a equação (18) da segunda hipótese de escala chegamos à conclusão de que $\beta = -\frac{1}{b}$.

Finalmente podemos comparar as duas expressões obtidas para l descrita pelas equações (21) e (23), o que nos leva a

$$l = t^{-\frac{1}{b}} = x_0^{-\frac{1}{a}}.$$

Portanto,

$$t_x \propto x_0^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}. \quad (25)$$

Comparando (25) com a equação (19) da terceira hipótese de escala temos que

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (26)$$

A equação (25) define uma lei de escala. Isto nos mostra que os expoentes críticos α , β e z estão relacionados entre si de tal maneira que o conhecimento de dois deles, é suficiente para determinar o terceiro.

Analisando a figura 3.1 nota-se que para tempos curtos, $x(t) \cong x_0$, portanto temos que $\alpha = 1$. Ainda na figura 3.1, podemos obter também o expoente β , através de um ajuste em lei de potência ao regime de decaimento, o que nos conduz a $\beta = -0.998(3) \cong -1$. Substituindo os expoentes α e β em (26) teremos que

$$z \cong -1. \quad (27)$$

Portanto, para a análise da convergência para o estado estacionário no ponto de bifurcação foram encontrados os expoentes críticos $\alpha = 1$, $\beta \cong -1$ e $z \cong -1$.

Até aqui foi discutido o formalismo de escala no ponto de bifurcação da EDO (2) do capítulo 2. Discutiremos agora a convergência para o ponto fixo quando $\mu > 0$. A figura 3.2 (a) ilustra o comportamento de x vs t para diferentes valores de μ a uma mesma condição inicial $x_0 = 0,1$. Analisando esta figura pode-se dizer que todas as curvas convergem para o ponto fixo com o passar do tempo e com velocidades de convergência diferentes. Assim podemos fazer a seguinte suposição

$$x(t) - x^* \propto e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (28)$$

onde τ é definido como sendo um tempo de relaxação dado por

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (29)$$

onde δ é um expoente crítico. Este expoente pode ser obtido via simulação numérica. A figura 3.2 (b) mostra um esboço de τ vs μ para a EDO (2). A partir de um ajuste em lei de potência temos que $\delta = -0,481 \cong -0,5$.

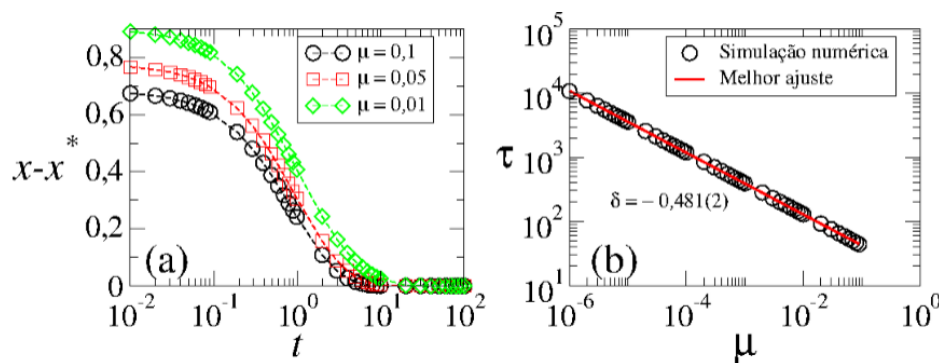


Figura 3.2- (a) Esboço do comportamento de x vs. t para a EDO (2) assumindo diferentes valores para μ . (b) Esboço do comportamento de τ vs. μ . Fonte: [10, p. 88].

Desse modo, ao analisarmos a bifurcação Sela-nó a partir da aplicação do formalismo de convergência para o ponto fixo, quando $\mu = 0$ e $\mu > 0$, obtivemos quatro expoentes críticos: $\alpha = 1$, $\beta \cong -1$, $z \cong -1$ e $\delta \cong -0,5$. Estes expoentes críticos, por sua vez, caracterizam a classe de universalidade a qual a bifurcação pertence.

Embora a descrição do formalismo de escala tenha levado a determinação dos expoentes críticos α, β, z e δ a partir de simulações numéricas, estes expoentes

também podem ser obtidos via solução direta da EDO (2) do capítulo 2. A seguir é apresentada a determinação dos expoentes críticos para as bifurcações sela-nó, transcritical e supercritical de forquilha a partir da solução direta das EDOs.

3.4. ANÁLISE DE ESCALA NA BIFURCAÇÃO SELA-NÓ

Embora se tenha discutido como determinar os expoentes críticos para a bifurcação Sela-nó a partir de simulações numéricas, neste capítulo discutiremos a obtenção dos expoentes críticos a partir da solução direta da EDO.

Seja a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = \mu - x^2. \quad (30)$$

Considerando $\mu = 0$, veremos que a solução da EDO (30) será dada por

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = - \int_0^t dt'$$

Logo,

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0 t}. \quad (31)$$

Portanto, os expoentes críticos serão:

- α : Para $x_0 t \ll 1$, temos $x(t) \cong x_0$, portanto $\alpha = 1$;
- β : Para $x_0 t \gg 1$, temos $x(t) \cong t^{-1}$, portanto $\beta = -1$;
- z : Para $x_0 t = 1$, temos $t_x \cong x_0^{-1}$, portanto $z = -1$;

Considerando agora o caso $\mu \neq 0$. A EDO a ser resolvida passa a ser

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\mu - x^2} = \int_0^t dt'. \quad (32)$$

Logo, temos que

$$x(t) = \sqrt{\mu} \left[1 + \left(\frac{x_0 - \sqrt{\mu}}{x_0 + \sqrt{\mu}} \right) \exp(-2\sqrt{\mu}t) \right] \left[1 - \left(\frac{x_0 - \sqrt{\mu}}{x_0 + \sqrt{\mu}} \right) \exp(-2\sqrt{\mu}t) \right]^{-1}. \quad (33)$$

Expandindo o termo $\left[1 - \left(\frac{x_0 - \sqrt{\mu}}{x_0 + \sqrt{\mu}}\right) \exp(-2\sqrt{\mu}t)\right]$ da equação (33) em série de Taylor e admitindo apenas termos de ordem $\sqrt{\mu}$, veremos que

$$x(t) - x^* \cong \left[\frac{2\sqrt{\mu}x_0}{x_0 + \sqrt{\mu}} \right] \exp(-2\sqrt{\mu}t). \quad (34)$$

Comparando com a equação (29) temos que $\delta = -\frac{1}{2}$. Dessa forma os expoentes críticos que classificam a bifurcação Sela-nó são $\alpha = 1, \beta = -1, z = -1$ e $\delta = -\frac{1}{2}$.

3.5. ANÁLISE DE ESCALA NA BIFURCAÇÃO TRANSCRÍTICA

Discutiremos agora a determinação dos expoentes críticos para a bifurcação transcritical a partir da solução direta da EDO.

Seja a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (35)$$

Considerando $\mu = 0$, isto é, onde ocorre a troca de estabilidade dos pontos fixos definindo a bifurcação transcritical, veremos que a solução da EDO (30) será dada por

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = - \int_0^t dt'.$$

Logo,

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0 t}. \quad (36)$$

Desse modo, os expoentes críticos serão:

- α : Para $x_0 t \ll 1$, temos $x(t) \cong x_0$, portanto $\alpha = 1$;
- β : Para $x_0 t \gg 1$, temos $x(t) \cong t^{-1}$, portanto $\beta = -1$;
- z : Para $x_0 t = 1$, temos $t_x \cong x_0^{-1}$, portanto $z = -1$;

Considerando agora o caso $\mu \neq 0$. A EDO a ser resolvida passa a ser

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\mu x - x^2} = \int_0^t dt'. \quad (37)$$

Logo, temos que

$$x(t) = \mu \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{x_0} \right) \exp(-\mu t) \right]. \quad (38)$$

Expandindo (38) em série de Taylor e admitindo apenas termos lineares em μ , veremos que

$$x(t) - \mu \cong \mu(\exp(-\mu t)). \quad (39)$$

Comparando com a equação (29) temos que $\delta = -1$. Dessa forma os expoentes críticos que classificam a bifurcação transcritical são $\alpha = 1, \beta = -1, z = -1$ e $\delta = -1$.

