UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente - SP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
(PROFMAT)

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM DO MÉTODO GRÁFICO E DO MÉTODO SIMPLEX NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.

JÚLIO CÉSAR BARRIOS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente – SP.

Orientador

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

2015

Barrios, Júlio César.
Modelagem matemática : uma abordagem do método gráfico e do método simplex na resolução de problemas de otimização / Júlio César Barrios. -- São José do Rio Preto, 2015
85 f. : il., tabs.

Orientador: Suetônio de Almeida Meira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Modelos matemáticos. 3. Otimização matemática. 4. Matrizes (Matemática) - Estudo e ensino. 5. Sistemas lineares - Estudo e ensino. 6. Matemática – Metodologia. I. Meira, Suetônio de Almeida. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Júlio César Barrios

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM DO MÉTODO GRÁFICO E DO MÉTODO SIMPLEX NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.

Dissertação APRESENTADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

Orientador

Prof. Dr. Aylton Pagamisse

UNESP – Presidente Prudente – SP

Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira

Universidade Federal de Uberlândia – MG

Presidente Prudente, 24 de julho de 2015

"...Se tentares viver de amor,
perceberás que, aqui na Terra,
convém fazeres a tua parte.
A outra, não sabes nunca se virá,
e não é necessário que venha.
Por vezes, ficarás desiludido,
porém jamais perderás a coragem,
se te convenceres de que, no amor,
o que vale é amar..."

Chiara Lubich

AGRADECIMENTOS

Este era o momento mais aguardado no processo de finalização deste trabalho. O mais aguardado pelo fato de que geralmente escrevemos esta parte quando tudo está finalizado, portanto um momento de alívio, onde temos a chance de externar toda a alegria pelo "dever cumprido" e a gratidão por todos aqueles que direta ou indiretamente estavam envolvidos neste momento tão importante. Portanto, agora, espero não falhar com ninguém.

Primeiramente, sem dúvida alguma, quero agradecer à Deus, a tudo que me proporcionou nesta vida: De nascer numa família que me deu todo o carinho, amor, incentivo para os estudos e que me corrigiu nas horas que foram necessárias; Ele, que me deu paz, prudência, tolerância para eu poder encarar o dia a dia e que me permitiu formar a minha própria família, com uma esposa companheira, afetuosa e com duas filhas maravilhosas que são a razão do meu viver. Obrigado Deus.

Aos meus pais João e Geanete que são meus maiores exemplos de vida, de conduta e à minha irmã Flávia com quem eu sei que posso sempre contar. Mãe desculpe-me pelos domingos à tarde que não fui à casa da senhora por causa das listas de exercícios ou por ficar estudando para as provas do mestrado...

À minha esposa Juliana que acabou fazendo comigo esse mestrado, esses dois longos anos em que teve que segurar a "barra" de ficar com as meninas, se privando muitas vezes de seus compromissos para que eu pudesse estudar para as provas, fazer os trabalhos e escrever a dissertação. Meu amor: NEOQEAV.

Às minhas princesas Sofia e Lara que como já disse, são a razão do meu viver, muito obrigado pelos beijinhos e abraços que recebia em meio a um monte de listas de exercícios e desculpas pelas vezes que o papai teve que trancar a porta do escritório... Amo vocês!

Aos meus sogros, cunhados e sobrinhos pelas vezes que nos almoços de domingo fiquei só para o almoço...

Ao meu professor, amigo e orientador Dr. Suetônio de Almeida Meira, ou simplesmente Toni. Uma amizade de 26 anos que se iniciou no primeiro ano de minha graduação e que perdura até hoje, culminando na orientação desta dissertação. Obrigado pelas dicas, pelos conselhos e pela confiança depositada em mim.

À todos meus companheiros da primeira turma do PROFMAT de Presidente Prudente – SP, que inicialmente era um grupo, com o tempo se formou uma família... todos se apoiando, dando força uns aos outros para que pudéssemos chegar neste momento tão esperado.

E finalmente, à todos meus alunos que passaram por mim nesses 23 anos de docência, afinal de contas, foi por eles e pelos que virão que me disponho a estudar cada vez mais.

Obrigado!

RESUMO

Um dos grandes problemas enfrentados pelos professores em sala de aula, ao apresentarem um assunto novo, é terem que responder à velha pergunta por parte dos alunos: "Para que serve isso que vamos aprender?". Muitas vezes o professor não consegue fazer esta ligação e mostrar ao seu aluno o porquê daquilo. Sabe-se que de fato, nem tudo aquilo que o professor trabalha e que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem, são aplicáveis 100% no cotidiano do aluno. Cabe ao professor tentar motivá-los, mostrando com entusiasmo a importância da Matemática, procurando sempre que possível uma situação-problema em que possa aplicar o conteúdo trabalhado. Para que haja esta motivação, a Modelagem Matemática pode ser um grande trunfo para o professor. Ela é uma alternativa de metodologia para o ensino de Matemática e tem como objetivo interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do nosso cotidiano. Este trabalho foca um tema que é muito utilizado nas áreas de Economia, Administração de Empresas, Engenharia e Finanças, que são os problemas de otimização, onde são informadas várias variáveis para uma determinada situação e o desafio é procurar chegar numa solução ótima. É um assunto em que o aluno do Ensino Médio pode ser motivado a refletir e pensar sobre uma situação real, que teoricamente só poderia ser vista no Ensino Superior. As "ferramentas" matemáticas que deverão ser usadas para a resolução dos problemas são todas trabalhadas por eles no Ensino Médio: Matrizes, Sistemas de Equações e Inequações Lineares, Funções, representação gráfica no plano cartesiano entre outras e também a possibilidade de utilizar recursos tecnológicos para o auxílio da resolução do problema. A proposta deste trabalho é escolher situações-problemas que envolvam problemas de otimização e procurar resolvê-los através do Método Gráfico e do Método Simplex. Foi escolhido um problema de maximização do lucro de uma empresa e com base nele foram modeladas através de equações e inequações as restrições como tempo de mão de obra, tempo de uso das máquinas, custo da matéria prima. Essas equações e inequações foram representadas graficamente gerando um polígono onde os vértices são os potenciais candidatos à solução ótima. Após os devidos testes o aluno verifica qual é esse vértice. Logo em seguida esse mesmo problema é resolvido através do Método Simplex, cujos passos são apresentados no trabalho, aproveitando os conhecimentos dos alunos em matrizes e sistemas lineares. É facilmente percebido pelo aluno o trabalho braçal destes métodos o que leva o aluno a questionar: "E numa empresa, com mais dados, informações, como é feito?". Para responder essa pergunta é apresentada uma saída computacional utilizando a função Solver, presente no programa Excel da Microsoft. Fazer nossas aulas ficarem 100% práticas, aplicáveis no cotidiano, é uma tarefa extremamente difícil, porém devemos ficar sempre atentos de fazermos o possível de aproveitar todas as oportunidades e o assunto abordado nos proporciona uma alternativa de apresentarmos a matemática de uma forma mais prática.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática. Otimização. Método Gráfico. Método Simplex. Matrizes. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

One of the major issues faced by teachers in the classroom, when introducing a new subject, is having to answer the same question from the students: "What's the reason for us to learn this?". Many times, teachers are not capable of making that kind of connection, and showing that to the students. It is already known that, in fact, not everything that is taught in school and not everything suggested on the Brazilian National Curriculum Parameters (PCN) are part of the students' everyday lives. Teachers have the task of motivating them, enthusiastically showing them the importance of mathematics; trying, as often as possible, to find a challenging situation, which teachers can use to support their work. In order for this to happen, Mathematical Modeling can be a great support system. It is a methodology alternative for the teaching of mathematics, and aims at interpreting and understanding the most different phenomena of our everyday lives. This study focuses on widely used topic in the fields of Economics, Business Administration, Engineering, and Finance, which are the optimization problems when several variables are shown for a given situation and the challenge is trying to reach the perfect solution. It is a subject in which high school students can be motivated to reflect and think about a given real situation, which, theoretically, could only be seen on higher education degrees. The mathematical "tools" that should be used for solving the problems are all studied by the students during high school: Matrices, Linear Systems of Equations and Inequalities, Functions, graphing in the Cartesian Plane, among others, and also there's the possibility of using technological resources during the process of solving the problem. The goal of this study is choosing challenging situations which involves the optimization of the problems, and trying to solve them according to the Graphic Method and the Simplex Method. A company profit maximization problem was chosen, and, based on that, restrictions, such as manpower, machines usage and the cost of the raw material were modeled using equations and inequalities, which were represented graphically, generating a polygon whose vertices are the potential candidates for the perfect solution. After some examinations, students analyze the vertex. Soon after that, the same problem is solved by the students according to the Simplex Method, whose steps are shown on the study, using their previous knowledge of matrices and linear systems. Students can easily realize the hard-work effort demanded from these methods, something that gets them wondering: "in a company with more data and information, how it is done?". To answer that question, we present a computational output using the Solver function, hosted on Microsoft Excel software. Making our classes totally practical, possible to be used in the everyday lives, is an extremely hard task, however, we must always be alert, trying to take every opportunity, and the issue discussed here provides us with an alternative of presenting mathematics in a more practical way.

Keywords: Mathematical Modeling. Optimization. Graphic Method. Simplex Method. Matrices. Linear Systems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes problemas enfrentados pelos professores em sala de aula, ao apresentarem um assunto novo, é terem que responder à velha pergunta por parte dos alunos: “Para que serve isso que vamos aprender?”. É claro que os alunos têm razão em perguntar, porém, muitas vezes o professor não consegue fazer esta ligação e mostrar ao seu aluno o porquê daquilo.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> “Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e uma visão de mundo.”

Sabe-se que de fato, nem tudo aquilo que o professor trabalha, que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem, são aplicáveis 100% no cotidiano do aluno. Cabe ao professor tentar motivá-los, mostrando com entusiasmo a beleza e importância da Matemática, procurando sempre que possível uma situação-problema em que possa aplicar o conteúdo trabalhado. Mesmo que seja para mostrar que dependendo da profissão que o aluno seguirá, haverá uma possibilidade de uso do conteúdo abordado.

> “Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações” (PCN, p.9)

Para que haja esta motivação, para que o aluno possa se envolver com o aprendizado, a Modelagem Matemática pode ser um grande trunfo para o professor.

Segundo BASSANEZI (2002), a Modelagem Matemática pode ser utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem, sendo um caminho para tornar a Matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável.

A Modelagem Matemática é uma alternativa de metodologia para o ensino de Matemática. A partir de conceitos gerais, procura-se mostrar a importância da Matemática para o conhecimento e compreensão da realidade onde se vive. Ela tem como objetivo interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do nosso cotidiano. Podem-se descrever estes fenômenos, analisá-los e interpretá-los com o propósito de gerar discussões reflexivas sobre tais fenômenos.

Cabe ao professor aliar o tema a ser escolhido com a realidade de seus alunos e aproveitar as experiências extraclasse deles aliadas à sua experiência em sala de aula.

Pode-se afirmar que Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo que tenta descrever matematicamente um fenômeno da nossa realidade para tentar compreendê-lo e estudá-lo, criando hipóteses e reflexões sobre tais fenômenos.

Seguindo esta linha de pensamento, dentre os inúmeros assuntos que poderiam ser abordados, este trabalho irá focar um tema que é muito utilizado nas áreas de Economia, Administração de Empresas, Engenharia e Finanças, que são os problemas de otimização.

Os problemas de otimização são aqueles onde são informadas várias variáveis para uma determinada situação e o desafio é procurar chegar a uma solução ótima, ou seja, na melhor solução possível.

Esta situação-problema é amplamente vista e aplicada na prática em empresas que desejam, ao fabricarem um determinado produto, obter o lucro máximo daquela produção, tendo que decidir a quantidade ideal de mão de obra, o número ideal de máquinas utilizadas, a quantidade de matéria-prima, de qual fornecedor compensaria fazer a aquisição desta matéria-prima, ou então em minimizar o custo de produção de um determinado produto por exemplo.

A escolha deste tema se deu pelos seguintes motivos:

i) É um assunto em que o aluno do Ensino Médio pode ser motivado a refletir e pensar sobre uma situação real, que teoricamente só poderia ser vista no Ensino Superior;

ii) As "ferramentas" matemáticas que deverão ser usadas para a resolução dos problemas são todas trabalhadas por eles no Ensino Médio: Sistemas de Equações e Inequações Lineares, Funções, representação gráfica no plano cartesiano entre outras.

iii) A possibilidade de utilizar recursos tecnológicos para o auxílio da resolução do problema (A função Solver, presente no programa Excel da Microsoft).

Com este tema, podemos também atender os objetivos básicos do PCN, de levar o aluno a:

- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.

- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas de conhecimento e da atualidade.

- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

E também a atender as seguintes competências e habilidades sugeridas no PCN:

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, etc.) e vice-versa.

- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

- Selecionar estratégias de resolução de problemas.

- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

A proposta deste trabalho é escolher situações-problemas que envolvam problemas de otimização e procurar resolvê-los através do Método Gráfico e do Método Simplex. No ensino superior estes problemas são amplamente estudados na disciplina de Programação Linear (PL).

No capítulo 2, é apresentado o conceito de Programação Linear, suas principais características, sua importância, os métodos de resolução, como o Método Gráfico e o Método Simplex e o problema modelo que será tratado no decorrer deste trabalho.

Já no capítulo 3, como fundamentação teórica, são apresentados alguns conceitos teóricos de Matrizes, Sistemas Lineares e Inequações Lineares que serão fundamentais ao utilizarmos o Método Gráfico e o Método Simplex na resolução dos problemas.

No capítulo 4, o problema sugerido na introdução será formulado segundo um modelo de Programação Linear e resolvido pelos dois métodos propostos: o Método Gráfico e o Método Simplex.

No capítulo 5, como muitos problemas de Programação Linear podem envolver um número muito grande de variáveis tornando-os assim muito complexos para serem resolvidos, é apresentada uma alternativa computacional utilizando a função Solver presente no programa Excel da Microsoft.

No capítulo 6, temos as considerações finais do trabalho realizado.

No apêndice é apresentada uma lista de problemas que foram selecionados de alguns livros presentes na bibliografia como sugestão para aplicação em sala de aula.

2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

Quando se fala em Programação Linear, segundo Goldbarg (2000), o termo programação já remete o leitor a pensar em algo computacional, um programa de computador. Na realidade a expressão programação neste caso deve ser entendida como planejamento. É claro que não se deve deixar de pensar que em muitos casos de Programação Linear a utilização do computador, da programação computacional, será indispensável uma vez que o número das variáveis de decisão é enorme na prática.

Segundo Moreira (2011), "A Programação Linear é um modelo matemático desenvolvido para resolver determinados tipos de problemas onde as relações entre as variáveis relevantes possam ser expressas por equações e inequações lineares".

Um modelo de Programação Linear, em geral, tem as seguintes características:

i) Maximizar ou minimizar o resultado de alguma combinação de variáveis, como o lucro na venda de dois ou mais produtos, ou o custo relacionado à sua produção.

ii) Existe certa necessidade de recursos, por exemplo, número de funcionários, horas de máquina ou matéria-prima.

iii) Estes recursos são limitados, ou seja, suas quantidades são restritas a certos valores.

A utilização dos sistemas de equações e inequações lineares em Programação Linear são de grande valia, pois, deve-se escrever uma expressão matemática que se quer maximizar ou minimizar e o conjunto de restrições (expressas por equações ou inequações matemáticas) que devem ser obedecidas ao mesmo tempo em que se maximiza ou minimiza seu problema.

Após a modelagem do problema proposto, ou seja, escrever algebricamente a função objetivo e suas restrições (em forma de equações ou inequações lineares) existe duas maneiras interessantes de resolução deste problema a serem apresentadas aos alunos, que são o Método Gráfico e o Método Simplex.

O Método Gráfico consiste em representar as restrições escritas em forma de equações e inequações lineares geometricamente. No caso do ensino médio, problemas que envolvem duas variáveis seriam os mais indicados, pois o aluno poderá utilizar conhecimentos de Funções do 1º grau e de Geometria Analítica nas construções de retas e semiplanos no plano cartesiano.

Após a construção gráfica gera-se uma região, que chamaremos de Zona Viável, que contém os pontos que respeitam simultaneamente as restrições oferecidas e a partir desta região, pode-se localizar aquele ponto que resultará no valor ótimo procurado, quando existir, é claro.

O Método Simplex é um algoritmo que foi desenvolvido pelo matemático norte-americano George Bernard Dantzig (1914 – 2005) na década de 40, considerado uma grande referência na resolução de problemas de Programação Linear.

Ao falar sobre este assunto é interessante contextualizá-lo e mostrar ao aluno que, por exemplo, na Segunda Grande Guerra, grupos interdisciplinares estudavam a melhor forma de se otimizar, de se conseguir um uso mais eficiente de seus radares, escoltas navais, canhões antiaéreos, alocações de materiais bélicos. Para isto, os estudos com equações e inequações lineares tiveram grande importância.

2.1 Problema Modelo

A seguir, tem-se um pequeno exemplo de problema de Programação Linear envolvendo maximização:

A Indústria de Móveis Kukamonga produz, entre outros artigos, dois tipos de conjuntos de sofás: o modelo “Arcobaleno” e o modelo “Gioia”. A Kukamonga está preparando sua programação semanal de produção para os dois conjuntos. Embora não haja restrições quanto à demanda do modelo Arcobaleno (dentro das limitações de produção atuais), para o modelo Gioia dificilmente a demanda semanal ultrapassará 9 unidades. A fabricação dos dois modelos é dividida em dois grandes blocos de operações:

- Preparação: Corte da estrutura de madeira e preparação para montagem;
- Acabamento: Montagem e colocação do revestimento.

