



INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
01405 - Rua Pamplona, 145 - Fone 288-5643
São Paulo (SP) - Brasil
BIBLIOTECA

IFT-TESE - 21/88

TESE DE DOUTORADO

93
IFT, TD-03/88



SIMULAÇÕES DE LANGEVIN E MONTE CARLO
EM MODELOS SIGMA-NÃO LINEARES

NELSON AUGUSTO ALVES

Orientadora: Dra. MARIA CRISTINA B. ABDALLA



Instituto de Física Teórica - UNESP

São Paulo, Junho de 1988

AGRADECIMENTOS

À profa. Cristina Abdalla pela orientação e incentivo sempre presentes;

Ao prof. Carlos Eugenio pelo acompanhamento ativo deste trabalho;

Aos profs. A. Zimmerman e Valdir Aguilera pela orientação inicial e interesse sempre demonstrado;

Ao prof. Elcio Abdalla pelas discussões sempre oportunas;

Aos profs. do IFT pela contribuição que deram à minha formação;

À Inez por estar sempre presente;

Aos amigos do IFT pelo convívio no dia a dia;

Ao Instituto de Estudos Avançados do CTA pelo uso do computador CYBER 170/750;

À FAPESP e CNPq pelo apoio financeiro.

INDICE

ABSTRACT e RESUMO	1
CAPITULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPITULO II - MODELOS SIGMA-NÃO LINEARES COM SIMETRIAS	
OCND E SUCND	6
2.1 MODELOS CP^{N-1} E A EXPANSÃO $1/N$	11
2.2 MODELOS CP^{N-1} COM FÉRMIONS	25
2.3 MODELOS CP^{N-1} COM FÉRMIONS MÍNIMOS	39
CAPITULO III - MODELOS σ -NÃO LINEARES NA REDE	
3.1 MODELOS OCND	44
3.2 MODELOS CP^{N-1} E A EXPANSÃO $1/N$	46
3.3 MODELOS CP^{N-1} COM FÉRMIONS MÍNIMOS	57
CAPITULO IV - A QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA	
4.1 A FORMULAÇÃO DE PARISI E WU	59
4.2 A QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DOS MODELOS CP^{N-1}	67
4.3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM A EQUAÇÃO DE LANGEVIN	71
CAPITULO V - SIMULAÇÕES PARA OS MODELOS COM VINCULOS	
5.1 O MÉTODO ESTOCÁSTICO	79
A. Procedimento de χ ajustável	79
B. Equações para os modelos OCND	85
C. Equações para os modelos CP^{N-1}	87
D. Equações para os modelos CP^{N-1} com	

fermions mınimos	89
5.2 DETERMINAAO DAS FUNOES DE CORRELAAO E DO "GAP" DE MASSA	92
A. Procedimento de Parisi para obter correlaoes	93
B. Equaoes de Langevin com o termo h . . .	96
C. Metodo de controle da fonte h	101
5.3 O METODO DE MONTE CARLO	103
A. Modelos simulados	107
 CAPITULO VI - RESULTADOS NUMERICOS E DISCUSSAO	 109
6.1 ENERGIAS DOS MODELOS $\alpha(3)$ E CP^1	110
6.2 ENERGIAS NO CP^{N-1} PARA N ATE 4	118
6.3 FUNOES DE CORRELAAO E "GAPS" DE MASSA NO $\alpha(3)$	121
6.4 FUNOES DE CORRELAAO E "GAPS" DE MASSA NO MODELO CP^1	135
6.5 FUNOES DE CORRELAAO E "GAPS" DE MASSA NO CP^1 COM FERMIONS	143
 CAPITULO VII - CONCLUSOES E PROBLEMAS EM ABERTO	 152
 APENDICE - PROGRAMAS DE COMPUTADOR	 154
 REFERENCIAS	 163

ABSTRACT

We simulate the CP^{N-1} models via Langevin equations with special emphasis in the case $N=2$. The conclusions are that the pure model is compatible with confinement presenting an abrupt fall to zero of the two point function. The bound state of the pure $N=2$ bosonic CP^{N-1} is related to the $O(3)$ non linear σ -model having both the same mass gap. Fermions are minimally coupled to the CP^{N-1} and the same analysis is performed.

The average energy is also determined for the CP^{N-1} ($N=2,3,4$) and $O(3)$. The equivalence between the CP^1 and $O(3)$ models is established.

RESUMO

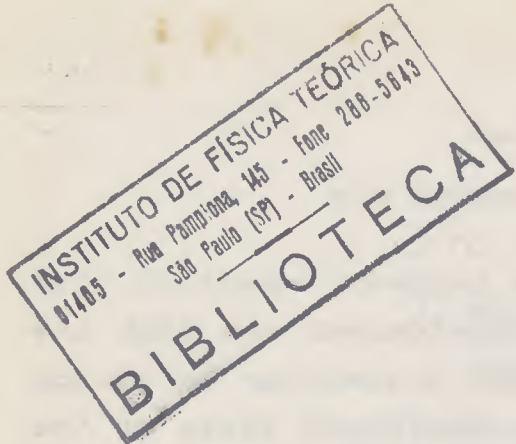
Simulamos os modelos CP^{N-1} via equação de Langevin com especial ênfase no caso $N=2$. Nossas conclusões são de que o modelo puro é compatível com a propriedade de confinamento refletindo uma queda abrupta para zero na função de dois pontos.

O estado ligado do modelo CP^1 puro é relacionado com o modelo σ -não linear $O(3)$, tendo ambos o mesmo "gap" de massa.

Férmions são acoplados minimamente aos modelos CP^{N-1} e a mesma análise é efetuada.

A energia média também é determinada para os modelos CP^{N-1} ($N=2,3,4$) e $O(3)$. A equivalência entre os modelos CP^1 e $O(3)$ também é estabelecida neste caso.

INTRODUÇÃO



Os modelos sigma não lineares foram historicamente introduzidos por Schwinger e aplicados em teoria de campo por Gell-Mann e Levy⁽¹⁾. A aplicação inicial foi no contexto das interações fortes em 4 dimensões para explicar certos resultados da álgebra de correntes e a relação de PCAC (conservação parcial da corrente axial) que relaciona a constante de decaimento do pion com a massa do nucleon e a constante de acoplamento forte pion-nucleon⁽²⁾.

O modelo em sua versão inicial possuía a simetria $O(4)$, isto é 4 campos, cuja simetria era quebrada produzindo 3 bósons de Goldstone que seriam os pions.

Na realização linear da simetria quiral aproximada então considerada $SU(2) \times SU(2)$ obtem-se uma teoria renormalizável mas que prevê uma partícula (σ) jamais encontrada. Na realização não linear da simetria $O(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ considera-se a possibilidade de modificar o modelo fazendo o campo σ ser uma função do campo do pion, em vez de um campo independente, isto é uma nova partícula. Contudo a versão não linear é não renormalizável em 4 dimensões. No entanto os modelos σ -não lineares com a simetria $O(N)$ definidos no espaço-tempo bidimensional introduzidos por Polyakov em 1975⁽³⁾ provaram ser renormalizáveis⁽⁴⁾.

Esta classe de modelos apresenta duas séries infinitas de cargas clássicas conservadas, uma série se referindo às cargas

locais e a outra às cargas não locais^(5,6). Na teoria quântica isto implica na ausência da produção de partículas e na fatorização da matriz S em matrizes S de 2 partículas.

Já ao nível quântico os modelos O(N) apresentam liberdade assintótica para $N > 2$ ⁽³⁾ e as partículas fundamentais adquirem massa.

O sucesso dos modelos σ -não lineares com simetria O(N) fez com que generalizações fossem procuradas de modo a conservar o fato de que a interação nestes modelos continuasse a ser representada por uma condição de vínculo. Eichenherr em 1978⁽⁷⁾ propõe a classe de modelos CP^{N-1} onde a simetria considerada é SU(N). Outras generalizações podem ser também obtidas^(8,9).

Os modelos CP^{N-1} são a generalização direta dos modelos O(N) para campos complexos e devido às suas propriedades como confinamento e liberdade assintótica apresentam fortes analogias com teorias de gauge em 4 dimensões e em particular com a QCD⁽¹⁰⁾, o que fez aumentar o interesse nestes modelos, além do fato de podermos adicionar férmions a estes modelos, enriquecendo ainda mais as suas propriedades.

Interessante também é o fato de que a expansão $1/N$ pode ser explicitamente efetuada nos modelos σ -não lineares e resultados exatos são obtidos no limite $N \rightarrow \infty$. Por outro lado resultados não perturbativos em teoria de campos são muito raros e torna-se necessário que haja formas alternativas de abordarmos determinado problema. É por este motivo que daremos atenção ao procedimento das simulações numéricas.

Nossa finalidade é de abordar a classe dos modelos O(N), CP^{N-1} puros e CP^{N-1} com férmions acoplados de forma mínima em nossas simulações numéricas, dando especial ênfase para valores

pequenos de N .

Nós salientamos as propriedades físicas obtidas pela expansão $1/N$ nos modelos acima como um guia para a determinação numérica das grandezas físicas como a energia interna, funções de correlação e "gaps" de massa.

Nosso trabalho está organizado do seguinte modo. No capítulo II consideramos a expansão $1/N$ aplicada aos modelos CP^{N-1} puros e também com férmions acoplados a estes modelos. Isto é feito para termos a compreensão física das suas propriedades em ambas as situações.

No capítulo III desenvolveremos a formulação de rede para os modelos σ -não lineares $O(N)$, CP^{N-1} e também para os modelos CP^{N-1} com férmions acoplados de forma mínima. Em particular para os modelos CP^{N-1} faremos a expansão $1/N$ na rede. Novamente, como no contínuo, estes modelos são resolvidos exatamente no limite $N \rightarrow \infty$. Portanto qualquer quantidade física que possamos calcular algebricamente na rede necessitará, para N finito, que determinemos um fator de correção que leve em conta a sua dependência em $N^{(11)}$.

Embora a estrutura de rede não tenha um significado físico especial, ela é introduzida para regularizar a teoria original do contínuo de forma não perturbativa, ou seja, ordem a ordem. A formulação na rede terá ainda outra finalidade para nós que é de permitir a simulação numérica nos modelos citados acima.

No capítulo IV apresentamos a formulação da Quantização Estocástica de Parisi e Wu. Com esta formulação obtemos as funções de correlação e os "gaps" de massa para os modelos CP^{N-1} .

Outrossim salientamos nosso interesse na quantização estocástica uma vez que esta formulação permite-nos obter um

algoritmo alternativo para simulações numéricas com o qual pode-se atualizar toda a rede de forma simultânea ao invés de sítio a sítio ou "link" a "link" conforme os procedimentos usuais em simulações. Este algoritmo, como veremos, utiliza de forma fundamental a equação de Langevin, na qual a quantização estocástica também tem o seu ponto de partida.

No capítulo V são considerados os aspectos envolvidos nos procedimentos de simulações.

Neste capítulo a atenção está voltada para as simulações de sistemas com vínculos geométricos como é o caso dos modelos σ -não lineares.

Nossa finalidade é a obtenção de energias, tanto com o algoritmo estocástico, via equação de Langevin, como com Monte Carlo via o algoritmo de Metropolis. Além disto, estabeleceremos o procedimento para a obtenção das funções de correlação e por conseguinte os "gaps" de massa via simulações de Langevin.

No capítulo VI iremos inicialmente comparar os modelos $O(3)$ e CP^1 calculando-se as suas energias em função da "temperatura" tanto por meio das simulações de Langevin como de Monte Carlo. Além disso, esta comparação também será feita através da relação existente entre o campo interpolante (ou estado ligado) no CP^1 e o do $O(3)$ calculando-se os "gaps" de massa para estes dois modelos por meio das simulações de Langevin.

A energia interna para os modelos CP^{N-1} para valores de $N > 2$ também será calculada com a intenção determinarmos o seu comportamento à medida que aumentamos N .

O fato de que o campo fundamental nos modelos CP^{N-1} está confinado pode ser observado indiretamente por meio das funções

de correlação. Usando-se o algoritmo de Langevin para a determinação da função de correlação dos campos no modelo CP^1 puro observamos que as flutuações estatísticas tornam-se excessivamente grandes. Os resultados para a função de 2 pontos são considerados e mostram-se compatíveis com a total blindagem da carga da partícula fundamental uma vez que a função de 2 pontos cai abruptamente a zero.

Após esta simulação preliminar para os campos do modelo CP^1 puro nos voltamos para um cálculo mais sofisticado desde que nenhuma física surge do modelo acima com este método devido a blindagem da carga.

A expansão $1/N$ nos mostrou que quando adicionamos férmions de massa nula aos modelos CP^{N-1} puros a força confinante não mais existia, fazendo com que as partículas do modelo sejam liberadas. Em nossas simulações procuramos observar este fato calculando as funções de correlação de 2 pontos para o modelo CP^1 acoplado a férmions de forma mínima. Neste caso o comportamento esperado da função de correlação é realmente obtido, permitindo-nos deste modo determinar os "gaps" de massa para este modelo em função da constante de acoplamento.

Finalmente no capítulo VII mencionamos a utilização futura dos algoritmos que desenvolvemos neste trabalho.

MODELOS SIGMA-NÃO LINEARES COM SIMETRIAS $O(N)$ E $SUC(N)$

Vamos abordar inicialmente a classe dos modelos sigma-não lineares com simetria $O(N)$. Esta classe de modelos apresenta como características^(7,9) a invariância conforme e para $N=3$ soluções tipo instanton. Já ao nível quântico os modelos $O(N)$, para $N \geq 3$, apresentam liberdade assintótica⁽³⁾ e descrevem um N-pleto de partículas com massas iguais, transformando-se linearmente sob $O(N)$. Esta massa é gerada dinamicamente.

A descrição destes modelos é feita por meio de um campo vetorial φ com N componentes reais, cuja ação é

$$S = \frac{\beta}{2} \int d^2x (\partial_\mu \varphi^a)^2 \quad (2.1)$$

onde β é a constante de acoplamento, $a = 1, \dots, N$ e $\mu = 1, 2$.

A teoria torna-se não trivial devido a condição de vínculo

$$\sum_a (\varphi^a)^2 = 1 \quad (2.2)$$

Assim φ toma valores sobre a esfera unitária S^{N-1} no espaço real N -dimensional R^N .

Outra classe de modelos σ -não lineares que abordaremos são os modelos introduzidos por Eichenherr⁽⁷⁾, Golo e Perelomov⁽¹²⁾. Estes modelos envolvem um campo vetorial de componentes complexas $Z^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, N$, sujeitas ao vínculo

$$\sum_{\alpha=1}^N \bar{z}^{\alpha} z^{\alpha} = 1 \quad (2.3)$$

Esta classe de modelos tem a simetria $SU(N)$ e é referida como modelos CP^{N-1} (espaço projetivo complexo de $N-1$ dimensões), que é a variedade constituída por todas as linhas complexas passando pela origem em um espaço vetorial complexo N -dimensional C^N .

Os campos $g(x)$ dos modelos σ -não lineares tomam valores no espaço quociente $G/H^{(8,9,13)}$, sendo G um grupo de Lie compacto atuando sobre os campos g e H um subgrupo fechado de G .

Vamos considerar dois campos g_1 e g_2 como representativos deste espaço quociente. Com isto eles serão equivalentes de "gauge" se diferirem somente por uma função $h(x)$ em H , o que dará o caracter de uma transformação de "gauge",

$$g_1(x) \sim g_2(x) \Leftrightarrow g_1(x) = g_2(x) h(x) \quad (2.4)$$

A classe de modelos CP^{N-1} é caracterizada pelos grupos $G = SU(N)$ e $H = U(N-1)$,

$$CP^{N-1} \simeq \frac{SU(N)}{U(N-1)} \quad (2.5)$$

O espaço quociente CP^{N-1} é equivalente ao espaço gerado por N complexos $Z = (Z^1, \dots, Z^N)$ que se transformam por $SU(N)$, e que é constituído por todas as classes de equivalência $[Z]$ de vetores complexos $(Z^1, \dots, Z^N) \neq 0$, ou seja,

$$Z \simeq Z' \text{ se } Z' = \lambda Z \text{ com } \lambda \in C \quad (2.6)$$

Isto define as retas em C^N passando pela origem. Cada uma

destas retas é invariante pela transformação $U(N-1)$.

No modelo $OC(N)$ φ era um vetor unitário real no espaço N -dimensional. Assim podemos tomar G como sendo o grupo conexo das rotações no espaço N -dimensional $SO(N)$. As rotações que deixam φ invariante são aquelas em torno da própria direção de φ , assim $H = SO(N-1)$. Desta forma obtemos

$$\frac{SO(N)}{SO(N-1)} = S^{N-1} \quad (2.7)$$

que é o espaço quociente do modelo $OC(N)$.

Na formulação Lagrangeana a relação de equivalência entre os campos,

$$Z^\alpha \rightarrow e^{i\Lambda} Z^\alpha \quad (2.8)$$

é tida como uma transformação de "gauge" local $U(1)$.

A ação mais simples que generaliza esta liberdade de "gauge" e que também incorpora a condição de vínculo invariante por $SU(N)$ é dada por^(8,13),

$$S = \frac{N}{2f} \int d^2x \overline{D_\mu Z^\alpha} D_\mu Z^\alpha \quad (2.9)$$

onde f é uma constante adimensional.

A derivada covariante

$$D_\mu Z = \partial_\mu Z + iZ A_\mu \quad (2.10)$$

contém um campo de "gauge" que ao nível clássico pode ser eliminado da ação (2.9) por meio de sua equação de movimento

$$A_{\mu}(x) = \frac{i}{2} (\bar{Z}^{\alpha} \partial_{\mu} Z^{\alpha} - \partial_{\mu} \bar{Z}^{\alpha} Z^{\alpha}) \quad (2.11)$$

fazendo com que a ação possa ser reescrita como

$$S = \frac{N}{2f} \int d^2x \left[\partial_{\mu} \bar{Z}^{\alpha} (\partial_{\mu} Z^{\alpha}) - \bar{Z}^{\alpha} (\partial_{\mu} Z^{\alpha}) (\partial_{\mu} \bar{Z}^{\beta}) Z^{\beta} \right] \quad (2.12)$$

Sob a transformação de "gauge" (2.8) o campo composto A_{μ} transforma-se como um campo de "gauge" Abeliano

$$A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu} \Lambda \quad (2.13)$$

Nesta classe de modelos, como $H = U(N-1)$ sabe-se que há soluções tipo instanton para todo N ⁽¹²⁾, já que o grupo de homotopia $\pi_1(H)$ é não trivial^(8,13,14), além das propriedades já citadas para a classe dos modelos $O(N)$ se manterem válidas.

Os modelos CP^{N-1} , como definidos acima ou com férmions acoplados, compartilham inúmeras propriedades com a QCD⁽¹⁰⁾. Além disto a expansão $1/N$ pode ser explicitamente efetuada e deste modo usada para estudar suas propriedades tais como o confinamento, liberdade assintótica e quebra da simetria quiral.

Apesar das diferenças topológicas entre os modelos $O(N)$ e CP^{N-1} devemos notar que este comentário não se aplica ao modelo $O(3)$. Na verdade os modelos $O(3)$ e CP^1 são equivalentes^(8,15). Para mostrarmos isto vamos fazer o mapeamento entre os campos destes dois modelos,

$$p^a = \bar{Z}^{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^a Z^{\beta} \quad (2.14)$$

onde σ^a , $a = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli.

Substituindo (2.14) em (2.1) e utilizando a relação

$$\sigma^a_{ij} \sigma^a_{kl} = 2 \delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2.15)$$

juntamente com a condição de vínculo (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} S_{\alpha(3)} &= \frac{\beta}{2} \int d^2x (\partial_\mu \varphi^a)(\partial_\mu \varphi^a) \\ &= 2\beta \int d^2x \left[\partial_\mu \bar{Z}^\alpha \partial_\mu Z^\alpha - \bar{Z}^\alpha (\partial_\mu Z^\alpha) (\partial_\mu \bar{Z}^\beta) Z^\beta \right] \\ &= 2S_{\text{CP}^1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

quando fazemos a identificação da constante na ação do CP^1 com a do $\alpha(3)$,

$$\frac{1}{f} = \beta \quad (2.17)$$

O mapeamento (2.14), que relaciona o modelo do campo de spin $\alpha(3)$ de Heisenberg com o CP^1 , é a representação espinorial para os φ^a .

2.1 MODELOS CP^{N-1} E A EXPANSÃO $1/N$

As propriedades físicas dos modelos CP^{N-1} tais como liberdade assintótica e geração dinâmica de massa serão obtidas pelo procedimento de quantização via expansão $1/N^{(8)}$.

Para a implementação desta expansão usa-se o fato de que as constantes de acoplamento da teoria devam decrescer com N , ou seja,

$$g = \theta \left(\frac{1}{N^a} \right) \quad (2.18)$$

com $a > 0$, conduzindo desta forma a um modelo solúvel.

Para efetuar a expansão $1/N$ no modelo (2.9) vamos reescalonar os campos pelo fator $\sqrt{N/2f}$,

$$\sqrt{N/2f} Z \rightarrow Z, \quad (2.19)$$

Fazendo com que a condição de vínculo (2.3) torne-se

$$\bar{Z}^\alpha Z^\alpha = \frac{N}{2f} \quad (2.20)$$

A ação (2.9) passa a ser

$$S = \int d^2x \overline{D_\mu Z^\alpha} D_\mu Z^\alpha \quad (2.21)$$

e o campo de "gauge" A_μ (2.11) torna-se

$$A_\mu(x) = \frac{if}{N} (\bar{Z}^\alpha \partial_\mu Z^\alpha - \partial_\mu \bar{Z}^\alpha Z^\alpha) \quad (2.22)$$

$$= \frac{if}{N} \bar{Z} \cdot \overleftrightarrow{\partial}_\mu Z$$

com

$$D_\mu Z = \left[\partial_\mu - \frac{f}{N} (\bar{Z}^\alpha \partial_\mu Z^\alpha - \partial_\mu \bar{Z}^\alpha Z^\alpha) \right] Z \quad (2.23)$$

Com isto escrevemos o funcional gerador para as funções de Green Euclidianas para o modelo CP^{N-1}

$$Z[J, \bar{J}, k_\mu] = \int D\bar{Z} DZ \prod_x \delta \left(|Z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \exp \left\{ -S \right. \\ \left. + \int d^2x \left[\bar{J} \cdot Z + \bar{Z} \cdot J + K_{\mu\mu} A_\mu \right] \right\} \quad (2.24)$$

com S dado em (2.21) e com o vínculo agora sendo (2.20),

$$S = \int d^2x \left[\partial_\mu \bar{Z} \cdot \partial_\mu Z - \frac{N}{2f} A_\mu^2 \right] \quad (2.25)$$

$$= \int d^2x \left[\partial_\mu \bar{Z} \cdot \partial_\mu Z + \frac{f}{2N} (\bar{Z} \cdot \overleftrightarrow{\partial}_\mu Z)^2 \right]$$

Com a finalidade de obtermos a ação efetiva deste modelo introduzimos os campos multiplicadores de Lagrange $\alpha(x)$, que implementará a condição de vínculo, e $\lambda_\mu(x)$ que tornará a ação quadrática em Z ,

$$\prod_x \delta(|Z|^2 - \frac{N}{2f}) \exp \left\{ \int d^2x \left[\frac{N}{2f} A_\mu^2 + K_\mu A_\mu \right] \right\}$$

$$\approx \int D\alpha D\lambda_\mu \exp \left\{ \int d^2x \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \alpha \left(|Z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \right. \right. \quad (2.26)$$

$$\left. \left. - \left(m^2 + \frac{1}{N} \lambda_\mu^2 \right) |Z|^2 + \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \left(\frac{N}{f} A_\mu + K_\mu \right) - \frac{f}{2N} K_\mu K_\mu \right] \right\}$$

Neste estágio introduzimos um novo parâmetro $m^2 > 0$, que por enquanto é completamente arbitrário.

O integrando do funcional gerador passa a ser

$$\exp \left\{ \int d^2x \left[- \partial_\mu \bar{Z} \cdot \partial_\mu Z + \frac{2i}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \bar{Z} \cdot \partial_\mu Z + \frac{i\alpha}{\sqrt{N}} \left(|Z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \right. \right. \quad (2.27)$$

$$\left. \left. - \bar{Z} \cdot \left(m^2 + \frac{1}{N} \lambda_\mu \lambda_\mu \right) Z + \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_\mu K_\mu - \frac{f}{2N} K_\mu K_\mu + \bar{J} \cdot Z + \bar{Z} \cdot J \right] \right\}$$

Com a expressão acima escrevemos o funcional gerador como

$$Z[J, \bar{J}, K_\mu] = \int D\bar{Z} DZ D\alpha D\lambda_\mu \exp \left\{ -S' + \int d^2x \left(\bar{J} \cdot Z + \bar{Z} \cdot J \right. \right. \quad (2.28)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_\mu K_\mu - \frac{f}{2N} K_\mu K_\mu \right) \right\}$$

onde

$$S' = \int d^2x \left(\bar{Z} \cdot \Delta Z + \frac{i\sqrt{N}}{2f} \alpha \right) \quad (2.29)$$

com
$$\Delta = -D_\mu D_\mu + m^2 - \frac{i}{\sqrt{N}} \alpha \quad (2.30)$$

e
$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \quad (2.31)$$

Aquí D_μ é a derivada covariante em termos de um novo campo de "gauge", λ_μ/\sqrt{N} , que reflete uma nova invariância local da teoria efetiva. A invariância de S' é mantida sob as transformações

$$Z'(x) = e^{i\Lambda(x)} Z(x) \quad (2.32)$$

$$\alpha'(x) = \alpha(x) \quad e \quad \lambda'_\mu(x) = \lambda_\mu(x) - \sqrt{N} \partial_\mu \Lambda(x)$$

A integração funcional sobre os campos Z, \bar{Z} em (2.28) é gaussiana e pode ser efetuada. O resultado é

$$Z[J, \bar{J}, K_\mu] = \int D\alpha D\lambda_\mu \exp \left\{ -S_{\text{ef}} + S_{\text{fontes}} \right\} \quad (2.33)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}} &= N \text{tr} \ln \Delta + \frac{i\sqrt{N}}{2f} \int d^2x \alpha \\ &= N \text{tr} \ln \left[-\partial^2 + m^2 - \frac{2i}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \partial_\mu + \frac{1}{N} \lambda_\mu \lambda_\mu - \frac{i}{\sqrt{N}} \alpha \right] \\ &\quad + \frac{i\sqrt{N}}{2f} \int d^2x \alpha \end{aligned} \quad (2.34)$$

e

$$S_{\text{fontes}} = \int d^2x \left[\bar{J} \cdot \Delta^{-1} J + \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_\mu K_\mu - \frac{f}{2N} K_\mu K_\mu \right] \quad (2.35)$$

O procedimento agora é fazer a expansão do logaritmo em S_{ef} . Este logaritmo é do tipo

$$\ln \left(-\partial^2 + m^2 + \frac{1}{\sqrt{N}} R \right) \quad (2.36)$$

$$= \ln(-\partial^2 + m^2) + \ln \left(1 + \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \frac{1}{\sqrt{N}} R \right)$$

O primeiro termo irá contribuir com um fator ω trivial. Com a expansão do logaritmo no segundo termo obteremos fatores do tipo

$$\left(\frac{1}{-\partial^2 + m^2} \frac{1}{\sqrt{N}} R \right)^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Para calcularmos o traço das quantidades acima usaremos a seguinte relação

$$\text{tr} \left(\frac{1}{-\partial^2 + m^2} \frac{1}{\sqrt{N}} R \right)^j = \quad (2.37)$$

$$\sum_{n_1 \dots n_{2j}} \langle \varphi_{n_1} | \frac{1}{-\partial^2 + m^2} | \varphi_{n_2} \rangle \langle \varphi_{n_2} | \frac{R}{\sqrt{N}} | \varphi_{n_3} \rangle \dots \langle \varphi_{n_{2j}} | \frac{R}{\sqrt{N}} | \varphi_{n_1} \rangle$$

onde tomamos $|\varphi_n\rangle$ como autoestados do momento,

$$\begin{aligned} \langle P | \frac{1}{-\partial^2 + m^2} | K \rangle &= \frac{1}{K^2 + m^2} \langle P | K \rangle \\ &= (2\pi)^2 \delta(P-K) \frac{1}{K^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aqui usamos as normalizações

$$\int d^2x |x\rangle\langle x| = 1,$$

(2.39)

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} |k\rangle\langle k| = 1$$

e denotaremos por $\tilde{\alpha}(k)$ a transformada de Fourier de $\alpha(x)$,

$$\tilde{\alpha}(k) = \int d^2x e^{-ikx} \alpha(x) \quad (2.40)$$

A expansão do logaritmo em S_{ef} , (2.35), conduz a uma série em $1/\sqrt{N}$,

$$S_{ef} = \sum_{\nu=1}^{\infty} N^{1-\frac{\nu}{2}} S^{(\nu)} + cte \quad (2.41)$$

O primeiro termo nesta expansão é

$$S^{(1)} = -i \operatorname{tr} \left[\frac{1}{-\partial^2 + m^2} (\alpha + 2\lambda_{\mu} \partial_{\mu}) \right] + \frac{1}{2f} \int d^2x \alpha(x) \quad (2.42)$$

$$= i\tilde{\alpha}(0) \left[\frac{1}{2f} - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \right]$$

Este termo contém uma integral divergente que deve ser regularizada. Escolheremos o procedimento do "cutoff" Λ de Pauli-Villars, que é invariante de "gauge".

Assim procedendo, a integral em (2.42) torna-se

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{p^2 + m^2} - \frac{1}{p^2 + \Lambda^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (2.43)$$

e obtemos para $S^{(1)}$

$$S^{(1)} = i \tilde{\alpha}(0) \left[\frac{1}{2f} - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] \quad (2.44)$$

Se agora permitirmos que a constante de acoplamento f varie com Λ conforme a expressão

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{f} &= \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{2\pi}{f_R(\mu)} \\ &= \ln \left[\Lambda^2 \frac{e^{2\pi/f_R(\mu)}}{\mu^2} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde μ é o ponto de renormalização e $f_R(\mu)$ o acoplamento renormalizado, notaremos que as divergências se cancelam em $S^{(1)}$.

Com este procedimento vemos que os modelos CP^{N-1} são assintoticamente livres pois, quando $\Lambda \rightarrow \infty$, a constante de acoplamento vai a zero. Por outro lado, o primeiro termo na expansão (2.41) é $\sqrt{NS}^{(1)}$ e quando substituído em (2.33) obteremos, no limite $N \rightarrow \infty$, contribuições rapidamente oscilantes. Entretanto podemos fazer $S^{(1)} = 0$ com a seguinte escolha para o parâmetro m^2 ,

$$m^2 = \mu^2 e^{-2\pi/f_R(\mu)} \quad (2.46)$$

que era inicialmente arbitrário. Desta forma vemos que os

modelos CP^{N-1} além da liberdade assintótica exibem também a geração dinâmica de massa.

Os termos restantes da série (2.42) podem agora ser expandidos em potências de $1/\sqrt{N}$ e integrados termo a termo. O segundo termo desta série, que é a parte quadrática da ação, pode ser escrito como

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \left[\alpha(x) \Gamma^{(\omega)}(x-y) \alpha(y) + \lambda_\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}^{(\lambda)}(x-y) \lambda_\nu(y) \right] \quad (2.47)$$

onde as transformadas de Fourier de $\Gamma^{(\omega)}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ são

$$\tilde{\Gamma}^{(\omega)}(p) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(p+k)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) = & 2 \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ & - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(p_\mu + 2k_\mu)(p_\nu + 2k_\nu)}{[(p+k)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \end{aligned} \quad (2.49)$$

A integral (2.48) é finita e pode ser diretamente integrada enquanto que as integrais em (2.49) são ambas divergentes. Podemos usar novamente aqui a regularização de Pauli-Villars e teremos como resultado o cancelamento destas divergências. Deste modo obtemos

$$\tilde{\Gamma}^{(\omega)}(p) = A(p) \quad (2.50)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) = \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] F(p) \quad (2.51)$$

onde

$$A(p) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2(p^2+4m^2)}} \ln \frac{\sqrt{p^2+4m^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2+4m^2} - \sqrt{p^2}} \quad (2.52)$$

e

$$F(p) = (p^2+4m^2) A(p) - \frac{1}{\pi} \quad (2.53)$$

As funções A e F têm o seguinte comportamento em função dos momentos

$$A(p) \simeq \frac{1}{4\pi m^2}, \quad F(p) \simeq \frac{1}{12\pi} \frac{p^2}{m^2}, \quad \text{para } p^2 \ll m^2 \quad (2.54a)$$

$$A(p) \simeq \frac{1}{2\pi p^2} \ln \frac{p^2}{m^2}, \quad F(p) \simeq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{p^2}{m^2}, \quad \text{para } p^2 \gg m^2 \quad (2.54b)$$

Os termos restantes da série $S^{(\nu)}$ (2.41), para $\nu \geq 3$, são integrais convergentes.

Antes de determinarmos qualquer função de Green de Z, \bar{Z} e A_μ precisaremos especificar a condição de "gauge"⁽¹⁶⁾. Usaremos um "gauge" no qual o propagador do campo λ_μ é transverso. Este procedimento é alcançado por meio da seguinte condição de "gauge" linear⁽¹⁷⁾

$$\partial'_\mu \lambda_\mu = 0 \quad (2.55)$$

onde ∂'_μ atua da forma a seguir,

$$(\partial'_\mu f)(x) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{ipx} i p_\mu L(p) \tilde{f}(p) \quad (2.56)$$

A função $L(p)$, como veremos, é uma função par do momento e será escolhida de forma conveniente.

Neste procedimento de fixação do "gauge", além de adicionarmos ao funcional gerador (2.33) o termo de fantasmas de Faddeev-Popov⁽¹⁶⁾ adicionamos também à ação total o termo

$$S_{gf} = \frac{1}{2\gamma} \int d^2 x \partial'_\mu \lambda_\mu \partial'_\nu \lambda_\nu \quad (2.57)$$

sendo γ uma constante não negativa.