3.6. ANÁLISE DE ESCALA NA BIFURCAÇÃO SUPERCRÍTICA DE FORQUILHA

Discutiremos agora a determinação dos expoentes críticos para a bifurcação supercrítica de forquilha a partir da solução direta da EDO.

Seja a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = \mu x - x^3. \quad (40)$$

Considerando $\mu = 0$, isto é, onde ocorre a troca de estabilidade dos pontos fixos definindo a bifurcação transcritical, veremos que a solução da EDO (35) será dada por

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^3} = - \int_0^t dt'.$$

Logo,

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}. \quad (41)$$

Os expoentes críticos são:

- α : Para $2x_0^2 t \ll 1$, temos $x(t) \cong x_0$, portanto $\alpha = 1$;
- β : Para $2x_0^2 t \gg 1$, temos $x(t) \cong t^{-\frac{1}{2}}$, portanto $\beta = -\frac{1}{2}$;
- z : Para $2x_0^2 t = 1$, temos $t_x \cong x_0^{-2}$, portanto $z = -2$;

Considerando agora o caso $\mu \neq 0$. A EDO a ser resolvida passa a ser

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\mu x - x^3} = \int_0^t dt'. \quad (42)$$

Logo, temos que

$$x(t) = \pm \sqrt{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{x_0^2} \right) \exp(-2\mu t) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (43)$$

Expandindo o termo dentro do colchetes de (43) em série de Taylor e admitindo apenas termos da ordem de $\sqrt{\mu}$, veremos que

$$x(t) \mp \sqrt{\mu} \cong \pm \frac{\sqrt{\mu}}{2} (\exp(-2\mu t)). \quad (44)$$

Comparando com a equação (29) temos que $\delta = -1$. Dessa forma os expoentes críticos que classificam a bifurcação supercrítica de forquilha são $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}, z = -2$ e $\delta = -1$.

4. BIFURCAÇÃO DE HOPF: UMA ANÁLISE DE ESCALA

4.1. INTRODUÇÃO

No capítulo 3 vimos que a aplicação do formalismo de escala, no ponto e nas vizinhanças de uma bifurcação local, mostra-se como uma ferramenta vantajosa para a classificação do tipo de bifurcação ocorrido, uma vez que, foram determinadas as propriedades de escala, assim como, os expoentes críticos α , β , z e δ que caracterizavam as bifurcações: Sela-nó, Transcrítica e Supercrítica de Forquilha.

Todavia, convém lembrar que as bifurcações locais discutidas no capítulo 3 eram particularmente caracterizadas por uma troca de estabilidade no ponto de bifurcação. Contudo, isto nos faz questionar sobre quais devem ser então as propriedades de escala em sistemas dinâmicos caracterizados não por uma troca, mas sim por uma perda de estabilidade quando o parâmetro de controle do qual dependem passa por um valor crítico como, por exemplo, a bifurcação de Hopf [10].

Desse modo, a questão de maior interesse neste capítulo é generalizar o formalismo de escala discutido no capítulo 3 para bifurcações em fluxos de equações diferenciais, particularmente investigando o comportamento apresentado pelos expoentes críticos e pela lei de escala na bifurcação de Hopf. Para isso, consideraremos a ocorrência da bifurcação escrita na sua forma normal.

Um determinado sistema de equações diferenciais que representa um sistema dinâmico complexo pode ser transformado em uma forma simplificada de tal maneira a preservar o espaço de fase do sistema original. Essa forma simplificada é conhecida como forma normal.

Suponha que se queira encontrar transformações de coordenadas adicionais, $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$, que simplifiquem ao máximo a expressão analítica da parte não-linear do campo vetorial estudado, de modo que as novas expressões (mais simples) contenham toda informação que é necessária para se reproduzir o retrato de fases gerado pelas equações originais, na vizinhança do ponto de equilíbrio \vec{z}^* . Esses campos vetoriais simplificados,

escritos na forma de polinômios, são chamados de *formas normais* [3, p. 181].

Em outras palavras, o autor deixa claro que a expressão analiticamente mais simples que uma equação diferencial pode ser reescrita, via de transformações de coordenadas, de tal maneira a manter a topologia do espaço de fase do sistema original intacta, é a sua forma normal.

Com base nisso, discutiremos ao longo deste capítulo o formalismo de escala para a bifurcação de Hopf escrita na forma normal com o principal objetivo de determinar as propriedades de escala e os expoentes críticos que a caracterizam. De posse destes expoentes poderemos definir a classe de universalidade a qual esta bifurcação pertence.

4.2. FORMA NORMAL DA BIFURCAÇÃO DE HOPF

O principal objetivo deste capítulo consiste de apresentar, discutir e explorar a forma normal do sistema dinâmico (15), discutida no capítulo 2, que apresenta a ocorrência da bifurcação de Hopf. O presente capítulo encontra-se baseado em [3] e [8].

Suponha que um sistema de equações diferenciais seja dependente de um parâmetro μ

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{45}$$

onde x e y são variáveis dinâmicas e μ o parâmetro de controle.

Definição 4.2.1 *O sistema (45) apresenta uma bifurcação de Hopf se a partir de uma ligeira perturbação no parâmetro de controle μ , ocorre uma mudança de estabilidade do ponto de equilíbrio (x^*, y^*) , de foco atrator para um foco repulsor com o surgimento de um ciclo limite estável com oscilações regulares. Em uma bifurcação de Hopf, os autovalores associados aos pontos de equilíbrio do sistema considerado devem ter a seguinte forma*

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i,\tag{46}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Em outras palavras, a definição 4.2.1 acima estabelece que a bifurcação de Hopf está relacionada com a mudança na dimensão⁷ de um atrator quando o parâmetro de controle do qual o sistema depende é variado. No capítulo 2, vimos que um possível sistema de EDOs que apresenta a bifurcação de Hopf é escrito como

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) = f(x, y, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(\mu - x^2 - y^2) = g(x, y, \mu).$$

Porém, para as considerações que serão feitas ao longo deste capítulo, tomaremos a forma mais simples com o qual este sistema poderá ser reescrito preservando a topologia do seu retrato de fases, ou seja, sua forma normal.

Segundo Luiz Henrique Monteiro [3, p. 193], a forma normal de um sistema dinâmico bidimensional, no qual a origem apresenta dois autovalores complexo conjugado, isto é, $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega_0$, sendo μ e ω_0 constantes, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \mu) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) = \mu y + \omega_0 x + (bx + ay)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5), \end{aligned} \quad (47)$$

onde μ, ω_0, a e b são constantes. $\mathcal{O}(5)$ representa termos do tipo $x^{k_1}y^{k_2}$ com $k_1 + k_2 = 5$.

No entanto, para o sistema apresentado em (47) vale o seguinte lema:

Lema 4.2.1 *O sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \mu) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) = \mu y + \omega_0 x + (bx + ay)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5), \end{aligned} \quad (47)$$

é localmente topologicamente equivalente em uma vizinhança da origem do sistema
(48)

⁷ Neste caso, estamos nos referindo à definição Euclidiana de dimensão.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) = \mu y + \omega_0 x + (bx + ay)(x^2 + y^2).\end{aligned}\quad (48)$$

Isto é, o lema 4.2.1 nos diz que apesar do sistema (47) contar com termos de ordem superior estes não afetam o comportamento da bifurcação do mesmo perto da origem, portanto estes termos de ordem superior podem ser ignorados.

Demonstração do Lema 4.2.1 A demonstração deste lema seguirá o mesmo procedimento descrito por Kuznetsov em [8]. Inicialmente, provaremos a existência e unicidade de um ciclo limite do sistema (47) e, em seguida, exibiremos um homeomorfismo⁸ que leva as órbitas do sistema (47) no sistema (48).