Em virtude dos outros produtos que fabrica a Kukamonga não poderá utilizar mais de 39 horas para a Preparação e 91 horas para o Acabamento durante a semana. O modelo Arcobaleno exige 2 horas para a preparação e 7 horas para o acabamento, enquanto que o modelo Gioia, exige 3 horas para a preparação e 4 horas para o acabamento.

A Kukamonga deve decidir quantas unidades de cada modelo devem ser fabricadas, levando em consideração que o modelo Arcobaleno fornece um lucro unitário de R$ 4.000,00, enquanto, para o modelo Gioia, o lucro unitário é de R$ 5.000,00.

Como foi dito no início, este é um modelo de problema de Programação Linear, cuja resolução será feita nos próximos capítulos.

A seguir vamos apresentar alguns conceitos teóricos de Matrizes, Sistemas Lineares e Inequações Lineares e posteriormente resolver o problema da empresa Kukamonga utilizando o Método Gráfico e o Método Simplex.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Matrizes

Matrizes são tabelas formadas por linhas e colunas e que em cada posição originada pela intersecção destas linhas e colunas contém um elemento.

Considerando que a matriz tenha m linhas e n colunas, onde $m, n \in \mathbb{N}^*$ pode-se representá-la da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{mxn}$$

Onde:

- A é o nome da matriz (que será sempre uma letra maiúscula).
- $a_{11}, a_{12}, a_{21}, \ldots a_{mn}$ são as posições da matriz e que podemos generalizá-las da seguinte maneira: a_{ij}, onde $i = 1,2,\ldots, m$ e $j = 1,2,\ldots, n$.
- mxn é a ordem da matriz, onde m é o número de linhas e n é o número de colunas.
- Denota-se por $M_{mxn}(\mathbb{R}) = \{A \,/\, A \text{ é matriz de ordem } mxn\}$ o conjunto de todas as matrizes mxn com entradas reais.

Além dos parênteses, a matriz pode ser representada por colchetes e, menos usualmente, por dois segmentos paralelos, como nos exemplos a seguir.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{Vmatrix} 3 & 10 & 6 \\ -1 & 3/4 & 0 \end{Vmatrix}$$

3.1.1 Igualdade de matrizes

Sejam duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{pxq}$. Elas são ditas iguais, ou seja, $A = B$, se e somente se: $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30^0 & \sqrt{9} \\ \log 100 & 2^2 \end{pmatrix}$

3.1.2 Tipos de matrizes

As matrizes, dependendo de sua estrutura e dos elementos que fazem parte dela, podem ser classificadas por termos particulares:

i) Matriz Quadrada: Uma matriz é chamada quadrada quando possuir o número de linhas igual ao número de colunas, ou seja, A_{mxn} será quadrada quando $m = n$.

Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vale ressaltar que nas matrizes quadradas em especial, existem as diagonais principal e secundária. Os elementos a_{ij} para os quais $i = j$ compõem a diagonal principal da matriz A_{nxn} , e os elementos a_{ij} para os quais $i + j = n + 1$ compõem a diagonal secundária da matriz A_{nxn}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal Secundária
(i + j = n + 1)

Diagonal Principal
(i = j)

ii) Matriz Retangular: Uma matriz é chamada retangular quando o número de linhas for diferente do número de colunas, ou seja, A_{mxn} será retangular quando $m \neq n$.

Exemplos: $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 \\ 13 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \\ 9 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

iii) Matriz Linha: Uma matriz é chamada matriz linha quando possuir apenas uma linha, ou seja, A_{mxn} será linha quando $m = 1$.

Exemplo: $$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

iv) Matriz Coluna: Uma matriz é chamada matriz coluna quando possuir apenas uma coluna, ou seja, A_{mxn} será coluna quando $n=1$.

Exemplo: $$F = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v) Matriz Nula: Uma matriz é chamada nula quando todos os elementos forem iguais a zero, ou seja, A_{mxn} será nula quando $a_{ij} = 0$ para todo i, j.

Exemplo: $$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vi) Matriz Oposta: Uma matriz é chamada oposta de outra matriz quando todos os elementos de uma matriz forem opostos aos seus elementos correspondentes da outra matriz.

Exemplo: $$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 \\ 13 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad -C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ -13 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

vii) Matriz Transposta: Uma matriz é chamada transposta de outra matriz quando os elementos de cada linha de uma matriz passam a ser os elementos de cada coluna da outra matriz. Assim, se uma matriz C é do tipo mxn, na transposta C^t será do tipo nxm.

Exemplo: $$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 \\ 13 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 1 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

viii) Matriz Diagonal: Uma matriz quadrada é chamada de Matriz Diagonal, quando todos os elementos que não fazem parte da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, A_{nxn} será Matriz Diagonal quando $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ix) Matriz Identidade: Uma matriz é chamada Identidade quando $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$, ou seja, é uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exemplos: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

x) Matriz Triangular: Matrizes triangulares podem ser classificadas como superior ou inferior. Uma Matriz Triangular Superior é aquela que possui todos os elementos abaixo da diagonal principal iguais a zero, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo i > j. Já uma Matriz Triangular Inferior é aquela que possui todos os elementos acima da diagonal principal iguais a zero, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo i < j.

Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz Triangular Superior Matriz Triangular Inferior

xi) Matriz Simétrica: Uma matriz é chamada de simétrica quando é igual a sua matriz transposta, $A=A^t$, ou seja, é toda matriz quadrada em que $a_{ij} = a_{ji}$..

Exemplos: $G = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & 10 & -1 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

3.1.3 Operações com matrizes

3.1.3.1 Adição

Sejam duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{pxq}$. A matriz $C = A + B$ só existirá se $m = p$ e $n = q$ e mais, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

3.1.3.1.1 Propriedades da adição de matrizes

Sejam as matrizes A e B de ordem *mxn*. Tem-se que vale as propriedades:

i) Comutativa: A + B = B + A
ii) Associativa: A + (B + C) = (A + B) + C
iii) Elemento Neutro: A + O = A , onde O é a matriz nula
iv) Elemento Oposto: A + (– A) = O

3.1.3.2 Multiplicação de uma matriz por um escalar

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $k \in \mathbb{R}$, tem-se que a matriz $k.A = (k.a_{ij})_{mxn}$

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, então $5A = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 30 & -35 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$

3.1.3.2.1 Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar

Sejam as matrizes A e B de ordem *mxn* e os números reais α e β. Tem-se que vale as propriedades:

i) $(\alpha\beta)$A = $\alpha(\beta$A)
ii) $(\alpha+\beta)$A = αA + βA
iii) α(A+B) = αA + αB
iv) 1A = A

3.1.3.3 Multiplicação de matrizes

Sejam duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{pxq}$. A matriz $C = A.B$ só existirá se $n = p$, sua ordem será igual à *mxq* e mais, c_{ij} é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-*ésima* linha de A pelos elementos da j-*ésima* coluna de B.

Exemplos:

$$a)\ \mathrm{A}(a_{ij})_{2x2}.\mathrm{B}(b_{ij})_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 + 2.0 + 3.(-1) & 1.3 + 2.(-1) + 3.5 \\ 3.2 + 2.0 + 1.(-1) & 3.3 + 2.(-1) + 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

3.1.3.3.1 Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes A, B e C e verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, tem-se que valem as propriedades:

i) Associativa: (A.B).C = A.(B.C)
ii) Distributiva em relação à adição: A.(B + C) = A.B + A.C
(A + B).C = A.C + B.C
iii) Elemento neutro: $A.I_n = I_n.A = A$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n e A uma matriz quadrada, também de ordem n.

A propriedade comutativa, na maior parte das vezes, não é válida para a multiplicação de matrizes. Por exemplo, se considerarmos as matrizes A_{3x2} e B_{2x3}, temos que $(AB)_{3x3}$ e $(BA)_{2x2}$, portanto, $AB \neq BA$. Mesmo que as matrizes A e B tenham a mesma ordem e que satisfaçam as condições de existência para a multiplicação de matrizes, que neste caso deveriam ser matrizes quadradas de ordem n, a propriedade comutativa não é necessariamente válida como temos no exemplo a seguir.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Temos que $AB = \begin{pmatrix} 18 & 26 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}$, logo $AB \neq BA$.

O anulamento do produto também não vale, ou seja, se O é uma matriz nula, A.B = O não implica, necessariamente, que A = O ou B = O.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Temos que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.3.3.2 Matriz Inversa e Matriz Ortogonal

Seja a matriz A de ordem n. Ela admitirá uma matriz, chamada inversa e denotada por A^{-1}, se o produto entre elas resultar na matriz identidade, ou seja:

$$A.A^{-1} = I_n = A^{-1}.A$$

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. A sua matriz inversa será $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, pois,

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma matriz quadrada de ordem *n,* inversível, é ortogonal, quando a sua inversa é igual a sua transposta, ou seja:

$$A^{-1} = A^t$$

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é ortogonal, pois, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^t$

3.2 Sistemas de Equações Lineares

3.2.1 Equações lineares

Uma equação linear de n incógnitas sobre $\mathbb{R}$ é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$$

Onde:

$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são chamados coeficientes.
$b \in \mathbb{R}$ é o termo independente.
$x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ são chamados incógnitas, ou variáveis.

3.2.1.1 Solução de uma equação linear

Uma solução de uma equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$ é uma sequência ordenada de números reais $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_{n-1}, \beta_n)$ para o qual a sentença $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + ... + a_{n-1}\beta_{n-1} + a_n\beta_n = b$ é verdadeira.

Exemplos: a) $x_1 + 2x_2 = 10$ Soluções - (6,2) ; (8,1) ; (0,5) ...
b) $2x + y – z = 5$ Soluções - (3,0,1) ; (1,7,4) ...

3.2.1.2 Equação linear homogênea

Uma equação linear é chamada homogênea quando o termo independente é igual a zero, ou seja, $b = 0$.

Exemplos : a) $3x + 6y = 0$ b) $6w – 9t + 7p = 0$

Em uma equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0$, dentre as várias soluções que ela pode admitir, a trivial é uma delas, onde todos os elementos que constituem o conjunto ordenado são iguais à zero.

3.2.2 Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares é um conjunto de duas ou mais equações lineares que devem ser consideradas simultaneamente.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A sequência ordenada de números reais $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_{n-1}, \beta_n)$ é uma solução do sistema se for solução de todas as equações do sistema.

3.2.2.1 Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares, S1 e S2 são chamados equivalentes se possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: $(S_1)\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$ e $(S_2)\begin{cases} 2x + y = 18 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

(S_1) e (S_2) são equivalentes, pois têm o mesmo conjunto solução S={(8,2)}

3.2.2.2 Matrizes associadas a um sistema linear

Considere o sistema linear:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Nele, podem-se destacar duas matrizes importantes, a Matriz Ampliada (ou completa) e a Matriz dos Coeficientes (ou incompleta)

Chama-se *Matriz Ampliada* ou *Completa* de S à seguinte matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Chama-se *Matriz dos Coeficientes* ou *Incompleta* de S à seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo: Para o sistema $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 13x_2 + x_3 = -5 \\ 5x_1 + 9x_3 = 6 \end{cases}$ temos que:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 2 & 10 \\ 1 & 13 & 1 & -5 \\ 5 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right)$ É sua Matriz Ampliada ou Completa.

$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & 13 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ É sua Matriz dos Coeficientes ou Incompleta.

3.2.2.3 Classificação de um sistema linear

Quanto ao número de soluções, um sistema linear pode receber as seguintes classificações:

- Sistema Possível
- Sistema Impossível

Um sistema linear é classificado como *Possível* quando possui solução. Agora, caso não tenha solução ele passa a ser classificado de *Impossível*.

Um sistema *Possível* pode ser chamado como *Determinado* quando apresenta uma única solução e de *Indeterminado* quando apresenta várias soluções.

A figura 3.1 resume as possíveis classificações de um sistema linear quanto ao número de soluções:

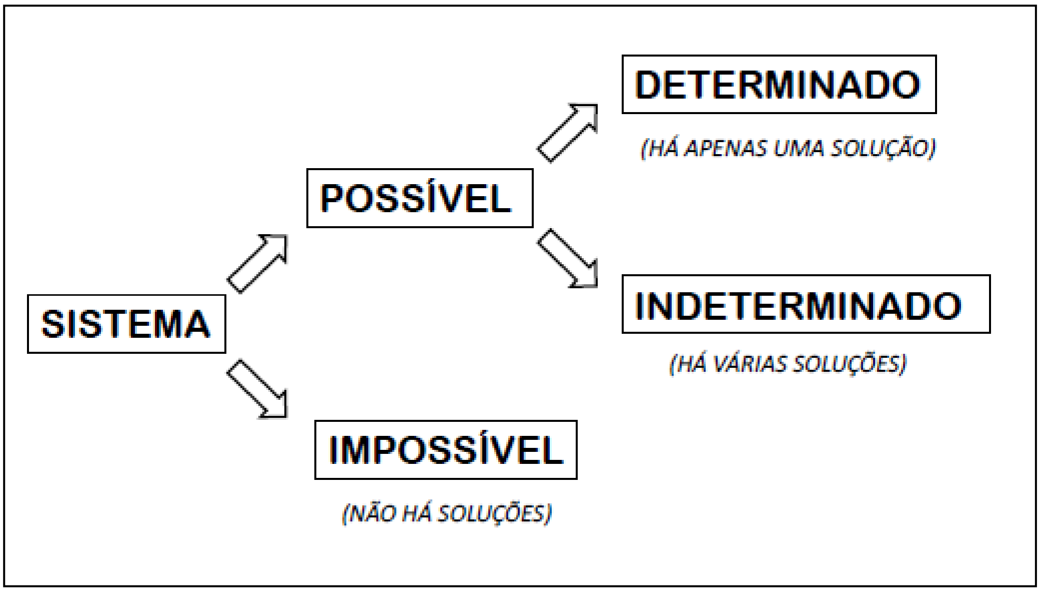


Figura 3.1 – Classificação de um sistema linear quanto ao número de soluções

3.2.3 Métodos de resolução de sistemas de equações lineares

Para obter o conjunto solução de um sistema linear existem vários métodos de resolução como o método da substituição, a Regra de Cramer, o método do escalonamento (método de Gauss), o método de Gauss-Jordan, entre outros. O presente trabalho fará referência ao método do escalonamento e ao método de Gauss-Jordan.

3.2.3.1 Método do escalonamento (ou Método de Gauss)

Este método consiste em reescrever o sistema dado em outro, equivalente a ele, só que de uma forma que se consiga transformar a matriz dos coeficientes numa matriz triangular superior, pois assim a resolução do sistema fica imediata.

Sabe-se que duas matrizes são equivalentes quando uma pode ser obtida da outra por meio de certo número de operações elementares sobre as linhas da matriz.

Como já foi exposto, um sistema linear de equações pode ser expresso em forma matricial (Matriz Ampliada). Se o método do escalonamento consiste em obter um sistema equivalente, dizemos que a matriz ampliada deste novo sistema também é equivalente à matriz ampliada original.

Para a aplicação deste método, emprega-se uma série de operações elementares sobre as equações do sistema. Estas operações elementares são as seguintes:

a) Multiplicar uma linha (equação) por um escalar não nulo k $\left(L_i \to kL_i\right)$
b) Adicionar uma linha (equação) a outra $\left(L_i \to L_i + L_j\right)$
c) Permutar duas linhas (equações) $\left(L_i \leftrightarrow L_j\right)$
d) Substituir a *i*-ésima linha por k vezes a *j*-ésima linha mais a *i*-ésima linha $\left(L_i \to L_i + kL_j\right)$

Concluímos então que as matrizes ampliadas associadas a sistemas equivalentes são matrizes equivalentes. Portanto, ao aplicar o método do escalonamento, para facilitar o procedimento, será trabalhada apenas a matriz ampliada.

3.2.3.1.1 Aplicação do método do escalonamento

Abaixo segue um exemplo de resolução de um sistema 3x3 (três equações e três incógnitas)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8 \\ -x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 50 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ -1 & 9 & 8 & 50 \end{array}\right) \text{(Matriz Ampliada)}$$

Perceba que foi colocada uma linha tracejada separando a matriz dos coeficientes e o termo independente para didaticamente ficar menos confuso para o aluno.

O objetivo é, através das operações elementares já citadas, transformar a matriz ampliada original em outra de tal forma que a matriz dos coeficientes passe a ser uma matriz triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ -1 & 9 & 8 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_1 + L_3]{L_2 \to (-2)L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 10 & 9 & 48 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to (-5)L_2 + L_3}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \to x_1 = -7 \\ 2x_2 + 3x_3 = 12 \to x_2 = 3 \\ -6x_3 = -12 \to x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(-7, 3, 2)\}$$

3.2.3.1.2 Classificação de um sistema linear - Escalonamento

Para poder classificar um sistema linear após a aplicação do método do escalonamento basta verificar o seguinte:

- *Sistema Possível e Determinado*: Ocorre quando se consegue determinar os valores de todas as variáveis. Geralmente se acha a última variável na última linha, depois, na linha acima, com a última variável se determina a penúltima variável, e assim sucessivamente.

- *Sistema Possível e Indeterminado*: Ocorre quando os elementos da última linha da matriz ampliada são iguais à zero.

- *Sistema Impossível*: Ocorre quando os elementos da última linha da matriz dos coeficientes (à esquerda da linha pontilhada) são iguais a zero e o valor do elemento que corresponde ao termo independente (à direita da linha pontilhada) é diferente de zero.

