

Luiz Carlos Matioli

Polinômios Ortogonais, Frações Contínuas e
Sequências Encadeadas



POLINÔMIOS ORTOGONAIS,
FRAÇÕES CONTÍNUAS E SEQUÊNCIAS ENCADEADAS.

LUIZ CARLOS MATIOLI

Orientador Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

Dissertação apresentada ao DCCE/IBILCE/UNESP
como parte dos requisitos para obtenção do
título de **Mestre** em Ciências Matemáticas - Área
de Concentração Matemática Aplicada e Computa-
cional.



641/94

São José do Rio Preto - 1993.



DEDICATÓRIA

De especial ao Professor Alagados Eli Ranga pela paciência e
disponibilidade que me orientou neste trabalho, sempre elucidando as
dúvidas e fornecendo informações, tornando este trabalho muito mais agradável.
Por sua disponibilidade, paciência e amor a esta vasta e fascinante matéria,
ele foi, na minha opinião, o melhor professor de todos os tempos.

A Professora Eliana Xavier Ladeira de Andrade que além de
ensinar a matéria com maestria, apontando muitas dificuldades, foi a
primeira a corrigir as minhas versões, até chegar a versão final.

A todos os Professores e funcionários da Departamento de Ciências
da Computação e Estatística da UNESP que sempre me ajudaram e me
encorajaram.

A Família de São Gabriel e Paraguaçu, especialmente a minha mãe,
por todo o apoio financeiro e moral durante o período de agosto de 1992
a agosto de 1993.

A minha esposa e a minha filha pelo incentivo e encorajamento,
e

aos meus pais.

AGRADECIMENTO

Em especial ao Professor Alagacone Sri Ranga pela paciência e disposição com que me orientou nesse trabalho, sempre elucidando as minhas dúvidas com clareza, transmitindo, assim, muita segurança. Por sua simplicidade, humildade e todo o seu vasto conhecimento matemático, ele foi uma peça muito importante na construção desse trabalho.

A Professora Eliana Xavier Linhares de Andrade que além de assistir a maioria dos seminários, apontando muitas sugestões, leu e corrigiu as várias versões, até chegar a versão final.

A todos os Professores e funcionários do Departamento de Ciências de Computação e Estatística da UNESP que sempre colaboraram no que precisei.

A Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da UNESP por ter me concedido ajuda financeira (bolsa) durante o período de: agosto de 1992 a agosto de 1993.

A minha esposa e a minha filha pelo incentivo e compreensão, aceitando a minha ausência nas horas de estudo.



ÍNDICE

Capítulo 1.

Introdução	01
------------	----

Capítulo 2.

Polinômios Ortogonais

2.1. Introdução	04
2.2. Alguns resultados básicos	06
2.3. Existência de SPO	08
2.4. Fórmula de recorrência	13
2.5. Zeros de polinômios ortogonais	22

Capítulo 3.

Frações Contínuas e Suas Relações com Polinômios Ortogonais

3.1. Definição e notações	25
3.2. Propriedades básicas de frações contínuas	26
3.3. Propriedades de convergência	29
3.4. Frações de Jacobi e polinômios ortogonais	32

Capítulo 4.

Sequências Encadeadas

4.1. Definições e teoremas	35
4.2. Alguns resultados assintóticos	42
4.3. Sequências periódicas	48

Capítulo 5.

Algumas Aplicações de Sequências Encadeadas

5.1. Sequências encadeadas e polinômios ortogonais	51
5.2. Sequências encadeadas e polinômios similares aos ortogonais	54



CAPTÍTULO I

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo de polinômios ortogonais, frações contínuas, e sequências encadeadas. Ele foi organizado em cinco capítulos, na mesma ordem acima, sendo que o primeiro é introdutório e o último é sobre algumas aplicações de sequências encadeadas. Esta ordem foi escolhida naturalmente, onde cada capítulo, a partir do segundo será usado nos capítulos posteriores.

No segundo capítulo fazemos um estudo básico de polinômios ortogonais: definições, propriedades e alguns resultados sobre os zeros destes polinômios. Existe uma extensa literatura a respeito dessa classe especial de funções, dentre os quais podemos citar: Gabor Szegö [1939], *Orthogonal Polynomials*; T.S. Chihara [1978], *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. O segundo, foi bastante usado nesse trabalho, por ser mais recente e estar mais voltado para o que pretendemos apresentar aqui. Os polinômios ortogonais têm sido assunto de pesquisa para muitos matemáticos e muitas publicações tem ocorrido nessa área (ver, por exemplo [1,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,19,20,28,29]). Segundo Szegö (ver [27]), estes polinômios também tem aplicações em mecânica quântica e estatística matemática. Atualmente, alguns matemáticos como Chihara [9], [10]; E. A. Van Doorn [29, pg.261]; L. Jacobsen [16] têm usado as sequências encadeadas (capítulo IV e V) para obter informações a respeito dos zeros desses polinômios.



No terceiro capítulo estudaremos, de maneira bastante breve as frações contínuas e algumas de suas relações com polinômios ortogonais. Estudaremos algumas propriedades de convergência e daremos informações a respeito das J-frações, que é um tipo especial de fração contínua. Historiadores (ver [2] e [17]) apontam Rafael Bombelli, da Bologna, como o iniciador das frações contínuas. O seu Tratado de Álgebra de 1572 aproximava $\sqrt{13}$ como $3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}$.

Outros matemáticos que estudaram esse assunto dando, assim, suas contribuições foram: Pietro Antonio Cataldi [1548 - 1626] da Bologna; Daniel Schenter (1585 - 1636) da Altdorf - Alemanha; Lord Brouncker (1620 - 1686) da Royal Society, Inglaterra; John Wallis (1616 - 1703) da Inglaterra. Entretanto, quem formalizou ou cuidou da teoria como um corpo foram: Christian Huyghens (1629 - 1695); Euler (1707 - 1783); Lambert (1728 - 1777) e Lagrange (1736 - 1813). Outros textos mais recentes de frações contínuas e suas aplicações (ver Sri Ranga [22]) são os de: Wall [1948]; Khovanskii [1963]; Jones e Thron [1980]. Dentre algumas das aplicações de frações contínuas estão (ver Jones e Thron [17]): localização de zeros e pontos singulares, determinação de polinômios estáveis, aceleração de convergência, somatórios de séries divergentes, e problemas de momentos.

No quarto capítulo estudaremos seqüências que satisfazem as condições:

$$i) \quad 0 \leq g_0 < 1 \quad \text{e} \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1,$$

$$ii) \quad a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n \geq 1.$$

Existindo as seqüências $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ satisfazendo (i) e (ii) acima, dizemos que $\{a_n\}$ é uma seqüência encadeada e $\{g_k\}$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n\}$.



Segundo Chihara [10], as seqüências encadeadas surgiram em certas frações contínuas nos estudos de Van Vleck por volta de 1900, e cuja teoria foi formalizada por Wall (ver [30]). Nosso objetivo neste capítulo, é estudar as propriedades gerais de seqüências encadeadas e no capítulo cinco, aplicá-las para obter informações quanto aos zeros de polinômios que satisfazem relações de recorrência. Como referência para maiores estudos sobre seqüências encadeadas podemos indicar Wall [1944] *Analytic Theory of Continued Fractions* Cap. III pg. 79. Ver também Chihara [1978] *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, e as referências citadas no final deste trabalho, como por exemplo [16] e [29].

No capítulo cinco além de seqüências encadeadas serão bastante usados resultados de frações contínuas desenvolvidos no capítulo III, e polinômios ortogonais, desenvolvidos no capítulo II. O desenvolvimento deste capítulo só foi possível graças ao esforço do Professor Ranga que já havia estudado os polinômios similares mencionados neste capítulo e tem usado as seqüências encadeadas para obter informações sobre os zeros dos mesmos.



CAPÍTULO II

POLINÔMIOS ORTOGONAIS

2.1. Introdução.

Neste capítulo, faremos um breve estudo de polinômios ortogonais: daremos a definição e estudaremos suas propriedades mais importantes.

Seja $w(x)$ uma função integrável e não negativa num intervalo (a,b) . Assumimos que $w(x)$ não é identicamente nula em (a,b) e que os momentos

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sejam todos finitos. Nestas condições, $w(x)$ será chamada de função peso.

Dizemos que uma sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, é um sistema de polinômios ortogonais no intervalo (a,b) com relação à função peso $w(x)$ se:

$$i) \quad P_n(x) \text{ é de grau } n$$

e

$$ii) \quad \int_a^b P_m(x) P_n(x) w(x) dx = 0, \quad \text{para } m \neq n.$$

Seja f uma função integrável no intervalo (a,b) , em relação à função peso $w(x)$. Definimos o operador $\mathcal{L}$ por:

$$\mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x) w(x) dx.$$

É fácil mostrar que $\mathcal{L}$ é um operador linear. Notemos que

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x) dx = \mathcal{L}[x^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$



e que

$$\int_a^b P_m(x) P_n(x) w(x) dx = \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)].$$

A seguir, vamos generalizar a idéia do operador linear dada acima, e baseado nele considerarmos o estudo de polinômios ortogonais. Embora o estudo que está descrito neste capítulo teve sua origem na década de 20, foi bastante explorado por Chihara no seu livro [5].

Definição: Sejam $\{\mu_n\}$ uma sequência de números complexos e $\mathcal{L}$ uma função complexa definida por:

$$\mathcal{L}[x^n] = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Então $\mathcal{L}$ é chamado **funcional de momento** determinado pela **sequência de momentos** formal $\{\mu_n\}$. O número μ_n é chamado de momento de ordem n , em relação ao operador $\mathcal{L}$.

Vemos que:

$$\mathcal{L}[\alpha_1 \Pi_1(x) + \alpha_2 \Pi_2(x)] = \alpha_1 \mathcal{L}[\Pi_1(x)] + \alpha_2 \mathcal{L}[\Pi_2(x)],$$

para todos os números complexos α_i e todo polinômio $\Pi_i(x)$, $i = 1, 2$.

Logo, $\mathcal{L}$ é um funcional linear.

Usando a definição acima, podemos reescrever nossa definição de polinômios ortogonais da seguinte maneira:

Seja $\{P_n(x)\}$ uma sequência de polinômios, tal que,

- (2.2.1)
$$\begin{aligned} i) & \quad P_n(x) \text{ é um polinômio de grau } n \text{ e,} \\ ii) & \quad \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = k_n \delta_{mn}, \end{aligned}$$

onde $k_n \neq 0$ e $\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se, } m \neq n, \\ 1 & \text{se, } m = n. \end{cases}$



Dizemos, então, que $\{P_n(x)\}$ é um sistema de polinômios ortogonais com relação ao funcional de momento $\mathcal{L}$.

Abreviaremos Sistema de Polinômios Ortogonais por SPO. Se $k_n = 1$ na definição acima, dizemos que $\{P_n(x)\}$ é um Sistema de Polinômios Ortonormais.

2.2. Alguns Resultados Básicos.

Teorema 2.2.1: Sejam $\mathcal{L}$ um funcional de momento e $\{P_n(x)\}$ um sistema de polinômios. Então, os seguintes itens são equivalentes:

- a) $\{P_n(x)\}$ é um SPO com relação a $\mathcal{L}$,
- b) $\mathcal{L}[\Pi(x)P_n(x)] = 0$ para todo polinômio $\Pi(x)$ de grau $m < n$ e $\mathcal{L}[\Pi(x)P_n(x)] \neq 0$, se $m = n$,
- c) $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = k_n \delta_{mn}$, com $k_n \neq 0$, para $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Prova: ($a \Rightarrow b$): Seja $\{P_n(x)\}$ um SPO para $\mathcal{L}$. Então, $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)\}$ formam uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a m , pois $P_k(x)$ é um polinômio de grau k .

Como $\Pi(x)$ é um polinômio de grau m , podemos escrever

$$\Pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x),$$

onde c_m é diferente de zero. Logo, pela linearidade de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}[\Pi(x)P_n(x)] = \sum_{k=0}^m c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ c_m \mathcal{L}[P_m^2(x)], & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Como $c_m \neq 0$ e $\mathcal{L}[P_m^2(x)] \neq 0$, segue o resultado.

($b \Rightarrow c$): Desde que x^m é um polinômio de grau m temos imediatamente



$$\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ k_n \neq 0, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

que é o resultado desejado.