Somando a primeira equação do sistema (47) com a segunda multiplicada pelo número imaginário $i = \sqrt{-1}$, teremos que

$$\dot{x} + i\dot{y} = \mu(x + iy) + i\omega_0(x + iy) + (x^2 + y^2)[(x + iy)(a + ib)] + \dots \quad (49)$$

Introduzindo a variável complexa $z = x + iy$ e $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$ em (49) vemos que

$$\dot{z} = (\mu + i\omega_0)z + |z|^2 z(a + ib) + \dots \quad (50)$$

Substituindo em (50) $z = \rho e^{i\varphi}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$ e $z\bar{z} = \rho$ obtemos

$$\dot{\rho} + \rho\dot{\varphi}i = \mu\rho + i\omega_0\rho + \rho^2\rho a + \rho^2\rho ib + \operatorname{Re} \frac{(\phi(\rho, \varphi))}{e^{i\varphi}} + \operatorname{Im} \frac{(\phi(\rho, \varphi))}{e^{i\varphi}}, \quad (51)$$

em que $\phi(\rho, \varphi) = \operatorname{Re}(\phi(\rho, \varphi)) + \operatorname{Im}(\phi(\rho, \varphi))$ é uma função suave que recupera todos os termos de ordem superior. Portanto, se igualarmos os termos do lado esquerdo com os do lado direito da equação (51) ficaremos com o seguinte sistema (52)

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \mu\rho + \rho^2\rho a + \operatorname{Re} \frac{(\phi(\rho, \varphi))}{e^{i\varphi}}, \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 + b\rho^2 + \operatorname{Im} \frac{(\phi(\rho, \varphi))}{e^{i\varphi}}.\end{aligned}\quad (52)$$

⁸ *Homeomorfismo*: Dois espaços X e Y são ditos topologicamente equivalentes (ou homeomorfos) se existir uma função contínua bijetora com inversa também contínua [18,19].

Sejam $\Phi(\rho, \varphi) = \operatorname{Re} \frac{\phi(\rho, \varphi)}{e^{i\varphi}}$ e $\Psi(\rho, \varphi) = b\rho^2 + \operatorname{Im} \frac{\phi(\rho, \varphi)}{e^{i\varphi}}$, duas funções suaves que dependem suavemente de μ e que recuperam todos os termos de ordem superior. Ao se substituir $\Phi(\rho, \varphi)$ e $\Psi(\rho, \varphi)$ em (52), ficaremos com

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\mu + a\rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 + \Psi(\rho, \varphi).\end{aligned}\tag{53}$$

Admitindo $a = -1$ e $\omega_0 = 1$, obtemos finalmente o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \Psi(\rho, \varphi).\end{aligned}\tag{54}$$

Para provar a existência de um ciclo limite para o sistema (54), basta mostrar a existência de um ponto fixo para a Aplicação de Poincaré associada ao sistema. Para qualquer trajetória do sistema (54) com ρ e μ próximos da origem temos que $\dot{\varphi} > 0$. Então, podemos eliminar a variável t , ou seja, escrever ρ como uma função de φ . Desse modo, uma órbita do sistema (54) partindo de $(\rho, \varphi) = (\rho_0, 0)$ terá a seguinte representação (figura 4.1).

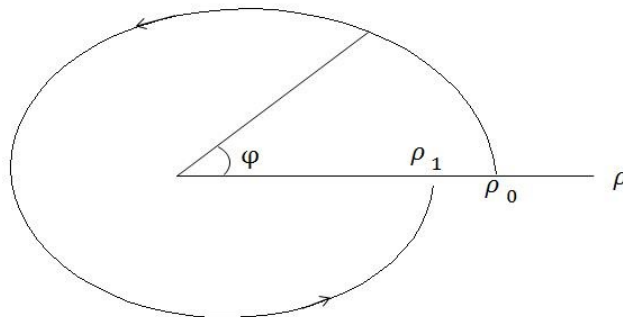


Figura 4.1-Aplicação de Poincaré para a bifurcação d Hopf do sistema (54).

Com $\rho = \rho(\varphi, \rho_0)$ e $\rho_0 = \rho(0, \rho_0)$ temos que

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(\mu - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi)}{1 + \Psi(\rho, \varphi)} = \rho(\mu - \rho^2) + R(\rho, \varphi), \quad (55)$$

onde $R(\rho, \varphi)$ representa os termos de ordem superior. Observe que com essa reparametrização do tempo, o tempo de retorno para o semi-eixo $\varphi = 0$ é o mesmo para todas as órbitas que partem desse eixo com $\rho_0 > 0$. Como $\rho(\varphi, 0) \equiv 0$, então

$$\frac{d\rho}{d\varphi}(\varphi, 0) = \frac{d^2\rho}{d\rho d\varphi}(\varphi, 0) = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}(\varphi, 0) = \dots = 0.$$

Portanto, podemos escrever a expansão em série de Taylor para $\rho(\varphi, \rho_0)$ da seguinte forma:

$$\rho(\varphi, \rho_0) = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + \dots, \quad (56)$$

onde

$$u_1 = \left[\frac{d\rho}{d\rho_0} \right]_{\rho_0=0}, u_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2\rho}{d\rho_0^2} \right]_{\rho_0=0}, u_3 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3\rho}{d\rho_0^3} \right]_{\rho_0=0}, \dots$$

Derivando a expressão (54) em relação a φ , temos

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{du_1(\varphi)}{d\varphi}\rho_0 + \frac{du_2(\varphi)}{d\varphi}\rho_0^2 + \frac{du_3(\varphi)}{d\varphi}\rho_0^3 + \dots \quad (57)$$

Substituindo (56) e (57) em (55) obteremos, a partir da igualdade dos termos, as seguintes equações diferenciais

$$\frac{du_1(\varphi)}{d\varphi} = u_1(\varphi)\mu,$$

$$\frac{du_2(\varphi)}{d\varphi} = u_2(\varphi)\mu,$$

$$\frac{du_3(\varphi)}{d\varphi} = u_3(\varphi)\mu - u_1^3.$$

Para $\theta = 0, \rho = \rho_0$, obtém-se da equação (56) as condições iniciais $u_1(0) = 1, u_2(0) = u_3(0) = 0$. Resolvendo as equações diferenciais com suas respectivas condições iniciais, veremos que

$$u_1(\varphi) = e^{\mu\varphi},$$

$$u_2(\varphi) = 0,$$

$$u_3(\varphi) = \frac{e^{\mu\varphi}(1 - e^{2\mu\varphi})}{2\mu}.$$

Analisando estas expressões nota-se que o termo $R(\rho, \varphi)$ não exerce nenhum efeito sobre elas. Portanto, ao substituímos $\varphi = 2\pi$ em $u_3(\varphi)$, teremos que

$$u_3(2\pi) = \frac{e^{\mu 2\pi}(1 - e^{4\mu\pi})}{2\mu},$$

que pode ainda ser reescrito como,

$$u_3(2\pi) = -e^{2\pi\mu}(2\pi + \mathcal{O}(\mu)), \text{ onde } \mathcal{O}(\mu) = \frac{2(2\pi)^2\mu}{2!} + \frac{2^2(2\pi)^3\mu^2}{3!} + \dots$$

Podemos concluir que a Aplicação de Poincaré

$$\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0),$$

tem a seguinte forma

$$\rho_1 = e^{2\pi\mu}\rho_0 - e^{2\pi\mu}[2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^3 + \hat{\mathcal{O}}. \quad (58)$$

Para todo ρ_0 e μ suficientemente pequenos, existe uma vizinhança da origem onde a Aplicação de Poincaré apresenta somente um ponto fixo para pequenos valores de $\mu < 0$ e um ponto fixo extra $\rho_0^* = \sqrt{\mu} + \dots$ para pequenos valores de $\mu > 0$, a figura 4.2 ilustra a situação.

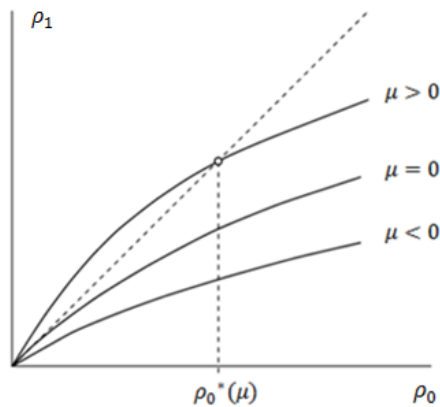


Figura 4.2- Ponto fixo para a Aplicação de Poincaré do sistema (55). Fonte: [8, p. 110].