Exemplos:

$$a)\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+5y+8z=3 \\ 5x+12y+19z=7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 5 & 12 & 19 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\to(-5)L_1+L_3]{L_2\to(-2)L_1+L_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\to(-2)L_2+L_3}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad y+2z=1 \\ \quad 0=0 \end{cases} \to \text{Sistema Possível e Indeterminado}$$

$$b)\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ x+y-z=4 \\ 4x+y-z=10 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\to(-4)L_1+L_3]{L_2\to(-2)L_1+L_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\to(-1)L_2+L_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=4 \\ -3y+3z=-9 \\ \quad 0=3 \end{cases} \to \text{Sistema Impossível}$$

3.2.3.2 Método de Gauss-Jordan

Enquanto o método do escalonamento (ou método de Gauss) consiste em transformar a matriz dos coeficientes numa matriz triangular superior, o método de Gauss-Jordan consiste na transformação da matriz dos coeficientes em matriz diagonal com todos os coeficientes da diagonal principal iguais a um, que é equivalente à matriz identidade. Esta transformação é obtida através da aplicação sucessiva de operações elementares sobre linhas (ou sobre colunas), buscando a eliminação seletiva dos elementos não nulos externos à diagonal principal.

3.2.3.2.1 Aplicação do método de Gauss-Jordan

Vamos utilizar o mesmo exemplo do item 2.2.3.1.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8 \\ -x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 50 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ -1 & 9 & 8 & 50 \end{array}\right) \text{(Matriz Ampliada)}$$

O objetivo é, através das operações elementares já citadas, transformar a matriz ampliada original em outra de tal forma que a matriz dos coeficientes passe a ser uma matriz diagonal cujos elementos sejam iguais a um.

Na primeira coluna da matriz ampliada deveremos fazer o elemento $a_{11} = 1$ que será chamado de "Pivô" e os demais elementos iguais à zero. Neste caso a_{11} já vale um, (porém, se não fosse, bastaria multiplicar a equação toda pelo seu inverso, exceto no caso que ele valha zero, onde bastaria permutar esta equação por outra que não seja nula nesta posição), então, através de operações elementares vamos "zerar" os demais elementos desta coluna:

Pivô

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ -1 & 9 & 8 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_1 + L_3]{L_2 \to (-2)L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 10 & 9 & 48 \end{array}\right)$$

O próximo passo é, na nova matriz ampliada, fazer o elemento $a_{22} = 1$ (novo Pivô) e os demais elementos da segunda coluna iguais à zero.

Pivô

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 10 & 9 & 48 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \left(\frac{1}{2}\right)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 10 & 9 & 48 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 10 & 9 & 48 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to (-10)L_2 + L_3]{L_1 \to (-1)L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{array}\right)$$

Agora o passo é fazer o elemento $a_{33} = 1$ e os demais elementos da terceira coluna iguais à zero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to \left(-\frac{1}{6}\right)L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Pivô

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to \left(-\frac{3}{2}\right)L_3 + L_2]{L_1 \to \left(\frac{1}{2}\right)L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -7 & \to x_1 = -7 \\ \qquad x_2 \qquad = 3 & \to x_2 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 = 2 & \to x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(-7, 3, 2)\}$$

A vantagem de se utilizar este método, é que no término do processo, a identificação dos valores das variáveis é imediata.

Com a prática, percebe-se que não há a obrigatoriedade de que a matriz dos coeficientes no final do processo seja necessariamente a matriz identidade. Basta que em cada coluna, tendo um elemento igual a 1 e os demais iguais a 0, chega-se imediatamente aos valores das variáveis.

Por exemplo, vamos supor que um determinado sistema linear após todas as etapas do processo resulte na seguinte matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Pode-se concluir diretamente que $x_3 = 9$, $x_1 = 5$ e $x_2 = 4$, pois:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \quad\quad x_3 = 9 & \rightarrow x_3 = 9 \\ x_1 \quad\quad = 5 & \rightarrow x_1 = 5 \Rightarrow S = \{(5.4.9)\} \\ \quad x_2 \quad = 4 & \rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

3.2.4 Soluções de sistemas lineares: Interpretação Gráfica.

Neste tópico serão examinados sistemas de equações lineares e suas soluções sob o ponto de vista gráfico. Para isso a análise será realizada para sistemas de duas equações e duas incógnitas que são os mais comuns aos estudantes do ensino médio e conhecidos como sistemas 2x2.

Uma equação linear com duas incógnitas gera no plano cartesiano uma reta. Num sistema de equações lineares 2x2, tem-se duas retas no plano. Algebricamente este sistema poderá ter uma solução (sistema possível e determinado), nenhuma solução (sistema impossível) ou infinitas soluções (sistema possível e indeterminado), conforme já visto no item 2.2.3. Geometricamente tem-se que um sistema:

- Possível e Determinado: representa duas retas concorrentes.
- Possível e Indeterminado: representa duas retas coincidentes.
- Impossível: representa duas retas paralelas.

A seguir têm-se alguns exemplos:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

É um sistema possível e determinado cujo conjunto solução é igual S = {(6,4)}

Graficamente:

$x + y = 10$

x	y
0	10
10	0

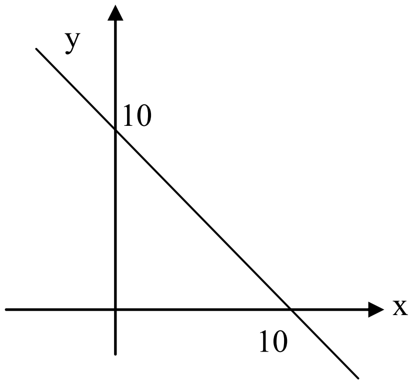


Figura 3.2 – Reta $x + y = 10$

$2x - y = 8$

x	y
0	-8
4	0

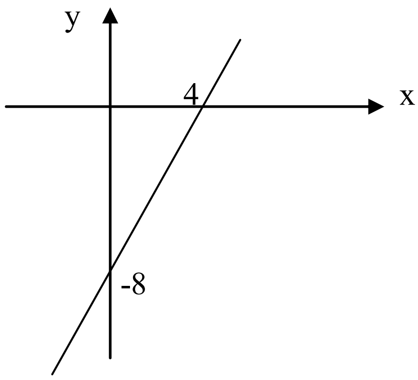


Figura 3.3 – Reta $2x - y = 8$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

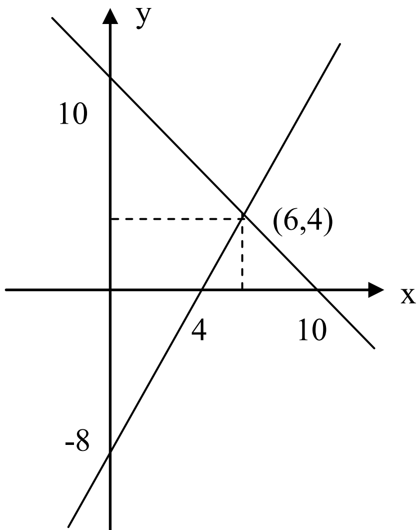


Figura 3.4 – Intersecção das retas $x + y = 10$ *e* $2x - y = 8$

A intersecção das duas retas gera o ponto (6,4).

b) $\begin{cases} x+y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

É um sistema impossível cujo conjunto solução é vazio.

Graficamente:

$x+y=10$

x	y
0	10
10	0

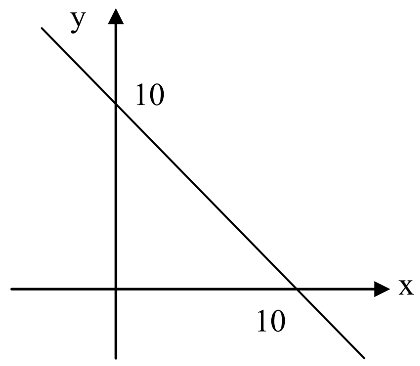


Figura 3.5 – Reta $x+y=10$

$x+y=4$

x	y
0	4
4	0

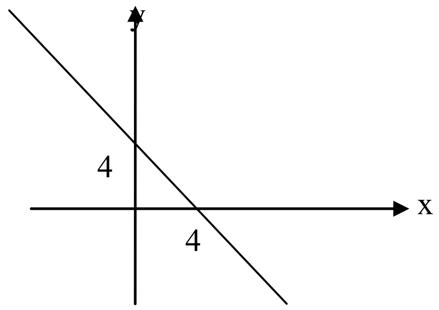


Figura 3.6 – Reta $x+y=4$

$\begin{cases} x+y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

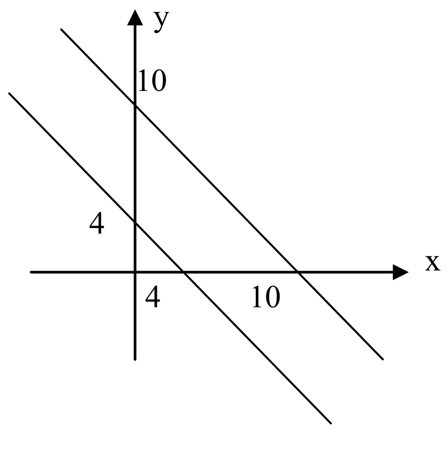


Figura 3.7 – Retas $x+y=10$ *e* $x+y=4$

Como as retas não têm pontos em comum, elas são paralelas.

c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$

É um sistema possível e indeterminado já que uma equação é o dobro da outra.

Graficamente:

$x + y = 10$

e

$2x + 2y = 20$

x	y
0	10
10	0

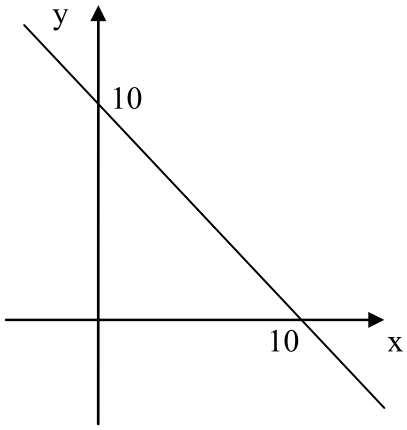


Figura 3.8 – Retas $x + y = 10$ *e* $2x + 2y = 20$

As retas são coincidentes.

3.3 Inequações Lineares

3.3.1 Definição

Sabemos que uma equação linear de n incógnitas sobre $\mathbb{R}$ é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$$

Onde:

$a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são chamados coeficientes.
$b \in \mathbb{R}$ é o termo independente.
$x_1, x_2, x_3,..., x_{n-1}, x_n$ são chamados incógnitas, ou variáveis.

Porém, se no lugar do símbolo de igual =, for colocado os símbolos >, <, ≥, ou ≤ a expressão deixa de ser uma equação e passa ser um a inequação linear.

As inequações lineares mais trabalhadas no ensino fundamental e médio são do tipo:

$$a_1x_1 > b,\ \ a_1x_1 < b,\ \ a_1x_1 \geq b \ \ ou \ \ a_1x_1 \leq b$$

Onde $a_1 \in \mathbb{R}$ é o coeficiente, $b \in \mathbb{R}$ é o termo independente e x_1 é a incógnita, ou variável.

Para um melhor aproveitamento deste trabalho, é interessante relembrar o comportamento gráfico das inequações lineares com duas variáveis.

3.3.2 Representação gráfica

A seguir têm-se alguns exemplos:

Seja a inequação $x+y\geq 10$. É fácil perceber, fazendo testes, que existem muitos pares ordenados que conseguem satisfazer esta expressão, mas qual seria a representação gráfica desta situação?

Primeiramente considere a equação $x+y=10$. Sabemos que o gráfico que a representa é a seguinte reta:

$x+y=10$

x	y
0	10
10	0

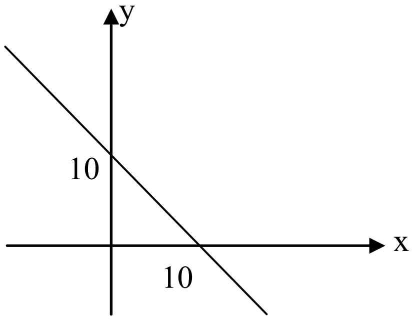


Figura 3.9 – Reta $x+y=10$

Vemos que esta reta divide o plano cartesiano em dois semiplanos. Fazendo uma simples verificação, os pontos que pertencem à reta ao serem substituídos fazem a expressão resultar em 10 satisfazendo assim a equação, os que estão acima da reta resultam em valores maiores que 10 e consequentemente os pontos que estão abaixo da reta resultam em valores menores que 10. Portanto, no caso da inequação $x+y\geq 10$ temos o seguinte semiplano:

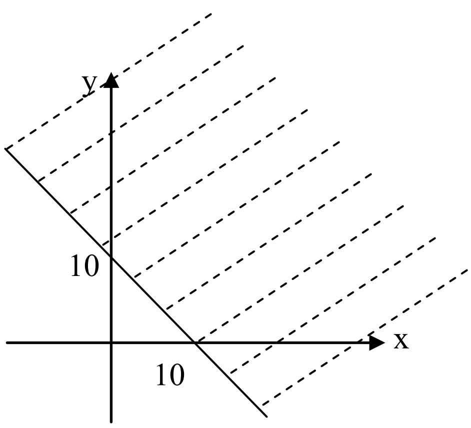


Figura 3.10 – Semiplano $x+y\geq 10$

Da mesma forma a inequação $2x - y \leq 8$ gerará o seguinte semiplano:

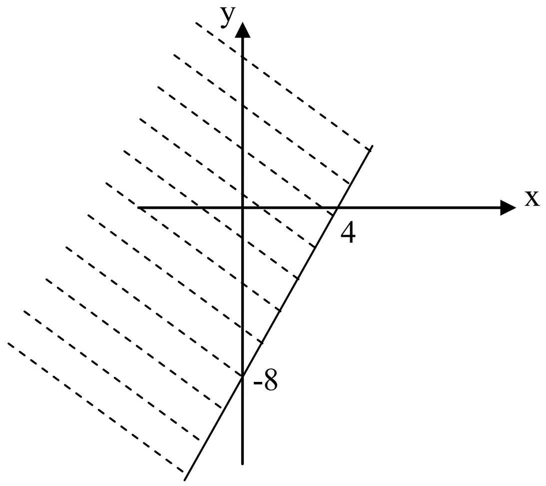


Figura 3.11 – Semiplano $2x - y \leq 8$

Vale ressaltar que quando a inequação apresenta os símbolos > ou < ao invés de ≥ ou ≤, a única diferença é que os pontos que pertencem à reta não poderão participar do semiplano gerado, devendo-se então traçar uma reta tracejada no lugar da reta contínua.

3.3.3 Sistema de inequações lineares – Representação gráfica

Um sistema de inequações lineares é um conjunto de inequações cujo objetivo é encontrar o conjunto de todos os pontos que satisfaçam simultaneamente as inequações apresentadas.

Graficamente, em se tratando de inequações com duas variáveis, o conjunto solução do sistema é a região gerada pela intersecção dos semiplanos determinados por cada inequação.

Por exemplo, considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \leq 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Esboçando o gráfico de cada inequação separadamente temos:

$x - y \leq 1$

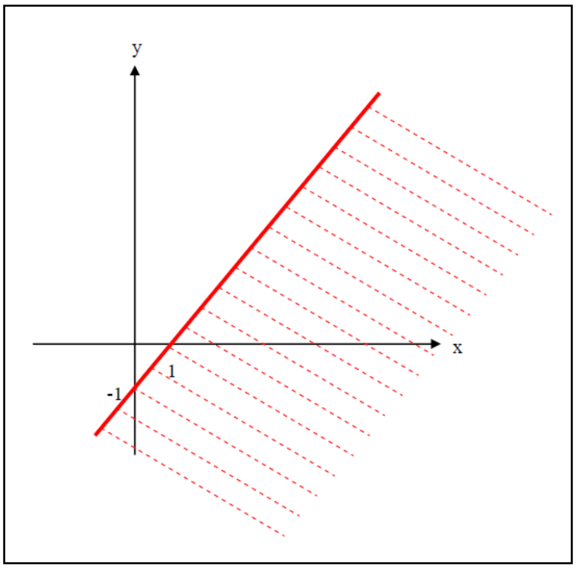


Figura 3.12 – Semiplano $x - y \leq 1$

$x + y \leq 5$

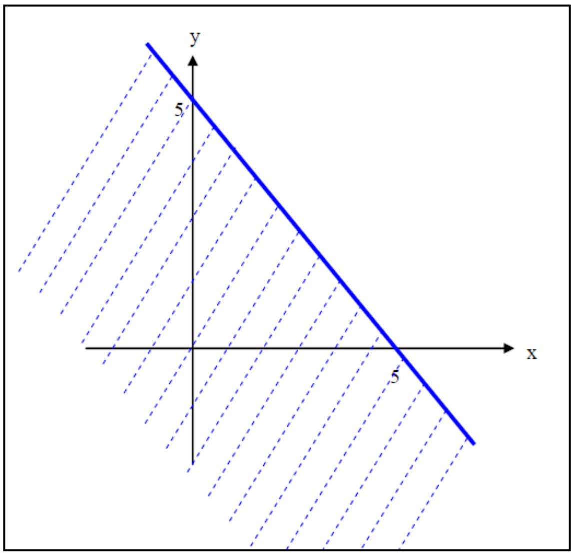


Figura 3.13 – Semiplano $x + y \leq 5$

$y \geq 0$

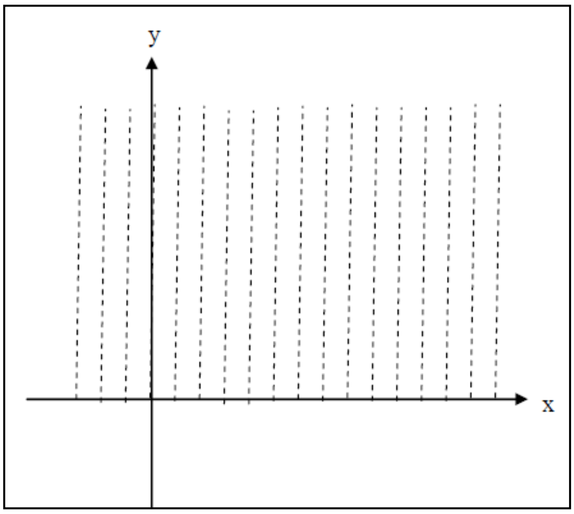


Figura 3.14 – Semiplano $y \geq 0$

Esboçando os três semiplanos no mesmo plano cartesiano temos:

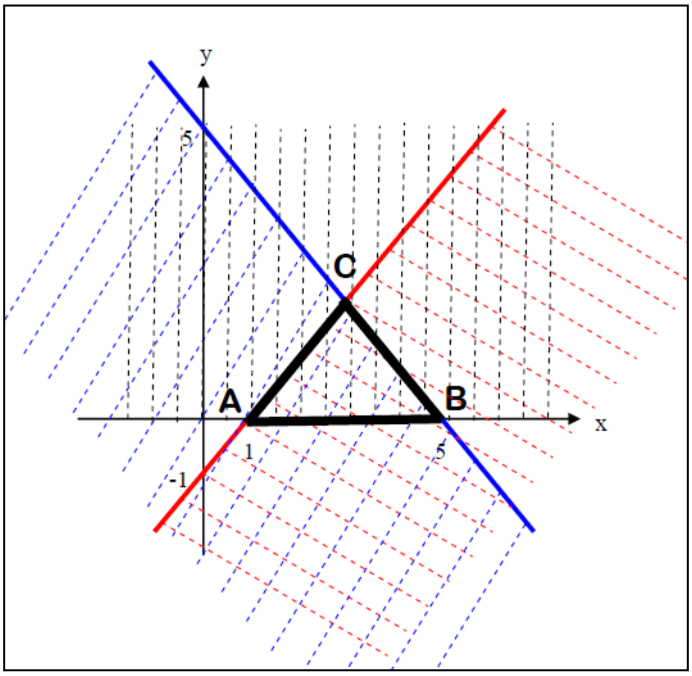


Figura 3.15 – Solução gráfica do sistema de inequações

A região delimitada pelo triângulo ABC, que representa a intersecção dos três semiplanos, é a que corresponde aos pontos que satisfazem as três inequações simultaneamente.