($c \Rightarrow a$): Como x^m é um polinômio de grau m e $P_n(x)$ de grau n , escrevendo $P_m(x) = \sum_{r=0}^m a_r x^r$ temos $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = \sum_{r=0}^m a_r \mathcal{L}[x^r P_n(x)]$, que leva imediatamente ao resultado. Logo, $\{P_n(x)\}$ é um SPO com relação a $\mathcal{L}$. ■

Pelo teorema 2.2.1, se $\Pi(x)$ é um polinômio de grau n existem constantes c_k tais que,

$$(2.2.1) \quad \Pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x), \quad \text{onde} \quad c_k = \frac{\mathcal{L}[\Pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Teorema 2.2.2: Se $\{P_n(x)\}$ é um SPO com relação a $\mathcal{L}$, então cada $P_n(x)$ é unicamente determinado a menos de um fator arbitrário não nulo. Isto é, se $\{Q_n(x)\}$ é também um SPO com relação a $\mathcal{L}$, então existem constantes $c_n \neq 0$, tais que, $Q_n(x) = c_n P_n(x)$, para $n = 1, 2, \dots$

Prova: Se $Q_n(x)$ é um SPO com relação a $\mathcal{L}$ então, pelo teorema 2.2.1,

$$\mathcal{L}[P_m(x)Q_n(x)] = k_n \delta_{mn}, \quad \text{para } m \leq n,$$

onde $k_n \neq 0$.

Na equação (2.2.1) fazendo $\Pi(x) = Q_n(x)$ temos:

$$\mathcal{L}[P_m(x)Q_n(x)] = c_n \mathcal{L}[P_m^2(x)] = k_n \delta_{mn}, \quad m \leq n.$$

Mas, $\mathcal{L}[P_m^2(x)] \neq 0$. Portanto $c_m = 0$, para $m < n$ e $c_n \neq 0$. ■

Observações:

1) Se $\{P_n(x)\}$ é um SPO com relação a $\mathcal{L}$ então, $\{c_n P_n(x)\}$ também será para toda sequência de constantes c_n não nulas.



2) Se $P_n(x)$ são polinômios mônicos (coeficiente do termo de maior grau igual a unidade) então, o SPO será referido como SPO mônico.

3) Se $\{P_n(x)\}$ é um SPO para $\mathcal{L}$ então, $\{P_n(x)\}$ é também um SPO para todo funcional de momento $\tilde{\mathcal{L}}$, tal que:

$$\tilde{\mathcal{L}}[x^n] = c\mathcal{L}[x^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde c é uma constante diferente de zero.

2.3. Existência de SPO.

Com a sequência $\{\mu_n\}$ definimos

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n} \end{vmatrix},$$

para $n \geq 0$.

Teorema 2.3.1: Seja $\mathcal{L}$ um funcional de momento dado pela sequência $\{\mu_n\}$. Então, existe um SPO para $\mathcal{L}$ se, e somente se, $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Prova: Escrevemos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk} x^k.$$

Pelo teorema 2.2.1, vemos que a condição de ortogonalidade

$$(2.3.1) \quad \mathcal{L}[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^n c_{nk} \mu_{k+m} = k_n \delta_{mn}, \quad k_n \neq 0, \quad m \leq n,$$

é um sistema de $n+1$ equações lineares a $n+1$ incógnitas. Ou seja,



$$(2.3.2) \quad \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Como existe um SPO para $\mathcal{L}$ unicamente determinado pela constante k_n então, $\Delta_n \neq 0$ no sistema (2.3.2), para $n \geq 0$.

Reciprocamente, se $\Delta_n \neq 0$ então, para $k_n \neq 0$ arbitrários, (2.3.2) terá solução única. Portanto, existe $P_n(x)$ satisfazendo $\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = k_n \delta_{nn}$. ■

Usando a regra de Cramer é fácil mostrar que:

$$(2.3.3) \quad c_{nn} = \frac{k_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Definição: $\mathcal{L}$ é chamado um funcional de momento quase definido se $\Delta_n \neq 0$, para todo $n \geq 0$.

Observamos que se $\mathcal{L}$ é quase definido então, sempre existe um correspondente SPO.

Teorema 2.3.2: Seja $\{P_n(x)\}$ um SPO para $\mathcal{L}$. Então, para qualquer polinômio $\Pi_n(x)$ de grau n ,

$$\mathcal{L}[\Pi_n(x)P_n(x)] = a_n \mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \frac{a_n c_{nn} \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \text{com } \Delta_{-1} = 1,$$

onde a_n denota o coeficiente do termo de maior grau de $\Pi_n(x)$ e, c_{nn} denota o coeficiente do termo de maior grau de $P_n(x)$.

Prova: Escrevemos $\Pi_n(x) = a_n x^n + \Pi_{n-1}(x)$, onde $\Pi_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau $n-1$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Pi_n(x)P_n(x)] &= \mathcal{L}[(a_n x^n + \Pi_{n-1}(x))P_n(x)] \\ &= a_n \mathcal{L}[x^n P_n(x)] + \mathcal{L}[\Pi_{n-1}(x)P_n(x)] \end{aligned}$$



$$= a_{nn} k_n,$$

onde k_n é dado por (2.3.1). Usando a relação (2.3.3) segue o resultado do teorema. ■

Definição: Um funcional de momento $\mathcal{L}$ é chamado positivo definido se $\mathcal{L}[\Pi(x)] > 0$, para todo polinômio $\Pi(x)$ não identicamente nulo e não negativo, para todo x real.

Se $\mathcal{L}$ é positivo definido, segue imediatamente que $\mu_{2k} = \mathcal{L}[x^{2k}] > 0$ para $k \geq 0$. Podemos mostrar também que $\mu_{2k+1} \in \mathbb{R}$, para $k \geq 0$.

Quando $\mathcal{L}$ é positivo definido o método de Gram-Schmidt pode ser usado para construir um correspondente sistema de polinômios ortonormais reais, como segue.

Primeiramente definimos:

$$p_0(x) = \mu_0^{-1/2} > 0.$$

Então,

$$\mathcal{L}[p_0^2(x)] = \mathcal{L}[\{\mu_0^{-1/2}\}^2] = \mu_0^{-1} \mathcal{L}[1] = 1.$$

A seguir, construímos

$$P_1(x) = x - ap_0(x).$$

Logo,

$$\mathcal{L}[p_0(x)P_1(x)] = \mathcal{L}[xp_0(x)] - a\mathcal{L}[p_0^2(x)] = 0, \text{ se } a = \mathcal{L}[xp_0(x)].$$

Com esta escolha de a , definimos:

$$p_1(x) = \{\mathcal{L}[P_1(x)]\}^{-1/2} P_1(x).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p_0(x)p_1(x)] &= \mathcal{L}[p_0(x)\{\mathcal{L}[P_1^2(x)]\}^{-1/2} P_1(x)] \\ &= \{\mathcal{L}[P_1^2(x)]\}^{-1/2} \mathcal{L}[p_0(x)P_1(x)] = 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathcal{L}[p_1^2(x)] = \mathcal{L}[(\{\mathcal{L}[P_1^2(x)]\}^{-1/2} P_1(x))^2] = \{\mathcal{L}[P_1^2(x)]\}^{-1} \mathcal{L}[P_1^2(x)] = 1.$$

Notamos que $p_0(x)$ e $p_1(x)$ são polinômios reais.

Suponhamos que $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ foram construídos, de modo



que:

$p_i(x)$ é polinômio real de grau i e,

$$\mathcal{L}[p_i(x)p_j(x)] = \delta_{ij}, \text{ para } i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Definimos:

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k p_k(x),$$

onde, $a_k = \mathcal{L}[x^{n+1} p_k(x)]$. Então, $P_{n+1}(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, satisfazendo:

$$\mathcal{L}[p_j(x)P_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[x^{n+1} p_j(x)] - \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}[p_j(x)p_k(x)] = a_j - a_j = 0,$$

para $j = 0, 1, \dots, n$

Definimos:

$$p_{n+1}(x) = \{P_{n+1}^2(x)\}^{-1/2} P_{n+1}(x).$$

Então, $p_{n+1}(x)$ é um polinômio real de grau $n+1$, onde:

$$\mathcal{L}[p_j(x)p_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[p_j(x)\{P_{n+1}^2(x)\}^{-1/2} P_{n+1}(x)] = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

e

$$\mathcal{L}[p_{n+1}^2(x)] = \mathcal{L}[(\mathcal{L}[P_{n+1}^2(x)]^{-1/2})^2 P_{n+1}^2(x)] = 1.$$

Portanto, $\{p_n(x)\}$, da maneira como foram construídos, formam um sistema de polinômios ortonormais reais com relação ao operador $\mathcal{L}$.

Lema 2.3.1: Seja $\Pi(x)$ não negativo para todo x real. Então, existem polinômios $p(x)$ e $q(x)$, tais que:

$$\Pi(x) = p^2(x) + q^2(x).$$

Prova: Se $\Pi(x) \geq 0$ para todo x real então, $\Pi(x)$ é um polinômio real com seus zeros reais tendo multiplicidade par e, os não reais, ocorrendo em pares conjugados.

Desta forma, escrevemos:



$$\Pi(x) = r^2(x) \prod_{k=0}^m [x - (\alpha_k + \beta_k i)][x - (\alpha_k - \beta_k i)],$$

onde $r(x)$ é um polinômio real e, α_k e β_k são números reais.

Vemos que:

$$\prod_{k=0}^m (x - \alpha_k - \beta_k i) = A(x) + iB(x),$$

onde $A(x)$ e $B(x)$ são polinômios reais. Então,

$$\Pi(x) = r^2(x)(A^2(x) + B^2(x)) = r^2(x)A^2(x) + r^2(x)B^2(x).$$

Portanto, $\Pi(x) = p^2(x) + q^2(x)$. ■

Teorema 2.3.3: $\mathcal{L}$ é positivo definido se, e somente se, seus momentos são reais e $\Delta_n > 0$, para $n \geq 0$.

Prova: Se $\mathcal{L}$ é positivo definido então, seus momentos são reais e um SPO, $\{P_n(x)\}$, para $\mathcal{L}$ existe. Por simplicidade, vamos supor que $P_n(x)$ são mônicos. Temos então, pelo teorema 2.3.2, que

$$0 < \mathcal{L}[P_n^2(x)] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Portanto, $\Delta_n > 0$.

Reciprocamente, se μ_n é real e $\Delta_n > 0$, para $n \geq 0$, então, pelo teorema 2.3.1, existe um SPO, $\{P_n(x)\}$, para $\mathcal{L}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $P_n(x)$ é mônico.

Seja $p(x)$ um polinômio de grau m . Então, podemos escrever

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k(x),$$

onde a_k são todos reais e $a_m \neq 0$. Logo,



$$\mathcal{L}[p^2(x)] = \mathcal{L}\left[\left(\sum_{k=0}^m a_k P_k(x)\right)^2\right] = \sum_{k=0}^m a_k^2 \mathcal{L}[P_k^2(x)] > 0,$$

e, pelo lema 2.3.1, segue que $\mathcal{L}$ é positivo definido. ■

Teorema 2.3.4: Seja $\{P_n(x)\}$ um SPO para $\mathcal{L}$. Se $P_n(x)$ é real e $\mathcal{L}[P_n^2(x)] > 0$, então, $\mathcal{L}$ é positivo definido.

Prova: Seja $\Pi(x) > 0$ um polinômio real para todo x real. Então,

$$\Pi(x) = p^2(x) + q^2(x).$$

Aplicando $\mathcal{L}$, temos

$$\mathcal{L}[\Pi(x)] = \mathcal{L}[p^2(x)] + \mathcal{L}[q^2(x)]$$

onde, $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios reais. Podemos escrever, para $p(x)$ e $q(x)$,

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k P_k(x) \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{k=1}^n b_k P_k(x).$$

Logo,

$$\mathcal{L}[\Pi(x)] = \sum_{k=0}^n a_k^2 \mathcal{L}[P_k^2(x)] + \sum_{k=0}^n b_k^2 \mathcal{L}[P_k^2(x)] > 0.$$

Portanto, $\mathcal{L}$ é positivo definido. ■

2.4. Fórmula de Recorrência

Teorema 2.4.1: Sejam $\mathcal{L}$ um funcional de momento quase definido e $\{P_n(x)\}$ o correspondente SPO mônico. Então, existem constantes c_n e $\lambda_n \neq 0$, tais que,

$$(2.4.1) \quad P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

onde $P_{-1}(x) = 0$. Se $\mathcal{L}$ é positivo definido, então c_n é real e $\lambda_{n+1} > 0$, para $n \geq 1$. (λ_1 é arbitrário).

Prova: Sendo $xP_{n-1}(x)$ de grau n , temos, pela relação (2.2.1),



$$xP_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} P_k(x),$$

onde
$$a_{nk} = \frac{\mathcal{L}[xP_{n-1}(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad a_{nn} = 1.$$

Mas, pelo teorema 2.2.1, temos $a_{nk} = 0$, para $0 \leq k \leq n-3$, $n \geq 1$.

Escrevendo $a_{n,n-1} = c_n$ e $a_{n,n-2} = \lambda_n$, temos a relação (2.4.1).

Para $n \geq 2$, multiplicando a equação (2.4.1) por x^{n-2} e aplicando $\mathcal{L}$, temos:

$$\mathcal{L}[x^{n-2}P_n(x)] = \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - c_n \mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-1}(x)] - \lambda_n \mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)].$$

Logo,

$$0 = \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - \lambda_n \mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)],$$

e pelo teorema 2.3.2 obtemos, para $n \geq 2$,

$$(2.4.2) \quad \lambda_n = \frac{\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)]}{\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)]} = \frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}^2}, \quad (\Delta_{-1} = 0).$$

Portanto, se $\mathcal{L}$ é quase definido, $\lambda_n \neq 0$ para $n \geq 1$, ao passo que, se $\mathcal{L}$ é positivo definido e os momentos são todos reais, $\lambda_{n+1} > 0$, para $n \geq 1$.