Para verificar essa última afirmação, podemos reescrever a função (58) da seguinte forma

$$\rho_1 = \tilde{S}(\rho_0, \mu)\rho_0, \quad (59)$$

onde $\tilde{S}(\rho_0, \mu) = e^{2\pi\mu}(1 - [2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^2) + \hat{\mathcal{O}}$. Sendo que a equação dos pontos de equilíbrio, para $\rho_0 > 0$, é obtida quando fazemos $\tilde{S}(\rho_0, \mu) = 1$.

Levando em consideração que o ponto fixo positivo da função corresponde a um ciclo limite do sistema, podemos concluir que o sistema (48) ou o sistema (47), com quaisquer termos $\hat{\mathcal{O}}$ de ordem superior, tem um único ciclo limite (estável) bifurcando da origem quando $\mu > 0$ como no sistema (48). Portanto, os termos de ordem superior não afetam o surgimento do ciclo limite numa vizinhança de $(x, y) = (0, 0)$ com $|\mu|$ suficientemente pequeno.

Construiremos agora o homeomorfismo necessário para provar a equivalência topológica dos retratos de fase de (47) e (48). Fixando $\mu > 0$ pequeno, ambos os sistemas (48) e (47) têm um ciclo limite em alguma vizinhança da origem. Assumiremos uma reparametrização do tempo no sistema (47) de modo que o tempo de retorno seja 2π . Além disso, será aplicado um escalonamento linear nas coordenadas do sistema (47) de tal maneira que o ponto de intersecção do ciclo e o semi-eixo horizontal seja $x = \sqrt{\mu}$.

Defina uma função da forma $x \mapsto \tilde{x}$ do seguinte modo, considere o ponto $x = (x, y)$ e, encontre os valores (ρ_0, τ_0) , onde τ_0 deve ser o tempo mínimo que uma órbita do sistema (48) leva para alcançar o ponto x partindo do semi-eixo horizontal

com $\rho = \rho_0$. Com um ponto deste eixo $\rho = \rho_0$, contruíremos uma órbita do sistema (47) no intervalo $[0, \tau_0]$ partindo desse ponto. Denotemos o ponto resultante por $\tilde{x} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, a figura 4.3 ilustra o ocorrido. Assumindo $\tilde{x} = 0$ para $x = 0$. A continuidade do homeomorfismo e de sua inversa segue da continuidade das soluções do sistema de equações diferenciais.

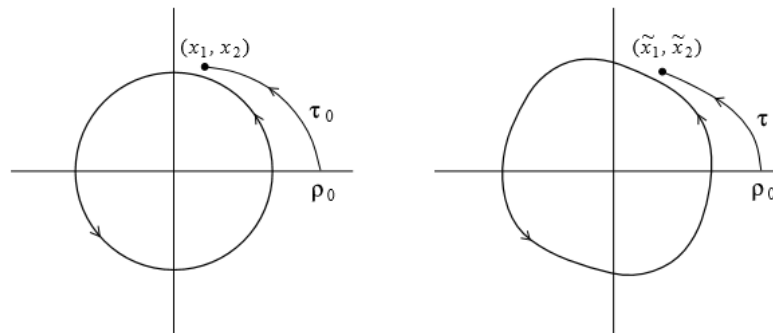


Figura 4.3- Construção do homeomorfismo nas vizinhanças da bifurcação de Hopf. Fonte: [8, p. 110].

Deste modo, a função construída assim é um homeomorfismo que, para $\mu > 0$, leva órbitas do sistema (48), em alguma vizinhança da origem, em órbitas de (47), mantendo a direção do tempo. Dessa forma, uma vez verificado a existência e unicidade do ciclo limite do sistema (47) e comprovado a existência de um homeomorfismo que leva as órbitas do sistema (47) às do sistema (48) pode-se dizer que o sistema (47) é de fato localmente topologicamente equivalente ao sistema (48) próximo da origem.

4.3. ANÁLISE DE ESCALA DA FORMA NORMAL DA BIFURCAÇÃO DE HOPF

Esta seção tem como objetivo descrever a evolução dinâmica, assim como, a convergência para o ponto fixo para a bifurcação de Hopf através da análise do sistema (48). Para tanto, recorreremos ao formalismo de escala discutido no capítulo 3, investigando a convergência no ponto fixo e nas vizinhanças da bifurcação, isso porque este formalismo, como vimos anteriormente, mostrou-se como uma ferramenta útil para caracterizar o tipo de bifurcação que se tem interesse [10, p. 97].

Na seção 4.2 deste capítulo vimos que a forma normal do sistema de EDOs que se caracteriza pela ocorrência da bifurcação de Hopf é escrita como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) = \mu y + \omega_0 x + (bx + ay)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5).\end{aligned}\quad (47)$$

Só que pela aplicação do lema 4.2.1, provamos que (47) pode ser reduzido em (48).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) = \mu y + \omega_0 x + (bx + ay)(x^2 + y^2).\end{aligned}\quad (48)$$

Dado que (47) é localmente topologicamente equivalente a (48) próximo da origem, se assumirmos $a = -1$ e $\omega_0 = cte$. Em coordenadas polares, esse sistema (48) equivale a:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \mu\rho + a\rho^3, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_0 + b\rho^2.\end{aligned}\quad (49)$$

Contudo, nota-se que o sistema (49) é constituído de duas equações: uma angular e outra radial. De tal modo que esta última só apresenta sentido físico para $\rho > 0$, além de não depender do ângulo polar ϕ . No entanto, para a determinação das propriedades de escala, assim como dos expoentes críticos associados à bifurcação de Hopf supercrítica, analisaremos ambas as equações, radial e angular, separadamente.

4.3a. Obtenção dos expoentes críticos através da análise da equação radial

A EDO responsável pela correspondente radial do sistema (49) é escrita como

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu\rho + a\rho^3 = f(\rho(t)).\quad (4.3a.1)$$

Os pontos fixos, por sua vez, são obtidos resolvendo $\mu\rho + a\rho^3 = 0$, que fornecem como soluções os pontos de equilíbrio

$$\rho_1^* = 0,\quad (4.3a.2)$$

$$\rho_2^* = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}. \quad (4.3a.3)$$

A estabilidade é obtida a partir $\frac{df(\rho)}{d\rho}$, logo

$$\frac{df(\rho)}{d\rho} = \mu + 3a\rho^2. \quad (4.3a.4)$$

Avaliando a derivada nos pontos fixos teremos que: (i) $\left[\frac{df(\rho)}{d\rho}\right]_{\rho_1^*} = \mu$, que é instável quando $\mu > 0$ e assintoticamente estável quando $\mu < 0$; (ii) $\left[\frac{df(\rho)}{d\rho}\right]_{\rho_2^*} = -2\mu$, que é assintoticamente estável para $\mu > 0$ e instável para $\mu < 0$. Em $\mu = 0$ ocorre uma mudança na estabilidade dos pontos fixos, isto é, ocorre a bifurcação de Hopf.

Todavia, convém dizer ainda que quando o valor μ torna-se ligeiramente maior ou menor que o valor crítico $\mu_c = 0$, existirá uma órbita fechada (e estável) de raio $\rho_2^* = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$ assintoticamente estável para $a < 0$ e instável $a > 0$. Com isso, classificamos a bifurcação de Hopf como sendo **supercrítica**, quando $a < 0$, e **subcrítica**, quando $a > 0$ [3, p. 285].