4 RESOLVENDO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

4.1 Formulação de Modelos do Problema.

Antes de qualquer coisa, precisamos conhecer algumas definições importantes:

- *Parâmetros*: São as variáveis fora de controle do analista, valores que já estão fixados.

- *Variáveis de decisão*: São aquelas cujo valor se quer conhecer.

- *Função Objetivo*: É uma expressão matemática onde cada variável de decisão é ponderada por algum parâmetro e que será otimizada (maximizada ou minimizada).

Basicamente para se resolver um problema típico de otimização devem ser levantados:

a) Uma expressão matemática, a Função Objetivo, que se quer maximizar ou minimizar;
b) Um conjunto de restrições, expressas por equações ou inequações matemáticas, que deverão ser obedecidas simultaneamente em que se maximiza ou minimiza a Função Objetivo.

Vamos relembrar o problema proposto no capítulo anterior:

A Indústria de Móveis Kukamonga produz, entre outros artigos, dois tipos de conjuntos de sofás: o modelo "Arcobaleno" e o modelo "Gioia". A Kukamonga está preparando sua programação semanal de produção para os dois conjuntos. Embora não haja restrições quanto à demanda do modelo Arcobaleno (dentro das limitações de produção atuais), para o modelo Gioia dificilmente a demanda semanal ultrapassará 9 unidades. A fabricação dos dois modelos é dividida em dois grandes blocos de operações:

- Preparação: Corte da estrutura de madeira e preparação para montagem;
- Acabamento: Montagem e colocação do revestimento.

Em virtude dos outros produtos que fabrica a Kukamonga não poderá utilizar mais de 39 horas para a Preparação e 91 horas para o Acabamento durante a semana. O modelo Arcobaleno exige 2 horas para a preparação e 7 horas para o acabamento, enquanto que o modelo Gioia, exige 3 horas para a preparação e 4 horas para o acabamento.

A Kukamonga deve decidir quantas unidades de cada modelo devem ser fabricadas, levando em consideração que o modelo Arcobaleno fornece um lucro unitário de R$ 4.000,00, enquanto, para o modelo Gioia, o lucro unitário é de R$ 5.000,00.

Para um melhor entendimento do problema proposto, vamos destacar os dados apresentados na seguinte tabela:

Problema Proposto:

	Arcobaleno	Gioia
Demanda Semanal:	Não há	Não ultrapassa 9 unid.
Horas Preparação:	2 horas	3 horas
	Total máximo 39 horas	
Horas Acabamento:	7 horas	4 horas
	Total máximo 91 horas	
Lucro Unitário	R$ 4.000,00	R$ 5.000,00

Tabela 4.1 – Tabela com os dados apresentados no problema

Para a formulação deste problema primeiramente devemos determinar a Função Objetivo. É bom lembrar que se procura descobrir quantas unidades de cada modelo de sofá deverão ser produzidas a fim de maximizar o lucro.

Vamos chamar de x a quantidade de sofás do modelo Arcobaleno e y a quantidade de sofás do modelo Gioia. Como cada um fornece um lucro unitário de R$ 4.000,00 e R$ 5.000,00 respectivamente temos a seguinte função objetivo:

$$Z = 4.000x + 5.000y$$

Agora vamos escrever as restrições:

i) Horas de Preparação: O modelo Arcobaleno exige 2 horas e o Gioia exige 3 horas, logo o total de horas de preparação é dado pela expressão:

$$2x + 3y$$

Porém, a Kukamonga não poderá utilizar mais de 39 horas para a Preparação, então:

$$2x + 3y \leq 39$$

ii) Horas de Acabamento: O modelo Arcobaleno exige 7 horas para o acabamento, enquanto que o modelo Gioia, exige 4 horas, logo o total de horas de acabamento é dado pela expressão:

$$7x + 4y$$

Porém, a Kukamonga não poderá utilizar mais de 91 horas para o Acabamento, então:

$$7x + 4y \leq 91$$

iii) Demanda máxima: Para o modelo Gioia dificilmente a demanda semanal ultrapassará 9 unidades, logo:

$$y \leq 9$$

iv) Condições de não negatividade: As variáveis de decisão só podem assumir valores positivos ou nulos, ou seja:

$$x \geq 0 \qquad \text{e} \qquad y \geq 0$$

Portanto, o problema da Indústria de Móveis Kukamonga, formulado completamente, segundo um modelo de Programação Linear, é o seguinte:

$$\text{Maximizar: } Z = 4.000x + 5.000y$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} 2x + 3y \leq 39 & (1) \\ 7x + 4y \leq 91 & (2) \\ y \leq 9 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \end{cases}$$

4.2 Resolução Gráfica.

Uma maneira interessante de ser apresentada aos alunos a solução deste problema, principalmente quando são envolvidas duas variáveis como em nosso caso, as quantidades x (do conjunto de sofás Arcobaleno) e y (do conjunto Gioia), é a representação gráfica, onde podemos representar as inequações obtidas na formulação do problema no plano cartesiano xy.

A seguir temos as representações gráficas das restrições do problema:

i) $2x+3y \leq 39 \quad (1)$

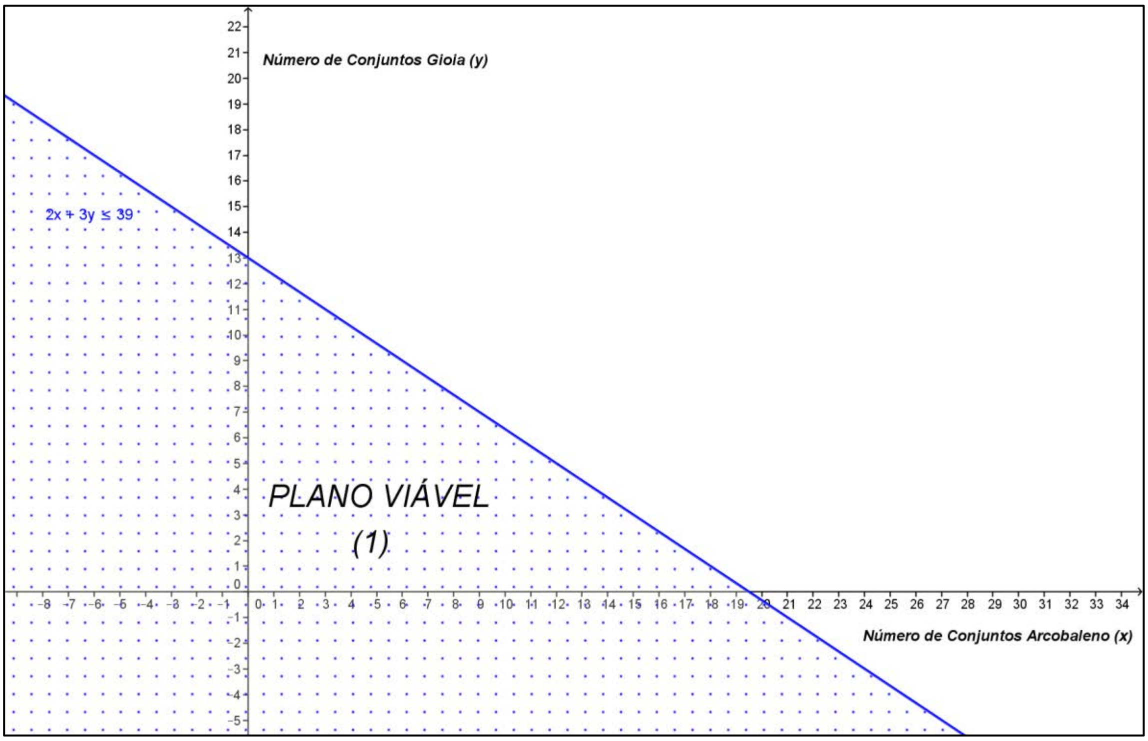


Figura 4.1 – Plano Viável (1) $2x+3y \leq 39$

O Plano Viável é a região de pontos que satisfazem a inequação.

ii) $7x+4y \leq 91 \quad (2)$

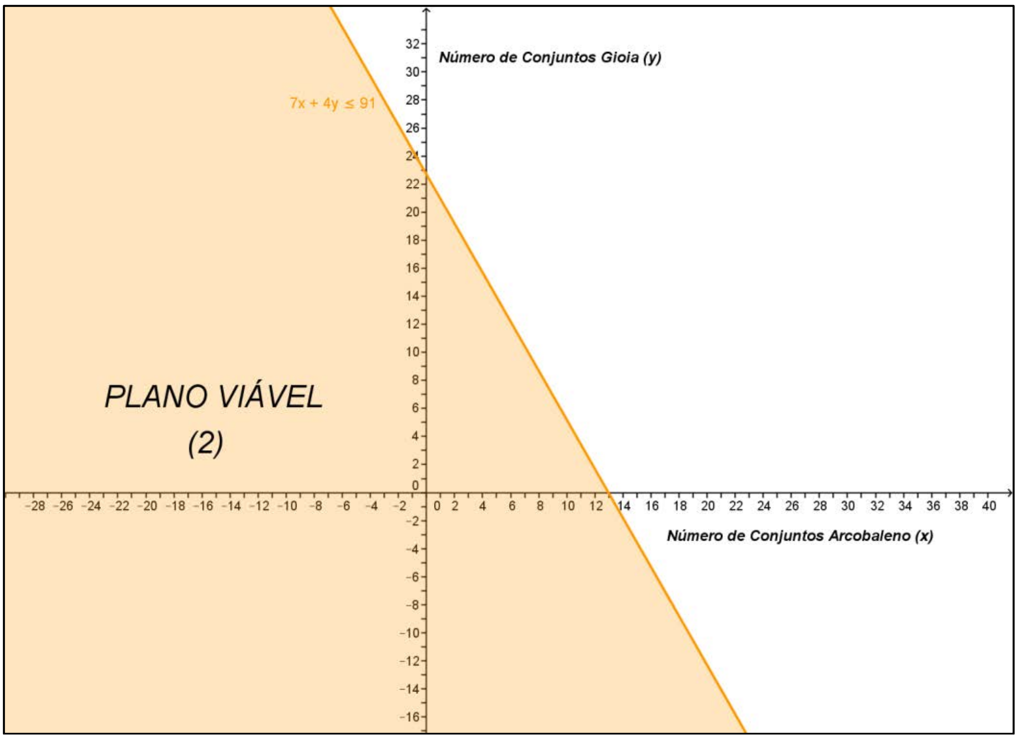


Figura 4.2 – Plano Viável (2) $7x+4y \leq 91$

iii) $y \leq 9$ (3)

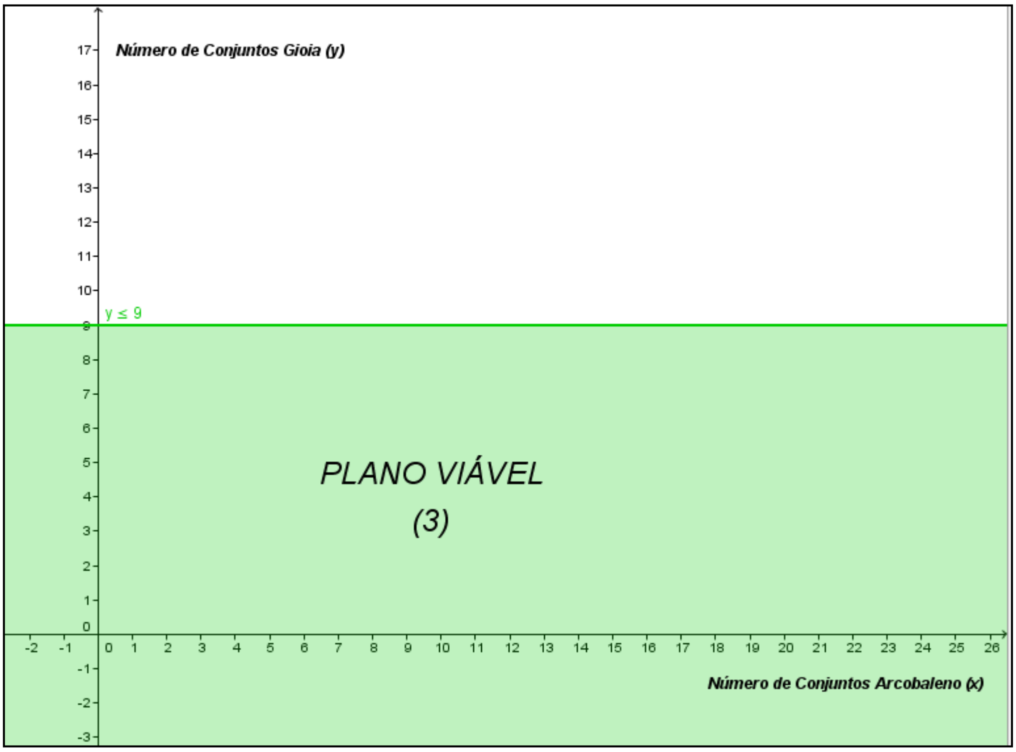


Figura 4.3 – Plano Viável (3) $y \leq 9$

iv) $x \geq 0$ (4)

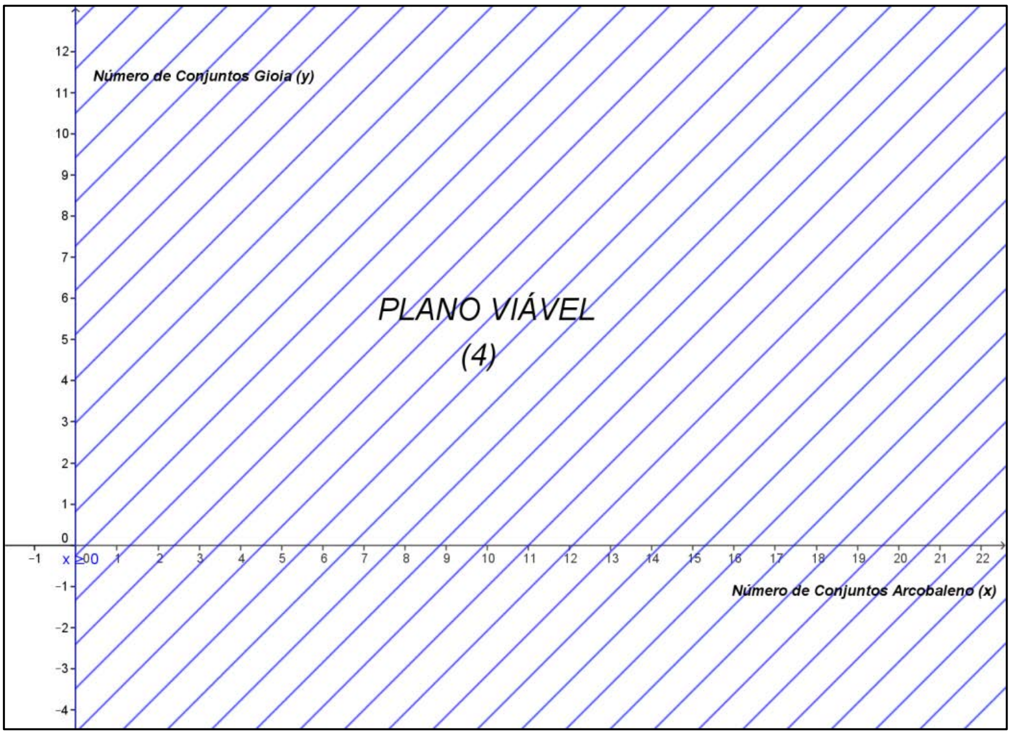


Figura 4.4 – Plano Viável (4) $x \geq 0$

v) $y \geq 0$ (5)

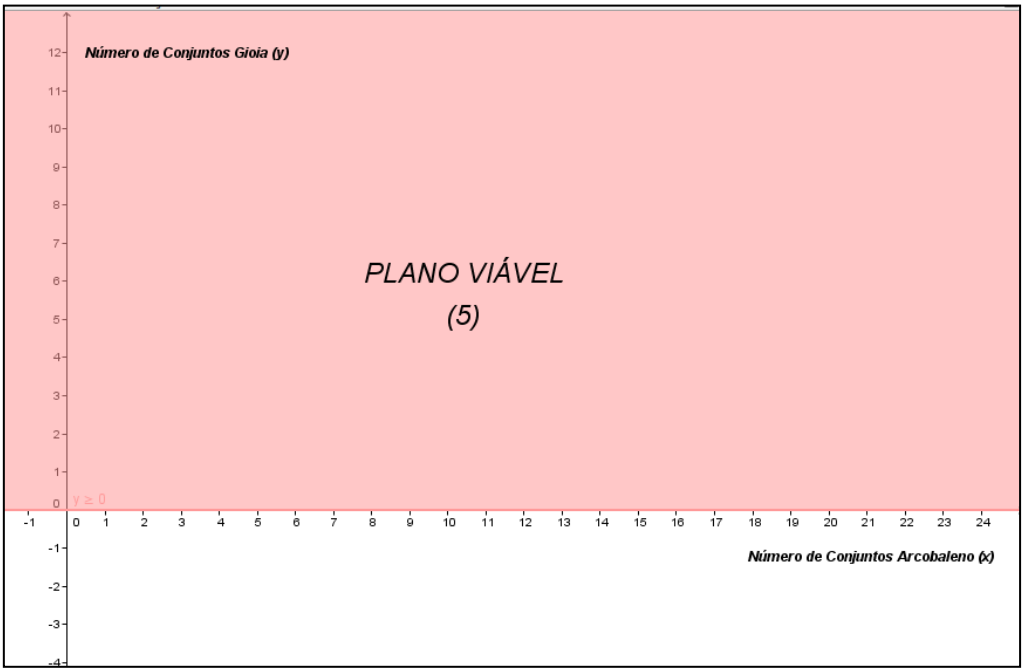


Figura 4.5 – Plano Viável (5) $y \geq 0$

Representando todas as inequações num mesmo plano cartesiano é gerada uma região que chamaremos de Zona Viável, que corresponde à região em que todos seus pontos respeitam simultaneamente as inequações apresentadas (é a intersecção de todos os Planos Viáveis obtidos).