O termo de fixação do "gauge" (2.57) pode ser combinado com $S^{(2)}$ em (2.47). Isto corresponde a uma redefinição de $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)}$,

$$\left[\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right]_{\text{novo}} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)} + \left[\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right]_{gf} \quad (2.58)$$

onde

$$\left[\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right]_{gf} = \frac{1}{\gamma} p_\mu p_\nu L^2(p) \quad (2.59)$$

Comparando-se (2.59) com (2.51) verificamos a necessidade de não tomarmos $L = 1$, i.e. $\partial'_\mu = \partial_\mu$, o que corresponderia ao procedimento usual em teorias de "gauge", devido ao seu comportamento para grandes momentos, o que poderia implicar na falha de renormalizabilidade. Por este motivo faremos a escolha

$$L^2(p) = \frac{1}{p^2} F(p) \quad (2.60)$$

que nos conduz a escrevermos a equação (2.58) como

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \left[\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] F(p) \quad (2.61)$$

A inversão dos operadores que aparecem em (2.47), ou seja, (2.50) e (2.61) conduzem aos propagadores dos campos α e λ_μ , respectivamente,

$$D^{(\alpha)}(p) = A(p)^{-1} \quad (2.62)$$


$$D_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) = \left[\delta_{\mu\nu} - (1 - \gamma) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] F(p)^{-1} \quad (2.63)$$

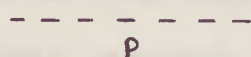
Para o propagador do campo Z temos

$$D^{(\bar{z}z)}(p) = (p^2 + m^2)^{-1} \quad (2.64)$$

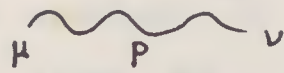
Em (2.63), para $\gamma = 0$, temos o "gauge" de Landau, o que corresponde ao propagador de λ_μ transverso.

A representação gráfica para as regras de Feynman neste modelo é ^(8,17)

linha Z:  $\delta^{\alpha\beta} (p^2 + m^2)^{-1}$

linha α :  $A(p)^{-1}$

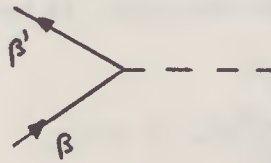
linha λ :



$$\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D^{(\lambda)}(p)$$

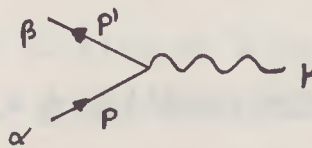
(2.65)

vértice $\bar{Z}Z\alpha$:



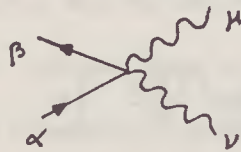
$$\frac{i}{\sqrt{N}} \delta^{\beta\beta'}$$

vértice $\bar{Z}Z\lambda$:



$$- \frac{1}{\sqrt{N}} \delta^{\alpha\beta} (p_\mu + p'_\mu)$$

vértice $\bar{Z}Z\lambda$



$$- \frac{1}{N} \delta^{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}$$

Aqui, para o modelo CP^{N-1} puro,

$$D^{(\lambda)}(p) = F(p)^{-1} \quad (2.66)$$

Desta forma notamos que as correções de 1ª ordem têm gerado para o campo de "gauge" A_μ obtido de (2.31),

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_\mu, \quad (2.67)$$

um termo correspondente a energia cinética. De (2.51) e (2.54a) podemos obter a sua expressão a partir do seu comportamento infravermelho,

$$(p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left(\frac{1}{12\pi m^2} + \alpha p^2 \right) \quad (2.68)$$

onde m é a massa de Z^α e \bar{Z}^α . Neste limite temos o termo cinético

$$-\frac{1}{4} \frac{N}{12\pi m^2} (F_{\mu\nu})^2 \quad (2.69)$$

para o campo de "gauge" A_μ .

Redefinindo o campo A_μ ,

$$\sqrt{\frac{N}{12\pi m^2}} A_\mu \rightarrow A'_\mu \quad (2.70)$$

obtemos $-1/4 F_{\mu\nu}^2$ para o termo cinético e a derivada covariante D_μ torna-se

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = \partial_\mu - i \left[m \sqrt{\frac{12\pi}{N}} \right] A_\mu \quad (2.71)$$

Com isto mostramos que os modelos CP^{N-1} quânticos descrevem um vetor SU(N) de partículas interagindo, carregadas e massivas devido as flutuações quânticas.

Estas partículas interagem pela troca de quantas α e λ_μ .

A interação α é de curto alcance e não corresponde a uma troca de partícula física uma vez que $A(p)$ é analítica com

$$A(0) = \frac{1}{4\pi m^2} \quad (2.72)$$

$$e \quad A(p) > 0 \quad \text{para } p^2 > 0 \quad (2.73)$$

Por outro lado o propagador do campo de "gauge" λ_μ tem o seguinte comportamento

$$D^{(\lambda)}(p) \simeq \frac{12\pi m^2}{p^2} \quad \text{para } p^2 \rightarrow 0 \quad (2.74)$$

O polo em $p^2 = 0$ dá origem a uma força de longo alcance

entre as partículas Z. É este comportamento do propagador de λ_μ que conduz ao problema do confinamento. Neste limite não relativístico a troca dos λ_μ corresponderá, em uma dimensão espacial, a um potencial Coulombiano linear⁽¹⁰⁾,

$$V(r) = \frac{12\pi m^2}{N} r \quad (2.75)$$

fazendo com que as partículas Z ou "partons" desta teoria estejam confinados. Devemos ainda mencionar que o fator $1/N$ em (2.75) vem do acoplamento entre os estados \bar{Z} , Z e λ_μ .

Desta forma vemos que o confinamento nos modelos CP^{N-1} puro é um fenômeno estritamente quântico.

Agora voltando à equação (2.14), que relaciona o modelo $O(3)$ com o CP^1 vemos que a força de longo alcance que confina os campos Z faz com que os únicos observáveis possíveis sejam aqueles correspondentes a estados ligados de 2 partículas do CP^1 . Este espectro é então relacionado com o do modelo $O(3)$, que consiste de um tripleto de partículas com massas iguais e não nulas, cujo campo φ^a pode ser expresso com um bilinear dos Z^α conforme (2.14).

2.2. MODELOS CP^{N-1} COM FÉRMIONS

Para os modelos CP^{N-1} quânticos mostramos que as partículas físicas são estados ligados de partons massivos, os quais permanecem confinados por uma força Coulombiana linear. Pretendemos agora adicionar férmions, quer sejam massivos ou não, a esta classe de modelos com a finalidade de enriquecer a sua estrutura e de verificar se as suas novas propriedades diferem, em particular, das apresentadas acima (8,18,19,20). Para isto usaremos novamente a expansão $1/N$.

O acoplamento de férmions nos modelos CP^{N-1} pode ser feito, por exemplo, de forma supersimétrica (8,18)

$$S = \frac{N}{2f} \int d^2x \left\{ \overline{D}_\mu Z \cdot D_\mu Z - i \overline{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{4} \left[(\overline{\psi} \psi)^2 + (\overline{\psi} \gamma_3 \psi)^2 - (\overline{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 \right] \right\} \quad (2.76)$$

onde novamente

$$D_\mu = \partial_\mu - \overline{Z} \cdot \partial_\mu Z \quad (2.77)$$

Os campos neste caso devem satisfazer as condições de vínculo

$$\overline{Z} \cdot Z = 1 \quad (2.78)$$

$$\overline{Z} \cdot \psi = \overline{\psi} \cdot Z = 0$$

A ação (2.76) é invariante sob as transformações de "gauge"

$$Z^{\alpha}(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)} Z^{\alpha}(x)$$

(2.79)

$$\psi^{\alpha}(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)} \psi^{\alpha}(x)$$

O modelo em (2.76) com férmions acoplados ao modelo CP^{N-1} , que interpretaremos como os quarks da teoria, pode ainda ser generalizado. Nesta generalização podemos incorporar quarks massivos com uma carga elétrica e , possivelmente diferente daquela do campo Z . Assim, podemos ter a ação⁽¹⁸⁾

$$S = \int d^2x \left\{ \bar{D}_{\mu} Z \cdot D_{\mu} Z - i\bar{\psi}(\not{D} - M_B)\psi + \frac{e^2 f}{2N} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi)^2 \right.$$

(2.80)

$$\left. - \frac{g_v}{2N} \left[(\bar{\psi} \tau^i \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \tau^i \psi)^2 \right] \right\}$$

onde $i = 0, 1, \dots, N^2-1$. Nesta ação temos um termo de massa M_B para os férmions e g_v é uma nova constante de acoplamento.

Aqui reescalamos novamente os campos,

$$\sqrt{N/2f} Z \rightarrow Z,$$

(2.81)

$$\sqrt{N/2f} \psi \rightarrow \psi, \quad (-i)\sqrt{N/2f} \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}$$

fazendo com que a condição de vínculo torne-se

$$|Z|^2 = \frac{N}{2f}$$

(2.82)

$$\bar{Z} \cdot \psi = \bar{\psi} \cdot Z = 0$$

Em adição ao índice de sabor α , introduzimos também um índice de cor a , $a=1, \dots, N$, para o campo dos quarks ψ_a^α .

A conceituação em termos de que índices correspondam ao sabor ou à cor não é importante aqui pois como veremos o campo de "gauge" λ_μ não irá carregar índice algum que possa corresponder a índice de cor como acontece na QCD. Somente nos chamados modelos sigma não lineares definidos na variedade de Grassmann complexa,

$$G_c(p, q) = \frac{SU(N)}{S(U(p) \times U(q))}, \quad N=p+q \quad (2.83)$$

da qual os modelos CP^{N-1} são o caso particular para $p = 1$, é que o campo de "gauge" irá carregar índices de cor⁽¹⁷⁾, $\lambda_\mu + \lambda_\mu^{ab}$. Mas neste caso isto acontece devido ao fato de que nestes modelos o campo Z^α também tem de carregar estes índices de cor, $Z^\alpha + Z_a^\alpha$. Que isto deva acontecer pode ser visto das equações (2.22) e (2.67) com Z^α tendo um índice extra para a cor.

Voltando ao modelo em (2.80), as matrizes de cor τ^i , $i = 0, 1, \dots, N^2-1$, são normalizadas tal que

$$\tau^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}, \quad \text{tr}(\tau^i \tau^j) = \delta^{ij} \quad (2.84)$$

A parte da ação em (2.80) que envolve interações de 4 quarks é a mais geral sob as transformações quirais $U(N) \times U(N)$,

$$\psi' = \exp \left\{ \frac{i}{2} (1 + i\gamma_5) \tau^k \omega^k \right\} \psi \quad (2.85)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}' \exp \left\{ \frac{-i}{2} (1 + i\gamma_5) \tau^k \omega^k \right\}$$

As derivadas covariantes passam a atuar sobre Z e ψ de forma diferente,

$$D_\mu Z^\alpha = \partial_\mu Z^\alpha - \frac{f}{N} (\bar{Z} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu Z) Z^\alpha \quad (2.86)$$

$$D_\mu \psi_a^\alpha = \partial_\mu \psi_a^\alpha - \frac{ef}{N} (\bar{Z} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu Z) \psi_a^\alpha$$

e as transformações de "gauge" são

$$Z'^\alpha(x) = e^{i\Lambda(x)} Z^\alpha(x) \quad (2.87)$$

$$\psi_a'^\alpha(x) = e^{ie\Lambda(x)} \psi_a^\alpha(x)$$

É fácil ver que para os valores particulares $a=1$, $e=1$, $g_V=f$ e $M_B=0$ recaímos no caso supersimétrico (2.76).

Apesar de que a nossa finalidade seja trabalhar com o modelo CP^{N-1} com acoplamento mínimo,

$$S = \int d^2x \left\{ \bar{D}_\mu \bar{Z} \cdot D_\mu Z + \bar{\psi} \not{\partial} \psi \right\} \quad (2.88)$$

vamos considerar o modelo mais geral (2.80) mas sem a simetria de cor,

$$S = \int d^2x \left\{ \bar{D}_\mu \bar{Z} \cdot D_\mu Z + \bar{\psi} (\not{\partial} - M_B) \psi + \frac{e^2 f}{2N} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 - \frac{g_V}{2N} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_3 \psi)^2 \right] \right\} \quad (2.89)$$

para estudarmos, na expansão $1/N$, as propriedades de confinamento

e liberdade assintótica. Posteriormente iremos particularizar estas conclusões para o modelo em (2.88).

De forma análoga ao procedimento considerado no modelo CP^{N-1} puro, faremos a expansão $1/N$ da teoria considerando-se o funcional gerador das funções de Green Euclidianas,

$$Z[J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}] = \int D\bar{Z} DZ D\bar{\psi} D\psi \prod_x \delta(|Z|^2 - \frac{N}{2f}) \delta(\bar{\psi} \cdot Z) \delta(\bar{Z} \cdot \psi) \quad (2.90)$$

$$\exp \left\{ -S + \int d^2x [\bar{J} \cdot Z + \bar{Z} \cdot J + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta] \right\}$$

E, conforme feito em (2.26), introduzimos novamente campos auxiliares α , C e \bar{C} , como campos multiplicadores de Lagrange para os vínculos, e os campos λ_μ , ϕ e π que eliminarão da ação (2.89) a parte quártica nos campos,

$$\prod_x \delta \left(|z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \delta(\bar{\psi} \cdot Z) \delta(\bar{Z} \cdot \psi)$$

$$\exp \left[\int d^2x \left\{ -\frac{f}{2N} \left[\bar{Z} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu Z - e(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right]^2 + \frac{g_v}{2N} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_3 \psi)^2 \right] \right\} \right]$$

$$= \int D\alpha D\bar{C} DC D\lambda_\mu D\phi D\pi \exp \left\{ \int d^2x \left[\frac{i}{\sqrt{N}} \alpha \left(|Z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \right. \right. \quad (2.91)$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{N}} (C \bar{Z} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot Z C) - \left(m^2 + \frac{1}{N} \lambda_\mu^2 \right) |Z|^2 +$$

$$\left. \left. + \frac{i}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \left(\bar{Z} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu Z - e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) + \frac{1}{\sqrt{N}} (\phi \bar{\psi} \psi + \pi \bar{\psi} \gamma_3 \psi) - \frac{1}{2g_v} (\phi^2 + \pi^2) \right] \right\}$$

Novamente introduzimos o parâmetro m^2 conforme feito no CP^{N-1} puro.

Com os campos auxiliares o funcional gerador torna-se

$$Z[J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}] = \int D\bar{Z} DZ D\bar{\psi} D\psi D\alpha D\bar{C} DC D\lambda_\mu D\phi D\pi \exp \left\{ \right. \\ \left. - \int d^2x \left[\bar{Z} \cdot \Delta_B Z + \bar{\psi} \Delta_F \psi + \frac{i \sqrt{N}}{2f} \alpha + \frac{1}{2g_V} (\phi^2 + \pi^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{\sqrt{N}} (\bar{C} \bar{Z} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot Z C) - \bar{J} \cdot Z - \bar{Z} \cdot J - \bar{\eta} \cdot \psi - \bar{\psi} \cdot \eta \right] \right\} \quad (2.92)$$

onde

$$\Delta_B = -D_\mu D_\mu + m^2 - \frac{i}{\sqrt{N}} \alpha \quad \text{com} \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \quad (2.93)$$

$$\Delta_F = \not{\partial} - M_B - \frac{1}{\sqrt{N}} (\phi + \pi \gamma_5) \quad \text{com} \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{i e}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \quad (2.94)$$

Vamos efetuar primeiro a integral gaussiana sobre os férmions. Para isto usaremos a relação

$$\int D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ - \int d^2x \left(\bar{\psi} - \bar{\eta} \Delta_F^{-1} - \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{C} \bar{Z} \Delta_F^{-1} \right) \cdot \Delta_F \left(\psi - \Delta_F^{-1} \eta - \frac{i}{\sqrt{N}} \Delta_F^{-1} Z C \right) \right\} \\ = \exp (N \text{tr} \ln \Delta_F) \quad (2.95)$$

Assim (2.92) torna-se

$$Z[J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}] = \int D\bar{Z} DZ D\alpha D\bar{C} DC D\lambda_\mu D\phi D\pi \exp \left\{ \right. \\ \left. - \int d^2x \left[\bar{Z} \cdot \Delta_B Z - \frac{i}{\sqrt{N}} (\bar{C} \bar{Z} \cdot \Delta_F^{-1} \eta + \bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} Z C) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{\sqrt{N}} (\bar{C} \bar{Z} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot Z C) - \bar{J} \cdot Z - \bar{Z} \cdot J - \bar{\eta} \cdot \psi - \bar{\psi} \cdot \eta \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{N} \bar{C} \bar{Z} \cdot \Delta_F^{-1} Z C - \bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta - \bar{J} \cdot Z - \bar{Z} \cdot J + \frac{i \sqrt{N} \alpha}{2f} + \frac{1}{2g_v} (\phi^2 + \pi^2) \Big] \exp(N \operatorname{tr} \ln \Delta_F)$$

Agora integramos sobre Z e \bar{Z} usando a relação

$$\int D\bar{Z} DZ \exp \left\{ - \int d^2x \left[\bar{Z} - \left(\bar{J} + \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{\eta} \Delta_F^{-1} C \right) \left(\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{C} \Delta_F^{-1} C \right)^{-1} \right] \right. \\ \left. \left(\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{C} \Delta_F^{-1} C \right) \left[Z - \left(\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{C} \Delta_F^{-1} C \right) \left(J + \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{C} \Delta_F^{-1} \eta \right) \right] \right\} \quad (2.97) \\ = \exp \left\{ - N \operatorname{tr} \ln \left(\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{C} \Delta_F^{-1} C \right) + \int d^2x \left(\bar{J} + \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{\eta} \Delta_F^{-1} C \right) \left(\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{C} \Delta_F^{-1} C \right)^{-1} \left(J + \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{C} \Delta_F^{-1} \eta \right) \right\}$$

Obtemos assim a expressão do funcional gerador em termos da ação efetiva para o modelo em (2.89),

$$Z [J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}] = \int D\alpha D\bar{C} DC D\lambda_\mu D\phi D\pi \exp(-S_{\text{ef}} + S_{\text{fontes}}) \quad (2.98)$$

onde

$$S_{\text{ef}} = N \operatorname{tr} \ln \left(\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{C} \Delta_F^{-1} C \right) \\ - N \operatorname{tr} \ln \Delta_F + \int d^2x \left[\frac{i \sqrt{N} \alpha}{2f} + \frac{1}{2g_v} (\phi^2 + \pi^2) \right] \quad (2.99)$$

e

$$S_{fontes} = \int d^2x \left[\bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta \right] \quad (2.100)$$

$$+ \left(\bar{J} + \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{\eta} \Delta_F^{-1} C \right) \left(\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{C} \Delta_F^{-1} C \right)^{-1} \left(J + \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{C} \Delta_F^{-1} \eta \right)$$

Para o modelo mínimo (2.88) temos

$$S_{ef} = N \operatorname{tr} \ln \Delta_B - N \operatorname{tr} \ln \Delta_F + \frac{i \sqrt{N}}{2f} \int d^2x \alpha \quad (2.101)$$

$$S_{fontes} = \int d^2x \left[\bar{J} \cdot \Delta_B^{-1} J + \bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta \right]$$

com Δ_B dado em (2.93) e enquanto que Δ_F passa a ser

$$\Delta_F = \not{\partial} \quad (2.102)$$

As integrações funcionais sobre os campos auxiliares não podem ser exatamente efetuadas e assim novamente desenvolvemos a ação efetiva (2.99) para N grande. Além disso queremos fazer tal expansão em volta de um mínimo, o que corresponde a aproximação de fase estacionária.

Aqui, tal mínimo, diferente do caso puro, irá ocorrer para um campo constante ϕ não nulo, enquanto que o campo π pode assumir um valor nulo. Isto significa que no modelo mínimo ou supersimétrico, dentro da expansão $1/N$, a simetria quiral é espontaneamente quebrada.

Vejamos como isto ocorre.

Fazendo-se a variação da ação efetiva com relação aos campos ϕ e π , e levando-se em conta que o valor esperado de vácuo

para λ_μ é nulo, podemos obter as equações de extremo para o valor esperado destes campos supondo-se a invariância quiral ($M_B=0$). Para $\langle\phi\rangle$ obtemos

$$0 = -\sqrt{N} \operatorname{tr} \int d^2k \frac{1}{i\cancel{k} + \frac{\langle\phi\rangle}{\sqrt{N}}} + \frac{\langle\phi\rangle}{g_v} \quad (2.103)$$

Onde levamos em conta que a condição de extremo para $\langle\pi\rangle$ nos dá o valor nulo, $\langle\pi\rangle=0$.

De (2.103), após a introdução do parâmetro de regularização Λ e do ponto de renormalização μ , obtemos

$$0 = \langle\phi\rangle \left[\ln \frac{\Lambda^2}{\frac{\langle\phi\rangle^2}{N}} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right] - \frac{2\pi}{g_v(\mu)} \langle\phi\rangle \quad (2.104)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle\phi\rangle^2 &= N \mu^2 e^{-2\pi/g_v} \\ &\equiv N M_S^2 \end{aligned} \quad (2.105)$$

definindo assim a massa fermiônica gerada dinamicamente, conforme feito para a massa bosônica em (2.46).

Vamos agora redefinir os campos com relação ao valor esperado de vácuo,

$$\begin{aligned} \varphi &= \phi - \sqrt{N} M_S \\ \varphi_S &= \pi \end{aligned} \quad (2.106)$$

e proceder à expansão $1/N$ da ação efetiva (2.99) conforme (2.41).

Para o termo em \sqrt{N} temos

$$S^{(1)} = i \tilde{\alpha}(0) \left[\frac{1}{2f} - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \right] \quad (2.107)$$

$$+ 2M_S \tilde{\alpha}(0) \left[\frac{1}{2g_V} - \frac{M}{M_F} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + M^2} \right]$$

onde $M = M_B + M_S$, (2.108)

que é a massa total dos quarks, vem do fato de que ao substituirmos $\phi = \varphi + \sqrt{N} M_S$ em (2.94) obtemos a nova massa $M_B + M_S$.

No caso supersimétrico, $g_V = f$ e $M_B = 0$, notamos de (2.107) que a condição $S^{(1)} = 0$ ("saddle-point condition") implica que as massas geradas são iguais entre bósons e férmions ($m = M_S$), como é esperado pela supersimetria. Por outro lado vemos que o modelo exhibe também, conforme (2.107), liberdade assintótica

$$\frac{2\pi}{f(\Lambda)} = \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (2.109)$$

$$\frac{2\pi}{g_V(\Lambda)} = \frac{M}{M_F} \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} \quad (2.110)$$

Agora vamos nos ater ao problema do confinamento das partículas neste modelo. Para isto devemos considerar o termo quadrático $S^{(2)}$ na expansão de S_{ef} . Este termo pode ser escrito como

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \left[\alpha(x) \Gamma^{(\alpha)}(x-y) \alpha(y) + \lambda_\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}^{(\lambda)}(x-y) \lambda_\nu(y) + \right. \\ \left. \varphi(x) \Gamma^{(\varphi)}(x-y) \varphi(y) + \varphi_5(x) \Gamma^{(\varphi_5)}(x-y) \varphi_5(y) + \right. \\ \left. 2 \lambda_\mu(x) \Gamma_{\mu}^{(\lambda\varphi_5)}(x-y) \varphi_5(y) + 2 \bar{c}(x) \Gamma^{(\bar{c}c)}(x-y) c(y) \right] \quad (2.111)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^{(\alpha)}(p) = A(p; m^2) \quad (2.112a)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) = \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right\} \left\{ (p^2 + 4m^2) A(p; m^2) - 4e^2 M^2 A(p; M^2) + \frac{(e^2 - 1)}{\pi} \right\} \quad b)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(\varphi)}(p) = \left\{ \frac{1}{g_V} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} + (p^2 + 4M^2) A(p; M^2) \right\} \quad c)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(\varphi_5)}(p) = \left\{ \frac{1}{g_V} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} + p^2 A(p; M^2) \right\} \quad d)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(\lambda\varphi_5)}(p) = \varepsilon_{\mu\nu} p_\nu 2eMA(p; M^2) \quad e)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(\bar{c}c)}(p) = i \not{p} \left\{ \frac{1}{4\pi p^2} \ln \frac{M}{m} + \frac{1}{2p^2} (p^2 + m^2 - M^2) A(p; m^2; M^2) \right\} \quad f) \\ - M A(p; m^2; M^2)$$

com $A(p; m^2; M^2)$ indicando a integral de um "loop",

$$A(p; m^2; M^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(p+k)^2 + M^2][k^2 + m^2]} \quad (2.113)$$

$$= \frac{-1}{4\pi\sqrt{(p^2+M^2-m^2)^2+4p^2m^2}} \ln \frac{(M^2-m^2)^2 - \left[-p^2 + \sqrt{(p^2+M^2-m^2)^2+4p^2m^2}\right]^2}{(M^2-m^2)^2 - \left[p^2 + \sqrt{(p^2+M^2-m^2)^2+4p^2m^2}\right]^2}$$

e $A(p; m^2) = A(p, m^2; m^2)$, que reduz-se à definição original (2.48) e (2.52).

Ao calcularmos as integrais que definem $\tilde{\Gamma}(\varphi)$ e $\tilde{\Gamma}(\varphi_3)$ foi necessário a introdução do parâmetro regularizador Λ de Pauli-Villars. No limite $\Lambda \rightarrow \infty$ devemos exigir em (2.112c,d) que

$$\frac{1}{g_V} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} = \epsilon \geq 0 \quad (2.114)$$

para que esta expressão esteja de acordo com (2.110), que neste limite basicamente exige $(M_B/M_S) \rightarrow 0$, deveremos exigir o seguinte comportamento para a massa fermiônica inicial M_B em função do regularizador Λ ,

$$M_B(\Lambda) = \epsilon M_S \frac{2\pi}{\ln \left(\frac{\Lambda^2}{M_S^2} \right)} \quad (2.115)$$

Desta forma vemos que $M_B \rightarrow 0$ no limite $\Lambda \rightarrow \infty$, ou seja, neste limite a massa total dos quarks M coincide com a massa gerada M_S .

Nos modelos CP^{N-1} + férmions a expansão $1/N$ nos fornece a descrição de quarks e partons (partículas Z) como sendo partículas massivas. Estas partículas interagem pela troca dos quanta $\alpha, \lambda_\mu, \varphi, \varphi_3$ e C .

Os seus propagadores são

$$D^{(\bar{z}z)}(p) = (p^2 + m^2)^{-1} \quad (2.118a)$$

$$D^{(\bar{\psi}\psi)}(p) = (i\not{p} - M)^{-1} \quad b)$$

$$D^{(\omega)}(p) = [A(p, m^2)]^{-1} \quad c)$$

$$D^{(\lambda)}(p) = \tilde{\Gamma}^{(\varphi_S)} \left[\tilde{\Gamma}^{(\lambda)} \tilde{\Gamma}^{(\varphi_S)} + p^2 (\tilde{\Gamma}^{(\lambda\varphi_S)})^2 \right]^{-1} \quad d)$$

$$D^{(\varphi)}(p) = \left[\varepsilon + (p^2 + 4M^2)A(p, M^2) \right]^{-1} \quad e)$$

$$D^{(\varphi_S)}(p) = \tilde{\Gamma}^{(\lambda)} \left[\tilde{\Gamma}^{(\lambda)} \tilde{\Gamma}^{(\varphi_S)} + p^2 (\tilde{\Gamma}^{(\lambda\varphi_S)})^2 \right]^{-1} \quad f)$$

$$D^{(\lambda\varphi_S)}(p) = \tilde{\Gamma}^{(\lambda\varphi_S)} \left[\tilde{\Gamma}^{(\lambda)} \tilde{\Gamma}^{(\varphi_S)} + p^2 (\tilde{\Gamma}^{(\lambda\varphi_S)})^2 \right]^{-1} \quad g)$$

$$D^{(\bar{c}c)}(p) = \left[\tilde{\Gamma}^{(\bar{c}c)} \right]^{-1}$$

Aqui por simplicidade, fixamos o gauge de Lorentz $\partial'_\mu \lambda_\mu = 0$.

Nas expressões acima usamos o parâmetro ε definido em (2.114) e introduzimos a notação $\tilde{\Gamma}^{(\lambda)}(p)$ e $\tilde{\Gamma}^{(\lambda\varphi)}(p)$ por meio das funções abaixo

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{\Gamma}^{(\lambda)}(p) \quad (2.117)$$

$$\tilde{\Gamma}_\mu^{(\lambda\varphi_S)}(p) = \varepsilon_{\mu\nu} p_\nu \tilde{\Gamma}^{(\lambda\varphi)}(p)$$

Levemos nossa atenção ao propagador do campo λ_μ para tirarmos conclusões sobre o confinamento.

As trocas de α , φ e C são de curto alcance. De (2.118d) e

da expansão

$$A(p, m^2) = \frac{1}{4\pi m^2} \left(1 - \frac{p^2}{6m^2}\right), \quad p \rightarrow 0 \quad (2.118)$$

obtemos novamente, como no caso sem quarks, no caso sem quarks, que o propagador de λ_μ tem um polo em $p^2=0$,

$$D^{(\lambda)}(p) = \frac{c}{p^2} + O(1) \quad (2.119)$$

sendo

$$c = \epsilon \frac{12 \pi^2 m^2 M^2}{3e^2 m^2 + \epsilon \pi (M^2 + 2e^2 m^2)} \quad (2.120)$$

A situação $\epsilon \neq 0$, a qual corresponde a termos a massa dos quarks $M_B \neq 0$, continua dando origem a um potencial Coulombiano linear. Deste modo a troca dos quanta λ_μ faz com que os quarks e partons deste modelo estejam confinados.

A outra situação $\epsilon = 0$, ou seja $M_B = 0$, que é o caso no modelo mínimo e no supersimétrico, faz com que o polo no propagador $D^{(\lambda)}(p)$ em (2.119) desapareça. Isto traz como consequência a não existência da força confinante e por este motivo os quarks e partons são liberados.

2.3 OS MODELOS CP^{N-1} COM FÉRMIONS MÍNIMOS

Voltemos ao modelo (2.88) no qual acoplamos férmions minimamente.

$$Z [J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}] = \int D\bar{Z} DZ D\psi D\bar{\psi} \prod_x \delta \left(|z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \quad (2.121)$$

$$\exp \left\{ - \int d^2x \left[\bar{D}_\mu \bar{Z} \cdot D_\mu Z + \bar{\psi} \not{D} \psi \right] + S_{fontes} \right\}$$

A parte fermiônica do funcional gerador é completamente integrável conforme podemos obter de (2.95),

$$Z [J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}] = \int D\bar{Z} DZ \prod_x \delta \left(|z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \quad (2.122)$$

$$\exp \left\{ N \operatorname{tr} \ln \Delta_F - \int d^2x \bar{D}_\mu \bar{Z} \cdot D_\mu Z + S'_{fontes} \right\}$$

Aqui temos $\Delta_F = \not{D}$ conforme (2.102). De (2.94) obtemos para o modelo mínimo

$$\begin{aligned} \not{D} &= \gamma_\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{N}} \lambda_\mu \right) \\ &= \gamma_\mu (\partial_\mu + i A_\mu) \end{aligned} \quad (2.123)$$

Novamente introduzimos a notação do campo de "gauge" A_μ , (2.67).

O traço do operador fermiônico é completamente determinado neste modelo.

$$\text{tr} \ln \not{D} = \lim_{m \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{\not{D} + m} i \not{b} \right) \quad (2.124)$$

Devido as propriedades do traço sobre as matrizes γ_μ e da integração ímpar no espaço dos momentos obtemos como única contribuição não nula o segundo termo da expansão do logaritmo em (2.124),

$$\text{tr} \ln \not{D} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{tr} \int \frac{d^2 k d^2 q'}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\rho(q' - k) \frac{ik + m}{k^2 + m^2} \gamma_\rho \frac{iq' + m}{q'^2 + m^2} \gamma_\lambda \tilde{A}_\lambda(k - q') \quad (2.125)$$

Fazendo $p = q' - k$ e tomando o traço sobre as matrizes γ_μ no espaço bidimensional obtemos,

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \tilde{A}_\rho(p) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{-2k_\rho k_\lambda + k^2 \delta_{\rho\lambda} - k_\rho p_\lambda - k_\lambda p_\rho + k_\nu p_\nu \delta_{\rho\lambda}}{(k^2 + m^2) [(k+p)^2 + m^2]} \tilde{A}_\lambda(-p) \quad (2.126)$$

Vamos reescrever o resultado acima,

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \tilde{A}_\rho(p) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{-2k_\rho k_\lambda + k^2 \delta_{\rho\lambda} - k_\rho p_\lambda - k_\lambda p_\rho + k_\nu p_\nu \delta_{\rho\lambda}}{([(k+p)^2 + m^2] x + (k^2 + m^2) (1-x))^2} \tilde{A}_\lambda(-p) \quad (2.127)$$

Esta forma nos permite fazer a integração em k usando a regularização dimensional e tomar o parâmetro $m=0$. Após algum

cálculo chegamos a

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \tilde{A}_\rho(p) \left(\frac{p_\rho p_\lambda}{p^2} - \delta_{\rho\lambda} \right) \tilde{A}_\lambda(-p) \quad (2.128)$$

Portanto (2.102) pode ser reescrita como

$$Z[J, \bar{J}] = \int D\bar{Z} DZ \prod_x \delta \left(|z|^2 - \frac{N}{2f} \right) \quad (2.129)$$

$$\exp \left\{ - \int d^2 x \left[\bar{D}_\mu \bar{Z} \cdot D_\mu Z + \frac{N}{2\pi} A_\rho(x) \left(\delta_{\rho\lambda} - \frac{\partial_\rho \partial_\lambda}{\partial^2} \right) A_\lambda(x) \right] + S_{\text{fontes}} \right\}$$

O procedimento de fixação do "gauge" que usamos no modelo puro, conforme (2.55), pode analogamente ser estendido para o modelo com férmions⁽¹⁷⁾. Deste modo a ação que obtivemos em (2.129) resume-se a

$$S = \int d^2 x \left[\bar{D}_\mu \bar{Z} \cdot D_\mu Z + \frac{N}{2\pi} A^2(x) \right] \quad (2.130)$$

O campo de "gauge" A_μ no modelo acima, de forma análoga ao modelo CP^{N-1} puro (2.22), é substituído agora por

$$A_\mu(x) = i \frac{2}{N \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\pi} \right)} \bar{Z} \cdot \partial_\mu Z \quad (2.131)$$

Por outro lado, se tivéssemos partido da ação (2.9) ao invés de (2.21) teríamos a seguinte ação em (2.130)

$$S = \frac{N}{2f} \int d^2x \left[\bar{D}_\mu Z \cdot D_\mu Z + \frac{f}{\pi} A^2(x) \right] \quad (2.132)$$

E neste caso teríamos

$$A_\mu(x) = \frac{i\pi}{f + \pi} \bar{Z} \cdot \partial_\mu Z \quad (2.133)$$

Substituindo (2.133) em (2.132) obtemos

$$S = \frac{N}{2f} \int d^2x \left[\bar{D}_\mu Z \cdot D_\mu Z + \frac{f\pi}{(f + \pi)^2} (\bar{Z} \cdot \partial_\mu Z)^2 \right] \quad (2.134)$$

com $\bar{Z} \cdot Z = 1$.