Substituindo na equação (4.3a.1) $a = -1$ e restringindo nossa análise no ponto de bifurcação ($\mu = \mu_c = 0$), podemos determinar os expoentes críticos que caracterizam a bifurcação de Hopf em relação a coordenada radial via simulação numérica. A figura 4.4 mostra um esboço do comportamento de $\rho(t)$ vs. t para as soluções da equação (4.3a.1) considerando diferentes valores para ρ_0 . A integração numérica foi realizada utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

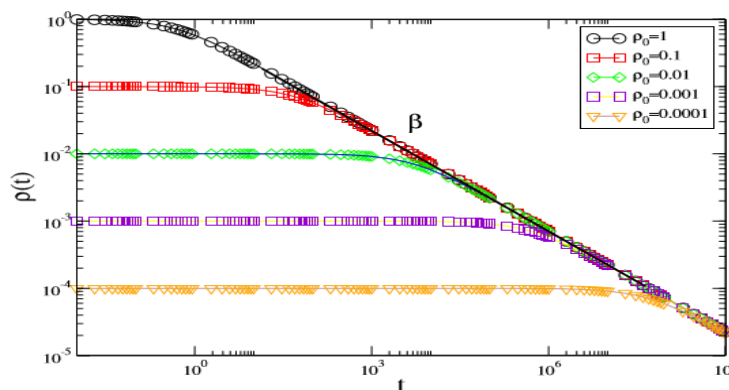


Figura 4.4- Esboço de $\rho(t)$ vs. t para a EDO (4.3a.1) assumindo $\mu = 0$ e $a = -1$ e considerando diferentes valores de ρ_0 .

Analisando a figura 4.4 podemos notar que, assim como na bifurcação supercrítica de forquilha, dependendo do valor de ρ_0 , a órbita permanece em um platô constante por um longo período de tempo ao passo que quando a mesma sofre uma mudança de comportamento, ela entra em um regime de decaimento caracterizado também por uma lei de potência.

Dessa forma, com o que diz respeito à convergência para o ponto fixo na bifurcação de Hopf, considerando $\mu = 0$, também podemos propôr algumas hipóteses escala:

1. Para tempos suficientemente pequenos, isto é, $t \ll t_x$, a convergência para o ponto fixo será dada por

$$\rho(t) \propto \rho_0^\alpha, \quad (4.3a.5)$$

onde, ρ_0 é a distância inicial do ponto fixo, α é um expoente crítico e t_x é o tempo característico onde ocorre a mudança do platô constante para o regime de decaimento.

2. Para tempos longos, isto é, $t \gg t_x$, teremos a seguinte hipótese

$$\rho(t) \propto t^\beta, \quad (4.3a.6)$$

onde β é um expoente crítico que define a convergência para o estado estacionário.

3. O tempo característico t_x que marca a mudança do platô constante ao regime de decaimento é dado por

$$t_x \propto \rho_0^z, \quad (4.3a.7)$$

onde z é o expoente crítico responsável pela dependência do *crossover* t_x com a distância inicial ρ_0 .

De posse destas três hipóteses de escala é possível analisar a convergência para o ponto fixo a partir de uma nova função homogênea generalizada definida como

$$\rho(\rho_0, t) = H\rho(H^a \rho_0, H^b t), \quad (4.3a.8)$$

onde H é um fator de escala, a e b são expoentes característicos.

Como H é um parâmetro de escala, podemos escolhê-lo como $H^a \rho_0 = 1$. Portanto, veremos que

$$H = \rho_0^{-\frac{1}{a}}. \quad (4.3a.9)$$

Levando (4.3a.9) em (4.3a.8), ficaremos com o seguinte resultado

$$\rho(\rho_0, t) = \rho_0^{-\frac{1}{a}} \rho\left(1, \rho_0^{-\frac{b}{a}} t\right). \quad (4.3a.10)$$

Assumindo $\rho\left(1, \rho_0^{-\frac{b}{a}} t\right)$ constante, para $t \ll t_x$, veremos que ao comparar (4.3a.10) com a equação (4.3a.5) da primeira hipótese de escala chegamos à conclusão de que $\alpha = -\frac{1}{a}$.

Escolhendo agora $H^b t = 1$ teremos que

$$H = t^{-\frac{1}{b}}. \quad (4.3a.11)$$

Substituindo (4.3a.11) em (4.3a.8) veremos que

$$\rho(\rho_0, t) \propto t^{-\frac{1}{b}}. \quad (4.3a.12)$$

Comparando (4.3a.12) com a equação (4.3a.6) da segunda hipótese de escala chegamos a conclusão de que $\beta = -\frac{1}{b}$.

Finalmente podemos comparar as duas expressões obtidas para H descrita pelas equações (4.3a.9) e (4.3a.11), o que nos leva a

$$H = t^{-\frac{1}{b}} = \rho_0^{-\frac{1}{a}}.$$

Portanto,

$$t_x \propto \rho_0^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}. \quad (4.3a.13)$$

Comparando (4.3a.13) com a equação (4.3a.7) da terceira hipótese de escala temos que

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.3a.14)$$

Isto é, A equação (4.3a.14) define exatamente a mesma lei de escala discutida no capítulo 3. De tal maneira que os expoentes críticos α, β e z também estão relacionados entre si de tal maneira que o conhecimento de dois deles, é suficiente para determinar o terceiro.

Portanto, na figura 4.4 vemos que, para tempos suficientemente pequenos, $\rho(t) \cong \rho_0$, o que de acordo com a primeira hipótese de escala discutida acima nos permite concluir que $\alpha = 1$, caracterizando o regime dado pelo platô constante. O expoente β é obtido ajustando uma lei de potência ao regime de decaimento. Para a figura 4.4, $\beta = -0,499(3) \cong -0,5$. Por fim, o expoente z é obtido a partir do cruzamento do platô constante com a curva de decaimento. Desse modo temos que um ajuste em lei de potência para a curva t_x vs. ρ_0 fornece $z = -2,00360(6)$, como mostra a figura 4.5.

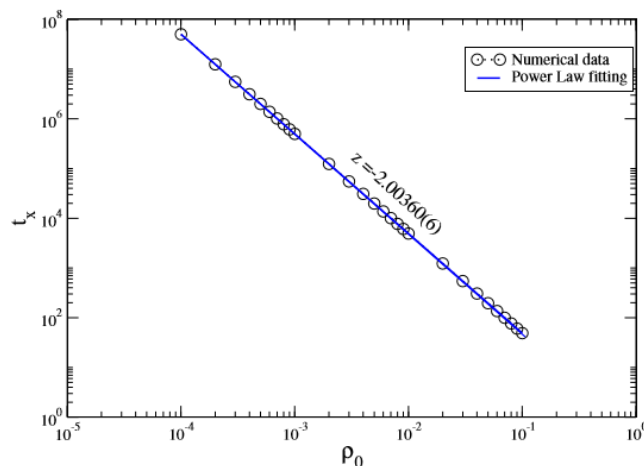


Figura 4.5- Esboço de t_x vs. ρ_0 . Um ajuste em lei de potência fornece $z = -2,00360(6)$.

De posse dos expoentes críticos α, β e z é possível verificar a existência de um comportamento universal. Para isso, basta que façamos ligeiras mudanças nos eixos da figura 4.4. A primeira delas consiste em transformar $\rho(t) \rightarrow \rho(t)/\rho_0^\alpha$ e a

segunda de transformar $t \rightarrow t/\rho_0^z$. Com estas duas transformações, todas as curvas presentes na figura 4.4 sobrepõem-se umas às outras em uma única curva universal como mostra a figura 4.6.

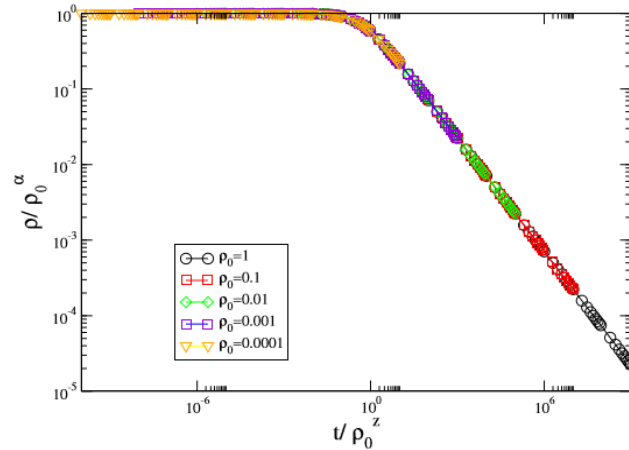


Figura 4.6- Sobreposição das curvas mostradas na figura 4.4 em uma única curva universal.