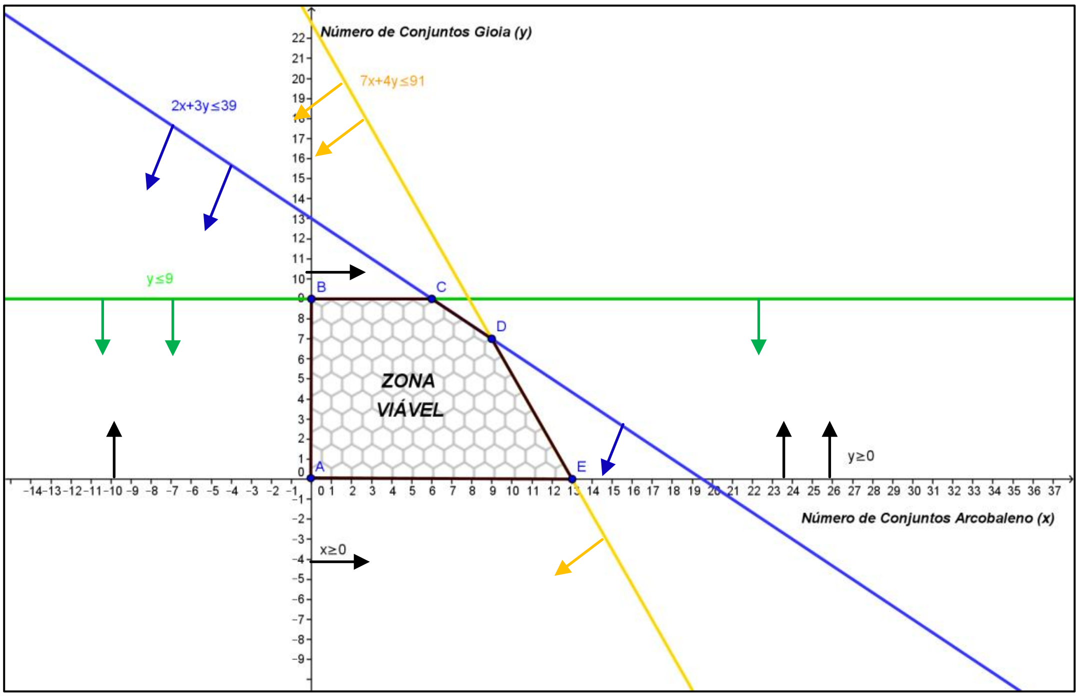


Figura 4.6 – Zona Viável

Graficamente o aluno pode enxergar onde estão as coordendas dos possíveis pontos que satisfazem o sistema montado inicialmente. O desafio agora é procurar o ponto que consiga maximizar o resultado procurado.

Perceba que apenas uma das equações apresentadas no modelo não foi utilizada no gráfico, a função objetivo Z = 4000x + 5000y.

Queremos maximizar o lucro da empresa Kukamonga, porém, o primeiro gráfico da reta gerada pela função objetivo que podemos esboçar é aquele em que o lucro é igual a zero. Temos a seguinte equação:

$$Z = 4000x + 5000y$$
$$0 = 4000x + 5000y$$
$$y = -\frac{4000}{5000}x$$
$$y = -0,8x$$

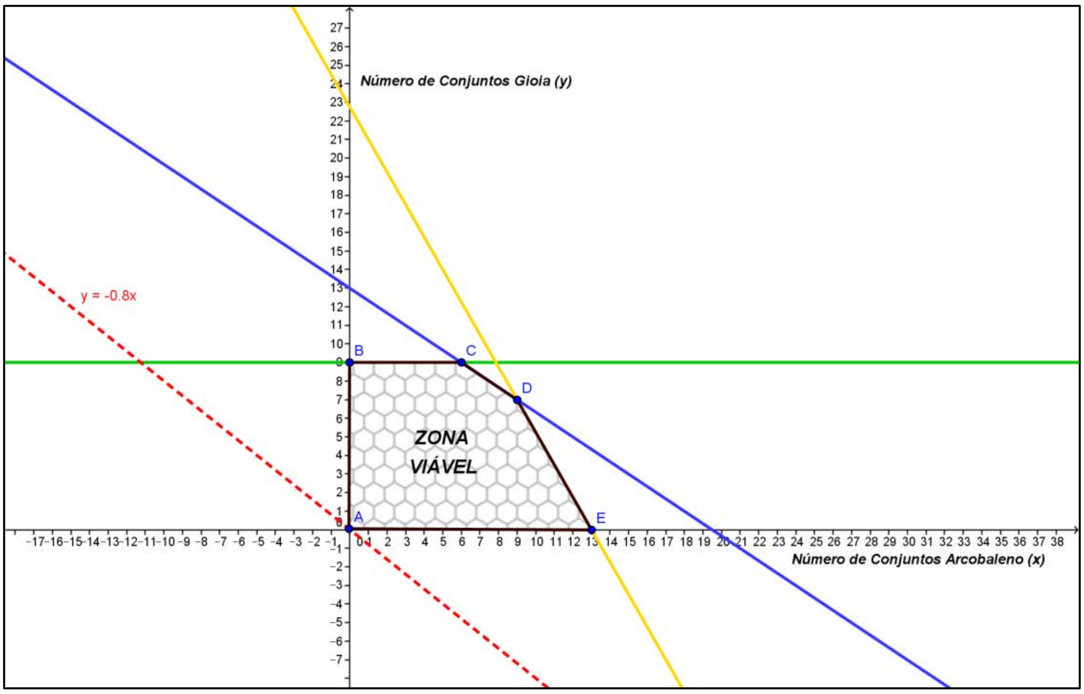


Figura 4.7 – Zona Viável com a primeira representação da função objetivo

Com base nesta reta, vemos que qualquer outra reta paralela construída acima desta, interceptará a Zona Viável, isto quer dizer que todos os pontos pertencentes ao segmento gerado por esta intersecção resultam num mesmo lucro.

A equação reduzida da função objetivo é a seguinte:

$$Z = 4000x + 5000y$$
$$Z - 4000x = 5000y$$
$$y = -\frac{4000}{5000}x + \frac{Z}{5000}$$
$$y = -0{,}8x + \frac{Z}{5000}$$

Quando Z = 0 a equação obtida passa pela origem do sistema e foi retratada no gráfico anterior.

É interessante aproveitar este momento para que o aluno perceba que conforme a reta vai se distanciando da origem, em sua equação, o coeficiente angular se mantém o mesmo (–0,8 em nosso exemplo), e o que vai mudando é o coeficiente linear.

A reta y = –0,8x + 4 representada no gráfico a seguir, é paralela à reta de equação y = –0,8x e os pontos pertencentes à ela e à Zona Viável produzem o mesmo lucro.

Por exemplo, para x = 2, temos que y = 2,4 e substituindo na função objetivo temos um lucro de R$ 20.000,00:

$$Z = 4000x + 5000y$$
$$Z = 4000(2) + 5000(2{,}4)$$
$$Z = 8000 + 12000$$
$$Z = 20000$$

Para x = 4, temos que y = 0,8, e substituindo na função objetivo também temos um lucro de R$ 20.000,00:

$$Z = 4000x + 5000y$$
$$Z = 4000(4) + 5000(0{,}8)$$
$$Z = 16000 + 4000$$
$$Z = 20000$$

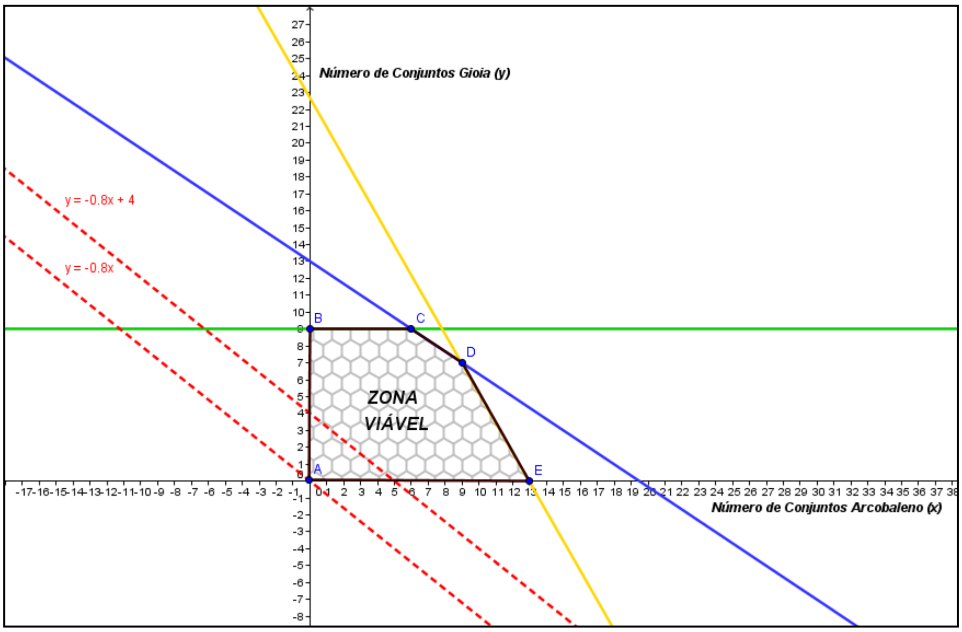


Figura 4.8 – Zona Viável com a segunda representação da função objetivo

Ao construir mais retas paralelas à inicial e fazendo alguns testes o aluno perceberá que conforme estas retas se afastam da origem, o lucro consequentemente aumentará.

Qual a coordenada que levará a função objetivo assumir seu valor máximo? Como já foi falado, basta ir afastando a reta gerada pela função objetivo da origem do sistema e ir testando as coordenadas. É quase que intuitivo que o aluno tenda a escolher justamente as coordenadas dos vértices do polígono gerado e que a coordenada que maximiza a função objetivo corresponda a um desses vértices.

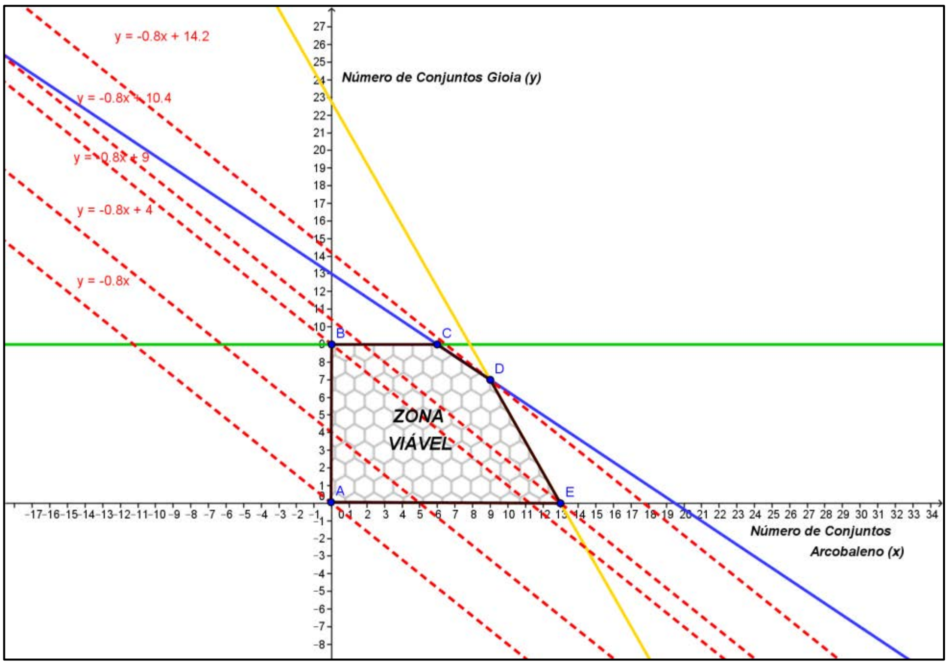


Figura 4.9 – Zona Viável com as representações da função objetivo, inclusive com a solução ótima

Em nosso problema o vértice D (9,7) é o que maximiza o lucro da empresa Kukamonga, gerando um lucro máximo de R$ 71.000,00, ou seja, para que se maximize o lucro, a Kukamonga deverá produzir 9 unidades do conjunto Arcobaleno e 7 unidades do conjunto Gioia.

É importante ressaltar ao aluno que, segundo Lanzer (1982):

a) Nem sempre um problema de Programação Linear apresenta um conjunto não vazio de planos viáveis,
b) mesmo que o conjunto de planos viáveis seja não vazio, isto não garante a existência de uma solução ótima finita e
c) quando uma solução ótima finita existe, ela certamente será dada pelas coordenadas de um dos vértices do polígono que limita a Zona Viável.

Sobre esta última observação, Lanzer (1982) afirma que, eventualmente, um problema poderá apresentar uma multiplicidade de soluções ótimas. Isto pode ocorrer quando a função objetivo é paralela a uma das restrições do problema. Nestes casos, o valor ótimo da função objetivo poderá ser obtido em mais de um dos vértices da Zona Viável.

4.3 Aplicação do Método Simplex

Voltando ao problema da indústria Kukamonga vamos aplicar o Método Simplex para a resolução deste caso:

$$\text{Maximizar: } z = 4.000x + 5.000y$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} 2x + 3y \leq 39 & (1) \\ 7x + 4y \leq 91 & (2) \\ y \leq 9 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \end{cases}$$

Vamos transformar as inequações em equações acrescentando a elas variáveis de folga.

A inequação (1) corresponde à restrição “horas de preparação”, que não pode ultrapassar 39 horas. Isto não quer dizer que essas 39 horas devam ser utilizadas exclusivamente e em sua totalidade na preparação dos conjuntos Arcobaleno e Gioia. Por isso vamos acrescentar a variável de folga f_1 que corresponderá ao número de horas de preparação que não foi utilizado na preparação dos conjuntos Arcobaleno e Gioia.

A equação obtida ficará assim: $2x+3y+f_1=39 \quad (1)$

Da mesma forma, na inequação (2), que corresponde à restrição "horas de acabamento", vamos acrescentar a variável de folga f_2 que corresponderá ao número de horas de acabamento que não foi utilizado no acabamento dos conjuntos Arcobaleno e Gioia.

A equação obtida ficará assim: $7x+4y+f_2=91 \quad (2)$

E por fim, na inequação (3), que corresponde à demanda máxima do conjunto Gioia, vamos acrescentar a variável de folga f_3 que corresponderá ao número de unidades do conjunto Gioia que não foi demandado.