Esta ação também será usada para fazermos simulações numéricas para a determinação do "gap" de massa dos campos Z^α .

CAPÍTULO III

MODELOS σ -NÃO LINEARES NA REDE

Neste capítulo desenvolveremos a formulação de rede para os modelos σ -não lineares. Em particular para a classe de modelos CP^{N-1} faremos a correspondente expansão $1/N$ visando a determinação algébrica de grandezas físicas no limite de $N \rightarrow \infty$.

3.1 MODELOS $\alpha(N)$

Consideremos uma rede bidimensional de espaçamento a . Um ponto nesta rede é designado por $\vec{n} + \hat{\mu}$. O versor $\hat{\mu}$ refere-se às duas direções ortonormais $\hat{1}$ e $\hat{2}$ nesta rede. Usaremos simplesmente a notação n e μ para nos referirmos a uma dada direção.

Para uma distância infinitesimal a temos, no ponto da rede $n + \mu$, a seguinte relação com o contínuo

$$S_{n+\mu} = S_n + a \frac{\partial}{\partial \mu} S_n + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} S_n + O(a^3) \quad (3.1)$$

No que segue tomaremos $a=1$.

Deste modo a ação (2.1) que corresponde à classe de modelos com simetria $\alpha(N)$ pode ser escrita, utilizando-se a notação acima para os campos, como

$$S = \beta \sum_{n,\mu} \left[1 - \sum_a S_{n+\mu}^a S_n^a \right] \quad (3.2)$$

tendo o vínculo

$$\sum_{a=1}^N S_n^a S_n^a = 1 \quad (3.3)$$

Para as simulações numéricas usaremos a ação

$$S_{\alpha(N)} = - \beta \sum_{n,\mu} S_{n+\mu} \cdot S_n \quad (3.4)$$

que difere de (3.2) por uma constante aditiva.

A expansão $1/N$ na rede para este modelo pode ser efetuada, de forma análoga a que faremos para os CP^{N-1} , e relações envolvendo quantidades físicas podem ser obtidas no limite de N grande⁽²¹⁾. Entretanto para N finito (pequeno) torna-se necessário determinar correções, que irão depender de N , para a grandeza física obtida no limite de N grande⁽¹¹⁾.

3.2 MODELOS CP^{N-1} E A EXPANSÃO $1/N$

Para os modelos CP^{N-1} em (2.9) temos a seguinte ação na rede (22,23)

$$S = \frac{N}{2f} \sum_{n,\mu} \left[1 - |\bar{z}_{n+\mu} \cdot z_n|^2 \right] \quad (3.5)$$

com

$$\sum_{\alpha} \bar{z}_n^{\alpha} z_n^{\alpha} = 1 \quad (3.6)$$

Novamente desconsideramos a constante aditiva,

$$S_{CP^{N-1}} = \frac{-N}{2f} \sum_{n,\mu} |\bar{z}_{n+\mu} \cdot z_n|^2 \quad (3.7)$$

O funcional gerador na rede é

$$Z[J, \bar{J}] = \frac{1}{Z[0,0]} \int \prod_{\alpha,n} d\bar{z}_n^{\alpha} dz_n^{\alpha} \prod_m \delta(\bar{z}_m \cdot z_m - 1) \exp \left\{ -S + \sum_n (\bar{z}_n \cdot J_n + \bar{J}_n \cdot z_n) \right\} \quad (3.8)$$

Seguindo o procedimento do contínuo vamos reescalonar os campos para efetuar a expansão $1/N$,

$$\sqrt{N/2f} z_{n+\mu} + z_n \quad (3.9)$$

e,

$$\sqrt{2f/N} \alpha_{n+\mu} + \alpha_n$$

é o campo auxiliar que implementou o vínculo.

Introduzimos também o campo $\lambda_{n\mu}$ que torna a ação quadrática em Z_n .

Assim obtemos

$$Z[J, \bar{J}] = \frac{1}{Z[0,0]} \prod_n \int d\bar{Z}_n dZ_n d\alpha_n d\bar{\lambda}_{n\mu} d\lambda_{n\mu} \exp \left\{ \sum_{n,\mu} \left[-\frac{N}{2f} \bar{\lambda}_{n\mu} \lambda_{n\mu} + \bar{Z}_{n+\mu} \cdot Z_n \lambda_{n\mu} + \bar{Z}_n \cdot Z_{n+\mu} \bar{\lambda}_{n\mu} \right] + \sum_n \left[i \frac{\alpha_n}{\sqrt{N}} (\bar{Z}_n \cdot Z_n - \frac{N}{2f}) + \sqrt{\frac{2f}{N}} (\bar{Z}_n \cdot J_n + \bar{J}_n \cdot Z_n) \right] \right\} \quad (3.10)$$

Antes de fazermos a integração em Z_n precisaremos ter todos os campos no mesmo ponto. Para isto usamos

$$\sum_{n,\mu} \bar{Z}_n \bar{\lambda}_{n\mu} Z_{n+\mu} = \sum_{m,n} \bar{Z}_n O_{nm} Z_m \quad (3.11)$$

onde

$$O_{nm} = \sum_{\mu} \bar{\lambda}_{n\mu} \delta_{n+\mu, m}$$

Portanto

$$Z[J, \bar{J}] = \frac{1}{Z[0,0]} \prod_n \int d\bar{Z}_n dZ_n d\alpha_n d\bar{\lambda}_{n\mu} d\lambda_{n\mu} \exp \left\{ -\sum_{m,n} \bar{Z}_n \cdot B_{nm} Z_m - \frac{N}{2f} \sum_n \left[\frac{i\alpha_n}{\sqrt{N}} + \sum_{\mu} \bar{\lambda}_{n\mu} \lambda_{n\mu} \right] + \sqrt{\frac{2f}{N}} \sum_n (\bar{Z}_n \cdot J_n + \bar{J}_n \cdot Z_n) \right\} \quad (3.12)$$

onde

$$B_{nm} = - \sum_{\mu} (\delta_{n,m+\mu} \lambda_{m\mu} + \delta_{n+\mu,m} \bar{\lambda}_{n\mu}) - i \frac{\alpha_n}{\sqrt{N}} \delta_{nm} \quad (3.13)$$

A integração em Z_n nos fornece

$$Z[J, \bar{J}] = \frac{1}{Z[0,0]} \prod_n \int d\alpha_n d\bar{\lambda}_{n\mu} d\lambda_{n\mu} \exp \left\{ -S_{ef} + \frac{2f}{N} \sum_{n,m} \bar{J}_n \cdot B_{nm}^{-1} J_m \right\} \quad (3.14)$$

com a ação efetiva sendo

$$S_{ef} = N \operatorname{tr} \ln B + \frac{N}{2f} \sum_n \left[\frac{i\alpha_n}{\sqrt{N}} + \sum_{\mu} \bar{\lambda}_{n\mu} \lambda_{n\mu} \right] \quad (3.15)$$

onde B é a matriz dada em (3.13).

Com a transformada de Fourier dos campos auxiliares,

$$\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \alpha(p) e^{ipn}, \quad \alpha(p) = \sum_n \alpha_n e^{-ipn} \quad (3.16)$$

$$\lambda_{n\mu} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \lambda_{\mu}(p) e^{ipn}, \quad \lambda_{\mu}(p) = \sum_n \lambda_{n\mu} e^{-ipn}$$

e com

$$B_{nm} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} B(p, q) e^{-ipn} e^{iqm} \quad (3.17)$$

$$B(p, q) = \sum_{n,m} B_{nm} e^{ipn} e^{-iqm}$$

obtemos a seguinte expressão para (3.13) no espaço dos momentos

$$B(p, q) = - \sum_{\mu} \left[\lambda_{\mu}(q-p) e^{iq_{\mu}} + \bar{\lambda}_{\mu}(p-q) e^{-iq_{\mu}} \right] - i \frac{\alpha(q-p)}{\sqrt{N}} \quad (3.18)$$

Para a determinação dos pontos estacionários α_n e $\lambda_{n\mu}$ da ação efetiva (3.15) vamos escrever estes campos da seguinte forma

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{N}} = i\alpha + \delta\alpha_n \quad (3.19)$$

$$\lambda_{n\mu} = \lambda_{\mu} + \delta\lambda_{n\mu}$$

onde a invariância translacional na rede exige que os pontos estacionários sejam independentes de n .

Aqui $\delta\alpha_n$ e $\delta\lambda_{n\mu}$ são as flutuações em torno dos valores estacionários α e λ_{μ} .

O fator i , com α real, é exigido por razões de convergência neste caso pois o valor esperado de vácuo para α não é nulo.

Deste modo obtemos a seguinte ação

$$S_{\text{ef}} = \frac{-NV}{2f} \left[\alpha - \sum_{\mu} \bar{\lambda}_{\mu} \lambda_{\mu} \right] + NV \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left[\alpha - \sum_{\mu} \left(\lambda_{\mu} e^{ip_{\mu}} + \bar{\lambda}_{\mu} e^{-ip_{\mu}} \right) \right] \quad (3.20)$$

onde V é o volume da rede.

Antes de minimizarmos a ação acima vamos reescrever λ_{μ} que é geralmente complexo como

$$\lambda_{\mu} = |\lambda_{\mu}| e^{i\theta_{\mu}} \quad (3.21)$$

deste modo vemos que a ação torna-se independente da fase global em λ_μ . Por este motivo podemos escolher $\theta_\mu = 0$ e assim $\lambda_\mu = \bar{\lambda}_\mu = |\lambda_\mu|$.

Notemos que devido a (3.19) nós não podemos fazer uma mudança local na fase de λ_μ , ou seja, no ponto de mínimo para $N = \infty$ nós perdemos a invariância de "gauge" local.

Os pontos estacionários de (3.20) são determinados pelas equações acopladas

$$\frac{1}{2f} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\alpha - 2 \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \cos p_{\mu}} \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{2f} \lambda_{\mu} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\cos p_{\mu}}{\alpha - 2 \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \cos p_{\mu}}$$

Se assumirmos que λ_{μ} não dependa da direção μ , i.e., $\lambda_{\mu} = \lambda$, então as equações (3.22) são equivalentes a

$$\frac{1}{2f} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\alpha - 2\lambda \sum_{\mu} \cos p_{\mu}} \quad (3.23a)$$

$$\alpha - 4\lambda^2 = 2f \quad (3.23b)$$

Vamos agora calcular algumas funções de Green na expansão $1/N$ envolvendo os campos Z .

A função de Green de 2 pontos é obtida diretamente de (3.14) diferenciando-se com relação às fontes externas. Portanto na aproximação em que estamos trabalhando ($N = \infty$) temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{Z}_n^\alpha Z_m^\beta \rangle &= \delta^{\alpha\beta} B_{nm}^{-1} \\ &= \delta^{\alpha\beta} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip(n-m)}}{D(p)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde

$$D(p) = \alpha - 2\lambda \sum_{\mu} \cos p_{\mu} \quad (3.25)$$

A função de 4 pontos é

$$\langle \bar{Z}_n^\alpha \bar{Z}_m^\beta Z_r^\gamma Z_s^\delta \rangle = B_{rs}^{-1} B_{nm}^{-1} \delta^{\gamma\delta} \delta^{\alpha\beta} + B_{ns}^{-1} B_{rm}^{-1} \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \quad (3.26)$$

Voltemos à ação em (3.7). Por razões computacionais futuras vamos denominar a constante na ação da classe dos modelos CP^{N-1} de β_c ,

$$\beta_c = \frac{N}{2f} \quad (3.27)$$

Com os resultados obtidos acima torna-se fácil calcular a energia interna por sítio da rede definida como segue,

$$U = \frac{1}{V} \frac{d}{d\beta_c} \ln Z \quad (3.28)$$

Tomando neste caso como função de partição a expressão em (3.8), com os campos não reescalados, obtemos

$$U = \frac{1}{V} \left\langle \sum_{n,\mu} |\bar{Z}_{n+\mu} \cdot Z_n|^2 \right\rangle \quad (3.29)$$

Fazendo uso da função de 4 pontos em (3.26) com os campos não reescalados determinamos uma expressão analítica para a energia interna,

$$U = \frac{2}{\hat{\beta}_c^2} \left[\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\text{cosp}_\mu}{D(p)} \right]^2 \quad (3.30)$$

onde introduzimos

$$\hat{\beta}_c = \frac{\beta_c}{N} \quad (3.31)$$

para que em (3.30) tivéssemos o termo predominante na ordem zero em N , pois o resultado que obtemos com este tipo de abordagem corresponde a $N=\infty$.

Da condição (3.22) obtemos

$$U = 2 \lambda^2 = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\hat{\beta}_c} \right) \quad (3.32)$$

As equações em (3.23) podem ser escritas respectivamente como

$$\hat{\beta}_c \alpha = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{1 - \gamma \sum_{\mu} \cos p_{\mu}} = \frac{2}{\pi} K(2\gamma) \quad (3.33a)$$

$$\alpha - 4\lambda^2 = 1/\hat{\beta}_c \quad (3.33b)$$

onde definimos

$$\gamma = \frac{2\lambda}{\alpha} \quad (3.34)$$

e sendo $K(2\gamma)$ a integral elíptica completa.

Como havíamos mencionado, a simetria local

$$\begin{aligned}
 z_n &\rightarrow e^{i\theta_n} z_n \\
 \bar{z}_n &\rightarrow e^{-i\theta_n} \bar{z}_n \\
 \lambda_{n\mu} &\rightarrow e^{i(\theta_{n+\mu} - \theta_n)} \lambda_{n\mu}
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

que é perdida em $N=\infty$ pode ser restaurada desde que λ possa assumir o valor $\lambda = 0$. Os autores da ref. (23) afirmam que a possibilidade da quebra espontânea desta simetria reflete no aparecimento de duas fases no modelo de rede. Estas fases chamaríamos de acoplamento forte e fraco em $\hat{\beta}_c$.

Na fase de acoplamento forte definida para $\hat{\beta}_c \leq 1$, tem-se a solução⁽²³⁾ $\lambda=0$ e conseqüentemente

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 1/\hat{\beta}_c
 \tag{3.36}$$

Como pode ser facilmente verificado, as condições (3.36) são soluções das equações (3.33) correspondendo à fase definida por acoplamento forte. Por outro lado, para $\hat{\beta}_c$ suficientemente grande existem soluções para as equações de mínimo (3.33) com $\lambda \neq 0$, correspondendo à fase definida por acoplamento fraco.

No limite $\hat{\beta}_c \rightarrow \infty$ as soluções das equações de movimento (3.33) tendem aos seguintes valores,

$$\gamma \rightarrow 1/2, \quad \alpha \rightarrow 4
 \tag{3.37}$$

e conseqüentemente temos

$$\lambda \rightarrow 1. \quad (3.38)$$

Daqui obtemos o limite

$$U \rightarrow 2 \quad (3.39)$$

para a energia interna (3.32).

Em nossas simulações numéricas com os modelos CP^{N-1} procuramos também verificar o limite (3.39) utilizando alguns valores de N .

Passemos agora ao cálculo do "gap" de massa.

Esta quantidade é determinada a partir das correlações entre autoestados de momento zero,

$$G(\Delta t) = \langle \tilde{\phi}(t) \tilde{\phi}(t+\Delta t) \rangle \quad (3.40)$$

onde

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_{x=0}^{L-1} \phi(x, t) \quad (3.41)$$

Das duas equações acima tira-se a definição do "gap" de massa (24)

$$m(\Delta t) = -1/\Delta t \ln \left| \frac{G(\Delta t)}{G(0)} \right|, \quad \Delta t = 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

A formulação na rede dos modelos CP^{N-1} fornece-nos a expressão (3.24) para a função de 2 pontos. Em termos dos campos não reescalados obtemos

$$\langle \bar{Z}_n^\alpha Z_m^\beta \rangle = \frac{1}{N \hat{\beta}_c} \delta^{\alpha\beta} B_{nm}^{-1} \quad (3.43)$$

A soma sobre a direção ortogonal àquela definida pelos

dois sítios n e m nos dá a função de correlação dependente unicamente da distância l entre estes dois pontos,

$$G(l) = \sum_{\mu \perp} \langle \bar{z}_{n+l\mu}^\alpha z_n^\alpha \rangle = \tag{3.44}$$

$$= \frac{1}{\hat{\beta}_c} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\cos l \pi}{\alpha - 2\lambda(1 - \cos p)}$$

Com a integral acima obtemos

$$G(l) = \frac{1}{\hat{\beta}_c} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-4\lambda)}} \left[\frac{\alpha - 2\lambda - \sqrt{\alpha(\alpha-4\lambda)}}{2\lambda} \right]^l \tag{3.45}$$

Para longas distâncias o comportamento de $G(l)$ define o "gap" de massa m ,

$$G(l) \underset{l \gg 1}{\sim} e^{-am l}, \tag{3.46}$$

a qual combinada com expressão (3.45) nos fornece a massa gerada

$$am = \ln \frac{\gamma}{1-\gamma-\sqrt{1-2\gamma}} \tag{3.47}$$

com γ já definido em (3.34).

Vejamos o comportamento de am para $\hat{\beta}_c \gg 1$.

Das equações de mínimo (3.33) e do comportamento assintótico de $K(2\gamma)$ obtem-se, para $\hat{\beta}_c \rightarrow \infty$,

$$\gamma_{\beta \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{2\pi} - 4e^{-4\pi\hat{\beta}_c (1 + \sqrt{1 - 1/\hat{\beta}_c})} \quad (3.48)$$

o que nos dá o seguinte comportamento para a massa em função de $\hat{\beta}_c$

$$am_{\beta \rightarrow \infty} \sim 4\sqrt{2} e^{\pi/2} e^{-2\pi\hat{\beta}_c} \quad (3.49)$$

Deste modo obtemos o comportamento exponencial para a massa gerada neste formalismo de rede.

3.3 MODELOS CP^{N-1} COM FÉRMIONS MÍNIMOS

Para simularmos o efeito do acoplamento dos férmions de massa nula consideramos a ação (2.134). Esta ação corresponde a classe dos modelos que resulta do acoplamento de férmions mínimos aos modelos CP^{N-1} .

A versão na rede para a ação (2.134) é

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{-N}{2f} \left(1 - \frac{f}{\pi+f} \right) \sum_{n,\mu} |\bar{z}_{n+\mu} \cdot z_n|^2 - \frac{N}{2f} \frac{f}{\pi+f} \sum_{n,\mu} (\bar{z}_{n+\mu} \cdot z_n + \bar{z}_n \cdot z_{n+\mu}) \\
 & + \frac{N}{2f} \left(1 + \frac{f}{\pi+f} \right) \sum_{n,\mu} 1
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

A condição de vínculo permanece sendo a equação (3.6) dos modelos CP^{N-1} puros.

A QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA

Neste capítulo mostraremos como o método de quantização introduzido por Parisi e Wu⁽²⁵⁾ pode ser usado para estudar os modelos CP^{N-1} . Como veremos, este método de quantização faz uso da equação de Langevin e é por meio desta que as configurações de campo e as funções de correlação podem ser obtidas tanto analítica como numericamente.

4.1 A FORMULAÇÃO DE PARISI E WU

O método da quantização estocástica (MQE) é uma formulação alternativa para se quantizar teoria de campos em contrapartida aos formalismos usuais, ou seja, o canônico e o de integrais de trajetória. Esta nova formulação foi introduzida por Parisi e Wu e apresenta particular utilidade quando aplicada às teorias de "gauge", pois neste caso o MQE oferece a possibilidade de fazermos a quantização destas teorias sem a necessidade de nos preocuparmos com a fixação do "gauge".

O MQE tem a sua formulação centralizada na equação estocástica de Langevin e o tempo que aparece nesta equação é introduzido como correspondendo a uma dimensão temporal extra. Com isto, além da dependência nas variáveis do espaço-tempo usual, os campos passam a depender também desta nova variável.

Vejamos como isto ocorre.

Tomemos, por exemplo, uma teoria de campo escalar Euclidiana, representada pela ação $S[\phi(x)]$ em um espaço-tempo D -dimensional. Parisi e Wu interpretaram este sistema físico como estando acoplado a um reservatório de calor em $(D+1)$ dimensões e passando o campo escalar ϕ a depender das variáveis deste espaço $(D+1)$ -dimensional, $\phi = \phi(x, \tau)$.

A dimensão temporal extra é interpretada como a direção na qual o sistema tende para a sua distribuição de equilíbrio termodinâmico a medida que $\tau \rightarrow \infty$.

O MQE de Parisi e Wu consiste em considerar que o sistema alcança a distribuição de equilíbrio segundo a equação estocástica de Langevin,

$$\frac{\partial \phi(x, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x, \tau)} + \eta(x, \tau) \quad (4.1)$$

onde $\eta(x, \tau)$ é uma fonte aleatória com distribuição gaussiana,

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_{\eta} = 2\delta^D(x-x') \delta(\tau-\tau')$$

$$\langle \eta(x_1, \tau_1) \dots \eta(x_{2n+1}, \tau_{2n+1}) \rangle_{\eta} = 0 \quad (4.2)$$

$$\langle \eta(x_1, \tau_1) \dots \eta(x_{2n}, \tau_{2n}) \rangle_{\eta} = \sum_{\substack{\text{pares} \\ \text{possíveis} \\ \text{comb. de pares}}} \langle \eta(x_i, \tau_i) \eta(x_j, \tau_j) \rangle_{\eta}$$

Com o valor esperado estocástico sendo definido por

$$\langle F[\eta] \rangle_{\eta} = \frac{\int D\eta F[\eta] e^{-\frac{1}{4} \int d^D x d\tau \eta^2(x, \tau)}}{\int D\eta e^{-\frac{1}{4} \int d^D x d\tau \eta^2(x, \tau)}} \quad (4.3)$$

A equação (4.1) pode ser resolvida, dada alguma condição de contorno em $\tau = 0$, e obtemos a solução em termos de η , $\phi(x, \tau) = \phi_{\eta}(x, \tau)$.

O aspecto fundamental da quantização estocástica é que devemos obter, para qualquer média estocástica, o mesmo valor esperado no vácuo que a correspondente teoria de campo quântica Euclidiana no limite $\tau \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle F[\phi_{\eta}(x, \tau)] \rangle_{\eta} = \langle F[\phi(x)] \rangle \quad (4.4)$$

onde F é qualquer funcional dos campos $\phi_\eta(x, \tau)$.

No caso da função de Green de n pontos

$$\langle \phi_\eta(x_1, \tau_1) \dots \phi_\eta(x_n, \tau_n) \rangle_\eta$$

deveremos tomar primeiro o limite a tempos iguais $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = \tau$ para que possamos usar (4.4) e a seguir tomamos o limite $\tau \rightarrow \infty$,

$$\langle \phi_\eta(x_1, \tau) \dots \phi_\eta(x_n, \tau) \rangle_\eta \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (4.5)$$

onde o lado direito da equação acima é o valor esperado obtido pelo procedimento usual em teoria de campos.

Vamos agora definir a distribuição de probabilidade^(26,27) para campos escalares tendo em vista os valores esperados determinados por meio de (4.3),

$$P[\phi, \tau] = \frac{\int D\eta \delta(\phi(x) - \phi_\eta(x, \tau)) e^{-\frac{1}{4} \int d^D x d\tau \eta^2(x, \tau)}}{\int D\eta e^{-\frac{1}{4} \int d^D x d\tau \eta^2(x, \tau)}} \quad (4.6)$$

Com a definição acima para $P[\phi, \tau]$ podemos reescrever o valor esperado estocástico,

$$\langle F[\phi_\eta(x, \tau)] \rangle_\eta = \int D\phi F[\phi(x)] P[\phi, \tau] \quad (4.7)$$

Observe que ϕ em $F[\phi]$, no lado direito da equação acima, não depende de τ .

Suporemos o processo estocástico que determina as confi-

gurações de campo como sendo Markoviano⁽²⁸⁾. Com isto podemos determinar a equação de evolução para a distribuição de probabilidade $P[\phi, \tau]$. Isto é feito a partir da seguinte expressão

$$\int D\phi F[\phi] \left(P[\phi, \tau + \Delta\tau] - P[\phi, \tau] \right) \quad (4.8)$$

a qual determina a evolução para $\Delta\tau$ infinitesimal.

Utilizando-se a expansão funcional de $F[\phi]$ em torno de $\tilde{\phi}$, que é uma configuração definida no instante τ ,

$$F[\phi] = F[\tilde{\phi}] + \int dx' \Delta\phi(x') \frac{\delta F[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(x')} + \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{2} \int dx' dx'' \Delta\phi(x') \Delta\phi(x'') \frac{\delta^2 F[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(x') \delta \tilde{\phi}(x'')} + O[(\Delta\phi)^3],$$

chegamos a expressão^(27,29)

$$\int D\phi F[\phi] \left(P[\phi, \tau + \Delta\tau] - P[\phi, \tau] \right) = \int D\tilde{\phi} \int dx' \frac{\delta F[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(x')} P[\tilde{\phi}, \tau] \langle \Delta\phi(x') \rangle_{\eta} \quad (4.10)$$

$$+ \frac{1}{2} \int D\tilde{\phi} \int dx' dx'' \frac{\delta^2 F[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(x') \delta \tilde{\phi}(x'')} P[\tilde{\phi}, \tau] \langle \Delta\phi(x') \Delta\phi(x'') \rangle_{\eta}$$

onde

$$\langle \Delta\phi(x) \rangle_{\eta} \equiv \langle \phi(x, \tau + \Delta\tau) - \tilde{\phi}(x, \tau) \rangle_{\eta}$$

é o valor estocástico esperado devido a probabilidade de transi-

ção de passarmos da configuração $\tilde{\phi}$ para ϕ no intervalo de tempo $\Delta\tau$.

De (4.1) e (4.2) temos que

$$\langle \Delta\phi \rangle_{\eta} = - \frac{\delta S}{\delta \tilde{\phi}} \Delta\tau \quad (4.11)$$

$$\langle \Delta\phi(x_1) \Delta\phi(x_2) \rangle_{\eta} = 2\delta(x_1 - x_2) \Delta\tau + O(\Delta\tau)^2$$

o que nos leva a obter, de (4.9), no limite $\Delta\tau \rightarrow \infty$, a equação de Fokker-Planck, para a distribuição de probabilidade $P[\phi, \tau]$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P[\phi, \tau] = \int d^D x \left\{ \frac{\delta}{\delta \phi} \left[P[\phi, \tau] \frac{\delta S}{\delta \phi} \right] + \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} P[\phi, \tau] \right\} \quad (4.12)$$

De (4.12) a distribuição de equilíbrio normalizada é

$$P[\phi] = \frac{e^{-S[\phi]}}{\int D\phi e^{-S[\phi]}} \quad (4.13)$$

a qual é obtida para $\tau \rightarrow \infty$. Para vermos como isto ocorre vamos introduzir o funcional $\psi[\phi, \tau]$ por meio da definição

$$P[\phi, \tau] = e^{\frac{-S[\phi]}{2}} \psi[\phi, \tau] \quad (4.14)$$

De (4.12) obtemos a equação de evolução para $\psi[\phi, \tau]$,

$$- \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = H_{FP} \psi \quad (4.15)$$

onde

$$H_{FP} = \int d^D x a^+(x) a(x) \quad (4.16)$$

com

$$a = -i \left[\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta\phi} \right] \quad (4.17)$$

$$a^+ = i \left[-\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta\phi} \right]$$

O Hamiltoniano de Fokker-Planck H_{FP} é formalmente Hermitiano e podemos expandir a solução de (4.15) em um conjunto completo de seus autoestados,

$$H_{FP} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

e da positividade de H_{FP} segue que $\lambda_n \geq 0$.

O estado fundamental é

$$\varphi_0 = e^{\frac{-S[\phi]}{2}} \quad \text{com} \quad \lambda_0 = 0.$$

A solução geral de (4.15) será portanto

$$\psi[\phi, \tau] = \sum_{n=0} C_n \varphi_n e^{-\lambda_n \tau} \quad (4.18)$$

o que nos dá a distribuição (4.14).

Deste modo, no equilíbrio, obtemos

$$P[\phi] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P[\phi, \tau] = C_0 e^{-S[\phi]} \quad (4.19)$$

Este é portanto o motivo pelo qual se espera que a condição (4.4), que estabelece a relação entre média estocástica e teoria de campo Euclidiana, seja assegurada.

Parisi e Wu⁽²⁵⁾ notaram também que podiam considerar uma equação de Langevin mais geral do que aquela apresentada em (4.1),

$$\dot{\phi}(x, \tau) = - \int dy K(x, y) \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y, \tau)} + \eta(x, \tau) \quad (4.20)$$

com

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_{\eta} = 2K(x, x') \delta(\tau - \tau') \quad (4.21)$$

onde o kernel $K(x, y)$ é independente dos campos ϕ .

Neste caso, com a particular escolha $K(x, y) = \delta(x - y)$ recaímos na equação usual.

Com a equação de Langevin generalizada podemos também obter a correspondente equação de Fokker-Planck generalizada. Para tanto basta usar

$$\langle \Delta \phi \rangle_{\eta} = - \int dy K(x, y) \frac{\delta S}{\delta \tilde{\phi}(y)} \Delta \tau \quad (4.22)$$

e

$$\langle \Delta \phi(x) \Delta \phi(y) \rangle_{\eta} = 2K(x, y) \Delta \tau + O((\Delta \tau)^2)$$

no lugar de (4.11). E deste modo obteremos a equação de Fokker-Planck generalizada

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P[\phi, \tau] = \int dx dy K(x, y) \left\{ \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left(P[\phi, \tau] \frac{\delta S}{\delta \phi(y)} \right) + \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} P[\phi, \tau] \right\}$$

(4.23)

A versão generalizada tem sua importância quando se efetua a quantização estocástica envolvendo campos fermiônicos^(27,30,31,32). Conforme mostraram Breit et. al.⁽³⁰⁾, para o modelo com um férmion de Dirac livre, não se obtém o propagador fermiônico livre no limite $\tau \rightarrow \infty$ porque a equação de Dirac tem autovalores tanto negativos quanto positivos. Fazendo portanto com que não seja satisfeita a condição de autovalores não negativos, a qual conduz à existência da funcional distribuição de probabilidade usual. O kernel $K(x, y)$ introduzido na equação de Fokker-Planck tem a função de tornar o correspondente Hamiltoniano de Fokker-Planck em (4.15) positivo definido. Assim, nestes casos, a escolha do kernel $K(x, y)$ é feita de forma conveniente para que exista a distribuição de equilíbrio do sistema no limite $\tau \rightarrow \infty$ e as funções de correlação estocásticas possam ser obtidas^(27,30).

4.2 A QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DOS MODELOS CP^{N-1}

Vamos considerar os modelos CP^{N-1} sob o ponto de vista da quantização estocástica.

Os campos auxiliares α e λ_μ que foram introduzidos no item 2.1 para, respectivamente implementar a condição de vínculo e tornar a ação quadrática nos campos Z^a , também serão adequadamente implementados neste formalismo por meio da equação de Langevin.

A equação de Langevin para os campos Z^a é obtida a partir da ação (2.25) e com a condição de vínculo (2.20),

$$\begin{aligned} \dot{Z}^a(x, \tau) = & \frac{-\delta}{\delta \bar{Z}^a(x, \tau)} \left[\partial_\mu \bar{Z}^b \partial_\mu Z^b - \frac{N}{2f} A_\mu^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \left(\bar{Z} \cdot Z - \frac{N}{2f} \right) \right] (x, \tau) \\ & + \eta^a(x, \tau) \end{aligned} \quad (4.24a)$$

O campo de "gauge" A_μ e o campo α evoluem segundo as seguintes equações

$$\dot{A}_\mu(x, \tau) = \frac{N}{f} A_\mu(x, \tau) + \tilde{\eta}_\mu(x, \tau) \quad (4.24b)$$

$$\dot{\alpha}(x, \tau) = \frac{-1}{\sqrt{N}} \left[\bar{Z}(x, \tau) \cdot Z(x, \tau) - \frac{N}{2f} \right] + \eta_\alpha(x, \tau) \quad (4.24c)$$

O campo de "gauge" λ_μ é introduzido por meio da identificação

$$A_\mu = \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{N}},$$

que obtem-se da equação (2.31) na definição da derivada covariante D_μ .

As equações (4.24) podem ser escritas como

$$\dot{Z}^a(x, \tau) = \left[\partial^2 Z^a - \frac{\alpha}{\sqrt{N}} Z^a + 2i \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{N}} \partial_\mu Z^a \right] (x, \tau) + \eta^a(x, \tau) \quad (4.25a)$$

$$\dot{\lambda}_\mu(x, \tau) = \frac{N}{f} \lambda_\mu(x, \tau) + \eta_\mu(x, \tau) \quad (4.25b)$$

$$\dot{\alpha}(x, \tau) = \frac{-1}{\sqrt{N}} \left[\bar{Z}(x, \tau) \cdot Z(x, \tau) - \frac{N}{2f} \right] + \eta_\alpha(x, \tau) \quad (4.25c)$$

Consideremos agora a evolução das equações de Langevin de $Z(x, \tau)$ e $\alpha(x, \tau)$ em torno do valor esperado de vácuo para $\alpha(x, \tau)$, que denotaremos por m^2 ,

$$\frac{\alpha(x, \tau)}{\sqrt{N}} = m^2 - \frac{i}{\sqrt{N}} \tilde{\alpha}(x, \tau) \quad (4.26)$$

As equações (4.25a) e (4.25c) tornam-se

$$\dot{Z}^a = (\partial^2 - m^2) Z^a + 2i \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{N}} \partial_\mu Z^a + i \frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{N}} Z^a + \eta^a \quad (4.27a)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \frac{-i}{\sqrt{N}} \left[\bar{Z} \cdot Z - \frac{N}{2f} \right] + i \eta_\alpha \quad (4.27b)$$

É interessante comparar a equação (4.27a) com o conteúdo do operador Δ definido em (2.34). É esta diferença global de sinal com relação a equação (4.27a) que faz com que tenhamos a função de Green para o campo Z^a bem definida para $\tau \rightarrow \infty$.