Para $\mu \neq 0$, a convergência para o ponto fixo passa a ser caracterizada por um decaimento exponencial com um tempo de relaxação τ descrito por uma lei de potência da forma $\tau \propto \mu^\delta$, onde δ trata-se de um expoente crítico. A figura 4.7 ilustra o comportamento de τ vs. μ . A partir de um ajuste em lei de potência, obtêm-se $\delta = -0.969(9) \cong -1$.

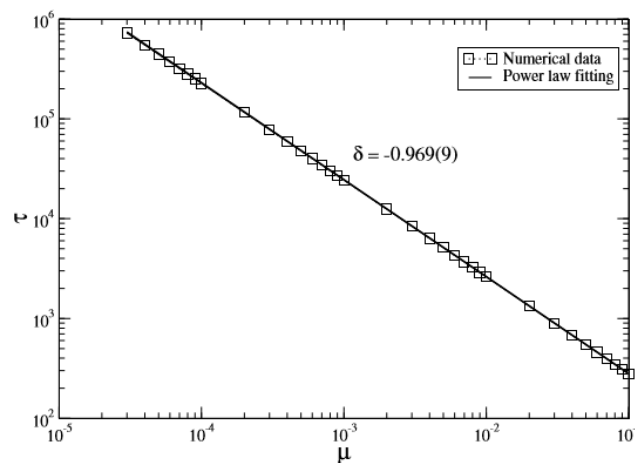


Figura 4.7- Esboço de τ vs. μ . Um ajuste em lei de potência fornece $\delta = -0.969(9)$.

Agora determinaremos os expoentes críticos a partir da solução direta da equação diferencial (4.3a.1). Primeiramente, aplicamos o formalismo de escala no ponto de bifurcação, o que nos levará à seguinte expressão

$$\frac{d\rho}{dt} = a\rho^3. \quad (4.3a.15)$$

Logo,

$$\int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\rho^3} = a \int_0^t dt'.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\rho(t)^2} - \frac{1}{\rho_0^2} = -2at.$$

Substituindo $a = -1$ teremos que

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + 2t\rho_0^2}}. \quad (4.3a.16)$$

Analisando a equação (4.3a.16) podemos tirar às seguintes conclusões com relação aos expoentes críticos:

- α : Para $2t\rho_0^2 \ll 1$, temos $\rho(t) \cong \rho_0$, portanto $\alpha = 1$;
- β : Para $2t\rho_0^2 \gg 1$, temos $\rho(t) \cong t^{-\frac{1}{2}}$, portanto $\beta = -\frac{1}{2}$;
- z : Para $2t\rho_0^2 = 1$, temos $t_x \cong \rho_0^{-2}$, portanto $z = -2$.

Aplicando agora o formalismo de escala após o evento de bifurcação, isto é, quando $\mu \neq 0$, veremos que a EDO a ser resolvida passa a ser

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu\rho + a\rho^3. \quad (4.3a.17)$$

Logo,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left[\ln \left(\frac{\rho}{[\mu + a\rho^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \right]_{\rho_0}^{\rho(t)} = t. \quad (4.3a.18)$$

Aplicando os limites de integração, substituindo $a = -1$ e simplificando os termos de (4.3a.18), ficaremos com

$$\rho(t) = \sqrt{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{\rho_0^2} \right) e^{-2\mu t} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.3a.19)$$

Expandindo o termo entre colchetes de (4.3a.19) em série de Taylor e considerando apenas termos da ordem de $\sqrt{\mu}$, obteremos

$$\rho(t) - \sqrt{\mu} \cong \frac{\sqrt{\mu}}{2} e^{-2\mu t} \quad (4.3a.20)$$

Analisando a equação (4.3a.20) nota-se que a mesma encontra-se escrita na forma da equação (28) só que na forma radial, portanto conclui-se que $\delta = -1$.

4.3b. Obtenção dos expoentes críticos através da análise da equação angular

A EDO responsável pela correspondente angular do sistema (49) é escrita como

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + b\rho(t)^2. \quad (4.3b.1)$$

Restringindo nossa análise novamente no ponto de bifurcação ($\mu = \mu_c = 0$) e assumindo $b = \omega_0 = cte$, determinaremos agora os expoentes críticos que caracterizam a bifurcação de Hopf em relação à coordenada angular via simulação numérica. A figura 4.8 mostra um esboço do comportamento de $\phi(t)$ vs. t para as soluções da equação (4.3b.1) considerando diferentes valores para ϕ_0 . A integração numérica foi realizada utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

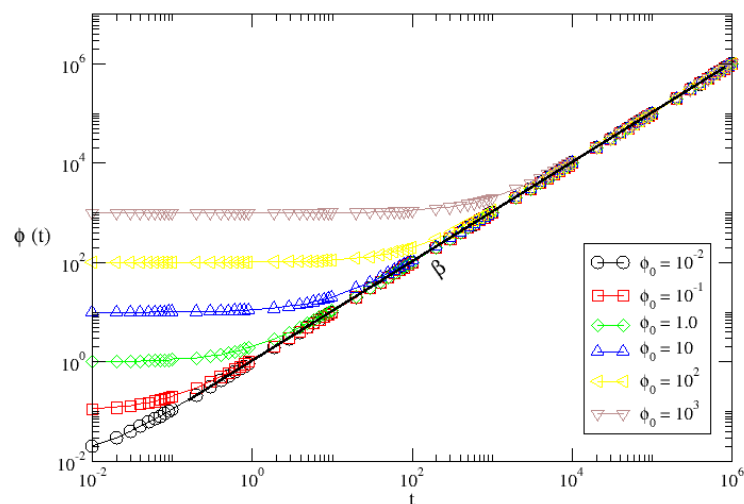


Figura 4.8- Esboço de $\phi(t)$ vs. t para a EDO (4.3b.2) assumindo diferentes valores de ϕ_0 .

Analisando a figura 4.8 pode-se notar que dependendo do valor de ϕ_0 , a órbita permanece em um platô constante por um longo período de tempo ao passo que quando a mesma sofre uma mudança de comportamento, ela entra em um regime de crescimento caracterizado também por uma lei de potência.

Dessa forma, com o que diz respeito à convergência para o ponto fixo na bifurcação de Hopf em relação à coordenada angular, considerando $\mu = 0$, também podemos propôr algumas hipóteses escala:

1. Para tempos suficientemente pequenos, isto é, $t \ll t_x$, a convergência para o ponto fixo será dada por

$$\phi(t) \propto \phi_0^\alpha, \quad (4.3b.2)$$

onde, ϕ_0 é a distância inicial do ponto fixo, α é um expoente crítico e t_x é o tempo característico onde ocorre a mudança do platô constante para o regime de crescimento.

2. Para tempos longos, isto é, $t \gg t_x$, teremos a seguinte hipótese

$$\phi(t) \propto t^\beta, \quad (4.3b.3)$$

onde β é um expoente crítico que define a convergência para o estado estacionário.

3. O tempo característico t_x que marca a mudança do platô constante ao regime de crescimento é dado por

$$t_x \propto \phi_0^z, \quad (4.3b.4)$$

onde z é o expoente crítico responsável pela dependência do *crossover* t_x com a distância inicial ϕ_0 .

De posse destas três hipóteses de escala é possível analisar a convergência para o ponto fixo a partir de uma nova função homogênea generalizada definida como

$$\phi(\phi_0, t) = H\phi(H^a\phi_0, H^b t), \quad (4.3b.5)$$

onde H é um fator de escala, a e b são expoentes característicos.

Como H é um parâmetro de escala, podemos escolhê-lo como $H^a\phi_0 = 1$. Portanto, veremos que

$$H = \phi_0^{-\frac{1}{a}}. \quad (4.3b.6)$$

Levando (4.3b.6) em (4.3b.5), ficaremos com o seguinte resultado

$$\phi(\phi_0, t) = \phi_0^{-\frac{1}{a}} \phi\left(1, \phi_0^{\frac{b}{a}} t\right). \quad (4.3b.7)$$

Assumindo $\phi\left(1, \phi_0^{-\frac{b}{a}}t\right)$ constante, para $t \ll t_x$, veremos que ao comparar (4.3b.7) com a equação (4.3b.2) da primeira hipótese de escala chegamos à conclusão de que $\alpha = -\frac{1}{a}$.