Obviamente, c_n será real se $P_n(x)$ for real. ■

Desde que x^n é um polinômio de grau n , podemos escrevê-lo como combinação linear dos polinômios ortogonais mônicos $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$. Isto é,

$$x^n = P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x) + \dots + a_0P_0(x).$$

Desta forma, obtemos:

$$(2.4.3) \quad \mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \mathcal{L}[P_n^2(x)], \quad n \geq 0.$$

De (2.4.2), obtemos então, para λ_n :

$$(2.4.4) \quad \lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}{\mathcal{L}[P_n^2(x)]} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}, \quad n \geq 1, \quad (\Delta_{-1} = 0).$$

Temos, da relação (2.4.4),

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \lambda_{n+1} \mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)],$$

o que fornece:

$$(2.4.5) \quad \mathcal{L}[P_n^2(x)] = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1},$$

onde tomamos $\lambda_1 = \mu_0 = \Delta_0$.

Multiplicando a relação de recorrência (2.4.1) por $P_{n-1}(x)$ e aplicando $\mathcal{L}$, obtemos:

$$\mathcal{L}[P_{n-1}(x)P_n(x)] = \mathcal{L}[xP_{n-1}^2(x)] - c_n \mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)] - \lambda_n \mathcal{L}[P_{n-2}(x)P_{n-1}(x)].$$

Como $\mathcal{L}[P_{n-1}(x)P_n(x)]$ e $\mathcal{L}[P_{n-2}(x)P_{n-1}(x)]$ são ambos iguais a zero temos:

$$(2.4.6) \quad c_n = \frac{\mathcal{L}[xP_{n-1}^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]}, \quad n \geq 1.$$

Se escrevemos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk} x^k, \quad \text{onde } c_{nn} = 1,$$

temos, de (2.4.1),

$$c_{n,n-1} = c_{n-1,n-1} - c_n.$$

O que permite obter a relação:

$$(2.4.7) \quad c_{n,n-1} = -(c_1 + c_2 + \dots + c_n).$$

Se $\{P_n(x)\}$ não for um SPO mônico, então, na fórmula de recorrência (2.4.1), temos:

$$(2.4.8) \quad P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad \text{para } n \geq 0.$$



Se $P_n(x) = k_n \hat{P}_n(x)$ onde $\hat{P}_n(x)$ é mônico, é fácil mostrar que:

$$A_n = k_n^{-1} k_{n+1}, \quad B_n = -c_{n+1} k_n^{-1} k_{n+1}, \quad C_n = \lambda_{n+1} k_{n-1}^{-1} k_{n+1},$$

onde, c_n e λ_n são dados por (2.4.4) e (2.4.6), e $k_{-1} = 1$.

Definição: Um funcional de momento é chamado simétrico se todos os seus momentos de ordem ímpar são nulos.

Teorema 2.4.2: Seja $\{P_n(x)\}$ um SPO mônico com relação ao funcional de momento quase definido $\mathcal{L}$. Então, os itens seguintes são equivalentes:

- a) $\mathcal{L}$ é simétrico,
- b) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, para $n \geq 0$,
- c) Na correspondente fórmula de recorrência (2.4.1) $c_n = 0$, para $n \geq 1$.

Prova: Vamos provar que $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$.

$a) \Rightarrow b)$: Seja $\mathcal{L}$ simétrico. Então, $\mathcal{L}[\Pi(-x)] = \mathcal{L}[\Pi(x)]$ para qualquer polinômio $\Pi(x)$. Assim,

$$\mathcal{L}[P_m(-x)P_n(-x)] = \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0, \quad m \neq n.$$

Logo, pela unicidade de polinômios ortogonais, $P_n(-x) = a_n P_n(x)$, onde a_n é constante.

Sendo $P_n(x)$ mônico, pelo princípio da identidade de polinômios, temos $a_n = (-1)^n$. Portanto,

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \text{para } n \geq 0.$$

$b) \Rightarrow a)$: Se $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ então, $P_n(x)$ só tem potências ímpares quando n é ímpar.

Desta forma, $P_1(x) = x$ e, tomando $P_0(x) = 1$, temos

$$0 = \mathcal{L}[P_0(x)P_1(x)] = \mathcal{L}[P_1(x)] = \mu_1.$$

Portanto, $\mu_1 = 0$.

Suponhamos que $\mu_{2k-1} = 0$, para $n \leq k$ e mostremos que $\mu_{2k+1} = 0$. Desde que



$$P_{2k+1}(x) = x^{2k+1} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \dots + a_1x,$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[P_0(x)P_{2k+1}(x)] = \mathcal{L}[x^{2k+1} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \dots + a_1x] \\ &= \mu_{2k+1} + a_{2k-1}\mu_{2k-1} + \dots + a_1\mu_1. \end{aligned}$$

Logo, $\mu_{2k+1} = 0$. Por indução, μ_n é zero para todo n ímpar e, portanto, $\mathcal{L}$ é simétrico.

b) $\Rightarrow$ c): Temos, de (2.4.1),

$$\begin{aligned} P_n(-x) &= (-x - c_n)P_{n-1}(-x) - \lambda_n P_{n-2}(-x) \\ &= -(x + c_n)P_{n-1}(-x) - \lambda_n P_{n-2}(-x). \end{aligned}$$

Multiplicando a última igualdade por $(-1)^n$, obtemos:

$$(-1)^n P_n(-x) = (-1)^{n-1} (x + c_n) P_{n-1}(-x) - \lambda_n (-1)^n P_{n-2}(-x).$$

Tomando $Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$, temos:

$$Q_n(x) = (x + c_n)Q_{n-1}(x) - \lambda_n Q_{n-2}(x).$$

Subtraindo a relação de recorrência acima de (2.4.1), obtemos:

$$Q_n(x) - P_n(x) = (x + c_n)Q_{n-1}(x) - \lambda_n Q_{n-2}(x) - (x - c_n)P_{n-1}(x) + \lambda_n P_{n-2}(x).$$

Desta forma, se $Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x) = P_n(x)$, $n \geq 0$, temos

$$0 = 2c_n P_{n-1}(x), \text{ para } n \geq 1 \text{ e qualquer } x \text{ real.}$$

Portanto, $c_n = 0$.

c) $\Rightarrow$ b): Se $c_n = 0$, $Q_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ e $P_n(x)$ têm a mesma relação de recorrência.

Desde que $P_{-1}(x) = Q_{-1}(x)$ e $P_0(x) = Q_0(x)$, temos, imediatamente, que $Q_n(x) = P_n(x)$ para todo n . Portanto,

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad \blacksquare$$



Teorema 2.4.3: (Teorema de Favard).

Sejam $\{c_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ sequências arbitrárias de números complexos e $\{P_n(x)\}$ definido pela fórmula de recorrência:

$$(2.4.9) \quad \begin{cases} P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \\ P_{-1}(x) = 0 \quad \text{e} \quad P_0(x) = 1. \end{cases}$$

Então, existe um único funcional de momento $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{L}[1] = \lambda_1$, e $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$, para $m \neq n$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$.

$\mathcal{L}$ é quase definido e $\{P_n(x)\}$ é o correspondente SPO mônico se, e somente se, $\lambda_n \neq 0$, $n \geq 1$. Além disso, $\mathcal{L}$ é positivo definido se, e somente se, c_n é real e $\lambda_n > 0$, para $n \geq 1$.

Prova: Definiremos o funcional de momento $\mathcal{L}$ indutivamente por:

$$\mathcal{L}[1] = \mu_0 = \lambda_1, \quad \mathcal{L}[P_n(x)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Isto é, construiremos $\mathcal{L}[x^n] = \mu_n$, $n = 1, 2, \dots$, da seguinte forma:

Temos, de (2.4.9), que $P_1(x) = x - c_1$ e portanto, de

$$0 = \mathcal{L}[P_1(x)] = \mathcal{L}[x - c_1],$$

obtemos $\mathcal{L}[x] = \mu_1 = c_1 \mu_0 = c_1 \lambda_1$.

Novamente, de (2.4.9),

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - c_2)P_1(x) - \lambda_2 P_0(x) \\ &= x^2 - (c_1 + c_2)x + (c_1 c_2 - \lambda_2), \end{aligned}$$

e, com isso, temos:

$$0 = \mathcal{L}[P_2(x)] = \mathcal{L}[x^2] - (c_1 + c_2)\mu_1 + (c_1 c_2 - \lambda_2)\mu_0.$$

Logo,

$$\mathcal{L}[x^2] = \mu_2 = (c_1 + c_2)\mu_1 - (c_1 c_2 - \lambda_2)\mu_0.$$

Continuando dessa forma obtemos os valores de $\mu_3, \mu_4, \dots$, os quais



dependem dos valores de c_n , $n \geq 1$ e λ_n , $n \geq 1$.

Verificaremos, agora, que em relação ao funcional de momento construído dessa forma, os polinômios $\{P_n(x)\}$ formam um SPO.

Obviamente, $\mathcal{L}[P_n(x)] = 0$, $n \geq 1$.

Da relação de recorrência (2.4.9), temos:

$$(2.4.10) \quad xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_{n+1}P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x).$$

Aplicando $\mathcal{L}$ nesta relação, obtemos imediatamente:

$$\mathcal{L}[xP_n(x)] = 0, \quad n \geq 2.$$

Com este resultado, multiplicando (2.4.10) por x e aplicando $\mathcal{L}$, obtemos:

$$\mathcal{L}[x^2 P_n(x)] = 0, \quad n \geq 3.$$

Continuando desta forma, então, obtemos:

$$\mathcal{L}[x^k P_n(x)] = 0, \quad n \geq k+1.$$

É fácil ver que estes resultados podem ser escritos como

$$(2.4.11) \quad \mathcal{L}[x^k P_n(x)] = 0, \quad 0 \leq k < n, \quad n \geq 1.$$

Agora, de (2.4.10), podemos ver que

$$\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \lambda_{n+1} \mathcal{L}[x^{n-1} P_{n-1}(x)]$$

Portanto

$$\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \lambda_{n+1} \lambda_n \dots \lambda_1 \neq 0,$$

isto é, $\mathcal{L}$ é quase definido, se e somente se, $\lambda_n \neq 0$, $n \geq 1$.

Finalmente, se c_n , $n \geq 1$, e λ_n , $n \geq 1$, são reais, os momentos também serão reais. Obtemos então, da última relação, que $\mathcal{L}$ é positivo definido se, e somente se, $\lambda_n > 0$ para $n \geq 1$. ■

O teorema original considerado por Favard em 1935, tratava somente o caso positivo definido.

Teorema 2.4.4: Se $P_n(x)$ satisfaz a relação de recorrência (2.4.9) com $\lambda_n \neq 0$, para $n \geq 1$, então,

$$(2.4.12) \quad \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(u)}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1}} = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1})^{-1} \frac{P_{n+1}(x)P_n(u) - P_n(x)P_{n+1}(u)}{x - u}.$$

Prova: Multiplicando a relação de recorrência (2.4.10) por $P_n(u)$, temos

$$(2.4.13) \quad xP_n(x)P_n(u) = P_{n+1}(x)P_n(u) + c_{n+1}P_n(x)P_n(u) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(u).$$

Trocando x por u em (2.4.13), encontramos:

$$(2.4.14) \quad uP_n(u)P_n(x) = P_{n+1}(u)P_n(x) + c_{n+1}P_n(u)P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(u)P_n(x).$$

Subtraindo (2.4.13) de (2.4.14), obtemos:

$$(x - u)P_n(x)P_n(u) = P_{n+1}(x)P_n(u) - P_{n+1}(u)P_n(x) - \lambda_{n+1}\{P_n(x)P_{n-1}(u) - P_n(u)P_{n-1}(x)\}.$$

$$\text{Logo, } \frac{P_n(x)P_n(u)}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} = \frac{(x - u)^{-1}}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} \left\{ P_{n+1}(x)P_n(u) - P_{n+1}(u)P_n(x) - \lambda_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(u) - P_n(u)P_{n-1}(x)] \right\}.$$

Para tornar a igualdade acima mais compacta, faremos a substituição

$$F_k(x, u) = P_{k+1}(x)P_k(u) - P_{k+1}(u)P_k(x).$$



Assim,

$$\frac{P_n(x)P_n(u)}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1})^{-1}(x-u)^{-1}\{F_k(x,u) - \lambda_{n+1}F_{k-1}(x,u)\}.$$

Então,

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(u)}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{k+1}} = (x-u)^{-1}\left\{\sum_{k=0}^n (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{k+1})^{-1}[F_k(x,u) - \lambda_{k+1}F_{k-1}(x,u)]\right\}.$$

Notamos que, na soma do lado direito da igualdade, os termos centrais vão se cancelar dois a dois. Desta forma:

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(u)}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{k+1}} = (x-u)^{-1}\{F_{-1}(x,u) + (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1})^{-1}F_n(x,u)\},$$

onde, $F_{-1}(x,u) = P_0(x)P_{-1}(u) - P_0(u)P_{-1}(x) = 0$.

