

GUSTAVO PAZZINI DE BRITO

**UM ESTUDO SOBRE TEORIAS DE DIMENSÕES EXTRAS:
MODELOS DE BRANAS GERADAS POR CAMPOS ESCALARES**

Guaratinguetá
2015

GUSTAVO PAZZINI DE BRITO

**UM ESTUDO SOBRE TEORIAS DE DIMENSÕES EXTRAS:
MODELOS DE BRANAS GERADAS POR CAMPOS ESCALARES**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física.

Orientador

Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Coorientador

Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá

2015

B862e	Brito, Gustavo Pazzini de Um estudo sobre teorias de dimensões extras: Modelos de branas geradas por campos escalares / Gustavo Pazzini de Brito – Guaratinguetá : [s.n], 2014. 96 f. : il. Bibliografia : f. 81-86 Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014. Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra Coorientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva 1. Teoria de campos (Física) 2. Teoria de campos escalares 3. Gravitação . I. Título CDU 530.145
-------	---

GUSTAVO PAZZINI DE BRITO

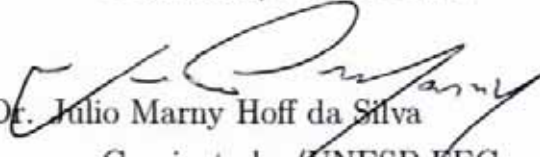
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA"

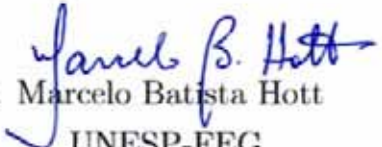
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM FÍSICA


Prof. Dr. Denis Dalmazi
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva
Coorientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. Marcelo Batista Hott
UNESP-FEG

Janeiro de 2015

Dedico este trabalho ao meu pai, por todo o apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai por todo apoio, incentivo, ensinamentos, amizade e muito mais. Em suma, por ser um exemplo a ser seguido.

Agradeço à minha mãe, que apesar da distância, sempre esteve presente com apoio incondicional.

Aos meus avós Neusa e Carlos, por sempre estarem presentes como os meus segundos pais.

À minha família como um todo por todos os momentos especiais.

Ao professor Alvaro, que nesses quatro anos de trabalho me confiou os seus projetos e me incentivou a seguir as minhas ideias.

Ao professor Julio, pela sua coorientação ao longo dos últimos dois anos e pelo enorme esforço empregado na formação dos seus estudantes.

Ao professor Marcelo, pela sua participação na banca examinadora e por todas as discussões sobre teorias de branas.

Aos professores do curso de física, que ao longo desses cinco anos contribuíram tanto para a minha formação acadêmica e pessoal.

Aos camaradas que caminharam juntos comigo nessa jornada: Gabriel, Nicole e Pedro, por todas as discussões de física, matemática, política, música e assuntos diversos.

Aos companheiros da pós graduação: Alessandro, Alexandre, Carlos, Rodolfo, Sérgio, Angel, Augusto e Arroyo. Por todos os debates de física e pelas partidas de futebol.

Aos meus irmãos (por parte de orientador) Rafael e Paulo, pelos trabalhos desenvolvidos em colaboração.

Aos demais colegas do curso de física, em especial à Thalita e Danilo.

Aos funcionários da Universidade Estadual Paulista.

Aos contribuintes que permitem o funcionamento e manutenção das Universidades e agências de fomento.

À Fapesp pelo suporte financeiro.

*"Breathe, breathe in the air
Don't be afraid to care
Leave, but don't leave me
Look around, choose your own ground"*
Breathe - Pink Floyd

*"Imagine no possessions
I wonder if you can
No need for greed or hunger
A brotherhood of man
Imagine all the people
Sharing all the world"*
Imagine - John Lennon

BRITO, G. P. **Um estudo sobre teorias de dimensões extras:** Modelos de branas geradas por campos escalares. 2015. 96 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Bacharelado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

RESUMO

Nesse trabalho estudamos teorias de dimensões extras com ênfase em modelos de branas espessas geradas por campos escalares reais. Primeiramente fazemos uma revisão dos modelos de Randall-Sundrum e discutimos sobre alguns cenários de branas espessas já considerados na literatura. Como sequência, introduzimos um novo modelo de branas espessas para tratar do problema de hierarquia do Modelo Padrão. Mostramos em seguida que existe uma classe de modelos de campos escalares bastante atrativa para o estudo analítico dos cenários de branas espessas. Finalmente, analisamos as condições de consistência para teorias de branas no contexto de gravitações $f(R)$ e Brans-Dicke, mostrando a possibilidade de evasão de um teorema *no-go* relacionado aos cenários de branas espessas.

Palavras chave: Branas. Campos escalares. Randall-Sundrum. Problema da hierarquia. Dimensões extras.

BRITO, G. P. **An study on extra dimensional theories:** Brane models generated by scalar fields. 2015. 96 f. Graduate Work (Graduate in BS in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

ABSTRACT

In this work we study extra dimensional theories, taking emphasis in braneworld models generated by real scalar fields. Firstly, we revise the Randall-Sundrum models and we discuss about some thick braneworld scenarios already considered in the literature. We introduce a new thick brane model in order to address the Standard Model hierarchy problem. Furthermore, we show that there exists a class of scalar fields models which are very interesting for analytical studies of thick brane scenarios. Finally, we analyze the braneworld consistency conditions in the context of $f(R)$ and Brans-Dicke gravities, where we show that it is possible to evade a no-go theorem regarding thick brane scenarios.

Keywords: Branes. Scalar fields. Randall-Sundrum. Hierarchy problem. Extra dimensions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	OS MODELOS DE RANDALL-SUNDRUM	15
2.1	O MODELO RS I	15
2.1.1	Configuração do modelo RS I	15
2.1.2	Solução das equações de Einstein para o modelo RS	17
2.1.3	O problema de hierarquia e uma possível solução	19
2.2	O MODELO RS II	21
2.2.1	Configuração do modelo RS II e a solução das equações de Einstein	22
2.2.2	Localização de gravitons no modelo RS II	24
3	BRANAS ESPESSAS	26
3.1	GRAVITAÇÃO ACOPLADA A CAMPOS ESCALARES	27
3.2	O MODELO DE GREMM	29
3.3	BRANAS BLOCH	32
3.3.1	Soluções branas Bloch	34
3.3.2	Soluções branas Bloch degeneradas	36
3.3.3	Soluções críticas	40
3.4	FLUTUAÇÕES DA MÉTRICA	43
4	BRANAS BLOCH ASSIMÉTRICAS E O PROBLEMA DA HIERARQUIA	48
4.1	NOVO MODELO DE BRANAS ESPESSAS	49
4.2	O PROBLEMA DE HIERARQUIA	54
5	NOVA CLASSE DE MODELOS DE BRANAS ESPESSAS	57
5.1	NOVA CLASSE DE SUPERPOTENCIAIS	57
5.2	MODELO I: SUPERPOTENCIAIS POLINOMIAIS	59
5.2.1	Caso $n = 2$	60
5.2.2	Caso $n = 3$	62
5.3	MODELO II: EXTENSÃO DO MODELO DE GREMM	64
5.3.1	Caso $n = 2$	65
5.3.2	Caso $n = 3$	67
6	CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM GRAVITAÇÕES MODIFICADAS	69
6.1	CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM MUNDOS BRANAS	70
6.2	CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM TEORIAS $f(R)$	73
6.3	CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM TEORIAS DE BRANS-DICKE	76
7	COMENTÁRIOS FINAIS	79

REFERÊNCIAS	81
APÊNDICE A - ALGUNS OBJETOS GEOMÉTRICOS EM ES- PAÇOS <i>WARPED</i>	87
APÊNDICE B - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	90
EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA RELATIVIDADE GERAL	90
EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE TEORIAS $f(R)$	92
EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE TEORIAS DE BRANS-DICKE	93
O CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS <i>WARPED</i>	95

1 INTRODUÇÃO

Embora existam evidências que nos levam a acreditar que vivemos em um Universo com $3 + 1$ dimensões, nas últimas décadas as teorias contendo dimensões extras têm recebido considerável atenção. Historicamente, a primeira proposta de uma teoria com dimensões extras deve-se ao físico finlandês Nordström (1914), que em 1914, apresentou uma proposta de unificação da eletrodinâmica com a gravitação a partir de uma teoria escalar-vetorial em $4 + 1$ dimensões. No entanto, com o advento da Relatividade Geral (RG) em 1915 as ideias de Nordström foram abandonadas. Na década de 1920, Kaluza (1921) e Klein (1926) propuseram, de forma independente, uma teoria de unificação da RG com a eletrodinâmica em um espaço-tempo de $4 + 1$ dimensões¹. Essencialmente, as teorias de Kaluza-Klein (KK) fornecem uma origem comum para o eletromagnetismo e a gravitação, cuja ideia básica de unificação se dá por uma proposta de extensão mínima da RG em $4+1$ dimensões, tal que após um processo de compactificação (ou redução dimensional), se reduz à gravitação de Einstein em $3+1$ D acoplada ao campo eletromagnético de Maxwell. No entanto, considerando que nenhuma observação da existência de dimensões extras foi realizada e dado o sucesso da formulação da Teoria Quântica de Campos em $3+1$ D na descrição das interações fundamentais (exceto gravitação), as teorias de dimensões extras não tiveram avanços consideráveis nas décadas subsequentes².

Contudo, na década de 1980, com o surgimento das teorias de cordas como propostas de Teorias de Grande Unificação, as teorias de dimensões extras voltaram à cena. De fato, as teorias de cordas são consistentes somente quando formuladas em espaço-tempo com dimensão maior que quatro (RUBAKOV, 2001). Em paralelo ao desenvolvimento de teorias fundamentais, recentemente, linhas de pesquisas fenomenológicas tentam desvendar como (ou se) as dimensões extras deveriam se manifestar, e como (ou se) essas podem ser utilizadas para se resolver problemas em física de partículas, tais como o problema da hierarquia, problema da constante cosmológica, etc.

Uma questão importante que surge em teorias multidimensionais diz respeito ao mecanismo pelo qual as dimensões extras se “escondem”, isto é: por que não somos capazes de observá-las em laboratório? Até recentemente, a principal e mais plausível abordagem se dava pelo ponto de vista das teorias de KK, onde, ao contrário das dimensões ordinárias, as quais são muito largas (ou infinitas), as supostas dimensões extras são tomadas como compactas. Desse ponto de vista, é a compactificação das dimensões extras que garantem um espaço-tempo efetivamente 4-dimensional a distâncias maiores que a escala de compactificação. Uma suposição possível é que a escala de compactificação seja da mesma

¹Para uma revisão das teorias de Kaluza-Klein, veja a referência (OVERDUIN; WESSON, 1997).

²Ademais, as teorias de KK usuais possuem problemas para justificar o “congelamento” das dimensões extras, isto é, para fixar o raio de compactificação.

ordem que a escala Planck. Nesse caso, levando em conta que o comprimento de Planck é $l_{Pl} \sim 10^{-33}$ cm, a escala de energia correspondente em que deveríamos trabalhar para ter acesso às dimensões extras é $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV, o que elimina qualquer expectativa de se testar teorias do tipo KK até mesmo nos aceleradores mais modernos³. Portanto, fazendo o raio de compactificação suficientemente pequeno, podemos “esconder” as dimensões extras das observações experimentais.

Há algumas décadas surgiu um novo quadro de abordagem para a questão levantada no último parágrafo, com os chamados *mundos branas*⁴. Essencialmente uma brana (ou p -brana) é definida como sendo um subvariedade M mergulhada em uma variedade de dimensão maior $\mathcal{M}$. No cenário das teorias de Kaluza-Klein, supõe-se que todos os campos do modelos padrão, bem como o campo gravitacional, propagam-se por todas as dimensões (dimensões usuais + dimensões extras). No entanto, no quadro dos mundos branas, os campos do modelo padrão estão confinados na chamada brana, enquanto a gravitação⁵ e possivelmente outros campos hipotéticos (que interagem muito fracamente com a matéria usual), propagam-se por todas as dimensões. Com relação à questão do parágrafo anterior, as dimensões extras se “escondem” nos experimentos relacionados aos campos do modelo padrão devido ao fato de que esses estariam confinados na brana. Por outro lado, como foi dito acima, a gravitação se propaga por todas as dimensões, e portanto, a teoria 4-dimensional obtida a partir de um processo de redução dimensional deve carregar “sinais” da existência das dimensões extras. Contudo, como era de se esperar, esses “sinais” possuem efeitos consideráveis somente em experimentos gravitacionais realizados em escalas menores que o raio de compactificação (r_c), ou seja, somente para distâncias menores que r_c devemos esperar desvios na lei newtoniana $F \propto 1/r^2$ devido às dimensões extras. No entanto, os testes gravitacionais para pequenas distâncias são complicados. De fato, até o momento os experimentos nos garantem a validade da lei $1/r^2$ somente para distâncias maiores que 10^{-4} cm (BERINGER et al., 2012; KAPNER et al., 2007; WILL, 2006)⁶. Portanto, se o raio de compactificação for menor do que 10^{-4} cm, os efeitos das dimensões extras seriam invisíveis para os experimentos atuais. Como podemos observar, as dimensões extras nos cenários branas podem ser muito maiores do que nas teorias de KK e, portanto, podemos esperar pela observação de efeitos de dimensões extras em um futuro não muito distante.

Certamente, a potencial detectabilidade das dimensões extras nos cenários branas é

³Para efeito de comparação, a faixa máxima de energia que espera-se operar com o LHC 14 TeV $\sim 10^3$ GeV, ou seja, muito abaixo da escala de Planck $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV.

⁴O termo *brana* é uma referência à palavra membrana. Utiliza-se também a expressão p -branas (sendo p o número de dimensões espaciais da brana).

⁵É natural assumir que a gravitação propaga-se por todas as dimensões, pois esta representa a dinâmica do próprio espaço-tempo.

⁶A dificuldade dos testes gravitacionais para pequenas distâncias reside no fato de que as outras interações fundamentais são muito mais intensas para pequenas distâncias, e portanto, estas mascaram os efeitos gravitacionais. Para efeito de comparação, experimentos garantem a validade da lei $1/r^2$ do eletromagnetismo para distâncias da ordem de 10^{-16} cm.

uma das motivações para o seu estudo. No entanto, existem razões teóricas, baseadas na proposta das teorias de cordas como Teoria de Grande Unificação, para o desenvolvimento dos cenários branas. De fato, subvariedades denominadas p -branas aparecem naturalmente em teorias de cordas (RUBAKOV, 2001). Nesse contexto, alguns tipos de p -branas carregam campos de matéria. Por exemplo, as chamadas D-branas são superfícies onde as cordas abertas podem terminar. Essas cordas abertas dão origem a todos os tipos de campos localizados nas D-branas, incluindo os campos de *gauge* (CSÁKI, 2004). Portanto, os cenários branas emergem naturalmente de teorias fundamentais, como as teorias de cordas, por exemplo.

Ainda na década de 1980, surgiram algumas propostas que motivaram o estudo de teorias multidimensionais no contexto dos mundos branas. Rubakov e Shaposhnikov (1983) propuseram um cenário onde o espaço-tempo fundamental é o espaço de Minkowski em $(3 + N) + 1$ dimensões, e um mecanismo de aprisionamento de matéria nas 3 dimensões espaciais surge devido à presença de defeitos topológicos. Visser (1985) propôs um cenário em que o espaço-tempo fundamental possuiu $4 + 1$ dimensões, e o aprisionamento de matéria nas $3 + 1$ dimensões usuais se dá por efeitos gravitacionais. Ainda no mesmo período, Akama (1982) sugeriu um mecanismo de localização de matéria em um Universo com $5 + 1$ dimensões devido à presença de um vórtex.

Em 1998, Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (1998) desenvolveram um trabalho que reafirmou o interesse em teorias de dimensões extras, onde, o cenário proposto pode ser utilizado para tratar o problema de hierarquia⁷ sem a necessidade de introdução de supersimetria ou modelos *technicolor*. No cenário de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD), o nosso Universo 4-dimensional é interpretado como sendo uma brana mergulhada em um espaço-tempo fundamental com $4 + n$ dimensões e geometria separável. Nesse contexto, os autores assumem que existe somente uma escala de energia fundamental na natureza, a escala do setor eletrofraco (TeV). Assim, a gravitação deveria se manifestar na mesma escala de energia que o setor eletrofraco, isto é, a constante de acoplamento presente da ação de Einstein-Hilbert deveria ser da ordem m_{EW} (TeV). Contudo, dados observacionais mostram que a escala de interação da gravitação em $3 + 1$ dimensões é da ordem da escala Planck ($M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV). A proposta fundamental por trás do modelo ADD reside na hipótese de que a gravitação formulada em um Universo com dimensões extras possui escala de interação da mesma ordem que a escala TeV, de modo que a teoria efetiva quadridimensional resultante esteja na escala Planck.

Em 1999, Randall e Sundrum (1999a, 1999b) propuseram, em dois trabalhos semanais, um novo panorama em teorias de dimensões extras que, desde então, resultou em uma mudança de curso para boa parte das pesquisas relacionadas à área. Os modelos de

⁷De forma simplificada, o problema de hierarquia refere-se ao *gap* de energia existente entre as escalas da gravitação (Planck) e do setor eletrofraco do modelo padrão (TeV). Voltamos a esta questão de forma mais consistente no próximo capítulo.

Randall-Sundrum (RS I e RS II, como ficaram conhecidos) sugerem um cenário onde o nosso Universo quadridimensional pode ser entendido como uma brana (minkowskiana) mergulhada em um espaço-tempo *warped* com $4 + 1$ dimensões, sendo a dimensão extra representada pelo *orbifold* $\mathbf{S}^1/\mathbb{Z}_2$. O ponto crucial nos modelos RS reside no fato de que o espaço-tempo fundamental possui geometria não separável, isto é, **não** pode ser decomposto na forma $M^4 \otimes \mathbf{S}^1/\mathbb{Z}_2$, onde, M^4 representa o espaço de Minkowski usual. Dentre as consequências físicas dos modelos RS, duas merecem a nossa atenção devido à importância de suas implicações. No contexto do modelo RS I (RANDALL; SUNDRUM, 1999b), o problema de hierarquia de massa pode ser resolvido de forma simples e elegante⁸. Enquanto no cenário RS II (RANDALL; SUNDRUM, 1999a), os autores mostraram que, para um espaço-tempo fundamental com geometria não separável, as dimensões extras não precisam ser necessariamente compactas para se reproduzir a gravitação newtoniana em nosso Universo quadridimensional. Não podemos deixar de mencionar que Gogberashvili (1999, 2000, 2002a, 2002b) propôs, em uma série de artigos, os chamados modelos *shell Universe*, em que a geometria do espaço-tempo fundamental se assemelha com a estrutura geométrica dos modelos RS⁹.

No entanto, apesar do sucesso atingido pelos modelos de Randall-Sundrum, principalmente no que concerne à solução do problema de hierarquia, esse ainda possui alguns problemas que devem ser contornados. Talvez seja lícito dizer que a consequência mais problemática dos modelos RS seja a variação do número bariônico (leptônico), que resulta na previsão de decaimento de prótons, por exemplo. Investigações posteriores mostraram que esse problema está diretamente relacionado com o fato da brana não possuir espessura¹⁰ (ARKANI-HAMED; SCHMALTZ, 2000), e ainda, que o problema em questão pode ser contornado se a brana possuir espessura finita. Desde então, uma série de modelos de branas espessas foram propostos como possíveis extensões do cenário RS. Em 2000, DeWolfe et al. (2000) propuseram um cenário em que a dimensão extra é modelada pelo acoplamento de campos escalares à gravitação. No mesmo trabalho, os autores aplicaram um método, baseado em técnicas da mecânica quântica supersimétrica, que permite reduzir o sistema de equações de campo a equações diferenciais de primeira ordem. Ainda no mesmo ano, Gremm (2000a, 2000b) sugeriu um modelo em que a estrutura do espaço-tempo *warped* é gerada pelo acoplamento entre a gravitação e um campo escalar de *sine-Gordon*. As soluções para esse cenário resultam em uma parede de domínio, interpolando assintoticamente entre espaços anti-de Sitter em 5 dimensões (AdS_5). Nesse contexto, interpreta-se a parede de domínio como sendo a brana. Motivados pela proposta

⁸Voltaremos a esse ponto na seção 2.1.3.

⁹Os resultados de M. Gogberashvili foram inicialmente publicados no arXiv/hep-ph entre 1998 e 1999, somente mais tarde os resultados foram disponibilizados através de revistas científicas.

¹⁰Os modelos que utilizam fontes singulares (deltas de Dirac) para gerar a estrutura brana-*bulk* são denominados modelos de *branas finas*, em contraste com os modelos de *branas espessas*, nos quais a estrutura brana-*bulk* é gerada por defeitos topológicos.

de Gremm, uma série de trabalhos foram sugeridos ao longo da última década¹¹, em especial, analisando a questão de localização de campos em modelos de branas espessas. Para uma revisão em modelos de branas espessas, recomendamos a referência (DZHUNUSHA-LIEV; FOLOMEEV; MINAMITSUJI, 2010).

O objeto principal de estudo desse trabalho versa sobre os modelos de branas espessas geradas por campos escalares. Os capítulos 2 e 3 possuem caráter de revisão, onde revisitamos alguns modelos já conhecidos na literatura e que julgamos fundamentais para a compreensão desse trabalho, enquanto nos capítulos subsequentes apresentamos as nossas contribuições originais a esta linha de pesquisa. Iniciamos a nossa discussão, no capítulo 2, por uma revisão detalhada dos modelos de Randall-Sundrum, desde a sua configuração inicial, até uma discussão sobre o modelo RS II e a reprodução da gravitação newtoniana nesse cenário. No capítulo 3, revisamos as principais ideias por trás dos modelos de branas espessas, iniciando com uma discussão sobre espaços *warped* cuja estrutura é gerada por campos escalares, passando por uma revisão do modelo de Gremm e das chamadas branas Bloch, e finalizando com uma análise das flutuações da métrica em espaços *warped*. No capítulo 4, apresentamos um novo modelo de branas espessas que, devido a uma assimetria que pode ser controlada por um parâmetro de acoplamento, mostra-se adequado para o tratamento do problema de hierarquia. Vale ressaltar que até recentemente toda a análise do problema de hierarquia, no contexto de teorias de branas, estava restrita aos modelos de branas finas. Em seguida, no capítulo 5, apresentamos uma nova classe de modelos de branas espessas e mostramos que o conjunto de equações diferenciais que determinam a estrutura do espaço-tempo admite uma simplificação considerável com a escolha apropriada de uma classe de superpotenciais. Nesse contexto, analisamos alguns exemplos explícitos de cenários que podem ser construídos. No capítulo 6, revisitamos as chamadas regras de soma para mundos branas (GIBBONS; KALLOSH; LINDE, 2001), que determinam uma série de condições de consistência para esse tipo de cenário. Mostramos que, no contexto de gravitações modificadas, uma inconsistência entre branas espessas e dimensões extras compactas pode ser contornada. Finalmente, no último capítulo apresentamos as nossas considerações finais acerca desse trabalho, onde tentamos sintetizar as conclusões extraídas ao longo da sua realização. Por completeza, ao final desta monografia o leitor encontrará dois apêndices que visam esclarecer alguns pontos que são utilizados ao longo do trabalho, sem o prejuízo na continuidade do mesmo. No apêndice 7, dispomos de um lista de objetos geométricos calculados para espaços *warped*. No apêndice 7, obtemos as equações de movimento utilizadas ao longo do trabalho.

¹¹Ver e.g. (AHMED; GRZADKOWSKI, 2013; BAZEIA; FURTADO; GOMES, 2004; BAZEIA; GOMES, 2004; CAMPOS, 2002; CASTRO, 2011; CHUMBES; HOTT, 2010; CHUMBES; VASQUEZ; HOTT, 2011; CHUMBES; SILVA; HOTT, 2012; CRUZ; MALUF; ALMEIDA, 2013; CRUZ et al., 2014; CORREA; DUTRA; HOTT, 2011; DUTRA; FARIA JR; HOTT, 2008; DUTRA; BRITO; SILVA, 2014; XIE; YANG; ZHAO, 2013; YANG et al., 2012; ZHAO; LIU; LI, 2010).

2 OS MODELOS DE RANDALL-SUNDRUM

Os modelos de Randall-Sundrum podem ser considerados como uma fronteira nas teorias que modelam o nosso Universo como uma brana mergulhada em um espaço-tempo fundamental de dimensão maior. Além das consequências físicas que tornam esse cenário um verdadeiro atrator, *e.g.* tratamento do problema de hierarquia, esse modelo possui um dos mais agradáveis atributos desejados em uma teoria física - a simplicidade. Outra característica que motiva o estudo dos modelos de RS reside no fato desses poderem ser entendidos como soluções efetivas para o modelo de Horava e Witten (1996), e portanto, possuem um vínculo interessante com uma teoria fundamental.

Neste capítulo fazemos uma introdução aos modelos de Randall-Sundrum. Tratamos primeiramente do modelo RS I. Na seção 2.1.1, apresentamos a configuração inicial sobre a qual o modelo de RS I é construído. Na sequência, seção 2.1.2, trabalhamos na obtenção de soluções para as equações de Einstein que descrevem a dinâmica desse cenário. Em seguida, na seção 2.1.3, abordamos a questão do problema de hierarquia e, após uma contextualização do problema, mostramos como o modelo RS pode ser utilizado para tratar dessa questão. Dando continuidade, na seção 2.2, estudamos o modelo RS II, onde discutimos as mudanças com relação ao cenário RS I, e analisamos a questão da reprodução da gravitação newtoniana no contexto de teorias com dimensões extras não compactas.

Embora pretendamos fazer uma exposição de caráter pessoal e didático, buscando evidenciar a visão do autor sobre o assunto aqui tratado, o conteúdo aqui apresentado possui embasamento em uma série de referências, seja pelos trabalhos originais (RANDALL; SUNDRUM, 1999a, 1999b), ou por textos de revisão (CSÁKI, 2004; GABADADZE, 2003; MAARTENS; KOYAMA, 2010; RUBAKOV, 2001; SILVA, 2009; SUNDRUM, 2004).

2.1 O MODELO RS I

Discutimos aqui o modelo RS I (RANDALL; SUNDRUM, 1999b), proposto em 1999 por Lisa Randall e Raman Sundrum como uma proposta de solução alternativa para o problema de hierarquia.

2.1.1 Configuração do modelo RS I

Começamos então pela descrição da configuração inicial do modelo RS I. Trabalhamos em um espaço-tempo com $D = 4+1$ dimensões, sendo a dimensão extra dada pelo *orbifold*¹

¹Por definição, um *orbifold* consiste em uma variedade quociente e orientada por um grupo discreto.

$S^1/\mathbb{Z}_2$. Denotamos as coordenadas do espaço-tempo 4-dimensional por x^μ , enquanto a coordenada da dimensão extra é representada pela variável φ , com $-\pi < \varphi < \pi$. A simetria $\mathbb{Z}_2$ requer a identificação $(x^\mu, \varphi) \sim (x^\mu, -\varphi)$.

Consideramos a existência de duas 3-branas, estendidas ao longo das direções x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), nas quais os campos do modelo padrão encontram-se localizados. As branas, transversas à dimensão extra, estão localizadas sobre as hipersuperfícies $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. Designemos a métrica do espaço-tempo fundamental (brana + dimensão extras, doravante designado por *bulk*) por G_{AB} . As métricas induzidas sobre as branas serão

$$g_{\mu\nu}^{vis}(x^\alpha) = G_{\mu\nu}(x^\alpha, \varphi = \pi) \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu}^{com}(x^\alpha) = G_{\mu\nu}(x^\alpha, \varphi = 0) \quad (2.1)$$

O sobre-escrito *vis* indica a brana *visível* (que descreve o nosso Universo), enquanto *com* indica a brana *companheira*.