A equação de Langevin (4.27a) tem a seguinte solução particular

$$Z_{\eta}^a(x, \tau) = \int_0^{\tau} dt \int d^2y G(x-y, \tau-t) \eta^a(y, t) \quad (4.28)$$

onde $G(x, t)$ é a função de Green retardada que satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = (\partial^2 - m^2) G(x, t) + \delta(x) \delta(t),$$

é obtida de (4.27a) no limite $N \rightarrow \infty$,

$$G(x, \tau) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\tau(k^2 + m^2) + ik \cdot x} \theta(\tau) \quad (4.29)$$

A solução geral é obtida de forma iterativa^(25,29),

$$Z_{\eta}^a(x, \tau) = \int_0^{\tau} dt \int d^2y G(x-y, \tau-t) \left[\eta^a(y, t) + \right. \\ \left. 2i \frac{\lambda_{\mu}(y, t)}{\sqrt{N}} \partial_{\mu} Z^a(y, t) + i \frac{\tilde{\alpha}(y, t)}{\sqrt{N}} Z^a(y, t) \right] \quad (4.30)$$

Vejamos como se comporta a equação (4.27b) para $N \rightarrow \infty$. Para isto vamos calcular o valor esperado estocástico de $\bar{Z} \cdot Z$ neste limite. Nesta situação a solução predominante resume-se a (4.28) e neste caso não é difícil obter o resultado a seguir

$$\langle \bar{Z}_{\eta}^a(x, \tau) Z_{\eta}^a(x', \tau') \rangle_{\eta} = N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} D(k, \tau, \tau') e^{ik(x-x')} \quad (4.31)$$

onde

$$D(k, \tau, \tau') = \frac{e^{-(\tau' - \tau)(k^2 + m^2)}}{k^2 + m^2} \left[1 - e^{-2\tau(k^2 + m^2)} \right] \theta(\tau' - \tau) \quad (4.32)$$

Portanto obtemos

$$\langle \bar{Z}_\eta(x, \tau) \cdot Z_\eta(x', \tau') \rangle_\eta = N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + m^2} \left[1 - e^{-2\tau(k^2 + m^2)} \right] \quad (4.33)$$

O comportamento de $\tilde{\alpha}(x, \tau)$ em (4.27b), para $\tau \rightarrow \infty$ é governado pelo primeiro termo em (4.33). Neste limite temos

$$\tilde{\alpha}(x, \tau) \sim i\sqrt{N} \left[\frac{1}{2f} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + m^2} \right]_\tau \quad (4.34)$$

Aqui deve-se seguir a discussão apresentada após a equação (2.42). Com isso vemos que a quantização estocástica chega a mesma conclusão obtida pela expansão $1/N$ que levou ao resultado (2.46) com a imposição de que o comportamento de $\tilde{\alpha}(x, \tau)$ não seja divergente em τ , o que nos conduz à necessidade de termos a quantidade no lado direito de (4.34) nula. Pois é no limite $\tau \rightarrow \infty$ que as grandezas físicas são traduzidas para a linguagem usual da teoria de campos.

Além desta abordagem com o MQE mostraremos a seguir como podemos utilizar a equação de Langevin para obtermos informações sobre os modelos σ -não lineares também do ponto de vista numérico.

4.3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM A EQUAÇÃO DE LANGEVIN

O MQE nos dá uma forma alternativa de obtermos o valor esperado de um operador F dependendo das configurações de campo ϕ tomando-se a sua média estocástica e com o subsequente limite $\tau \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle F[\phi_\eta(x, \tau)] \rangle_\eta = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int D\phi F[\phi] P[\phi, \tau] = \langle F[\phi(x)] \rangle \quad (4.35)$$

Esta equação tem o significado de estarmos em um "banho térmico" e que deveremos esperar até que o sistema relaxe para a situação de equilíbrio caracterizada pela distribuição (4.13).

O fato de que nesse método as configurações de campo são obtidas por meio da equação de Langevin sugere que possamos usá-la também numericamente como geradora de configurações ϕ_i para obtermos o valor médio de F ,

$$\langle F \rangle \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F[\phi_i] \quad (4.36)$$

Estas configurações assim geradas, à medida que τ aumenta, tendem a ser distribuídas com a probabilidade de equilíbrio (4.13). Portanto (4.36) será uma boa aproximação para (4.35) dependendo do "tempo" esperado, o qual chamaremos de tempo de termalização, para começarmos a acumular configurações ϕ_i que entram no cálculo da média (4.36).

A obtenção destas configurações será feita numericamente num procedimento que chamaremos de Monte Carlo estocástico ou simplesmente de simulação de Langevin⁽³³⁾.

Tendo em vista a finalidade computacional devemos

substituir a equação diferencial de Langevin (4.1) por sua versão discretizada, ou seja, uma equação de diferenças-finitas.

Uma forma apropriada para simulações computacionais é ⁽³³⁾

$$\phi(x, \tau_{n+1}) = \phi(x, \tau_n) - \epsilon \frac{\delta S}{\delta \phi(x, \tau_n)} + \sqrt{\epsilon} \eta(x, \tau_n) \quad (4.37)$$

onde x passa a ser um ponto da rede.

Aqui τ foi discretizado pela quantidade constante de tamanho ϵ ,

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \epsilon \quad (4.38)$$

e τ_n passa a rotular as sucessivas configurações obtidas no processo iterativo de (4.37).

A correspondente versão discreta de (4.2) passa a ser

$$\langle \eta(x_i, \tau_i) \eta(x_j, \tau_j) \rangle_\eta = 2 \delta_{x_i, x_j} \delta_{\tau_i, \tau_j} \quad (4.39)$$

Podemos ainda considerar o tamanho do passo ϵ dependente do ponto na rede espacial, ou seja $\epsilon = \epsilon_{x,y}$, que passa a ser uma matriz. Com isto obtemos a equação (4.37) numa forma mais geral,

$$\phi(x, \tau_{n+1}) = \phi(x, \tau_n) - \sum_y \left[\epsilon_{x,y} \frac{\delta S}{\delta \phi(y, \tau_n)} - \sqrt{\epsilon_{x,y}} \eta(y, \tau_n) \right] \quad (4.40)$$

Esta dependência na posição do parâmetro ϵ desempenha o papel do Kernel em (4.20) e tem sua importância quando se trabalha no espaço dos momentos, pois uma escolha adequada de $\epsilon_{x,y}$ possibilita um aumento na velocidade do algoritmo, dentro da precisão desejada ⁽³³⁾.

Consideremos ainda o caso de ϵ constante.

Ao manipularmos a equação de Langevin discreta, o tempo de computação passa a ser determinado por este parâmetro e a princípio quanto maior ϵ mais rápido se alcança a termalização do sistema. Pois independente do fato de que a versão discreta da equação de Langevin seja apenas uma aproximação válida para $\epsilon \rightarrow \infty$, ela é por si só uma equação estocástica, independente de qual seja o valor de ϵ . Acontece que a implementação do algoritmo (4.37) para a obtenção das configurações exige uma compreensão dos erros associados a este processo, conforme evoluímos no tempo de Langevin. A estes erros chamamos de sistemáticos, ou seja, erros que não tendem a desaparecer mesmo que façamos longas iterações. A existência deste tipo de erro significa que um parâmetro no algoritmo a ser usado tem de ser ajustado, no nosso caso o parâmetro ϵ .

Em suma, a utilização de ϵ discreto nos leva ao seguinte problema: a que tipo de distribuição de probabilidade o uso da versão discreta em τ irá nos conduzir ?

Para obtermos a resposta vamos escrever a equação (4.10), que é discreta apenas em τ , com mais termos obtidos da expansão de $F[\phi]$ além dos que constam em (4.9). Assim procedendo não é difícil chegar a

$$\int D\phi F[\phi] \left\{ P[\phi, \tau + \epsilon] - P[\phi, \tau] \right\} = \tag{4.41}$$

$$\int D\tilde{\phi} F[\tilde{\phi}] \sum_{k=1}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_k \frac{(-)^k}{k!} \frac{\delta^k}{\delta\tilde{\phi}(x_1) \dots \delta\tilde{\phi}(x_k)} P[\tilde{\phi}, \tau] \langle \Delta\phi(x_1) \dots \Delta\phi(x_k) \rangle_{\eta}$$

onde novamente usamos a notação

$$\Delta\phi(x) = \phi(x, \tau + \varepsilon) - \tilde{\phi}(x, \tau)$$

a qual é determinada no instante τ quando fazemos uso da equação de Langevin. Por este motivo o lado direito de (4.41) é dependente unicamente das configurações denotadas por $\tilde{\phi}$. Vamos denotar a soma sobre todas as possíveis configurações no lado direito de (4.41) por ϕ e o instante $\tau + \varepsilon$ por τ_{n+1} . Deste modo concluímos que

$$P[\phi, \tau_{n+1}] - P[\phi, \tau_n] = \tag{4.42}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_k \frac{(-)^k}{k!} \frac{\delta^k}{\delta\phi(x_1) \dots \delta\phi(x_k)} P[\phi, \tau] \langle \Delta\phi(x_1) \dots \Delta\phi(x_k) \rangle_{\eta}$$

Aqui podemos usar, por exemplo, a equação de Langevin (4.37) discretizada somente em τ ,

$$\phi(x, \tau_{n+1}) = \phi(x, \tau_n) - \int dy \left[\varepsilon(x, y) \frac{\delta S}{\delta\phi(y, \tau_n)} - \sqrt{\varepsilon(x, y)} \eta(y, \tau_n) \right] \tag{4.43}$$

Com esta equação podemos calcular $\langle \Delta\phi(x_1) \dots \Delta\phi(x_k) \rangle_{\eta}$, tendo, por exemplo,

$$\langle \Delta\phi(x_1) \rangle_{\eta} = - \int dy \varepsilon(x_1, y) \frac{\delta S}{\delta\phi(y)} \tag{4.44}$$

Voltando a (4.42) e considerando termos até a ordem ε^2 , que corresponde a termos até $k=4$, obtemos

$$\begin{aligned}
P[\phi, \tau_{n+1}] = P[\phi, \tau_n] &- \int dx_1 \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \int dy_1 \varepsilon(x_1, y_1) \left[\right. \\
&\left. \frac{\delta P}{\delta\phi(y_1)} + \frac{\delta S}{\delta\phi(y_1)} P \right] \Big|_{\tau_n} + \int dx_1 dx_2 \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_2)} \int dy_1 dy_2 \varepsilon(x_1, y_1) \varepsilon(x_2, y_2) \\
&\left[\frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta\phi(y_1)} \frac{\delta S}{\delta\phi(y_2)} P + \frac{\delta}{\delta\phi(y_2)} \frac{\delta S}{\delta\phi(y_1)} P + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta\phi(y_1) \delta\phi(y_2)} P \right] \Big|_{\tau_n}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Nesta ordem de aproximação a distribuição de equilíbrio que obtemos é

$$\bar{P}[\phi] = e^{-\bar{S}[\phi]} \tag{4.46}$$

com a correspondente ação

$$\bar{S}[\phi] = S[\phi] + C[\phi, \varepsilon] \tag{4.47}$$

Aqui $C[\phi, \varepsilon]$ é a correção de ordem ε ,

$$C[\phi, \varepsilon] = \frac{1}{4} \int dx dy \varepsilon(x, y) \left[2 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x) \delta\phi(y)} - \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \frac{\delta S}{\delta\phi(y)} \right] \tag{4.48}$$

Portanto quando fazemos a simulação de tempo discreto o sistema é determinado assintoticamente pela distribuição (4.46) com $S[\phi]$ corrigido em termos do valor finito ε ,

$$\bar{S}[\phi] = S[\phi] + \varepsilon S_1[\phi] + \dots \tag{4.49}$$

Podemos trabalhar inteiramente na rede com a equação de Langevin (4.40)

$$\phi(x, \tau_{n+1}) = \phi(x, \tau_n) - \sum_y \left[\epsilon_{x,y} \frac{\delta S}{\delta \phi(y, \tau_n)} - \sqrt{\epsilon_{x,y}} \eta(y, \tau_n) \right] \quad (4.50)$$

• correspondentemente

$$C[\phi, \epsilon] = \frac{1}{4} \sum_{x,y} \epsilon_{x,y} \left[2 \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \frac{\delta S}{\delta \phi(y)} \right] \quad (4.51)$$

Ao trabalharmos numericamente com a versão discreta vemos que as configurações obtidas são distribuídas com a ação (4.49) sendo que o erro cometido em relação à distribuição original pretendida é devido ao fator $\epsilon S_1[\phi]$.

Para alguns modelos o erro sistemático introduzido pelo uso da mais simples discretização da equação de Langevin em τ pode ser precisamente determinado de forma analítica⁽³⁴⁾. Por outro lado, podemos considerar a equação de Langevin discretizada até a ordem ϵ^2 (35),

$$\begin{aligned} \phi(x, \tau_{n+1}) &= \phi(x, \tau_n) - \epsilon \frac{\delta S}{\delta \phi(x, \tau_n)} \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2} \sum_y \left[\frac{\delta S}{\delta \phi(y, \tau_n)} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x, \tau_n) \delta \phi(y, \tau_n)} - \frac{\delta^3 S}{\delta \phi(x, \tau_n) \delta \phi^2(y, \tau_n)} \right] \\ &+ \sqrt{\epsilon} \sum_y \left(\delta_{x,y} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x, \tau_n) \delta \phi(y, \tau_n)} \right) \eta(y, \tau_n) \end{aligned} \quad (4.52)$$

fazendo com que o erro cometido na distribuição de equilíbrio seja da ordem ϵ^2 .

Namiki et.al.⁽³⁶⁾ utilizaram as duas versões discretizadas da equação de Langevin para o cálculo de correlações e não notaram

uma clara melhora em termos de convergência para o valor esperado quando da utilização da equação corrigida; ocorrendo somente um deslocamento paralelo nos valores da grandeza medida em função do número de interações. A escolha do tamanho do passo ϵ foi de 0.01 e desde que se possa usar um passo pequeno consideraram duvidosa a utilidade da equação corrigida, pelo menos para o cálculo das correlações.

SIMULAÇÕES PARA OS MODELOS COM VINCULOS

Neste capítulo apresentaremos as equações que estabelecerão nossos algoritmos computacionais. Isto será feito com a intenção de obtermos as energias e "gaps" de massa em função da "temperatura" para os modelos σ -não lineares (CN) e para os modelos CP^{N-1} . Para a obtenção destas grandezas usaremos o método estocástico e quando necessário, para alguma comparação, usaremos também o método de Monte Carlo.

5.1 O MÉTODO ESTOCÁSTICO

Os modelos que propomos para simulação têm como característica uma equação de vínculo.

A forma de implementar o vínculo à equação de Langevin será feita por nós de acordo com a proposta de Namiki et. al. ⁽³⁷⁾.

A. Procedimento de χ ajustável

Antes de escrevermos nossas equações a serem simuladas vamos apresentar o procedimento usado para a implementação do vínculo.

Inicialmente consideremos um sistema dinâmico com N graus de liberdade descrito pelas coordenadas $q = (q^1, \dots, q^N)$ e sujeito a um conjunto de vínculos $F^\alpha(q) = 0$, ($\alpha=1, \dots, M$).

As equações de Langevin são

$$\dot{q}^a(\tau) = - \left(\frac{\delta S}{\delta q^a} + \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial q^a} \right) + \eta^a \quad (5.1)$$

com $a=1, \dots, N$.

Esta equação, a todo instante, está sob o vínculo

$$F^{\alpha}(q(\tau)) = 0, \quad (5.2)$$

o qual será implementado pelo multiplicador de Lagrange λ^{α} .

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial q^a} \dot{q}^a = 0 \quad (5.3)$$

obtemos de (5.1)

$$\lambda^\alpha = (D^{-1})^{\alpha\beta} \frac{\partial F^\beta}{\partial q^a} \left[-\frac{\delta S}{\delta q^a} + \eta^a \right] \quad (5.4)$$

onde

$$D^{\alpha\beta} = \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^a} \frac{\partial F^\beta}{\partial q^a} \quad (5.5)$$

Aqui usamos a convenção de que índices repetidos são somados.

A substituição de (5.4) em (5.1) resulta na nova equação de Langevin

$$\dot{q}^a = \left[\delta^{ab} - \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^a} (D^{-1})^{\alpha\beta} \frac{\partial F^\beta}{\partial q^b} \right] \left[-\frac{\delta S}{\delta q^b} + \eta^b \right] \quad (5.6)$$

Novamente voltamos ao problema da discretização. Aqui temos

$$\tilde{q}^a(\tau + \Delta\tau) = q^a(\tau) + \Delta^{(D)} q^a(\tau) \quad (5.7)$$

onde

$$\Delta^{(D)} q^a(\tau) \equiv \left[P^{ab} \left(-\Delta\tau \frac{\delta S}{\delta q^b} + \sqrt{\Delta\tau} \eta^b \right) \right] \Big|_\tau \quad (5.8)$$

com

$$p^{ab} = \delta^{ab} - \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^a} (D^{-1})^{\alpha\beta} \frac{\partial F^\beta}{\partial q^b} \quad (5.9)$$

Como temos uma equação de diferenças finitas, o vetor atualizado $\tilde{q}(\tau+\Delta\tau)$ cai fora da superfície de vínculo mesmo que o vetor de partida $q(\tau)$ seja mantido sobre esta superfície. Portanto espera-se que o vetor obtido por esta iteração, $\tilde{q}(\tau+\Delta\tau)$ seja diferente do vetor que seria esperado, $q(\tau+\Delta\tau)$. O vetor Δq está sobre o plano tangente a esta superfície e desta forma a condição de vínculo que deve ser assegurada a todo instante, equação (5.2), não é exatamente satisfeita.

Parisi⁽³⁸⁾ tem abordado este problema para os modelos σ -não lineares (CN). Ele redefinia as configurações atualizadas do seguinte modo

$$q_i^a(\tau+\Delta\tau) = \frac{\tilde{q}_i^a(\tau+\Delta\tau)}{\|\tilde{q}_i^a(\tau+\Delta\tau)\|} \quad (5.10)$$

onde q_i^a é a a-ésima componente no modelo (CN) e i refere-se a sua posição na rede. Entretanto este procedimento de redefinir as configurações de campo não conduziu a bons resultados para N pequenos, principalmente para $N=3$.

Por este motivo Namiki et. al.⁽³⁷⁾ argumentam que a imposição do vínculo (5.2) para todo instante fosse uma condição muito forte para a quantização estocástica desde que a reprodução das configurações de campo usuais só devam ocorrer no limite de tempo fictício muito grande. Deste modo propõem a substituição da condição de vínculo inicial por outras condições.

Estas novas condições de vínculo quando utilizadas na equação de Langevin discreta fazem com que as configurações obti-

das realmente estejam sobre a superfície de vínculo a medida que evoluímos no tempo de Langevin.

Dentro dessa proposta consideraremos a condição de vínculo convergente⁽³⁷⁾. Para isto voltaremos novamente à equação de Langevin (5.1) só que agora sob o vínculo

$$\dot{F}^\alpha(q(\tau)) = -\chi F^\alpha(q(\tau)) \quad (5.11)$$

onde χ é uma constante positiva a ser ajustada.

A nomenclatura de vínculo convergente vem do fato de que ele convergirá para $F^\alpha = 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

A imposição da condição (5.11) ao invés da condição (5.2) faz com que obtenhamos uma nova equação de Langevin

$$q^a(\tau + \Delta\tau) = q^a(\tau) + \Delta^{(T)} q^a(\tau) + \Delta^{(N)} q^a(\tau) \quad (5.12)$$

onde

$$\Delta^{(N)} q^a(\tau) = - \left[\frac{\partial F^\alpha}{\partial q^a} (D^{-1})^{\alpha\beta} F^\beta \right] \Big|_\tau (\chi \Delta\tau) \quad (5.13)$$

e com $\Delta^{(T)} q^a$ dado em (5.8).

O termo adicional $\Delta^{(N)} q^a$ representa uma força perpendicular à superfície de vínculo, fazendo com que as configurações atualizadas sejam trazidas de volta a esta superfície quando estão fora da mesma.

Neste procedimento, além do passo $\Delta\tau$, temos então que escolher a constante χ de forma a satisfazer o melhor possível a condição de vínculo (5.2). Entretanto deve-se notar que não

podemos "puxar" as configurações sempre exatamente de volta à superfície quando χ é tomado como constante. O que se pode fazer é olhar χ como uma função de $q(t)$ e exigir que o tempo de Langevin evolua de forma que o vínculo $F(q) = 0$ seja implementado. Ou seja, ajusta-se χ de modo a reviver a condição

$$F^\alpha(q(\tau+2n\Delta\tau)) = 0 \quad (5.14)$$

a cada duas iterações, com n sendo um inteiro.

Esquemáticamente temos a figura (5.1) que representa o vínculo (5.14),

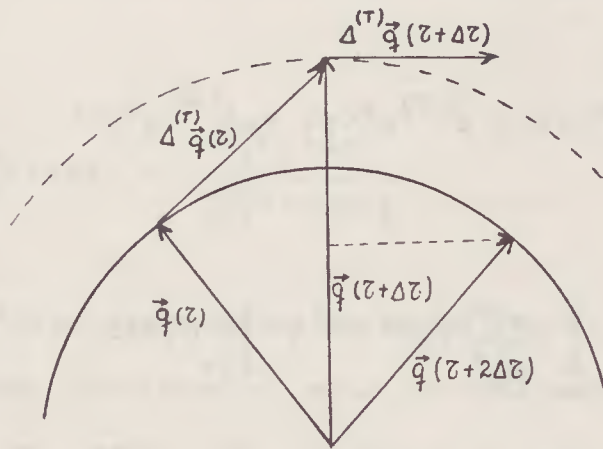


Fig. 5.1

Desta forma armazena-se somente os vetores $q(\tau+2n\Delta\tau)$, que estão sobre a superfície de vínculo, para o cálculo das quantidades físicas.

Para os modelos O(N) pode-se ajustar facilmente o parâmetro χ . Este ajuste é feito de forma geométrica, observando-se a figura (5.2),

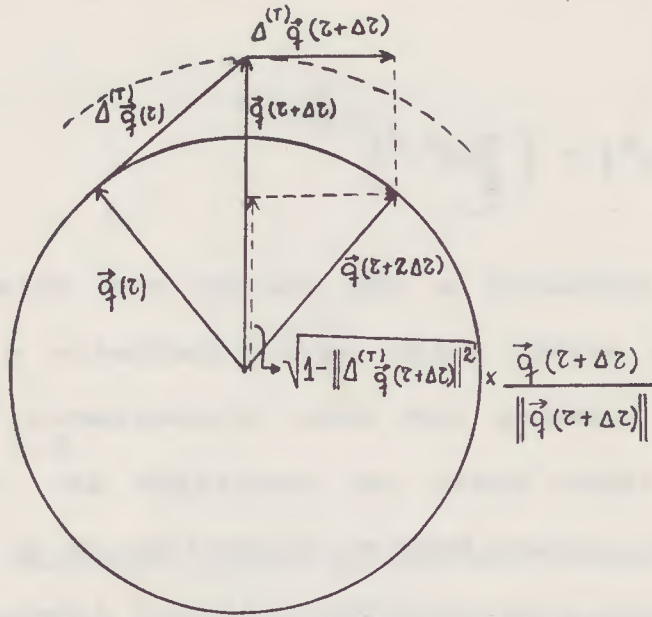


Fig. 5.2

Embora não precisemos escolher previamente o parâmetro χ neste novo procedimento, que chamamos de χ ajustável, somos levados a obter as configurações desejadas num algoritmo de dois passos.

O primeiro passo consiste em não adicionarmos mais o termo $\Delta^{(N)} q^a(\tau)$ em (5.12),

$$q^a(\tau+\Delta\tau) = q^a(\tau) + \Delta^{(T)} q^a(\tau) \quad (5.15)$$

mas o qual, de forma equivalente, é considerado no segundo passo, que nos dá as configurações desejadas. Este segundo passo é obtido da figura 2,

$$q^a(2k) = \sqrt{\frac{1 - \|\Delta^{(T)} q^a(2k-1)\|^2}{\|q^a(2k-1)\|^2}} q^a(2k-1) + \Delta^{(T)} q^a(2k-1) \quad (5.16)$$

onde

$$\|q^a\| = \left(\sum_k (q_k^a)^2 \right)^{1/2} \quad (5.17)$$

Devido portanto a não termos que determinar antecipadamente qual o melhor valor para o parâmetro χ é que preferimos simular nossos modelos com este procedimento, apesar de que gastaremos um tempo maior de computação em comparação com o procedimento de χ fixo. Pois no algoritmo de χ ajustável desprezamos metade das configurações obtidas, aquelas denotadas por $q_1^a(2k-1)$ por estarem fora da superfície de vínculo. Esta comparação que estamos fazendo é naturalmente considerada após já termos determinado o melhor valor para χ .

B. Equações para os modelos OCN)

As equações a serem utilizadas para a simulação do modelo OCN) são obtidas a partir da ação (3.4),

$$S_{O(N)} = -\beta \sum_{i,\mu} S_{i+\mu} \cdot S_i \quad (5.18)$$

tendo o vínculo (3.3),

$$F_i(S) \equiv \sum_{a=1}^N S_i^a S_i^a - 1 = 0 \quad (5.19)$$

Aqui i refere-se aos pontos da rede e μ aos versores \hat{i} e

$\hat{2}$ na rede bidimensional conforme esquematizado na figura (5.3),

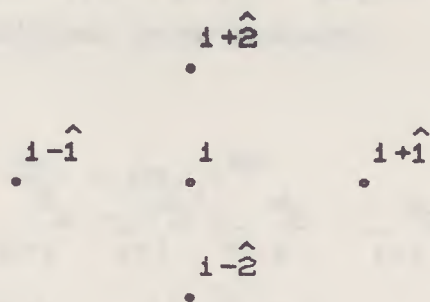


Fig. 5.3

Devemos salientar que esta notação também será preservada para os modelos CP^{N-1} e que também usaremos condições de contorno periódicas sobre a rede.

Com as quantidades a seguir,

$$\frac{\delta S}{\delta S_j^b} = -\beta \left(S_{j-1}^b + S_{j-2}^b + S_{j+1}^b + S_{j+2}^b \right) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial S_j^b} = 2 S_j^b \quad (5.21)$$

e

$$D = 4 \sum_a S_i^a S_i^a \quad (5.22)$$

obtemos as equações correspondentes ao procedimento (5.15) para todos os N campos rotulados por a do modelo $O(N)$,

$$S_i^a(\tau_{n+1}) = S_i^a(\tau_n) + \Delta^{(T)} S_i^a(\tau_n) \quad (5.23)$$

onde

$$\Delta^{(D)} S_1^a(\tau_n) = \epsilon\beta \left(s_{1-1}^b + s_{1-2}^b + s_{1+1}^b + s_{1+2}^b \right) \Big|_{\tau_n} + \sqrt{\epsilon} \eta_1^a(\tau_n)$$

$$\frac{-S_1^a}{N \sum_{c=1}^N S_1^c S_1^c} \sum_{b=1}^N \left\{ S_1^b \left[\epsilon\beta \left(s_{1-1}^b + s_{1-2}^b + s_{1+1}^b + s_{1+2}^b \right) + \sqrt{\epsilon} \eta_1^b \right] \right\} \Big|_{\tau_n} \quad (5.24)$$

não esquecendo da correspondente equação para (5.16), para todo ponto i da rede.

C. Equações para os modelos CP^{N-1}

Para os modelos CP^{N-1} na rede tomamos a ação (3.7),

$$S_{CP^{N-1}} = -\beta_c \sum_{1,\mu} |\bar{z}_{1+\mu} \cdot z_1|^2 \quad (5.25)$$

com o vínculo

$$F_1(\bar{z}, z) \equiv \sum_{a=1}^N \bar{z}_1^a z_1^a - 1 = 0 \quad (5.26)$$

Aqui os campos Z^a são complexos, por isso tomamos como equações de Langevin

$$\dot{Z}^a(\tau) = - \left(\frac{\delta S}{\delta \bar{Z}^a} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}^a} \right) + \eta^a \quad (5.27)$$

e uma equação equivalente para $\dot{\bar{Z}}^a$.

Novamente temos λ real mas η^a passa a ser uma variável complexa com as seguintes propriedades

$$\langle \eta_i^a \bar{\eta}_j^b \rangle = 2\delta_{ij} \delta^{ab} \quad (5.28)$$

$$\langle \eta \eta \rangle = 0, \quad \langle \bar{\eta} \bar{\eta} \rangle = 0$$

Aplicaremos inicialmente o procedimento apresentado na seção A de χ fixo, para campos complexos,

$$\frac{\partial F}{\partial Z^a} \dot{Z}^a + \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}^a} \dot{\bar{Z}}^a = -\chi^F \quad (5.29)$$

Com isto chegamos ao seguinte conjunto de equações válidas para todo a ,

$$\dot{Z}^a = -\frac{\delta S}{\delta \bar{Z}^a} + \eta^a - \frac{1}{2} \chi^{FD} D^{-1} \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}^a} \quad (5.30)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}^a} D^{-1} \sum_b \left\{ \frac{\partial F}{\partial Z^b} \left[-\frac{\delta S}{\delta \bar{Z}^b} + \eta^b \right] + \frac{\partial F}{\partial \bar{Z}^b} \left[-\frac{\delta S}{\delta Z^b} + \bar{\eta}^b \right] \right\}$$

A sua versão na rede para a ação (5.25) é facilmente obtida,

$$Z_i^a(\tau_{n+1}) = Z_i^a(\tau_n) + \Delta^{(T)} Z_i^a(\tau_n) \quad (5.31)$$

onde

$$\Delta^{(T)} Z_1^a(\tau_n) = \epsilon \beta_c \left[Z_{1+1}^a \left(\sum_b Z_1^b \bar{Z}_{1+1}^b \right) + Z_{1+2}^a \left(\sum_b Z_1^b \bar{Z}_{1+2}^b \right) + \right. \\ \left. Z_{1-1}^a \left(\sum_b Z_1^b \bar{Z}_{1-1}^b \right) + Z_{1-2}^a \left(\sum_b Z_1^b \bar{Z}_{1-2}^b \right) \right] + \sqrt{\epsilon} \eta_1^a \quad (5.32)$$

$$\frac{-Z_1^a}{N} \left\{ \sum_{c=1}^3 Z_1^c \bar{Z}_1^c \left[\epsilon \beta_c \left[\left(\sum_b Z_{1+1}^b \bar{Z}_1^b \right) \left(\sum_c Z_1^c \bar{Z}_{1+1}^c \right) + \left(\sum_b Z_{1+2}^b \bar{Z}_1^b \right) \left(\sum_c Z_1^c \bar{Z}_{1+2}^c \right) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(\sum_b Z_{1-1}^b \bar{Z}_1^b \right) \left(\sum_c Z_1^c \bar{Z}_{1-1}^c \right) + \left(\sum_b Z_{1-2}^b \bar{Z}_1^b \right) \left(\sum_c Z_1^c \bar{Z}_{1-2}^c \right) \right] + \sqrt{\epsilon} \operatorname{Re} \left(\sum_b \bar{Z}_1^b \eta_1^b \right) \right\}$$

Aqui não adicionamos o termo em χ , $\Delta^{(N)} Z_1^a$, porque usaremos somente o procedimento de χ ajustável,

$$Z_1^a(\tau_{2n}) = \left[\frac{1 - \sum_b \left(\Delta^{(T)} Z_1^b \overline{\Delta^{(T)} Z_1^b} \right)}{\sum_b Z_1^b \bar{Z}_1^b} \right]^{\frac{1}{2}} Z_1^a(\tau_{2n-1}) + \Delta^{(T)} Z_1^a(\tau_{2n-1}) \quad (5.33)$$

em nossas simulações.

D. Equações para os modelos CP^{N-1} com férmions mínimos

Para o modelo com férmions mínimos utilizamos a ação (3.50), desconsiderando a constante aditiva,

$$S = -\beta_f \sum_{i,\mu} |\bar{z}_{i+\mu} \cdot z_i|^2 - \beta'_f \sum_{i,\mu} (\bar{z}_i \cdot z_{i+\mu} + \bar{z}_{i+\mu} \cdot z_i) \quad (5.34)$$

onde

$$\beta_f = \frac{2\pi \beta_c^2}{N + 2\pi\beta_c} \quad (5.35)$$

e

$$\beta'_f = \frac{N \beta_c}{N + 2\pi\beta_c}$$

Aqui mantemos também a condição de vínculo (5.26).

De forma análoga ao que foi feito na seção C para o modelo CP^{N-1} puro, obtemos também as equações de Langevin na rede para o modelo com férmions mínimos. Para isto, na ação que aparece na equação (5.30) ou na sua versão discreta (sem o termo χ),

$$z_1^a(\tau_{n+1}) = z_1^a(\tau_n) - \epsilon \frac{\delta S}{\delta z_1^a(\tau_n)} + \sqrt{\epsilon} \eta_1^a(\tau_n) \quad (5.36)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1^a} D^{-1} \sum_b \left\{ \frac{\partial F}{\partial z_1^b} \left[-\epsilon \frac{\delta S}{\delta \bar{z}_1^b} + \sqrt{\epsilon} \eta_1^b \right] + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1^b} \left[-\epsilon \frac{\delta S}{\delta z_1^b} + \sqrt{\epsilon} \bar{\eta}_1^b \right] \right\} \Big|_{\tau_n}$$

basta acrescentar o termo extra em β'_f que consta em (5.34).

Disto resulta em somente acrescentarmos adequadamente o termo

$$\epsilon \beta'_f (z_{i-1}^a + z_{i-2}^a + z_{i+1}^a + z_{i+2}^a) \quad (5.37)$$

em (5.32), pois

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{Z}_1^a} + \frac{\delta S}{\delta Z_1^a} - \beta_f' \sum_{\mu} Z_{1+\mu}^a \quad (5.38)$$

$$\frac{\delta S}{\delta Z_1^a} + \frac{\delta S}{\delta \bar{Z}_1^a} - \beta_f' \sum_{\mu} \bar{Z}_{1+\mu}^a \quad (5.39)$$

5.2 DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E "GAPS" DE MASSA

Uma maior utilidade do procedimento de simulações de Langevin vem do fato de que ele permite ainda desenvolver um algoritmo para o cálculo das funções de correlação. Este algoritmo é devido a Parisi^(38,39) e permite, conforme verificaram Namiki et.al.⁽³⁶⁾, obter correlações a grandes distâncias, o que é uma dificuldade com o método de Monte Carlo.

A importância deste novo algoritmo reside por si só como sendo um procedimento alternativo ao esquema perturbativo. Do ponto de vista numérico podemos obter informações sobre a teoria com a função de 2 pontos (propagador), a qual está relacionada com o espectro de massa da teoria.