Escolhendo agora $H^b t = 1$ teremos que

$$H = t^{-\frac{1}{b}}. \quad (4.3b.8)$$

Substituindo (4.3b.8) em (4.3b.5) veremos que

$$\phi(\phi_0, t) \propto t^{-\frac{1}{b}}. \quad (4.3b.9)$$

Comparando (4.3b.9) com a equação (4.3b.3) da segunda hipótese de escala chegamos à conclusão de que $\beta = -\frac{1}{b}$.

Finalmente podemos comparar as duas expressões obtidas para H descrita pelas equações (4.3b.6) e (4.3b.8), o que nos leva a

$$H = t^{-\frac{1}{b}} = \phi_0^{-\frac{1}{a}}.$$

E, portanto,

$$t_x \propto \phi_0^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}. \quad (4.3b.10)$$

Comparando (4.3b.10) com a equação (4.3b.4) da terceira hipótese de escala temos que

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.3b.11)$$

Isto é, a equação (4.3b.11) define exatamente a mesma lei de escala encontrada na seção 4.3a deste capítulo. De tal maneira que os expoentes críticos α, β e z também estão relacionados entre si de tal maneira que o conhecimento de dois deles também é suficiente para determinar o terceiro.

Portanto, na figura 4.8 vemos que, para tempos suficientemente pequenos, $\phi(t) \cong \phi_0$, o que de acordo com a primeira hipótese de escala discutida acima nos permite concluir que $\alpha = 1$, caracterizando o regime dado pelo platô constante. O

expoente β é obtido ajustando uma lei de potência ao regime de crescimento. Para a figura 4.8, $\beta = 0,996(1) \cong 1$. Por fim, o expoente z é obtido a partir do cruzamento do platô constante com a curva de crescimento. Desse modo temos que um ajuste em lei de potência para a curva t_x vs. ϕ_0 fornece $z = 1,00383(5)$, como mostra a figura 4.9.

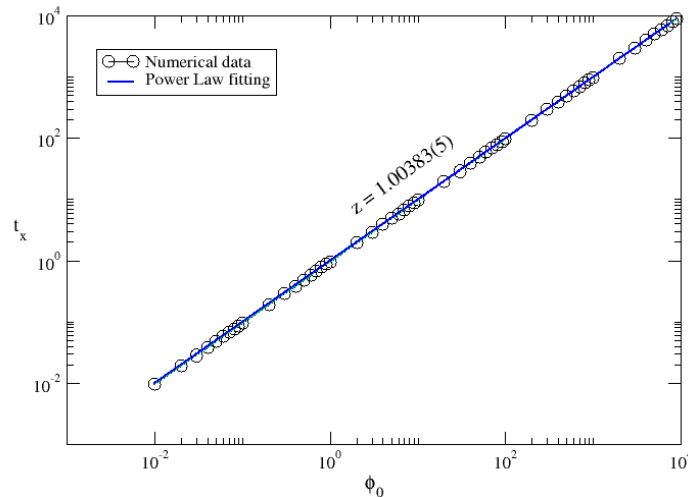


Figura 4.9- Esboço de t_x vs. ϕ_0 . Um ajuste em lei de potência fornece $z = 1,00383(6)$.

De posse dos expoentes críticos α, β e z é possível verificar a existência de um comportamento universal. Para isso, basta que façamos ligeiras mudanças nos eixos da figura 4.8. A primeira delas consiste de transformar $\phi(t) \rightarrow \phi(t)/\rho_0^\alpha$ e a segunda de transformar $t \rightarrow t/\phi_0^z$. Com estas duas transformações, todas as curvas presentes na figura 4.8 sobrepõem-se umas às outras em uma única curva universal como mostra a figura 4.10.

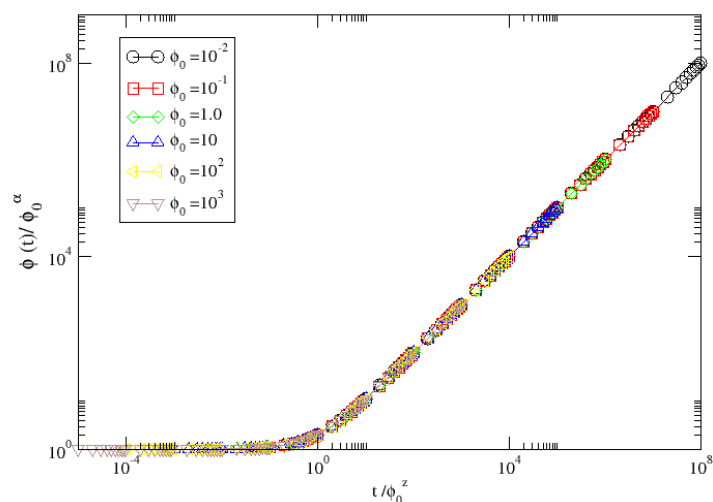


Figura 4.10- Sobreposição das curvas mostradas na figura 4.8 em uma única curva universal.

Para $\mu \neq 0$, a convergência para o estado estacionário descreveu exatamente o mesmo comportamento observado na figura 4.8 que envolve, por sua vez, o caso em que $\mu = 0$. A figura 4.11 mostra o esboço do comportamento de $\phi(t)$ vs. t para $\mu \neq 0$.

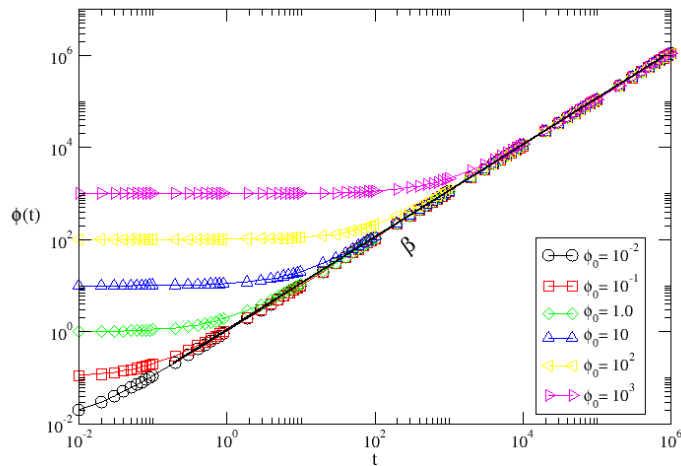


Figura 4.11- Esboço de $\phi(t)$ vs. t para o caso $\mu \neq 0$ assumindo diferentes valores de ϕ_0 .

Um ajuste em lei de potência fornece $\beta = 0,99(5) \cong 1$. Sabendo que $\alpha = 1$ e fazendo uso da lei de escala (4.3b.11), encontramos $z = 1,00507(6) \cong 1$. Desse modo, estes resultados encontrados para os expoentes críticos, no momento em que ocorre a bifurcação e após a ocorrência da mesma, sugerem que a convergência para o estado estacionário, na variável angular, deve ser invariante ao parâmetro de controle μ .

Agora determinaremos os expoentes críticos a partir da solução direta da equação diferencial (4.3b.1). Primeiramente, aplicamos o formalismo de escala no ponto de bifurcação, o que nos levará à seguinte expressão

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + b\rho(t)^2 = \omega_0 + b \frac{\rho_0^2}{1 + 2t\rho_0^2}. \quad (4.3b.12)$$

Logo,

$$\int_{\phi_0}^{\phi(t)} d\phi = \int_0^t \left(\omega_0 + b \frac{\rho_0^2}{1 + 2t\rho_0^2} \right) dt'.$$

Portanto,

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{b}{2} \ln(1 + 2t\rho_0^2). \quad (4.3b.13)$$

Analisando a equação (4.3b.13) podemos tirar às seguintes conclusões com relação aos expoentes críticos:

- α : Para $t \ll t_x$, temos $\phi(t) \cong \phi_0$, portanto $\alpha = 1$;
- β : Para $t \gg t_x$, temos $\phi(t) \cong t$, portanto $\beta = 1$;
- z : Para $t = t_x$, temos $t_x \cong \phi_0$, portanto $z = 1$.