Essencialmente, estudamos a dinâmica do espaço-tempo em 5-dimensões, levando em consideração os efeitos da brana sobre o espaço-tempo. Como estamos interessados em descrição do Universo em escalas muito maiores do que a estabelecida pela gravitação quântica, a nossa modelagem é baseada eminentemente via abordagem semi-clássica. A ação clássica deve, portanto, levar em conta um termo que descreva a dinâmica do espaço-tempo (gravitação de Einstein-Hilbert) e as contribuições das branas, que são modeladas como fontes singulares. Escrevemo-la então

$$S = S_{gravit} + S_{vis} + S_{com}, \quad (2.2)$$

onde

$$S_{gravit} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sqrt{-G}(2M^3 R - \Lambda), \quad (2.3)$$

$$S_{vis} = \int d^4x \sqrt{-g^{vis}}(\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}) = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sqrt{-\det(G_{\mu\nu})}(\mathcal{L}_{vis} - V_{vis})\delta(\varphi - \pi), \quad (2.4)$$

$$S_{com} = \int d^4x \sqrt{-g^{com}}(\mathcal{L}_{com} - V_{com}) = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sqrt{-\det(G_{\mu\nu})}(\mathcal{L}_{com} - V_{com})\delta(\varphi). \quad (2.5)$$

Na equação (2.3) utilizamos $G = \det(G_{AB})$. Os termos V_{vis} e V_{com} representam a energia de vácuo (tensão) das branas, enquanto os termos $\mathcal{L}_{vis}$ e $\mathcal{L}_{com}$ representam campos possivelmente localizados nas branas. No entanto, as contribuições de $\mathcal{L}_{vis}$ e $\mathcal{L}_{com}$ são negligenciadas ao longo desse trabalho (ver (SUNDRUM, 1999)). Variando a ação (2.2) com respeito à G_{AB} , obtemos a seguinte equação de movimento

$$R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}R = -\frac{1}{4M^3} \left[\Lambda G_{AB} + V_{vis} \sqrt{\frac{\det(G_{\mu\nu})}{G}} G_{\mu\nu} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(\varphi - \pi) \right. \\ \left. + V_{com} \sqrt{\frac{\det(G_{\mu\nu})}{G}} G_{\mu\nu} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(\varphi) \right]. \quad (2.6)$$

2.1.2 Solução das equações de Einstein para o modelo RS

Vamos procurar por uma solução da Eq. (2.6) tal que a seção quadridimensional do espaço-tempo seja invariante pelo grupo de Poincaré. Partindo desse preceito, usamos o seguinte *Ansatz*

$$ds^2 = G_{AB}dX^A dX^B = e^{-2\sigma(\varphi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\varphi^2, \quad (2.7)$$

onde r_c é o raio de compactificação. Assim, as componentes da métrica do espaço-tempo em 5-dimensões podem ser escritas como

$$G_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(\varphi)}\eta_{\mu\nu}, \quad G_{44} = r_c^2, \quad G_{\mu 4} = G_{4\mu} = 0. \quad (2.8)$$

Alguns pontos relacionados à métrica proposta merecem destaque². Notemos que o fator exponencial (doravante denominado *warp factor*), que multiplica a métrica de Minkowski, depende somente da dimensão extra. Assim, uma vez fixada a posição da brana, a sua métrica é *conforme* ao espaço de Minkowski. Como consequência, a brana torna-se perfeitamente apta a suportar os campos do modelo padrão. Observemos também que o raio de compactificação r_c , que especifica a distância entre a brana visível e a brana companheira, é definido como uma constante. No entanto, a princípio r_c poderia assumir qualquer valor. Portanto, em um cenário mais realista, torna-se necessário um mecanismo de estabilização para o raio de compactificação. Tal questão foi parcialmente³ resolvida por Goldberger e Wise (1999) no mesmo ano em que o modelo RS I foi proposto. Atentemos ainda para a dependência da coordenada correspondente à dimensão extra nas componentes associadas ao espaço-tempo quadridimensional, por essa razão dizemos que a geometria do modelo RS é não separável, isto é, **não** podemos denotar a variedade que representa o *bulk* sob a forma $M^4 \otimes \mathbf{S}^1/\mathbb{Z}_2$. Esta última propriedade desempenha um papel central nas implicações físicas dos modelos RS.

Antes de prosseguirmos rumo à solução da Eq. (2.6), façamos uma pequena mudança de notação a fim de torná-la homogênea ao longo desse trabalho. Considere a seguinte mudança de coordenada para a dimensão extra $y = r_c\varphi$, e ainda, a seguinte definição $\sigma(\varphi) = \sigma(y/r_c) \equiv -A(y)$. Assim, o elemento de linha pode ser reescrito na seguinte forma

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.9)$$

²Comentários inspirados pela referência (SILVA, 2009).

³De fato, o mecanismo de Goldberger-Wise está incompleto, pois não leva em conta a retroação da própria brana como fonte (GIBBONS; KALLOSH; LINDE, 2001).

de modo que os componentes da métrica podem ser reescritos como

$$G_{\mu\nu} = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}; \quad G_{44} = 1; \quad G_{\mu 4} = G_{4\mu} = 0. \quad (2.10)$$

Escritas em termos da variável y , ao invés de φ , devemos fazer as modificações $\varphi \rightarrow y$ e $\pi \rightarrow r_c\pi \equiv L$ no conjunto de equações (2.3) a (2.6).

Utilizando os resultados do apêndice 7, as componentes do tensor de Ricci podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} = -\left(A''(y) + 4A'(y)^2\right)e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad R_{44} = -4\left(A''(y) + A'(y)^2\right), \quad R_{\mu 4} = 0, \quad (2.11)$$

e o escalar de curvatura é dado por

$$R = -8A''(y) - 20A'(y)^2. \quad (2.12)$$

Notemos ainda que $G = \det(G_{\mu\nu}) = -e^{8A(y)}$. Substituindo os resultados acima na Eq. (2.6), obtemos

$$A'(y)^2 + \frac{\Lambda}{24M^3} = 0, \quad (2.13)$$

e

$$A''(y) + \frac{V_{com}}{12M^3}\delta(y) + \frac{V_{vis}}{12M^3}\delta(y-L) = 0. \quad (2.14)$$

A solução da primeira equação, compatível com a simetria $\mathbb{Z}_2$, pode ser escrita como

$$A(y) = -|y|\sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}. \quad (2.15)$$

Note que, para que o modelo seja consistente, devemos ter $\Lambda < 0$, ou seja, o espaço-tempo em 5-dimensões possui geometria anti-de Sitter⁴ (AdS_5). Observemos ainda que

$$A'(y) = -\text{sgn}(y)\sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}. \quad (2.16)$$

Devemos agora verificar sob quais condições a segunda equação também é satisfeita. De fato, integrando a eq. (2.14) no intervalo $-\varepsilon < y < +\varepsilon$ e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$A'(0_+) - A'(0_-) = -\frac{V_{com}}{12M^3}. \quad (2.17)$$

Utilizando a equação (2.16), temos

$$\sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} = \frac{V_{com}}{24M^3}. \quad (2.18)$$

⁴Esse tipo de geometria é interessante devido a possibilidade de aplicação da dualidade AdS/CFT .

Por outro lado, integrando a Eq. (2.14) no intervalo $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$, obtemos

$$A'(L + \varepsilon) - A'(L - \varepsilon) = -\frac{V_{vis}}{12M^3}. \quad (2.19)$$

A periodicidade da dimensão extra implica $L + \varepsilon \sim -L + \varepsilon$, e portanto $A'(L + \varepsilon) = A'(-L + \varepsilon)$. Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$A'(-L) - A'(L) = -\frac{V_{vis}}{12M^3}. \quad (2.20)$$

Utilizando (2.16), concluímos que

$$\sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} = -\frac{V_{vis}}{24M^3} \quad (2.21)$$

Combinando as equações (2.18) e (2.21), podemos escrever

$$V_{com} = -V_{vis} = 24M^3k, \quad \text{onde} \quad k^2 = -\frac{\Lambda}{24M^3}. \quad (2.22)$$

Logo, a solução obtida para a configuração inicial especificada na seção anterior, a partir no *Ansatz* (2.9), resulta no seguinte elemento de linha

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 = e^{-2kr_c|\varphi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\varphi^2. \quad (2.23)$$

O elemento de linha acima fornece uma solução completa para o espaço-tempo em 5-dimensões. De fato, a relação entre as tensões das branas também pode ser obtida a partir de uma análise mais rigorosa, utilizando as chamadas regras de soma para mundos branas (GIBBONS; KALLOSH; LINDE, 2001). Na próxima seção analisamos as consequências físicas que podem ser extraídas a partir do cenário aqui construído.

2.1.3 O problema de hierarquia e uma possível solução

Antes de analisarmos como o modelo RS I fornece uma possível solução para o problema da hierarquia, façamos um breve interlúdio para contextualizar o problema⁵. Aparentemente existem duas escalas de energia que desempenham papéis importantes na descrição da natureza, a escala do setor eletrofraco (TeV) e a escala Planck (10^{16} TeV). A escala do setor eletrofraco é a escala em que ocorre a quebra espontânea de simetria que atribui massa às partículas do modelo padrão via mecanismo de Higgs. Por outro lado, a escala de Planck é a escala que especifica a constante de Newton, *i.e.*, é a escala

⁵Embora possuam caráter de divulgação científica, as referências (RANDALL, 1999, 2002) foram úteis para o esclarecimento de certos pontos acerca do problema de hierarquia.

que determina a intensidade da interação gravitacional. Essa também é a escala em que as correções quânticas à gravitação tornam-se relevantes (necessárias). Esta diferença relativa entre as escalas TeV e Planck estabelece uma hierarquia entre as intensidades das interações fundamentais. De fato, no modelo padrão da física de partículas não há nenhum elemento que justifique essa diferença entre as escalas fundamentais da natureza. Assim, o problema de hierarquia pode ser formulado com a seguinte pergunta:

Por que a intensidade das interações do setor eletrofraco é 10^{16} vezes maior do que a intensidade da interação gravitacional?

Um olhar através de uma perspectiva pragmática poderia nos fazer argumentar que a diferença entre as escalas das interações fundamentais ocorre simplesmente porque “a natureza é assim”e, portanto, não há problema a ser resolvido. No entanto, algumas considerações devem ser levadas em conta antes de adotarmos esse ponto de vista. Primeiramente, devemos evitar perspectivas pragmáticas ao tentarmos construir uma teoria física que descreva a natureza. Em segundo lugar, em uma suposta Teoria de Grande Unificação deve existir alguma simetria relacionando os dois setores em questão (eletrofraco e gravitacional) e, portanto, não seria natural essa hierarquia entre as interações. O terceiro ponto, e talvez o mais importante, é o fato de que os cálculos da Teoria Quântica de Campos levam à previsão de que o valor do parâmetro de massa do campo de Higgs (a escala do setor eletrofraco) deveria ser da mesma ordem que a massa de Planck. Para evitar esse problema e obter o valor correto da massa do Higgs, torna-se necessário um ajuste fino em cada termo da série perturbativa que leva ao resultado. Com base nesse último ponto destacado, o problema da hierarquia pode ser reformulado da seguinte forma:

Como podemos obter o valor correto para o parâmetro de massa do campo de Higgs a partir da Teoria Quântica de Campos sem a necessidade de ajustes finos?

Uma possível resposta para a questão acima foi dada por L. Randall e R. Sundrum ao proporem o modelo que estudamos acima, e talvez seja essa a principal razão para o reconhecimento obtido na literatura. Vejamos então como podemos atacar esse problema no cenário RS I. Suponhamos que os campos do Modelo Padrão estejam localizados na 3-brana visível ($\varphi = \pi$), portanto, para o campo de Higgs podemos escrever

$$S_{Higgs} \sim \int d^4x \sqrt{-g^{vis}} \left(g_{vis}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - v_0^2)^2 \right), \quad (2.24)$$

onde λ é um parâmetro de acoplamento do campo de Higgs e v_0 é o parâmetro de quebra espontânea de simetria (ou parâmetro de massa). Levando em conta que $g_{vis}^{\mu\nu} = e^{2kr_c\pi} \eta^{\mu\nu}$

e ainda $g^{vis} = e^{-8kr_c\pi}$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$S_{Higgs} \sim \int d^4x e^{-4kr_c\pi} \left(e^{2kr_c\pi} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - v_0^2)^2 \right). \quad (2.25)$$

Considere a reparametrização $H \rightarrow e^{kr_c\pi} H^6$, nesse caso obtemos o campo de Higgs canonicamente normalizado

$$S_{Higgs} \sim \int d^4x \left(\eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda [H^\dagger H - (e^{-kr_c\pi} v_0)^2]^2 \right). \quad (2.26)$$

Como podemos ver na última equação, o parâmetro de quebra de simetria do campo de Higgs normalizado é dado por

$$v = e^{-kr_c\pi} v_0. \quad (2.27)$$

O resultado acima pode ser interpretado da seguinte forma: qualquer parâmetro de massa medida na 3-brana visível pode ser obtida a partir de uma escala fundamental v_0 (escala M_{Pl} , por exemplo) com um revestimento exponencial devido a fatores geométricos. Conforme foi mencionado acima, os campos do Modelo Padrão estão confinados na 3-brana visível, portanto o parâmetro de massa v deve ser da mesma ordem que a escala do setor eletrofraco, *i.e.* $v \sim 10^3 \text{ GeV} \sim 1 \text{ TeV}$. Suponhamos então que a escala fundamental v_0 seja da mesma ordem que a escala Planck, *i.e.* $v_0 \sim 10^{19} \text{ GeV}$, a equação (2.27) nos fornece

$$e^{kr_c\pi} = \frac{v_0}{v} \sim \frac{10^{19} \text{ GeV}}{10^3 \text{ GeV}} = 10^{16} \Rightarrow kr_c \sim 12 \quad (2.28)$$

Como consequência, não é necessária nenhuma hierarquia entre as constantes fundamentais do modelo.

2.2 O MODELO RS II

No capítulo introdutório deste trabalho discutimos sobre o porquê de não observarmos dimensões extras em laboratório. Mencionamos que, no contexto de teorias de branas, os campos do Modelo Padrão estão, *a priori*, confinados em nosso universo quadridimensional (brana) e, portanto, não devemos esperar por efeitos das dimensões extras nos experimentos realizados na escala TeV. Por outro lado, a gravitação, enquanto propriedade geométrica do espaço-tempo, deve se propagar em todas as dimensões e, portanto, deveríamos ser capazes de observar desvios na lei newtoniana $F \propto 1/r^2$ devido às dimensões extras. No entanto, o sucesso experimental da gravitação newtoniana e da relatividade

⁶Um ponto importante a ser destacado é o seguinte: estamos assumindo como ponto de partida que os campos do Modelo Padrão encontram-se confinados na brana, independentemente de qualquer mecanismo de localização, desse modo, não precisamos nos preocupar com possíveis revestimentos devido ao *warp factor* no campo vetorial de *gauge* presente na derivada covariante D_μ .

geral parecem indicar que o número de dimensões não compactas do nosso Universo é precisamente quatro. Nesse sentido, as dimensões extras somente seriam aceitáveis se compactas e menores que distâncias milimétricas.

Em um belo trabalho, que ficou conhecido na literatura como modelo RS II, Randall e Sundrum (1999a) mostraram que a última afirmação do parágrafo anterior não é necessariamente verdadeira. Com efeito, as afirmações do parágrafo anterior possuem fulcro na suposição de que a geometria do espaço-tempo é separável. No entanto, a situação muda de forma significativa quando essa hipótese é abandonada. Talvez o resultado mais notável da adoção de uma geometria não separável resida no fato de que podemos viver em um Universo com $D = 4 + N$ dimensões não compactas e ainda assim manter a compatibilidade com as experiências gravitacionais.

Abaixo, apontamos os principais resultados do modelo RS II. No entanto, o conteúdo apresentado nesta seção possui um caráter mais expositório do que os outros capítulos dessa monografia e, portanto, alguns resultados apresentados nessa seção permanecerão sem uma justificativa detalhada. Para o leitor interessado em maiores detalhes acerca do modelo RS II, recomendamos as referências (CSÁKI, 2004; PADILLA, 2002).

2.2.1 Configuração do modelo RS II e a solução das equações de Einstein

A configuração do modelo RS II é construída para suportar um cenário com apenas uma 3-brana mergulhada em um espaço-tempo de 5 dimensões. A fim de realizar uma construção cuidadosa vamos adicionar uma segunda brana com efeito regulador e, ao final do processo, posicionamos a segunda brana no infinito de modo a remover os seus efeitos físicos. Desse modo, a configuração do cenário RS II se assemelha bastante ao modelo RS I. Trabalhamos em um espaço-tempo com $D = 4 + 1$ dimensões, onde denotamos as coordenadas associadas à brana por x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) e a coordenada da dimensão extra é representada por y (onde $-L < y < +L$). Inicialmente vamos considerar L finito, no entanto, ao final do processo tomamos o limite $L \rightarrow \infty$. A ação associada ao modelo RS II pode ser escrita da seguinte forma

$$S = S_{gravit} + S_{brana} + S_{brana'}, \quad (2.29)$$

onde

$$S_{gravit} = \int d^4x \int_{-L}^L dy \sqrt{-G} (2M^3 R - \Lambda), \quad (2.30)$$

$$S_{brana} = \int d^4x \int_{-L}^{+L} dy \sqrt{-\det(G_{\mu\nu})} (\mathcal{L}_{brana} - V_{brana}) \delta(y), \quad (2.31)$$

$$S_{brana'} = \int d^4x \int_{-L}^{+L} dy \sqrt{-\det(G_{\mu\nu})} (\mathcal{L}_{brana'} - V_{brana'}) \delta(y - L). \quad (2.32)$$

As equações de movimento obtidas para o modelo RS II podem ser diretamente reconhecidas em termos das equações (2.13) e (2.14). Logo, a solução dessas equações podem ser obtidas de forma direta, a saber

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.33)$$

Adicionalmente, temos os seguintes vínculos

$$V_{brana} = -V_{brana'} = 24M^3k, \quad k^2 = -\frac{\Lambda}{24M^3}. \quad (2.34)$$

A fim de verificar o comportamento de uma teoria efetiva quadridimensional, observemos que o escalar de curvatura para espaço-tempo *warped* se comporta como $R \sim e^{-2A(y)} \bar{R}$, onde, $\bar{R}$ denota o escalar de curvatura construído com a métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$. Observe ainda que o determinante da métrica G_{AB} pode ser escrito como $G = e^{4A(y)}g$. Desse modo, a ação de uma teoria efetiva quadridimensional pode ser escrita da seguinte forma

$$S_{eff} \sim 2M^3 \int d^4x \int_{-L}^{+L} dy e^{-k|y|} \sqrt{-g} \bar{R} = 2M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} \bar{R}, \quad (2.35)$$

onde identificamos a massa de Planck M_{Pl} como sendo dada por

$$M_{Pl}^2 = M^3 \int_{-L}^{+L} dy e^{-k|y|} = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kL}). \quad (2.36)$$

Note que no limite $L \rightarrow \infty$ a expressão para M_{Pl} permanece bem definida e pode ser escrita como

$$M_{Pl}^2 = \frac{1}{k} M^3. \quad (2.37)$$

Conforme podemos observar na expressão acima, M_{Pl} depende somente da curvatura do espaço-tempo, em contraste com o resultado esperado para espaço-tempo com geometria separável⁷. Desse modo, a teoria efetiva em 4 dimensões torna-se compatível com dimensões extras infinitas.

⁷De fato, a massa de Planck quadridimensional obtida via geometria separável vem dada por $M_{Pl}^2 \sim M^{2+N} L^N$, onde, M representa uma escala de massa fundamental e N é o número de dimensões extras.

2.2.2 Localização de gravitons no modelo RS II

A fim de investigar a localização de gravitons no modelo RS II e a reprodução da gravitação newtoniana em quatro dimensões, analisamos o espectro obtido sob flutuações da forma

$$ds^2 = (e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.38)$$

Observe que estamos trabalhando com a escolha de um *gauge* tal que $h_{Ay} = 0$. Trabalhamos somente com os modos tensoriais de KK que descrevem os grávitons quadridimensionais, de modo que possíveis flutuações vetoriais e escalares serão negligenciadas⁸. Trabalhando com o setor de traço nulo ($h^\mu_\mu = 0$) e transversal ($\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$), obtemos a seguinte equação para as flutuações da métrica

$$\left(\frac{1}{2}e^{2k|y|}\square_{(4)} - \frac{1}{2}\partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2 \right) h_{\mu\nu}(x^\alpha, y) = 0, \quad (2.39)$$

onde $\square_{(4)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ denota o operador de d'Alembert quadridimensional. Como pretendemos descrever os modos massivos quadridimensionais com $h_{\mu\nu}$, devemos ter $(\square_{(4)} - m^2)h_{\mu\nu} = 0$, portanto, podemos realizar a seguinte decomposição em modos de KK

$$h_{\mu\nu}(x^\alpha, y) = e^{ip_\alpha x^\alpha} \psi_{\mu\nu}(y), \quad (2.40)$$

onde $p^\alpha p_\alpha = m^2$. Substituindo a equação acima em (2.39), obtemos

$$\left(-\frac{m^2}{2}e^{2k|y|} - \frac{1}{2}\partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2 \right) \psi_{\mu\nu}(y) = 0. \quad (2.41)$$

A fim de colocar a equação acima em uma forma mais familiar, façamos a seguinte transformação de variáveis

$$z = \int e^{k|y|} dy \quad \Rightarrow \quad z = \text{sgn}(y) \frac{e^{k|y|} - 1}{k}, \quad (2.42)$$

e consideramos a redefinição $\hat{\psi}_{\mu\nu} = e^{k|y|/2} \psi_{\mu\nu}$. Assim, podemos escrever a Eq. (2.41) em uma forma análoga a um problema de mecânica quântica não relativística, isto é

$$\left(-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V_{eff}(z) \right) \hat{\psi}_{\mu\nu} = m^2 \hat{\psi}_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

⁸Para uma discussão detalhada sobre flutuações vetoriais e escalares em espaços *warped* o leitor pode consultar a referência (AHMED; GRZADKOWSKI, 2013).

onde o potencial efetivo é definido como

$$V_{eff}(z) = \frac{15k^2}{8(k|z| + 1)^2} - \frac{3k}{2}\delta(z). \quad (2.44)$$

O potencial efetivo definido acima suporta apenas um estado ligado ($m = 0$), que descreve o gráviton sem massa em quatro dimensões, e um espectro contínuo de modos massivos de KK.

Podemos calcular o potencial efetivo de interação gravitacional entre duas partículas pontuais de massas m_1 e m_2 no nosso Universo quadridimensional, isto é, o potencial efetivo gerado pela troca do modo zero e dos modos massivos de KK. A saber, esse potencial pode ser avaliado a partir da seguinte expressão⁹

$$V(r) \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} + G_N \int_{0+}^{\infty} \frac{dm}{k} \frac{m_1 m_2 e^{-mr}}{r} \frac{m}{k}. \quad (2.45)$$

Realizando a integração no segundo termo da expressão acima, obtemos o seguinte resultado para o potencial gravitacional efetivo em 4 dimensões

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2 k^2} \right). \quad (2.46)$$

Conforme podemos observar, o potencial gravitacional efetivo possui um termo do tipo interação gravitacional newtoniana gerado pela troca do modo zero de KK, mas possui ainda um termo de interação que cai com $1/r^3$ devido à troca dos modos massivos de KK. No entanto, o termo $1/(rk)^2$ possui efeitos desprezíveis frente ao termo de interação newtoniana para as distâncias em que os testes gravitacionais já encontram-se estabelecidos e para k da mesma ordem que a massa de Planck. Desse modo, podemos concluir que o potencial gravitacional efetivo não viola os resultados dos experimentos gravitacionais atuais e, como consequência, podemos trabalhar com cenários de dimensões extras não compactas mantendo a compatibilidade com as observações relacionadas à interação gravitacional.

⁹Vale ressaltar que uma justificativa detalhada da equação abaixo envolve cálculos absolutamente não triviais, no entanto estes serão omitidos aqui. Para o leitor interessado em maiores detalhes recomendamos a referência (PADILLA, 2002).

3 BRANAS ESPESSAS

Apesar do sucesso atingido pelos modelos de Randall-Sundrum, principalmente no que concerne à solução do problema de hierarquia, ainda não podemos considerá-los como descrições realistas do nosso Universo. De fato, a ideia da existência de uma escala de comprimento fundamental têm sido amplamente considerada nas propostas de teorias fundamentais, assim, deveríamos esperar que as 3-branas dos modelos RS tivessem uma espessura superior à essa escala de comprimento.

Ademais, nos cenários RS, partimos do pressuposto de que os campos do Modelo Padrão estejam localizados na 3-brana visível, e isso possui pelo menos uma consequência problemática. Se nenhuma simetria adicional, impedindo a variação do número bariônico (leptônico), for assumida na construção usual da física de partículas, então, aparecem questões como o decaimento de prótons, por exemplo. Usualmente, esse tipo de problema pode ser contornado permitindo a existência de um operador tipo $QQQL$ ¹, dotado com uma constante de acoplamento muito pequena, tal que os seus efeitos sejam relevantes somente em uma escala de energia muito alta. Todavia, por efeito do *warp factor*, as altas energias são trazidas para a escala TeV.

Como foi entendido na referência (ARKANI-HAMED; SCHMALTZ, 2000), no contexto de espaço com geometria separável, o problema mencionado no parágrafo anterior pode ser resolvido se a brana for espessa. Uma argumentação heurística pode ser feita da seguinte forma: seja a ação 5-dimensional para o operador $QQQL$ dada por

$$S \sim \int d^5x \sqrt{-G} (QQQL).$$

Suponhamos que os campos estejam confinados na brana. Portanto podemos escrever $Q \sim e^{-\rho^2 r^2} q(x^\mu)$ e $L \sim e^{-\rho^2 (r-\Delta)^2} l(x^\mu)$, onde r é a variável associada com a dimensão extra, ρ é um parâmetro de ordem da escala de massa fermiônica em 4 dimensões e Δ explica a localização da função de onda de quarks e férmions em diferentes posições na brana. Portanto, é o parâmetro Δ que nos fornece informações sobre a espessura da brana nesse exemplo. Podemos então separar a integral acima, levando em conta um *warp factor* gaussiano $e^{-2\tau^2 r^2}$, a fim de reproduzir o cenário 4-dimensional

$$S \sim \exp \left[-\Delta^2 \rho^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{\tau^2 + \rho^2} \right) \right] \sqrt{\frac{\pi}{\tau^2 + \rho^2}} \int d^4x (qqql).$$

Assim, a suposição da existência de uma espessura não nula para a brana é responsável pela atenuação dos efeitos do operador $qqql$, agindo como uma constante de acoplamento

¹O operador $QQQL$ representa uma interação entre quarks e léptons. O leitor interessado em maiores detalhes sobre esse operador pode consultar a referência (ARKANI-HAMED; SCHMALTZ, 2000).

efetiva e muito pequena.

DeWolfe et al. (2000) propuseram um cenário em que a dimensão extra é modelada pelo acoplamento de campos escalares à gravitação. No mesmo trabalho, os autores aplicaram um método, baseado em técnicas da mecânica quântica supersimétrica, que permite reduzir o sistema de equações de campo à equações diferenciais de primeira ordem. Ainda no mesmo ano, Gremm (2000a) sugeriu um modelo em que a estrutura do espaço-tempo *warped* é gerada pelo acoplamento entre a gravitação e um campo escalar de *sine-Gordon*. As soluções para esse cenário resultam em uma parede de domínio, interpolando assintoticamente entre espaços anti-de Sitter em 5 dimensões (AdS_5). Um ponto importante a ser destacado é que na construção de modelos de branas espessas, a brana é interpretada como a região de máxima variação do campo escalar com relação à dimensão extra. O modelo proposto por Gremm motivou uma série de trabalhos que foram publicados nos anos seguintes².

Nesse capítulo abordamos os principais aspectos dos modelos de branas espessas gerados por campos escalares. Na seção 3.1 analisamos as equações de campos que descrevem os modelos de branas espessas gerados por campos escalares. Nesse contexto, mostramos como a técnica do superpotencial pode ser utilizada para reduzir o sistema de equações a um formalismo de primeira ordem. Em seguida, na seção 3.2, discutimos sobre o modelo de Gremm, onde trabalhamos na obtenção de suas soluções e discutimos suas implicações físicas. Na sequência, seção 3.3, apresentamos o modelo de branas Bloch (BAZEIA; GOMES, 2004; DUTRA; FARIA JR; HOTT, 2008), dando destaque para as chamadas soluções degeneradas e para o mecanismo de separação de branas. Por fim, na seção 3.4, analisamos as flutuações da métrica e discutimos a estabilidade dos modelos de branas espessas.

3.1 GRAVITAÇÃO ACOPLADA A CAMPOS ESCALARES

Nesta seção, introduzimos os cenários de branas espessas gerados por campos escalares. Em linhas gerais, vamos trabalhar em um espaço-tempo *warped* com $D = 4 + 1$ dimensões, sendo a dimensão extra infinita. Denotamos as coordenadas do Universo quadridimensional por x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), enquanto a coordenada y representa a dimensão extra. Partimos da seguinte ação rumo à construção de modelos de branas espessas

$$S = \int d^4x dy \sqrt{-G} \left(\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_A \Phi_i \partial^A \Phi_i - V(\Phi_1, \dots, \Phi_n) \right). \quad (3.1)$$

²Ver e.g. (AHMED; GRZADKOWSKI, 2013; BAZEIA; FURTADO; GOMES, 2004; BAZEIA; GOMES, 2004; CAMPOS, 2002; CASTRO, 2011; CHUMBES; HOTT, 2010; CHUMBES; VASQUEZ; HOTT, 2011; CHUMBES; SILVA; HOTT, 2012; CRUZ; MALUF; ALMEIDA, 2013; CRUZ et al., 2014; CORREA; DUTRA; HOTT, 2011; DUTRA; FARIA JR; HOTT, 2008; DUTRA; BRITO; SILVA, 2014; XIE; YANG; ZHAO, 2013; YANG et al., 2012; ZHAO; LIU; LI, 2010).