Com o comportamento a grandes distâncias da função de correlação conexa $G(x-y)$,

$$\begin{aligned} G(x-y) &\equiv \langle A(x)A(y) \rangle_c \\ &= \langle A(x)A(y) \rangle - \langle A(x) \rangle \langle A(y) \rangle \\ &\rightarrow \frac{1}{|x-y|^{(D-1)/2}} \exp(-m_A |x-y|) \end{aligned} \quad (5.40)$$

podemos determinar o valor de m_A , que é a massa mínima do estado criado do vácuo pelo operador A ⁽³⁹⁾.

A. Procedimento de Parisi para obter correlações

O procedimento para a obtenção das correlações parte da ação Euclidiana $S[q(x)]$ modificada pelo termo de fonte externa $hq(x)$. Aqui h é um parâmetro não dependente de x .

Na presença desta pequena fonte externa a função de correlação conexa de 2 pontos, entre x_1 e x_2 , é obtida como segue

$$\begin{aligned} & \langle q(x_1)q(x_2) \rangle - \langle q(x_1) \rangle \langle q(x_2) \rangle \\ & = \frac{d}{dh} \left. \frac{\int Dq q(x_2) e^{-S_h}}{\int Dq e^{-S_h}} \right|_{h=0} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Deste modo no limite de $h \rightarrow 0$ o lado direito da equação acima pode ser escrito como

$$\frac{1}{h} \left[\langle q(x_2) \rangle_h - \langle q(x_2) \rangle \right] + O(h) \quad (5.42)$$

onde $\langle q(x_2) \rangle_h$ é o valor esperado obtido com a ação dependente da pequena fonte externa $-hq(x_1)$,

$$S_h = S - hq(x_1) \quad (5.43)$$

Deste modo obtemos uma expressão como aproximação para a função de 2 pontos, entre x_1 e x_2 ,

$$G(l) = \frac{1}{h} \left[\langle q_l \rangle_h - \langle q_l \rangle \right] \quad (5.44)$$

Aqui passamos a usar a notação de índices subscritos para caracterizar a sua posição na rede.

Os valores médios em (5.44) podem ser obtidos como médias "temporais" por meio das equações de Langevin

$$\dot{q}_l = -\frac{\delta S}{\delta q_l} + \eta_l \quad (4.45a)$$

$$\dot{q}_l^{(h)} = -\frac{\delta S_h}{\delta q_l^{(h)}} + \tilde{\eta}_l \quad (4.45b)$$

onde, a princípio, as variáveis aleatórias η e $\tilde{\eta}$ são independentes e com as propriedades (4.2).

As funções de correlação $G(l)$ têm valores típicos decrescentes em l e vamos tomar como um exemplo a ordem de grandeza de 10^{-3} . O valor típico de h que se utiliza está entre 0 e 10^{-4} . Suponhamos a escolha $h=10^{-3}$, que é o valor utilizado por nós em (5.44). Destas considerações resulta numa diferença entre as duas médias da ordem de 10^{-6} . Daqui, este método tem que dar resultados melhores do que os próprios erros estatísticos intrínsecos a cada uma das médias em (5.44). Ou seja, devemos pelo menos esperar que os erros estatísticos se cancelem devido a subtração entre as duas médias "temporais" da mesma quantidade nos casos com e sem fonte como em (5.44).

Para que isto possa ocorrer usa-se a mesma sequência de fontes aleatórias, $\tilde{\eta}_l(\tau_n) = \eta_l(\tau_n)$, para as equações em (5.45),

$$\dot{q}_l^{(h)} = -\frac{\delta S_h}{\delta q_l^{(h)}} + \eta_l \quad (5.46)$$

Vejamos o papel que desempenha a escolha da mesma sequência de ruídos aleatórios $\eta_l(\tau_n)$ para a determinação de $G(l)$ ⁽³⁶⁾.

Ao evoluirmos as equações de Langevin (5.45) necessitamos

de duas seqüências de ruídos aleatórios independentes no tempo,

$$X_1 = (\eta_1(\tau_1), \eta_1(\tau_2), \dots, \eta_1(\tau_n)) \quad (5.47)$$

$$X_2 = (\tilde{\eta}_1(\tau_1), \tilde{\eta}_1(\tau_2), \dots, \tilde{\eta}_1(\tau_n))$$

sendo n o número de iterações feitas.

Os valores médios estocásticos podem ser escritos como

$$\langle q_l \rangle = \langle q_l \rangle^V + V(0, X_1) \quad (5.48)$$

$$\langle q_l \rangle_h = \langle q_l \rangle_h^V + V(h, X_2)$$

onde $\langle q_l \rangle^V$ e $\langle q_l \rangle_h^V$ correspondem aos valores verdadeiros desconhecidos e, $V(0, X_1)$ e $V(h, X_2)$ são os respectivos desvios destes valores verdadeiros.

Com isto podemos escrever (5.44),

$$\begin{aligned} & \langle q_1 q_l \rangle - \langle q_1 \rangle \langle q_l \rangle \\ &= \frac{\langle q_l \rangle_h^V - \langle q_l \rangle^V}{h} + \frac{V(h, X_2) - V(0, X_1)}{h} + O(h) \end{aligned} \quad (5.49)$$

O primeiro termo no lado direito corresponde ao valor que esperamos enquanto que o segundo representa as suas flutuações estatísticas. Como h é um parâmetro pequeno podemos estimar este erro estatístico,

$$\frac{V(h, X_2) - V(0, X_1)}{h} = \left. \frac{\partial V}{\partial h} \right|_{h=0, X=X_2} + \frac{V(0, X_2) - V(0, X_1)}{h} + O(h) \quad (5.50)$$

Agora, se em (5.45) escolhermos a mesma seqüência de

ruídos aleatórios, teremos $X_1 = X_2$, e em consequência o anulamento do segundo termo em (5.50). Desta forma todo erro fica reduzido a $\frac{\partial V}{\partial h} \Big|_{h=0}$ e será consideravelmente pequeno se o algoritmo for estável com relação a h . Por outro lado se não usarmos a mesma sequência teremos um erro proporcional a h^{-1} e que deve predominar em relação ao primeiro termo.

Uma observação que também se faz é que o algoritmo (5.44) não pode ser obtido por meio do método de Monte Carlo. Isto porque, contrário as equações (5.45), as configurações são obtidas num procedimento de aceitação e rejeição, como veremos adiante. E mesmo usando a mesma sequência $X_1 = X_2$ perdemos o fato de que estamos obtendo configurações em trajetórias paralelas mas deformadas de modo praticamente contínuo em h .

B. Equações de Langevin com o termo h

Com o procedimento (5.44) iremos determinar as correlações em função de l , colocando a fonte sempre na posição 1 da nossa rede bidimensional $L \times L$.

Ao ponto i na figura 1 atribuímos um par de componentes para a sua precisa localização no plano. Por meio do seguinte dicionário

$$\begin{aligned}
 S_i &= S(x, y) \\
 S_{i+1}^{\wedge} &= S(x+1, y) \\
 S_{i-1}^{\wedge} &= S(x-1, y) \\
 S_{i+2}^{\wedge} &= S(x, y+1) \\
 S_{i-2}^{\wedge} &= S(x, y-1)
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

podemos facilmente reescrever as equações (5.23), (5.31) e a corresponde à ação (5.34) numa forma prática do ponto de vista computacional.

Voltemos ao cálculo das funções de correlação.

Para diminuir o erro estatístico em $G(l)$ calculam-se as correlações entre valores médios adequadamente definidos^(36,38).

Para os modelos σ -não lineares $O(N)$ definimos a quantidade média

$$\bar{s}(l) = \sqrt{\frac{N}{L}} \sum_{r=1}^L s^1(r, l) \quad (5.52)$$

e calculamos

$$G(l) = \frac{\langle \bar{s}(l) \rangle_h - \langle \bar{s}(l) \rangle}{h} \quad (5.53)$$

A ação S_h neste caso é obtida de (5.18),

$$S_h = S_{O(N)} - h \bar{s}(l) \quad (5.54)$$

Para escrevermos a equação de Langevin (5.46) com o termo h notamos que

$$\frac{\delta S_h}{\delta S^a(x, y)} = \frac{\delta S_{O(N)}}{\delta S^a(x, y)} - h \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{1, a} \delta_{1, y} \quad (5.55)$$

A equação acima mostra o termo que precisamos acrescentar adequadamente em (5.24).

Na notação (5.51) as equações (5.23) e, (5.24) com a ação S_h , tornam-se

$$S^a{}^{(h)}(\tau_{n+1}, x, y) = S^a{}^{(h)}(\tau_n, x, y) + \Delta^{(T)} S^a{}^{(h)}(\tau_n, x, y) \quad (5.56)$$

com

$$\begin{aligned} \Delta^{(T)} S^a{}^{(h)}(\tau_n, x, y) = & \epsilon\beta \left[S^a(x-1, y) + S^a(x, y-1) + S^a(x, y+1) + S^a(x+1, y) \right] \Big|_{\tau_n}^{(h)} \\ & + \epsilon h \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{1,a} \delta_{1,y} + \sqrt{\epsilon} \eta^a(\tau_n, x, y) \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-S^a(x, y)}{\sum_c S^c(x, y) S^c(x, y)} \sum_{b=1}^N \left\{ S^b(x, y) \left[\epsilon\beta \left[S^b(x-1, y) + S^b(x, y-1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. S^b(x, y+1) + S^b(x+1, y) \right] + \epsilon h \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{1,b} \delta_{1,y} + \sqrt{\epsilon} \eta^b(x, y) \right] \right\} \Big|_{\tau_n}^{(h)} \end{aligned}$$

Para os modelos CP^{N-1} puros definimos a quantidade média

$$\tilde{Z}(l) = \sqrt{\frac{N}{L}} \sum_{r=1}^L Z^1(r, l) \quad (5.58)$$

e calculamos

$$\alpha(l) = \overline{\langle \tilde{Z}(1) \tilde{Z}(l) \rangle}_c = \frac{\overline{\langle \tilde{Z}(l) \rangle}_h - \langle \tilde{Z}(l) \rangle}{h} \quad (5.59)$$

Aqui a variação (5.41) é feita com relação a h tomado como complexo devido a forma com que escrevemos S_h ,

$$S_h = S_{CP^{N-1}} - \bar{h} \tilde{Z}(1) - h \overline{\tilde{Z}(1)} \quad (5.60)$$

A correspondente equação de Langevin (5.46) para a ação (5.60) pode ser obtida partindo-se de (5.30), sem o termo de χ fixo. Fazendo as substituições

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{z}^b(x,y)} \rightarrow \frac{\delta S_h}{\delta \bar{z}^b(x,y)} = \frac{\delta S_{CP^{N-1}}}{\delta \bar{z}^b(x,y)} - h \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{b,1} \delta_{y,1} \quad (5.61a)$$

$$\frac{\delta S}{\delta z^b(x,y)} \rightarrow \frac{\delta S_h}{\delta z^b(x,y)} = \frac{\delta S_{CP^{N-1}}}{\delta z^b(x,y)} - \frac{i}{h} \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{b,1} \delta_{y,1} \quad (5.61b)$$

para todo o ponto i da rede vemos que a equação correspondente a (5.32) para $\Delta^{(T)} z^{a(h)}(\tau_n, x, y)$ é obtida acrescentando-se adequadamente os termos

$$\epsilon h \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{a,1} \delta_{y,1} \quad (5.62)$$

e

$$\epsilon h \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{a,1} \delta_{y,1}$$

Simulamos também a ação (5.34), que resultou do acoplamento de férmions mínimos, para obtermos as funções de correlação $G(\ell)$ e conseqüentemente o "gap" de massa em função de β_f .

O procedimento desenvolvido para o modelo CP^{N-1} puro através das equações (5.58) a (5.61) é igualmente aplicado a ação (5.34). As correspondentes equações (5.61) agora tornam-se

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{z}^b(x,y)} \rightarrow \frac{\delta S_h}{\delta \bar{z}^b(x,y)} = \frac{\delta S_{CP^{N-1}}}{\delta \bar{z}^b(x,y)} - \quad (5.63)$$

$$\beta_f' \left[Z^b(x-1, y) + Z^b(x, y-1) + Z^b(x, y+1) + Z^b(x+1, y) \right] - h \sqrt{\frac{N}{L}} \delta^{b,1} \delta_{y,1}$$

e a sua conjugada para $\frac{\delta S}{\delta Z^b(x, y)}$, que devem ser substituídas em (5.36).

Um cálculo interessante que também faremos refere-se ao modelo CP^{N-1} puro. Neste modelo, para $N=2$, construímos o seu estado ligado. O interesse neste estado deve-se a equivalência entre as matrizes S dos modelos CP^1 e $O(3)$. Isto nos permite fazer a comparação numérica entre estes dois modelos.

Devido ao mapeamento (2.14) vamos construir a seguinte componente

$$\varphi^1 = 2 \operatorname{Re}(\bar{Z}^1 Z^2) \quad (5.64)$$

que é uma das componentes do estado ligado no CP^1 .

Com a intenção de calcularmos a função de correlação entre os estados ligados no modelo CP^1 (40),

$$G(n, m) = \sum_i \langle (\bar{Z}_n \lambda^1 Z_n) (\bar{Z}_m \lambda^1 Z_m) \rangle \quad (5.65)$$

vamos definir a quantidade média

$$\tilde{\varphi}(l) = \sqrt{\frac{3}{L}} \sum_{r=1}^L \varphi^1(r, l) \quad (5.66)$$

As correlações entre os pontos 1 e l são então obtidas calculando-se

$$G(l) = \frac{\langle \tilde{\varphi}(l) \rangle_h - \langle \tilde{\varphi}(l) \rangle}{h} \quad (5.67)$$

onde agora temos o seguinte termo de fonte h para a ação do CP^{N-1}

$$S_h = S_{CP^{N-1}} - h \tilde{\phi}(1) \quad (5.68)$$

com h sendo agora um parâmetro real.

C. Método de controle da fonte h .

Quando Parisi⁽³⁸⁾ propôs o procedimento de adicionar-se o termo de fonte h verificou que este método dava resultados muito bons para as funções de correlação nos modelos σ -não lineares $O(N)$ para $N \geq 4$. No caso de $N=3$ considerou seus resultados um tanto desapontadores. Namiki et. al.⁽³⁶⁾ atacaram também o mesmo problema. Eles analisaram a função de correlação $G(\ell)$ em função do número de iterações em τ_n para $N=3$. Um fenômeno de falha aparecia, ou seja, os valores obtidos para $G(\ell)$ não mantinham a hierarquia numérica que é esperada quando se caminha em ℓ , à medida que se evoluía no tempo de Langevin.

Neste procedimento, para pontos aproximadamente no meio da rede é também comum encontrarem-se valores negativos para $G(\ell)$. Isto é devido a grande barra de erro com que são obtidos os valores de $G(\ell)$ nesta situação.

Para tentar minorar esta situação e conseguir dados para correlações a maiores distâncias é sugerido o seguinte procedimento em 2 passos.

Primeiro deve-se deixar o sistema evoluir até atingir o

equilíbrio térmico sem ligarmos a fonte externa h .

O segundo passo consiste em ligar o termo de fonte h , ou seja, evoluímos a equação de Langevin (5.45b) de forma simultânea com a equação (5.45a). O termo de fonte h fica ligado até obter-se suficientes configurações com que possamos calcular a média (5.67).

Um refinamento neste procedimento foi proposto por estes autores. Este consiste em desligar o termo de fonte h após algum "tempo" e, após isto, repete-se o segundo passo.

Este procedimento de ligar e desligar o termo de fonte, tomando-se como condições iniciais as correspondentes configurações obtidas pela equação (4.45a), é então repetido. O objetivo deste procedimento é de garantir que as configurações que estão sendo atualizadas não se afastem muito das configurações q_λ , fazendo com que se obtenha um comportamento melhor para $\langle \chi \rangle$ em (5.44).

O comportamento da função de correlação é investigado por nós no capítulo VI em função do período em que deixamos ligado o termo de fonte h . Uma melhor compreensão do efeito deste procedimento, de ligar e desligar a fonte, é obtido quando determinamos os "gaps" de massa para o modelo σ -não linear (3) e para o estado ligado no CP^1 .

5.3 O MÉTODO DE MONTE CARLO

Da mesma forma que substituímos o cálculo do valor esperado de uma quantidade F ,

$$\langle F \rangle = \frac{\int D\phi F[\phi] e^{-S}}{\int D\phi e^{-S}} \quad (5.69)$$

por sua média temporal estocástica (4.35) ou pela média (4.36) em termos das configurações em equilíbrio, tem-se um procedimento similar no método de Monte Carlo. Neste método calculamos a média

$$\langle F \rangle = \frac{\sum_1 F(\phi_1)}{\sum_1 1} \quad (5.70)$$

sobre o conjunto de configurações $\{\phi_1\}$ distribuídas pela lei de Boltzmann e^{-S} . As sucessivas configurações que consideramos também representam uma média "temporal"; aqui entretanto o tempo tem apenas o papel de rotular as sucessivas configurações do sistema em questão.

No método de Langevin o sistema evolui dinamicamente no "tempo" de forma que as configurações obtidas tendem a ser distribuídas pelo fator de Boltzmann. O método de Monte Carlo consiste em fornecer algoritmos com a mesma finalidade, só que sem se preocupar que isto seja feito por meio de alguma equação dinâmica.

Suponhamos que o conjunto das n configurações $\{\phi_1\}$ em que

estamos interessados seja selecionado segundo o peso de probabilidade $P[\phi_\nu]$. Deste modo (5.69) é aproximada por⁽⁴¹⁾

$$\langle F \rangle \approx \bar{F} = \frac{\sum_{\nu=1}^n F[\phi_\nu] P^{-1}[\phi_\nu] e^{-S}}{\sum_{\nu=1}^n P^{-1}[\phi_\nu] e^{-S}} \quad (5.71)$$

Naturalmente que se tivéssemos escolhido

$$P[\phi_\nu] = P_{eq}[\phi_\nu] \propto e^{-S[\phi_\nu]} \quad (5.72)$$

ao invés da equação (5.71) obteríamos

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n F[\phi_\nu] \quad (5.73)$$

Entretanto para os casos em que não se conhece explicitamente P_{eq} não se pode chegar a (5.73). Por outro lado é possível construir um caminho aleatório de pontos $\{\phi_\nu\}$ no espaço das configurações por meio de um processo Markoviano. Neste processo $P[\phi_\nu]$ deve tender a $P_{eq}[\phi_\nu]$ à medida que $n \rightarrow \infty$.

Este processo Markoviano é definido especificando-se uma probabilidade de transição $W(\phi_\nu \rightarrow \phi_{\nu'})$ entre os pontos ν e ν' no espaço das configurações. Com a finalidade de termos neste processo a propriedade desejada de que $P[\phi_\nu]$ convirja para $P_{eq}[\phi_\nu]$ é suficiente impormos a condição de balanço detalhado^(41,42,43),

$$P_{eq}[\phi_\nu] W(\phi_\nu \rightarrow \phi_{\nu'}) = P_{eq}[\phi_{\nu'}] W(\phi_{\nu'} \rightarrow \phi_\nu) \quad (5.74)$$

De (5.72) vemos que a razão entre as probabilidades de transição,

$$\frac{W(\phi_\nu \rightarrow \phi_{\nu'})}{W(\phi_{\nu'} \rightarrow \phi_\nu)} = e^{-\Delta S} \quad (5.75)$$

depende somente da variação da ação

$$\Delta S = S[\phi_{\nu'}] - S[\phi_\nu] \quad (5.76)$$

A equação (5.75) não especifica $W(\phi_\nu \rightarrow \phi_{\nu'})$ e é a implementação desta probabilidade de transição ou da condição de balanço detalhado que especifica os vários algoritmos em Monte Carlo.

Consideraremos somente o algoritmo de Metropolis.

A característica deste algoritmo é que um gerador de configurações aleatórias ν , Markovianas e com probabilidade simétrica, $P(\nu, \nu') = P(\nu', \nu)$, é usado com a finalidade de fazer sugestões para a próxima configuração ν' , dentro do espaço das configurações aceitáveis a priori. Se $\nu' \neq \nu$ e $P_{eq}[\phi_{\nu'}] > P_{eq}[\phi_\nu]$ esta sugestão é aceita. Também, se acontecer $P_{eq}[\phi_{\nu'}] < P_{eq}[\phi_\nu]$ sorteia-se um número RAN, correspondendo a uma variável aleatória gerada uniformemente no intervalo de 0 a 1, e a sugestão é aceita se

$$P_{eq}[\phi_{\nu'}] > \text{RAN } P_{eq}[\phi_\nu] \quad (5.77)$$

Caso isto não ocorra a configuração sugerida é rejeitada e não alteramos a configuração que tínhamos. Isto define a probabilidade de transição,

$$W(\phi_{\nu} \rightarrow \phi_{\nu'}) = \begin{cases} P(\nu, \nu') & , & P_{eq}(\phi_{\nu'}) > P_{eq}(\phi_{\nu}) \\ P(\nu, \nu') \frac{P_{eq}(\phi_{\nu'})}{P_{eq}(\phi_{\nu})} & , & P_{eq}(\phi_{\nu'}) < P_{eq}(\phi_{\nu}) \end{cases} \quad (5.78)$$

Usualmente toma-se $P(\nu, \nu') = 1$, uma vez que sua escolha não afeta a equação de balanço detalhado.

Resumindo temos

$$W(\phi_{\nu} \rightarrow \phi_{\nu'}) = \begin{cases} e^{-\Delta S} & \text{se } \Delta S > 0 \\ 1 & \text{se } \Delta S \leq 0 \end{cases} \quad (5.79)$$

o que equivale a dizer que as configurações são rejeitadas se $RAN > e^{-\Delta S}$.

Deste modo a sequência obtida com este algoritmo de aceitação-rejeição irá alcançar o regime de equilíbrio estatístico, onde a probabilidade de encontrarmos qualquer configuração é proporcional a $e^{-\Delta S}$. Para esta sequência o valor médio que calculamos

$$\langle F[\phi] \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n - \nu_0} \sum_{\nu = \nu_0}^n F[\phi_{\nu}] \right] \quad (5.80)$$

é obtido a partir das $n - \nu_0$ configurações, onde as ν_0 primeiras configurações correspondem a termalização do sistema.

A equação (5.80) é muito similar com a média estocástica⁽⁴⁴⁾,

$$\langle F[\phi] \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F[\phi(\tau)] d\tau \quad (5.81)$$

quando fazemos a discretização (4.38). Entretanto o método de Monte Carlo efetua a sua média "temporal" governada por uma dinâmica estocástica artificial.

A. Modelos simulados

Para as simulações de Monte Carlo, dentre os modelos por nós considerados, nos restringiremos somente aos modelos σ -não lineares $O(3)$ e CP^1 .

Este método aplicado aos modelos mencionados acima nos permitirá relacionar de um ponto de vista numérico o fato já conhecido analiticamente de haver um mapeamento que leva de uma ação à outra conforme o resultado (2.16). Além disto verificaremos esta relação também por meio do método de Langevin calculando-se as energias médias para estes modelos em função da "temperatura". Deste modo podemos comparar também os resultados numéricos fornecidos por estes diferentes métodos de simulação.

Como dissemos anteriormente, em Monte Carlo as configurações utilizadas para o cálculo de valores médios são obtidas por meio de um gerador de configurações aleatórias e Markovianas dentro do espaço das configurações aceitáveis a priori. Para os modelos de nosso interesse este espaço é caracterizado por superfícies esféricas devido as condições de vínculo. Deste modo as configurações em que estamos interessados são obtidas a partir de vetores gerados sobre esferas unitárias. Para

os modelos escolhidos temos estas esferas no espaço 3-dimensional, para o modelo $O(3)$, e no espaço 4-dimensional para o modelo CP^1 . Embora tenhamos nos restringido a estes casos para simulações de Monte Carlo também não é difícil fazermos simulações para espaços de dimensões mais altas^(45,46), o que corresponderia aos modelos $O(N)$ para $N > 3$ e aos modelos CP^{N-1} para $N > 2$.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo estudamos os modelos σ -não lineares por métodos numéricos. Esta abordagem é feita por meio das simulações de Monte Carlo e de Langevin. A energia interna, as funções de correlação e "gaps" de massa são determinados por meio destes métodos.

As simulações numéricas de teorias de campo Euclidianas apresentam fontes de erro sistemático e limitações devido ao ruído estatístico e, efeitos devidos ao tamanho e espaçamento finito da rede. Procura-se minimizar o efeito do tamanho finito da rede impondo-se condições de contorno periódicas. Dependendo da quantidade a ser medida estes efeitos são controlados, entretanto quando medimos quantidades como, por exemplo, o comprimento de correlação ξ , que é o inverso do "gap" de massa, o tamanho da rede utilizada tem grande importância.

Nas seções seguintes os aspectos mencionados acima serão discutidos tendo em vista nossos resultados numéricos para os modelos σ -não lineares.

Nós usamos para as simulações com a equação de Langevin o passo $\varepsilon=0.01$ e a fonte $h=0.001$.

6.1 ENERGIAS DOS MODELOS $O(3)$ E CP^1

A determinação da energia nos modelos $O(3)$ e CP^1 tem dupla finalidade. A primeira é de verificar do ponto de vista numérico a relação existente entre estes dois modelos. Esta relação reflete-se na equação (2.16) devido ao mapeamento no contínuo (2.14).

A segunda finalidade é de permitir a comparação entre os resultados numéricos obtidos pelos métodos de Langevin (ML) e de Monte Carlo (MC).

A equação (2.16) estabelece a relação entre os modelos $O(3)$ e CP^1 ,

$$S_{O(3)} = 2 \frac{\beta}{\beta_c} S_{CP^1} \quad (6.1)$$

onde β_c é o acoplamento definido em (3.27) para os modelos CP^{N-1} . As constantes β e β_c desempenham o papel do inverso da temperatura.

A igualdade entre as duas ações é obtida quando

$$2\beta = \beta_c \quad (6.2)$$

As energias para estes modelos, as quais são definidas como a ação dividida pela constante β , para o $O(3)$, e por β_c , para o CP^1 ,

$$E_{O(3)} = \frac{S_{O(3)}}{\beta}, \quad (6.3a)$$

$$E_{CP^1} = \frac{S_{CP^1}}{\beta_c}, \quad (6.3b)$$

têm a seguinte relação entre si,

$$\begin{aligned} \beta E_{O(3)} &= \beta_c E_{CP^1} \\ &= 2\beta E_{CP^1} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Portanto obteremos a igualdade entre as duas ações quando simularmos a ação do CP^1 com valores de $\beta_c = 2\beta$ e como consequência a energia do modelo $O(3)$ será o dobro da calculada para o CP^1 .

A equação (2.16) (ou (6.1)) é obtida na rede por meio das equações (3.2) e (3.5),

$$\begin{aligned} & -\beta \sum_{n,\mu} S_{n+\mu} \cdot S_n + \beta \sum_{n,\mu} 1 \\ &= 2\beta_c \left[-\sum_{n,\mu} |\bar{z}_{n+\mu} \cdot z_n|^2 + \sum_{n,\mu} 1 \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

As ações simuladas são (3.4) e (3.7). Portanto a relação (6.4), entre as energias no contínuo, torna-se na rede

$$E_{O(3)} = 2E_{CP^1} + 2, \quad (6.6)$$

que é obtida por meio de (6.5).

A constante 2 vem do fato de que ao simularmos as ações (3.4) e (3.7) desconsideramos as constantes aditivas em (6.5). Como nossos modelos são bidimensionais, a soma em μ é feita sobre os primeiros vizinhos ($\hat{1}$ e $\hat{2}$) e devido ao fato de normalizarmos a energia pelo volume da rede ($L \times L$), resulta no fator 2 em (6.6).

Antes de calcularmos as energias analisaremos alguns aspectos que envolvem as simulações numéricas na rede. Aspectos

estes tais como termalização inicial, número de configurações necessárias para se obter os valores médios, efeito das condições iniciais e a influência do tamanho da rede. Isto é feito por nós para ambos os métodos de simulação.

Na tabela (6.1) apresentamos as energias para o modelo CP¹ obtidas pelo método de Langevin e de Monte Carlo.

TERM	NCONF	$\langle E \rangle_{ML}$		$\langle E \rangle_{MC}$	
100	250	-1.167	± 0.006	-1.174	± 0.001
	500	-1.171	± 0.003	-1.174	± 0.001
250	250	-1.172	± 0.005	-1.174	± 0.002
	500	-1.172	± 0.002	-1.174	± 0.001
500	250	-1.169	± 0.003	-1.173	± 0.001
	500	-1.172	± 0.004	-1.175	± 0.001
1000	250	-1.173	± 0.003	-1.171	± 0.001
	500	-1.168	± 0.002	-1.174	± 0.001
2000	250	-1.174	± 0.002	-1.170	± 0.001
	500	-1.172	± 0.004	-1.172	± 0.001

Tab. 6.1 Energias para o modelo CP¹ para $\beta_c=1$ e $L=12$, obtidas pelo método de Langevin (ML) e por Monte Carlo (MC).

Os valores aparecem em função de diferentes termalizações com o tamanho da rede $L=12$ e para $\beta_c=1$.

O procedimento usado para a determinação do erro estimado σ_μ , $\sigma_\mu^2 = \sigma^2 / NREP$, onde σ é o desvio padrão⁽⁴⁷⁾, é descrito a seguir. Inicialmente selecionamos certo número de configurações, NCONF, e a partir destas calculamos o valor médio para a grandeza de interesse, que nesta seção corresponde a energia. Após isto repetimos o mesmo procedimeto NREP vezes, fazendo com que obtenhamos NREP valores. Nossa intenção com isto é de obter

valores que sejam estatisticamente independentes. Com estes NREP valores determinamos o valor médio final para a energia e estimamos o seu erro σ_{μ} .

O número de repetições usadas nesta seção é NREP=5.

Na tabela (6.1), para cada termalização considerada, usamos dois diferentes conjuntos de configurações NCONF. Estes 2 conjuntos são usados para verificarmos se o tamanho do agrupamento (NCONF) tem alguma influência sobre o valor médio final. Estes conjuntos são relativamente pequenos pois se tivéssemos escolhido um determinado NCONF suficientemente grande poderia acontecer que o efeito das termalizações utilizadas não fosse percebido por este motivo. No entanto a tabela (6.1) mostra-nos que o sistema alcança rapidamente a termalização.

Nós escolhemos TERM=500 como o número adequado de varreduras para termalizar o sistema.

Devemos salientar que os valores mencionados para o número de varreduras na rede e de configurações, apresentados nas tabelas desta seção, correspondem aos valores efetivamente usados para o cálculo das grandezas de interesse pelo ML. Pois devemos lembrar que o processo de atualização da rede pelo procedimento de χ ajustável é feito por meio de um passo intermediário, que corresponde às configurações fora da superfície de vínculo. Este é portanto o motivo da grande discrepância no tempo computacional gasto entre os dois métodos de simulação. Este fato pode ser visto nas tabelas (6.2) e (6.3), onde consta o tempo de computador utilizado no VAX 780.

Na tabela (6.2) analisamos o efeito do tamanho, NCONF, dos grupos de configurações usadas para o cálculo do valor médio.

Os resultados de Langevin e de Monte Carlo não apresentam grandes alterações em função de NCONF. Tomamos NCONF=1000 para os cálculos nesta seção pois a partir deste valor não observamos alterações nos valores médios obtidos.

TERM	NCONF	$\langle E \rangle_{ML}$	tempo	$\langle E \rangle_{MC}$	tempo
500	250	-1.169 ± 0.003	19	-1.173 ± 0.001	6
	500	-1.172 ± 0.004	25	-1.174 ± 0.001	9
	750	-1.174 ± 0.003	33	-1.173 ± 0.001	11
	1000	-1.170 ± 0.002	38	-1.173 ± 0.001	14
	1500	-1.171 ± 0.002	52	-1.173 ± 0.001	18
	2000	-1.170 ± 0.001	64	-1.173 ± 0.001	23

Tab. 6.2 Energias para o modelo CP¹ para $\beta_c=1$ e L=12, com o tempo (em minutos) de processamento. Usamos^c condições iniciais fixas para as 5 repetições (NREP).

TERM	NCONF	$\langle E \rangle_{ML}$	tempo	$\langle E \rangle_{MC}$	tempo
500	250	-1.169 ± 0.003	19	-1.171 ± 0.001	7
	500	-1.171 ± 0.004	26	-1.174 ± 0.001	9
	750	-1.174 ± 0.003	33	-1.173 ± 0.001	12
	1000	-1.169 ± 0.002	38	-1.173 ± 0.001	14
	1500	-1.171 ± 0.002	53	-1.174 ± 0.001	19
	2000	-1.170 ± 0.001	65	-1.174 ± 0.001	24

Tab. 6.3 Energias para o modelo CP¹ para $\beta_c=1$ e L=12, com o tempo (em minutos) de processamento. Os resultados foram obtidos a partir de configurações iniciais aleatórias.

Os resultados nas tabelas (6.1,2) foram obtidos partindo-se sempre das mesmas condições iniciais para as NREP repeti-

ções. Por este motivo repetimos a tabela (6.2), mas tomando como condições iniciais configurações obtidas de forma aleatória. Os resultados numéricos encontram-se na tabela (6.3).

A comparação entre as tabelas (6.2) e (6.3) mostra-nos que os valores obtidos são independentes das condições iniciais, revelando que já temos boa estatística quanto a este parâmetro. Por este motivo preferimos continuar com as condições iniciais fixas.

Supomos que as diferenças nos resultados obtidos por Monte Carlo e Langevin sejam devidas ao termo de correção (4.49) para a ação na equação de Langevin.

Nestas duas tabelas apresentamos para comparação o tempo de computador utilizado e vemos que a implementação das diferentes condições iniciais praticamente não alteram este tempo de computação.

Após este estudo prévio sobre as condições em que simulamos o modelo CP^1 , podemos partir para a comparação entre os modelos $O(3)$ e CP^1 .

Na tabela (6.4) temos as energias médias para o modelo CP^1 em função de β_c e do tamanho da rede L . Estes resultados podem ser comparados com aqueles apresentados na tabela (6.5) para o modelo $O(3)$.

A comparação numérica entre as energias obtidas para estes modelos é facilmente feita utilizando-se a relação (6.6).

Nas tabelas (6.4) e (6.5) apresentamos também a taxa de aceitação das novas configurações por sítio para o método de Monte Carlo. Estas tabelas mostram que, conforme diminuímos a temperatura, a aceitação de novas configurações também diminui.