Portanto, segue o resultado. ■

Uma consequência de (2.4.12) (ver Chihara [5]) é:

$$(2.4.15) \quad \sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x)}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}},$$

que é de fácil demonstração.

Um resultado que segue imediatamente de (2.4.15) é:

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0$$

válido para todo x real, sempre que $\mathcal{L}$ for positivo definido.

2.5. Zeros de Polinômios Ortogonais.

Neste item, discutiremos os zeros de polinômios ortogonais que exibem uma certa regularidade quando o funcional de momento é positivo definido. Maiores informações sobre este item podem ser obtidas em Szegö [27, pg. 44] Chihara [5, pg. 26]

Definição: (Conjunto suporte)

Seja $E \subset (-\infty, \infty)$. Um funcional de momento $\mathcal{L}$ é chamado positivo definido em E se $\mathcal{L}[\Pi(x)] > 0$, para todo polinômio $\Pi(x)$ não identicamente nulo e não negativo em E .

O conjunto E é chamado conjunto suporte para $\mathcal{L}$.

Note que, na definição acima, E não é necessariamente um conjunto finito.

Teorema 2.5.1: Seja I um intervalo, o qual é um conjunto suporte para $\mathcal{L}$. Então, os zeros de $P_n(x)$, $n \geq 1$, são todos reais simples e localizados no interior de I .

Prova: Sendo I um conjunto suporte para $\mathcal{L}$, então $\mathcal{L}$ é positivo definido em I . Como $\mathcal{L}[P_n(x)] = 0$, então $P_n(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em I .

Se $x_1, x_2, \dots, x_k$ denotam os zeros distintos de multiplicidade ímpar localizados no interior de I , e se

$$\rho(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k), \quad \text{então,}$$

$\rho(x)P_n(x)$ é um polinômio que não tem zeros de multiplicidade ímpar no interior de I .

Suponhamos que $\rho(x)P_n(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.

Desta forma, $\mathcal{L}[\rho(x)P_n(x)] > 0$, o que contradiz o teorema 2.2.1, exceto para $k \geq n$.

Portanto, $k = n$, ou seja, $P_n(x)$ tem n zeros distintos no interior de I .



Para o caso $p(x)P_n(x) < 0$, a demonstração é idêntica ao que foi feito acima. ■

De agora em diante denotaremos os zeros de $P_n(x)$ por x_{ni} , $i = 1, \dots, n$ e os mesmos serão classificados em ordem crescente

$$x_{n1} < x_{n2} < \dots < x_{nn}, \quad \text{onde } n \geq 1 \text{ é o grau do polinômio.}$$

Teorema 2.5.2: Os zeros de $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$ separam-se mutuamente, isto é,

$$x_{n+1,\ell} < x_{n,\ell} < x_{n+1,\ell+1}, \quad \text{para } \ell = 1, 2, \dots, n.$$

Prova: Da desigualdade $P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0$, temos

$$P'_{n+1}(x_{n+1,\ell})P_n(x_{n+1,\ell}) > 0.$$

Da mesma forma,

$$P'_{n+1}(x_{n+1,\ell+1})P_n(x_{n+1,\ell+1}) > 0.$$

Vamos supor que $P'_{n+1}(x_{n+1,\ell}) > 0$. Então,

$$P_n(x_{n+1,\ell}) > 0.$$

Desde que $P'_{n+1}(x)$ muda de sinal em cada subintervalo $(x_{n+1,\ell}, x_{n+1,\ell+1})$, temos:

$$P_{n+1}(x_{n+1,\ell+1}) < 0.$$

Logo,

$$P_n(x_{n+1,\ell}) > 0 \quad \text{e} \quad P_n(x_{n+1,\ell+1}) < 0.$$

Então, $P_n(x)$ muda de sinal em cada subintervalo $[x_{n+1,\ell}, x_{n+1,\ell+1}]$.

Portanto, entre dois zeros de $P_{n+1}(x)$ existe um zero de $P_n(x)$.

Com raciocínio análogo, mostra-se o caso em que

$$P'_{n+1}(x_{n+1,l}) < 0. \quad \blacksquare$$

Uma consequência deste resultado (ver [5]) é:

Para cada $k \geq 1$,

$\{x_{n,k}\}_{n=k}^{\infty}$ é uma sequência decrescente

e

$\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ é uma sequência crescente.

Em particular os limites:

$$\xi_l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nl} \quad \text{e} \quad \eta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n-j+1},$$

existem, pelo menos no sistema de números reais estendido.

Definição: O intervalo $[\xi_1, \eta_1]$, é chamado intervalo verdadeiro de ortogonalidade para o SPO em relação a $\mathcal{L}$.

Segundo Chihara [5, pg. 29], este é o menor intervalo que contém em seu interior todos os zeros de todos os $P_n(x)$ e forma um conjunto suporte para $\mathcal{L}$. O intervalo $[\xi_1, \eta_1]$ é também chamado, por Jacob Sherman (ver [21] pg. 70), de intervalo não redutível.

Notemos que o extremo inferior deste intervalo é o limite da menor raiz de $P_n(x)$, e o extremo superior é o limite da maior raiz de $P_n(x)$, quando n cresce indefinidamente.

CAPÍTULO III

FRAÇÕES CONTÍNUAS E SUAS RELAÇÕES COM POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Neste capítulo, faremos um estudo das frações contínuas, definições, suas propriedades mais importantes e a relação entre elas e os polinômios ortogonais.

3.1. Definição e notações

Uma **fração contínua** é uma expressão da forma:

$$(3.1.1) \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}$$

onde os a_i e b_j são números reais ou complexos, para $i=1,2,\dots$ e $j = 0,1,2,\dots$.

Maiores informações sobre frações contínuas podem ser encontradas, por exemplo em Jones e Thron [17].

Por questão de espaço, será usada, para representar frações contínuas, a seguinte notação:

$$(3.1.2) \quad b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \dots$$

Consideremos a sequência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= b_0, \\
 C_1 &= b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right|, \\
 C_2 &= b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right|, \\
 (3.1.3) \quad &\vdots \qquad \qquad \vdots \\
 C_n &= b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right|, \\
 &\vdots \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}$$

Definiremos C_n como sendo a n -ésima convergente da fração contínua dada por (3.1.2). O limite da sequência $\{C_n\}$, quando existe, é chamado o valor da fração contínua.

3.2. Propriedades básicas de frações contínuas.

Em (3.1.3) escrevemos $C_n = A_n/B_n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$,

onde:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= b_0; & B_0 &= 1, \\
 A_1 &= b_0 b_1 + a_1; & B_1 &= b_1, \\
 A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2; & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned}$$

Notamos que, por exemplo, $A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0$ e $B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0$. Na verdade, temos o seguinte resultado importante.

Teorema 3.2.1: Sejam $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ duas sequências tais que

$$\begin{aligned}
 (3.2.1) \quad &A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\
 &B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2},
 \end{aligned}
 \quad n \geq 1, \text{ com } A_{-1} = 1, B_{-1} = 0.$$



Então, a n -ésima convergente, C_n , da fração contínua dada acima satisfaz $C_n = A_n/B_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Prova: Vamos mostrar este resultado usando indução.

Para $n = 1$, o resultado é verdadeiro, pois

$$A_1 = b_0 b_1 + 1 \cdot a_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1},$$

e,

$$B_1 = b_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1}.$$

Suponhamos verdadeiro para $n \leq k$, e mostremos que é verdadeiro para $n = k+1$.

De fato, $C_{k+1} = A_{k+1}/B_{k+1}$ é exatamente C_k substituindo b_k por $(b_k + a_{k+1}/b_{k+1})$.

Logo,

$$C_{k+1} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} = \frac{\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) A_{k-1} + a_k A_{k-2}}{\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) B_{k-1} + a_k B_{k-2}} =$$

$$= \frac{\frac{b_k b_{k+1} A_{k-1} + a_{k+1} A_{k-1} + a_k b_{k+1} A_{k-2}}{b_{k+1}}}{\frac{b_k b_{k+1} B_{k-1} + a_{k+1} B_{k-1} + a_k b_{k+1} B_{k-2}}{b_{k+1}}} = \frac{b_{k+1} A_k + a_{k+1} A_{k-1}}{b_{k+1} B_k + a_{k+1} B_{k-1}}. \blacksquare$$

Chamaremos A_n de n -ésimo numerador parcial, e B_n de n -ésimo denominador parcial da fração contínua.

Enunciaremos, abaixo, duas relações que decorrem da fórmula de recorrência (3.2.1). Ambas são fáceis de serem verificadas.



$$a) \quad A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n, \text{ para } n \geq 1.$$

(3.2.2)

$$b) \quad \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \dots a_k}{B_k B_{k-1}},$$

desde que, $b_i \neq 0$ e $B_i \neq 0$, para $1 \leq i \leq n$.

A relação (a) acima é conhecida como fórmula do determinante (ver Wall [30] pg. 15), pois

$$\begin{vmatrix} A_n & B_n \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{vmatrix} = A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1}.$$

Duas frações contínuas

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1} + \cfrac{a_2}{b_2} + \dots$$

e

$$b_0^* + \cfrac{a_1^*}{b_1^*} + \cfrac{a_2^*}{b_2^*} + \dots,$$

são chamadas "frações contínuas equivalentes", se existe uma sequência $\{r_n\}$ de números diferentes de zero, com $r_0 = 1$, tal que

$$a_n^* = r_n r_{n-1} a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n^* = r_n b_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Se A_n/B_n e A_n^*/B_n^* são as respectivas convergentes das frações contínuas dadas acima, então, podemos mostrar por indução que:

$$A_n^* = r_0 r_1 \dots r_n A_n$$

e

$$B_n^* = r_0 r_1 \dots r_n B_n,$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2: Frações contínuas equivalentes têm a mesma sequência de convergentes.

3.3. Propriedades de convergência

Os resultados deste item serão usados no capítulo IV e V quando estudaremos sequências encadeadas.

Teorema 3.3.1: Se $m_0 = 0$ então, o n -ésimo denominador parcial da fração contínua

$$1 - \left| \frac{1}{1} \right| - \left| \frac{(1 - m_0)m_1}{1} \right| - \left| \frac{(1 - m_1)m_2}{1} \right| - \dots \text{ é}$$

$$(3.3.1) \quad B_n = (1 - m_0)(1 - m_1)\dots(1 - m_{n-1}).$$

Prova: Para $n = 1$ o resultado é verdadeiro, pois $B_1 = 1 - 0 = 1 - m_0$.

Suponhamos verdadeiro para $n \leq k$. Para $n = k+1$ temos

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= b_{k+1} B_k + a_{k+1} B_{k-1} \\ &= 1 \cdot (1 - m_0)(1 - m_1)\dots(1 - m_{k-1}) - (1 - m_{k-1})m_k [(1 - m_0)(1 - m_1)\dots(1 - m_{k-2})]. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } B_{k+1} = (1 - m_0)(1 - m_1)\dots(1 - m_{k-1})(1 - m_k). \quad \blacksquare$$

Teorema 3.3.2: Se $\alpha_n = (1 - m_{n-1})m_n$ onde $m_0 = 0$, $0 < m_n < 1$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Então, a fração contínua

$$(3.3.2) \quad 1 - \left| \frac{\alpha_1}{1} \right| - \left| \frac{\alpha_2}{1} \right| - \dots$$



converge para $\frac{1}{1+L}$, onde $L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \dots m_n}{(1-m_1)(1-m_2)(1-m_n)}$.

Prova: Se A_n/B_n denota a n -ésima convergente da fração contínua (3.3.2), e se

$$\frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*} = 1 - \frac{1}{\frac{A_n}{B_n}} = 1 - \left| \frac{1}{1} \right| - \left| \frac{\alpha_1}{1} \right| - \left| \frac{\alpha_2}{1} \right| - \dots - \left| \frac{\alpha_n}{1} \right|,$$

então, pelo teorema 3.3.1, $B_{n+1}^* = (1-m_0)(1-m_1)\dots(1-m_n) > 0$.

Da relação (3.2.2) temos

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} (1)(-\alpha_1)\dots(-\alpha_{k-1})}{B_k^* B_{k-1}^*} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}{(1-m_0)^2 (1-m_1)^2 \dots (1-m_{k-2})^2 (1-m_{k-1})} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{m_1 m_2 \dots m_k}{(1-m_1)\dots(1-m_{k-1})(1-m_k)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*}} = \frac{1}{1+L}. \quad \blacksquare$$

A série infinita representada por L pode convergir ou não. Caso ela não seja convergente o valor de $1/(1+L)$ é simplesmente zero. Isto é, a fração contínua converge para zero.