O primeiro termo da ação escrita acima descreve a dinâmica do espaço-tempo através de uma extensão mínima da gravitação de Einstein-Hilbert em 5 dimensões³, enquanto, os outros termos descrevem campos escalares interagentes que atuam como fontes. Assumindo a existência de uma solução invariante pelo grupo de Poincaré quadridimensional (nas direções x^μ), podemos escrever o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.2)$$

Note a semelhança com o *Ansatz* proposto nos modelos RS. Vamos assumir que os campos escalares Φ_i 's dependem somente da dimensão extra, *i.e.* $\Phi_i = \Phi_i(y)$. As equações de movimento obtidas a partir da ação (3.1) são dadas por

$$\frac{d^2 A}{dy^2} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\Phi_i}{dy} \right)^2 = 0, \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{dA}{dy} \right)^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\Phi_i}{dy} \right)^2 - \frac{1}{3} V(\Phi_1, \dots, \Phi_n), \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dy^2} + 4 \frac{dA}{dy} \frac{d\Phi_i}{dy} = \frac{\partial V}{\partial \Phi_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.5)$$

Em geral, o sistema de equações diferenciais acima é bastante complicado. No entanto, podemos obter uma simplificação considerável lançando mão da técnica do superpotencial. Considere a existência de uma função superpotencial $W(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, tal que o potencial $V(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ possa ser escrito como

$$V(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} \right)^2 - \frac{4}{3} W^2. \quad (3.6)$$

Nesse caso, podemos obter um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem cujas soluções também satisfazem as equações (3.3)-(3.5), a saber

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2}{3} W(\Phi_1, \dots, \Phi_n), \quad (3.7)$$

e

$$\frac{d\Phi_i}{dy} = \frac{\partial W}{\partial \Phi_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.8)$$

Por simples diferenciação das equações acima e combinando-as com a equação (3.6), podemos facilmente verificar que as Eqs. (3.7) e (3.8) satisfazem as equações de segunda ordem (3.3)-(3.5). O conjunto de equações (3.7) e (3.8) é de fundamental importância para esse trabalho. Essencialmente, o resto deste capítulo, bem como os dois próximos,

³Neste capítulo e nos próximos utilizamos $M^{-3} = 8$ no termo de Einstein-Hilbert, de modo a manter notação similar à grande parte da literatura de branas espessas.

são dedicados à obtenção de suas soluções.

3.2 O MODELO DE GREMM

Abordamos nesta seção o modelo proposto por Gremm (2000a). Tal modelo descreve um cenário de brana espessa gerado por um campo escalar auto-interagente e que admite soluções topológicas do tipo parede de domínio. Considere o seguinte superpotencial

$$W(\Phi) = \lambda \sin \Phi, \quad (3.9)$$

onde λ é uma constante de acoplamento associada com a espessura da parede de domínio. O potencial $V(\Phi)$, obtido a partir da Eq. (3.6), é dado por

$$V(\Phi) = \frac{\lambda^2}{2} \left(\cos^2 \Phi - \frac{8}{3} \sin^2 \Phi \right). \quad (3.10)$$

Utilizando a equação de primeira ordem para o campo escalar Φ , Eq. (3.8), podemos escrever

$$\frac{d\Phi}{dy} = \lambda \cos \Phi. \quad (3.11)$$

É fácil verificar que a solução da equação é dada por

$$\Phi(y) = \arctan[\sinh(\lambda(y - y_0))], \quad (3.12)$$

onde y_0 é uma constante de integração associada com a invariância translacional. A solução acima representa uma parede de domínio, conhecida na literatura como *kink* de *sine*-Gordon (vide Fig. 3.1)⁴. Substituindo as Eqs. (3.9) e (3.12) em (3.7), obtemos após algumas manipulações

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2\lambda}{3} \tanh(\lambda(y - y_0)). \quad (3.13)$$

Integrando a equação acima com relação à variável y , e impondo a condição $A(y_0) = 0$, obtemos a seguinte expressão para $A(y)$

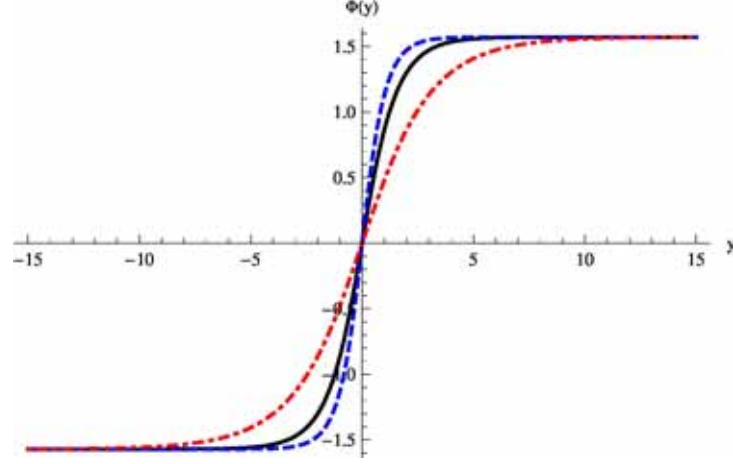
$$A(y) = \frac{2}{3} \ln[\operatorname{sech}(\lambda(y - y_0))]. \quad (3.14)$$

Logo, obtemos a seguinte expressão para o *warp factor*

$$e^{2A(y)} = [\operatorname{sech}(\lambda(y - y_0))]^{4/3}. \quad (3.15)$$

⁴Para o leitor interessado em uma discussão sobre soluções dos tipos *kinks* e paredes de domínio, recomendamos as referências (RAJARAMAN, 1982; VACHASPATI, 2006; MANTON; SUTCLIFFE, 2004).

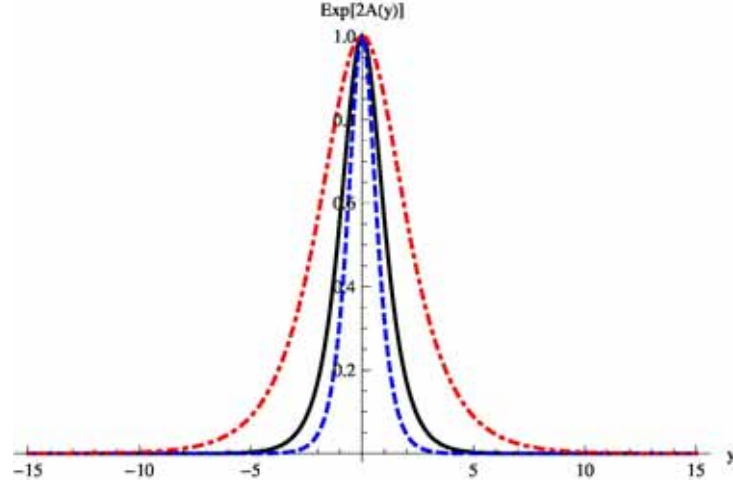
Figura 3.1: Perfil típico de um *kink* de *sine*-Gordon. Utilizamos $\lambda = 1$ - linha preta (sólida); $\lambda = 1,5$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,5$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nos três casos utilizamos $y_0 = 0$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Não é difícil concluir que, para $r \rightarrow \pm\infty$ temos $A(y) \sim -|y|$. Portanto, a solução aqui obtida possui comportamento assintoticamente *AdS*. Na figura 3.2, plotamos o perfil do *warp factor* obtido acima.

Figura 3.2: *Warp factor* para o modelo de Gremm. Utilizamos $\lambda = 1$ - linha preta (sólida); $\lambda = 1,5$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,5$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nos três casos utilizamos $y_0 = 0$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

A fim de elucidar a interpretação física da solução obtida aqui, consideramos a densidade de energia e o escalar de curvatura calculados a partir da configuração em questão. A expressão para a densidade $\varepsilon(y)$ de energia pode ser obtida a partir da componente T_{00}

do tensor energia momento (vide apêndice 7), a saber, podemos escrever

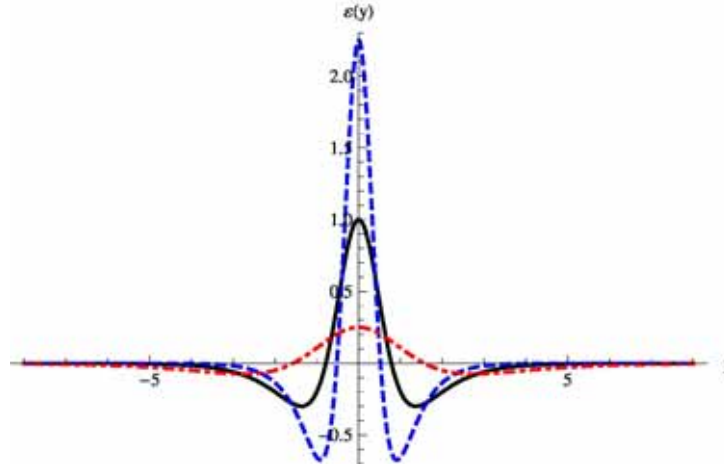
$$\varepsilon(y) = T^{00} = e^{2A(y)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)^2 + V(\Phi) \right]. \quad (3.16)$$

Utilizando as equações (3.10) e (3.12), podemos obter a seguinte expressão para a densidade de energia em termos da coordenada y

$$\varepsilon(y) = \frac{\lambda^2}{3} [\text{sech}(\lambda(y - y_0))]^{4/3} \left(7 \text{sech}^2(\lambda(y - y_0)) - 4 \right). \quad (3.17)$$

Na Fig. 3.3 plotamos o gráfico da densidade de energia para alguns valores da constante de acoplamento λ .

Figura 3.3: Densidade de energia para o modelo de Gremm. Utilizamos $\lambda = 1$ - linha preta (sólida); $\lambda = 1,5$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,5$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nos três casos utilizamos $y_0 = 0$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

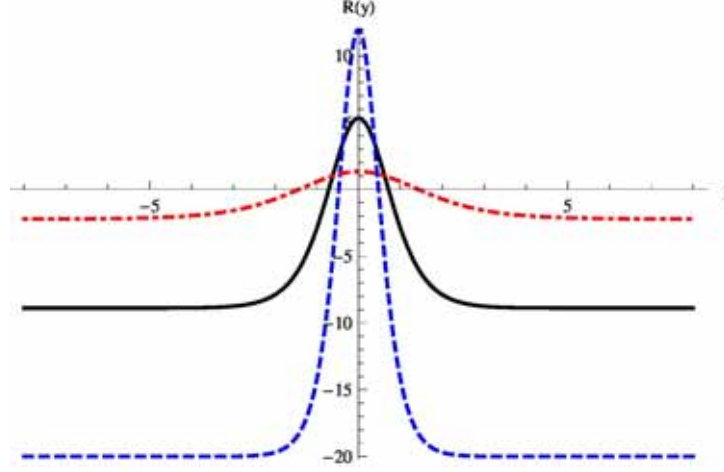
O escalar de curvatura em termos da coordenada y pode ser calculado a partir da expressão $R(y) = -8A''(y) - 20A'(y)^2$. Logo, substituindo a Eq. (3.14) na expressão acima, obtemos

$$R(y) = \frac{8\lambda^2}{9} [10 - 4 \text{sech}^2(\lambda(y - y_0))]. \quad (3.18)$$

Na Fig. 3.4 plotamos o perfil típico do escalar de curvatura. Da observação das figuras 3.3 e 3.4, onde plotamos os gráficos da densidade de energia e do escalar de curvatura, podemos associar uma interpretação física do cenário aqui construído. Na Fig. 3.3, podemos observar a localização de energia em uma dada região da dimensão extra, e de acordo com a nossa interpretação, essa localização indica a formação de uma brana espessa. Como complemento, podemos observar na Fig. 3.4 a formação de uma parede de domínio interpolando entre dois espaços de geometria assintoticamente AdS . Vale ressaltar

que a formação da parede de domínio ocorre na mesma região da dimensão extra onde observamos a localização de energia. Desse modo, podemos associar as branas espessas com as regiões onde ocorrem perturbações com relação a um espaço-tempo de geometria *AdS*.

Figura 3.4: Escalar de curvatura. Utilizamos $\lambda = 1$ - linha preta (sólida); $\lambda = 1,5$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,5$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nos três casos utilizamos $y_0 = 0$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

3.3 BRANAS BLOCH

Desde a proposição do modelo de Gremm, uma série de trabalhos apareceram na literatura de branas espessas. Nesta seção vamos explorar o modelo de *branas Bloch*, proposto inicialmente por Bazeia e Gomes (2004), e posteriormente revisitado por Dutra, Faria Jr e Hott (2008).

Este modelo é caracterizado por um sistema de dois campos escalares interagentes cujo superpotencial, conhecido na literatura como BNRT (BAZEIA et al., 1997), é dado pela seguinte expressão

$$W(\Phi_1, \Phi_2) = a^2 \Phi_1 - \frac{1}{3} \Phi_1^3 - \lambda \Phi_1 \Phi_2^2. \quad (3.19)$$

Substituindo a expressão acima na Eq. (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} V(\Phi_1, \Phi_2) = & \frac{a^4}{2} - a^2 \Phi_1^2 - \frac{4a^4}{3} \Phi_1^2 + \frac{1}{2} \Phi_1^4 + \frac{8a^2}{9} \Phi_1^4 - \frac{4}{27} \Phi_1^6 - a^2 \lambda \Phi_1^2 + \\ & + \lambda \Phi_1^2 \Phi_2^2 + \frac{8a^2 \lambda}{3} \Phi_1^2 \Phi_2^2 + 2\lambda^2 \Phi_1^2 \Phi_2^2 - \frac{8\lambda}{9} \Phi_1^4 \Phi_2^2 + \frac{\lambda^2}{2} \Phi_2^4 - \frac{4\lambda^2}{3} \Phi_1^2 \Phi_2^4. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Utilizando a Eq. (3.7), podemos escrever

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2v^2}{3}\Phi_1(y) + \frac{2}{9}\Phi_1(y)^3 + \frac{2\lambda}{3}\Phi_1(y)\Phi_2(y)^2. \quad (3.21)$$

As equações de primeira ordem para os campos escalares, obtidas a partir da Eq. (3.8), são dadas por

$$\frac{d\Phi_1}{dy} = a^2 - \Phi_1^2 - \lambda\Phi_2^2 \quad \text{e} \quad \frac{d\Phi_2}{dy} = -2\lambda\Phi_1\Phi_2. \quad (3.22)$$

Note que as equações acima, além de não lineares, estão acopladas. Combinando as duas equações de primeira ordem, obtemos a chamada equação de órbita

$$\frac{d\Phi_1}{d\Phi_2} = \frac{\Phi_1^2 + \lambda\Phi_2^2 - a^2}{2\lambda\Phi_1\Phi_2}. \quad (3.23)$$

A solução da última equação define uma órbita $\Phi_1 = \Phi_1(\Phi_2)$ no espaço interno, e permite a eliminação de um campo em termos do outro nas equações de primeira ordem. Com a mudança de variável $\chi = \Phi_1^2 - a^2$, a Eq. (3.23) pode ser mapeada na seguinte equação linear de primeira ordem

$$\frac{d\chi}{d\Phi_2} - \frac{1}{\lambda\Phi_2}\chi = \Phi_2. \quad (3.24)$$

A solução geral da equação acima é dada por

$$\chi(\Phi_2) = \Phi_1^2 - a^2 = c_0\Phi_2^{1/\lambda} - \frac{\lambda}{1-2\lambda}\Phi_2^2, \quad \text{para } \lambda \neq 1/2, \quad (3.25)$$

e

$$\chi(\Phi_2) = \Phi_1^2 - a^2 = \Phi_2^2[\ln(\Phi_2) + c_1], \quad \text{para } \lambda = 1/2, \quad (3.26)$$

onde c_0 e c_1 são constantes de integração. Nesse trabalho consideramos somente o caso $\lambda \neq 1/2$, pois esse caso permite soluções analíticas para alguns valores do parâmetro λ . No entanto, podemos verificar numericamente que os dois casos acima exibem soluções com características semelhantes. Utilizando a Eq. (3.25) podemos eliminar Φ_1 em termos de Φ_2 na segunda equação de (3.22), de fato obtemos

$$\frac{d\Phi_2}{dy} = 2\lambda\Phi_2\sqrt{c_0\Phi_2^{1/\lambda} - \frac{\lambda}{1-2\lambda}\Phi_2^2 + a^2}. \quad (3.27)$$

Uma vez conhecida a solução da equação acima, basta substituir a expressão de $\Phi_2(y)$ na Eq. (3.25) para então obtermos a solução $\Phi_1(y)$. Contudo, em geral não é possível resolver analiticamente a equação acima para c_0 e λ arbitrários. Abaixo apresentamos alguns casos interessantes onde podemos obter soluções analíticas para a equação acima.

3.3.1 Soluções branas Bloch

Consideramos primeiro a classe de soluções obtidas para $c_0 = 0$ e $0 < \lambda < 1/2$. Nesse caso, a Eq. (3.27) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d\Phi_2}{dy} = 2\lambda\Phi_2\sqrt{a^2 - \frac{\lambda}{1-2\lambda}\Phi_2^2}. \quad (3.28)$$

A solução da equação acima, obtida na Ref. (BAZEIA; GOMES, 2004), é dada por

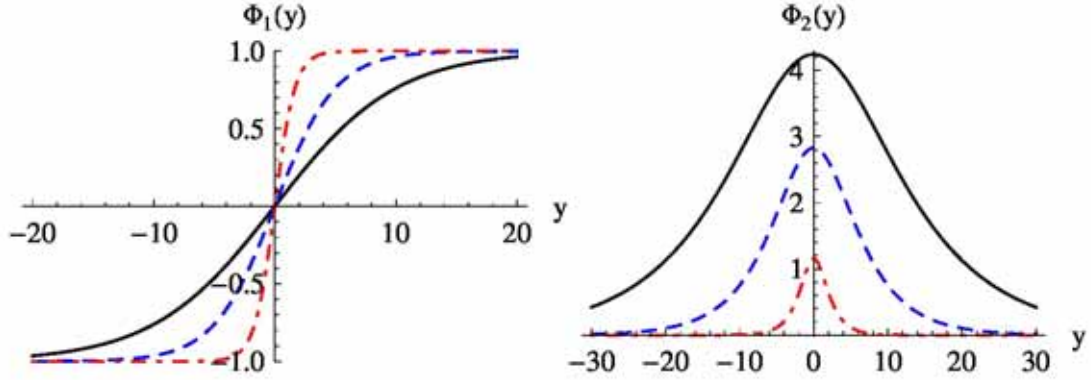
$$\Phi_2(y) = a\sqrt{\frac{1-2\lambda}{\lambda}} \operatorname{sech}(2\lambda ay). \quad (3.29)$$

Utilizando a equação de órbita, Eq. (3.25), obtemos

$$\Phi_1(y) = a \tanh(2\lambda ay). \quad (3.30)$$

As soluções $\Phi_1(y)$ e $\Phi_2(y)$ correspondem, respectivamente, a defeitos do tipo *kink* e *lump* (veja a Fig. 3.5).

Figura 3.5: Campos escalares $\Phi_1(y)$ (esquerda) e $\Phi_2(y)$ (direita). Utilizamos $\lambda = 0,05$ - linha preta (sólida); $\lambda = 0,1$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,3$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Substituindo as expressões acima na Eq. (3.21) e então integrando em y , com a condição de contorno $A(0) = 0$, obtemos

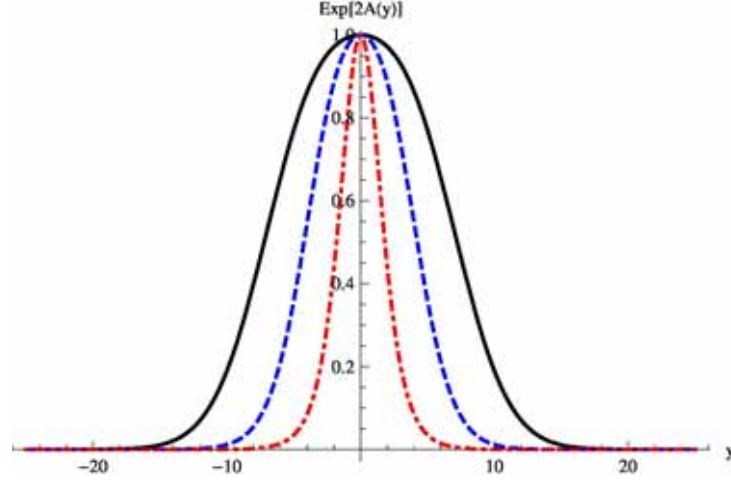
$$A(y) = \frac{2a^2}{9\lambda} \ln [\operatorname{sech}(2\lambda ay)] + \frac{a^2}{9} \left(\frac{1}{\lambda} - 3 \right) \tanh^2(2\lambda ay), \quad (3.31)$$

e como consequência obtemos a seguinte expressão para o *warp factor*

$$e^{2A(y)} = [\text{sech}(2\lambda ay)]^{4a^2/9\lambda} \times \exp \left[\frac{2a^2}{9} \left(\frac{1}{\lambda} - 3 \right) \tanh^2(2\lambda ay) \right]. \quad (3.32)$$

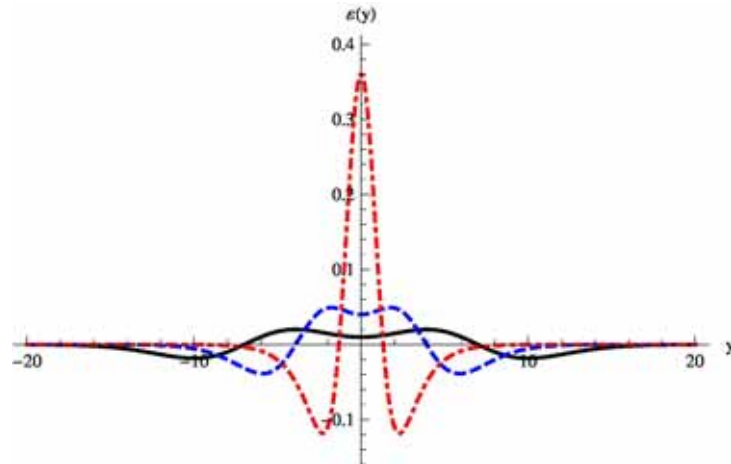
Na Fig. 3.6, plotamos o gráfico correspondente à expressão acima. Plotamos ainda, nas figuras 3.7 e 3.8, os gráficos correspondentes à densidade de energia e ao escalar de curvatura, respectivamente. Ressaltamos que as expressões analíticas de $\varepsilon(y)$ e $R(y)$ para a configuração de branas Bloch são omitidas nesse trabalho.

Figura 3.6: *Warp factor* correspondente às branas Bloch. Utilizamos $\lambda = 0,05$ - linha preta (sólida); $\lambda = 0,1$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,3$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



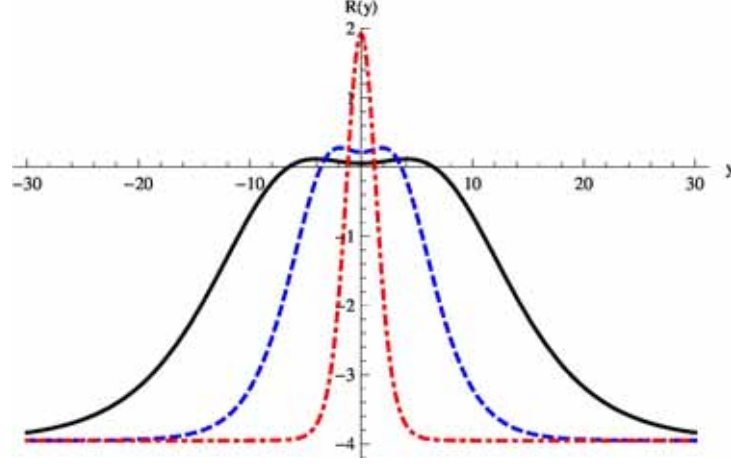
Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 3.7: Densidade de energia correspondente às branas Bloch. Utilizamos $\lambda = 0,05$ - linha preta (sólida); $\lambda = 0,1$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,3$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 3.8: Escalar de curvatura. Utilizamos $\lambda = 0,05$ - linha preta (sólida); $\lambda = 0,1$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,3$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

3.3.2 Soluções branas Bloch degeneradas

Vamos considerar agora mais duas classes de soluções, uma correspondente a $\lambda = 1$ e $c_0 < -2a$, e outra relacionada a $\lambda = 1/4$ e $c_0 < 1/16a^2$. Para a primeira classe de soluções, a Eq. (3.27) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d\Phi_2}{dy} = 2\Phi_2 \sqrt{\Phi_2^2 + c_0\Phi_2 + a^2}. \quad (3.33)$$

Após uma série de manipulações obtemos o seguinte resultado

$$\Phi_2(y) = \frac{2a}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - c_0}. \quad (3.34)$$

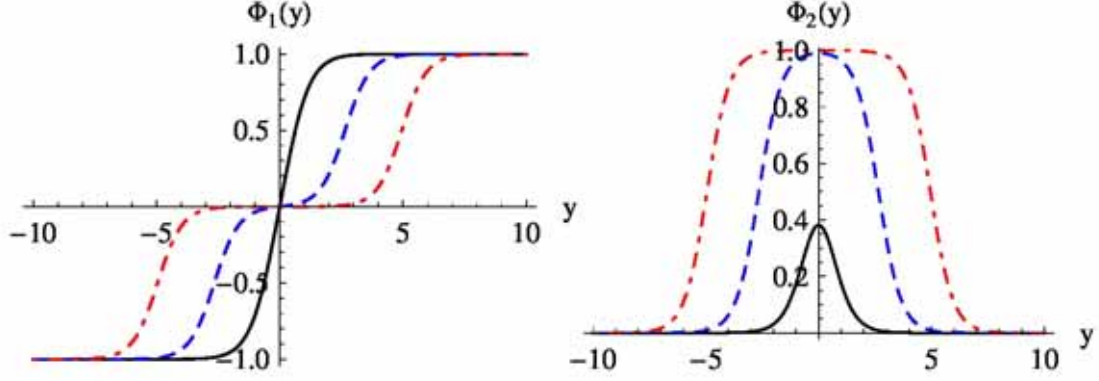
Substituindo a expressão acima na equação de órbita, Eq. (3.25), obtemos

$$\Phi_1(y) = \frac{\sqrt{c_0^2 - 4} a \sinh(2ay)}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - c_0}. \quad (3.35)$$

Conforme podemos observar na Fig. 3.9, onde plotamos os gráficos correspondentes aos campos $\Phi_1(y)$ e $\Phi_2(y)$, as configurações dos campos escalares não correspondem às soluções do tipo *kinks* e *lumps* usuais. De fato, o campo escalar $\Phi_1(y)$ apresenta configuração do tipo *kink* duplo quando a constante de integração c_0 aproxima-se do valor crítico $c_0 = -2a$. Além disso, a solução correspondente ao campo escalar $\Phi_2(y)$ exibe um platô

na configuração do tipo *lump*⁵.

Figura 3.9: Campos escalares $\Phi_1(y)$ (esquerda) e $\Phi_2(y)$ (direita). Utilizamos $c_0 = -3$ - linha preta (sólida); $c_0 = -(2 + 10^{-4})$ - linha azul (tracejada); $c_0 = -(2 + 10^{-8})$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Substituindo as expressões acima na Eq. (3.21), e então integrando com relação à y , e usando como condição $A(0) = 0$, obtemos

$$A(y) = \frac{2a^2}{9} \ln \left(\frac{\sqrt{c_0^2 - 4} - c_0}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - c_0} \right) + \frac{a}{9} \left(\frac{c_0^2 - c_0 \sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - 4a}{(\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - c_0)^2} - \frac{c_0^2 - c_0 \sqrt{c_0^2 - 4} - 4a}{(\sqrt{c_0^2 - 4} - c_0)^2} \right) \quad (3.36)$$

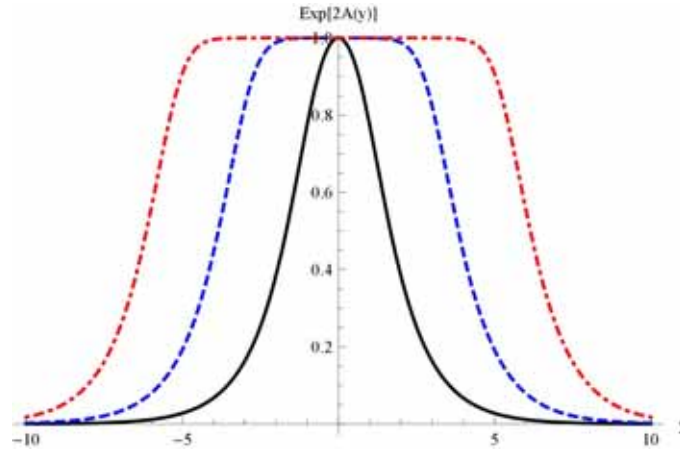
Consequentemente, chegamos à seguinte expressão para o *warp factor*

$$e^{2A(y)} = \left(\frac{\sqrt{c_0^2 - 4} - c_0}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - c_0} \right)^{4a^2/9} \times \exp \left[\frac{2a}{9} \left(\frac{c_0^2 - c_0 \sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - 4a}{(\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2ay) - c_0)^2} - \frac{c_0^2 - c_0 \sqrt{c_0^2 - 4} - 4a}{(\sqrt{c_0^2 - 4} - c_0)^2} \right) \right] \quad (3.37)$$

Na Fig. (3.10), plotamos o *warp factor* correspondente à equação acima. Note o aparecimento de um platô quando c_0 se aproxima do valor crítico $c_0 = -2a$.