A comparação entre as tabelas (6.4) e (6.5) nos diz que as

energias obtidas por ambos os métodos de simulação estão de acordo com a relação esperada (6.6) que relaciona as energias médias de ambos os modelos.

L	β_c	$\langle E \rangle_{ML}$	$\langle E \rangle_{MC}$	taxa aceit.
8	1.0	-1.172 ±0.003	-1.173 ±0.002	.69
	1.5	-1.267 ±0.003	-1.273 ±0.002	.54
	2.0	-1.382 ±0.005	-1.392 ±0.002	.40
	2.5	-1.512 ±0.007	-1.519 ±0.006	.29
12	1.0	-1.170 ±0.002	-1.173 ±0.001	.69
	1.5	-1.265 ±0.004	-1.271 ±0.001	.54
	2.0	-1.373 ±0.003	-1.382 ±0.002	.41
	2.5	-1.493 ±0.003	-1.501 ±0.002	.30
16	1.0	-1.171 ±0.001	-1.173 ±0.001	.69
	1.5	-1.266 ±0.001	-1.270 ±0.001	.54
	2.0	-1.374 ±0.003	-1.381 ±0.002	.41
	2.5	-1.501 ±0.001	-1.498 ±0.002	.30

Tab. 6.4 Energias para o modelo CP¹. Os valores foram obtidos com TERM=500, NCONF=1000 e NREP=5. A tabela mostra a taxa de aceitação para os dados de MC.

A comparação entre as energias obtidas por ambos os métodos é feita nas tabelas (6.4) e (6.5) para redes de tamanho L=8, 12 e 16; mostrando maior variação nos valores obtidos para $\beta > 1.5$.

L	β	$\langle E \rangle_{ML}$		$\langle E \rangle_{MC}$		taxa aceit.
8	0.5	-0.322	± 0.007	-0.348	± 0.002	.69
	0.75	-0.534	± 0.008	-0.535	± 0.003	.55
	1.0	-0.781	± 0.015	-0.772	± 0.007	.41
	1.25	-1.056	± 0.004	-1.025	± 0.010	.29
12	0.5	-0.351	± 0.003	-0.345	± 0.001	.69
	0.75	-0.543	± 0.004	-0.542	± 0.001	.55
	1.0	-0.762	± 0.005	-0.759	± 0.004	.41
	1.25	-0.996	± 0.008	-1.000	± 0.007	.30
16	0.5	-0.341	± 0.005	-0.348	± 0.001	.69
	0.75	-0.541	± 0.005	-0.540	± 0.001	.54
	1.0	-0.761	± 0.004	-0.761	± 0.002	.41
	1.25	-1.005	± 0.008	-0.993	± 0.006	.30

Tab. 6.5 Energias para o modelo $\mathcal{O}(3)$. Os valores foram obtidos com TERM=500, NCONF=1000 e NREP=5. A tabela mostra a taxa de aceitação para os dados de MC.

6.2 ENERGIAS NO CP^{N-1} PARA N ATÉ 4.

Por meio das simulações de Langevin calculamos as energias médias para os modelos CP^{N-1} com N=2,3 e 4.

Os resultados encontram-se na tabela (6.6).

$\hat{\beta}_c \backslash N$	2		3		4	
0.4	-1.137	±0.003	-0.817	±0.002	-0.637	±0.003
0.6	-1.209	±0.003	-0.903	±0.002	-0.725	±0.003
0.8	-1.284	±0.004	-1.007	±0.002	-0.835	±0.004
1.0	-1.382	±0.005	-1.146	±0.005	-0.987	±0.004
1.2	-1.494	±0.006	-1.313	±0.008	-1.238	±0.004
1.4	-1.579	±0.004	-1.442	±0.003	-1.372	±0.003
1.6	-1.644	±0.001	-1.522	±0.002	-1.458	±0.001
1.8	-1.687	±0.001	-1.577	±0.001	-1.517	±0.001
2.0	-1.720	±0.001	-1.619	±0.001	-1.563	±0.001
2.4	-1.767	±0.001	-1.678	±0.001	-1.625	±0.001

Tab. 6.6 Energias para os modelos CP^{N-1} pelo ML. Usamos L=8, com ITERM=1000, NCONF=2000 e NREP=5.

O gráfico destes valores em função de $\hat{\beta}_c$, conforme definido em (3.31), encontra-se na figura (6.1). Nesta figura normalizamos nossos valores pelo fator 2, que corresponde a obter valores médios por "link". Esta figura pode ser comparada diretamente com a fig. (6.2), onde a energia foi calculada por "link". A fig. (6.2) foi obtida na ref.(22) por meio das séries de acoplamento fraco e forte em $\hat{\beta}$ (que é o nosso $\hat{\beta}_c$).

Destes gráficos notamos que $\langle E \rangle = 1$ parece ser a extra-

poluição para o limite assintótico em $\hat{\beta}_c$. Este é o limite esperado conforme o resultado (3.39), onde denotamos por U a energia do sistema. O valor de U não está normalizado pelo fator 2 como fizemos na fig. (6.1).

A fig. (6.1) mostra de forma clara o comportamento da energia média na região em que é difícil obter-se valores conclusivos por meio da expansão na constante de acoplamento.

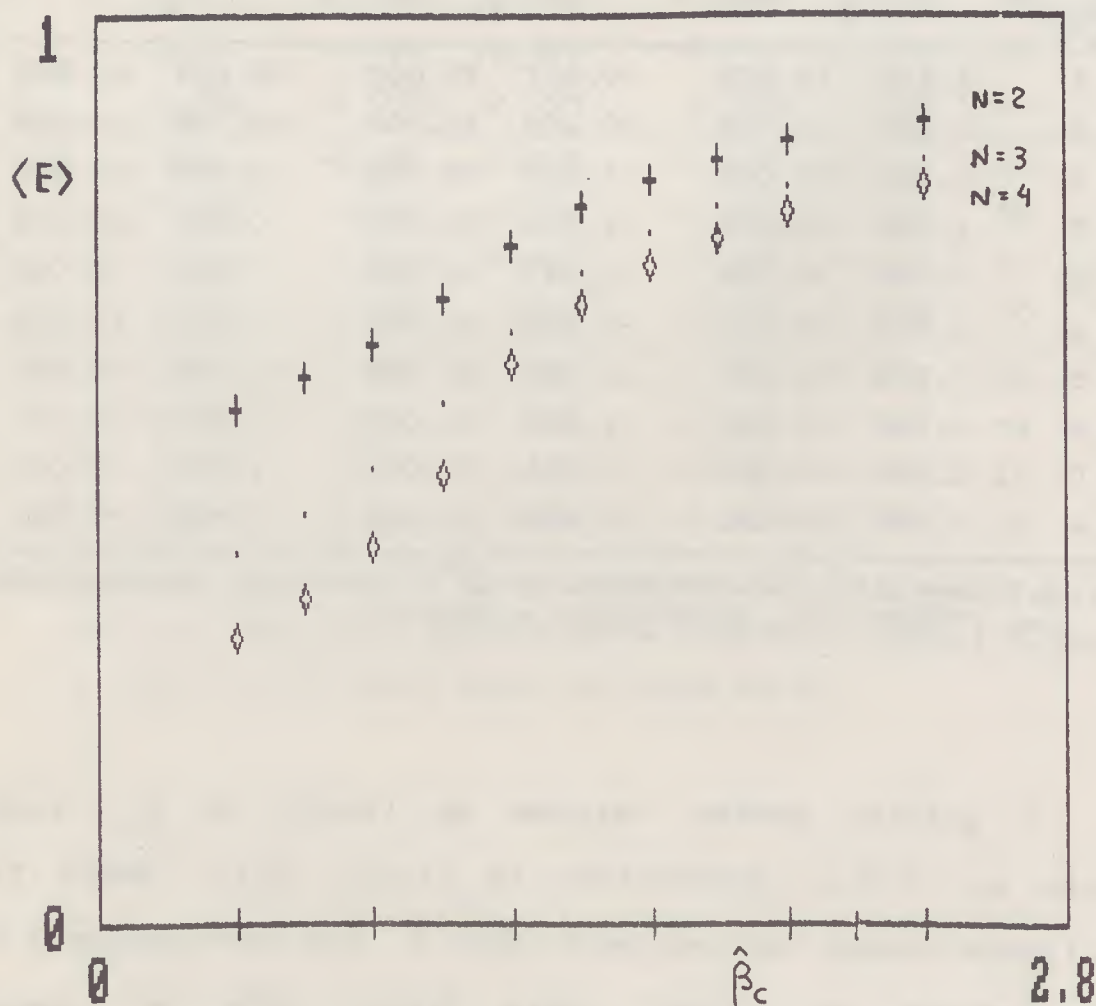


Fig 6.1 Energia média nos modelos CP^{N-1} .

A partir desta seção os valores mencionados para a termalização e para o número de configurações (NCONF) usados no ML passam a corresponder aos valores totais utilizados. O procedimento anterior foi adotado para podermos comparar diretamente o ML com o de MC, quando utilizamos igual número de varreduras para os dois métodos.

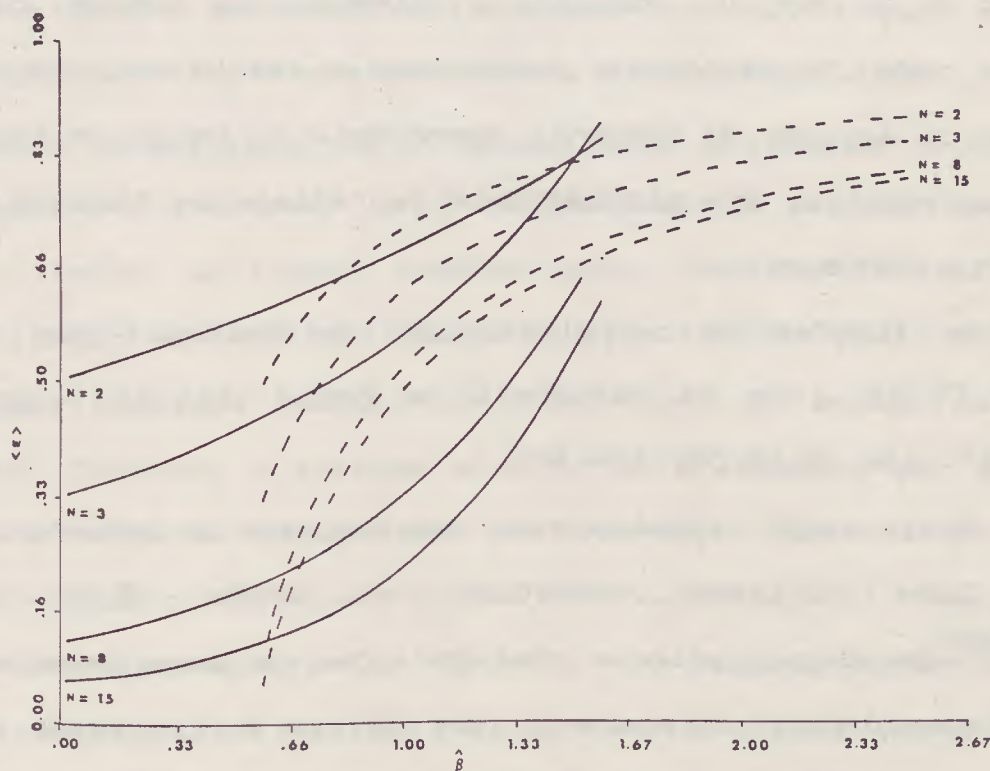


Fig. 6.2 Energia média obtida por meio da expansão na constante de acoplamento.

6.3 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E "GAPS" DE MASSA NO $O(3)$

Nesta seção determinamos as funções de correlação e "gaps" de massa para o modelo σ -não linear $O(3)$ com o ML.

Pretendemos com este modelo, além de obter os "gaps" de massa em função de β , compreender melhor as características que cercam o ML no que diz respeito a obtenção das funções de correlação na rede. Em particular analisamos o efeito de interromper a evolução da equação de Langevin dependente do termo de fonte h de forma sistemática, que simplesmente se reflete no fato de ligar e desligar a fonte h .

As funções de correlação são determinadas por meio da equação (5.53), com as variáveis de campo obtidas a partir da média definida em (5.52) com $N=3$.

Nesta seção trabalharemos com uma rede de tamanho $L=16$.

Como havíamos comentado na seção (5.2c), Namiki et.al.⁽³⁶⁾ propõem colecionar configurações de campo dependentes do termo h somente por determinado período com a finalidade de obter melhor comportamento para a função de correlação $G(l)$.

Nós simulamos as equações de Langevin (5.23) e (5.56). Com estas equações obtemos as configurações atualizadas no tempo de Langevin. O valor médio para $G(l)$ foi calculado sobre o conjunto de $NCONF$ configurações obtidas a partir da diferença entre as configurações $\bar{S}(l)^{(h)}$ e $\bar{S}(l)$ obtidas no mesmo instante de Langevin. Naturalmente que o procedimento de χ ajustável nos leva a desprezar metade das configurações atualizadas por (5.23) e (5.56)

para efeitos de cálculo dos valores médios. Continuamos chamando de NCONF o número total de iterações feitas com a equação de Langevin.

O procedimento descrito acima para a obtenção do valor médio para $G(l)$ é novamente repetido NREP vezes e assim obtemos o valor médio final com o erro sendo calculado sobre estes NREP valores.

Para as NREP repetições fazemos o sistema (eq.(5.23)) evoluir sempre da mesma configuração inicial, a qual chamamos de configuração fixa e que satisfaz a condição de vínculo. O sistema é sempre termalizado com as mesmas TERM varreduras na rede. Após a termalização evoluímos de forma paralela o sistema (eq. (5.56)) com o termo de fonte, tomando como condição inicial a última atualização da rede feita pela equação (5.23). Deste modo os dois sistemas passam a evoluir do mesmo ponto no espaço das configurações. Deixamos o sistema evoluir paralelamente por determinado período enquanto acumulamos as diferenças obtidas por meio de (5.53). Após certo número (DESLI) de varreduras na rede desligamos o sistema com o termo de fonte h e o ligamos novamente tomando como configuração inicial para a rede a última varredura obtida por (5.23). Este processo é repetido até o sistema (5.23) atingir a sua finalidade que é a de varrer a rede NCONF vezes, ou seja, obter NCONF configurações para cada sítio da mesma.

Este procedimento de dividir o número NCONF em vários períodos foi usado por nós para a obtenção dos resultados numéricos apresentados nesta seção e na próxima, (6.4), que trata do estado ligado no modelo CP^1 . Para a última seção, que trata do modelo CP^1 com férmions, simplesmente tomamos o período como tendo

o tamanho NCONF.

β	NCONF	DESLI	μ
0.5	4000	400	1.80 \pm 0.06
	4200	600	1.66 \pm 0.06
	4000	800	1.58 \pm 0.04
	4000	1000	1.48 \pm 0.05
	4800	1200	1.41 \pm 0.05
	4200	1400	1.41 \pm 0.04
	4000	2000	1.47 \pm 0.05
	4000	4000	1.36 \pm 0.05

Tab. 6.7 Valores para o "gap" de massa para o modelo $\alpha(3)$ em função do período DESLI. Usamos $L=16$ e $NREP=5$.

Vejamos a influência do período DESLI nos valores obtidos para o "gap" de massa μ . Para isto plotamos na figura (6.3) os resultados obtidos na tabela (6.7) para o "gap" de massa com $\beta=0.5$.

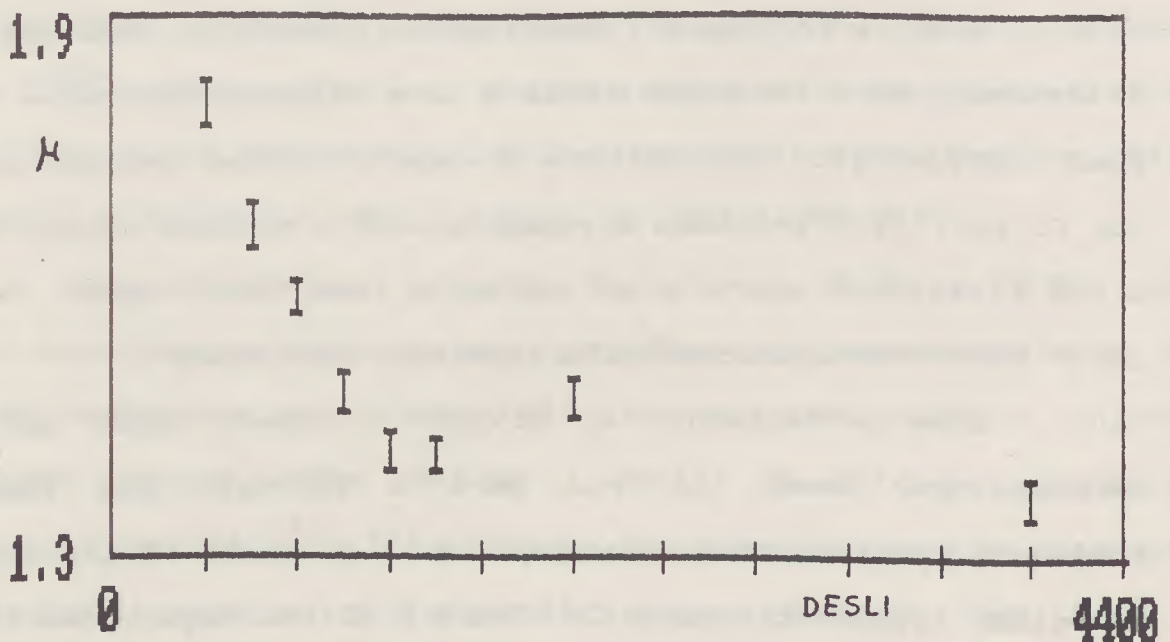


Fig. 6.3 "Gaps" de massa para o modelo $\alpha(3)$.

Estes resultados podem ser comparados com aqueles apresentados na fig.1 da ref. 48, que foram obtidos por meio das simulações de Monte Carlo. O valor observado nessa figura para o "gap" de massa do modelo O(3) é

$$\sim 1.4 < \mu < \sim 1.6 \quad (6.7)$$

Fazendo-se a comparação com os nossos resultados na fig. (6.3) vemos que para períodos menores do que 800 os valores para os "gaps" de massa encontram-se acima do valor obtido por MC. Para períodos maiores do que 800 notamos que estes valores oscilam no intervalo citado em (6.7).

Escolhemos como período o valor DESLI=1000.

A fig.(6.3) foi obtida ajustando-se os valores de $G(l)$ por mínimos-quadrados⁽⁴⁷⁾ para a exponencial

$$G(l) = Ae^{-\mu l} \quad (6.8)$$

As condições de contorno periódicas nos levam à obtenção da função

$$F(l) = a \cosh \mu \left(\frac{L}{2} - l \right) \quad (6.9)$$

ao invés de (6.8). Apesar disto o ajuste (6.8) para G é adequado pois a região caracterizada pela função cosh, que tende ao centro da rede, corresponde a barras de erro crescentes em $G(l)$. Este comportamento pode ser visto para o modelo O(3) nas figuras (6.4) e (6.5), que mostram as funções de correlação $G(l)$ com as respectivas barras de erro para dois valores de β , respecti-

vamente, $\beta=0.5$ com NREP=5 e $\beta=1.4$ com NREP=10. Os valores numéricos correspondentes a estas figuras encontram-se na tabela (6.8).

l	$\beta = 0.5$				$\beta = 1.4$			
	β	NREP	$G(l)$		β	NREP	$G(l)$	
1	0.5	5	1.39	± 0.07	1.4	10	1.48	± 0.11
2			3.2 E-1	± 0.4 E-1			7.8 E-1	± 0.8 E-1
3			6.9 E-2	± 1.8 E-2			4.4 E-1	± 0.6 E-1
4			1.1 E-2	± 0.4 E-2			2.6 E-1	± 0.3 E-1
5			3.5 E-3	± 0.9 E-3			1.5 E-1	± 0.2 E-1
6			1.0 E-3	± 0.3 E-3			8.8 E-2	± 1.1 E-2
7			1.4 E-4	± 0.5 E-4			5.3 E-2	± 0.9 E-2
8			4.7 E-5	± 0.9 E-5			3.9 E-2	± 1.0 E-2
9			1.4 E-5	± 0.2 E-5			2.9 E-2	± 0.8 E-2
10			2.0 E-5	± 0.8 E-5			3.9 E-2	± 1.5 E-2
11			1.2 E-4	± 0.4 E-4			5.8 E-2	± 1.9 E-2
12			5.4 E-4	± 1.7 E-4			1.1 E-1	± 0.3 E-1
13			3.0 E-3	± 0.7 E-3			2.0 E-1	± 0.6 E-1
14			1.6 E-2	± 0.3 E-2			3.6 E-1	± 1.0 E-1
15			7.1 E-2	± 1.8 E-2			6.0 E-1	± 1.2 E-1
16			2.5 E-1	± 0.5 E-1			9.2 E-1	± 1.1 E-1

Tab. 6.8 Funções de correlação para o modelo $\mathcal{O}(3)$ em função de l para $\beta=0.5$ e $\beta=1.4$. Usamos ITERM=1000 e NCONF=4000.

Para a determinação do valor μ ajustamos a curva (6.8) para os valores de l indo de 2 até o centro da rede. Este ajuste foi feito para os pontos no ramo esquerdo, que corresponde à origem da varredura na rede, e também para os pontos no ramo direito.

O resultado dos vários ajustes de curva em função do número de pontos (NP) em cada ramo encontra-se na tabela (6.9).

NP	β NREP		μ	β NREP		μ	
	0.5	5		1.4	10		
RAMO ESQUERDO							
2			1.48	± 0.14		0.64	± 0.12
3			1.49	± 0.10		0.61	± 0.07
4			1.53	± 0.08		0.59	± 0.04
5			1.51	± 0.05		0.58	± 0.03
6			1.48	± 0.04		0.57	± 0.02
7			1.49	± 0.03		0.56	± 0.02
8			1.48	± 0.02		0.55	± 0.02
RAMO DIREITO							
2			1.26	± 0.32		0.43	± 0.24
3			1.36	± 0.14		0.46	± 0.14
4			1.46	± 0.09		0.49	± 0.09
5			1.51	± 0.08		0.52	± 0.07
6			1.53	± 0.06		0.54	± 0.05
7			1.56	± 0.05		0.54	± 0.05

Tab. 6.9 "Gaps" de massa obtidos pelo ajuste da eq. (6.8) para NP pontos em cada ramo das respectivas curvas nas figuras (6.4) e (6.5).

Na tabela (6.10) apresentamos os "gaps" de massa calculados para diferentes valores de β tomando-se a média dos dados obtidos nos dois ramos para $NP \geq 3$.

Nós plotamos na fig. (6.6) os dados da tabela (6.10a) com as barras de erro. Esta figura mostra-nos o comportamento de μ em função de β , para β variando de 0.5 até 1.4.

β	NREP	μ	
0.5	5	1.49	± 0.04
0.7		1.13	± 0.03
0.9		0.85	± 0.07
1.0		0.59	± 0.05
1.1		0.58	± 0.09
1.2		0.60	± 0.08
1.3		0.59	± 0.08
1.4		0.53	± 0.05

Tab. 6.10a "Gaps" de massa para o modelo $\mathcal{O}(3)$.

β	NREP	μ	
1.3	10	0.57	± 0.06
1.4		0.53	± 0.05

Tab. 6.10b "Gaps" de massa para o modelo $\mathcal{O}(3)$.

Na tabela (6.10b) repetimos a simulação para os valores de $\beta=1.3$ e 1.4 . A estatística neste caso foi melhorada pois usamos $NREP=10$. A comparação com a tabela (6.10a) mostra-nos que a estatística $NREP=5$ já é suficiente para a determinação de μ com a rede considerada.

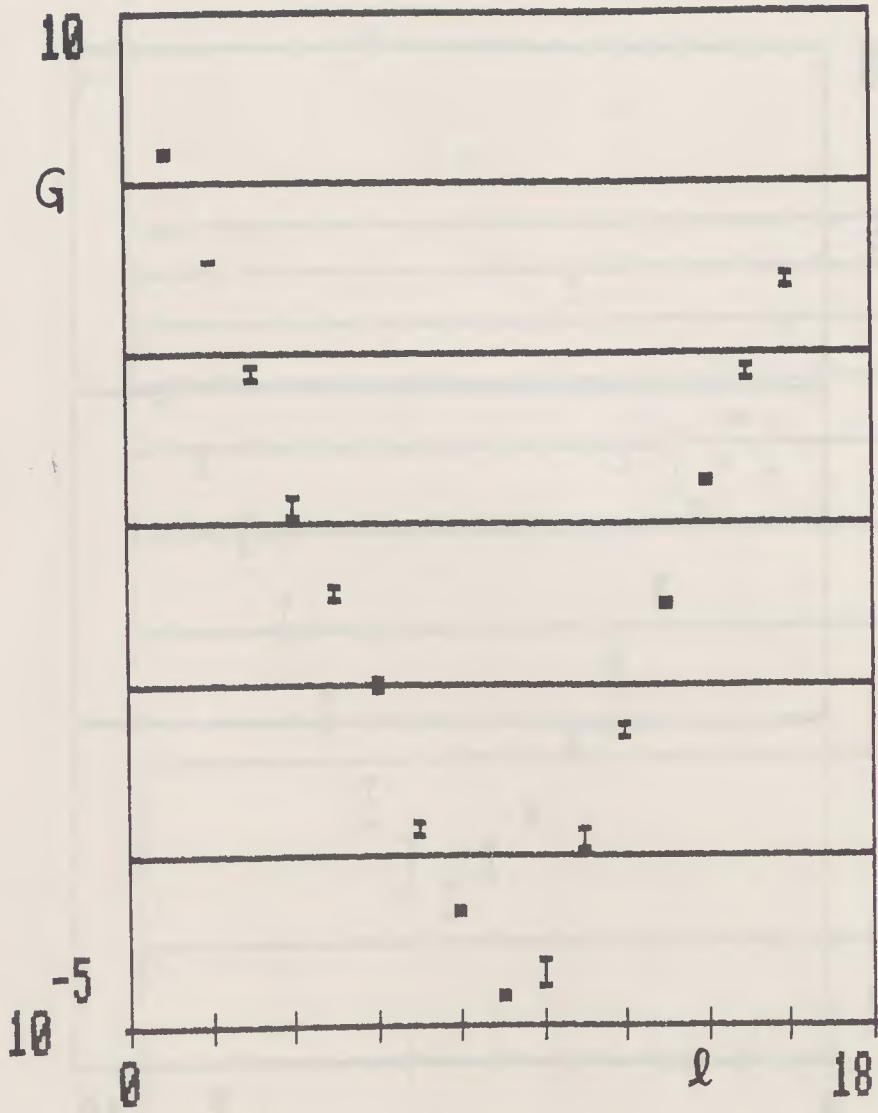


Fig. 6.4 Funções de correlação para $\beta=0.5$.

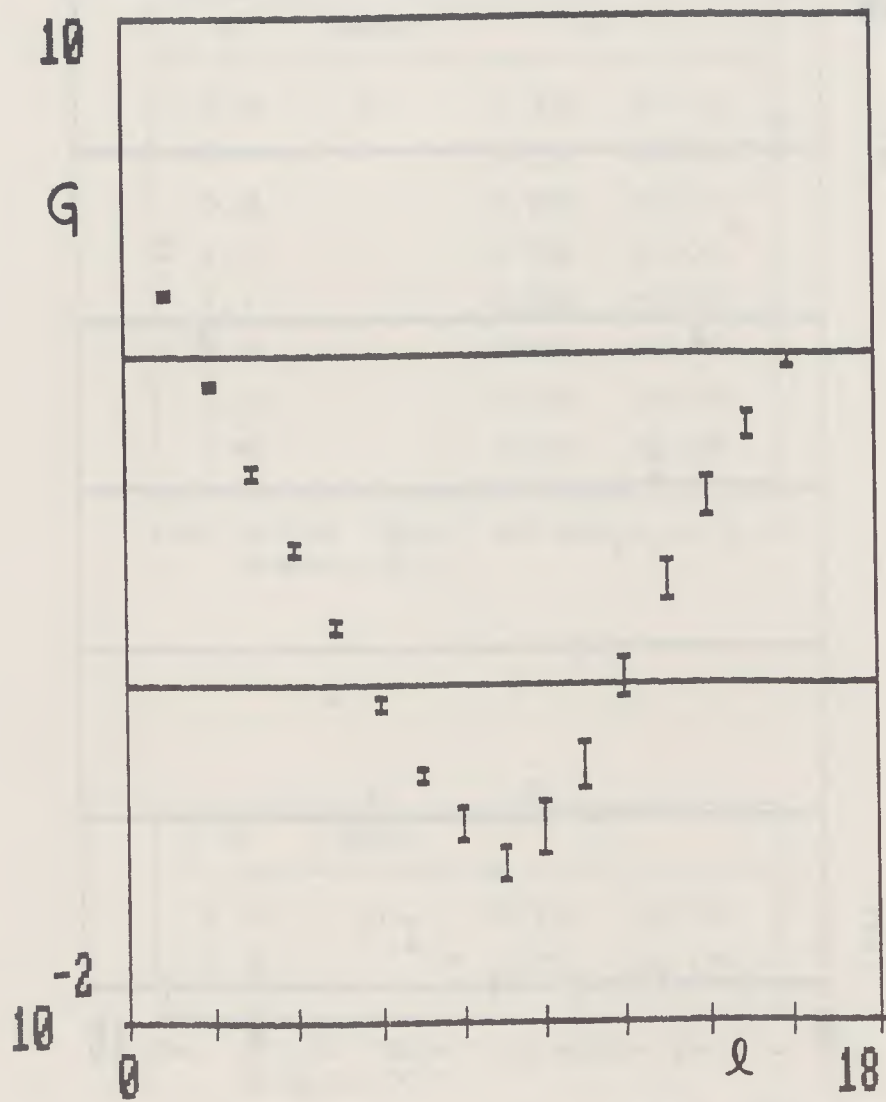


Fig. 6.5 Funções de correlação para $\beta=1.4$.

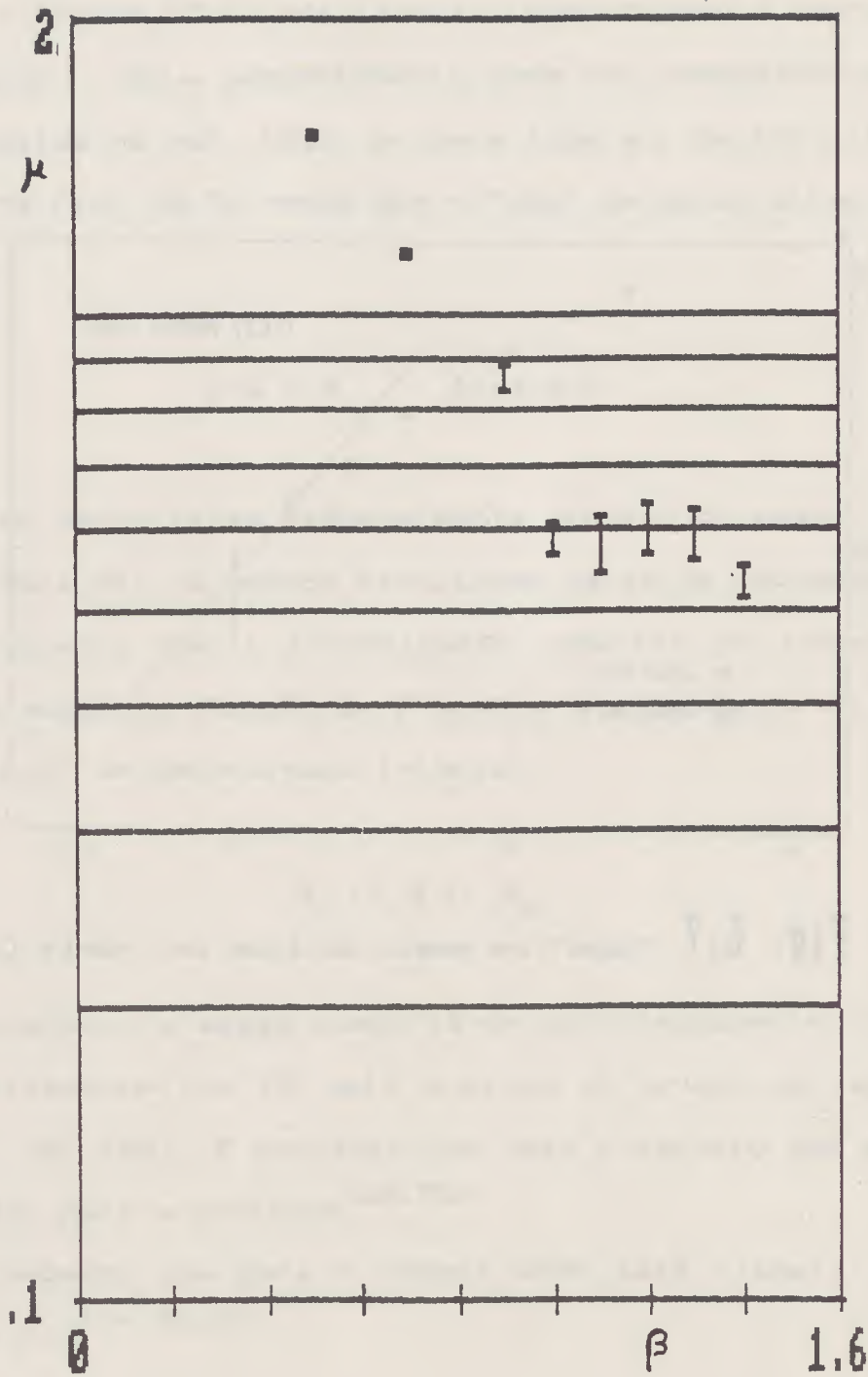


Fig. 6.6 "Gaps" de massa para o modelo OC3).