Aplicando agora o formalismo de escala após o evento de bifurcação, isto é, quando $\mu \neq 0$, veremos que a EDO a ser resolvida passa a ser

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + b\rho(t)^2 = \omega_0 + b \left(\sqrt{\mu} \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\rho_0} \right) e^{-2\mu t} \right) \right)^2. \quad (4.3b.14)$$

Logo,

$$\int_{\phi_0}^{\phi(t)} d\phi = \int_0^t \left[\omega_0 + b \left(\sqrt{\mu} \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\rho_0} \right) e^{-2\mu t'} \right) \right)^2 \right] dt'.$$

Portanto,

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{b}{2} \ln \left(\frac{\rho_0^2 (e^{2\mu t} - 1) + \mu}{\mu} \right) + \omega_0 t. \quad (4.3b.15)$$

Analisando a equação (4.3b.15) podemos tirar às seguintes conclusões com relação aos expoentes críticos:

- α : Para $t \ll t_x$, temos $\phi(t) \cong \phi_0$, portanto $\alpha = 1$;
- β : Para $t \gg t_x$, temos $\phi(t) \cong t$, portanto $\beta = 1$;
- z : Para $t = t_x$, temos $t_x \cong \phi_0$, portanto $z = 1$.

Desse modo, para a forma normal da bifurcação de Hopf pôde-se notar que a convergência para o estado estacionário obedece a duas funções homogêneas, $\rho(\rho_0, t)$ e $\phi(\phi_0, t)$, que conduzem ambas aos expoentes críticos que caracterizam a bifurcação. A tabela 4.1 mostra os expoentes críticos para a bifurcação de Hopf supercrítica.

Tabela 4.1: Tabela para os valores dos expoentes críticos α , β , z e δ para a bifurcação de Hopf supercrítica.

	Radial	Angular
α	1	1
β	-1/2	1
z	-2	1
δ	-1	—

A partir de um procedimento fenomenológico, caracterizado por hipóteses de escala, constatou-se, tanto para a coordenada radial quanto para a angular, a mesma lei de escala descrita em [6,7]. Isto nos permite concluir que as propriedades de escala, observadas a partir da aplicação do formalismo da convergência para o ponto fixo, são invariantes às formas normais.

5. CONCLUSÕES

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou determinar as propriedades de escala da forma normal da bifurcação de Hopf, assim como, os expoentes críticos que a caracterizam partindo da análise do processo de convergência para o estado estacionário no ponto em que ocorre a bifurcação ($\mu = 0$) e ao redor de suas vizinhanças ($\mu \neq 0$).

A partir da análise da equação radial no ponto de bifurcação, $\mu = 0$, provou-se, a partir de uma abordagem fenomenológica, que o decaimento para o estado estacionário é descrito por uma função homogênea generalizada com três expoentes críticos. Estes, além de descreverem a convergência para o ponto fixo, encontram-se relacionados entre si por uma lei de escala $z = \alpha/\beta$. No ponto de bifurcação, os expoentes críticos obtidos para a forma normal da bifurcação de Hopf foram $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$ e $z = -2$.

Depois do evento da bifurcação, $\mu \neq 0$, notou-se que a convergência para o estado estacionário é dada por um decaimento exponencial com um tempo de relaxação τ descrito por uma lei de potência da forma $\tau \propto \mu^\delta$, onde δ é um expoente crítico que, no estudo em questão, foi encontrado com um valor de $\delta = -1$.

A partir da análise da equação angular no ponto de bifurcação, $\mu = 0$, provou-se, a partir de uma abordagem fenomenológica, que a convergência para o estado estacionário também obedece uma função homogênea generalizada que conduz a três novos expoentes críticos. Estes, por sua vez, também encontram-se relacionados entre si pela lei de escala $z = \alpha/\beta$. No ponto de bifurcação, os expoentes críticos obtidos para a forma normal da bifurcação de Hopf foram $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $z = 1$.

Após o evento da bifurcação, $\mu \neq 0$, notou-se que a convergência para o estado estacionário exibiu o mesmo comportamento observado para o caso em que $\mu = 0$, levando, portanto, a determinação dos mesmos expoentes críticos α , β e z , encontrados previamente. Desse modo, estes resultados encontrados para os expoentes críticos, no momento em que ocorre a bifurcação e após a ocorrência da

mesma, sugerem que a convergência para o estado estacionário, na variável angular, deve ser invariante ao parâmetro de controle μ .

Além disso, com base nos resultados de (E. D. Leonel et. al., 2015) é possível dizer que ao generalizar a investigação para bifurcações em fluxos de equações diferenciais, chegou-se a conclusão de que as propriedades de escala, observadas a partir da aplicação do formalismo da convergência para o ponto fixo, mostram-se invariantes às chamadas formas normais.

Embora, o presente trabalho tenha se limitado ao estudo das propriedades de escala da bifurcação de Hopf em sistemas de dimensão $n = 2$, torna-se necessário o desenvolvimento de novos estudos que visem expandir a fronteira do conhecimento com relação à bifurcação de Hopf em sistema dinâmicos com dimensão $n > 2$.

Nesse sentido, partindo do formalismo de escala descrevemos a convergência para o estado estacionário na bifurcação de Hopf escrita na forma normal de tal modo a determinar os expoentes críticos, bem como, as propriedades de escala que identificam a classe de universalidade a qual esta bifurcação pertence.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HILBORN, R. C. (2000). *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press.
- [2] DEVANEY R. L., *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment (Studies in Nonlinearity)*. Westview Press (1992).
- [3] MONTEIRO, L. H. (2002). *Sistemas dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, pp. 180,181,182, 258, 261, 262, 264, 265, 269, 282, 283, 284, 285.
- [4] GREBOGI C., Ott E., Yorke J. A., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982)
- [5] GREBOGI C., Ott E., Yorke J. A., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982), 1507; *Physica D* **7** (1983),181.
- [6] R. M. N. Teixeira et. al., *Phys. Lett. A* **379**, 1246 (2015).
- [7] E. D. Leonel et. al., *Phys. Lett. A* **379**, 1796 (2015).
- [8] KUZNETSOV, Y. A. (1998). *Elements of applied bifurcation theory* (Vol. 112). New York: Springer Science & Business Media, pag. 108, 109, 110 e 111.
- [9] FIEDLER-FERRARA, N., & CINTRA, C. P. (1994). *Caos: uma introdução*. São Paulo: Edgard Blucher, pp. 29, 30, 31, 32, 33, 34, 49, 50, 51, 52, 53.
- [10] LEONEL, E. D. (2015). *Introdução à dinâmica não linear, caos e leis de escala*,pp. 67, 68, 69, 71, 72, 74, 76, 77, 81, 82, 83, 84, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96.
- [11] SAVI, M. A. (2006). *Dinâmica não-linear e Caos*. Rio de Janeiro: E-papers serviços editoriais.
- [12] LOPES, Artur O. (2006). *Introdução à Mecânica Clássica*. Editora da Universidade de São Paulo, pag 21.
- [13] SALINAS, S. (1997). *Introdução à física estatística*. EDUSP.
- [14] CARDY, J. (1996). *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* . Cambridge University Press.

- [15] KADANOFF, L. P. (1993). *From order to chaos. Essays: Critical, Chaotic and Otherwise. vol. 1.* World Scientific.
- [16] TOMÉ, T.,& Oliveira, M. J. (2001). *Dinâmica estocástica e irreversibilidade.* EDUSP.
- [17] BALAKRISHNAN, V. (2008). *Elements of nonequilibrium statistical mechanics.* India: Ane Books India.
- [18] LIMA, E. L. (1976). *Elementos de Topologia Geral.* Rio de Janeiro: LTC.
- [19] LIMA, E. L. (2011). *Espaços Métricos.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