⁵Vale ressaltar que essa classe de soluções também foi investigada no âmbito de teoria clássica de campo em 1 + 1 D (DUTRA, 2006), nesse contexto verifica-se uma degenerescência no cálculo da energia BPS, justificando o emprego do termo “branas Bloch degeneradas”.

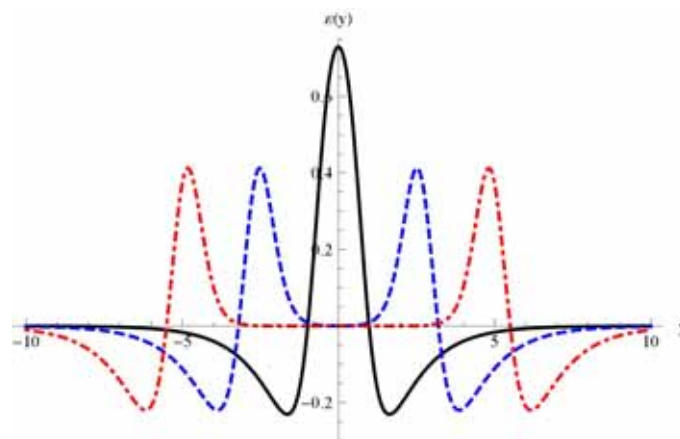
Figura 3.10: *Warp factor* correspondente às branas Bloch. Utilizamos $c_0 = -3$ - linha preta (sólida); $c_0 = -(2 + 10^{-4})$ - linha azul (tracejada); $c_0 = -(2 + 10^{-8})$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

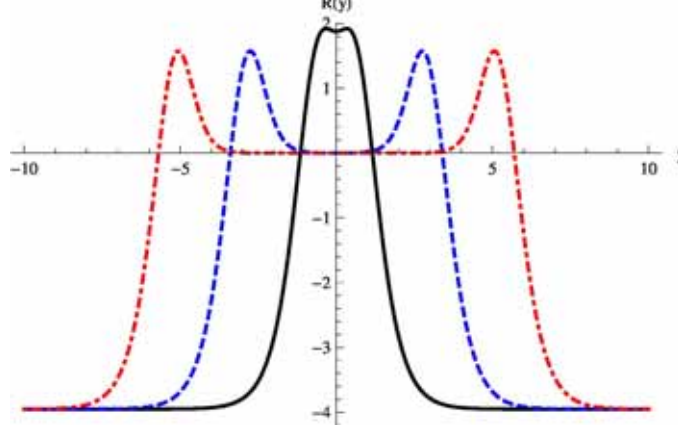
As figuras (3.11) e (3.12) representam, respectivamente, a densidade de energia e o escalar de curvatura para a configuração obtida acima. Na figura (3.11), observamos que para valores de c_0 próximos do valor crítico $c_0 = -2a$, ocorre o aparecimento de duas regiões onde ocorre a localização de energia. Esse fato nos leva a interpretar que ocorre a formação de duas 3-branas no cenário aqui construído, e que a constante c_0 controla um mecanismo de separação de branas. Note que os gráficos do escalar de curvatura, Fig. 3.12, fortalecem a interpretação da formação de duas branas. De fato, como podemos observar na Fig. 3.12, para c_0 próximo do seu valor crítico, aparecem duas regiões em que ocorrem deformações com relação à geometria AdS .

Figura 3.11: Densidade de energia correspondente às branas Bloch. Utilizamos $c_0 = -3$ - linha preta (sólida); $c_0 = -(2 + 10^{-4})$ - linha azul (tracejada); $c_0 = -(2 + 10^{-8})$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 3.12: Escalar de curvatura. Utilizamos $c_0 = -3$ - linha preta (sólida); $c_0 = -(2 + 10^{-4})$ - linha azul (tracejada); $c_0 = -(2 + 10^{-8})$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Por completeza, apresentamos também as soluções correspondentes à classe $\lambda = 1/4$ e $c_0 < 1/16a^2$. Nesse caso, a Eq. (3.27) pode ser reescrita como segue

$$\frac{d\Phi_2}{dy} = \frac{1}{2}\Phi_2\sqrt{c_0\Phi_2^4 - \frac{1}{2}\Phi_2^2 + a^2}. \quad (3.38)$$

Após uma série de manipulações, obtemos as seguintes expressões para $\Phi_1(y)$ e $\Phi_2(y)$

$$\Phi_1(y) = \frac{\sqrt{1 - 16c_0^2} a \sinh(4ay)}{\sqrt{\sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay) + 1}} \quad \text{e} \quad \Phi_2(y) = \frac{2a}{\sqrt{\sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay) + 1}}. \quad (3.39)$$

Substituindo as equações acima na Eq. (3.21) e integrando em relação a y , podemos obter a seguinte expressão para $A(y)$

$$A(y) = \frac{4a^2}{9} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - 16c_0^2} + 1}{\sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay) + 1} \right) - \frac{2a^2}{9} \left(\frac{32c_0a^2 + 1 + \sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay)}{(\sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay) + 1)^2} - \frac{32c_0a^2 + 1 + \sqrt{1 - 16c_0^2}}{(\sqrt{1 - 16c_0^2} + 1)^2} \right). \quad (3.40)$$

Consequentemente, obtemos o seguinte *warp factor*

$$e^{2A(y)} = \left(\frac{\sqrt{1 - 16c_0^2} + 1}{\sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay) + 1} \right)^{4a^2/9} \times \exp \left[-\frac{4a^2}{9} \left(\frac{32c_0a^2 + 1 + \sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay)}{(\sqrt{1 - 16c_0^2} \cosh(4ay) + 1)^2} - \frac{32c_0a^2 + 1 + \sqrt{1 - 16c_0^2}}{(\sqrt{1 - 16c_0^2} + 1)^2} \right) \right]. \quad (3.41)$$

As soluções obtidas para essa classe de parâmetros apresentam os mesmos comportamentos gráficos do caso anterior, portanto omitimos os gráficos relacionados às expressões acima. No entanto, para essa segunda classe de soluções, a observação da separação de branas se dá para c_0 próximo do valor crítico $c_0 = 1/16a^2$.

3.3.3 Soluções críticas

Além das soluções apresentadas acima, existe uma outra classe de soluções analíticas para o modelo apresentado nesta seção, tais soluções são denominadas *soluções críticas*. Essa classe corresponde às soluções obtidas para $\lambda = 1$ e $c_0 = -2a$, e também $\lambda = 1/4$ e $c_0 = 1/16a^2$. Vejamos primeiro o caso $\lambda = 1$ e $c_0 = -2a$. Nesse caso a equação (3.27) pode ser reescrita da seguinte forma

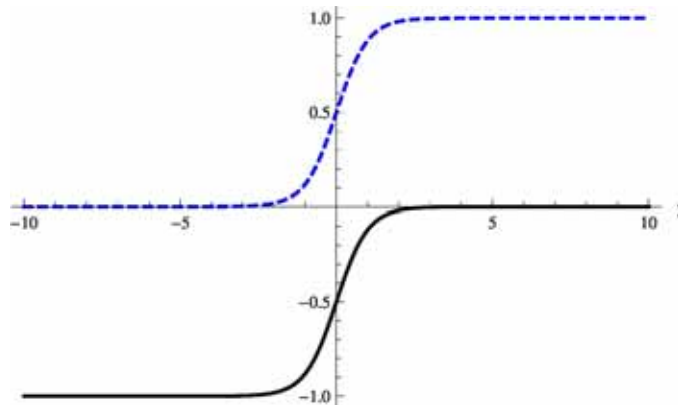
$$\frac{d\Phi_2}{dy} = 2\Phi_2\sqrt{\Phi_2^2 - 2a\Phi_2 + a^2} = 2\Phi_2(a - \Phi_2). \quad (3.42)$$

Resolvendo a equação acima e utilizando a equação de órbita, Eq. (3.25), obtemos o seguinte par de soluções

$$\Phi_1(y) = \frac{a}{2}[\tanh(ay) - 1] \quad \text{e} \quad \Phi_2(y) = \frac{a}{2}[\tanh(ay) + 1]. \quad (3.43)$$

Observe na Fig. 3.13 que ambos os campos possuem comportamento do tipo *kink* usual. Substituindo as soluções $\Phi_1(y)$ e $\Phi_2(y)$, Eq. (3.43), em (3.21), e então integrando em

Figura 3.13: Campos escalares $\Phi_1(y)$ (linha preta - sólida) e $\Phi_2(y)$ (linha azul - tracejada). Caso $\lambda = 1$ e $c_0 = -2a$. Utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

relação à y , com a condição de contorno $A(0) = 0$, obtemos a seguinte expressão

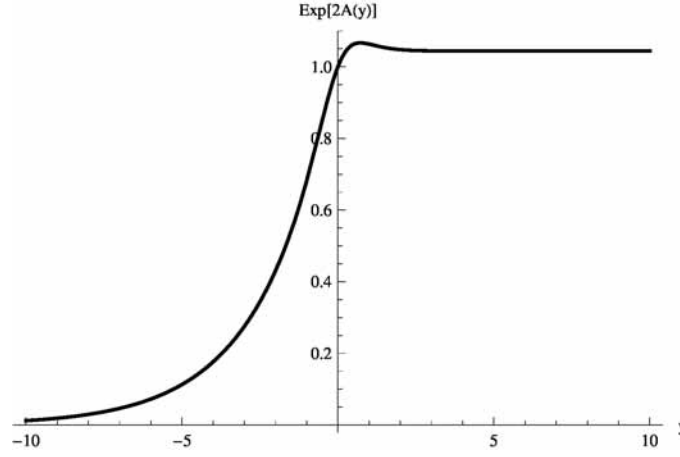
$$A(y) = \frac{a^2}{9} \ln[\tanh(ay) + 1] - \frac{a^2}{18} ([\tanh(ay) + 1]^2 - 2\tanh(ay) - 1). \quad (3.44)$$

Consequentemente o *warp factor* é dado por

$$e^{2A(y)} = [\tanh(ay) + 1]^{2a^2/9} \times \exp \left[-\frac{a^2}{9} ([\tanh(ay) + 1]^2 - 2 \tanh(ay) - 1) \right]. \quad (3.45)$$

Nas figuras 3.14, 3.15 e 3.15 mostramos, respectivamente, o *warp factor*, a densidade de energia e o escalar de curvatura obtidos para o caso das soluções críticas. Conforme podemos observar nessas figuras, ocorre apenas a formação de uma brana. Nesse caso, interpretamos que o mecanismo de separação de branas “empurrou” a segunda brana para uma distância $y \rightarrow \infty$.

Figura 3.14: *Warp factor* para as soluções críticas. Consideramos o caso $\lambda = 1$ e $c_0 = -2a$. Utilizamos $a = 1$.

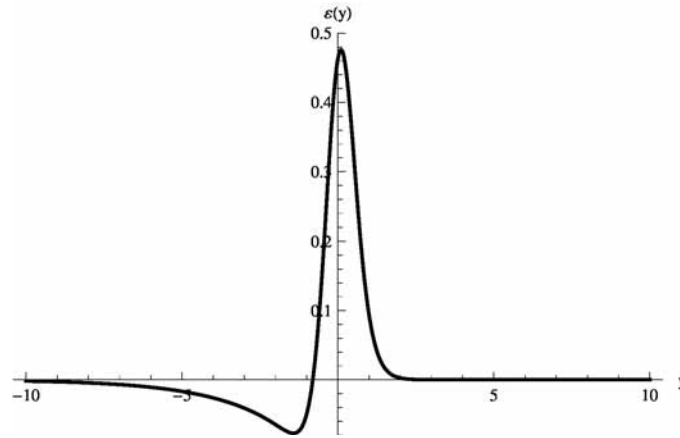


Fonte: Figura gerada pelo autor.

Por completeza, consideramos também as soluções correspondentes ao caso $\lambda = 1/4$ e $c_0 = 1/16a^2$. Nesse caso a equação (3.27) pode ser reescrita como segue

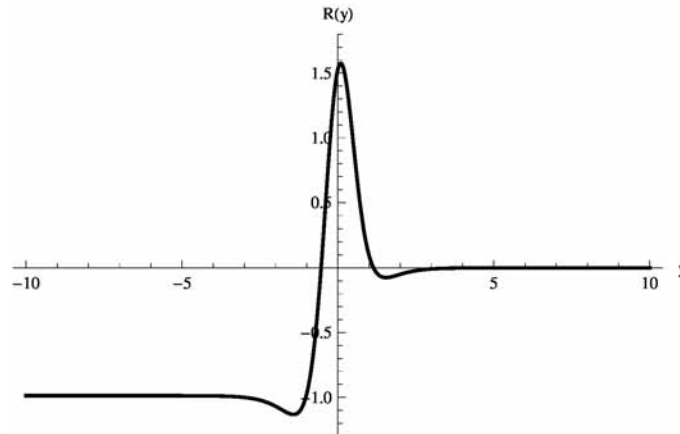
$$\frac{d\Phi_2}{dy} = \frac{1}{2}\Phi_2 \sqrt{\frac{1}{16a^2}\Phi_2^4 - \frac{1}{2}\Phi_2^2 + a^2} = \frac{1}{2}\Phi_2 \left(a - \frac{1}{4a}\Phi_2^2 \right). \quad (3.46)$$

Figura 3.15: Densidade de energia para as soluções críticas. Consideramos o caso $\lambda = 1$ e $c_0 = -2a$. Utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 3.16: Escalar de curvatura para as soluções críticas. Consideramos o caso $\lambda = 1$ e $c_0 = -2a$. Utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Resolvendo a equação acima e utilizando a equação de órbita, Eq. (3.25), obtemos o seguinte par de soluções

$$\Phi_1(y) = \frac{a}{2} [\tanh(2ay) - 1] \quad \text{e} \quad \Phi_2(y) = \frac{\sqrt{2a^2} \exp(ay)}{\sqrt{\cosh(2ay)}}. \quad (3.47)$$

Substituindo as expressões acima na Eq. (3.21), obtemos

$$A(y) = \frac{8a^2}{9} \ln \left(\frac{\exp(ay)}{\sqrt{\cosh(2ay)}} \right) - \frac{a^2}{9} \tanh(2ay) [\tanh(2ay) - 3]. \quad (3.48)$$

Consequentemente temos o seguinte *warp factor*

$$e^{2A(y)} = \left(\frac{\exp(ay)}{\sqrt{\cosh(2ay)}} \right)^{16a^2/9} \times \exp \left[-\frac{2a^2}{9} \tanh(2ay) [\tanh(2ay) - 3] \right]. \quad (3.49)$$

O comportamento gráfico das soluções obtidas para o caso $\lambda = 1/4$ e $c_0 = 1/16a^2$ é bastante semelhante ao caso anterior ($\lambda = 1/4$ e $c_0 = 1/16a^2$), por isso omitimos os gráficos correspondentes às soluções obtidas aqui.

3.4 FLUTUAÇÕES DA MÉTRICA

Antes de finalizarmos este capítulo, analisamos as flutuações da métrica em torno das soluções clássicas. Para cenários onde ocorre o acoplamento entre campos escalares e gravitação, a análise das flutuações em torno de um dado plano de fundo deve conter perturbações na métrica e no setor escalar. Seguimos aqui a linha adotada por DeWolfe et al. (2000).

Com respeito às flutuações da métrica adotamos o chamado *gauge* axial ($h_{A4} = 0$) tal que o elemento de linha possa ser escrito da seguinte forma

$$ds^2 = e^{2A(y)} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y)] dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.50)$$

Para as flutuações no setor escalar, façamos

$$\Phi_i(x, y) = \Phi_i^{(cl)}(y) + \tilde{\Phi}_i(x, y), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.51)$$

onde os $\Phi_i^{(cl)}(y)$'s representam as soluções clássicas satisfazendo a Eq. (3.5), e os $\tilde{\Phi}_i(x, y)$'s denotam as perturbações em torno das soluções clássicas. As equações que descrevem as flutuações $h_{\mu\nu}$ e $\tilde{\Phi}_i(x, y)$ são dadas por

$$\begin{aligned} e^{2A} [\partial_y^2 + 4A' \partial_y] h_{\mu\nu} - \square_{(4)} h_{\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\beta} - \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\beta}) + \\ + \eta_{\mu\nu} e^{2A} A' \partial_y (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) = -\frac{8}{3} e^{2A} \eta_{\mu\nu} \sum_{i=1}^n \tilde{\Phi}_i \frac{\partial V}{\partial \Phi_i} \Big|_{\Phi^{(cl)}}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

e

$$e^{-2A} \square_{(4)} \tilde{\Phi}_i - \partial_y^2 \tilde{\Phi}_i - 4A' \partial_y \tilde{\Phi}_i + \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_j \partial \Phi_i} \Big|_{\Phi^{(cl)}} = \frac{1}{2} \partial_y \Phi_i^{(cl)} \eta^{\mu\nu} \partial_r h_{\mu\nu}, \quad (3.53)$$

para $i = 1, \dots, n$. Na forma atual, o conjunto de equações acima é bastante complicado. No entanto, podemos obter uma simplificação considerável ao projetar as equações acima no setor de traço-nulo ($h^\mu_\mu = 0$) e transversal ($\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$), o qual pode ser atingido com a

atuação do operador projeção, a saber

$$\bar{h}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (3.54)$$

sendo $P_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o projetor, definido por

$$P_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\pi_{\mu\alpha}\pi_{\nu\beta} + \pi_{\mu\beta}\pi_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3}\pi_{\mu\nu}\pi_{\alpha\beta}, \quad (3.55)$$

onde $\pi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / \square_{(4)}$. Atuando com o projetor $P_{\mu\nu\alpha\beta}$ na equação (3.52), obtemos a seguinte equação para $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$(\partial_y^2 + 4A'\partial_y - e^{-2A}\square_{(4)})\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.56)$$

Realizando a decomposição $\bar{h}_{\mu\nu} = e^{ik_\alpha x^\alpha} e^{-3A/2} \psi_{\mu\nu}$ e a mudança de variável $z = \int dy e^{-A(y)}$, obtemos

$$-\frac{d^2 \psi_{\mu\nu}}{dz^2} + \left[\frac{9}{4} \left(\frac{dA}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dz^2} \right] \psi_{\mu\nu} = k^2 \psi_{\mu\nu}, \quad (3.57)$$

onde $k^2 = k_\alpha k^\alpha$. Observe que a equação acima é típica da mecânica quântica, com potencial efetivo dado por

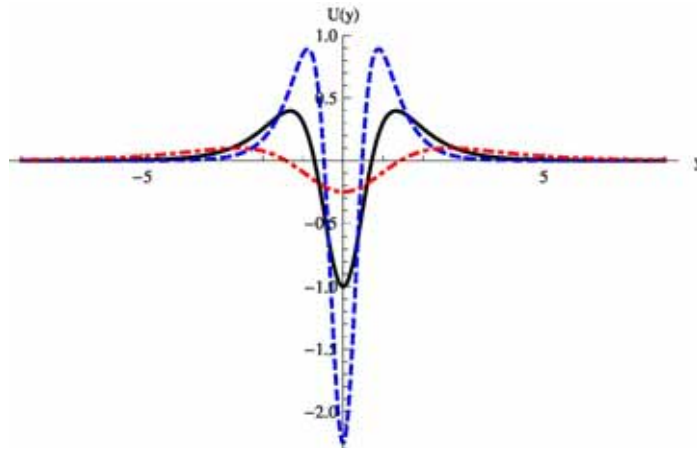
$$U_{eff}(z) = \frac{9}{4} \left(\frac{dA}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dz^2}. \quad (3.58)$$

Em termos da variável antiga, podemos escrever

$$U_{eff}(y) = \frac{3}{2} e^{2A} \left[\frac{5}{2} \left(\frac{dA}{dy} \right)^2 + \frac{d^2 A}{dy^2} \right]. \quad (3.59)$$

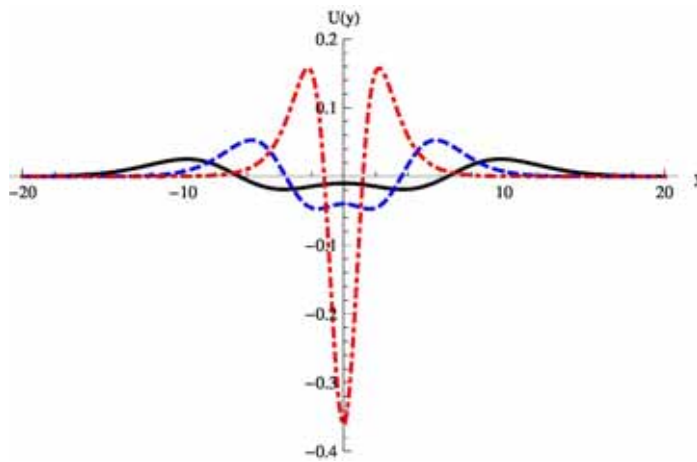
Nas figuras 3.17, 3.18, 3.19 e 3.20, plotamos os potenciais efetivos para os modelos de branas espessas estudados ao longo deste capítulo. Conforme podemos observar nas figuras abaixo, a manifestação do mecanismo de separação de branas no potencial efetivo se dá pelo aparecimento de dois poços, em contraste com o potenciais do tipo poço simples nos casos em que não ocorre a separação de branas.

Figura 3.17: Potencial efetivo para o modelo de Gremm. Utilizamos $\lambda = 1$ - linha preta (sólida); $\lambda = 1,5$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,5$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada).



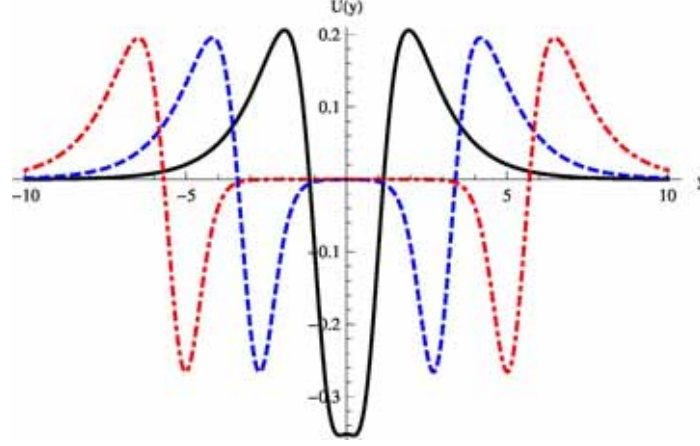
Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 3.18: Potencial efetivo para o caso se soluções Bloch. Utilizamos $\lambda = 0,05$ - linha preta (sólida); $\lambda = 0,1$ - linha azul (tracejada); $\lambda = 0,3$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



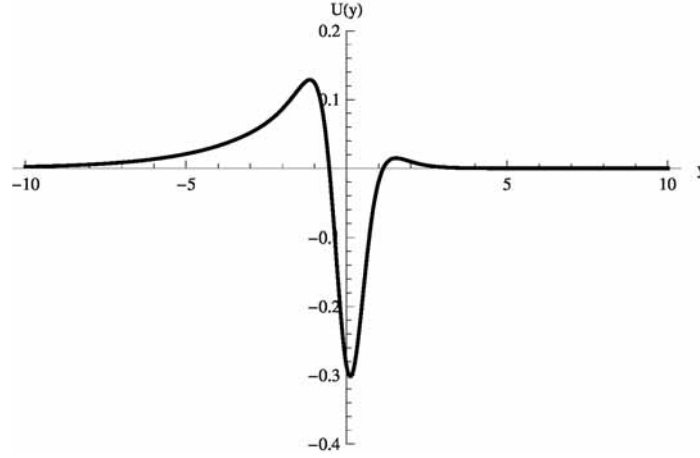
Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 3.19: Potencial efetivo para o caso se soluções dengeneradas. Utilizamos $c_0 = -3$ - linha preta (sólida); $c_0 = -(2 + 10^{-4})$ - linha azul (tracejada); $c_0 = -(2 + 10^{-8})$ - linha vermelha (pontilhada-tracejada). Nas três situações utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 3.20: Potencial efetivo para o caso das soluções críticas ($\lambda = 1$ e $c_0 = -2a$). Utilizamos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Embora não pretendamos fazer um tratamento completo das equações (3.56) e (3.57), podemos fazer alguns comentários a respeito dessas equações sem a necessidade da particularização de um dado potencial $V(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$. Primeiramente, notemos que a expressão

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(0)}(x) = N_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.60)$$

com $k^2 = 0$ e sendo $N_{\mu\nu}$ uma constante, satisfaz a Eq. (3.56). A solução acima é chamada de modo zero. De fato, como a solução acima satisfaz $\square_{(4)} \bar{h}_{\mu\nu}^{(0)}(x) = 0$, podemos inferir que o modo zero ($k^2 = 0$) descreve o graviton quadridimensional.

Em segundo lugar, mostramos que as flutuações da métrica, pelo menos no setor de

traço nulo e transverso, não admitem modos taquiônicos. Ou seja, devemos verificar que $k^2 \geq 0$. A fim de verificarmos a afirmação acima, notemos que a equação (3.57) pode ser reescrita na forma supersimétrica

$$\mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q} \psi_{\mu\nu} = k^2 \psi_{\mu\nu}, \quad (3.61)$$

onde definimos

$$\mathcal{Q} = \frac{d}{dz} - \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}^\dagger = -\frac{d}{dz} - \frac{3}{2} \frac{dA}{dz}. \quad (3.62)$$

Como o operador $\mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q}$ é positivo definido, a Eq. (3.61) garante $k^2 \geq 0$, e portanto, não existem modos taquiônicos ($k^2 < 0$) no setor de traço nulo e transverso das flutuações da métrica. Observemos também que a solução de modo zero pode ser reobtida a partir da Eq. (3.61). Nesse caso, é fácil concluir que $\psi_{\mu\nu}^{(0)}$, tal que $\mathcal{Q} \psi_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, satisfaz a Eq. (3.61) com $k^2 = 0$. Portanto, para obtermos a solução de modo zero basta resolver a seguinte equação de primeira ordem

$$\mathcal{Q} \psi_{\mu\nu}^{(0)} = \left(\frac{d}{dz} - \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \psi_{\mu\nu}^{(0)} = 0. \quad (3.63)$$

A equação acima pode ser facilmente integrada, resultando na seguinte expressão

$$\psi_{\mu\nu}^{(0)} = N_{\mu\nu} e^{3A/2}. \quad (3.64)$$

Lembrando que havíamos definido $\bar{h}_{\mu\nu} = e^{ik_\alpha x^\alpha} e^{-3A/2} \psi_{\mu\nu}$, obtemos novamente a seguinte expressão

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(0)}(x) = N_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (3.65)$$

4 BRANAS BLOCH ASSIMÉTRICAS E O PROBLEMA DA HIERARQUIA

A motivação inicial para a introdução dos modelos de branas em espaços *warped* deve-se à possível solução do problema de hierarquia (RANDALL; SUNDRUM, 1999b). Desde então, um grande número de modelos foram propostos como generalizações em uma série de aspectos. No entanto, conforme destacado no início do capítulo anterior, algumas consequências problemáticas surgem da localização de campos do modelo padrão nos cenários do tipo RS. Contudo, esses problemas podem ser contornados no contexto de cenários de branas espessas. Nesse programa de pesquisa, os potenciais usualmente empregados engendram uma estrutura simétrica em torno da brana (DZHUNUSHALIEV; FOLOMEEV; MINAMITSUJI, 2010), mesmo no caso em que ocorre a separação de brana (DUTRA; FARIA JR; HOTT, 2008; CHUMBES; HOTT, 2010; YANG et al., 2012). Como consequência dessa simetria, o *warp factor* resultante não é muito útil para se atacar o problema de hierarquia, uma vez que as escalas de massa em ambas as branas estarão revestidas pelo mesmo fator. Apesar da importância do problema de hierarquia, um número muito pequeno de modelos tem atentado para esse ponto. Uma abordagem recente considera uma brana espessa como plano de fundo e uma brana fina localizada à uma distância finita da parede de domínio gerada pelo campo escalar (BARBOSA-CENDEJAS et al., 2014). Nesse cenário, o problema de hierarquia pode ser revisitado, no entanto, essa abordagem parece insatisfatória pela necessidade de uma brana fina. Recentemente, uma outra proposta de solução do problema de hierarquia no contexto de branas espessas foi sugerida na referência (AHMED; GRZADKOWSKI, 2013). Nesse trabalho, os autores propuseram uma solução de campo escalar do tipo *kink* duplo e assimétrico, e mostraram que a estrutura de brana espessa que emerge nesse cenário pode ser adequada para atacar o problema da hierarquia.