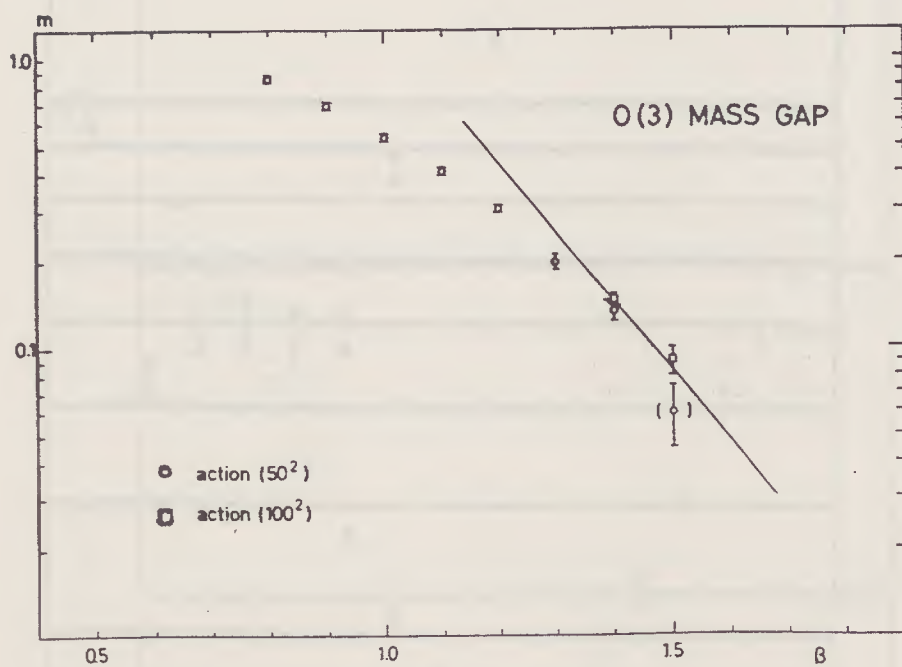


Fig. 6.7 "Gaps" de massa obtidos por Monte Carlo.

A figura (6.6) mostra-nos o comportamento decrescente de μ para β até 1. Este comportamento pode ser comparado com a figura (6.7), obtida na ref. (24), e com a figura 1 da ref. (48).

Na fig. (6.7) vemos que o "gap" de massa situa-se em torno do valor

$$\mu \approx 0.5 \quad \text{para } \beta=1. \quad (6.10)$$

Este valor encontra-se razoavelmente próximo do nosso.

Para $\beta > 1$ os nossos resultados param de decrescer.

Sabemos que a investigação numérica do comportamento do "gap" de massa em função de β mostra a existência de uma "janela do contínuo" em determinado intervalo,

$$\beta_1 \ll \beta \ll \beta_2 \quad (6.11)$$

Neste intervalo a massa comporta-se aproximadamente como previsto assintoticamente (em β) pela análise do grupo de renormalização (ref 49, pg. 124). É portanto com este intervalo que se faz a extrapolação para o contínuo^(24,50).

Sabemos que para o modelo $\phi(3)$ esta "janela" encontra-se no intervalo^(24,48,50)

$$\sim 1.3 < \beta < \sim 1.6 . \quad (6.12)$$

Portanto nesta região espera-se que a expressão do "gap" de massa obtido pelo grupo de renormalização^(40,48)

$$m a = C 2\pi\beta e^{-2\pi\beta}, \quad (6.13)$$

($m a = \mu$) possa ser ajustada aos pontos obtidos pelas simulações numéricas na rede. Este intervalo corresponde ao comprimento de correlação (inverso do "gap" de massa)

$$\xi \geq 6a \quad (6.14)$$

onde a é o espaçamento da rede, que no nosso caso é 1.

Portanto para a determinação numérica do intervalo (6.11) é necessário que as medidas sejam feitas numa rede de forma que (48,50)

$$a \ll \xi \ll L a. \quad (6.15)$$

Esta desigualdade estabelece as condições para que evitemos os efeitos de tamanho finito.

Nossas simulações foram feitas numa rede de tamanho $L=16$. Isto pode justificar o comportamento de μ , na fig. (6.6), em desacordo com o esperado pela eq. (6.13) no intervalo

$$1 < \beta \leq 1.4, \quad (6.16)$$

pois este intervalo começa a penetrar na região da "janela do contínuo" (6.12) e deveríamos estar trabalhando nesta região com redes muito maiores do que $L=16$.

Os autores da ref. (48) trabalham com redes de tamanho

$(30)^2$ a $(200)^2$ para a determinação de μ , enquanto que os autores da ref. (24) usam redes de tamanho $(50)^2$ e $(100)^2$. Isto nos dá a indicação do tamanho necessário da rede para obtermos resultados numéricos em concordância com o previsto pelo grupo de renormalização, eq. (8.13), na região da "janela do contínuo".

8.4 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E "GAPS" DE MASSA NO MODELO CP¹.

Calculamos também as funções de correlação para o modelo CP¹ pelo ML.

O procedimento de desligar a fonte h após determinado tempo de evolução tem apresentado, para o modelo O(3), um melhor comportamento para os valores de $G(l)$. Por outro lado, se permitirmos que os dois sistemas continuem evoluindo, as funções de correlação começam a apresentar o fenômeno da falha hierárquica, conforme mencionamos em (5.2C), e no centro da rede pode-se obter valores negativos para $G(l)$. Isto ocorre em geral para um tempo longo de evolução simultânea, da ordem de 2000 varreduras para as redes em que trabalhamos. Este efeito está diretamente relacionado com o tamanho da rede pois a longas distâncias o valor de $G(l)$ torna-se muito pequeno, fazendo com que as flutuações tornem-se grandes quando comparadas com $G(l)$.

Na evolução paralela das equações de Langevin (4.45) para o campo Z do modelo CP¹ puro observamos uma característica peculiar nos valores obtidos para as funções de correlação (5.59) do campo Z .

Apresentamos, como exemplo, os resultados obtidos para a rede $L=12$ e com $\beta=0.8$. Este sistema foi termalizado com $ITERM=1000$ varreduras. Os resultados obtidos após somente 200 varreduras encontram-se na tabela (8.11). Nesta tabela observamos o comportamento típico obtido para os valores de $G(l)$ quando simulamos o modelo CP¹ puro. Os valores obtidos são negativos e

distribuem-se por toda a distância λ na rede; estes seriam esperados no centro da rede, já que no centro as flutuações são maiores que os próprios valores. Isto faz com que não possamos determinar o "gap" de massa correspondente. Estes valores negativos permanecem para períodos muito maiores a 200 e se mantêm distribuídos em λ para redes maiores.

λ	β_c	DESLI	$G(\lambda)$
1	0.8	200	0.859
2			5.25E-3
3			2.00E-3
4			-1.60E-4
5			-8.02E-5
6			-2.46E-6
7			-9.72E-7
8			6.38E-6
9			5.92E-5
10			1.69E-4
11			-3.09E-3
12			-1.03E-2

Tab. 6.11 Funções de correlação para o modelo CP^1 em função de λ . Usamos ITERM=1000 e NCONF=200.

Observamos que estes valores negativos deixam de existir quando calculamos as funções de correlação (5.67) para o estado ligado dos campos Z , conforme definido em (5.64) e (5.66). Além disto, o comportamento correto também é obtido quando simulamos o

modelo CP^1 acoplado a férmions mínimos (seção (6.5)). Nesta situação sabemos que as partículas Z não estão mais confinadas^(8,18).

Os comentários acima nos sugerem que as grandes flutuações estatísticas, que fazem com que obtenhamos valores negativos, sejam encontradas no modelo CP^1 puro para $G(\lambda)$ como consequência da total blindagem do campo fundamental. Pois interpretamos os resultados da tabela (6.11) como consequência da queda abrupta para zero da função de 2 pontos do campo Z .

Agora nos voltamos para as simulações do estado ligado do CP^1 desde que nenhuma física aparece em nosso método de simular os campos fundamentais do modelo acima devido a blindagem da carga.

Apresentamos na tabela (6.12) a influência do período DESLI no cálculo do "gap" de massa para o estado ligado no CP^1 .

Estes resultados foram obtidos com a rede $L=12$ para $\beta=1$, com $ITERM=1000$ e $NREP=5$.

Na fig. (6.8) plotamos os dados da tabela (6.12), que podem ser comparados com a fig. (6.3).

Nós escolhemos o período $DESLI=600$ para nossas simulações.

Os valores de μ estão em boa concordância com aqueles obtidos para o modelo $O(3)$ correspondendo a $\beta=0.5$ e $DESLI=1000$.

β_c	NCONF	DESLI	μ
1.0	2000	400	1.51 \pm 0.05
	2200	600	1.50 \pm 0.04
	2200	800	1.50 \pm 0.05
	2000	1000	1.40 \pm 0.04
	2000	2000	1.37 \pm 0.05

Tab. 6.12 Valores do "gap" de massa para o estado ligado no modelo cp^1 em função do período DESLI. Usamos $L=12$ e $NREP=5$.

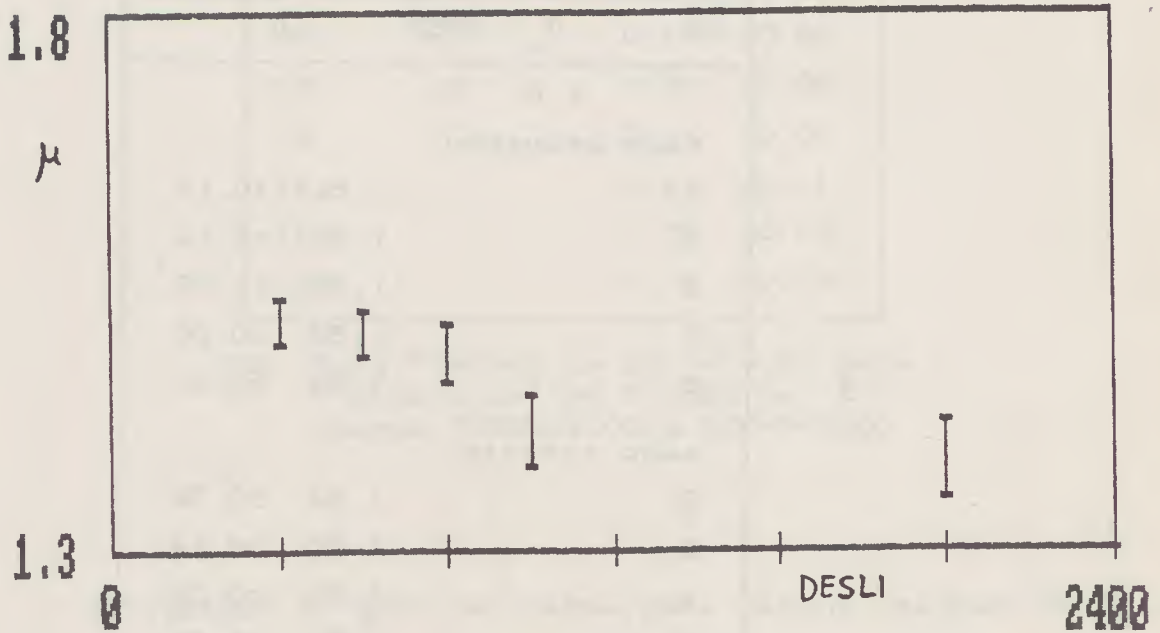


Fig. 6.8 "Gaps" de massa do estado ligado.

O tempo de computação utilizado foi de aproximadamente 3 horas para cada experimento feito em função do parâmetro DESLI. Para o valor de $\beta=2.8$ usamos NREP=10 com NCONF=2200 e o tempo de computação utilizado no VAX 780 foi de 6 horas. O tempo de processamento é relativamente grande quando comparado com o do modelo OC(3) (~ 4 horas para NREP=10, NCONF=4000 e L=16) mesmo usando a rede L=12. Isto se deve ao fato de estarmos simulando variáveis complexas e de usarmos uma ação quártica.

NP	β_c	NREP	μ
	1.0	5	
RAMO ESQUERDO			
2			1.61 ±0.14
3			1.54 ±0.10
4			1.52 ±0.08
5			1.53 ±0.05
6			1.53 ±0.04
RAMO DIREITO			
2			1.44 ±0.32
3			1.50 ±0.14
4			1.51 ±0.09
5			1.54 ±0.08

Tab. 6.13 "Gaps" de massa obtidos pelo ajuste de (6.8) para NP pontos em cada ramo

Na tabela (6.13) mostramos também a variação de μ em função do número (NP) de pontos com que fizemos o ajuste (6.8) para $\beta_c=1$.

Na fig. (6.9) plotamos as correlações em função de l para um valor de β_c grande, $\beta_c=2.8$, com as barras de erro. Aqui usamos uma estatística maior, NREP=10. Estes valores encontram-se na tabela (6.14).

l	β_c	NREP	$G(l)$
1	2.8	10	1.84 ±0.23
2			1.26 ±0.15
3			0.71 ±0.13
4			0.42 ±0.08
5			0.26 ±0.06
6			0.17 ±0.08
7			0.15 ±0.04
8			0.21 ±0.06
9			0.24 ±0.01
10			0.41 ±0.11
11			0.70 ±0.10
12			1.25 ±0.13

Tab. 6.14 Funções de correlação para o modelo CP^1 em função de l . Usamos ITERM=1000 e NCONF=2400.

Calculamos o "gap" de massa para alguns valores de β_c , os quais encontram-se na tabela (6.15). A fig. (6.10) corresponde a estes valores plotados na escala monolog em função de β_c .

A comparação entre as figuras (6.6) e (6.10) nos revela uma concordância muito boa entre os valores de μ e mostram o comportamento não esperado para $\beta_c \geq 2.2$. A mesma discussão feita em vista dos resultados da figura (6.6) sobre a região da "janela do contínuo" se aplica igualmente aqui.

β_c	NREP	μ	
1.0	5	1.50	± 0.04
1.4	"	1.16	± 0.03
1.8	"	0.98	± 0.07
2.0	"	0.73	± 0.05
2.2	"	0.59	± 0.09
2.4	"	0.58	± 0.10
2.6	"	0.47	± 0.08
2.8	10	0.50	± 0.05

Tab. 6.15 "Gaps" de massa para o estado ligado.

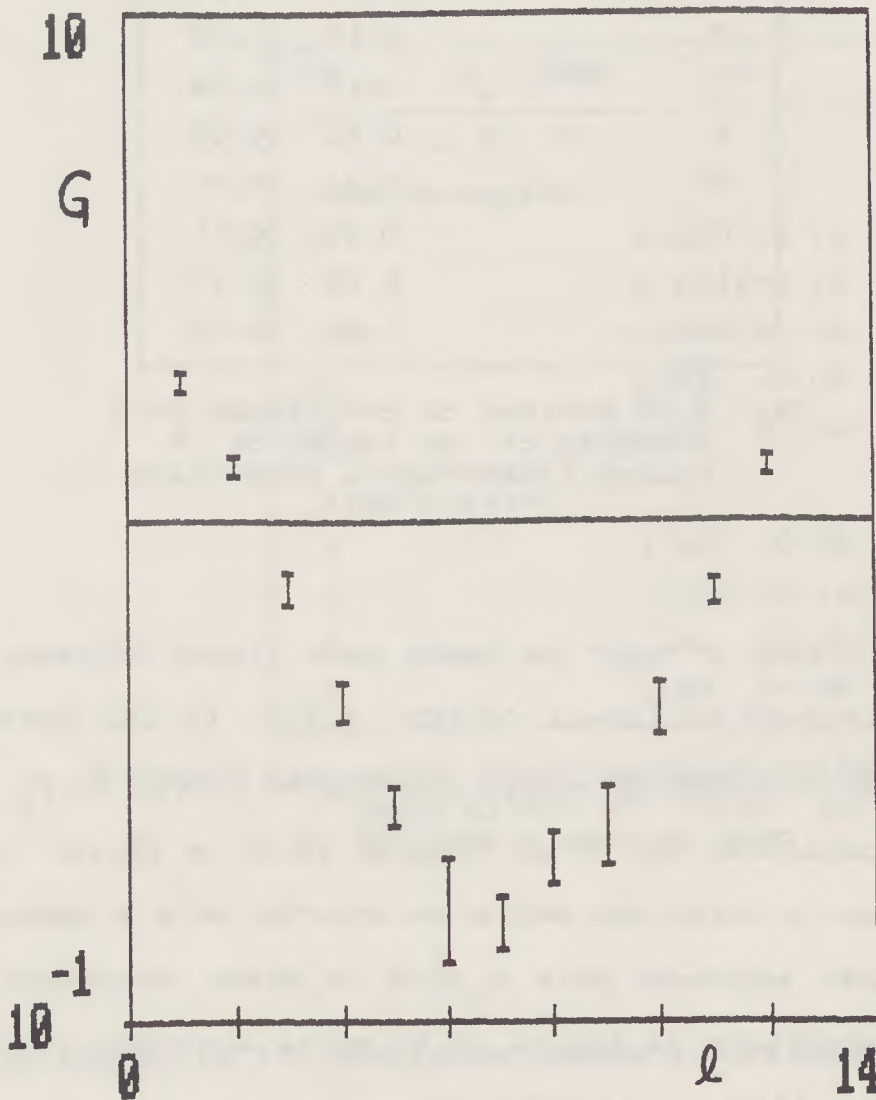


Fig. 6.9 Funções de correlação para $\beta_c = 2.8$.

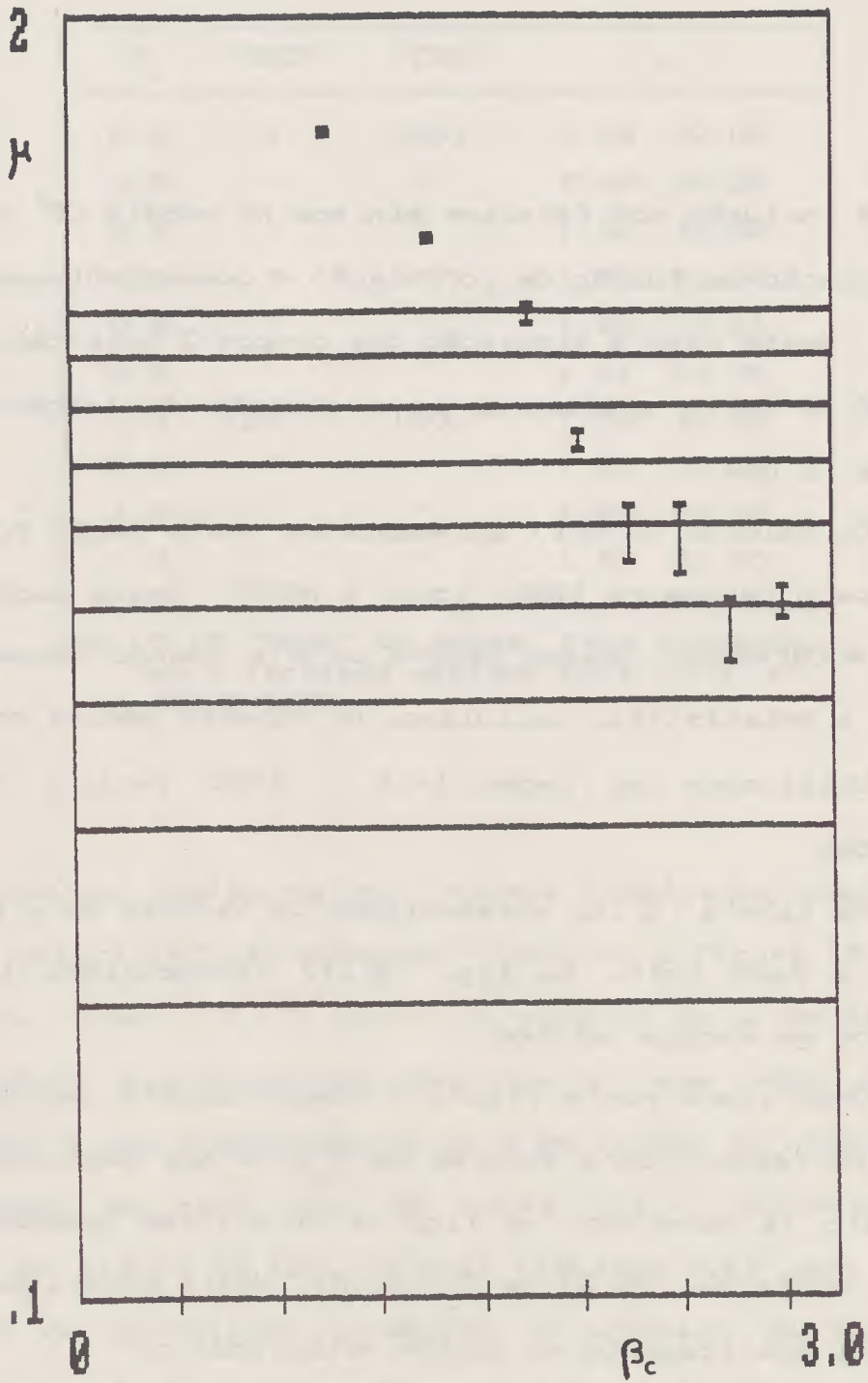


Fig. 6.10 "Gaps" de massa para o estado ligado.

6.8 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E "GAPS" DE MASSA NO CP^1 COM FÉRMIONS

A inclusão dos férmions mínimos no modelo CP^1 possibilitou a determinação da função de correlação e conseqüentemente do "gap" de massa. Neste caso a simulação dos campos Z para o cálculo de $G(\ell)$ em (5.59) é feita utilizando-se a equação de Langevin obtida a partir de (5.63).

Os valores de $G(\ell)$ apresentados nesta seção foram obtidos tomando-se o parâmetro DESLI igual a NCONF. Nesta seção trabalhamos com NCONF=3000. Usamos NREP=8 ou 9 e quando necessário, para melhorar a estatística, calculamos os valores médios com NREP=16.

Utilizamos as redes $L=16$ e $L=20$ para o cálculo das correlações.

Na tabela (6.16) apresentamos os valores de μ em função de β_c para a rede $L=16$. Na fig. (6.11) reproduzimos também estes resultados em escala monolog.

Observamos nesta figura o comportamento decrescente de μ com β_c . Entretanto para valores de $\beta_c \geq 0.9$ nos deparamos novamente com o fato já observado em figuras anteriores quando plotamos o "gap" de massa em função de β_c (ou β). Nesta figura para $\beta_c \geq 0.9$ o valor de μ praticamente se mantém estacionário.

Para analisarmos melhor este comportamento vamos nos ater em particular aos resultados obtidos com rede $L=20$.

Mostraremos em primeiro lugar o comportamento de μ que obtemos em função do número de pontos NP que usamos para ajustar a curva da equação (6.8). Tomamos como exemplo $\beta_c = 0.8$ que se encon-

β_c	NREP	ITERM	μ
0.3	8	1000	2.38 \pm 0.02
0.5	"	"	2.08 \pm 0.02
0.6	"	"	1.97 \pm 0.02
0.7	"	"	1.89 \pm 0.04
0.8	"	"	1.82 \pm 0.04
0.9	"	"	1.87 \pm 0.06
1.0	16	1500	1.66 \pm 0.07
1.1	"	"	1.62 \pm 0.04
1.2	"	"	1.56 \pm 0.08
1.3	"	"	1.63 \pm 0.10

Tab. 6.16 "Gaps" de massa para o modelo CP^1 + férmions mínimos para $L=16$ e $NCONF=3000$.

tra próxima da região na qual nossos resultados comportam-se de forma "a princípio" não esperada, conforme a figura (6.11).

Na tabela (6.17) temos os valores de μ em fun o de NP para $\beta_c=0.8$, que foram obtidos com a rede $L=20$. Esta tabela mostra-nos o bom comportamento de μ em fun o do número de pontos que tomamos em cada ramo da curva $G(\ell)$. Entretanto podemos observar na figura (6.12), na qual plotamos $G(\ell)$ para $\beta_c=0.8$, que a fun o de correla o apresenta o problema da hierarquia já mencionado anteriormente. Os valores utilizados nesta figura encontram-se na tabela (6.18), na qual apresentamos o erro associado a cada valor de G .

NP	β_c	NREP	μ
	0.8	9	
RAMO ESQUERDO			
2			1.83 ±0.04
3			1.86 ±0.02
4			1.84 ±0.02
5			1.84 ±0.02
6			1.83 ±0.02
7			1.83 ±0.02
8			1.83 ±0.02
9			1.83 ±0.02
10			1.82 ±0.02
RAMO DIREITO			
2			1.93 ±0.10
3			1.86 ±0.05
4			1.85 ±0.04
5			1.84 ±0.04
6			1.84 ±0.04
7			1.84 ±0.04
8			1.84 ±0.04
9			1.83 ±0.04

Tab. 6.17 "Gaps" de massa obtidos pelo ajuste de (6.8) para NP pontos em cada ramo, com $L=20$.

l	β_c	NREP	$G(l)$	
1	0.8	9	1.24	± 0.02
2			1.98E-1	$\pm 0.07E-1$
3			2.99E-2	$\pm 0.13E-2$
4			5.7 E-3	$\pm 0.5 E-3$
5			8.5 E-4	$\pm 1.9 E-4$
6			2.0 E-4	$\pm 0.6 E-4$
7			3.0 E-5	$\pm 1.7 E-5$
8			7.5 E-6	$\pm 5.9 E-6$
9			2 E-7	$\pm 12 E-7$
10			4.4 E-7	$\pm 2.8 E-7$
11			4.4 E-9	$\pm 9.4 E-8$
12			1.7 E-7	$\pm 2.2 E-7$
13			5.6 E-7	$\pm 7.2 E-7$
14			9 E-7	$\pm 36 E-7$
15			1 E-7	$\pm 13 E-6$
16			1.5 E-4	$\pm 0.5 E-4$
17			8.0 E-4	$\pm 2.0 E-4$
18			4.8 E-3	$\pm 0.4 E-3$
19			2.80E-2	$\pm 0.24E-2$
20			1.93E-1	$\pm 0.08E-1$

Tab. 6.18 Funções de correlação para o modelo CP^1 + férmions em função de l . Usamos ITERM=1500, NCONF=3000 e L=20.

O fenômeno de falha, que corresponde a pontos em que o erro estimado é grande, ocorreu no centro da rede e de forma que não prejudicou o alinhamento dos pontos nos ramos de $G(l)$. Esta é portanto a razão de obtermos o bom comportamento de μ conforme mostrado na tabela (6.17).

Para a rede L=20 também determinamos o "gap" de massa em

função de vários valores de β_c . Os resultados obtidos para este caso podem ser vistos na tabela (6.19). Na fig. (6.13) também plotamos os valores obtidos nesta tabela.

β_c	NREP	ITERM	μ
0.3	9	1000	2.37 \pm 0.01
0.4	"	"	2.22 \pm 0.02
0.6	"	"	1.97 \pm 0.02
0.7	"	"	1.92 \pm 0.03
0.8	"	1500	1.84 \pm 0.02
0.9	"	"	1.78 \pm 0.04
1.0	"	"	1.72 \pm 0.07
1.1	"	"	1.59 \pm 0.07
1.2	"	"	1.60 \pm 0.09
1.3	"	"	1.52 \pm 0.10

TAB. 6.19 "Gaps" de massa para o modelo CP^1 + férmions mínimos com $L=20$ e $NCONF=3000$.

A comparação entre as tabelas (6.16) e (6.19) nos mostra a boa concordância entre os resultados obtidos para μ para β até 0.8. Entretanto para $\beta_c \geq 0.9$ notamos um pequeno distanciamento entre os valores de μ , embora continuem dentro do erro estimado.

Vamos agora comparar os valores de μ para estas duas redes por meio das figuras (6.11) e (6.13).

O comportamento de μ em função de β tornou-se melhor em vista do que é esperado pela análise do grupo de renormalização

para o "gap" de massa nos modelos CP^{N-1} . Para o modelo CP^1 tem-se o resultado ⁽⁴⁰⁾

$$a_m = C \pi^\beta e^{-\pi\beta} \quad (6.17)$$

Este resultado também foi obtido em (3.49).

A dependência observada de μ no tamanho da rede para $\beta \gg 1.0$ nos indica que já estamos no limiar da "janela do contínuo". Neste caso nos voltamos às conclusões tiradas em vista dos modelos estudados anteriormente. De qualquer forma os dados obtidos para os "gaps" de massa dos modelos simulados nas redes com que trabalhamos nos parecem bastante confiáveis desde que não nos aproximemos da região caracterizada pela "janela do contínuo".

Os resultados numéricos apresentados nesta seção foram obtidos com o computador CYBER 170/750.

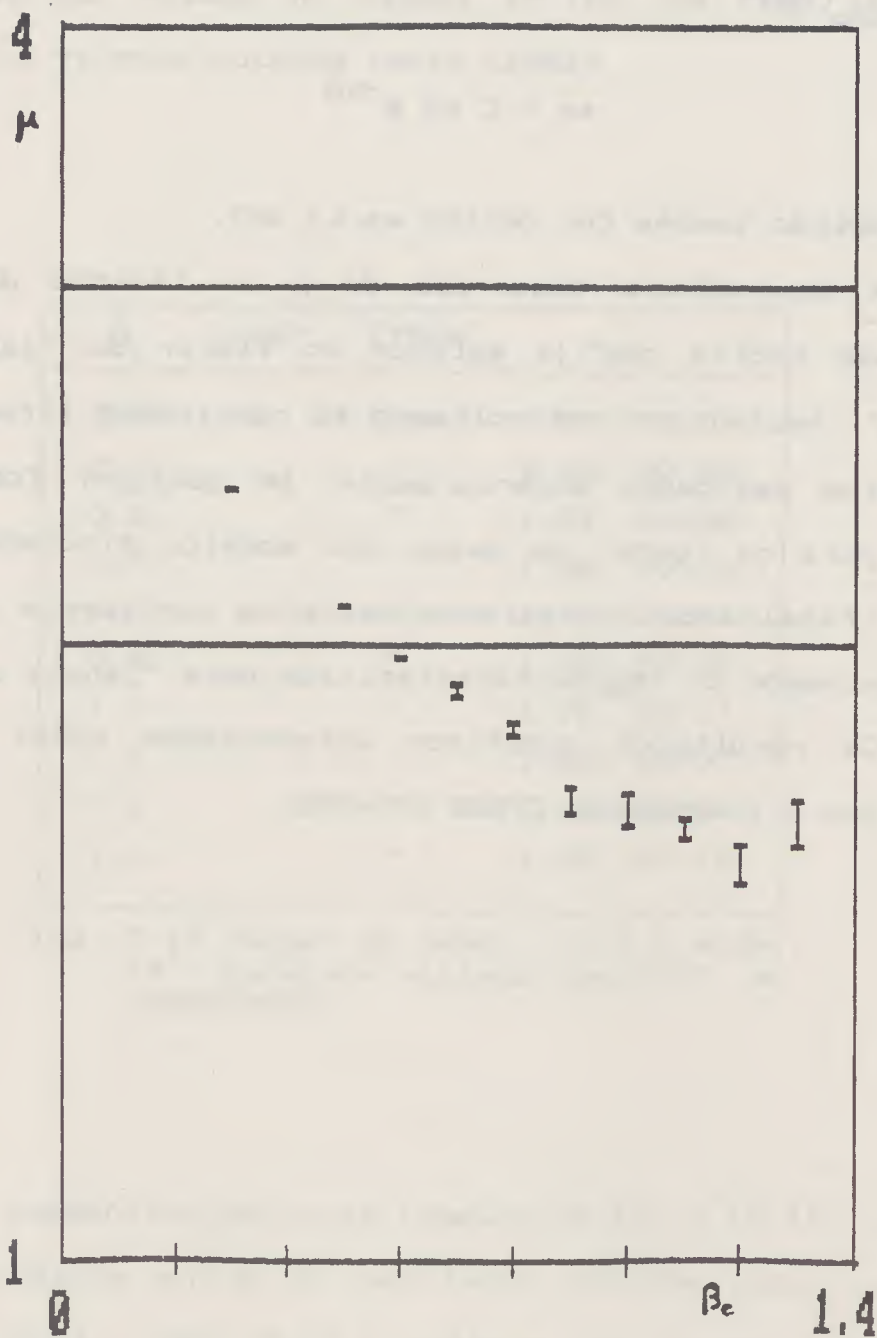


Fig. 6.11 "Gaps" de massa para o modelo CP^1 +Férmions com $L=16$.

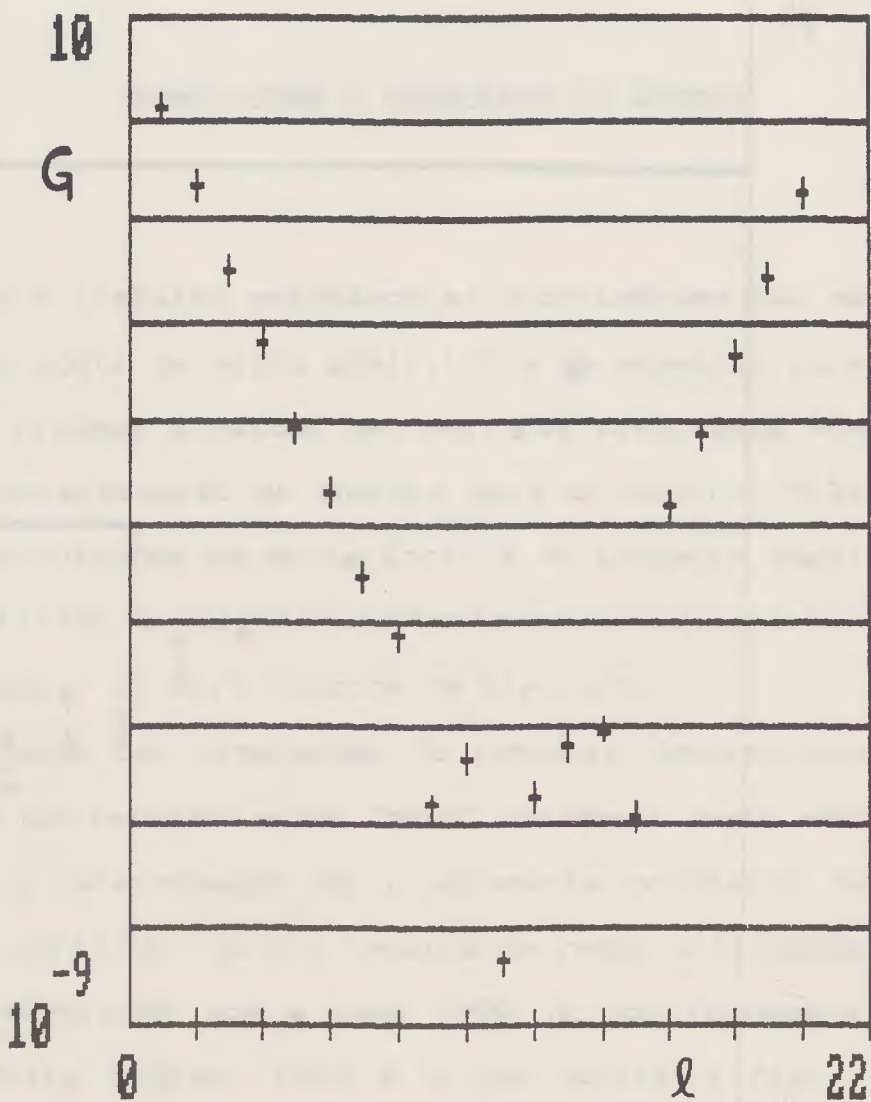


Fig. 6.12 Funções de correlação para $\beta_c = 0.8$ e $L=20$.