A equação obtida ficará assim: $y+f_3=9 \quad (3)$

Ao acrescentarmos estas variáveis de folga, a função objetivo passa a ter esta configuração:

$$\text{z} = 4.000x+5.000y+0f_1+0f_2+0f_3$$

Com isso o problema a ser resolvido passa a ser:

$$\text{Maximizar: } \quad \text{z} = 4.000x+5.000y+0f_1+0f_2+0f_3$$

$$\text{Restrições:} \begin{cases} 2x+3y+f_1=39 & (1) \\ 7x+4y+f_2=91 & (2) \\ y+f_3=9 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \end{cases}$$

Este é um bom momento para resgatar com os alunos o fato de que um sistema linear pode ser escrito como uma equação matricial:

$$\begin{cases} 2x+3y+f_1 \qquad\qquad = 39 \\ 7x+4y \qquad +f_2 \qquad = 91 \\ \qquad y \qquad\qquad +f_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 91 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Vamos considerar as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Matriz dos coeficientes das restrições)

$$B = \begin{bmatrix} 39 \\ 91 \\ 9 \end{bmatrix}$$ (Matriz dos termos independentes das restrições)

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$ (Matriz das variáveis)

$$C = \begin{bmatrix} 4000 & 5000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (Matriz dos coeficientes da função objetivo)

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$ (Matriz das variáveis de folga)

Para se resolver o problema apresentado pelo Método Simplex existem muitas disposições diferentes, mas que se baseiam num mesmo princípio. O método consiste em testar os pontos extremos da Zona Viável, através de um algoritmo prático de tabelas, ou também chamado Tableau. Vamos apresentar um algoritmo começando com a tabela a seguir:

Estrutura da Tabela Simplex

$$
\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} \textit{Variáveis} \\ \textit{Básicas} \end{matrix} & X^t & \\
\hline
F & A & B \\
\hline
z & -C & M
\end{array}
$$

Onde:
X^t é a matriz transposta de X
–C é a matriz oposta da matriz C
M é o resultado da otimização da função objetivo.

Figura 4.10 – Estrutura da Tabela Simplex

Perceba que a última linha da Tabela Simplex corresponde à função objetivo transformada:

$$z - 4.000x - 5.000y - 0f_1 - 0f_2 - 0f_3 = 0$$

Como $C = \begin{bmatrix} 4000 & 5000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $-C = \begin{bmatrix} -4000 & -5000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A primeira coluna da tabela são as Variáveis Básicas, ou seja, são aquelas que correspondem na matriz A as colunas em que aparecem o coeficiente 1(um) e os demais 0 (zero) e consequentemente seus valores se encontram na última coluna da tabela.

Para o nosso problema, temos a seguinte Tabela Simplex:

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	3	1	0	0	39
f_2	7	4	0	1	0	91
f_3	0	1	0	0	1	9
z	–4000	–5000	0	0	0	0

Tabela 4.2 – Tabela inicial do Método Simplex

Note que esta tabela acima nos apresenta uma solução inicial que corresponde a x = 0, y = 0, $f_1 = 39$, $f_2 = 91$ e $f_3 = 9$ (neste caso f_1, f_2 e f_3 são as variáveis básicas). É claro que é uma solução, mas não é a melhor, afinal isto significa que a Kukamonga não deveria produzir nenhuma unidade do conjunto Arcobaleno e nenhuma unidade do conjunto Gioia. Com isso, devem-se realizar operações com as linhas da tabela a fim de encontrar uma melhor solução.

É interessante desafiar o aluno a deduzir qual seria a variável que mais contribui com o lucro procurado. É muito provável que muitos concluirão que é a variável y, já que na função objetivo ela é a que tem o maior coeficiente.

A título de regra, é só procurar na última linha da tabela o maior valor negativo em módulo. A variável será a que corresponde à coluna em que se encontra esse número.

Para esta coluna daremos o nome de Coluna de Trabalho.

Coluna de Trabalho

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	3	1	0	0	39
f_2	7	4	0	1	0	91
f_3	0	1	0	0	1	9
z	−4000	−5000	0	0	0	0

Maior valor negativo em módulo

Tabela 4.3 – Método Simplex – 1ª etapa – passo 1 – Indicações da coluna de trabalho e maior valor negativo em módulo

Caso exista outro número de maior valor negativo em módulo igual, escolha um.

O próximo passo então é transformar a variável y em variável básica, mas para isto, uma das variáveis básicas existentes tem que sair.

Para isto, divida cada elemento da última coluna (matriz B) pelo seu correspondente positivo da Coluna de Trabalho:

$$\frac{39}{3} = 13 \qquad \frac{91}{4} = 22,75 \qquad \frac{9}{1} = 9$$

Neste caso a variável básica que deverá sair é f_3, uma vez que $9/1 = 9$ é o menor valor para o crescimento de y.

Chamaremos de Pivô, o elemento da Coluna de Trabalho que corresponde ao menor quociente obtido, neste caso será o 1.

Chamaremos de Linha Pivô a linha em que se encontra o Pivô.

Coluna de Trabalho

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	3	1	0	0	39
f_2	7	4	0	1	0	91
f_3	0	1	0	0	1	9
z	-4000	-5000	0	0	0	0

Linha Pivô

Pivô

Tabela 4.4 – Método Simplex – 1ª etapa – passo 2 – Determinação do Pivô

Caso haja outro elemento da Coluna de Trabalho que corresponda ao menor quociente obtido, escolha um. Agora, se nenhum elemento da Coluna de Trabalho for positivo, o problema não terá solução.

Através de cálculos elementares, o próximo passo é transformar o número Pivô em 1. Neste problema o Pivô já é 1.

Depois é reduzir à zero todos os demais elementos da Coluna de Trabalho.

Lembre-se que as Variáveis Básicas são aquelas que correspondem na matriz A as colunas em que aparecem o coeficiente 1(um) e os demais 0 (zero). Como y deverá ser uma Variável Básica, seu coeficiente deverá ser 1 e os demais 0.

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	3	1	0	0	39
f_2	7	4	0	1	0	91
f_3	0	1	0	0	1	9
z	-4000	0	0	0	5000	45000

Reduzir a zero o elemento -5000:

Multiplique por 5000 a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o -5000

Tabela 4.5 – Método Simplex – 1ª etapa – passo 3 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	3	1	0	0	39
f_2	7	0	0	1	-4	55
f_3	0	1	0	0	1	9
z	-4000	0	0	0	5000	45000

<u>Reduzir a zero o elemento 4</u>:

Multiplique por -4 a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o 4

Tabela 4.6 – Método Simplex – 1ª etapa – passo 4 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	0	1	0	-3	12
f_2	7	0	0	1	-4	55
f_3	0	1	0	0	1	9
z	-4000	0	0	0	5000	45000

<u>Reduzir a zero o elemento 3</u>:

Multiplique por -3 a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o 3

Tabela 4.7 – Método Simplex – 1ª etapa – passo 5 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Com isso y passa a ser a nova variável básica e entrará na coluna Variáveis Básicas no lugar da variável f_3 (que corresponde a linha pivô).

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	0	1	0	-3	12
f_2	7	0	0	1	-4	55
y	0	1	0	0	1	9
z	-4000	0	0	0	5000	45000

Tabela 4.8 – Método Simplex – 1ª etapa – passo 6 – Variáveis Básicas

Essa nova primeira coluna é o conjunto de variáveis básicas:

$$y = 9; \quad f_1 = 12; \quad f_2 = 55 \quad \text{e} \quad x = f_3 = 0$$

Esta é uma solução, mas ainda não é a ótima (perceba que na última linha ainda existem números negativos).

Vamos repetir todos os passos feitos anteriormente, escolhendo o maior valor negativo em módulo da última linha do quadro. Temos o número -4000:

Coluna de Trabalho

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	0	1	0	−3	12
f_2	7	0	0	1	−4	55
y	0	1	0	0	1	9
z	−4000	0	0	0	5000	45000

Maior valor negativo em módulo

Tabela 4.9 – Método Simplex – 2ª etapa – passo 1 – Indicações da coluna de trabalho e maior valor negativo em módulo

Agora, divida cada elemento da última coluna (matriz B) pelo seu correspondente positivo da Coluna de Trabalho:

$$\frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{55}{7} = 7,85$$

Perceba que 9 teria que ser divido por 0 o que é uma indeterminação e por isso não iremos considerá-la.

Neste caso a variável básica que deverá sair é f_1, uma vez que $12/2 = 6$ é o menor valor para o crescimento de x.

O Pivô neste caso será o 2.

Pivô

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	2	0	1	0	−3	12
f_2	7	0	0	1	−4	55
y	0	1	0	0	1	9
z	−4000	0	0	0	5000	45000

Linha Pivô

Tabela 4.10 – Método Simplex – 2ª etapa – passo 2 – Determinação do Pivô

Através de cálculos elementares, o próximo passo é transformar o número Pivô em 1.

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	6
f_2	7	0	0	1	-4	55
y	0	1	0	0	1	9
z	-4000	0	0	0	5000	45000

Transformar o número Pivô em 1:

Basta dividir a linha Pivô por 2

Tabela 4.11 – Método Simplex – 2ª etapa – passo 3 – Determinação do Pivô

Depois é reduzir a zero todos os demais elementos da Coluna de Trabalho:

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	6
f_2	7	0	0	1	-4	55
y	0	1	0	0	1	9
z	0	0	2000	0	-1000	69000

Reduzir a zero o elemento -4000:

Multiplique por 4000 a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o -4000

Tabela 4.12 – Método Simplex – 2ª etapa – passo 4 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
f_1	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	6
f_2	0	0	$-7/2$	1	$13/2$	13
y	0	1	0	0	1	9
z	0	0	2000	0	-1000	69000

Reduzir a zero o elemento 7:

Multiplique por -7 a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o 7

Tabela 4.13 – Método Simplex – 2ª etapa – passo 5 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Com isso x passa a ser a nova variável básica e entrará na coluna Variáveis Básicas no lugar da variável f_1 (que corresponde a linha pivô).

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	6
f_2	0	0	$-\frac{7}{2}$	1	$\frac{13}{2}$	13
y	0	1	0	0	1	9
z	0	0	2000	0	-1000	69000

Tabela 4.14 – Método Simplex – 2ª etapa – passo 6 – Variáveis Básicas

Essa nova primeira coluna é o conjunto de variáveis básicas:

$$x = 6; \quad y = 9; \quad f_2 = 13; \quad \text{e} \quad f_1 = f_3 = 0$$

Esta é uma solução, mas ainda não é a ótima (perceba que na última linha ainda existem números negativos).

Vamos repetir todos os passos feitos anteriormente, escolhendo o maior valor negativo em módulo da última linha do quadro. Temos o número -1000:

Coluna de Trabalho

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	6
f_2	0	0	$-\frac{7}{2}$	1	$\frac{13}{2}$	13
y	0	1	0	0	1	9
z	0	0	2000	0	-1000	69000

Maior valor negativo em módulo

Tabela 4.15 – Método Simplex – 3ª etapa – passo 1 – Indicações da coluna de trabalho e maior valor negativo em módulo

Agora, divida cada elemento da última coluna (matriz B) pelo seu correspondente positivo da Coluna de Trabalho:

$$\frac{6}{-\frac{3}{2}} = -4 \ \text{(não convém)} \qquad \frac{13}{\frac{13}{2}} = 2 \qquad \frac{9}{1} = 9$$

Neste caso a variável básica que deverá sair é f_2, uma vez que $\dfrac{13}{13/2} = 2$ é o menor valor para o crescimento de f_3.

O Pivô neste caso será o $13/2$.

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	6
f_2	0	0	$-7/2$	1	$13/2$	13
y	0	1	0	0	1	9
z	0	0	2000	0	-1000	69000

Pivô

Linha Pivô

Tabela 4.16 – Método Simplex – 3ª etapa – passo 2 – Determinação do Pivô

Através de cálculos elementares, o próximo passo é transformar o número Pivô em 1:

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	6
f_2	0	0	$-7/13$	$2/13$	1	2
y	0	1	0	0	1	9
z	0	0	2000	0	-1000	69000

Transformar o número Pivô em 1:

Basta multiplicar a linha Pivô por $2/13$

Tabela 4.17 – Método Simplex – 3ª etapa – passo 3 – Determinação do Pivô

Depois é reduzir à zero todos os demais elementos da Coluna de Trabalho:

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	6
f_2	0	0	$-7/13$	$2/13$	1	2
y	0	1	0	0	1	9
z	0	0	$19000/13$	$2000/13$	0	71000

<u>Reduzir a zero o elemento -1000</u>:

Multiplique por 1000 a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o -1000

Tabela 4.18 – Método Simplex – 3ª etapa – passo 4 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$1/2$	0	$-3/2$	6
f_2	0	0	$-7/13$	$2/13$	1	2
y	0	1	$7/13$	$-2/13$	0	7
z	0	0	$19000/13$	$2000/13$	0	71000

<u>Reduzir a zero o elemento 1</u>:

Multiplique por -1 a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o 1

Tabela 4.19 – Método Simplex – 3ª etapa – passo 5 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$-4/13$	$3/13$	0	9
f_2	0	0	$-7/13$	$2/13$	1	2
y	0	1	$7/13$	$-2/13$	0	7
z	0	0	$19000/13$	$2000/13$	0	71000

<u>Reduzir a zero o elemento</u> $-3/2$:

Multiplique por $3/2$ a linha Pivô e some esta linha com a linha que contém o $-3/2$

Tabela 4.20 – Método Simplex – 3ª etapa – passo 6 – zerando os demais elementos da coluna pivô

Com isso f_3 passa a ser a nova variável básica e entrará na coluna Variáveis Básicas no lugar da variável f_2 (que corresponde a linha pivô).

Variáveis Básicas	x	y	f_1	f_2	f_3	
x	1	0	$-4/13$	$3/13$	0	9
f_3	0	0	$-7/13$	$2/13$	1	2
y	0	1	$7/13$	$-2/13$	0	7
z	0	0	$19000/13$	$2000/13$	0	71000

Tabela 4.21 – Método Simplex – 3ª etapa – passo 7 – Variáveis Básicas

Essa nova primeira coluna é o conjunto de variáveis básicas:

$$x = 9; \quad y = 7; \quad f_3 = 2; \quad \text{e} \quad f_1 = f_2 = 0$$

Finalmente chegamos à solução ótima! (perceba que na última linha todos os números são não negativos).

Temos que a quantidade ideal de sofás do modelo Arcobaleno (x), para que maximize o lucro total deverá ser igual a 9 unidades e a quantidade do modelo Gioia (y) igual a 7 unidades.

Com estas quantias o lucro máximo que será obtido pela Kukamonga é igual a R$ 71.000,00.

4.4 Relação Entre o Método Gráfico e o Método Simplex

É recomendado que o Método Simplex fosse apresentado aos alunos somente após o contato com o Método Gráfico. O Método Gráfico, como já foi falado, é mais intuitivo e possibilita o aluno a identificar com mais facilidade os “candidatos” a possíveis resultados. E os principais “candidatos”, quando uma solução ótima finita existe, são as coordenadas de um dos vértices do polígono que limita a Zona Viável.

No exemplo da Kukamonga, os vértices do polígono que representa a Zona Viável estão representados na figura 4.11 a seguir.

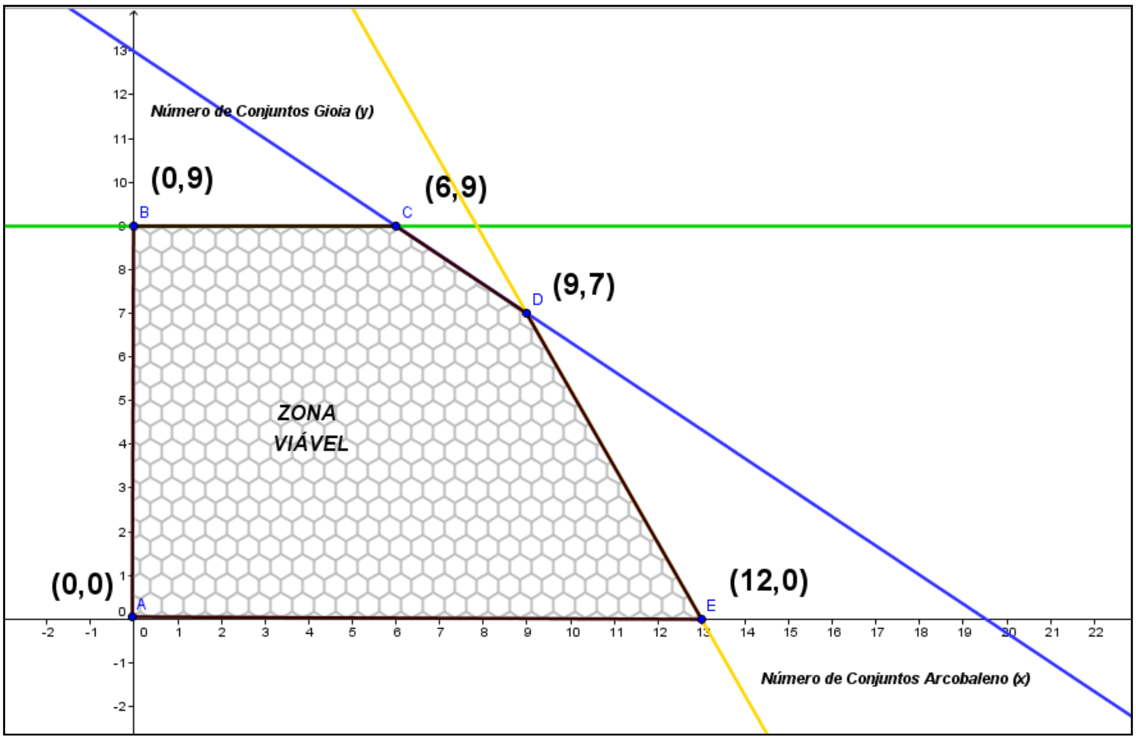


Figura 4.11 – Vértices do polígono da Zona Viável

Através do Método Simplex, o aluno tem a possibilidade, através do algoritmo, de encontrar estas coordenadas.

No item anterior, quando aplicamos esse método ao problema proposto, note que a primeira solução obtida foi x = 0, y = 0, $f_1 = 39$, $f_2 = 91$ e $f_3 = 9$ (neste caso f_1, f_2 e f_3 são as variáveis básicas), ou seja, o vértice A (0,0) do polígono que representa a Zona Viável.

Após a primeira aplicação do algoritmo, chegamos à solução y = 9, $f_1 = 12$, $f_2 = 55$ e $x = f_3 = 0$, ou seja, o vértice B (0,9).