Neste capítulo, apresentamos um modelo que pode servir como alternativa para a solução do problema de hierarquia em cenários de branas espessas. Utilizamos um modelo de dois campos escalares interagentes para gerar a estrutura brana-*bulk*, sendo que um desses campos escalares admite solução do tipo *kink* duplo e assimétrico. A assimetria no campo escalar engendra uma estrutura assimétrica no *warp factor*, o que torna o cenário obtido adequado para o tratamento do problema de hierarquia.

4.1 NOVO MODELO DE BRANAS ESPESSAS

Neste capítulo trabalhamos com a seguinte proposta de superpotencial (DUTRA; BRITO; SILVA, 2014; BRITO; DUTRA, 2014)

$$W(\Phi_1, \Phi_2) = a^2\Phi_1 - \frac{1}{3}\Phi_1^3 - \lambda\Phi_1\Phi_2^2 - \frac{\beta}{3}\Phi_2^3, \quad (4.1)$$

onde λ , β e a são parâmetros reais, com a restrição $a > 0$. Observe que o superpotencial acima é uma extensão do modelo BNRT (BAZEIA et al., 1997), estudado no capítulo anterior para gerar o cenário de branas Bloch. Note que o modelo BNRT pode ser recuperado simplesmente fazendo $\beta = 0$. Substituindo a Eq. (4.1) em (3.6), obtemos a seguinte expressão para o potencial

$$\begin{aligned} V(\Phi_1, \Phi_2) = & -\frac{4}{27}\Phi_1^6 - \frac{4\beta^2}{27}\Phi_2^6 - \frac{4\lambda^2}{3}\Phi_1^2\Phi_2^4 - \frac{8\lambda}{9}\Phi_1^4\Phi_2^2 - \\ & -\frac{8\beta}{27}\Phi_1^3\Phi_2^3 - \frac{8\lambda\beta}{9}\Phi_1\Phi_2^5 + \left(\frac{1}{2} + \frac{8a^2}{9}\right)\Phi_1^4 + \\ & + \left(1 + \frac{8a^2}{9} + 2\lambda\right)\lambda\Phi_1^2\Phi_2^2 + \left(2\lambda + \frac{4a^2}{9}\right)\beta\Phi_1\Phi_2^3 - \\ & - \left(1 + \frac{4a^2}{3}\right)a^2\Phi_1^2 - \lambda a^2\Phi_2^2 - \frac{a^4}{2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como podemos ver na expressão acima, o potencial obtido não é muito usual em teoria de campos (embora seja polinomial). Talvez a melhor forma de justificar a sua introdução seja *a posteriori*, olhando para as suas implicações físicas. Como vemos abaixo, o potencial acima leva a uma possível solução para o problema da hierarquia, o que justifica o seu emprego.

Substituindo o superpotencial acima nas equações de primeira ordem para os campos escalares, Eq. (3.8), obtemos

$$\frac{d\Phi_1}{dy} = a^2 - \Phi_1^2 - \lambda\Phi_2^2 \quad \text{e} \quad \frac{d\Phi_2}{dy} = -2\Phi_1\Phi_2 - \beta\Phi_2^2. \quad (4.3)$$

Desse ponto em diante vamos considerar somente o caso $\lambda = 1$, para o qual podemos obter soluções analíticas para o sistema de equações de primeira ordem. Combinando as equações de primeira ordem acima, obtemos a seguinte equação de órbita

$$\frac{d\Phi_1}{d\Phi_2} = \frac{\Phi_1^2 - a^2 + \Phi_2^2}{2\Phi_1\Phi_2 + \beta\Phi_2^2}. \quad (4.4)$$

Apesar da não linearidade da equação acima, podemos resolvê-la de forma analítica. De fato, a equação (4.4) pode ser rearranjada da seguinte forma

$$(2\Phi_1\Phi_2 + \beta\Phi_2^2)\frac{d\Phi_1}{d\Phi_2} = \Phi_2^2 + \Phi_1^2 - a^2. \quad (4.5)$$

Multiplicando a equação acima pelo fator integrante Φ_2^{-2} , somos levados à

$$\frac{2\Phi_1}{\Phi_2} \frac{d\Phi_1}{d\Phi_2} + \beta \frac{d\Phi_1}{d\Phi_2} = 1 + \frac{(\Phi_1^2 - a^2)}{\Phi_2^2}. \quad (4.6)$$

Após algumas manipulações, a Eq. (4.6) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\Phi_2} \left[\left(\frac{\Phi_1^2 - a^2}{\Phi_2} \right) + \beta\Phi_1 \right] = 1, \quad (4.7)$$

tal que a sua integração fornece

$$\Phi_1^2 - a^2 + \beta\Phi_1\Phi_2 = \Phi_2^2 + c_0\Phi_2, \quad (4.8)$$

onde c_0 é uma constante de integração. Resolvendo a equação acima para Φ_2 em termos de Φ_1 , obtemos a seguinte expressão

$$\Phi_2(\Phi_1) = \frac{\beta\Phi_1 + ab\sqrt{\beta^2 + 4} - f(\Phi_1)}{2}, \quad (4.9)$$

onde a reparametrização $c_0 = -b\sqrt{\beta^2 + 4}$ foi utilizada e definimos ainda

$$f(\Phi_1) = \sqrt{(\Phi_1\sqrt{\beta^2 + 4} + ba\beta)^2 + 4a^2(b^2 - 1)}. \quad (4.10)$$

Na equação (4.9), a raiz positiva foi descartada, pois esta leva a soluções com densidade de energia não localizada. Uma análise cuidadosa nos revela que a condição $b^2 > 1$ deve ser satisfeita para garantir a existência de soluções do tipo *kink*. Substituindo a Eq. (4.9) na primeira equação em (4.3), obtemos

$$\frac{d\Phi_1}{dy} = \frac{1}{2} \{ (\beta\Phi_1 + ab\sqrt{\beta^2 + 4})f(\Phi_1) - [f(\Phi_1)]^2 \}. \quad (4.11)$$

A equação acima pode ser resolvida analiticamente, resultando na seguinte expressão

$$\Phi_1(y) = a\sqrt{\frac{b^2 - 1}{\beta^2 + 4}} \left[\frac{2 \tanh[a(y - y_0)] + 2b}{\sqrt{b^2 - 1}(\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta)} - \frac{\sqrt{b^2 - 1}(\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta)}{2 \tanh[a(y - y_0)] + 2b} - \frac{\beta b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right], \quad (4.12)$$

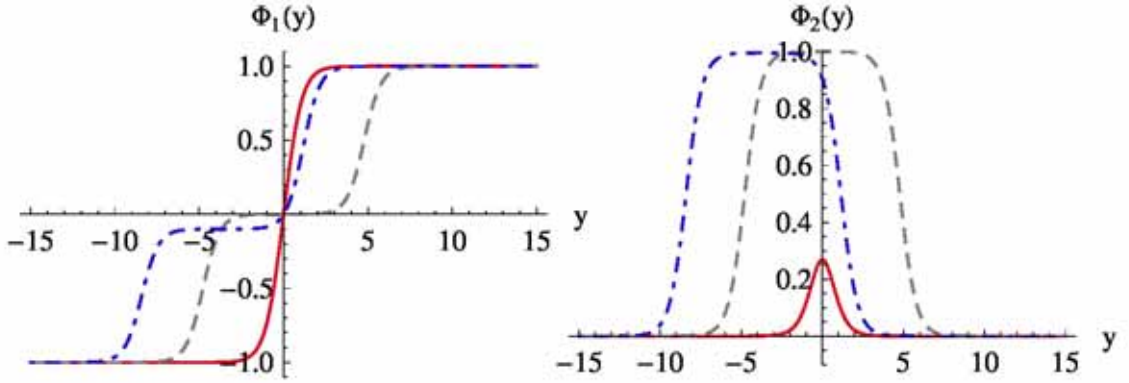
onde y_0 é uma constante de integração associada com a invariância translacional. Por substituição direta dessa última na Eq. (4.9), obtemos uma expressão explícita para

$\Phi_2(y)$

$$\Phi_2(y) = a \sqrt{\frac{b^2 - 1}{\beta^2 + 4}} \left[\frac{2b}{\sqrt{b^2 - 1}} - \frac{\tanh[a(y - y_0)] + b}{\sqrt{b^2 - 1}} - \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\tanh[a(y - y_0)] + b} \right]. \quad (4.13)$$

É interessante observar que o comportamento das soluções $\Phi_1(y)$ e $\Phi_2(y)$ é bastante sensível à constante b e ao parâmetro β . Como podemos ver na Fig. 4.1, a constante b controla o comportamento do tipo *kink* duplo na solução $\Phi_1(y)$ e é também responsável pelo platô na solução do tipo *lump* correspondente à $\Phi_2(y)$. Outra característica interessante ocorre quando a constante b assume o valor crítico $b = 1$. Nesse caso os dois campos possuem um comportamento do tipo *kink* e o cenário obtido é similar àquele discutido na seção 3.3.3. Por outro lado, na Fig. 4.1 podemos observar que o parâmetro β é responsável pela quebra de simetria nas soluções e essa característica é crucial para a análise do problema da hierarquia.

Figura 4.1: Configurações dos campos $\Phi_1(y)$ (esquerda) e $\Phi_2(y)$ (direita). Utilizamos $b = 2$ e $\beta = 0$ - linha vermelha (sólida); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0$ - linha cinza (tracejada); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0.2$ - linha azul (pontilhada-tracejada). Nas três situações fizemos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

De acordo com a interpretação discutida no capítulo anterior, a configuração do tipo duplo *kink* engendra a formação de duas branas, correspondendo a cada parede de domínio. Supondo que os núcleos das branas estejam localizados nos pontos de maior variação dos campos escalares, não é difícil concluir que estes estão localizados nos pontos em que $d\Phi_1/dy$ toma o seu valor máximo. Vamos designar esses pontos por y_1 e y_2 .

Com relação à equação de primeira ordem que descreve $A(y)$, *i.e.* Eq. (3.7), temos

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2}{3}W(\Phi_1, \Phi_2) = -\frac{2}{3} \left[a^2 \Phi_1 - \frac{1}{3} \Phi_1^3 - \Phi_1 \Phi_2^2 - \frac{\beta}{3} \Phi_2^3 \right]. \quad (4.14)$$

A fim de resolver a equação acima, consideremos as seguintes manipulações

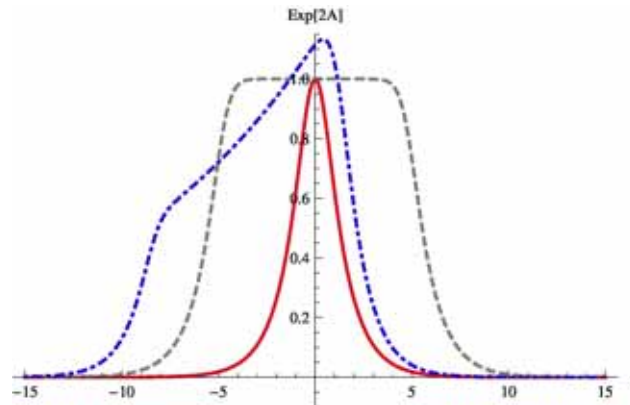
$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dy} &= -\frac{2}{9}[\Phi_1(a^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2) + \Phi_2(-2\Phi_1\Phi_2 - \beta\Phi_2^2) + 2a^2\Phi_1] \\
&= -\frac{2}{9}[\Phi_1 W_{\Phi_1} + \Phi_2 W_{\Phi_2} + 2a^2\Phi_1] \\
&= -\frac{2}{9}\left[\Phi_1 \frac{d\Phi_1}{dy} + \Phi_2 \frac{d\Phi_2}{dy} + 2a^2\Phi_1\right] \\
&= -\frac{1}{9} \frac{d}{dy}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{4a^2\Phi_1}{9}.
\end{aligned}$$

Integrando a equação com em relação à y , obtemos

$$A(y) = -\frac{1}{9}[\Phi_1(y)^2 + \Phi_2(y)^2] - \frac{4a^2}{9} \int dy \Phi_1(y) + C, \quad (4.15)$$

onde C é uma constante de integração. Por substituição direta das soluções $\Phi_1(y)$ e $\Phi_2(y)$ na equação acima, é possível obter uma expressão analítica para $A(y)$. No entanto, vamos omitir essa expressão aqui por economia de espaço. Finalmente, o *warp factor* pode ser obtido pela exponenciação do resultado acima, isto é, $e^{2A(y)}$. Podemos fixar a constante de integração C de modo a garantir que $A(y_1) = 0$ (ou seja $e^{2A(y_1)} = 1$), onde y_1 representa o ponto correspondente ao núcleo de uma das branas. Na figura 4.2, plotamos o gráfico correspondente ao *warp factor*. O comportamento assimétrico que aparece na figura 4.2 torna esse tipo de cenário adequado para atacar o problema de hierarquia.

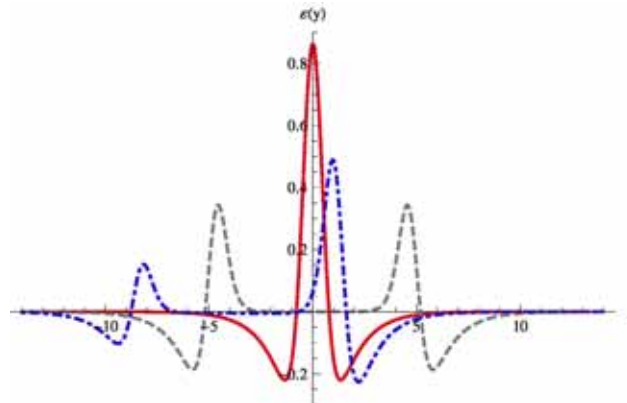
Figura 4.2: Gráfico correspondente ao *warp factor*. Utilizamos $b = 2$ e $\beta = 0$ - linha vermelha (sólida); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0$ - linha cinza (tracejada); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0.2$ - linha azul (pontilhada-tracejada). Nas três situações fizemos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

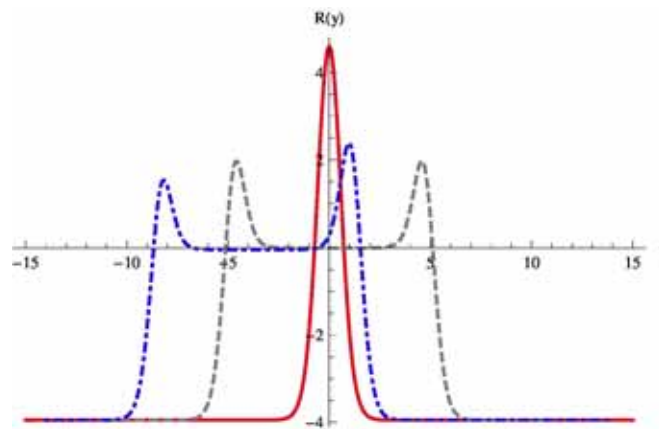
Nas figuras 4.3 e 4.4, plotamos os gráficos correspondentes à densidade de energia e ao escalar de curvatura, respectivamente. Nessas figuras, podemos ver como os parâmetros β , a e b afetam a distribuição de energia e a geometria do bulk.

Figura 4.3: Densidade de energia em função da dimensão extra. Utilizamos $b = 2$ e $\beta = 0$ - linha vermelha (sólida); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0$ - linha cinza (tracejada); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0.2$ - linha azul (pontilhada-tracejada). Nas três situações fizemos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

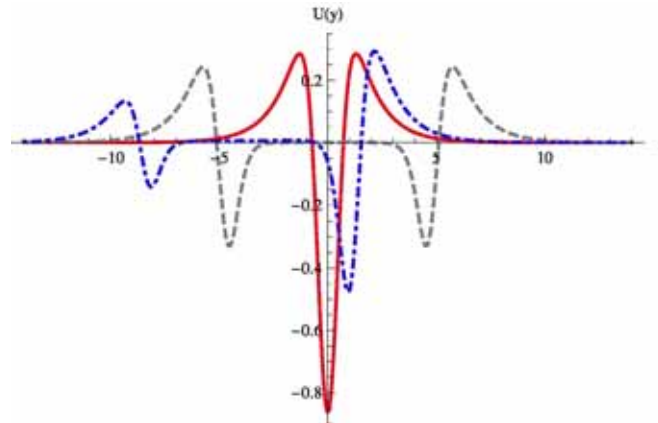
Figura 4.4: Escalar de curvatura. Utilizamos $b = 2$ e $\beta = 0$ - linha vermelha (sólida); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0$ - linha cinza (tracejada); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0.2$ - linha azul (pontilhada-tracejada). Nas três situações fizemos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Por completeza, plotamos na Fig. 4.5 o gráfico correspondente ao potencial efetivo $U_{eff}(y)$, Eq. (3.59), para o modelo aqui apresentado. Note que a assimetria do *warp factor* induz um comportamento assimétrico no potencial efetivo.

Figura 4.5: Potencial efetivo para as flutuações da métrica. Utilizamos $b = 2$ e $\beta = 0$ - linha vermelha (sólida); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0$ - linha cinza (tracejada); $b = 1 + 10^{-8}$ e $\beta = 0.2$ - linha azul (pontilhada-tracejada). Nas três situações fizemos $a = 1$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

4.2 O PROBLEMA DE HIERARQUIA

Nesse ponto, vamos explorar uma consequência importante da assimetria do *warp factor* representado na Fig. 4.2. Em linhas gerais, essa assimetria pode ser utilizada para atacar o problema de hierarquia. Mas antes vamos esclarecer dois pontos acerca do quadro atual. Primeiro, o problema de hierarquia é usualmente analisado no contexto de branas finas (ao invés de espessas). No modelo aqui apresentado é concebível a introdução de um parâmetro adicional tal que, em um certo limite, o *warp factor* aqui obtido se aproxime do *warp factor* usualmente obtido no contexto de branas finas. No entanto, isso não é necessário para a nossa análise. Um ponto crucial é o seguinte, para cada hipersuperfície quadridimensional (y constante) nós obtemos um valor diferente para o *warp factor*. De fato, o *warp factor*, quando entendido como um parâmetro revestindo as massas das partículas elementares via mecanismo de Higgs, atua como um parâmetro variável com dependência da posição no bulk. Portanto, é possível investigar as consequências desse revestimento no núcleo das branas. Nessa linha, qualquer possível modificação nos observáveis devido à espessura da brana, se existir alguma, deve ser vinculada aos experimentos. Um segundo ponto digno de nota é o seguinte: devemos assumir a localização do campo de Higgs na brana. A questão da localização de campos está fora do contexto desse trabalho, no entanto sabemos que a localização de campos escalares pode ser efetuada por intermédio do *warp factor*, o qual engendra um campo gravitacional suficiente para aprisionar o campo escalar no núcleo da brana.

O tratamento do problema da hierarquia segue a análise usual, como fizemos no capítulo 2 desta monografia. Por completeza, vamos revisar algumas passagens gerais. Seja

a ação que descreve o campo de Higgs no núcleo da brana dada por

$$S \sim \int d^4x \sqrt{-G} \left(G^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - v_0^2)^2 \right). \quad (4.16)$$

Se a brana em questão é aquela localizada em $y = y_1$, lembrando que $e^{2A(y_1)} = 1$, então a ação acima se comporta como em Minkowski. No entanto, para a brana localizada em $y = y_2$, obtemos

$$S \sim \int d^4x e^{4A(y_2)} \left(e^{-2A(y_2)} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - v_0^2)^2 \right).$$

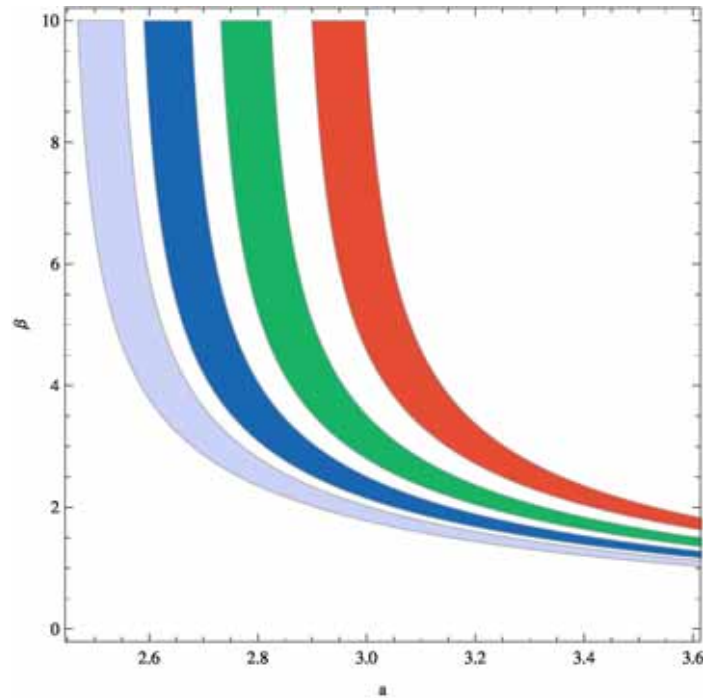
Após o redimensionamento do campo de Higgs dado por $H \rightarrow e^{-A(y_2)} H$, obtemos

$$S \sim \int d^4x \left(\eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - v^2)^2 \right), \quad (4.17)$$

onde $v^2 = e^{2A(y_2)} v_0^2$ é o parâmetro de massa revestido. Este resultado pode ser sumarizado da seguinte forma: qualquer parâmetro de massa medido por um observador na brana com núcleo em $y = y_2$ é revestido pelo fator $e^{2A(y_2)}$. Como o *warp factor* possui valores distintos para cada brana (veja Fig. 4.2), é possível associar esse amortecimento do *warp factor* com o *gap* entre as escalas Planck e TeV. Em outras palavras, se um observador na brana localizada em $y = y_1$ experimenta a escala de Planck, o observador em $y = y_2$ irá experimentar uma escala de energia reduzida pelo *warp factor*, sendo que o valor pode ser ajustado para a escala TeV. Devemos enfatizar mais uma vez que os possíveis efeitos da espessura da brana sobre os observáveis, tais como massas, devem ser investigados pelos experimentos em altas energias — no setor eletrofraco, por exemplo — fazendo os possíveis desvios da análise acima bastante pequenos.

Finalmente, para verificar que a análise acima é de fato adequada para atacar problema de hierarquia sem a necessidade de ajustes finos, na figura 4.6 plotamos algumas regiões no espaço dos parâmetros $a \times \beta$ onde o *warp factor* é adequado para o tratamento do problema da hierarquia, isto é $e^{A(y_2)} \sim 10^{-15}$. Na figura 4.6, podemos observar a existência de algumas regiões densas onde o *warp factor* pode ser utilizado para conectar a escala Planck à escala TeV ($v = 10^{-15} v_0$), excluindo a necessidade de ajustes finos.

Figura 4.6: Regiões de interesse no espaço dos parâmetros $a \times \beta$, onde o *warp factor* se mostra adequado para tratar do problema de hierarquia ($e^{A(y_2)} \sim 10^{-15}$). Cada região corresponde a um valor do parâmetro b . Da esquerda para a direita $b = 1 + 10^{-11}$; $b = 1 + 10^{-10}$; $b = 1 + 10^{-9}$; $b = 1 + 10^{-8}$.



Fonte: Figura gerada pelo autor.

5 NOVA CLASSE DE MODELOS DE BRANAS ESPESSAS

Nos capítulos 3 e 4, discutimos a necessidade da construção de cenários de branas espessas, trabalhamos na obtenção de um formalismo de primeira ordem para as equações diferenciais que descrevem esses cenários e finalmente apresentamos alguns exemplos específicos de modelos de branas espessas. No entanto, apesar de estarmos lidando com um formalismo de primeira ordem, as equações diferenciais envolvidas nesses modelos ainda são consideravelmente complicadas e nenhum padrão pode ser diretamente reconhecido a partir do superpotencial empregado. Nesse capítulo, apresentamos uma nova classe de superpotenciais que admitem uma simplificação considerável das equações diferenciais de primeira ordem, permitindo a modelagem de cenários de branas espessas bastante interessantes e que conduzem à soluções analíticas simples.

5.1 NOVA CLASSE DE SUPERPOTENCIAIS

No capítulo 3 vimos que os cenários de branas espessas, descritos pela ação (3.1), podem ser estudados via formalismo de primeira ordem nos casos em que o potencial de interação $V(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ pode ser expresso em termos de um superpotencial $W(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ conforme a equação (3.6). A saber, as equações diferenciais de primeira ordem são dadas por

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2}{3}W(\Phi_1, \dots, \Phi_n), \quad (5.1)$$

e

$$\frac{d\Phi_1}{dy} = \frac{\partial W(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial \Phi_1}, \quad \frac{d\Phi_2}{dy} = \frac{\partial W(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial \Phi_2}, \quad \dots, \quad \frac{d\Phi_n}{dy} = \frac{\partial W(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial \Phi_n}. \quad (5.2)$$

Neste ponto, particularizamos a classe de superpotenciais que serão utilizados ao longo deste capítulo. Considerando que o superpotencial $W(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ pode ser fatorado como uma soma de termos $W_i(\Phi_i)$'s, onde cada termo W_i depende somente do campo escalar Φ_i , *i.e.*

$$W(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = W_1(\Phi_1) + W_2(\Phi_2) + \dots + W_n(\Phi_n) = \sum_{i=1}^n W_i(\Phi_i). \quad (5.3)$$

Apesar da equação acima definir uma classe particular de superpotenciais, essa ainda pode ser considerada bastante abrangente e, como ficará explícito nas próximas páginas, além de permitir uma simplificação considerável nos cálculos, essa classe de superpotenciais pode gerar cenários de branas espessas interessantes. Note que $\partial W_i(\Phi_i)/\partial \Phi_j = 0$ para

$i \neq j$ e, portanto, o sistema de equações (5.2) se desacopla

$$\frac{d\Phi_1}{dy} = \frac{\partial W_1(\Phi_1)}{\partial \Phi_1}, \quad \frac{d\Phi_2}{dy} = \frac{\partial W_2(\Phi_2)}{\partial \Phi_2}, \quad \dots, \quad \frac{d\Phi_n}{dy} = \frac{\partial W_n(\Phi_n)}{\partial \Phi_n}. \quad (5.4)$$

Como as equações acima são agora independentes, podemos integrá-las de modo a obtermos

$$\int_{\Phi_i(y_i)}^{\Phi_i(y)} \frac{d\Phi_i}{\partial W_i} = y - y_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.5)$$

onde denotamos $\partial W_i \equiv \partial W_i / \partial \Phi_i$. A constante de integração y_i surge como uma consequência da invariância translacional presente no modelo e, como pode ser melhor visualizado com um exemplo concreto, a sua escolha está associada com a posição da brana na dimensão extra. Agora, observemos que a solução da (5.1) pode ser obtida de forma bastante simples para os superpotenciais pertencentes à classe definida pela equação (5.3). Seja $\{A_1(y), A_2(y), \dots, A_n(y)\}$ um conjunto de soluções supostamente conhecidas do seguinte conjunto de equações

$$\frac{dA_i}{dy} = -\frac{2}{3}W_i(\Phi_i), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.6)$$

Então, podemos escrever a solução da equação (5.1) como sendo a soma das soluções $A_i(y)$'s, ou seja

$$A(y) = \sum_{i=1}^n A_i(y) = A_1(y) + A_2(y) + \dots + A_n(y). \quad (5.7)$$

A verificação da afirmação acima é direta, a saber

$$\frac{dA}{dy} = \frac{d}{dy} \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{dA_i}{dy} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{3}W_i(\Phi_i) \right) = -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n W_i(\Phi_i) = -\frac{2}{3}W(\Phi_1, \dots, \Phi_n). \quad (5.8)$$

Utilizando a equação (5.7), podemos escrever a seguinte expressão para o *warp factor*

$$e^{2A(y)} = \prod_{i=1}^n e^{2A_i(y)}. \quad (5.9)$$

Após essas considerações gerais, nas próximas duas seções estudamos dois exemplos explícitos de superpotenciais.

5.2 MODELO I: SUPERPOTENCIAIS POLINOMIAIS

Nesta seção vamos considerar um modelo descrito pelo seguinte superpotencial polinomial

$$W(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \lambda_1 \left(\Phi_1 - \frac{\Phi_1^3}{3} \right) + \lambda_2 \left(\Phi_2 - \frac{\Phi_2^3}{3} \right) + \dots + \lambda_n \left(\Phi_n - \frac{\Phi_n^3}{3} \right), \quad (5.10)$$

ou seja, estamos considerando que cada termo $W_i(\Phi_i)$ do superpotencial seja dado por

$$W_i(\Phi_i) = \lambda_i \left(\Phi_i - \frac{\Phi_i^3}{3} \right), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.11)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (5.4), obtemos

$$\frac{d\Phi_i}{dy} = \lambda_i(1 - \Phi_i^2), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.12)$$

As soluções das equações acima são as paredes de domínio usuais do modelo $\lambda\phi^4$, as quais podem ser escritas da seguinte forma

$$\Phi_i(y) = \tanh[\lambda_i(y - y_i)], \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.13)$$

onde y_i é uma constante de integração associada com a invariância translacional do modelo e representa o centro da parede de domínio. Combinando as equações (5.13), (5.11) e (5.6), obtemos

$$\frac{dA_i}{dy} = -\frac{2}{3} \left(\tanh(\lambda_i \xi_i) - \frac{\tanh^3(\lambda_i \xi_i)}{3} \right), \quad (5.14)$$

onde definimos $\xi_i = y - y_i$. Integrando a equação acima com respeito à variável y , chegamos ao seguinte resultado

$$A_i(y) = C_i - \frac{1}{9} \left(\tanh^2(\lambda_i \xi_i) + 2 - 4 \ln[\text{sech}(\lambda_i \xi_i)] \right), \quad (5.15)$$

onde C_i é uma constante de integração. Somando sobre índice i , obtemos

$$A(y) = C - \frac{1}{9} \left\{ 2n + \sum_{i=1}^n \tanh^2(\lambda_i \xi_i) - 4 \ln \left(\prod_{i=1}^n \text{sech}(\lambda_i \xi_i) \right) \right\}, \quad (5.16)$$

onde foi definido $C = \sum_i C_i$.