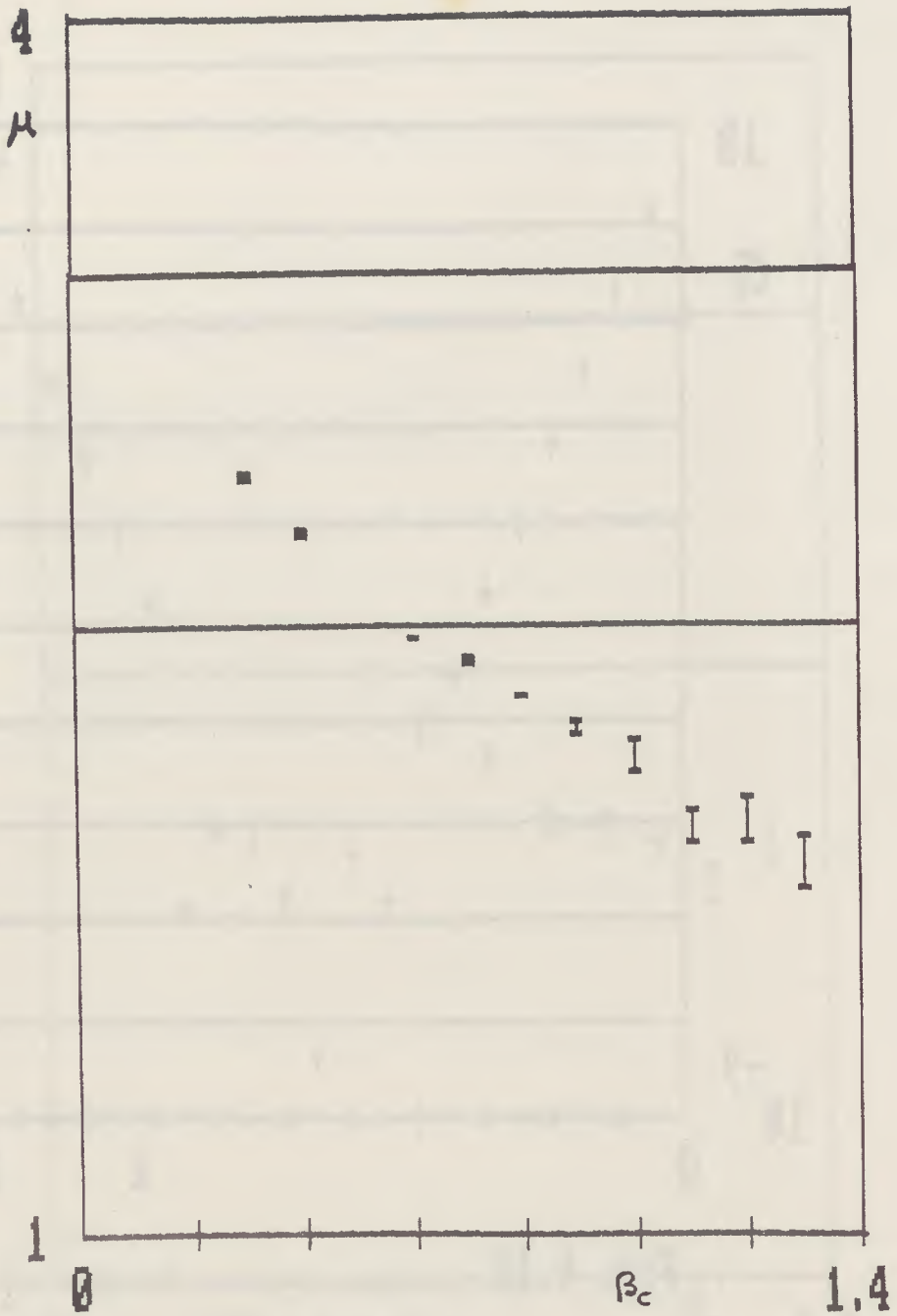


Fig. 6.13 "Gaps" de massa para o modelo CP^1 + férmions.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E PROBLEMAS EM ABERTO

Neste trabalho estudamos as propriedades dos modelos σ -não lineares do ponto de vista analítico e em especial para os modelos $O(3)$ e CP^1 fizemos o estudo por meio das simulações numéricas.

A determinação da energia para os modelos $O(3)$ e CP^1 por meio das simulações de Monte Carlo e de Langevin possibilitou-nos não só verificar a relação existente entre estes dois modelos como também comparar os dois métodos de simulação.

Através das simulações de Langevin determinamos também as funções de correlação e os "gaps" de massa para estes modelos. Vimos que a determinação de μ apresenta problemas na região da "janela do contínuo" para o tamanho de redes utilizadas por nós.

A simulação com a rede $L=50$ já nos fornecerá resultados melhores nesta região, isto é o que mostra a fig. (6.7), pelo menos para o modelo $O(3)$. Além disto este tamanho de rede nos parece factível com a nossa disponibilidade computacional.

O fato de introduzirmos férmions acoplados minimamente aos modelos CP^{N-1} puros fez com que a sua propriedade de confinamento sobre os campos fundamentais deixasse de existir. Deste modo tornou-se possível a determinação numérica das funções de correlação dos campos fundamentais da teoria.

Por outro lado, se trabalharmos em 3 dimensões com a mesma

Lagrangiana que descreve os modelos CP^{N-1} puros somada com um termo topológico de Chern-Simons, teremos para o modelo CP^1 ,

$$L = \gamma_0 \sum_{k=1}^2 |\partial_\mu z_k + i A_\mu z_k|^2 + \frac{\theta}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \quad (7.1)$$

com $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$,

somos conduzidos⁽⁵¹⁾ a uma reversão da estatística dos bósons iniciais (CP^{N-1} puro) para a de férmions. Este processo de "fermionização" pode ser considerado em termos do comportamento do propagador da teoria através das simulações numéricas envolvendo os seus campos fundamentais.

Mencionamos como característica o fato de que este fenômeno no qual a estatística das partículas iniciais é revertida pode ter sua implementação em supercondutividade onde há o aparecimento dos pares de Cooper de elétrons.

Energia do modelo CP¹ determinada por Monte Carlo

```

0001 C      MODELO CP(N-1) SD1 PARA N=2
0002 C      CALCULO DA ENERGIA MEDIA C/ MONTE CARLO
0003 C
0004      COMPLEX Z1,Z2,Z1N,Z2N,PRXF,PRXFN
0005      COMPLEX PRXB,PRXBN,PRYF,PRYFN,PRYB,PRYBN
0006      INTEGER X,XF,XB,Y,YF,YB,V,RODAS
0007      PARAMETER (N=2,L=12,ITERM=2000,NMED=500,ITEMP=1)
0008      PARAMETER (V=L*L,RODAS=ITERM+NMED,NREP=5)
0009      DIMENSION ACAD(NREP),ACAD2(NREP),Z1(L,L),Z2(L,L)
0010 C
0011      IREL=5
0012      AC=0.0
0013      BETA=0.5
0014      WRITE(6,*)'          N          L          ITERM          NMED'
0015      WRITE(6,*)N,L,ITERM,NMED
0016 C      *****
0017 C      LOOP DOS BETAS
0018 C
0019      DO 60 I=1,ITEMP
0020      BETA=BETA+0.5
0021      ACEI=0.
0022      BCEI=0.
0023      WRITE(6,98)BETA,NREP
0024 C      *****
0025      DO 220 IREP=1,NREP
0026      ACAD(IREP)=0.
0027 C
0028 C      CONDICAOES INICIAIS P/ A REDE
0029      DO 10 Y=1,L
0030      DO 10 X=1,L
0031      Z1(X,Y)=(1.,0.)
0032      Z2(X,Y)=(0.,0.)
0033      10 CONTINUE
0034 C      *****
0035 C      LOOP GERAL DOS TETAS
0036 C
0037      DO 20 IT=1,RODAS
0038 C      GERACAO DA REDE - INICIO
0039 C
0040      DO 50 Y=1,L
0041      YF=Y+1
0042      YB=Y-1
0043      IF (Y.EQ.L) YF=1
0044      IF (Y.EQ.1) YB=L
0045      DO 50 X=1,L
0046      XF=X+1
0047      XB=X-1
0048      IF (X.EQ.L) XF=1
0049      IF (X.EQ.1) XB=L
0050      PRXF=Z1(X,Y)*CONJG(Z1(XF,Y))+Z2(X,Y)*CCNJG(Z2(XF,Y))
0051      PRXB=Z1(X,Y)*CONJG(Z1(XB,Y))+Z2(X,Y)*CCNJG(Z2(XB,Y))
0052      PRYF=Z1(X,Y)*CONJG(Z1(X,YF))+Z2(X,Y)*CCNJG(Z2(X,YF))
0053      PRYB=Z1(X,Y)*CONJG(Z1(X,YB))+Z2(X,Y)*CONJG(Z2(X,YB))
0054      S1=REAL(PRXB*CONJG(PRXB)+PRXF*CONJG(PRXF)+
0055      +      PRYB*CONJG(PRYB)+PRYF*CONJG(PRYF))
0056      CALL UFOUR(E1,E2,E3,E4)
0057      Z1N=CMPLX(E1,E2)

```

```

058 Z2N=CMPLX(E3,E4)
059 PRXFN=Z1N*CONJG(Z1(XF,Y))+Z2N*CONJG(Z2(XF,Y))
060 PRXBN=Z1N*CONJG(Z1(XB,Y))+Z2N*CONJG(Z2(XB,Y))
061 PRYFN=Z1N*CONJG(Z1(X,YF))+Z2N*CONJG(Z2(X,YF))
062 PRYBN=Z1N*CONJG(Z1(X,YB))+Z2N*CONJG(Z2(X,YB))
063 S1N=REAL(PRXBN*CONJG(PRXBN)+PRXFN*CONJG(PRXFN)+
064 + PRYBN*CONJG(PRYBN)+PRYFN*CONJG(PRYFN))
065 TEST=EXP(BETA*(S1N-S1))
066 U=RAN(IREL)
067 IF(U.GT.TEST) GO TO 50
068 ACEI=ACEI+1.
069 IF(IT.GT.ITERM) BCEI=BCEI+1.
070 Z1(X,Y)=Z1N
071 Z2(X,Y)=Z2N
072 50 CONTINUE
073 C GERACAO DA REDE - FIM
074 C
075 IF(IT.LE.ITERM) GO TO 20
076 DO 19 Y=1,L
077 YF=Y+1
078 IF(Y.EQ.L) YF=1
079 DO 19 X=1,L
080 XF=X+1
081 IF(X.EQ.L) XF=1
082 PRXF=Z1(X,Y)*CONJG(Z1(XF,Y))+Z2(X,Y)*CONJG(Z2(XF,Y))
083 PRYF=Z1(X,Y)*CONJG(Z1(X,YF))+Z2(X,Y)*CONJG(Z2(X,YF))
084 AC=AC-REAL(PRXF*CONJG(PRXF)+PRYF*CONJG(PRYF))
085 19 CONTINUE
086 ACAO(IREP)=ACAO(IREP)+AC
087 AC=0.0
088 20 CONTINUE
089 C
090 C LOCP GERAL DOS TETAS - FIM
091 C *****
092 ACAO(IREP)=ACAO(IREP)/FLDAT(V*NMED)
093 ACAO2(IREP)=ACAO(IREP)*ACAO(IREP)
094 220 CONTINUE
095 C *****
096 REP=FLOAT(NREP*(NREP-1))
097 S0=0.
098 S02=0.
099 DO 35 IREP=1,NREP
100 S0=S0+ACAO(IREP)
101 S02=S02+ACAO2(IREP)
102 35 CONTINUE
103 C
104 TAXACEI=ACEI/FLDAT(RODAS*V*NREP)
105 TAXBCEI=BCEI/FLDAT(NMED*V*NREP)
106 ACMED=S0/FLDAT(NREP)
107 IF(NREP.EQ.1) THEN
108 PRINT*,' NREP=1, NAO TEM SIG'
109 GO TO 39
110 END IF
111 SIG=SQRT((S02-NREP*ACMED*ACMED)/REP)
112 39 PRINT*,' '
113 PRINT*,' ENERGIA MEDIA=',ACMED,' SIGMA=',SIG
114 PRINT*,' '

```

```
115 PRINT*, ' TAXA DE ACEITACAO=', TAXACEI
116 PRINT*, ' TAXA DE ACEITACAO APOS TERM.=', TAXBCEI
117 98 FORMAT(//, ' BETA=', F6.3, ' NREP=', I5)
118 C
119 60 CONTINUE
120 C *****
121 STOP
122 END
```

```

0001 C MODELO CP(N-1) + FERMIONS COM LANGEVIN + NAMIKI
0002 C CALCULO DAS CORRELACOES
0003 C
0004 IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
0005 IMPLICIT INTEGER*4 (I-N)
0006 COMPLEX*16 Z,Z1,S1,ETA,REPETA,SNB1,ZAUX
0007 COMPLEX*16 ZH,Z1H,S1H,SNB1H,ZAUXH,H,EH,EHZ,SFF,SSFFH
0008 COMPLEX*16 SZ1,SZ2,SZ3,SZ4,DELTA1,SZ,SZH,SF,SFH
0009 COMPLEX*16 SZ1H,SZ2H,SZ3H,SZ4H,DELTA1H,G,RNH
0010 INTEGER X,Y,V
0011 PARAMETER (N=2,L=4,ITERM=1000,NMEDIAS=5000,NREP=5)
0012 PARAMETER (L1=L+1,V=L*L,NMED=NMEDIAS/2)
0013 DIMENSION Z(N,0:L1,0:L1),ZAUX(N,L,L)
0014 DIMENSION ZH(N,0:L1,0:L1),ZAUXH(N,L,L),G(L,NMED)
0015 DIMENSION S1(N),DELTA1(N),S1H(N),DELTA1H(N),SF(N),SFF(N)
0016 DIMENSION GMED(L,NREP),G2MED(L,NREP)
0017 C
0018 EPS=0.01
0019 REP=SQRT(EPS)
0020 RNL=SQRT(FLOAT(N)/FLOAT(L))
0021 H=(0.001,0.001)
0022 RNH=RNL/H
0023 EH=EPS*H*RNL
0024 PI2=2.*ACOS(-1.0)
0025 IREL=5
0026 BETA=0.8
0027 BPI=BETA*PI2
0028 DNPI=EPS*BETA/(FLOAT(N) + BPI)
0029 EB=BPI*DNPI
0030 EBN=FLOAT(N)*DNPI
0031 C
0032 WRITE(6,96)N,L,NREP
0033 WRITE(6,*)'          ITERM          NMEDIAS          NMED'
0034 WRITE(6,*)ITERM,NMEDIAS,NMED
0035 WRITE(6,98)BETA,EPS,IREL
0036 PRINT*, ' H=',H
0037 C
0038 C LOOP PARA TIRAR MEDIAS *****
0039 DO 220 IREP=1,NREP
0040 ICOUNT=0
0041 NM=0
0042 C CONDICAOES INICIAIS P/ A REDE AMPLIADA
0043 DO 10 Y=0,L1
0044 DO 10 X=0,L1
0045 Z(1,X,Y)=(1.,0.)
0046 DO 10 IA=2,N
0047 Z(IA,X,Y)=(0.,0.)
0048 10 CONTINUE
0049 IF (IREP .NE. 1) GO TO 11
0050 PRINT*, ' VALOR INICIAL'
0051 PRINT*, ' Z(1,1,1)=' ,Z(1,1,1)
0052 11 CONTINUE
0053 C *****
0054 C INICIO DA TERMALIZACAO
0055 DO 200 IT=1,ITERM
0056 C
0057 ICOUNT=ICOUNT+1

```

```

0058      DD 500 Y=1,L
0059      DD 500 X=1,L
0060      C
0061      Z1=Z(1,X,Y)
0062      ST1=REAL(Z1*CONJG(Z1))
0063      SZ1=Z1*CONJG(Z(1,X,Y+1))
0064      SZ2=Z1*CONJG(Z(1,X+1,Y))
0065      SZ3=Z1*CONJG(Z(1,X,Y-1))
0066      SZ4=Z1*CONJG(Z(1,X-1,Y))
0067      DD 250 IC=2,N
0068      Z1=Z(IC,X,Y)
0069      ST1=ST1+REAL(Z1*CONJG(Z1))
0070      SZ1=SZ1+Z1*CONJG(Z(IC,X,Y+1))
0071      SZ2=SZ2+Z1*CONJG(Z(IC,X+1,Y))
0072      SZ3=SZ3+Z1*CONJG(Z(IC,X,Y-1))
0073      SZ4=SZ4+Z1*CONJG(Z(IC,X-1,Y))
0074      250 CONTINUE
0075      SNB1=(0.,0.)
0076      SFF=(0.,0.)
0077      C
0078      DD 450 IA=1,N
0079      S1(IA)=EB*(Z(IA,X,Y+1)*SZ1+Z(IA,X+1,Y)*SZ2+
0080      +      Z(IA,X,Y-1)*SZ3+Z(IA,X-1,Y)*SZ4)
0081      SF(IA)=Z(IA,X-1,Y)+Z(IA,X,Y-1)+Z(IA,X,Y+1)+Z(IA,X+1,Y)
0082      C
0083      U1=SQRT(ABS(2.*ALOG(RAN(IREL))))
0084      U2=PI2*RAN(IREL)
0085      ETA1=U1*COS(U2)
0086      ETA2=U1*SIN(U2)
0087      ETA=CMPLX(ETA1,ETA2)
0088      S1(IA)=S1(IA)+REP*ETA+EBN*SF(IA)
0089      SFF=SFF+SF(IA)*CONJG(Z(IA,X,Y))
0090      SNB1=SNB1+CONJG(Z(IA,X,Y))*ETA
0091      450 CONTINUE
0092      PR1=REAL(EB*(CONJG(SZ1)*SZ1+CONJG(SZ2)*SZ2+
0093      +      CONJG(SZ3)*SZ3+CONJG(SZ4)*SZ4)+ REP*SNB1+EBN*SFF)
0094      C
0095      DD 470 IA=1,N
0096      DELTA1(IA)=S1(IA)-Z(IA,X,Y)*PR1/ST1
0097      470 CONTINUE
0098      IF (ICOUNT .EQ. 2) THEN
0099      DEL1=0.
0100      DD 490 IB=1,N
0101      DEL1=DEL1+REAL(DELTA1(IB)*CONJG(DELTA1(IB)))
0102      490 CONTINUE
0103      AJU1=SQRT((1.-DEL1)/ST1)
0104      ELSE
0105      AJU1=1.
0106      END IF
0107      C
0108      DD 500 IA=1,N
0109      ZAUX(IA,X,Y)=AJU1*Z(IA,X,Y)+ DELTA1(IA)
0110      500 CONTINUE
0111      DD 550 Y=1,L
0112      DD 550 IA=1,N
0113      Z(IA,Y,0)=ZAUX(IA,Y,L)
0114      Z(IA,Y,L1)=ZAUX(IA,Y,1)

```

```

0115      Z(IA,L1,Y)=ZAUZ(IA,1,Y)
0116      Z(IA,0,Y)=ZAUZ(IA,L,Y)
0117      DD 550 X=1,L
0118      Z(IA,X,Y)=ZAUZ(IA,X,Y)
0119      550 CONTINUE
0120      IF (ICOUNT .EQ. 1) GO TO 200
0121      ICOUNT=0
0122      200 CONTINUE
0123      C
0124      IF (ICOUNT .EQ. 1) THEN
0125      PRINT*, ' FORA DA SUPERFICIE DE VINCULO'
0126      GO TO 600
0127      END IF
0128      C      FIM DA TERNALIZACAO
0129      DO 560 Y=0,L1
0130      DO 560 X=0,L1
0131      DO 560 IB=1,N
0132      ZH(IB,X,Y)=Z(IA,X,Y)
0133      560 CONTINUE
0134      C      *****
0135      DO 20 IT=1,NMEDIAS
0136      C      GERACAO DA REDE - INICIC
0137      C
0138      ICOUNT=ICOUNT+1
0139      DO 50 Y=1,L
0140      DO 50 X=1,L
0141      C
0142      Z1=Z(1,X,Y)
0143      ST1=REAL(Z1*CONJG(Z1))
0144      SZ1=Z1*CONJG(Z(1,X,Y+1))
0145      SZ2=Z1*CONJG(Z(1,X+1,Y))
0146      SZ3=Z1*CONJG(Z(1,X,Y-1))
0147      SZ4=Z1*CONJG(Z(1,X-1,Y))
0148      Z1H=ZH(1,X,Y)
0149      ST1H=REAL(Z1H*CONJG(Z1H))
0150      SZ1H=Z1H*CONJG(ZH(1,X,Y+1))
0151      SZ2H=Z1H*CONJG(ZH(1,X+1,Y))
0152      SZ3H=Z1H*CONJG(ZH(1,X,Y-1))
0153      SZ4H=Z1H*CONJG(ZH(1,X-1,Y))
0154      DO 25 IC=2,N
0155      Z1=Z(IC,X,Y)
0156      ST1=ST1+REAL(Z1*CONJG(Z1))
0157      SZ1=SZ1+Z1*CONJG(Z(IC,X,Y+1))
0158      SZ2=SZ2+Z1*CONJG(Z(IC,X+1,Y))
0159      SZ3=SZ3+Z1*CONJG(Z(IC,X,Y-1))
0160      SZ4=SZ4+Z1*CONJG(Z(IC,X-1,Y))
0161      Z1H=ZH(IC,X,Y)
0162      ST1H=ST1H+REAL(Z1H*CONJG(Z1H))
0163      SZ1H=SZ1H+Z1H*CONJG(ZH(IC,X,Y+1))
0164      SZ2H=SZ2H+Z1H*CONJG(ZH(IC,X+1,Y))
0165      SZ3H=SZ3H+Z1H*CONJG(ZH(IC,X,Y-1))
0166      SZ4H=SZ4H+Z1H*CONJG(ZH(IC,X-1,Y))
0167      25 CONTINUE
0168      C
0169      SNB1=(0.,0.)
0170      SNB1H=(0.,0.)
0171      EMZ=(0.,0.)

```

```

172 SFF=(0.,0.)
173 SFFH=(0.,0.)
C
174
175 DO 45 IA=1,N
176 S1(IA)=EB*(Z(IA,X,Y+1)*SZ1+Z(IA,X+1,Y)*SZ2+
177 + Z(IA,X,Y-1)*SZ3+Z(IA,X-1,Y)*SZ4)
178 S1H(IA)=EB*(ZH(IA,X,Y+1)*SZ1H+ZH(IA,X+1,Y)*SZ2H+
179 + ZH(IA,X,Y-1)*SZ3H+ZH(IA,X-1,Y)*SZ4H)
180 SF(IA)=Z(IA,X-1,Y)+Z(IA,X,Y-1)+Z(IA,X,Y+1)+Z(IA,X+1,Y)
181 SFH(IA)=ZH(IA,X-1,Y)+ZH(IA,X,Y-1)+ZH(IA,X,Y+1)+ZH(IA,X+1,Y)
182
C
183 U1=SQRT(ABS(2.*ALOG(RAN(IREL))))
184 U2=PI2*RAN(IREL)
185 ETA1=U1*COS(U2)
186 ETA2=U1*SIN(U2)
187 ETA=CMPLX(ETA1,ETA2)
188 REPETA=REP*ETA
189 S1(IA)=S1(IA)+REPETA+EBN*SF(IA)
190 S1H(IA)=S1H(IA)+REPETA+EBN*SFH(IA)
191 SFF=SFF+SF(IA)*CONJG(Z(IA,X,Y))
192 SFFH=SFFH+SFH(IA)*CONJG(ZH(IA,X,Y))
193 SNB1=SNB1+CONJG(Z(IA,X,Y))*ETA
194 SNB1H=SNB1H+CONJG(ZH(IA,X,Y))*ETA
195
C
196 IF (Y .EQ. 1 .AND. IA .EQ. 1) THEN
197 S1H(1)=S1H(1)+EH
198 EHZ=EH*CONJG(ZH(1,X,1))
199 END IF
200
45 CONTINUE
201 PR1=REAL(EB*(CONJG(SZ1)*SZ1+CONJG(SZ2)*SZ2+
202 + CONJG(SZ3)*SZ3+CONJG(SZ4)*SZ4)+ REP*SNB1+EBN*SFF)
203 PR1H=REAL(EB*(CONJG(SZ1H)*SZ1H+CONJG(SZ2H)*SZ2H+
204 + CONJG(SZ3H)*SZ3H+CONJG(SZ4H)*SZ4H)+REP*SNB1H+EBN*SFFH+EH)
205
C
206 DO 47 IA=1,N
207 DELTA1(IA)=S1(IA)-Z(IA,X,Y)*PR1/ST1
208 DELTA1H(IA)=S1H(IA)-ZH(IA,X,Y)*PR1H/ST1H
209
47 CONTINUE
210
C
211 IF (ICOUNT .EQ. 2) THEN
212 DEL1=0.
213 DEL1H=0.
214 DO 49 IB=1,N
215 DEL1=DEL1+REAL(DELTA1(IB)*CONJG(DELTA1(IB)))
216 DEL1H=DEL1H+REAL(DELTA1H(IB)*CONJG(DELTA1H(IB)))
217
49 CONTINUE
218 AJU1=SQRT((1.-DEL1)/ST1)
219 AJU1H=SQRT((1.-DEL1H)/ST1H)
220 ELSE
221 AJU1=1.
222 AJU1H=1.
223 END IF
224
C
225 DO 50 IA=1,N
226 ZAUX(IA,X,Y)=AJU1*Z(IA,X,Y)+ DELTA1(IA)
227 ZAUXH(IA,X,Y)=AJU1H*ZH(IA,X,Y)+ DELTA1H(IA)
228
50 CONTINUE

```

```

0229      DO 55 Y=1,L
0230      DO 55 IA=1,N
0231      Z(IA,Y,0)=ZAUX(IA,Y,L)
0232      Z(IA,Y,L1)=ZAUX(IA,Y,1)
0233      Z(IA,L1,Y)=ZAUX(IA,1,Y)
0234      Z(IA,0,Y)=ZAUX(IA,L,Y)
0235      ZH(IA,Y,0)=ZAUXH(IA,Y,L)
0236      ZH(IA,Y,L1)=ZAUXH(IA,Y,1)
0237      ZH(IA,L1,Y)=ZAUXH(IA,1,Y)
0238      ZH(IA,0,Y)=ZAUXH(IA,L,Y)
0239      DO 55 X=1,L
0240      Z(IA,X,Y)=ZAUX(IA,X,Y)
0241      ZH(IA,X,Y)=ZAUXH(IA,X,Y)
0242      55 CONTINUE
0243      C GERACAO DA REDE - FIM
0244      C
0245      IF (ICOUNT .EQ. 1) GO TO 20
0246      ICOUNT=0
0247      NM=NM+1
0248      DO 16 IL=1,L
0249      SZ=0.
0250      SZH=0.
0251      DO 17 IR=1,L
0252      SZ=SZ+Z(1,IR,IL)
0253      SZH=SZH+ZH(1,IR,IL)
0254      17 CONTINUE
0255      G(IL,NM)=RNH*(SZH-SZ)
0256      16 CONTINUE
0257      20 CONTINUE
0258      C *****
0259      DO 220 IL=1,L
0260      GI=G(IL,1)
0261      DO 33 NMD=2,NMED
0262      GI=GI+G(IL,NMD)
0263      33 CONTINUE
0264      GMED(IL,IREP)=GI/NMED
0265      G2MED(IL,IREP)=GMED(IL,IREP)*GMED(IL,IREP)
0266      220 CONTINUE
0267      C *****
0268      C
0269      PRINT*, ' CALCULO DAS CORRELACOES '
0270      REP=FLOAT(NREP*(NREP-1))
0271      DO 34 IL=1,L
0272      S0=0.
0273      S02=0.
0274      DO 35 IREP=1,NREP
0275      S0=S0+GMED(IL,IREP)
0276      S02=S02+G2MED(IL,IREP)
0277      35 CONTINUE
0278      SMED=S0/FLOAT(NREP)
0279      IF (NREP .EQ. 1) THEN
0280      PRINT*, ' NREP=1, NAO TEM SIG '
0281      GO TO 39
0282      END IF
0283      SIG=SQRT((S02-NREP*SMED*SMED)/REP)
0284      39 PRINT*, '
0285      PRINT*, ' IL=',IL

```

0286		PRINT*, ' VALOR MEDIO=', SMED, ' SIGMA=', SIG	0050
0287	34	CONTINUE	0050
0288	C		0050
0289		WRITE(6,*) ' ST1 ST1H'	0050
0290		WRITE(6,*) ST1, ST1H	0050
0291		PRINT*, ' VALOR FINAL'	0050
0292		PRINT*, ' Z(1,1,1)=', Z(1,1,1)	0050
0293		PRINT*, ' ZH(1,1,1)=', ZH(1,1,1)	0050
0294	96	FORMAT(1X, '***** N=', I3, ' L=', I4, ' NREP=', I5)	0050
0295	98	FORMAT(//, ' BETA=', F6.3, ' EPS=', F8.4, ' IREL=', I4)	0050
0296	600	CONTINUE	0050
0297	C	*****	0050
0298		STOP	0050
0299		END	0050

REFERÊNCIAS

1. M. Gell-Mann and M. Lévy, *Nuovo Cimento* 16 (1960) 705.
2. B. W. Lee, *Chiral Dynamics, Documents on Modern Physics* (Gordon and Breach, New York, 1972).
3. A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* 59B (1975) 79.
4. E. Brézin and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* 38 (1978) 891.
E. Brézin, J. Zinn-Justin and J. C. Le Guillou, *Phys. Rev.* D14 (1976) 2615.
5. A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* 72B (1977) 224.
6. M. Cristina B. Abdalla, Tese de doutoramento, IFUSP 1981.
7. H. Eichenherr, *Nucl. Phys.* B146 (1978) 215.
8. A. D'adda, M. Luscher and P. Di Vecchia, *Nucl. Phys.* B146 (1978) 63.
9. H. Eichenherr, NATO Advanced Study Institutes Series B70 - Current Topics in Elementary Particle Physics, ed. K. M. Mutter and K. Schilling (Plenum Press, 1980).
10. P. Di Vecchia, *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* XXII (1980) 341.
11. G. Cristofano, R. Musto, F. Nicodemi, R. Pettorino and F. Pezzela, *Nucl. Phys.* B257 (1985) 505.
12. V. L. Golo and A. M. Perelomov, *Phys. Lett.* 79B (1978) 112.
13. M. Stone, *Nucl. Phys.* B152 (1979) 97.
14. P. Goddard and P. Mansfield, *Rep. Prog. Phys.* 49 (1986) 725, pag. 748.
15. M. C. B. Abdalla and A. Lima Santos, *Acta Phys. Polonica* B15 (1984) 813.
16. K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields*, (World Scientific, 1982) pag. 152.
17. E. Abdalla, M. Forger and A. Lima Santos, *Nucl. Phys.* B256 (1985) 145.
18. A. D'adda, P. Di Vecchia and M. Luscher, *Nucl. Phys.* B152 (1979) 125.
19. G. Duerksen, *Phys. Rev.* D24 (1981) 926.
20. C. Gomez, *Phys. Rev.* D24 (1981) 937.
21. P. Di Vecchia et. al., *Phys. Lett.* 127B (1983) 109.
22. P. Di Vecchia et. al., *Nucl. Phys.* B190[FS3] (1981) 719.

23. P. Di Vecchia et. al., Nucl. Phys. B235[FS11] (1984) 478.
24. B. Berg, S. Meyer and I. Montvay, Nucl. Phys. B235[FS11] (1984) 149, pag. 155.
25. G. Parisi and Y. Wu, Sci. Sin. 24 (1981) 483.
26. E. Gozzi, Phys. Rev. D28 (1983) 1922.
27. P. H. Damgaard and K. Tsokos, Nucl. Phys. B235[FS11] (1984) 75.
28. R. Balescu, Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics (John Wiley & Sons, 1975).
29. N. A. Alves, A Quantização Estocástica, monografia IFT M01/87.
30. J. D. Breit, S. Gupta and A. Zaks, Nucl. Phys. B233 (1984) 61.
31. Y. Kakudo, Y. Taguchi, A. Tanaka and K. Yamamoto, Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 1225.
32. T. Fukai et. al. Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 1600.
33. G. G. Batrouni et. al., Phys. Rev. D32 (1985) 2736.
34. O. C. Martin, S. W. Otto and J. W. Flower, Nucl. Phys. B264 (1986) 89.
35. I. T. Drummond, S. Duane and R. R. Horgan, Nucl. Phys. B220[FS8] (1983) 119.
36. M. Namiki et. al. Prog. Theor. Phys. 76 (1986) 501.
37. M. Namiki, I. Ohba and K. Okano, Prog. Theor. Phys. 72 (1984) 350.
M. Namiki, I. Ohba, K. Okano, M. Rikihisa and S. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 73 (1985) 186.
38. G. Parisi, Nucl. Phys. B205[FS5] (1982) 337.
39. G. Parisi, Nucl. Phys. B180[FS2] (1981) 378.
40. R. Musto, F. Nicodemi, R. Pettorino and A. Clarizia, Nucl. Phys. B210[FS6] (1982) 263.
41. K. Binder, Topics in Current Physics, vol. 7 (Springer-Verlag, Berlin, 1979).
42. J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 775, pag. 793.
43. B. Lautrup, Monte Carlo Methods in Theoretical High Energy Physics, TH. 3521-CERN (1983).
44. F. Fucito, E. Marinari, G. Parisi and C. Rebbi, Nucl. Phys. B180[FS2] (1981) 369.
45. M. Sibuya, Ann. Inst. Stat. Math. 14 (1962) 81.
46. G. Marsaglia, Ann. Math. Stat. 43 (1972) 845.
47. P. R. Bevington, Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences (McGraw-Hill, 1969).

48. M. Fukugita and Y. Oyanaki, Phys. Lett. 123B (1983) 71.
49. B. Berg and A. Billoire, Nucl. Phys. B221 (1983) 109.
50. B. Berg, S. Meyer, I. Monvay and K. Symanzik, Phys. Lett. 126B (1983) 467.
51. A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 325.