Na aplicação seguinte, chegamos à solução x = 6, y = 9, $f_2 = 13$ e $f_1 = f_3 = 0$, ou seja, o vértice C(6,9).

E finalmente, na próxima aplicação do método, chegamos à solução ótima x = 9, y = 7, $f_3 = 2$ e $f_1 = f_2 = 0$, que corresponde ao vértice D(9,7).

5 ALTERNATIVA COMPUTACIONAL

Depois de serem realizados todos os cálculos com as equações lineares e sua representação gráfica, apresentamos o seguinte problema: E se aparecesse um problema com muito mais variáveis e uma grande quantidade de restrições? É claro que seria um trabalho insano para se resolver algebricamente.

Este capítulo é dedicado a uma ferramenta que facilitará muito este árduo trabalho. É a função Solver que se encontra no programa Excel da Microsoft.

Apesar de ser um *software* comercial, o Excel é o de mais fácil acesso aos alunos, já que o pacote Office da Microsoft está instalado nos computadores dos laboratórios de informática dos colégios da Rede Pública e Privada.

Como uma alternativa, existe o LibreOffice, que é um *software* livre que faz o mesmo papel do Office da Microsoft, porém seu desempenho é melhor quando executado no sistema operacional Linux.

Existem também outros *softwares* específicos da área de matemática, como o Matlab, por exemplo, porém também é comercial.

Para exemplificar sua aplicação vamos resolver o problema introdutório da Indústria de móveis Kukamonga.

Antes, porém, deve-se se certificar se a função Solver está habilitada. Vale lembrar que este tutorial foi realizado com o Excel versão 2007 (para as outras versões muda-se o visual um pouco, mas a essência é a mesma).

Abra o programa Excel e clique na aba Dados:

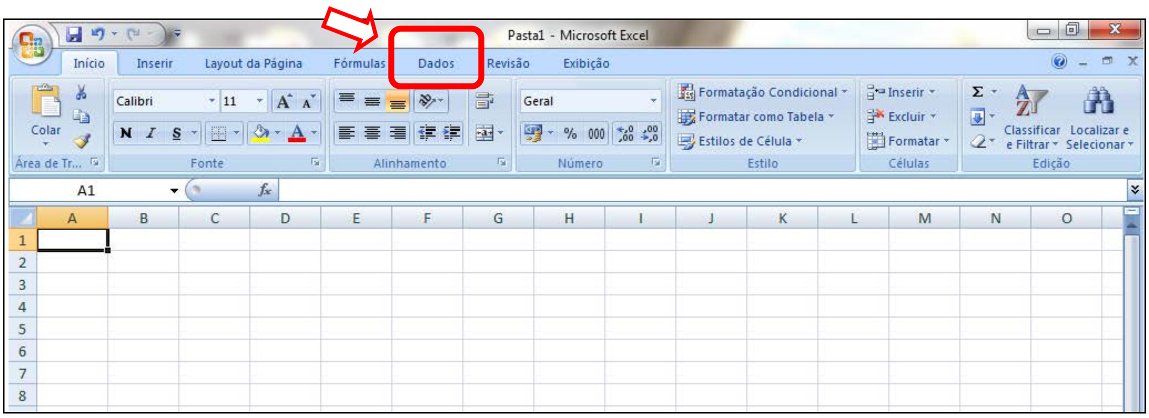


Figura 5.1 – Planilha inicial – Excel – Dados

Caso a função esteja habilitada, um ícone aparecerá no canto superior direito da tela.

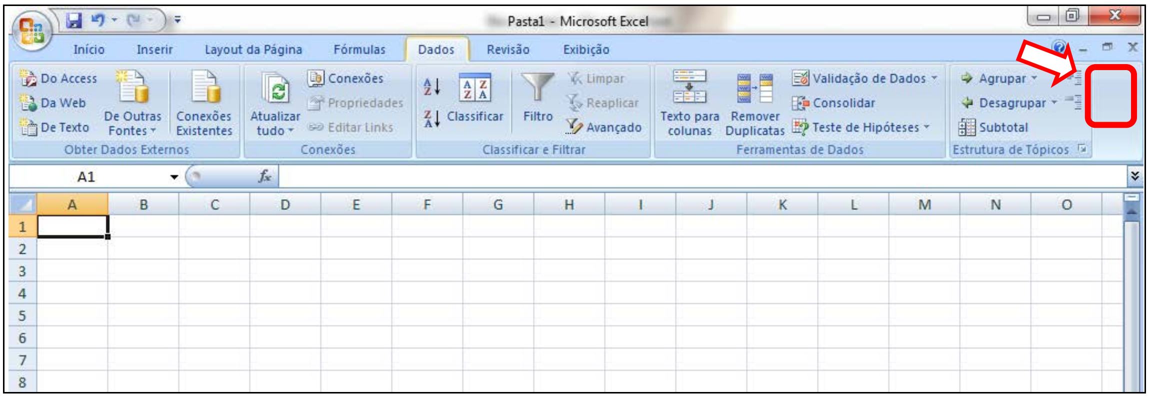


Figura 5.2 – Planilha inicial – Excel – Não habilitada para o Solver

Perceba que não aparece o ícone do Solver. Neste caso siga os seguintes passos para habilitá-lo.

Clique no canto superior esquerdo sobre o ícone do Office e em seguida clique em Opções do Excel:

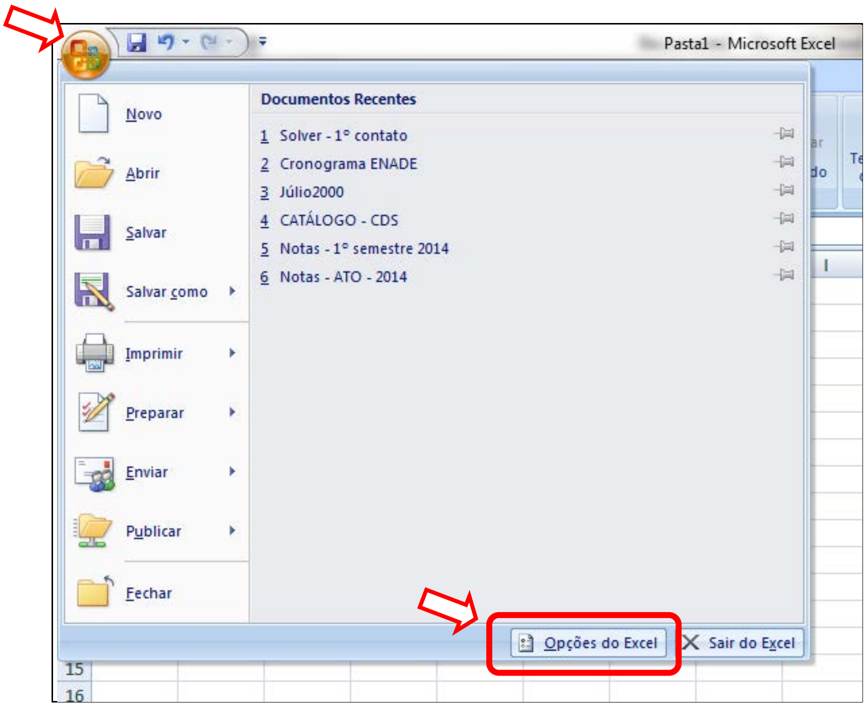


Figura 5.3 – Instalação do Solver (1)

Aparecerá a seguinte tela, e nela, clique em Suplementos:

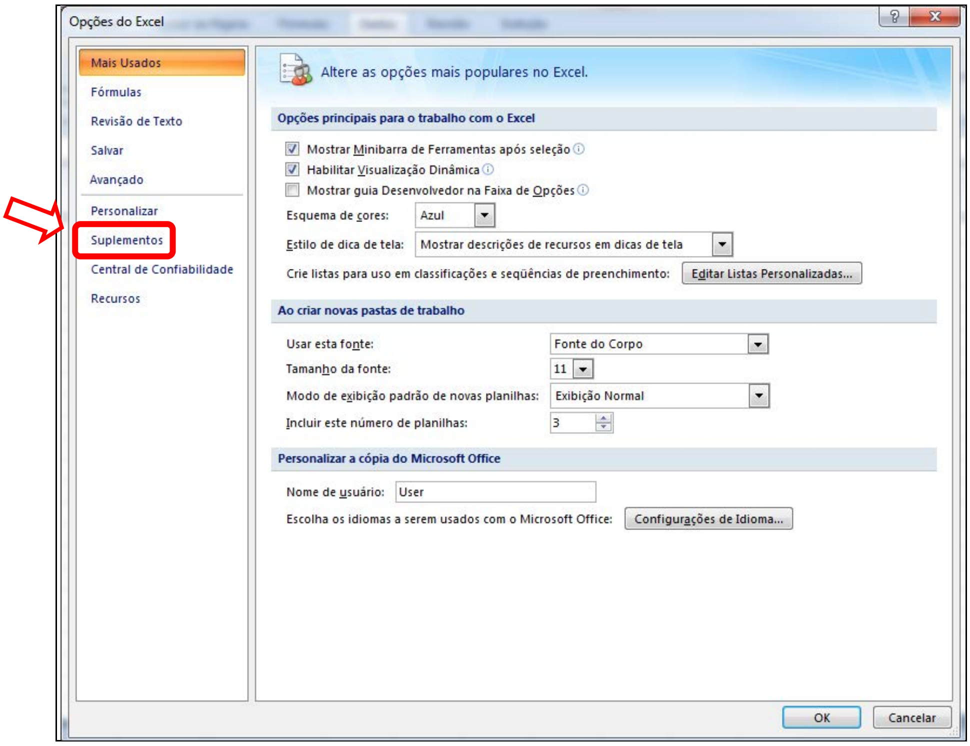


Figura 5.4 – Instalação do Solver (2)

Agora clique em Ir...:

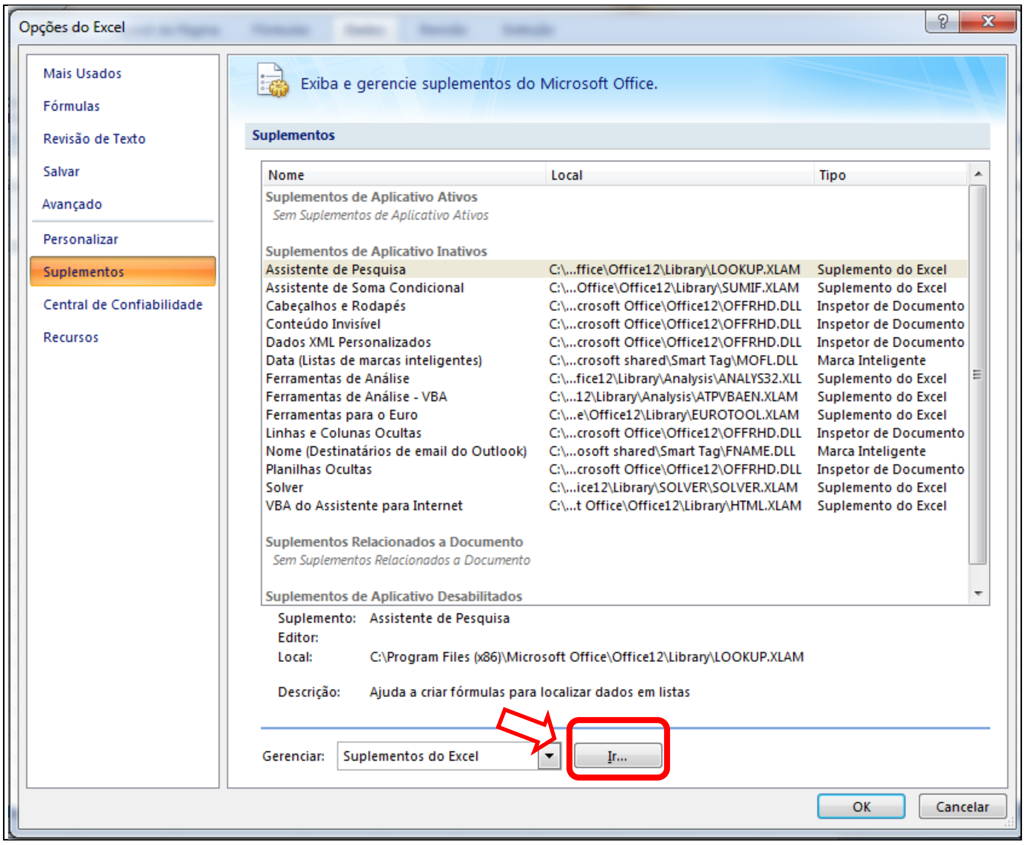


Figura 5.5 – Instalação do Solver (3)

Aparecerá a tela:

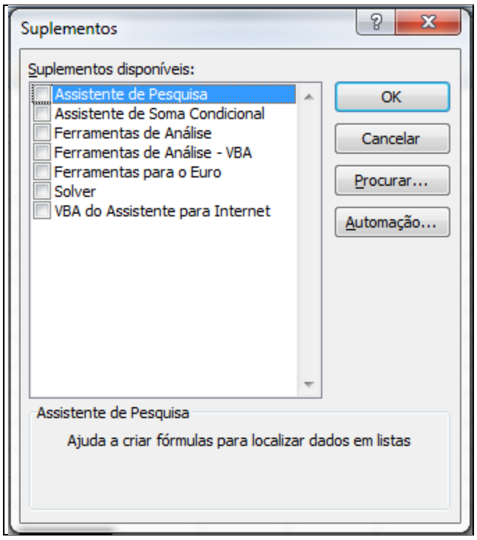


Figura 5.6 – Instalação do Solver (4)

Clique em Solver, assim você estará habilitando esta função:

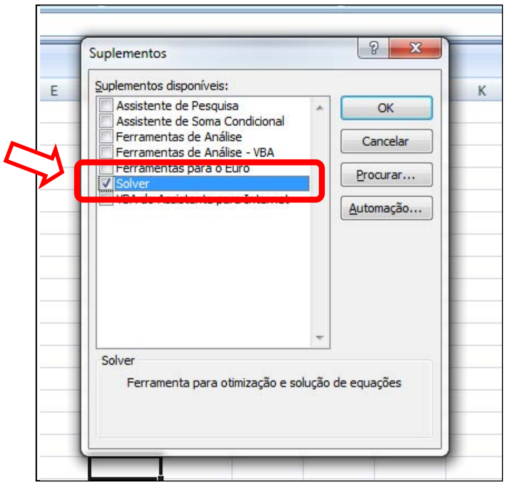


Figura 5.7 – Instalação do Solver (5)

Agora é só clicar Ok.

Perceba que o ícone já aparece na barra de ferramentas:

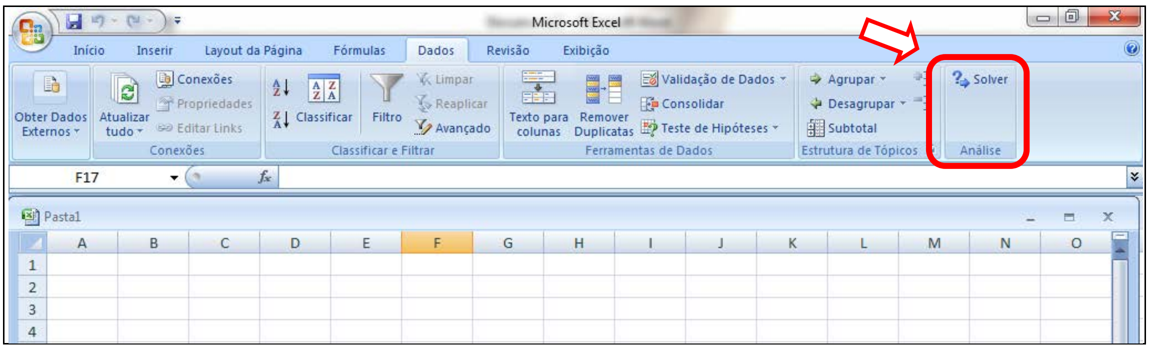


Figura 5.8 – Planilha inicial – Excel – Habilitada para o Solver

Pois bem, agora com o Solver habilitado, vamos resolver o problema de maximização da Indústria de Móveis Kukamonga cujo enunciado se encontra na página 40.