A fim de fixar a constante de integração C , vamos impor a seguinte condição $A(\tilde{y}) = 0$, sendo $\tilde{y}$ definido como o valor médio das coordenadas dos centros das paredes de domínio, isto é

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}, \quad (5.17)$$

com isso, obtemos o seguinte resultado

$$C = \frac{1}{9} \left\{ 2n + \sum_{i=1}^n \tanh^2(\lambda_i \tilde{\xi}_i) - 4 \ln \left(\prod_{i=1}^n \operatorname{sech}(\lambda_i \tilde{\xi}_i) \right) \right\}, \quad (5.18)$$

sendo $\tilde{\xi}_i = \tilde{y} - y_i$. Substituindo o resultado acima na Eq. (5.16), chegamos na seguinte expressão para $A(y)$

$$A(y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^n \left[\tanh^2(\lambda_i \tilde{\xi}_i) - \tanh^2(\lambda_i \xi_i) \right] + \frac{4}{9} \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{\operatorname{sech}(\lambda_i \tilde{\xi}_i)}{\operatorname{sech}(\lambda_i \xi_i)} \right). \quad (5.19)$$

Por fim, o *warp factor* pode ser escrito como

$$e^{2A(y)} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\operatorname{sech}(\lambda_i \tilde{\xi}_i)}{\operatorname{sech}(\lambda_i \xi_i)} \right)^{8/9} \times \prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{2}{9} \left[\tanh^2(\lambda_i \tilde{\xi}_i) - \tanh^2(\lambda_i \xi_i) \right] \right). \quad (5.20)$$

Tendo estabelecido um modelo específico, vamos agora considerar alguns casos particulares, a saber $n = 2$ e $n = 3$, a fim de melhor analisar os resultados obtidos nessa seção.

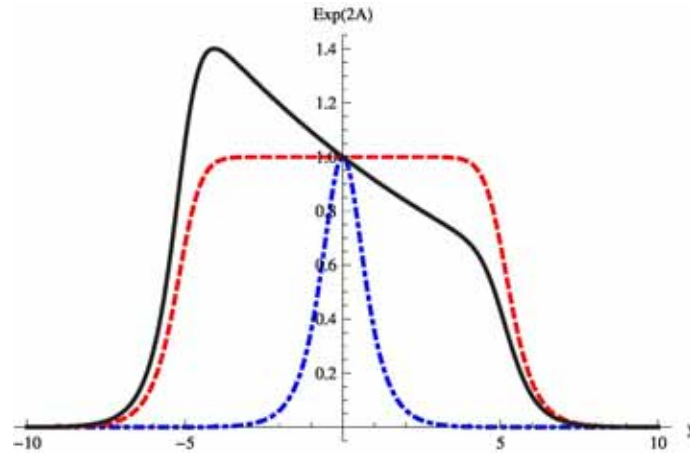
5.2.1 Caso $n = 2$

Tomando $n = 2$ na Eq. (5.20), podemos reescrever a expressão para o *warp factor* da seguinte forma

$$e^{2A(y)} = \left(\frac{\operatorname{sech}(\lambda_1 \tilde{\xi}_1) \operatorname{sech}(\lambda_2 \tilde{\xi}_2)}{\operatorname{sech}(\lambda_1 \xi_1) \operatorname{sech}(\lambda_2 \xi_2)} \right)^{8/9} \times \exp \left(\frac{2}{9} \left[\tanh^2(\lambda_1 \tilde{\xi}_1) + \tanh^2(\lambda_2 \tilde{\xi}_2) - \tanh^2(\lambda_1 \xi_1) - \tanh^2(\lambda_2 \xi_2) \right] \right). \quad (5.21)$$

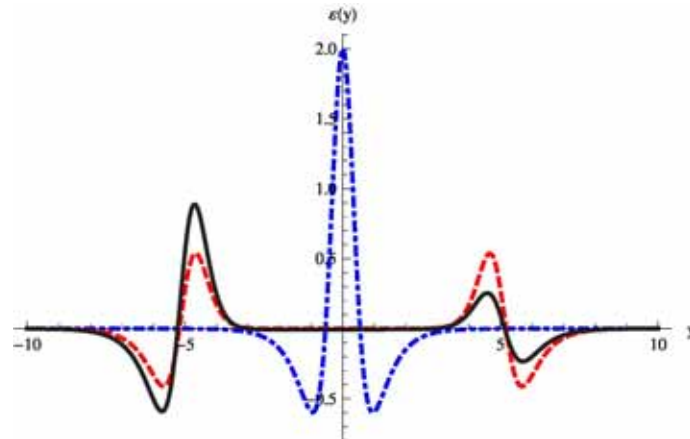
Na Fig. 5.1 plotamos o *warp factor* para três valores diferentes dos parâmetros y_1 , y_2 , λ_1 e λ_2 . Note que y_1 e y_2 são responsáveis pelo mecanismo de separação de branas, assim como ocorre com as constantes de integração c_0 e b para as soluções branas Bloch (seção 3.3) e branas Bloch assimétricas (capítulo 4), respectivamente. Por outro lado, λ_1 e λ_2 controlam a simetria do cenário resultante, assim como o parâmetro β o faz para o caso das branas Bloch assimétricas. Nas figuras 5.2 e 5.3 plotamos, respectivamente, os gráficos da densidade de energia e do escalar de curvatura associados com a configuração obtida.

Figura 5.1: *Warp factor* - Modelo I, caso $n = 2$. Utilizamos $y_1 = y_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha pontilhada-tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$, $\lambda_1 = 0.9$ e $\lambda_2 = 1$ (linha cheia).



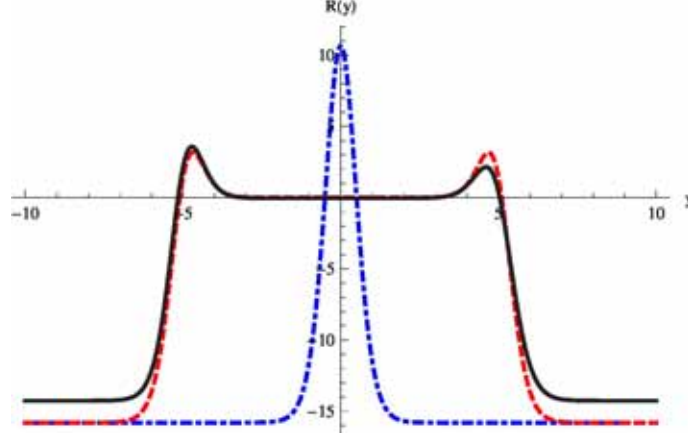
Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.2: Densidade de energia - Modelo I, caso $n = 2$. Utilizamos $y_1 = y_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha pontilhada-tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$, $\lambda_1 = 0.9$ e $\lambda_2 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.3: Escalar de curvatura - Modelo I, caso $n = 2$. Utilizamos $y_1 = y_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha pontilhada-tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$, $\lambda_1 = 0.9$ e $\lambda_2 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Os gráficos correspondentes às linhas pontilhadas-tracejadas nas figuras acima mostram a formação de uma brana espessa em um cenário simétrico. As linhas tracejadas também correspondem à formação de cenários simétricos, mas nesse caso as figuras 5.2 e 5.3 mostram que a melhor interpretação deve ser feita em termos de duas branas, cujos núcleos encontram-se localizados em y_1 e y_2 . Por fim, conforme podemos observar na Fig. 5.1, o *warp factor* correspondente à linha cheia nos indica a possibilidade de utilizar este modelo para atacar o problema de hierarquia. Nesse sentido, os argumentos apresentados na seção 4.2 podem ser reproduzidos aqui.

5.2.2 Caso $n = 3$

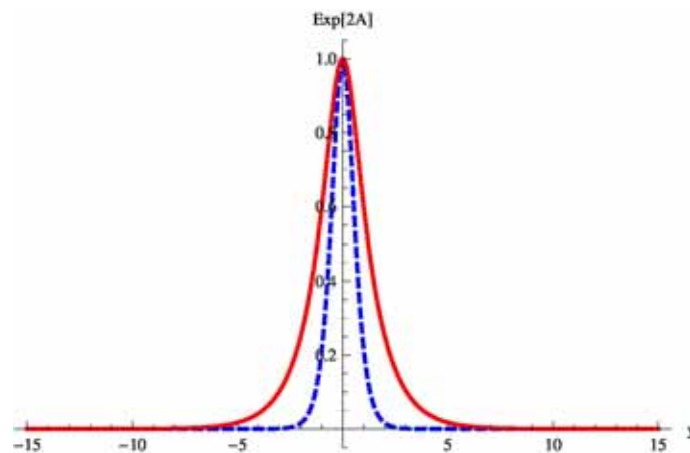
Tomemos agora $n = 3$ na Eq. (5.20), nesse caso o *warp factor* pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 e^{2A(y)} &= \left(\frac{\text{sech}(\lambda_1 \tilde{\xi}_1) \text{sech}(\lambda_2 \tilde{\xi}_2) \text{sech}(\lambda_3 \tilde{\xi}_3)}{\text{sech}(\lambda_1 \xi_1) \text{sech}(\lambda_2 \xi_2) \text{sech}(\lambda_3 \xi_3)} \right)^{8/9} \\
 &\times \exp \left(\frac{2}{9} \left[\tanh^2(\lambda_1 \tilde{\xi}_1) + \tanh^2(\lambda_2 \tilde{\xi}_2) + \tanh^2(\lambda_3 \tilde{\xi}_3) \right] \right) \\
 &\times \exp \left(-\frac{2}{9} \left[\tanh^2(\lambda_1 \xi_1) + \tanh^2(\lambda_2 \xi_2) + \tanh^2(\lambda_3 \xi_3) \right] \right). \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Na Fig. 5.4, plotamos o *warp factor* para dois valores dos parâmetros envolvidos. As respectivas densidades de energia estão plotadas na figura 5.5. No entanto, as figuras 5.4 e 5.5 não tornam claro o mecanismo de separação de branas presente nesse contexto. Na

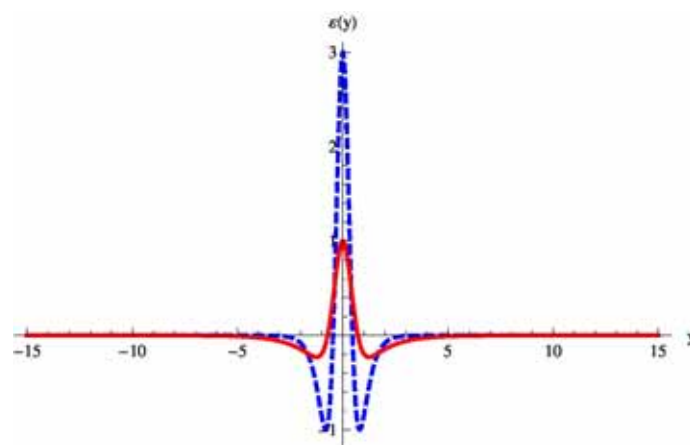
Fig. 5.6 plotamos o escalar de curvatura. Conforme podemos observar, a linha cheia na Fig. 5.6 suporta a interpretação da formação de três branas, correspondendo às regiões de transição no gráfico do escalar de curvatura, cujos núcleos encontram-se localizados nas hipersuperfícies $y = y_1$, $y = y_2$ e $y = y_3$. Este exemplo é interessante para observarmos a pluralidade de cenários que podem ser obtidos a partir da classe de superpotenciais definida pela equação (5.3), cujo tratamento analítico pode ser realizado de forma simples.

Figura 5.4: *Warp factor* - Modelo I, caso $n = 3$. Onde utilizamos $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_3 = 10$, $y_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha cheia).



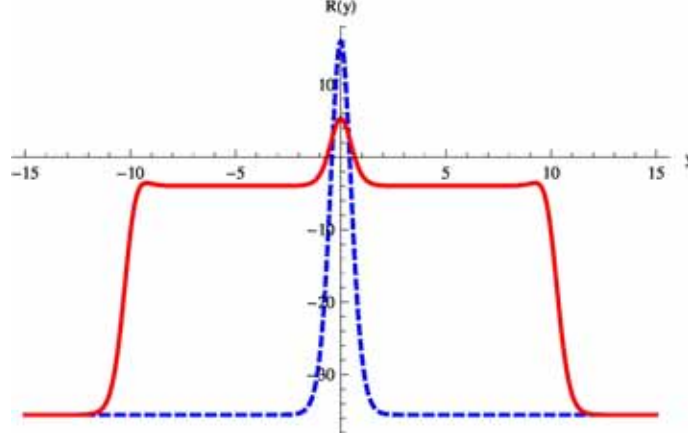
Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.5: Densidade de energia - Modelo I, caso $n = 3$. Onde utilizamos $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_3 = 10$, $y_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.6: Escalar de curvatura - Modelo I, caso $n = 3$. Onde utilizamos $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_3 = 10, y_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

5.3 MODELO II: EXTENSÃO DO MODELO DE GREMM

Considere, agora, um modelo de campos escalares gerado pelo seguinte superpotencial

$$W(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \lambda_1 \sin \Phi_1 + \lambda_2 \sin \Phi_2 + \dots + \lambda_n \sin \Phi_n, \quad (5.23)$$

isto é, cada termo $W_i(\Phi_i)$ pode ser escrito como

$$W_i(\Phi_i) = \lambda_i \sin \Phi_i. \quad (5.24)$$

Conforme podemos observar, este superpotencial pode ser entendido como uma extensão do modelo Gremm¹ para o caso de n campos escalares. As equações de primeira ordem para os campos escalares nos conduzem a

$$\frac{d\Phi_i}{dy} = \lambda_i \cos \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.25)$$

As soluções das equações acima são paredes de domínio, conhecidas na literatura como *kinks* de *sine*-Gordon, dadas por

$$\Phi_i(y) = \arctan(\sinh(\lambda_i \xi_i)), \quad \text{onde} \quad \xi_i = y - y_i. \quad (5.26)$$

¹O modelo de Gremm foi discutido detalhadamente na seção 3.2.

Substituindo a expressão acima na Eq. (5.24) e então substituindo o resultado na Eq. (5.6) obtemos, após uma simples integração, o seguinte resultado

$$A_i(y) = C_i + \frac{2}{3} \ln(\operatorname{sech}(\lambda_i \xi_i)), \quad (5.27)$$

onde C_i é uma constante de integração. Somando sobre os índice i , obtemos a seguinte expressão

$$A(y) = C + \frac{2}{3} \ln \left(\prod_{i=1}^n \operatorname{sech}(\lambda_i \xi_i) \right), \quad (5.28)$$

onde definimos $C = \sum_i C_i$. Novamente, a fim de fixar a constante C , vamos impor a condição $A(\tilde{y}) = 0$, onde definimos $\tilde{y} = \sum_{i=1}^n y_i/n$. Nesse caso, concluímos que

$$C = -\frac{2}{3} \ln \left(\prod_{i=1}^n \operatorname{sech}(\lambda_i \tilde{\xi}_i) \right), \quad \text{onde} \quad \tilde{\xi}_i = \tilde{y} - y_i. \quad (5.29)$$

Substituindo esse resultado na Eq. (5.28), obtemos a seguinte expressão para $A(y)$

$$A(y) = \frac{2}{3} \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{\operatorname{sech}(\lambda_i(y - y_i))}{\operatorname{sech}(\lambda_i(\tilde{y} - y_i))} \right). \quad (5.30)$$

Finalmente, o *warp factor* obtido para esse modelo pode ser escrito da seguinte forma

$$e^{2A(y)} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\operatorname{sech}(\lambda_i(y - y_i))}{\operatorname{sech}(\lambda_i(\tilde{y} - y_i))} \right)^{4/3}. \quad (5.31)$$

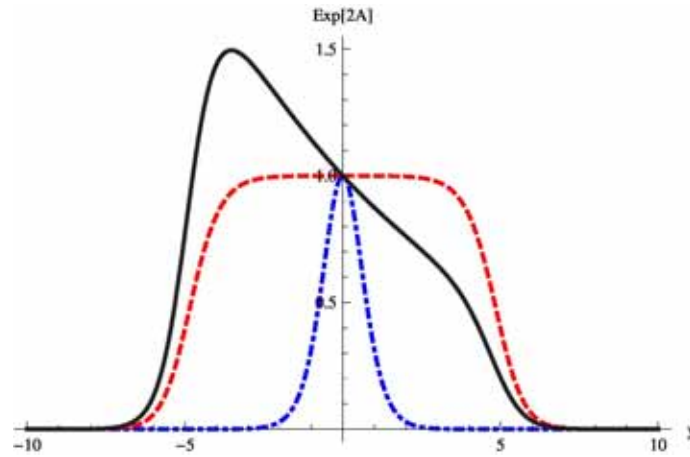
5.3.1 Caso $n = 2$

Em particular, no caso em que $n = 2$ somos conduzidos ao seguinte resultado para o *warp factor*

$$e^{2A(y)} = \left(\frac{\operatorname{sech}(\lambda_1(y - y_1)) \operatorname{sech}(\lambda_2(y - y_2))}{\operatorname{sech}(\lambda_1(\tilde{y} - y_1)) \operatorname{sech}(\lambda_2(\tilde{y} - y_2))} \right)^{4/3}. \quad (5.32)$$

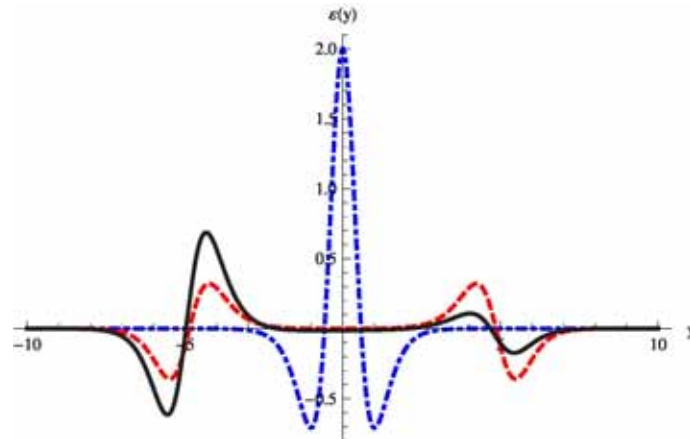
Conforme pode ser observado nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9, os resultados obtidos para esse segundo modelo, no caso em que $n = 2$, apresentam características bastante semelhantes aos resultados apresentados para o modelo I (também para o caso $n = 2$), portanto, a mesma discussão qualitativa apresentada naquele caso pode ser reproduzida aqui.

Figura 5.7: *Warp factor* - Modelo II, caso $n = 2$. Onde $y_1 = y_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada-pontilhada); $y_1 = -y_2 = 5$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$, $\lambda_1 = 0.9$ e $\lambda_2 = 1$ (linha cheia).



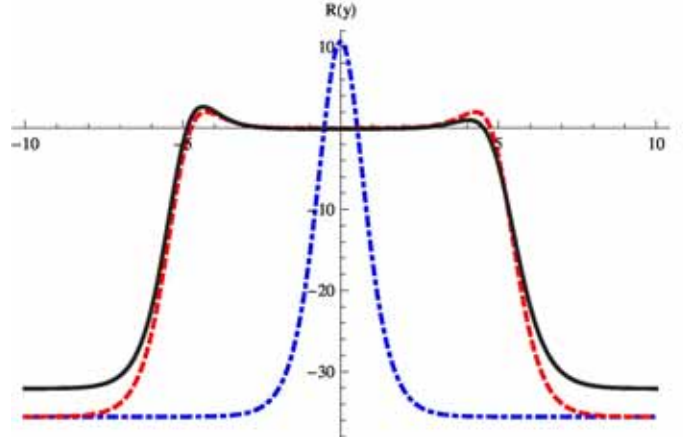
Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.8: Densidade de energia - Modelo II, caso $n = 2$. Onde $y_1 = y_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada-pontilhada); $y_1 = -y_2 = 5$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$, $\lambda_1 = 0.9$ e $\lambda_2 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.9: Escalar de Curvatura - Modelo II, caso $n = 2$. Onde $y_1 = y_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada-pontilhada); $y_1 = -y_2 = 5$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_2 = 5$, $\lambda_1 = 0.9$ e $\lambda_2 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

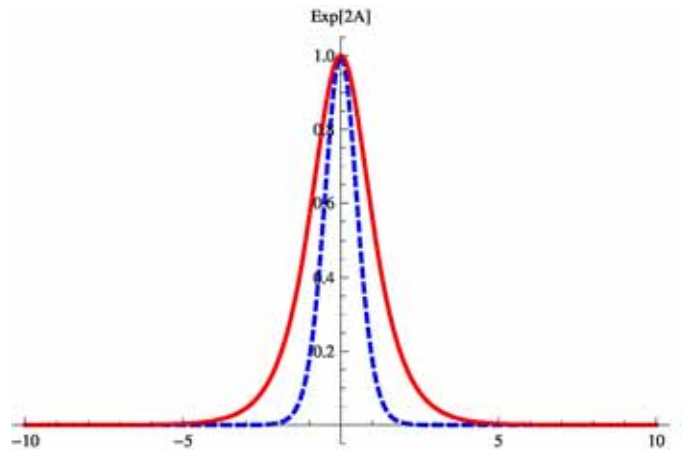
5.3.2 Caso $n = 3$

Por fim, utilizando $n = 3$, podemos escrever a seguinte expressão para o *warp factor*

$$e^{2A(y)} = \left(\frac{\text{sech}(\lambda_1(y - y_1)) \text{sech}(\lambda_2(y - y_2)) \text{sech}(\lambda_3(y - y_3))}{\text{sech}(\lambda_1(\tilde{y} - y_1)) \text{sech}(\lambda_2(\tilde{y} - y_2)) \text{sech}(\lambda_3(\tilde{y} - y_3))} \right)^{4/3}. \quad (5.33)$$

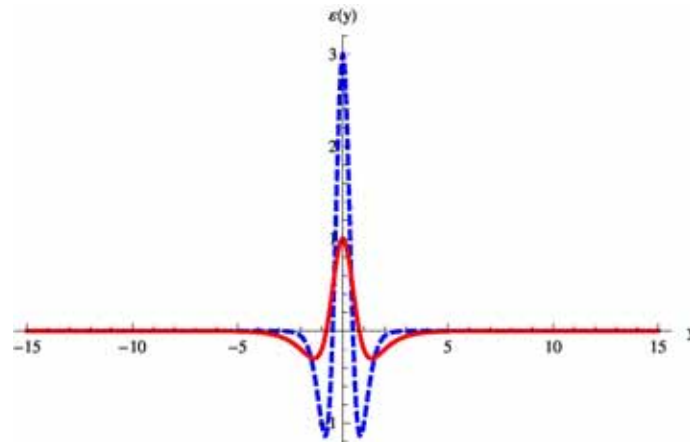
Novamente, conforme pode ser observado nas figuras 5.10, 5.11 e 5.12, os resultados demonstram uma grande semelhança com o cenário obtido para o modelo I (para $n = 3$), assim a mesma discussão qualitativa pode ser empregada aqui.

Figura 5.10: *Warp factor* - Modelo II, caso $n = 3$. Onde utilizamos $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_3 = 10$, $y_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha cheia).



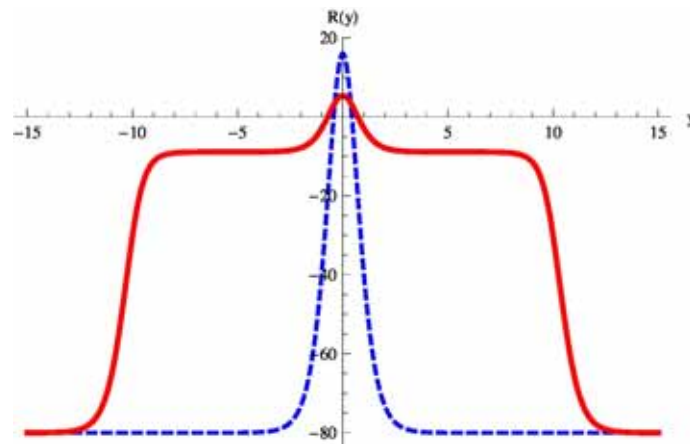
Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.11: Densidade de energia - Modelo II, caso $n = 3$. Onde utilizamos $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_3 = 10$, $y_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

Figura 5.12: Escalar de curvatura $R(y)$ - Modelo II, caso $n = 3$. Onde utilizamos $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha tracejada); $y_1 = -y_3 = 10$, $y_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (linha cheia).



Fonte: Figura gerada pelo autor.

6 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM GRAVITAÇÕES MODIFICADAS

Este capítulo seguirá uma abordagem distinta dos anteriores. Ao invés de fixarmos um modelo (ou uma classe) de campos escalares, neste capítulo tratamos de aspectos gerais no que concerne às teorias de branas com dimensões extras compactas. Há alguns anos, Gibbons, Kallosh e Linde (2001) obtiveram um conjunto de condições de consistência, denominadas *regras de soma*, que nos permite obter informações sobre cenários de branas sem necessariamente resolvermos as equações de movimento. Um resultado importante obtido na referência (GIBBONS; KALLOSH; LINDE, 2001) é o fato de que mundos branas com dimensões extras compactas demandam a inclusão de branas com tensão negativa, o que é um resultado desapontador, pois branas com tensão negativa são instáveis. Algum tempo depois, Leblond, Myers e Winters (2001) generalizaram as condições de consistência para um número arbitrário de dimensões e, mostraram a possibilidade de contornar a necessidade da inclusão de branas com tensão negativa, aumentando o número de dimensões extras compactas.

Outro resultado importante obtido por Gibbons, Kallosh e Linde (2001) consiste em um tipo de teorema *no-go* sobre a (im)possibilidade de construção de versões suaves do modelo RS com dimensões extras compactas. De forma direta, este teorema *no-go* pode ser colocado da seguinte forma

Generalizações suaves do modelo RS I, livre de fontes singulares, são inconsistentes com dimensões extras compactas.

Essa conclusão possui embasamento na seguinte equação

$$\oint \Phi' \cdot \Phi' = 0, \quad (6.1)$$

onde Φ é o campo escalar utilizado como fonte da brana espessa e Φ' representa a sua derivada em relação à coordenada y da dimensão extra¹. Note que a equação acima só pode ser satisfeita para $\Phi = \text{constante}$, e como consequência, não há formação de estrutura do tipo brana.

O ponto principal deste capítulo é a possibilidade de contornar o teorema mencionado acima utilizando gravitações modificadas². Neste trabalho revisitamos as regras de soma no contexto de teorias gravitação $f(R)$ e Brans-Dicke (BD) e verificamos que nos dois casos

¹Nesse capítulo estamos utilizando a notação usual dos trabalhos de condições consistência em mundos branas, isto é, fica subentendido que estamos lidando com integrais volumétricas que estão sendo avaliadas em todo o espaço das dimensões extras. Portanto, adotamos a convenção $\int_V d^q y = \oint$, onde $q = (D - p - 1)$ é o número de dimensões extras.

²Vale mencionar que, recentemente, Ahmed e Grzadkowski (2013) exploraram a possibilidade de evasão deste teorema via acoplamento não-minimo entre os setores escalar e gravitacional, no entanto, o resultado foi negativo.

o teorema *no-go* poderá ser relaxado, permitindo assim a construção de cenários de branas espessas com dimensões extras compactas. Recentemente essa questão foi abordada por Dias, Silva e Rocha (2014), no contexto de teoria de gravitação de Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet, e o resultado também levou à possibilidade de relaxamento deste teorema. É interessante observar que as condições de consistência foram incorporadas no contexto de teorias $f(R)$ (SILVA; DIAS, 2011) e BD (ABDALLA; GUIMARÃES; SILVA, 2010), no entanto, esses trabalhos analisaram somente a possibilidade de acomodação de cenários livres de branas com tensões negativas.