Obs.: A série representada por L , se não for convergente, diverge para ∞ . Neste caso escrevemos $L = \infty$. No espaço de números reais estendido, infinito é tratado como qualquer outro ponto.



Teorema 3.3.3: Seja $\beta_n = (1 - g_{n-1})g_n$ onde $0 \leq g_0 \leq 1$ e $0 < g_n < 1$, para $n \geq 1$, então,

$$(3.3.3) \quad 1 - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{1} - \frac{\beta_3}{1} - \dots - \frac{\beta_n}{1} \dots = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}, \text{ onde:}$$

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \dots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\dots(1-g_n)}.$$

Prova: O caso $g_0 = 0$ é dado pelo teorema 3.3.2, onde $L = G$.

Suponhamos que $g_0 > 0$. Se C_n denota a n -ésima convergente da fração contínua (3.3.3), e C_n^* denota a n -ésima convergente da fração contínua

$$1 - \frac{g_0}{1} - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{1} - \dots,$$

então C_n^* converge para $1/(1+K)$, onde:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0 g_1 \dots g_{n-1}}{(1-g_0)(1-g_1)\dots(1-g_{n-1})} = \frac{g_0}{1-g_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0 g_1 \dots g_n}{(1-g_0)(1-g_1)\dots(1-g_n)} \\ &= \frac{g_0}{1-g_0} + \frac{g_0}{1-g_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \dots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\dots(1-g_n)} = \frac{g_0}{1-g_0} (1+G). \end{aligned}$$

Desde que $C_n = \frac{-g_0}{C_{n+1}^* - 1}$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = g_0 + \frac{g_0}{K} = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G} \quad \blacksquare$$



3.4. Frações de Jacobi e polinômios ortogonais

Na fração contínua (3.1.2) se substituirmos:

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \lambda_1 \neq 0,$$

e

$$a_{n+1} = -\lambda_{n+1} \neq 0; \quad b_n = x - c_n, \text{ para } n \geq 1,$$

obtemos a fração contínua

$$(3.4.1) \quad \left| \frac{\lambda_1}{x-c_1} \right| - \left| \frac{\lambda_2}{x-c_2} \right| - \left| \frac{\lambda_3}{x-c_3} \right| - \dots,$$

cujos n-ésimos denominadores parciais, $B_n = P_n(x)$, satisfazem

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), & n = 1, 2, \dots \\ P_{-1}(x) = 0 & e & P_0(x) = 1, \end{cases}$$

e os n-ésimos numeradores parciais, $A_n = A_n(x)$, satisfazem

$$(3.4.3) \quad \begin{cases} A_n(x) = (x - c_n)A_{n-1}(x) - \lambda_n A_{n-2}(x) & n = 2, 3, \dots \\ A_{-1}(x) = 1, & A_0(x) = 0 & e & A_1(x) = \lambda_1. \end{cases}$$

É bastante simples mostrar que $\lambda_1^{-1} A_n(x)$ é um polinômio mônico de grau $n-1$. Denotaremos

$$\lambda_1^{-1} A_n(x) = P_{n-1}^{(1)}(x).$$

Desta forma, $P_{n-1}^{(1)}(x)$ e $P_n(x)$ satisfazem a relação de recorrência de três termos (2.4.1) (ver capítulo II - fórmula de recorrência). Portanto, pelo teorema de Favard as sequências de



polinômios $\{P_n(x)\}$ e $\{P_n^{(1)}(x)\}$ formam sequências de polinômios ortogonais mônicos com relação aos funcionais de momentos quase definidos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^1$, respectivamente, que são positivos definidos se os c_n são reais e os λ_n são positivos.

Para os polinômios $\{P_n^{(1)}(x)\}$ a relação de recorrência (2.4.1) é obtida das sequências deslocadas $\{c_n^{(1)}\} = \{c_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\lambda_n^{(1)}\} = \{\lambda_{n+1}\}_{n=2}^{\infty}$.

Definição: Os polinômios $P_n^{(1)}(x)$ são chamados polinômios numerador mônicos, correspondente a $\{P_n(x)\}$. Usaremos aqui, o mesmo termo usado por Chihara [5] numerador SPO mônico.

Da relação (3.2.2) item (a), temos

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}^{(1)}(x) - P_n^{(1)}(x)P_n(x) = -\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{n+1}.$$

Como no capítulo anterior, denotamos os zeros de $P_n(x)$ por $x_{n1} < x_{n2} < \ldots < x_{nn}$. Agora, se os zeros de $P_n^{(1)}(x)$ são denotados por

$$x_{n1}^{(1)} < x_{n2}^{(1)} < \ldots < x_{nn}^{(1)},$$

temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1: Entre dois zeros de $P_n(x)$ existe um zero de $P_n^{(1)}(x)$. Isto é,

$$x_{n+1,k} < x_{n,k}^{(1)} < x_{n+1,k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

A prova deste teorema é idêntica àquela do teorema 2.5.2 (ver capítulo II - zeros de polinômios ortogonais).



Corolário 3.4.1: Se $[\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}]$ é o intervalo verdadeiro de ortogonalidade para $\mathcal{L}^1$ então,

(i) $[\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}] \subset [\xi_1, \eta_1]$, onde $[\xi_1, \eta_1]$ é o intervalo verdadeiro de ortogonalidade para $\mathcal{L}$,

(ii) Se $\xi_1 < \xi_1^{(1)}$ (ou $\eta_1 > \eta_1^{(1)}$) então, para todo n suficientemente grande, $P_n(x)$ tem exatamente um zero em $(\xi_1, \xi_1^{(1)})$ (ou $(\eta_1, \eta_1^{(1)})$).

Prova: (i) Basta mostrarmos que $\xi_1 \geq \xi_1^{(1)}$ e $\eta_1^{(1)} \leq \eta_1$.

Do teorema 3.4.1, $x_{n+1,1} < x_{n,1}^{(1)}$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Então, para $i = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1,1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1}^{(1)}.$$

Logo, $\xi_1 \leq \xi_1^{(1)}$.

O caso $\eta_1^{(1)} \leq \eta_1$ é análogo. Portanto, $[\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}] \subset [\xi_1, \eta_1]$.

(ii) Temos, da parte (i) e do teorema 3.4.1, que

$$\xi_1 \leq x_{n+1,1} < x_{n,1}^{(1)}. \text{ Então,}$$

$$\xi_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1,1} \leq \xi_1^{(1)}.$$

Logo, para n suficientemente grande, $P_n(x)$ tem pelo menos um zero entre ξ_1 e $\xi_1^{(1)}$. Vamos supor que existam dois zeros $x_{n,1}$ e $x_{n,2}$ entre ξ_1 e $\xi_1^{(1)}$. Então,

$$\xi_1 \leq x_{n,1} < x_{n-1,1}^{(1)} < x_{n,2} \leq \xi_1^{(1)}.$$

Porém, isso não ocorre, pois $\xi_1^{(1)}$ é uma cota inferior para $x_{n,1}^{(1)}$. Portanto, $P_n(x)$ tem exatamente um zero entre $(\xi_1, \xi_1^{(1)})$.

Analogamente, mostra-se que $P_n(x)$ tem exatamente um zero entre $(\eta_1^{(1)}, \eta_1)$. ■



CAPÍTULO IV

SEQUÊNCIAS ENCADEADAS

As sequências **encadeadas** apareceram, primeiramente, segundo Chihara (ver [8]) nos estudos de certas frações contínuas e cuja teoria formal foi desenvolvida por Wall [30]. Nosso maior interesse no estudo das sequências encadeadas consiste das aplicações no estudo de polinômios ortogonais e polinômios similares aos ortogonais.

4.1. Definições e teoremas

Definição: Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada sequência **encadeada** se existe uma outra sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, tal que

$$(i) \quad 0 \leq g_0 < 1 \text{ e } 0 < g_n < 1, \text{ para } n \geq 1$$

$$(ii) \quad a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \text{ para } n \geq 1.$$

A sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada sequência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, e g_0 é o parâmetro inicial.

Não é difícil construir exemplos de sequências encadeadas. Geralmente é mais difícil decidir se uma sequência dada é ou não uma sequência encadeada.

A sequência constante $\{1/4\}$ é uma sequência encadeada, com sequência de parâmetros $\{k/\{2(k+1)\}\}$.

É fácil mostrar que $\{1/2\}$ também é uma sequência de parâmetros



para a sequência $\{1/4\}$.

Desse exemplo, vemos que uma sequência encadeada nem sempre determina seus parâmetros unicamente. A maioria das sequências encadeadas possui mais de uma sequência de parâmetros.

Teorema 4.1.1: Sejam $\{a_n\}$ uma sequência encadeada e $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$ duas sequências de parâmetros para $\{a_n\}$. Então,

$$g_k < h_k \text{ para } k \geq 1 \text{ se, e somente se, } g_0 < h_0.$$

Prova: Temos $a_k = (1 - g_{k-1})g_k = (1 - h_{k-1})h_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Então,

$$\frac{g_k}{h_k} = \frac{1 - h_{k-1}}{1 - g_{k-1}} \quad \text{e} \quad \frac{g_{k+1}}{h_{k+1}} = \frac{1 - h_k}{1 - g_k}.$$

Dessas relações, podemos observar que se $g_k < h_k$, então,

$$g_{k-1} < h_{k-1} \quad \text{e} \quad g_{k+1} < h_{k+1}.$$

Portanto, segue o resultado do teorema. ■

Teorema 4.1.2: Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Se $\{a_n\}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 satisfazendo $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma correspondente sequência de parâmetros $\{h_k\}$.

Prova: Se $h_0 < g_0$ então, $a_1/(1-h_0) < a_1/(1-g_0) = g_1$.

Seja $h_1 = a_1/(1-h_0)$. Daí, segue que $a_1 = (1 - h_0)h_1$, com $h_1 < g_1$.

Suponhamos que, para $k \leq n$, $a_k = (1 - h_{k-1})h_k$, com $h_k < g_k$.

Sendo $h_k < g_k$ então, $a_{k+1}/(1-h_k) < a_{k+1}/(1-g_k) = g_{k+1}$.

Tomando $h_{k+1} = a_{k+1}/(1-h_k)$, segue que $a_{k+1} = (1 - h_k)h_{k+1}$, com

$$h_{k+1} < g_{k+1} < 1.$$

Portanto, $\{h_k\}$ é uma correspondente sequência de parâmetros para $\{a_n\}$. ■



O teorema 4.1.2 acima, nos diz que se o parâmetro inicial de uma sequência de parâmetros for positivo, então, sempre é possível obter uma outra sequência de parâmetros. Isto nos motiva a definir sequência de parâmetros minimal e maximal.

Definição: Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Então, $\{m_k\}$ é chamada sequência de parâmetros minimal para $\{a_n\}$ se $m_0 = 0$.

Definição: Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Então, $\{M_k\}$ é chamada sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$ se, $M_k > g_k$ ($k \geq 0$), para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$.

Teorema 4.1.3: Toda sequência encadeada possui uma sequência de parâmetros maximal.

Prova: Se $\{a_n\}$ determina seus parâmetros unicamente então, sua sequência de parâmetros minimal é também sua sequência de parâmetros maximal.

Por outro lado, se M_0 denota o menor limite superior para o conjunto de todos os parâmetros iniciais então, $0 < M_0 \leq 1$.

Agora, para cada x tal que $0 \leq x < M_0$, existe uma sequência de parâmetros $\{g_k(x)\}$ tal que $g_0(x) = x$ e, para cada valor de k fixo, $g_k(x)$ será uma função crescente, pois,

se $x_1 < x_2$ então,

$g_0(x_1) = x_1 < x_2 = g_0(x_2)$ e, portanto, pelo teorema 4.1.1,

$g_k(x_1) < g_k(x_2)$, para $k \geq 1$.

Como $g_k(x)$ é uma função crescente e limitada (certamente por 1)



definimos

$$M_n = \lim_{x \rightarrow M_0^-} g_n(x).$$

Como $a_{n+1} = (1 - g_n(x))g_{n+1}(x)$, então,

$$a_{n+1} = \lim_{x \rightarrow M_0^-} (1 - g_n(x)) \lim_{x \rightarrow M_0^-} g_{n+1}(x).$$

Logo, $a_{n+1} = (1 - M_n)M_{n+1}$ e $0 < M_n < 1$, pois se M_n fosse igual a 1 teríamos $a_n = 0$, e $\{a_n\}$ não seria uma sequência encadeada.

Portanto, $\{M_k\}$ é uma sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$. ■

Até o final deste capítulo $\{a_n\}$ denotará uma sequência encadeada, $\{m_k\}$ e $\{M_k\}$, denotarão, respectivamente, suas sequências de parâmetros minimal e maximal. Também usaremos a notação $b_n^{(k)} = b_{n+k}$, onde $\{b_n\}$ é uma sequência qualquer.

Teorema 4.1.4: (i) $\{a_n^{(1)}\}$ é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{g_k^{(1)}\}$, onde $\{g_k\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}$;

(ii) Se $\{m_{1k}\}$ denota a sequência de parâmetros minimal para $\{a_n^{(1)}\}$, então $m_{1k} < m_k^{(1)}$;

(iii) $\{M_k^{(1)}\}$ é a sequência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(1)}\}$.