6.1 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM MUNDOS BRANAS

Nesta seção vamos rever os principais aspectos acerca das condições de consistência em mundos branas. Embora as regras de soma para mundos branas tenham sido primeiro obtidas por Gibbons, Kallosh e Linde (2001), aqui seguimos a abordagem de Leblond, Myers e Winters (2001), ou seja, estudamos o caso em que o número de dimensões é arbitrário. Começamos então pelo estabelecimento de um *setup* inicial tomando como ponto de partida um espaço-tempo D -dimensional dotado de uma geometria não separável, tal que o elemento de linha possa ser escrito como

$$ds^2 = G_{AB}(X)dX^A dX^B = W^2(y)g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + g_{ab}(y)dy^a dy^b, \quad (6.2)$$

onde $W^2(y)$ é o *warp factor*, X^A denota as coordenadas do espaço tempo D -dimensional, x^μ representa as $(p+1)$ coordenadas do espaço-tempo não compacto (brana), e y^a denota as $(D-p-1)$ coordenadas de um espaço interno compacto. Considere que a dinâmica do espaço-tempo, acoplado minimamente a campos escalares³, seja descrita pela seguinte ação clássica

$$S = S_{gravit} + \int d^D X \sqrt{-G} \left(-\frac{1}{2} \partial_A \Phi \partial^A \Phi - V(\Phi) \right), \quad (6.3)$$

onde S_{gravit} representa a ação do setor gravitacional (Einstein-Hilbert, $f(R)$, BD, Gauss-Bonnet, etc). Vamos assumir que os campos escalares Φ dependam somente das coordenadas do espaço interno compacto. A partir da ação acima, podemos obter as seguintes expressões para os componentes do tensor de energia-momento associado aos campos escalares

$$T_{\mu\nu} = -W^2 g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + V(\Phi) \right), \quad (6.4)$$

e

$$T_{ab} = \partial_a \Phi \partial_b \Phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + V(\Phi) \right). \quad (6.5)$$

³Na verdade, Φ pode representar uma coleção de campos escalares reais $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$.

O ponto chave para a obtenção das regras de soma em mundos branas é relacionar os objetos geométricos em D -dimensões com os respectivos objetos geométricos construídos com as métricas $g_{\mu\nu}$ (brana) e g_{ab} (espaço interno). Os componentes do tensor de Ricci, por exemplo, podem ser escritos da seguinte forma (veja apêndice 7)

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{(p+1)} \frac{\nabla^2 W^{p+1}}{W^{p-1}}, \quad (6.6)$$

e

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{p+1}{W} \nabla_a \nabla_b W, \quad (6.7)$$

onde $\bar{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci construído a partir da métrica $g_{\mu\nu}$, enquanto $\tilde{R}_{ab}$, ∇_a e ∇^2 são, respectivamente, o tensor de Ricci, a derivada covariante e o operador laplaciano, construídos com a métrica do espaço interno g_{ab} . Portanto, o escalar de curvatura D -dimensional ($R = G^{AB} R_{AB}$) é dado por

$$R = W^{-2} \bar{R} + \tilde{R} - \frac{p+1}{W} \nabla^2 W - \frac{\nabla^2 W^{p+1}}{W^{p+1}}, \quad (6.8)$$

onde foi definido $\bar{R} = g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}$ e $\tilde{R} = g^{ab} \tilde{R}_{ab}$. Tomando os traços parciais das Eqs. (6.6) e (6.7), chegamos aos seguintes resultados

$$\frac{1}{p+1} (W^{-2} \bar{R} - R_\mu^\mu) = p W^{-2} \nabla W \cdot \nabla W + W^{-1} \nabla^2 W, \quad (6.9)$$

e

$$\frac{1}{p+1} (\tilde{R} - R_a^a) = W^{-1} \nabla^2 W, \quad (6.10)$$

onde definimos $R_\mu^\mu = G^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = W^{-2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e $R_a^a = G^{ab} R_{ab} = g^{ab} R_{ab}$ (tal que $R = R_\mu^\mu + R_a^a$). Seja α uma constante arbitrária, não é difícil concluir que a seguinte identidade é válida

$$\nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = W^{\alpha+1} (\alpha W^{-2} \nabla W \cdot \nabla W + W^{-1} \nabla^2 W). \quad (6.11)$$

Combinando as equações (6.9)-(6.11) podemos deduzir o seguinte resultado

$$\nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)} \left[\alpha (W^{-2} \bar{R} - R_\mu^\mu) + (p - \alpha) (\tilde{R} - R_a^a) \right]. \quad (6.12)$$

Até este ponto não houve nenhuma especificação sobre a teoria da gravitacional a ser considerada. No contexto da relatividade geral em D dimensões, podemos relacionar os traços parciais, R_μ^μ e R_a^a , com o tensor de energia-momento por meio das seguintes expressões

$$R_\mu^\mu = \frac{8\pi G_D}{D-2} [(D-p-3)T_\mu^\mu - (p+1)T_a^a], \quad (6.13)$$

e

$$R_a^a = \frac{8\pi G_D}{D-2} [(p-1)T_a^a - (D-p-1)T_\mu^\mu], \quad (6.14)$$

onde G_D é a constante gravitacional em D dimensões, $T_\mu^\mu = W^{-2}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ e $T_a^a = g^{ab}T_{ab}$. Substituindo (6.13) e (6.14) na Eq. (6.12), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)} \left[\frac{8\pi G_D}{D-2} \left([(p-2\alpha)(D-p-1) + 2\alpha] T_\mu^\mu + \right. \right. \\ \left. \left. + p(2\alpha - p + 1)T_a^a \right) + (p - \alpha)\tilde{R} + \alpha W^{-2}\bar{R} \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Integrando a equação acima com relação às variáveis do espaço interno compacto, obtemos

$$\oint W^{\alpha+1} \left[\left((p-2\alpha)(D-p-1) + 2\alpha \right) T_\mu^\mu + p(2\alpha - p + 1)T_a^a + \right. \\ \left. + \frac{D-2}{8\pi G_D} \left((p-\alpha)\tilde{R} + \alpha W^{-2}\bar{R} \right) \right] = 0. \quad (6.16)$$

Note que utilizamos $\oint \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = 0$, pois estamos integrando em dimensões compactas. A equação acima define uma família a um parâmetro de condições de consistência para cenários mundos branas no contexto da teoria da relatividade geral. Vamos agora considerar, como exemplo, o caso particular em que $D = 5$ e $p = 3$, com essa escolha a equação acima pode ser reescrita como segue

$$\oint W^{\alpha+1} \left[T_\mu^\mu + 2(\alpha-1)T_4^4 + \frac{\alpha}{8\pi G_5} W^{-2}\bar{R} \right] = 0. \quad (6.17)$$

Note que $\tilde{R} = 0$ para um espaço interno unidimensional. Utilizando as Eqs. (6.4) e (6.5), obtemos o seguinte resultado

$$T_\mu^\mu = -4 \left(\frac{1}{2} \Phi' \cdot \Phi' + V(\Phi) \right) \quad \text{e} \quad T_4^4 = \frac{1}{2} \Phi' \cdot \Phi' - V(\Phi). \quad (6.18)$$

Substituindo as equações acima em (6.17), obtemos

$$\oint W^{\alpha+1} \left((\alpha-3)\Phi' \cdot \Phi' - 2(\alpha+1)V(\Phi) + \frac{\alpha}{8\pi G_5} W^{-2}\bar{R} \right). \quad (6.19)$$

Uma escolha interessante é $\alpha = -1$, nesse caso a condição de consistência pode ser reescrita sem a dependência explícita do potencial $V(\Phi)$, a saber

$$\oint \Phi' \cdot \Phi' = -\frac{\bar{R}}{32\pi G_5} \oint W^{-2}. \quad (6.20)$$

Se desejarmos descrever o nosso Universo, então $\bar{R} = 0$ com uma precisão de $10^{-120} M_{Pl}^2$.

Nesse caso, obtemos a Eq. (6.1), a qual serve de base para o teorema *no-go* mencionado anteriormente.

6.2 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM TEORIAS $f(R)$

A seguir, revisitamos as condições de consistência em cenários mundos branas para o caso da teoria da gravitação $f(R)$ (DIAS; SILVA, 2011), e vamos mostrar que esse quadro se revela adequado para contornar o teorema *no-go* mencionado previamente. As equações de campo que descrevem a dinâmica do espaço-tempo no contexto de teorias de gravitação $f(R)$ são dadas por⁴

$$F(R)R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}f(R) + G_{AB}\square F(R) - \nabla_A\nabla_B F(R) = 8\pi G_D T_{AB}, \quad (6.21)$$

onde definimos $F(R) = df(R)/dR$. A equação acima pode ser reescrita em uma forma mais familiar

$$R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}R = \frac{1}{F(R)} \left[8\pi G_D T_{AB} + \nabla_A\nabla_B F(R) - \left(\frac{1}{2}RF(R) - \frac{1}{2}f(R) + \square F(R) \right) G_{AB} \right]. \quad (6.22)$$

Tomando o traço da equação acima, obtemos a seguinte expressão para o escalar de curvatura

$$R = \frac{2}{(2-D)F(R)} \left[8\pi G_D T + (1-D)\square F(R) + \frac{D}{2} \left(f(R) - RF(R) \right) \right], \quad (6.23)$$

onde $T = T_A^A = G^{AB}T_{AB}$. Substituindo a última expressão na Eq. (6.22), obtemos

$$R_{AB} = \frac{1}{F(R)} \left[8\pi G_D \left(T_{AB} - \frac{G_{AB}}{D-2} T \right) + \nabla_A\nabla_B F(R) + \frac{G_{AB}}{D-2} \left(\square F(R) - f(R) + RF(R) \right) \right]. \quad (6.24)$$

Como a Eq. (6.12) foi obtida sem nenhuma referência acerca da teoria gravitacional empregada, podemos utilizá-la diretamente a fim de acomodar as condições de consistência

⁴Para revisões recentes em teorias $f(R)$ veja as referências (DE FELICE; TSUJIKAWA, 2010; NOJIRI; ODINTSOV, 2011; SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

à gravitação $f(R)$. Os traços parciais, obtidos a partir da Eq. (6.24), são dados por

$$R^\mu_\mu = \frac{1}{(D-2)F(R)} \left[8\pi G_D \left((D-p-3)T^\mu_\mu - (p+1)T^\mu_a \right) + \right. \quad (6.25)$$

$$\left. + (D+p-1)\nabla^\mu \nabla_\mu F(R) + (p+1) \left(RF(R) - f(R) + \nabla^a \nabla_a F(R) \right) \right],$$

e

$$R^a_a = \frac{1}{(D-2)F(R)} \left[8\pi G_D \left((p-1)T^a_a - (D-p-1)T^\mu_\mu \right) + \right. \quad (6.26)$$

$$\left. + (2D-p-3)\nabla^2 F(R) + (D-p-1) \left(RF(R) - f(R) + \nabla^\mu \nabla_\mu F(R) \right) \right].$$

onde estamos utilizando a notação $\nabla^\mu \nabla_\mu F = G^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu F = W^{-2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu F$. Portanto, aplicando as duas últimas equações em (6.12), chegamos em

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) &= \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)(D-2)F(R)} \left\{ 8\pi G_D \left((p-\alpha)(D-p-1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha(D-p-3) \right) T^\mu_\mu + 8\pi G_D \left(\alpha(p+1) - (p-\alpha)(p-1) \right) T^a_a + \right. \\ &\quad \left. + (D-2) \left(\alpha W^{-2} \bar{R} + (p-\alpha) \tilde{R} \right) F(R) - \left((p-\alpha)(D-p-1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha(D+p-1) \right) \nabla^\mu \nabla_\mu F(R) - \left(\alpha(p+1) + (p-\alpha)(2D-p-3) \right) \nabla^2 F(R) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\alpha(p+1) + (p-\alpha)(D-p-1) \right) \left(RF(R) - f(R) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Como o espaço interno é compacto, obtemos $\oint \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = 0$. Consequentemente, a integração da equação acima leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} &\alpha(D-2)\bar{R} \oint W^{\alpha-1} + (p-\alpha)(D-2) \oint W^{\alpha+1} \tilde{R} = \\ &= 8\pi G_D \oint \frac{W^{\alpha+1}}{F(R)} \left\{ \left(\alpha(D-p-3) - (p-\alpha)(D-p-1) \right) T^\mu_\mu + \right. \\ &\quad \left. + \left((p-\alpha)(p-1) - \alpha(p+1) \right) T^a_a \right\} + \left(\alpha(p+1) + (p-\alpha)(2D-p-3) \right) \times \\ &\quad \times \oint \frac{W^{\alpha+1} \nabla^2 F(R)}{F(R)} + \left(\alpha(p+1) + (p-\alpha)(D-p-1) \right) \oint W^{\alpha+1} \left(R - \frac{f(R)}{F(R)} \right) + \\ &\quad + \left(\alpha(D+p-1) + (p-\alpha)(D-p-1) \right) \oint \frac{W^{\alpha+1} \nabla^\mu \nabla_\mu F(R)}{F(R)}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

A fim de simplificar a nossa discussão, façamos a escolha $D = 5$ e $p = 3$, nesse caso o escalar de curvatura associado com o espaço interno compacto se anula ($\tilde{R} = 0$) e, portanto, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \alpha \bar{R} \oint W^{\alpha-1} = \oint \frac{W^{\alpha+1}}{F(R)} \left\{ 8\pi G_5 \left(2(1-\alpha)T_4^4 - T_\mu^\mu \right) + 4\nabla^2 F(R) + \right. \\ \left. + (\alpha+1) \left(RF(R) - f(R) \right) + (2\alpha+1) \nabla^\mu \nabla_\mu F(R) \right\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Utilizando (6.18), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha \bar{R} \oint W^{\alpha-1} = \oint \frac{W^{\alpha+1}}{F(R)} \left\{ 8\pi G_5 \left((3-\alpha)\Phi' \cdot \Phi' + 2(\alpha+1)V(\Phi) \right) + \right. \\ \left. + 4\nabla^2 F(R) + (\alpha+1) \left(RF(R) - f(R) \right) + (2\alpha+1) \nabla^\mu \nabla_\mu F(R) \right\}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Não é difícil perceber que o caso $f(R) = R$ recupera as condições de consistência no contexto da relatividade geral. A escolha $\alpha = -1$ nos conduz à seguinte expressão

$$-\bar{R} \oint W^{-2} = 32\pi G_5 \oint \frac{\Phi' \cdot \Phi'}{F(R)} + 4 \oint \frac{\nabla^2 F(R)}{F(R)} - \oint \frac{\nabla^\mu \nabla_\mu F(R)}{F(R)}. \quad (6.31)$$

Novamente, assumimos que a brana descreve o nosso Universo e, conseqüentemente, temos $\bar{R} = 0$. Note que, nesse caso a Eq. (6.8) pode ser escrita como segue

$$R = -\frac{4}{W} \nabla^2 W - \frac{\nabla^2 W^4}{W^4}. \quad (6.32)$$

Como uma consequência da equação acima, temos $f(R) \rightarrow f(W)$, $F(R) \rightarrow F(W)$ e $\nabla_\mu F(R) = \nabla_\mu F(W) = 0$. Portanto, a condição de consistência pode ser escrita da seguinte forma

$$\oint \frac{\Phi' \cdot \Phi'}{F(W)} + \frac{1}{8\pi G_5} \oint \frac{\nabla^2 F(W)}{F(W)} = 0. \quad (6.33)$$

O resultado acima é bastante interessante, pois o mesmo fornece uma rota para se contornar o teorema *no-go* mencionado no início deste capítulo. A inconsistência presente na Eq. (6.1) reside no fato de que o lado esquerdo daquela equação deveria ser estritamente positivo⁵ No entanto, no contexto das condições de consistência em teorias $f(R)$, existe um termo adicional relevante para a regra de soma, permitindo a possibilidade de branas espessas em cenários com dimensões extras compactas.

⁵Pelo menos para soluções com dependência espacial, que são de nosso interesse.

6.3 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA EM TEORIAS DE BRANS-DICKE

De fato, existe uma equivalência entre as teorias $f(R)$ e BD, logo, podemos esperar que o teorema *no-go* também possa ser contornado no contexto de teorias BD. No entanto, a equivalência entre as teorias $f(R)$ e BD ocorre somente para certos valores do parâmetro de Brans-Dicke, então, para verificarmos a possibilidade de evasão do teorema *no-go* via gravitação BD devemos adequar as condições de consistência para acomodar a teoria escalar-tensorial de BD (ABDALLA; GUIMARÃES; SILVA, 2010).

A dinâmica da teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke é descrita pelas seguintes equações (BERGMANN, 1968; BRANS; DICKE, 1961)

$$R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}R = \frac{8\pi}{\phi}T_{AB} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_A \phi \nabla_B \phi - \frac{1}{2} \nabla_C \phi \nabla^C \phi G_{AB} \right) + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_A \nabla_B \phi - G_{AB} \square \phi \right), \quad (6.34)$$

e

$$\square \phi = -\frac{\phi}{2\omega}R + \frac{1}{2\phi} \nabla^A \phi \nabla_A \phi, \quad (6.35)$$

onde $T = G^{AB}T_{AB}$, ω é o parâmetro de BD e ϕ representa o campo escalar de BD. Devemos ressaltar que o campo escalar de BD (ϕ) não deve ser confundido com o campo escalar (Φ) utilizado para gerar a estrutura da brana. Combinando as equações (6.34) e (6.35), podemos escrever

$$R_{AB} = \frac{8\pi}{\phi}T_{AB} + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_A \nabla_B \phi - 8\pi\lambda(1+\omega)TG_{AB} \right) + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_A \phi \nabla_B \phi, \quad (6.36)$$

onde definimos $\lambda^{-1} = (D-1) + (D-2)\omega$. Tomando os traços parciais da equação acima, obtemos as seguintes expressões

$$R^\mu_\mu = \frac{8\pi\lambda}{\phi} \left([(D-p-2) + (D-p-3)\omega]T^\mu_\mu - (p+1)(1+\omega)T^a_a \right) + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + \frac{1}{\phi} \nabla_\mu \nabla^\mu \phi, \quad (6.37)$$

e

$$R^a_a = \frac{8\pi\lambda}{\phi} \left([1 - (D-p-1)(1+\omega)]T^\mu_\mu + [(p+1) + (p-1)\omega]T^a_a \right) + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \frac{1}{\phi} \nabla_\mu \nabla^\mu \phi. \quad (6.38)$$

Substituindo os dois últimos resultados na Eq. (6.12), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) &= \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)} \left\{ \alpha W^{-2} \bar{R} + (p-\alpha) \tilde{R} + \frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{[(D-1) + (D-2)\omega]} \right. \\ &\times \left(T_\mu^\mu \left[(D-p-2)(p-2\alpha) - \alpha(D-p-3)\omega + (p-\alpha)(D-p-1)\omega \right] \right. \\ &\left. \left. + T_m^m (\omega-1) \left[\alpha(p+1) - (p-\alpha)(p-1) \right] \right) - \frac{\omega}{\phi^2} (p-\alpha) \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right\}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Vamos assumir que o campo escalar de BD, assim como o campo escalar Φ , depende somente das variáveis do espaço interno compacto e, portanto, os termos $\nabla_\mu \phi$ podem ser descartados. De fato, essa hipótese é bastante razoável, pois não irá prejudicar as equações da gravitação na brana. Agora, inserindo os traços parciais do tensor de energia-momento, e integrando nas variáveis das dimensões extras, obtemos

$$\begin{aligned} \oint W^{\alpha+1} &\left\{ \alpha W^{-2} \bar{R} + (p-\alpha) \tilde{R} + \frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{[(D-1) + (D-2)\omega]} \times \right. \\ &\times \left(-\frac{1}{2} [A(p+1) + B(D-p-3)] \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - \right. \\ &\left. \left. -V(\Phi) [A(p+1) + B(D-p-1)] \right) - \frac{\omega}{\phi^2} (p-\alpha) \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right\} = 0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} A &\equiv (D-p-2)(p-2\alpha) - \alpha(D-p-3)\omega + (p-\alpha)(D-p-1)\omega, \\ B &\equiv (p+1)(\omega+1)(2\alpha-p). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Vamos agora considerar a particularização $D=5$ e $p=3$, nesse caso obtemos

$$\begin{aligned} \oint W^{\alpha+1} &\left\{ -\frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{4+3\omega} \left(\frac{1}{2} \Phi' \cdot \Phi' [12(1+\omega) - 8\alpha - 6\omega(\alpha-1)] + \right. \right. \\ &\left. \left. + V(\Phi) [12(-1+\omega) + 8\alpha + 6\omega(\alpha-1)] \right) - \frac{\omega}{\phi^2} (3-\alpha) \phi' \cdot \phi' \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Existem pelo menos duas escolhas para o parâmetro α que nos fornecem informações interessantes. Começemos por $\alpha = -1$, nesse caso, temos

$$\frac{(5+6\omega)}{4+3\omega} \oint \frac{1}{\phi} \Phi' \cdot \Phi' = \frac{10}{4+3\omega} \oint \frac{1}{\phi} V(\Phi) + \frac{\omega}{4\pi} \oint \frac{1}{\phi^2} \phi' \cdot \phi' = 0. \quad (6.43)$$

observe que o limite $\omega \rightarrow \infty$ (e $\phi \rightarrow \text{constante}$) leva, como esperado, à mesma condição de

consistência dada pela Eq. (6.1), explicitando o teorema *no-go*. Retornando à Eq. (6.43), é notável que obtivemos um relaxamento da condição de consistência, no mesmo sentido da Eq. (6.33). No presente caso, no entanto, podemos observar uma característica distinta das condições de consistência em relatividade geral e teorias $f(R)$, a saber, a dependência explícita do potencial $V(\Phi)$ para o caso $\alpha = -1$. O resultado codificado na Eq.(6.43) mostra que no contexto de teorias BD o potencial $V(\Phi)$ é, de fato, relevante para a construção de um modelo bem definido. Também é interessante a escolha $\alpha = 3$, pois o termo $\phi' \cdot \phi'$ deixa de contribuir para a regra de soma, levando à seguinte equação

$$\oint \frac{W^4}{\phi} \Phi' \cdot \Phi' = (4\omega + 2) \oint V, \quad (6.44)$$

explicitando, novamente, a contribuição do campo escalar de Brans-Dicke nas condições de consistência para cenários mundos branas.

7 COMENTÁRIOS FINAIS

Esse trabalho sintetiza um estudo de aproximadamente dois anos sobre teorias de dimensões extras, com ênfase em modelos de branas gerados por campos escalares. Nesse período, procuramos estabelecer um conhecimento sólido dos principais trabalhos presentes na literatura. Uma consequência do aprofundamento desse estudo foi a possibilidade de acrescentarmos novos resultados à essa linha de pesquisa.

No capítulo 2, procuramos apresentar uma revisão dos chamados modelos de Randall-Sundrum, onde, discutimos desde a sua configuração inicial até as suas implicações físicas. No contexto do chamado modelo RS I (RANDALL; SUNDRUM, 1999b), mostramos que as equações de Einstein em $4+1$ dimensões, na presença de fontes singulares, admitem soluções interessantes para se atacar o problema da hierarquia do Modelo Padrão. Conforme a interpretação deste modelo, os campos do Modelo Padrão encontram-se localizados em uma hipersuperfície quadridimensional (brana) mergulhada em um espaço-tempo com dimensão maior. Analisando o mecanismo de Higgs na chamada brana visível, verificamos que a escala de massa do setor eletrofraco do Modelo Padrão possui um revestimento devido à características geométricas do espaço-tempo, fornecendo assim uma possível solução para o problema de hierarquia. Em seguida, apresentamos uma breve discussão sobre o modelo RS II (RANDALL; SUNDRUM, 1999a), onde, discutimos a possibilidade da construção de teorias contendo dimensões extras não compactas sem necessariamente entrar em conflito com as observações gravitacionais.

Entretanto, conforme foi discutido no início do capítulo 3, precisamos ir além dos modelos Randall-Sundrum para obtermos uma descrição realista do nosso Universo. Nesse contexto surgem os chamados modelos de branas espessas. Seguindo a abordagem usual, construímos modelos de branas espessas gerados por campos escalares. Nesse contexto, a brana é interpretada como sendo uma parede de domínio associada às soluções do tipo *kink* para os campos escalares. Uma característica interessante desse tipo de abordagem reside na possibilidade de um estudo analítico das equações de Einstein a partir de um formalismo de primeira ordem baseado na mecânica quântica supersimétrica.

Embora a literatura de branas espessas seja rica, pouca atenção se deu à questão do problema de hierarquia nesse tipo de modelo. Nesse sentido, propusemos um modelo de brana espessa capaz de atacar essa questão (DUTRA; BRITO; SILVA, 2014). Conforme podemos observar no capítulo 4 dessa monografia, o cenário resultante do modelo proposto possui duas características interessantes para o nosso propósito: separação de brana e *warp factor* assimétrico. Desse modo podemos interpretar que existem duas branas, uma associada à escala TeV (onde os campos do Modelo Padrão estão localizados) e outra associada à escala Planck. Por uma simples adaptação da análise do mecanismo de Higgs realizada no modelo RS I, o caráter assimétrico do *warp factor* permite revestir o

parâmetro de massa do setor eletrofraco por um fator geométrico, justificando, assim, a hierarquia entre as escalas fundamentais.

Apesar da abordagem usual dos modelos de branas espessas ser feita em termos de um formalismo de primeira ordem, o número de soluções analíticas conhecidas na literatura ainda é pequeno. No capítulo 5 mostramos que existe uma classe de superpotenciais que permitem uma simplificação considerável no sistema de equações de primeira ordem, e ainda assim, levam à cenários bastante atrativos do ponto de vista físico. Esta simplificação depende somente da escolha de um superpotencial que possa ser decomposto em termos de superpotenciais cujas soluções sejam conhecidas, nesse caso, o sistema de equações de primeira ordem para os campos escalares se desacopla e, como consequência, a obtenção das suas soluções depende somente da realização de uma integral.

A dificuldade intrínseca das equações de Einstein motivou a busca de condições de consistência para cenários de branas. Um resultado importante obtido a partir dessas condições de consistência diz respeito à impossibilidade de construção de cenários de branas espessas com dimensões extras compactas. No capítulo 6, mostramos que essa impossibilidade pode ser evitada no contexto de teorias de gravitações modificadas. Nesse trabalho, analisamos as condições de consistência no contexto de teorias $f(R)$ e Brans-Dicke, concluindo que em ambos os cenários de branas espessas podem ser consistentes com dimensões extras compactas.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, M. C. B.; GUIMARÃES, M. E. X.; SILVA, J. M. H. Positive tension 3-branes in an AdS_5 bulk. **Journal of High Energy Physics**. v. 1009, p. 051 (2010).

AHMED, A.; GRZADKOWSKI, B. Brane modeling in warped extra-dimension. **Journal of High Energy Physics**. v. 1301, p. 177, 2013.

AKAMA, K. Pregeometry. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON GAUGE THEORY AND GRAVITATION, 1982, Nara. **Proceeding of the International Symposium on Gauge Theory and Gravitation**. Nara: Springer-Verlag, 1982. p.267-271.

ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. **Physics Letters B**. v. 429, p. 263, 1998.

ARKANI-HAMED, N.; SCHMALTZ, M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. **Physical Review D**. v. 61, p. 033005, 2000.

BARBOSA-CENDEJAS, N. et al. Mass hierarchy, mass gap and corrections to Newton's law on thick branes with Poincare symmetry. **General Relativity and Gravitation**. v. 46, p. 1631, 2014.

BAZEIA, D.; FURTADO, C.; GOMES, A. R. Brane structure from scalar field in warped space-time. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**. v. 0402, p. 002, 2004.

BAZEIA, D.; GOMES, A. R. Bloch brane. **Journal of High Energy Physics**. v. 0405, p. 012, 2004.

BAZEIA, D. et al. Soliton stability in systems of two real scalar fields. **Journal Physics A**. v. 30, p. 8157, 1997.

BERGMANN, P. G. Comments on the scalar-tensor theory. **International Journal of Theoretical Physics**. v. 1, p. 25, 1968.

BERINGER, J. *et al.* Review of Particle Physics. **Physical Review D**. v. 86, p. 010001, 2012.

BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. **Physical Review**. v. 124, p. 925, 1961.

BRITO, G. P.; DUTRA, A. S. Orbit based procedure for doublets of scalar fields and the emergence of triple kinks and other defects. **Physics Letters B**. v. 736, p. 438, 2014.

CAMPOS, A. Critical Phenomena of Thick Branes in Warped Spacetimes. **Physical Review Letters**. v. 88, p. 141602, 2002.

CAPOZZIELLO, S.; DE LAURENTIS, M. Extended Theories of Gravity. **Physics Reports**. v. 509, p. 167, 2011.

CASTRO, L. B. Fermion localization on two-field thick branes. **Physical Review D**. v. 83, p. 045002, 2011.

CHUMBES, A. E. R.; HOTT, M. B. Non-polynomial potentials with deformable topological structures. **Physical Review D**. v. 81, p. 045008, 2010.

CHUMBES, A. E. R.; VASQUEZ, A. E. O.; HOTT, M. B. Fermion localization on a split brane. **Physical Review D**. v. 83, p. 105010, 2011.