Prova: (i) $a_n^{(1)} = a_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1} = (1 - g_{n-1}^{(1)})g_n^{(1)}$, para $n \geq 1$.

Portanto, $\{g_k^{(1)}\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n^{(1)}\}$.

(ii) Desde que $m_{10} = 0 < m_1 = m_0^{(1)}$ então, pelo teorema 4.1.1,

$$m_{1k} < m_k^{(1)} \quad (k \geq 0).$$

(iii) Consideremos $\{M'_k\}$ a sequência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(1)}\}$. Desde que $\{M_k^{(1)}\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n^{(1)}\}$ (item i), temos $0 < M_0^{(1)} \leq M'_0$.



Logo, $(1 - M_0)M_1 \leq (1 - M_0)M'_0$. Então existe $M^* \geq M_0$, tal que

$$(4.1.1) \quad (1 - M^*)M'_0 = (1 - M_0)M_1 = a_1.$$

Daí, $\{M^*, M'_0, M'_1, M'_2, \dots\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}$. Isto é absurdo, pois sendo $\{M_k\}$ a sequência de parâmetros maximal, não pode ocorrer $M^* \geq M_0$, a menos que $M^* = M_0$. Neste caso, temos também que $M'_k = M_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Portanto, $\{M_k^{(1)}\}$ é uma sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$. ■

Teorema 4.1.5: Seja $\{b_n\}$ uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{h_k\}$. Se

$$(4.1.2) \quad a_n \leq b_n \quad \text{para} \quad n \geq 1,$$

então,

$$m_k \leq h_k \leq M_k, \quad \text{para} \quad k \geq 0.$$

Prova: Se $a_1 \leq b_1 = (1 - h_0)h_1$, então, existe um $g_1 \leq h_1$, tal que

$$a_1 = (1 - h_0)g_1, \quad 0 < g_1 \leq h_1.$$

Suponhamos que $g_0 (=h_0), g_1, g_2, \dots, g_n$ existam e são tais que

$$a_k = (1 - g_{k-1})g_k, \quad 0 < g_k \leq h_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo,

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} = (1 - h_n)h_{n+1} \leq (1 - g_n)h_{n+1}.$$

Assim, existe $g_{n+1} \leq h_{n+1}$, tal que

$$a_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1}, \quad 0 < g_{n+1} \leq h_{n+1}.$$

Logo, $\{a_n\}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$, tal que



$$g_0 = h_0, \text{ e}$$

$$0 < g_n \leq h_n, \text{ para } n \geq 1.$$

Desde que $m_0 = 0 \leq g_0 \leq h_0$, temos, pelo teorema 4.1.1, que $m_k \leq h_k$ para todo $k \geq 1$. Temos ainda que $M_0 \geq h_0$ e, pelo teorema 4.1.1,

$$h_k = h_0^{(k)} \leq M_0^{(k)} = M_k, \text{ para } k \geq 1.$$

Portanto, $m_k \leq h_k \leq M_k$. ■

Corolário 4.1.1: Se para algum $n = N \geq 1$, temos, de (4.1.2) que

$$a_N < b_N$$

então,

$$m_k < h_k, \text{ para } k \geq N \quad \text{e} \quad h_k < M_k, \text{ para } 0 \leq k \leq N.$$

Prova: Como $a_N < b_N = (1 - h_{N-1})h_N \leq (1 - g_{N-1})h_N$, onde $0 < g_{N-1} \leq h_{N-1}$, existe g_N com $0 < g_N < h_N$, tal que

$$a_N = (1 - g_{N-1})g_N.$$

Logo, $m_k \leq g_k < h_k$, para $k \geq N$.

Por outro lado, vamos supor que, para $\ell < N$ temos, $h_\ell = M_\ell$.

Pelo teorema 4.1.5, $a_{\ell+1} \leq b_{\ell+1} = (1 - h_\ell)h_{\ell+1} = (1 - M_\ell)h_{\ell+1}$.

Então, existe $g_{\ell+1} \leq h_{\ell+1}$, tal que

$$a_{\ell+1} = (1 - M_\ell)g_{\ell+1}.$$



Desde que $a_{\ell+1} = (1 - M_{\ell})M_{\ell+1}$, temos $g_{\ell+1} = M_{\ell+1}$.

Assim, $M_{\ell+1} = g_{\ell+1} \leq h_{\ell+1} \leq M_{\ell+1}$. Isto é, $M_{\ell+1} = h_{\ell+1}$.

Logo, $a_{\ell+1} = b_{\ell+1}$.

Portanto, por indução, mostramos que $M_k = h_k$. Segue, então, que $a_k = b_k$ para $k = \ell, \ell+1, \dots$.

Logo, $a_N = b_N$. Absurdo, pois pela hipótese de indução $a_N < b_N$.

Desta forma, $h_k < M_k$ também para $0 \leq k < N$. ■

Este resultado indica que, se $\{a_n\}$ é dominada por uma segunda sequência encadeada, então $\{a_n\}$ não pode determinar seus parâmetros unicamente.

Teorema 4.1.6: Se $\{a_n\}$ é não decrescente, então $\{m_k\}$ é estritamente crescente, e $\{M_k\}$ é não crescente.

Prova: Pelo teorema 4.1.4, $m_{1k} < m_k^{(1)}$, onde $\{m_{1k}\}$ denota a sequência de parâmetros minimal para $\{a_n^{(1)}\}$. Ainda, pelo teorema 4.1.4, $\{M_k^{(1)}\}$ é a sequência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(1)}\}$.

Sendo $a_n \leq a_n^{(1)}$, pelo teorema 4.1.5,

$$m_k \leq m_{1k} \quad \text{e} \quad M_k^{(1)} \leq M_k.$$

Então,

$$m_k \leq m_{1k} < m_k^{(1)} \quad \text{e} \quad M_{k+1} \leq M_k.$$

Portanto, $m_k < m_{k+1}$ e $M_{k+1} \leq M_k$. ■

Seja $a_n = 1/4$ para todo $n \geq 1$. Como a sequência $\{a_n\}$ é não decrescente, pelo teorema 4.1.6 temos

$$1/4 = (1 - M_{k-1})M_k \leq (1 - M_k)M_k \leq 1/4.$$

Isto é,

$$1/4 = (1 - M_k)M_k, \text{ então } M_k = 1/2. \quad \blacksquare$$

Por outro lado, se $a_n \geq 1/4$ para $n \geq N$, e $\{g_k\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}$, pelos teoremas 4.1.4 e 4.1.5, temos

$$\frac{k}{2(k+1)} \leq g_k \leq \frac{1}{2}.$$

Então, $1/2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq 1/2$. Segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/4$.

Desta forma, vemos que, se $b_n > 1/4$ para $n \geq N$, $\{b_n\}$ não é uma sequência encadeada.

Teorema 4.1.7: Se $0 < c_n \leq a_n$ para $n \geq 1$, então $\{c_n\}$ é também uma sequência encadeada.

Prova: Definindo $h_0 = 0$ e $h_1 = c_1$, temos

$$c_1 = (1 - h_0)h_1, \text{ com } 0 < h_1 \leq a_1 = m_1.$$

Suponhamos que $c_k = (1 - h_{k-1})h_k$, com $0 < h_k \leq m_k$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Se $c_{k+1} \leq a_{k+1} = (1 - m_k)m_{k+1} \leq (1 - h_k)m_{k+1}$, então, existe h_{k+1} satisfazendo,

$$0 < h_{k+1} \leq m_{k+1}, \text{ tal que } c_{k+1} = (1 - h_k)h_{k+1}.$$

Portanto, $\{c_n\}$ é uma sequência encadeada. $\blacksquare$

Este teorema é conhecido como teste de comparação, pois conhecendo-se uma sequência encadeada, é possível saber se uma outra sequência dada é encadeada por comparação de seus termos.

4.2. Alguns resultados assintóticos.

Seja



$$(4.2.1) \quad P_k = 1 - \left| \frac{a_1^{(k)}}{1} \right| - \left| \frac{a_2^{(k)}}{1} \right| - \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Então, pelo teorema 3.3.2, temos $P_k = \frac{1}{1 + L_k}$,

onde

$$L_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{k1} m_{k2} \dots m_{kn}}{(1-m_{k1})(1-m_{k2}) \dots (1-m_{kn})}.$$

Logo, $0 \leq P_k < 1$. Temos também que,

$$P_k = 1 - \left| \frac{a_1^{(k)}}{P_{k+1}} \right| = 1 - \frac{a_{k+1}}{P_{k+1}}.$$

Aqui $P_{k+1} \neq 0$, portanto obtemos:

$$a_{k+1} = (1 - P_k)P_{k+1}, \quad \text{com } 0 < P_k < 1,$$

isto é, $\{P_k\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}$.

Teorema 4.2.1: $\{P_k\}$ definido por (4.2.1) é uma sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$.

Prova: Seja $\{g_k\}$ uma sequência de parâmetros qualquer para $\{a_n\}$.

Então, pelo teorema 3.3.3,

$$(4.2.2a) \quad P_0 = g_0 + (1 - g_0)(1 + G)^{-1},$$

onde

$$(4.2.2b) \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \dots g_n}{(1-g_1)(1-g_2) \dots (1-g_n)}.$$

Logo, $P_0 \geq g_0$ e, pelo teorema 4.1.1, $P_k \geq g_k$, para todo $k \geq 1$.

Portanto, $\{P_k\}$ é uma sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$. ■

Teorema 4.2.2: Uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ é uma sequência de parâmetros maximal para a sequência encadeada $\{a_n\}$ se, e somente se, $G = \infty$.

Prova: Pelo teorema 4.2.1, P_0 é um parâmetro inicial máximo. Portanto, da relação (4.2.2), temos

$$P_0 = g_0 \text{ se, e somente se } G = \infty. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.2.3: Se $\{g_n\}$ não é a sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$ então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{g_n} = 1.$$

Prova: Temos que $a_n = (1 - m_{n-1})m_n = (1 - g_{n-1})g_n$, então,

$$g_n - m_n = g_n g_{n-1} - m_n m_{n-1}.$$

Somando e subtraindo $g_n m_{n-1}$ do lado direito da última igualdade, e fazendo $d_n = g_n - m_n$ temos:

$$d_n = g_n d_{n-1} + m_{n-1} d_n.$$

Logo,

$$d_n = \frac{g_n d_{n-1}}{1 - m_{n-1}} = \frac{g_n g_{n-1} \cdots g_0}{(1 - m_{n-1})(1 - m_{n-2}) \cdots (1 - m_0)} = g_n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{(1 - m_k)}.$$

Assim

$$0 \leq 1 - \frac{m_n}{g_n} = \frac{1}{g_n} (g_n - m_n) = \frac{1}{g_n} d_n = \frac{1}{g_n} \frac{g_n g_{n-1} \cdots g_0}{(1 - m_{n-1})(1 - m_{n-2}) \cdots (1 - m_0)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{(1 - m_k)} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{(1 - g_k)}.$$



Se $\{g_k\}$ não é sequência de parâmetros maximal, pelo teorema 4.2.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{(1-g_k)} = 0.$$

Segue que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m_n}{g_n}\right) \leq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{g_n} = 1. \quad \blacksquare$$

Exemplo: Seja $a_n = a$, para $n \geq 1$ e $0 < a \leq \frac{1}{4}$. Então, $\{a_n\}$ tem sequências de parâmetros

$$g_k = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 4a}]$$

(4.2.3) e

$$h_k = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 4a}].$$

De fato, seja $\{\ell\}$ uma sequência de parâmetros para a sequência encadeada constante $\{a\}$, então, $a = (1 - \ell)\ell$.

$$\text{Portanto, } \ell = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

É fácil verificar, pelo teorema 4.2.2, que $\{h_k\}$, dado por (4.2.3), é a sequência de parâmetros maximal para a sequência constante $\{a\}$.

Vemos também que, como $\{g_k\}$ dado por (4.2.3) não é a sequência de



parâmetros maximal, então, pelo teorema 4.2.3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{g_n} = 1. \text{ Logo, } \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 4a}].$$

$$\text{Portanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 4a}].$$

Teorema 4.2.4: Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Então,

$$0 \leq a \leq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 4a}].$$

Contudo, se $M_0 > 0$ (isto é, $m_n \neq M_n$), $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 4a}]$.

Prova: Suponhamos que $a > \frac{1}{4}$. Então, existe um número N tal que $a_n \geq a' > \frac{1}{4}$, para $n \geq N$. Segue que $\{a_n\}$ não é uma sequência encadeada. Portanto,

$$0 \leq a \leq \frac{1}{4}.$$

Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 4a}]$ vamos primeiramente supor que $0 < a < \frac{1}{4}$. Escolhemos $\epsilon > 0$, tal que

$$0 < a - \epsilon < a + \epsilon < \frac{1}{4}.$$

Então, existe $k = k(\epsilon)$ tal que

$$(4.2.4) \quad a - \epsilon < a_n^{(k)} < a + \epsilon, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se $\{m'_n\}$ e $\{M'_n\}$ denotam, respectivamente, as sequências de parâmetros minimal e maximal para a sequência $\{a - \epsilon\}$ e se $\{m''_n\}$ e $\{M''_n\}$ denotam, respectivamente, as sequências de parâmetros minimal e maximal para a sequência $\{a + \epsilon\}$, pelo teorema 4.1.5 e a relação

(4.2.4), temos

$$(4.2.5) \quad m'_n \leq m_{kn} \leq m_n^{(k)} \quad \text{e} \quad M_n^{(k)} \leq M'_n.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1-4(a+\varepsilon)}] \leq M_n^{(k)} \leq \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1-4(a-\varepsilon)}] \text{ e,}$$

$$\frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-4(a-\varepsilon)}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_{kn} \text{ e } \limsup_{n \rightarrow \infty} m_{nk} \leq \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-4(a+\varepsilon)}].$$

Desde que são válidas para arbitrários $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{kn} = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-4a}] \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1-4a}].$$

Se $M_0 > 0$, $\{m_n\}$ não é sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$ e, portanto, $\{m_n^{(k)}\}$ não é sequência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(k)}\}$.

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n^{(k)}}{m_n} = 1 \text{ e, portanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-4a}].$$

Para o caso $a = 0$, substituímos $a - \varepsilon$ por 0 em (4.2.4) e usamos as desigualdades $0 < m_{kn} < m_n^{(k)}$ e $M_n^{(k)} < 1$. Desta forma, temos

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} m_{kn} \leq \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-4\varepsilon}] \text{ e,}$$

$$\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1-4\varepsilon}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{(k)} \leq 1.$$

Finalmente, para o caso $a = \frac{1}{4}$, precisamos somente da desigualdade



$$\frac{1}{4} - \varepsilon < a_n^{(k)}$$

que, juntamente com o teorema 4.1.5, determinam

$$m'_n \leq m_n^{(k)} \leq M_n^{(k)} \leq \frac{1}{2}[1 + \sqrt{4\varepsilon}].$$

Desde que $m'_n = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{4\varepsilon}]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

4.3. Sequências Periódicas

Neste item consideremos alguns resultados sobre sequências encadeadas que são periódicas.

Teorema 4.3.1: Se $\{a_n\}$ é periódica com período p então $\{M_k\}$ também é periódica com período p , enquanto $\{m_k\}$ é quase periódica no sentido que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{np+k} = \mu_k, \text{ para } k = 0, 1, \dots, p-1.$$

Prova: Se $\{a_n^{(p)}\} = \{a_n\}$, então, $\{M_k^{(p)}\}$ é uma sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$. Portanto, $\{M_k^{(p)}\} = \{M_k\}$.

Contudo, $\{m_k^{(p)}\}$ não é sequência de parâmetros minimal para $\{a_n\}$. Logo, $m_k < m_k^{(p)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Segue, então, que $\{m_{np+k}\}$ é uma sequência crescente e limitada (certamente por 1).

Portanto, existe μ_k tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{np+k} = \mu_k, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \quad \blacksquare$$

Uma condição necessária e também suficiente para que uma sequência periódica, $\{b_n\}$, com período p , seja uma sequência encadeada (ver



Chihara [5]) é que o sistema de equações

$$b_k = (1 - x_{k-1})x_k, \text{ para } k = 1, 2, \dots, p$$

tenha uma solução $(x_0, x_1, \dots, x_p)$, tal que

$$x_0 = x_p,$$

$$\text{e } 0 < x_i < 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p.$$

Em particular, se $p = 2$ temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.2: Seja $\{b_n\}$ periódica com período 2, e $b_n > 0$. Então, $\{b_n\}$ é uma sequência encadeada se, e somente se,

$$(4.3.1) \quad \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} \leq 1.$$

Contudo $\mu_i < M_i$, $i = 1, 2$ se, e somente se,

$$\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} < 1.$$

(μ_i é dado pelo teorema 4.3.1)

Prova: Sendo $\{b_n\}$ de período 2, temos:

$$(4.3.2) \quad \begin{cases} b_1 = (1 - x_0)x_1 \\ b_2 = (1 - x_1)x_0. \end{cases}$$

As soluções do sistema (4.3.2) são dadas por:

$$x_0 = \frac{(1 - b_1 + b_2) \pm \sqrt{(1 - b_1 + b_2)^2 - 4b_2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{(1 - b_2 + b_1) \pm \sqrt{(1 - b_2 + b_1)^2 - 4b_1}}{2}.$$

Logo, x_0 e x_1 representam soluções reais do sistema (4.3.2) se, e somente se,

$$(4.3.3) \quad (1 - b_1 + b_2)^2 - 4b_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad (1 - b_2 + b_1)^2 - 4b_1 \geq 0.$$

Podemos verificar que quando x_0 e x_1 são reais, eles também satisfazem

$$0 < x_0, x_1 < 1.$$

Também é fácil verificar que se $0 \leq c, d < 1$, então,

$$\sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 1 \quad \text{se, e somente se,}$$

$$(1 - c + d)^2 - 4d \geq 0 \quad \text{e} \quad (1 - d + c)^2 - 4c \geq 0.$$

Portanto, de (4.3.3), temos imediatamente o resultado (4.3.1) do teorema.

Se $\mu_l = M_l$ então, $\{M_k\}$ é a sequência de parâmetros minimal. Isto é, $M_0 = 0$, e então,

$$b_p = (1 - M_{p-1})M_p = (1 - M_{p-1})M_0 = 0,$$

o que é uma contradição, pois, por hipótese, $b_p > 0$.

Logo, $\mu_l < M_l$. Portanto, em (4.3.3), não ocorre a igualdade.

Segue, então, que

$$\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} < 1. \quad \blacksquare$$



CAPÍTULO V

ALGUMAS APLICAÇÕES DE SEQUÊNCIAS ENCADEADAS.

Neste capítulo veremos como as sequências encadeadas podem ser usadas para obter informações sobre zeros de certos polinômios que satisfazem relações de recorrência.

5.1. Sequências encadeadas e polinômios ortogonais.

Ultimamente está surgindo um número considerável de trabalhos sobre a obtenção de zeros de polinômios ortogonais (ou propriedade de funcional de momento) a partir da relação de recorrência associada. Isto é, dados os coeficientes da relação de recorrência, os quais devem conter todas as informações sobre os polinômios ortogonais, como extrair estas informações está sendo um desafio para muitos pesquisadores da área. Para algumas contribuições nesta área de trabalho veja Blumenthal [4], Chihara [8], [11] Nevai [19], [20] e Van Assche [28].

Apresentamos aqui algumas informações sobre como as sequências encadeadas podem ser usadas para este fim.

Teorema 5.1.1: O intervalo verdadeiro de ortogonalidade $[\xi_1, \eta_1]$ é um subconjunto do intervalo $[a, b]$ se:

$$i) \quad a < c_n < b, \quad n \geq 1,$$

(5.1.1)

$$ii) \quad \{\alpha_n(a)\}, \{\alpha_n(b)\}, \text{ são sequências encadeadas,}$$



onde $\alpha_n(x) = \lambda_{n+1} / \{(c_n - x)(c_{n+1} - x)\}$.

Prova: Consideremos a fração contínua

$$(5.1.2) \quad \left| \frac{\lambda_1}{x-c_1} \right| - \left| \frac{\lambda_2}{x-c_2} \right| - \left| \frac{\lambda_3}{x-c_3} \right| - \dots,$$

cujas n -ésimas convergentes é $\lambda_1 P_{n-1}^{(1)}(x) / P_n(x)$. Como $P_n(x)$ e $P_{n-1}^{(1)}(x)$ não têm zeros em comum, se a sequência $\{\lambda_1 P_{n-1}^{(1)}(x) / P_n(x)\}$, isto é, a fração contínua (5.1.2) é convergente num domínio, é fácil ver que $P_n(x)$ não tem zeros neste domínio.

A fração contínua

$$\left| \frac{\lambda_1 / (x-c_1)}{1} \right| - \left| \frac{\alpha_1(x)}{1} \right| - \left| \frac{\alpha_2(x)}{1} \right| - \dots,$$

onde $\alpha_n(x) = \lambda_{n+1} / \{(x-c_n)(x-c_{n+1})\}$, é equivalente à fração contínua (5.1.2) e, pelo teorema 3.2.2, estas duas frações contínuas têm a mesma sequência de convergentes. Portanto, pelo teorema 3.3.3, a fração contínua, isto é, a sequência $\{\lambda_1 P_{n-1}^{(1)}(x) / P_n(x)\}$ converge se $\{\alpha_n(x)\}$ é uma sequência encadeada.

O resultado do teorema segue, então, do fato que se $a < c_n < b$ e $\{\alpha_n(a)\}$, $\{\alpha_n(b)\}$ são sequências encadeadas então, $\{\alpha_n(x)\}$ é uma sequência encadeada para qualquer x não pertencente ao intervalo (a, b) . ■

Teorema 5.1.2: Se os coeficientes $\{c_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ satisfazem as condições dadas por (5.1.1), e além disso, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

Então, para $z \notin (a, b)$,



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(z)}{nP'_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{z - x_{nr}} = \frac{1}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{z-t} \frac{1}{\sqrt{t-\alpha} \sqrt{\beta-t}} dt,$$

onde $\alpha = c - 2\sqrt{\lambda}$ e $\beta = c + 2\sqrt{\lambda}$.

Prova: Da relação de recorrência (2.4.1) podemos mostrar, por exemplo para $z \in (b, \infty)$, que a sequência encadeada $\{\alpha_n(z)\}$ tem como sequência de parâmetros minimal

$$d_0(z) = 0, \quad 0 < d_n(z) = 1 - \frac{P_{n+1}(z)}{(z-c_n)P_n(z)} < 1, \quad n \geq 1.$$

Com as condições $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, vemos que $\{\alpha_n(z)\}$ é uma sequência encadeada que converge para um certo limite. Portanto, pelo teorema 4.2.4, temos que $\{d_n(z)\}$ também é uma sequência que converge para um certo limite. Agora, se $\{d_n(z)\}$ converge para um limite, então, $\{P_{n+1}(z)/P_n(z)\}$ também converge para um limite, o qual denotamos por $R(z)$. Da relação de recorrência (2.4.1), obtemos então

$$R(z) = (z - c) - \lambda/R(z),$$

que fornece

$$R(z) = (z-c) \pm \sqrt{(z-c)^2 - 4\lambda}.$$

Como $R(z) \rightarrow \infty$, quando $z \rightarrow \infty$, obtemos

$$(5.1.3) \quad P_{n+1}(z)/P_n(z) \rightarrow R(z) = (z - c) + \sqrt{(z-c)^2 - 4\lambda},$$

para $z \in (b, \infty)$.

A convergência de $\{P_{n+1}(z)/P_n(z)\}$ para $R(z)$ para qualquer $z \notin (a, b)$, segue do fato que $P_n(z)$ não tem zeros nesta região.



Derivando a relação (5.1.3) temos

$$\frac{P'_n(z)}{P_n(z)} - \frac{P'_{n-1}(z)}{P_{n-1}(z)} \rightarrow \frac{R'(z)}{R(z)}.$$

Aplicando o teorema de Cezàro (ver [3] pg.126) obtemos

$$\frac{P'_n(z)}{nP_n(z)} \rightarrow \frac{R'(z)}{R(z)}.$$

É fácil ver que

$$\frac{R'(z)}{R(z)} = \frac{1}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{z-t} \frac{1}{\sqrt{\beta-t} \sqrt{t-\alpha}} dt,$$

o que completa a prova do teorema. ■

O resultado deste teorema nos diz que, se o número de zeros de $P_n(z)$ fora do intervalo $[\alpha, \beta]$ é $o(n)$, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} (o(n)/n) = 0$.

Um fato interessante deste último teorema é que, quando $c = 0$ e $\lambda = 1/4$, (o qual ocorre no caso de, por exemplo, polinômios de Legendre e polinômios de Tchebyshev), temos

$$\frac{1}{\sqrt{\beta-t} \sqrt{t-\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

a função peso de Tchebyshev.

5.2. Sequências encadeadas e polinômios similares aos ortogonais.

Veremos nesta secção como o conhecimento adquirido até agora pode ser aplicado para obter informações sobre os zeros de polinômios que satisfazem um outro tipo de relação de recorrência.

A relação de recorrência que consideramos aqui é:



$$(5.2.1) \quad B_n(z) = (z - c_n)B_{n-1}(z) - \lambda_n z B_{n-2}(z), \quad n \geq 1$$

com $B_0(z) = 1$ e $B_{-1}(z) = 0$; $c_n > 0$ e $\lambda_n > 0$, para $n \geq 1$.