CHUMBES, A. E. R.; SILVA, J. M. H.; HOTT, M. B. A model to localize gauge and tensor fields on thick branes. **Physical Review D**. v. 85, p. 085003, 2012.

CORREA, R. A. C.; DUTRA, A. S.; HOTT, M. B. Fermion localization on degenerate and critical branes. **Classical and Quantum Gravity**. v. 28, p. 155012, 2011.

CRUZ, W. T.; MALUF, R. V.; ALMEIDA, C. A. S. Kalb-Ramond field localization on the Bloch brane. **The European Physical Journal C**. v. 73, p. 2523, 2013.

CRUZ, W. T. et al. Graviton resonances on two-field thick branes. **Physics Letters B**. v. 730, p. 314, 2014.

CSÁKI, C. **TASI Lectures on Extra Dimension and Branes**. 2004. Disponível em < <http://www.arxiv.org/abs/hep-ph/0404096> >. Acesso em: 20 de setembro de 2014.

DAS, A. **Lectures on Gravitation**. 2011. 1 ed. Singapore: World Scientific Publishing, 2011. 338 p.

DE FELICE, A.; TSUJIKAWA, S. $f(R)$ theories. **Living Reviews in Relativity**. v. 13, p. 3, 2010.

DEWOLFE, O. et al. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. **Physical Review D**. v. 62, p. 046008, 2000.

DIAS, M.; SILVA, J. M. H.; ROCHA, R. **Smooth thick braneworlds and the Gibbons-Kallosh-Linde no-go theorem**. 2014. Disponível em < <http://www.arxiv.org/abs/1406.6324> >. Acesso em: 20 de novembro de 2014.

DUTRA, A. S. General solutions for some classes of interacting two field kinks. **Physics Letters B**. v. 626, p. 249, 2005.

DUTRA, A. S.; BRITO, G. P.; SILVA, J. M. H. Asymmetrical Bloch branes and the hierarchy problem. **Europhysics Letters**. v. 108, p. 11001, 2014.

DUTRA, A. S.; FARIA JR, A. C.; HOTT, M. B. Degenerate and critical Bloch branes. **Physical Review D**. v. 78, p. 043526, 2008.

DZHUNUSHALIEV, V.; FOLOMEEV, V.; MINAMITSUJI, M. Thick brane solutions. **Reports on Progress in Physics**. v. 73, p. 066901, 2010.

GABADADZE, G. **ICTP Lectures on Large Extra Dimension**. 2003. Disponível em < <http://www.arxiv.org/abs/hep-ph/0308112> >. Acesso em: 22 de setembro de 2014.

GIBBONS, G.; KALLOSH, R.; LINDE, A. Brane world sum rules. **Journal of High Energy Physics**. v. 0101, p. 022, 2001.

GOGBERASHVILI, M. Four dimensionality in non-compact Kaluza-Klein model. **Modern Physics Letters A**. v. 14, p. 2025, 1999.

GOGBERASHVILI, M. Our world as an expanding shell. **Europhysics Letters**, v. 49, p. 396, 2000.

GOGBERASHVILI, M. Gravitational trapping for extended extra dimensions. **International Journal of Modern Physics D**, v. 11, p. 1639, 2002.

GOGBERASHVILI, M. Hierarchy problem in the shell-Universe model. **International Journal of Modern Physics D**, v. 11, p. 1635, 2002.

GOLDBERGER, W. D.; WISE, M. B. Modulus stabilization with bulk fields. **Physical Review Letters**. v. 83, p. 4922, 1999.

GREMM, M. Four-dimensional gravity on a thick wall. **Physical Letters B**, v. 478, p. 434, 2000.

GREMM, M. Thick domain walls and singular spaces. **Physical Review D**. v. 62, p. 044017, 2000.

HORAVA, P.; WITTEN, E. Heterotic and type I string dynamics from eleven-dimensions. **Nuclear Physics B**. v. 460, p. 506, 1996.

KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**. v. 1921, p. 966, 1921.

KAPNER, D. J. et al. Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale. **Physical Review Letters**. v. 98, p. 021101, 2007.

KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. **Zeitschrift für Physik A**. v. 37, p. 895, 1926.

LEBLOND, F.; MYERS, R. C.; WINTERS, D. J. Consistency conditions for brane worlds in arbitrary dimensions. **Journal of High Energy Physics**. v. 0107, p. 031, 2001.

MAARTENS, R.; KOYAMA, K. Brane-World Gravity. **Living Reviews in Relativity**. v. 13, p. 5, 2010.

MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological Solitons**. 2004. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 493 p.

NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. **Physics Reports**. v. 505, p. 59, 2011.

NORDSTRÖM, G. Über die Möglichkeit, das Elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinen. **Physikalische Zeitschrift**. v. 15, p. 504, 1914.

OVERDUIN J. M.; WESSON, P. S. Kaluza-Klein gravity. **Physics Reports**. v. 283, p. 303, 1997.

PADILLA, A. **Braneworld Cosmology and Holography**. 2002. 142 f. Tese (Doutorado em Física) - Universidade de Durham, Inglaterra, 2002.

RAJARAMAN, R. **Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**. 1. ed. Amsterdam: North-Holland Personal Library, 1982. 409 p.

RANDALL, L. **Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions**. 1. ed. Nova York: Harper Collins Publisher, 1999. 483 p.

RANDALL, L. Extra dimensions and warped geometries. **Science**. v. 296, p. 1422, 2002.

RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification **Physical Review Letters**. v. 83, p. 4690, 1999.

RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. **Physical Review Letters**. v. 83, p. 3370, 1999.

RUBAKOV, V. A. Large and infinite extra dimension. **Physics Uspekhi**. v. 44, p. 871, 2001.

RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do we live inside a domain wall? **Physics Letters B**. v. 125, p. 136, 1983.

SANTOS FILHO, L. R. **Introdução à gravitação de Brans-Dicke**. 2012. 96 f. Monografia (Bacharelado em Física) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

SILVA, J. M. H. **Compactificação alternativa de dimensões extras em gravitação de Brans-Dicke**. 2009. 90 f. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

SILVA, J. M. H.; DIAS, M. Five-dimensional $f(R)$ braneworld models. **Physical Review D**. v. 84, p. 066011, 2011.

SOTIRIOU, T. P. **Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology**. 2009. 212 f. Tese (Doutorado em Física) - International School for Advanced Studies, Trieste, Itália, 2009.

SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ theories of gravity. **Review of Modern Physics**. v. 82, p. 451, 2010.

SUNDRUM, R. Effective field theory for a three-brane universe. **Physical Review D** v. 59, p. 085009, 1999.

SUNDRUM, R. **To the Fifth Dimension and Back**. 2005. Disponível em <<http://www.arxiv.org/abs/hep-th/0508134>>. Acesso em: 25 de setembro de 2014.

VACHASPATI, T. **Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons**. 2006. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 176 p.

VISSER, M. An exotic class of Kaluza-Klein models **Physics Letters B**. v. 159, p. 22, 1985.

WALD, R.M. **General Relativity**. 1984. 1 ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1984. 473 p.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. 1972. 1 ed. United States: John Wiley and Sons, 1972. 657 p.

WILL, C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. **Living Reviews in Relativity**. v. 9, p. 3, 2006.

XIE, Q. Y.; YANG, J; ZHAO, L. Resonance mass spectra of gravity and fermion on Bloch branes. **Physical Review D**. v. 88, p. 105014, 2013.

YANG, J. et al. Thick brane split caused by spacetime torsion. **Physical Review D**. v. 85, p. 084033, 2012.

ZHAO, Z. H.; LIU, Y. X.; LI, H. T. Fermion localization on asymmetric two-field thick branes. **Classical and Quantum Gravity**. v. 27, p. 185001, 2010.

APÊNDICE A - OBJETOS GEOMÉTRICOS EM ESPAÇOS *WARPED*

Neste apêndice calculamos alguns objetos geométricos, em espaço *warped*, que foram utilizados ao longo do trabalho. Estamos interessados em espaços-tempos *warped* D -dimensionais. Os índices latinos maiúsculos ($A, B, C, \dots = 0, 1, \dots, D-1$) rotulam as dimensões espaço-tempo completo (brana + dimensões extras), o índices gregos ($\mu, \nu, \alpha, \dots = 0, 1, \dots, p$) denotam as dimensões da p -brana, enquanto os índices latinos minúsculos ($a, b, c, \dots = p+1, p+2, \dots, D-1$) representam as dimensões extras (espaço interno $(D-p-1)$ -dimensional). Denotamos X^A , x^μ e y^a como sendo, respectivamente, as coordenadas do espaço-tempo completo, da p -brana e do espaço interno. Para espaços *warped*, os componentes da métrica $G_{AB}(X)$ podem ser escritos como

$$G_{\mu\nu} = W^2(y)g_{\mu\nu}(x), \quad G_{ab} = g_{ab}(y), \quad \text{e} \quad G_{\mu a} = G_{a\mu} = 0. \quad (1)$$

Podemos ainda definir G^{AB} pela seguinte equação $G^{AB}G_{AC} = \delta_C^B$, nesse caso obtemos os seguintes componentes

$$G^{\mu\nu} = W^{-2}(y)g^{\mu\nu}(x), \quad G^{ab} = g^{ab}(y), \quad \text{e} \quad G^{\mu a} = G^{a\mu} = 0, \quad (2)$$

onde $g^{\mu\nu}$ e g^{ab} satisfazem às relações $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$ e $g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$.

Considere os elementos da conexão de Levi-Civita, dados por

$$\Gamma_{BC}^A = \frac{1}{2}G^{AD}(\partial_B G_{CD} + \partial_C G_{BD} - \partial_D G_{BC}), \quad (3)$$

substituindo os elementos da Eq. (1) na expressão acima, obtemos que os componentes não nulos da conexão de Levi-Civita serão dados por

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\alpha\rho} + \partial_\alpha g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\alpha}) \equiv \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\mu, \quad (4)$$

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \equiv \tilde{\Gamma}_{bc}^a, \quad (5)$$

$$\Gamma_{\nu b}^\mu = \Gamma_{b\nu}^\mu = W^{-1}\partial_b W \delta_\nu^\mu, \quad (6)$$

$$\Gamma_{\nu\alpha}^a = -W g_{\nu\alpha} \partial^a W. \quad (7)$$

Podemos ainda baixar os índices da conexão de Levi-Civita pela atuação da métrica G_{AB} , nesse caso obtemos

$$\Gamma_{ABC} = \frac{1}{2}(\partial_B G_{AC} + \partial_C G_{AB} - \partial_A G_{BC}), \quad (8)$$

cujos componentes não nulos serão

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = W^2 \left(\frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \right) \equiv W^2 \bar{\Gamma}_{\mu\nu\alpha}, \quad (9)$$

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2} (\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc}) \equiv \tilde{\Gamma}_{abc}, \quad (10)$$

$$\Gamma_{\mu\nu b} = \Gamma_{\mu b \nu} = W g_{\mu\nu} \partial_b W, \quad (11)$$

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = -W g_{\nu\alpha} \partial_\alpha W. \quad (12)$$

Definimos o tensor de curvatura de Riemann como sendo dado por

$$R_{ABCD} = \partial_C \Gamma_{ABD} - \partial_D \Gamma_{ABC} + \Gamma_{EAD} \Gamma_{BC}^E - \Gamma_{EAC} \Gamma_{BD}^E. \quad (13)$$

Utilizando as equações (4)-(7) e (9)-(12), obtemos as seguintes expressões para os componentes não nulos do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\alpha\lambda} = W^2 [\bar{R}_{\mu\nu\alpha\lambda} + (g_{\mu\lambda} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\lambda}) \partial_a W \partial^a W], \quad (14)$$

$$R_{\mu ab\lambda} = R_{a\mu b\lambda} = -R_{a\mu b\lambda} = -R_{\mu a\lambda b} = W g_{\mu\lambda} \nabla_b \nabla_a W, \quad (15)$$

$$R_{abcd} = \partial_c \tilde{\Gamma}_{abd} - \partial_d \tilde{\Gamma}_{abc} + \tilde{\Gamma}_{ead} \tilde{\Gamma}_{bc}^e - \tilde{\Gamma}_{eac} \tilde{\Gamma}_{bd}^e \equiv \tilde{R}_{abcd}, \quad (16)$$

onde definimos

$$\bar{R}_{\mu\nu\alpha\lambda} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu\lambda} - \partial_\lambda \bar{\Gamma}_{\mu\nu\alpha} + \bar{\Gamma}_{\sigma\mu\lambda} \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\sigma - \bar{\Gamma}_{\sigma\mu\alpha} \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^\sigma. \quad (17)$$

O tensor de Ricci é definido pela seguinte expressão

$$R_{BD} = R^A{}_{BAD} = G^{AC} R_{ABCD}. \quad (18)$$

Utilizando o conjunto de equações (14)-(16), obtemos as seguintes expressões para os componentes do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{p+1} \frac{\nabla^2 W^{p+1}}{W^{p-1}}, \quad (19)$$

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{p+1}{W} \nabla_a \nabla_b W, \quad (20)$$

$$R_{\mu a} = R_{a\mu} = 0, \quad (21)$$

onde utilizamos a definição $\bar{R}_{\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} \bar{R}_{\alpha\mu\lambda\nu}$ e $\tilde{R}_{ab} = g^{cd} \tilde{R}_{cadb}$.

Por fim, o escalar de curvatura, definido por $R = G^{AB} R_{AB}$, é dado pela seguinte expressão em espaços *warped*

$$R = W^{-2} \bar{R} + \tilde{R} - \frac{p+1}{W} \nabla^2 W - \frac{\nabla^2 W^{p+1}}{W^{p+1}}, \quad (22)$$

onde definimos $\bar{R} = g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}$ e $\tilde{R} = g^{ab} \tilde{R}_{ab}$.

Vamos considerar o caso particular em que $D = 5$ e $p = 3$, nesse caso temos apenas uma dimensão extra, logo

$$\tilde{R}_{ab} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{R} = 0. \quad (23)$$

Considere ainda $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, nesse caso obtemos

$$\bar{R}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{R} = 0. \quad (24)$$

Denotando o *warp factor* como sendo dado por $W^2(y) = e^{2A(y)}$, obtemos as seguintes expressões para os componentes do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = -\left(A''(y) + 4A'(y)^2\right)e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad R_{44} = -4\left(A''(y) + A'(y)^2\right), \quad R_{\mu 4} = 0, \quad (25)$$

e, finalmente, o escalar de curvatura pode ser escrito como

$$R = -8A''(y) - 20A'(y)^2. \quad (26)$$

APÊNDICE B - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Neste apêndice deduzimos, de forma sucinta, as equações de movimento que foram utilizadas ao longo desta monografia. Fazemos uma abordagem via princípio variacional para as três teorias gravitacionais que foram empregadas ao longo do trabalho, a saber, Relatividade Geral, $f(R)$ e Brans-Dicke. É notório que nos três casos a ação total vem dada pela expressão

$$S = S_{gravit} + S_M, \quad (27)$$

onde S_{gravit} denota a ação gravitacional a ser especificada, enquanto S_M representa a ação de possíveis campos de matéria (campos escalares, fontes singulares, etc...). Vamos obter as equações de movimento a partir da imposição de que a derivada funcional da ação S , com respeito à métrica inversa G^{AB} , se anule, ou seja

$$\frac{\delta S}{\delta G^{AB}} = \frac{\delta S_{gravit}}{\delta G^{AB}} + \frac{\delta S_M}{\delta G^{AB}} = 0. \quad (28)$$

Definimos o tensor de energia-momento como sendo dado pela seguinte expressão ¹

$$T_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{-G}} \frac{\delta S_M}{\delta G^{AB}}, \quad (29)$$

onde $G = \det(G_{AB})$. Assim, podemos reescrever a equação (28) da seguinte forma

$$\frac{\delta S_{gravit}}{\delta G^{AB}} = \frac{1}{2} \sqrt{-G} T_{AB}. \quad (30)$$

Fazemos a seguir o cálculo do lado esquerdo da equação acima para as três teorias gravitacionais mencionadas no início deste apêndice.

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA RELATIVIDADE GERAL

Consideramos primeiramente o caso da teoria da Relatividade Geral, a qual pode ser obtida a partir da ação de Einstein-Hilbert (WALD, 1984; WEINBERG, 1972)

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X \sqrt{-G} R, \quad (31)$$

onde G_D representa a constante de Newton em D dimensões². Lembrando que o escalar de curvatura é definido por $R = G^{AB} R_{AB}$, podemos escrever a variação da ação acima

¹veja, por exemplo, ref. (WALD, 1984).

²Por vezes utiliza-se a notação $32\pi G_D = M^{2-D}$, onde M é a massa de Planck em D dimensões

como segue

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X \left(\delta\sqrt{-G} R + \sqrt{-G} \delta G^{AB} R_{AB} + \sqrt{-G} G^{AB} \delta R_{AB} \right). \quad (32)$$

Para calcular $\delta\sqrt{-G}$, recordemos a seguinte identidade

$$\det(A) = e^{tr[\ln(A)]}. \quad (33)$$

Portanto, podemos escrever

$$\delta\sqrt{-G} = -\frac{1}{2\sqrt{-G}}\delta G, \quad (34)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-G}}\delta \left(e^{tr[\ln(G_{AB})]} \right), \quad (35)$$

$$= \frac{(-G)}{2\sqrt{-G}} G^{AB} \delta G_{AB}, \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-G} G^{AB} \delta G_{AB}. \quad (37)$$

Utilizando $G_{AB}G^{BC} = \delta_A^C$, podemos facilmente mostrar que $G^{AB} \delta G_{AB} = -G_{AB} \delta G^{AB}$, com isso, podemos escrever

$$\delta\sqrt{-G} = -\frac{1}{2}\sqrt{-G} G_{AB} \delta G^{AB}. \quad (38)$$

Pode-se mostrar que o terceiro termo do lado direito da equação (32) pode ser reescrito como a divergência de um vetor e, portanto, pode ser eliminado como termo de fronteira (para uma demonstração detalhada veja ref. (DAS, 2011)). Assim, podemos reescrever a equação (32) da seguinte forma

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X \sqrt{-G} \left(R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} R \right) \delta G^{AB}. \quad (39)$$

Da definição de derivada funcional, temos

$$\delta S_{EH} = \int d^D X \frac{\delta S_{EH}}{\delta G^{AB}} \delta G^{AB}. \quad (40)$$

Comparando as duas últimas equações, podemos concluir que

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta G^{AB}} = \frac{\sqrt{-G}}{16\pi G_D} \left(R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} R \right). \quad (41)$$

Substituindo a expressão acima no primeiro termo da Eq. (30), obtemos a equação de Einstein

$$R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}R = 8\pi G_D T_{AB}. \quad (42)$$

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE TEORIAS $f(R)$

Uma extensão natural da teoria da Relatividade Geral que têm recebido considerável atenção na literatura é a chamada teoria de gravitação $f(R)$ (DE FELICE; TSUJIKAWA, 2010; NOJIRI; ODINTSOV, 2011; SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Nas teorias $f(R)$ a ação que descreve o campo gravitacional contém uma função arbitrária do escalar de curvatura, isto é

$$S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X \sqrt{-G} f(R). \quad (43)$$

Note que podemos recuperar a ação de Einstein-Hilbert fazendo $f(R) = R$. Tomando a variação da ação acima, obtemos³

$$\begin{aligned} \delta S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X \sqrt{-G} \left[F(R) R_{AB} - \frac{1}{2} f(R) G_{AB} - \nabla_A \nabla_B F(R) + \right. \\ \left. + G_{AB} \square F(R) \right] \delta G^{AB} - \frac{1}{8\pi G_D} \int_{\partial\Omega} d^{D-1} X \sqrt{|h|} F(R) \delta K, \end{aligned} \quad (44)$$

onde definimos $F(R) = df/dR$. O último termo da equação acima é uma integral avaliada na hipersuperfície $\partial\Omega$, e o termo h denota o determinante da métrica induzida sobre essa hipersuperfície. No entanto, os detalhes dessa integral de superfície não serão considerados aqui, precisamos apenas saber que o mesmo pode ser tomado igual a zero⁴. Ficamos, então, com a seguinte expressão para a variação da ação $S_{f(R)}$

$$\begin{aligned} \delta S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X \sqrt{-G} \left[F(R) R_{AB} - \frac{1}{2} f(R) G_{AB} - \right. \\ \left. - \nabla_A \nabla_B F(R) + G_{AB} \square F(R) \right] \delta G^{AB}. \end{aligned} \quad (45)$$

Assim, podemos escrever a seguinte expressão para a derivada funcional da ação $S_{f(R)}$ com relação à métrica inversa G^{AB}

$$\frac{\delta S_{f(R)}}{\delta G^{AB}} = \frac{1}{16\pi G_D} \sqrt{-G} \left[F(R) R_{AB} - \frac{1}{2} f(R) G_{AB} - \nabla_A \nabla_B F(R) + G_{AB} \square F(R) \right]. \quad (46)$$

³Devemos ressaltar que estamos considerando teorias $f(R)$ no formalismo métrico, ou seja, a conexão e a métrica do espaço-tempo não são independentes.

⁴Para uma justificativa veja a referência (SOTIRIOU, 2009).

Substituindo a expressão acima na Eq. (30), obtemos a equação de movimento para teorias $f(R)$

$$F(R)R_{AB} - \frac{1}{2}f(R)G_{AB} - \nabla_A \nabla_B F(R) + G_{AB} \square F(R) = 8\pi G_D T_{AB}. \quad (47)$$

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE TEORIAS DE BRANS-DICKE

Em 1961, Brans e Dicke (1961) propuseram uma extensão da Relatividade Geral a fim de acomodar o princípio de Mach à teoria de Einstein. A teoria de Brans-Dicke consiste em uma teoria escalar-tensorial da gravitação, cujas equações de movimento podem ser obtidas a partir da seguinte ação⁵

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^D X \sqrt{-G} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} G^{AB} \nabla_A \phi \nabla_B \phi \right), \quad (48)$$

onde ω é o chamado parâmetro de Brans-Dicke e ϕ é um campo escalar. Observe que agora a ação é um funcional da métrica e do campo escalar de Brans-Dicke, e portanto, a sua variação deve levar em conta tanto a variação com respeito à métrica como a variação do campo escalar. Agora, além da equação de movimento para a métrica, obtida a partir da Eq. (30), temos também uma equação para o campo escalar de Brans-Dicke, que pode ser obtida a partir da seguinte expressão

$$\frac{\delta S_{BD}}{\delta \phi} = 0. \quad (49)$$

Tomando a variação da ação (48), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_{BD} = & \frac{1}{16\pi} \int d^D X \sqrt{-G} \left\{ \left[\phi \left(R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} R \right) + \frac{\omega}{\phi} \left(\frac{1}{2} G_{AB} \nabla_C \phi \nabla^C \phi - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \nabla_A \phi \nabla_B \phi \right) \right] \delta G^{AB} + \left[R + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_A \phi \nabla^A \phi \right] \delta \phi \right\} + \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^D X \sqrt{-G} \phi G^{AB} \delta R_{AB} - \frac{2\omega}{16\pi} \int d^D X \sqrt{-G} \frac{1}{\phi} G^{AB} \nabla_A \phi \delta (\nabla_B \phi). \end{aligned} \quad (50)$$

Após algumas manipulações, eliminando termos de superfície, podemos mostrar que os dois últimos termos da equação acima podem ser reescritos da seguinte forma

$$\int d^D X \sqrt{-G} \phi G^{AB} \delta R_{AB} = \int d^D X \sqrt{-G} \left(G_{AB} \square \phi - \nabla_A \nabla_B \phi \right) \delta G^{AB}, \quad (51)$$

⁵Para o leitor interessado na teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke, recomendamos as referências (WEINBERG, 1972; CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011; SANTOS FILHO, 2012).

e

$$\int d^D X \sqrt{-G} \frac{1}{\phi} G^{AB} \nabla_A \phi \delta(\nabla_B \phi) = \int d^D X \sqrt{-G} \left(\frac{1}{\phi^2} \nabla_A \phi \nabla^A \phi - \frac{1}{\phi} \square \phi \right) \delta \phi. \quad (52)$$

Desse modo podemos reescrever δS_{BD} como sendo dada por

$$\begin{aligned} \delta S_{BD} = & \frac{1}{16\pi} \int d^D X \sqrt{-G} \left\{ \left[\phi \left(R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} R \right) + \frac{\omega}{\phi} \left(\frac{1}{2} G_{AB} \nabla_C \phi \nabla^C \phi - \nabla_A \phi \nabla_B \phi \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + G_{AB} \square \phi - \nabla_A \nabla_B \phi \right] \delta G^{AB} + \left[R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_A \phi \nabla^A \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi \right] \delta \phi \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Lembrando que δS_{BD} pode ser escrito na forma

$$\delta S_{BD} = \int d^D X \left\{ \frac{\delta S_{BD}}{\delta G^{AB}} \delta G^{AB} + \frac{\delta S_{BD}}{\delta \phi} \delta \phi \right\}, \quad (54)$$

podemos comparar as duas últimas equações para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{BD}}{\delta G^{AB}} = & \frac{1}{16\pi} \sqrt{-G} \left[\phi \left(R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} R \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\omega}{\phi} \left(\frac{1}{2} G_{AB} \nabla_C \phi \nabla^C \phi - \nabla_A \phi \nabla_B \phi \right) + G_{AB} \square \phi - \nabla_A \nabla_B \phi \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

e

$$\frac{\delta S_{BD}}{\delta \phi} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-G} \left[R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_A \phi \nabla^A \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi \right]. \quad (56)$$

Portanto, as equações de movimento para a gravitação de Brans-Dicke podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} R = & \frac{8\pi}{\phi} T_{AB} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_A \phi \nabla_B \phi - \frac{1}{2} \nabla_C \phi \nabla^C \phi G_{AB} \right) \\ & + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_A \nabla_B \phi - G_{AB} \square \phi \right), \end{aligned} \quad (57)$$

e

$$\square \phi = -\frac{\phi}{2\omega} R + \frac{1}{2\phi} \nabla^A \phi \nabla_A \phi. \quad (58)$$

O CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS *WARPED*

Considere que a ação de matéria S_M seja dada pela ação de um sistema de campos escalares interagentes, isto é

$$S_M = \int d^D X \sqrt{-G} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N G^{AB} \partial_A \Phi_i \partial_B \Phi_i - V(\Phi) \right). \quad (59)$$

A variação dessa ação nos conduz à seguinte expressão

$$\begin{aligned} \delta S_M = & \int d^D X \sqrt{-G} \left\{ \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} G_{AB} \partial_C \Phi_i \partial^C \Phi_i - \partial_A \Phi_i \partial_B \Phi_i \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} G_{AB} V(\Phi) \right] \delta G^{AB} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_A \left(\sqrt{-G} \partial^A \Phi_i \right) - \frac{\partial V}{\partial \Phi_i} \right] \delta \Phi_i \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Por outro lado, a variação de S_M pode ser escrita em termos das derivadas funcionais com relação à métrica inversa G^{AB} e os campos escalares Φ_i 's

$$\delta S_M = \int d^D X \left\{ \frac{\delta S_M}{\delta G^{AB}} \delta G^{AB} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta S_M}{\delta \Phi_i} \delta \Phi_i \right\}. \quad (61)$$

Comparando as duas últimas equações, podemos escrever

$$\frac{\delta S_M}{\delta G^{AB}} = \sqrt{-G} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} G_{AB} \partial_C \Phi_i \partial^C \Phi_i - \partial_A \Phi_i \partial_B \Phi_i \right) + \frac{1}{2} G_{AB} V(\Phi) \right], \quad (62)$$

e

$$\frac{\delta S_M}{\delta \Phi_i} = \sqrt{-G} \left[\frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_A \left(\sqrt{-G} \partial^A \Phi_i \right) - \frac{\partial V}{\partial \Phi_i} \right] \quad (63)$$

Substituindo a Eq. (62) na Eq. (29), obtemos a seguinte expressão para o tensor de energia-momento

$$T_{AB} = \sum_{i=1}^N \left(\partial_A \Phi_i \partial_B \Phi_i - \frac{1}{2} G_{AB} \partial_C \Phi_i \partial^C \Phi_i \right) - G_{AB} V(\Phi) \quad (64)$$

Por outro lado, as equações para os campos escalares podem ser obtidas a partir da imposição

$$\frac{\delta S_M}{\delta \Phi_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (65)$$

Logo, obtemos as seguintes equações

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_A \left(\sqrt{-G} \partial^A \Phi_i \right) = \frac{\partial V}{\partial \Phi_i}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (66)$$

Fazemos a particularização $D = 5$ e $p = 3$, e consideramos que os campos escalares dependem somente da coordenada da dimensão extra y , *i.e.* $\Phi = \Phi(y)$. Consideramos ainda que a métrica do espaço-tempo seja dada pela Eq. (1), com $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, nesse caso obtemos $G = -e^{8A(y)}$ e, conseqüentemente, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d^2\Phi_i}{dy^2} + 4\frac{dA}{dy}\frac{d\Phi_i}{dy} = \frac{\partial V}{\partial\Phi_i}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (67)$$