Foi mostrado em Jones, Thron e Waadeland [18] que existe um funcional de momento (forte), $\mathcal{L}$, associado a esta relação de recorrência de maneira que

$$\mathcal{L}[x^{-n+s} B_n(x)] \begin{cases} = 0 & \text{se, } 0 \leq s \leq n-1, \\ > 0 & \text{se, } s = n. \end{cases} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Também, foi mostrado que os polinômios $B_n(z)$ satisfazem muitas propriedades similares às dos polinômios ortogonais. Por exemplo, sabemos que os zeros de $B_n(z)$ são "positivos" e distintos e são diferentes dos zeros de $B_{n-1}(z)$. As propriedades dos polinômios $B_n(z)$ foram bastante estudadas por Sri Ranga e Andrade [25], e Sri Ranga [24].

É fácil ver que $B_n(z)$ é o denominador da n -ésima convergente da fração contínua

$$\left| \frac{\lambda_1}{z - c_1} \right| - \left| \frac{\lambda_2 z}{z - c_2} \right| - \left| \frac{\lambda_3 z}{z - c_3} \right| - \dots$$

Consideremos agora, a relação de recorrência

$$(5.2.2) \quad Q_{2n-1}(z) = (1 + \alpha_{2n-1})zQ_{2n-2}(z) - \alpha_{2n-1}z^2Q_{2n-3}(z),$$

$$Q_{2n}(z) = zQ_{2n-1}(z) - \alpha_{2n}Q_{2n-2}(z),$$

para $n \geq 1$, onde

$$Q_{-1}(z) = 0, \quad Q_0(z) = 1 \text{ e } \alpha_n > 0, \quad n \geq 2.$$

O polinômio $Q_n(z)$, que é mônico, é o denominador da n -ésima convergente da fração contínua



$$(5.2.3) \quad \left| \frac{1}{(1+\alpha_1)z} \right| - \left| \frac{\alpha_2}{z} \right| - \left| \frac{\alpha_3 z^2}{(1+\alpha_3)z} \right| - \left| \frac{\alpha_4}{z} \right| - \left| \frac{\alpha_5 z^2}{(1+\alpha_5)z} \right| - \dots,$$

que é chamada uma "J-fração regular, simétrica e positiva definida", e foi bastante estudada por Sri Ranga [23]. É conhecido que, num domínio onde esta fração contínua converge, não há zeros do polinômio $Q_n(z)$.

Considerando a fração contínua equivalente

$$(5.2.4) \quad \left| \frac{1/\{(1+\alpha_1)z\}}{1} \right| - \left| \frac{\beta_1(z)}{1} \right| - \left| \frac{\beta_3(z)}{1} \right| - \dots,$$

onde,
$$\beta_{2n-1}(z) = \frac{\alpha_{2n}}{(1+\alpha_{2n-1})z^2}, \quad \beta_{2n} = \frac{\alpha_{2n+1}}{(1+\alpha_{2n+1})}, \quad n \geq 1,$$

obtemos do teorema 3.3.3:

Teorema 5.2.1: A fração contínua (5.2.3) converge para $|z| \in [M, \infty)$ e, portanto, $Q_n(z)$ tem seus zeros no intervalo $(-M, M)$, se $\{\beta_n(M)\}$ é uma sequência encadeada.

Da relação de recorrência (5.2.1) e (5.2.2) podemos ver que, se

$$(5.2.5) \quad \alpha_{2n} = c_n \quad \text{e} \quad \alpha_{2n+1} = \lambda_{n+1}/c_n, \quad \text{para } n \geq 1,$$

então,
$$Q_{2n}(z) = B_n(z^2), \quad n \geq 1.$$

Teorema 5.2.2: Os zeros de $B_n(z)$, dado por (5.2.1), estão localizados no intervalo $(0, s)$ se a sequência $\{a_n\}$, onde

$$a_1 = \frac{c_1}{s}, \quad a_{2n} = \frac{\lambda_{n+1}}{c_n + \lambda_{n+1}} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{c_n c_{n+1}}{(c_n + \lambda_{n+1})s}, \quad n \geq 1,$$

é uma sequência encadeada.

Prova: Escolhendo $\alpha_1 = 0$, temos, de (5.2.4) e (5.2.5), que $\beta_n(\sqrt{s}) = a_n$, $n \geq 1$. Portanto, do teorema 5.2.1, $Q_{2n}(z) = B_n(z^2)$ tem seus zeros



no intervalo $[-\sqrt{s}, \sqrt{s}]$, se a_n é uma sequência encadeada, o que, imediatamente, leva ao resultado do teorema.

Finalmente, temos:

Teorema 5.2.3: Os zeros de $B_n(z)$ estão localizados no intervalo (r, ∞) se a sequência $\{a_n\}$ é uma sequência encadeada, onde

$$a_1 = \frac{r}{c_1}, \quad a_{2n} = \frac{\lambda_{n+1}}{c_{n+1} + \lambda_{n+1}} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{r}{c_{n+1} + \lambda_{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Prova: Da relação de recorrência (5.2.1), temos $B_n(0) = (-1)^n c_1 c_2 \dots c_n$. Além disso, o polinômio definido por

$$(5.2.6) \quad \tilde{B}_n(z) = \frac{z^n B_n(1/z)}{B_n(0)}, \quad n \geq 0,$$

satisfaz a relação de recorrência

$$(5.2.7) \quad \tilde{B}_n(z) = (z - \frac{1}{c_n}) \tilde{B}_{n-1}(z) - \frac{\lambda_n}{c_n c_{n-1}} z \tilde{B}_{n-2}(z), \quad n \geq 2,$$

$$\text{com } \tilde{B}_0(z) = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{B}_1(z) = z - \frac{1}{c_1}.$$

Repetindo o teorema anterior para a relação de recorrência (5.2.7) temos que, se

$$a_1 = \frac{1}{s c_1}, \quad a_{2n} = \frac{\lambda_{n+1}}{c_{n+1} + \lambda_{n+1}} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{1}{(c_{n+1} + \lambda_{n+1}) s},$$

para $n \geq 1$, é uma sequência encadeada, então, os zeros de $\tilde{B}_n(z)$ estão no intervalo $(0, s)$. Tomando $s = \frac{1}{r}$ temos, imediatamente, que os zeros de $B_n(z)$ estão no intervalo (r, ∞) . ■

Exemplo: Consideremos a relação de recorrência (5.2.1), onde

$$(5.2.8) \quad c_n = \sqrt{ab}, \quad \lambda_{n+1} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 / 4, \quad n \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 < a < b < \infty.$$



É conhecido que (veja Sri Ranga [24]), os polinômios associados a $B_n(z)$, $n \geq 1$, tem seus zeros no intervalo (a,b) . Verificamos este resultado usando os teoremas 5.2.2 e 5.2.3.

Com (5.2.8) obtemos, do teorema 5.2.2, que se a sequência $\{a_n\}$, onde

$$a_1 = \frac{\sqrt{ab}}{s}, \quad a_{2n} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2},$$

$$a_{2n+1} = \frac{4ab}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 s}, \text{ para } n \geq 1,$$

é uma sequência encadeada, então, os zeros de $B_n(z)$ estão no intervalo $(0,s)$. Como $\{a_n\}$ é uma sequência periódica e com período igual a 2, temos, do teorema 4.3.2, que $\{a_n\}$ é uma sequência encadeada se, e somente se,

$$\frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} + \frac{2\sqrt{ab/s}}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} \leq 1.$$

É fácil ver que a desigualdade é verdadeira se, e somente se, $s \geq b$. Isto implica que os zeros de $B_n(z)$ estão no intervalo $(0,b)$.

Do mesmo modo obtemos, do teorema 5.2.3 e do teorema 4.3.2, que os zeros de $B_n(z)$ estão no intervalo (a,∞) .



CONCLUSÃO

Através da relação de recorrência para os polinômios ortogonais dada no teorema 2.4.1 e do teorema de Favard 2.4.3 mostramos no estudo das frações de Jacobi que os numeradores e denominadores dessas frações contínuas formam um sistema de polinômios ortogonais. Considerando esse e outros resultados sobre polinômios ortogonais (cap. II) obtemos informações importantes sobre a convergência dessas frações contínuas.

Para o estudo de convergência de frações contínuas (de uma classe mais geral do que as de Jacobi) podemos também considerar as sequências encadeadas, apresentadas no capítulo IV. Os teoremas 4.3.1 e 4.3.2 foram relevantes para o estudo de algumas aplicações apresentadas no capítulo V, e juntamente com os teoremas 5.2.2 e 5.2.3 garantem a existência de um intervalo (a,b) que contém os zeros dos polinômios similares (tratados no capítulo V). Chihara já havia usado as sequências encadeadas para obter informações sobre os zeros de polinômios ortogonais. Além dessa aplicação, os conhecimentos por nós adquiridos permitiram também considerar estas sequências para a obtenção de informações sobre os zeros de polinômios similares. E isso pode dar sequência a outros trabalhos a serem desenvolvidos por nós nesse sentido e também para pessoas interessadas nesse assunto.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASKEY, R., ISMAIL M.E.H. Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials, Mem. Amer. Math. Soc., 300, 1984.
2. BARBOSA, R.M. Tópicos de teoria dos números, parte I - frações contínuas, apostila, Unesp, Araraquara, 1977.
3. BARTLE, R.G. Elementos de Análise Real, Campus, 1983.
4. BLUMENTHAL, O. Über die Entwicklung einer willkürlichen funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int_{-\infty}^0 [\phi(\xi)/(z - \xi)]d\xi$, Inaugural thesis, University of Göttingen, Göttingen, Germany, 1898.
5. CHIHARA, T.S. An introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
6. ——— Hamburger moment problems and orthogonal polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 315, p. 189 - 203, 1989.
7. ——— Spectral properties of orthogonal polynomials on unbounded sets, Trans. Amer. Math. Soc., 270, p. 623 - 639, 1982.
8. ——— Orthogonal polynomials with discrete spectra on the real line, J. Approx. Theory, 42, p. 97 - 105, 1984.
9. ——— Chain Sequences and Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., 104, p. 1 - 17, 1962.
10. ——— The Parameters of a Chain Sequence, Proc. Amer. Math. Soc., 108, p. 775 - 780, 1990.
11. ——— Orthogonal polynomials whose zeros are dense in intervals, J. Math. Anal. Appl., 24, p. 362 - 371, 1968.
12. ERDÉLYI, A. Higher transcendental functions, 2, McGraw-Hill, New York, 1953.



13. GERONIMO, J.S., CASE, K.M. Polynomials orthogonal on the real line, Trans. Amer. Math. Soc., 258, p. 467 - 494, 1980.
14. — Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Trans., 108, p. 37 - 130, 1977.
15. GOTTLIED, M.J. Concerning some polynomials orthogonal on a finite enumerable set of points, Amer. J. Math., 60, p. 453 - 458, 1938.
16. JACOBSEN, L. Orthogonal polynomials, chain sequences, three recurrence relations and continued fractions, Computational Methods and Functions Theory Proceedings, Valpaíso, Lecture notes in math. 1435, p. 89 - 101, 1989.
17. JONES, W.B., THRON, W.J. Continued fractions: analytic theory and applications, Encyclopédia of mathematics and its applications, 11, 1980.
18. JONES, W. B., THRON, W. J., WAADELAND, H. A strong Stieltjes moment problem, Trans. Amer. Math. Soc., 261, p.503 - 528, 1980.
19. NEVAI, P.G. Distribution of zeros orthogonal Polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 249, p. 341 - 361, 1979.
20. — Orthogonal Polynomials, Mem. Amer. Math. Soc., 18, 1979.
21. SHERMAN, J. On numerator of the convergentes of the Stieltjes continued fractions, Trans. Amer. Math. Soc., 35, p.64 - 87, 1933.
22. SRI RANGA, A. Continued fractions which correspond to two séries expansions, and the strong Hamburger moment problem, Tese de PhD. University of St. Andrews, Escócia, 1983.
23. — Convergence properties of a class of $\hat{J}$ -fractions, Journal of computational and applied mathematics, 19, p. 331 - 342, 1987.
24. — Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision, submetido.



25. SRI RANGA, A., ANDRADE, E. X. L. Zeros of polynomials which satisfy a certain three term recurrence relation, communications in the analytic theory of continued fractions, 1, p. 61 - 65, 1992.
26. SHOHAT, J.A., TAMMARKIN, J. D. The problem of moments, Math. Surveys, 1, Amer. Math. Soc., 1943.
27. SZEGÖ, G. Orthogonal polynomials, 23, Amer. Math. Soc., Colloq. Pubbl., New York, 1939.
28. VAN ASSCHE, W. Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence fórmulas - I, J. Approx. Theory, 44, p. 258 - 276, 1985.
29. VAN DOORN, E.A. Representations and bounds for zeros of orthogonal polynomial and eigenvalues of sign-symmetric tridiagonal matrizes J. Aprox. Theory, 51, p. 254 - 266, 1987.
30. WALL, H.S. Analytic Theory of Continued Fractions, Van Nostrand, New York, 1948.
31. WALL, H.S. Theory of J-fractions, Trans. Amer. Math. Soc., 55, p. 373 - 397, 1944.