Abrindo o Excel temos:

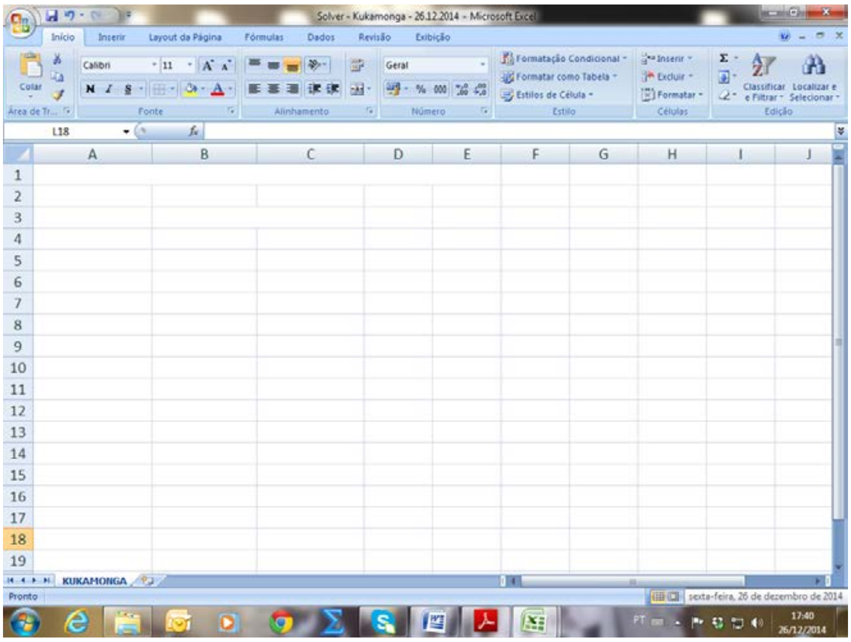


Figura 5.9 – Planilha inicial – Excel

Vamos colocar as informações na tela para facilitar a montagem da planilha:

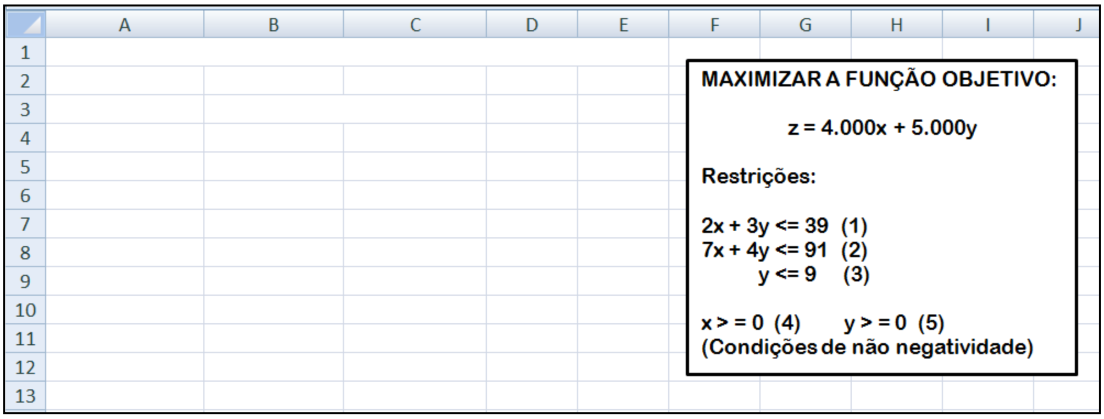


Figura 5.10 – Informações sobre o problema

Inicialmente, colocaremos o nome da empresa, e a tabela que representará a função objetivo.

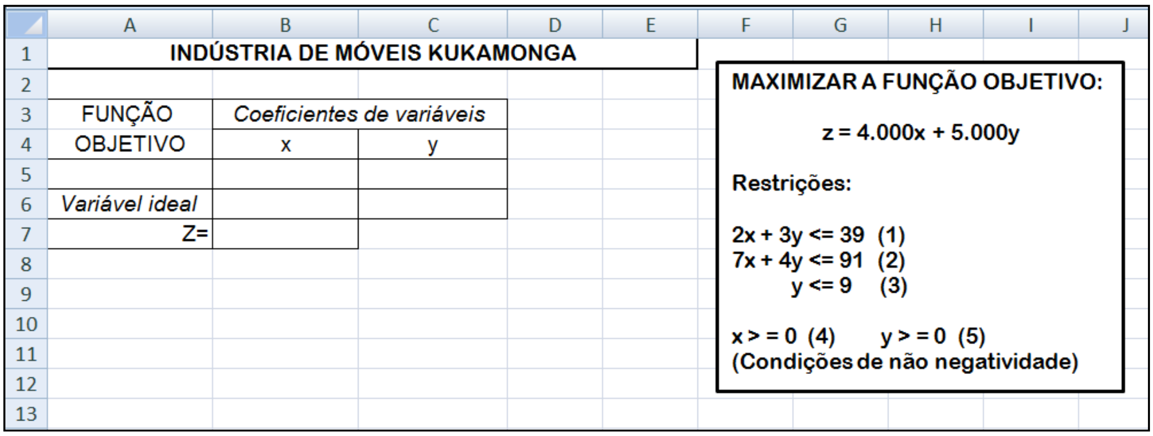


Figura 5.11 – Construção da Tabela com a Função Objetivo

Perceba que nesta tabela iremos representar a função objetivo Z = 4.000x + 5.000y.

Na célula B5 colocaremos o coeficiente da variável x, que é igual a 4.000 e na célula C5 o coeficiente de y, o 5.000.

As células B6 e C6 correspondem às variáveis x e y que queremos descobrir. Vamos chamar de variável ideal.

Na célula B7 escreveremos a fórmula da função objetivo em função das células descritas acima.

Em B7 digitaremos: =(B5*B6)+(C5*C6)

A planilha ficará assim:

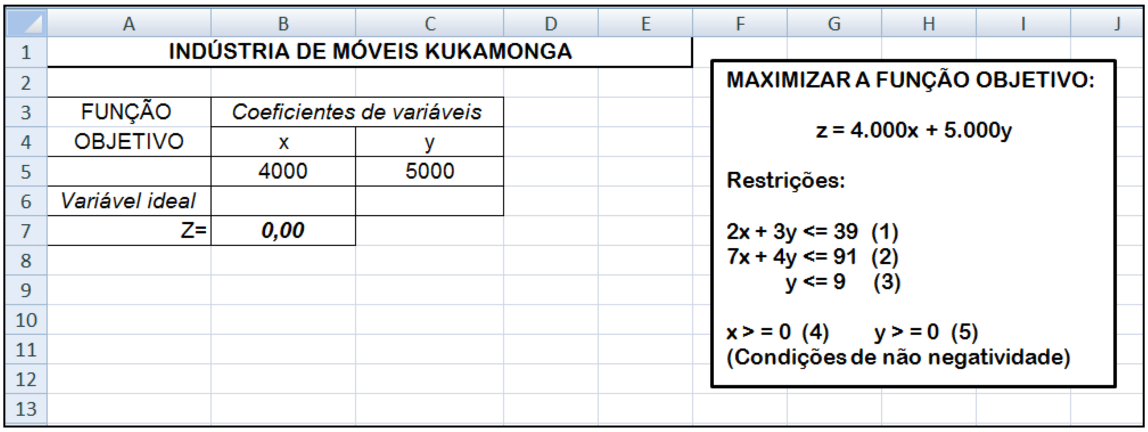


Figura 5.12 – Introdução dos coeficientes da Função Objetivo

A célula B7 está indicando zero, pois por enquanto as células B6 e C6 também são iguais à zero.

Agora vamos montar a tabela das restrições:

	A	B	C	D	E
1	INDÚSTRIA DE MÓVEIS KUKAMONGA				
2					
3	FUNÇÃO	*Coeficientes de variáveis*			
4	OBJETIVO	x	y		
5		4000	5000		
6	*Variável ideal*				
7	Z=	***0,00***			
8					
9	RESTRIÇÕES	x	y	Esq	Dir
10	1				
11	2				
12	3				
13					

MAXIMIZAR A FUNÇÃO OBJETIVO:

z = 4.000x + 5.000y

Restrições:

2x + 3y <= 39 (1)
7x + 4y <= 91 (2)
y <= 9 (3)

x > = 0 (4) y > = 0 (5)
(Condições de não negatividade)

Figura 5.13 – Construção da Tabela com as Restrições

Nesta tabela das restrições temos a coluna Restrições, indicando o número de restrições do problema, neste caso, 1, 2 e 3. A condição 4, de não negatividade será informada depois. Logo após aparecem as colunas x e y para serem inseridos os valores dos coeficientes destas variáveis.

Na coluna “Esq” iremos representar as fórmulas de tudo o que está à esquerda das desigualdades das restrições e na coluna “Dir”, o que estiver à direita das desigualdades.

Em nosso problema temos:

1ª restrição: $2x+3y \leq 39$ ► Na célula B10 digitamos 2, na célula C10 digitamos 3 e na célula E10 digitamos 39

2ª restrição: $7x+4y \leq 91$ ► Na célula B11 digitamos 7, na célula C11 digitamos 4 e na célula E11 digitamos 91

3ª restrição: $y \leq 9$ ► Na célula B12 digitamos 0, na célula C12 digitamos 1 e na célula E11 digitamos 9

planilha ficará assim:

	A	B	C	D	E
1	INDÚSTRIA DE MÓVEIS KUKAMONGA				
2					
3	FUNÇÃO	*Coeficientes de variáveis*			
4	OBJETIVO	x	y		
5		4000	5000		
6	*Variável ideal*				
7	Z=	***0,00***			
8					
9	RESTRIÇÕES	x	y	Esq	Dir
10	1	2	3		39
11	2	7	4		91
12	3	0	1		9
13					

MAXIMIZAR A FUNÇÃO OBJETIVO:

z = 4.000x + 5.000y

Restrições:

2x + 3y <= 39 (1)
7x + 4y <= 91 (2)
y <= 9 (3)

x > = 0 (4) y > = 0 (5)
(Condições de não negatividade)

Figura 5.14 – Introdução dos coeficientes das Restrições (1)

Agora precisamos completar as células da coluna Esq.

1ª restrição: $2x+3y$ ► Na célula D10 digitamos a fórmula:
=(B10*B6)+(C10*C6)

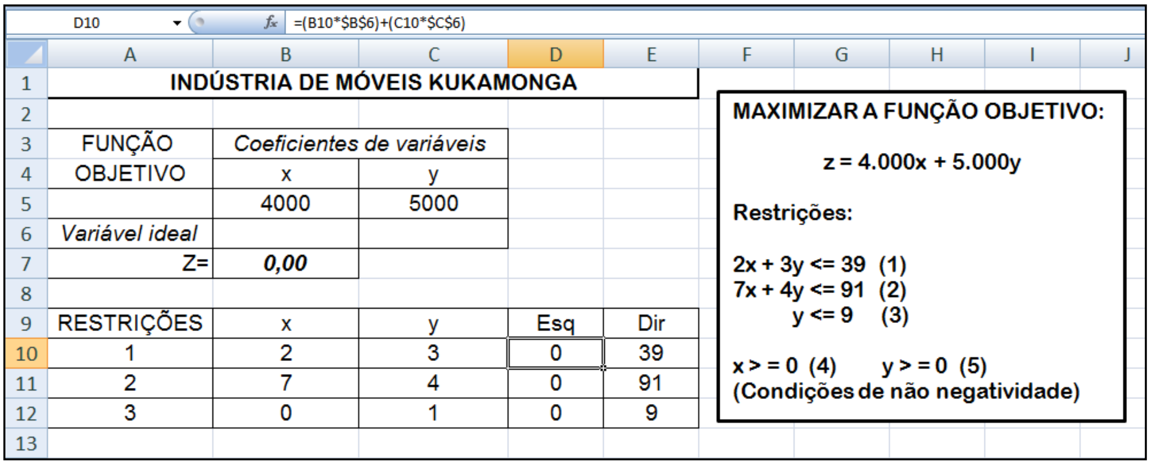
Lembre-se que x e y são as variáveis ideais (é o que queremos descobrir) e estão nas células B6 e C6

2ª restrição: $7x+4y$ ► Na célula D11 digitamos a fórmula:
=(B11*B6)+(C11*C6)

3ª restrição: y ► Na célula D12 digitamos a fórmula:
=(B12*B6)+(C12*C6)

Perceba que nas três fórmulas as células B6 e C6 sempre aparecem. Para economizar tempo, ao digitar a 1ª restrição, ao invés de digitar B6, digite B6 e da mesma forma para C6, digite C6, assim você pode copiar e arrastar esta fórmula para as duas células abaixo (serão geradas automaticamente as fórmulas da 2ª e 3ª restrições).

A planilha ficará assim:



D10 =(B10*B6)+(C10*C6)

	A	B	C	D	E
1	INDÚSTRIA DE MÓVEIS KUKAMONGA				
2					
3	FUNÇÃO	*Coeficientes de variáveis*			
4	OBJETIVO	x	y		
5		4000	5000		
6	*Variável ideal*				
7	Z=	***0,00***			
8					
9	RESTRIÇÕES	x	y	Esq	Dir
10	1	2	3	0	39
11	2	7	4	0	91
12	3	0	1	0	9
13					

MAXIMIZAR A FUNÇÃO OBJETIVO:

z = 4.000x + 5.000y

Restrições:

2x + 3y <= 39 (1)
7x + 4y <= 91 (2)
y <= 9 (3)

x > = 0 (4) y > = 0 (5)
(Condições de não negatividade)

Figura 5.15 – Introdução dos coeficientes das Restrições (2)

Agora temos nossa tabela pronta para podermos aplicar o Solver.

Clique na aba Dados e à direita na barra de ferramentas aparecerá a função Solver.

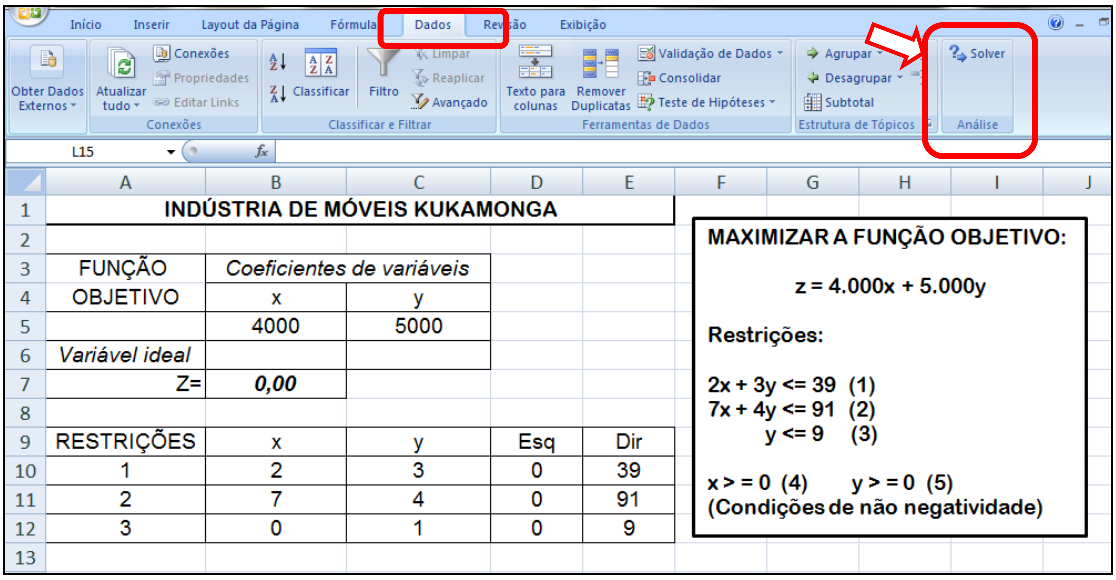


Figura 5.16 – Aplicando o Solver

Ao clicar em Solver aparecerá a seguinte janela de Parâmetros do Solver:

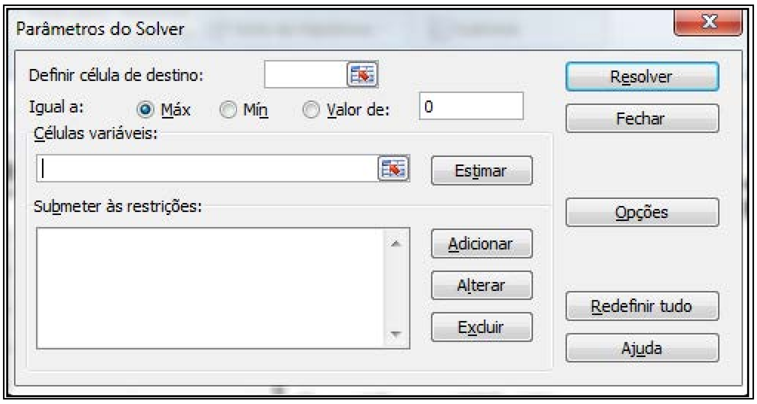


Figura 5.17 – Introdução dos Parâmetros do Solver

A primeira informação que daremos é Definir célula de destino. É a célula em que aparecerá a resposta procurada. Em nosso problema a célula é a B7. Clique na célula que a coordenada aparecerá automaticamente no campo desejado.

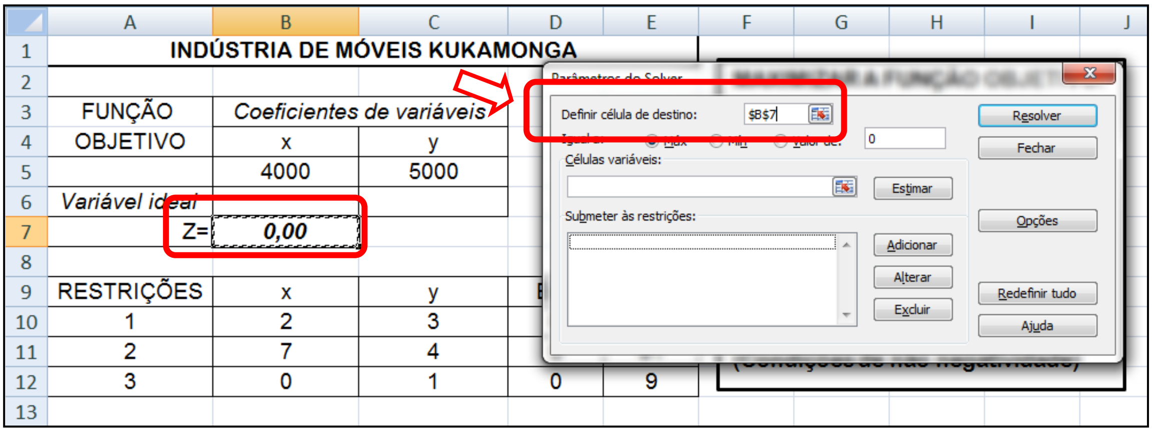


Figura 5.18 – Definindo célula de destino

Como nosso problema procura maximizar o resultado, selecione o item Máx (geralmente vem selecionado)

Em Células variáveis, devem-se indicar as coordenadas das células que chamamos de Variável Ideal, no caso, B6 e C6. Clique em Células variáveis e selecione estas células e suas coordenadas aparecerão automaticamente neste campo.

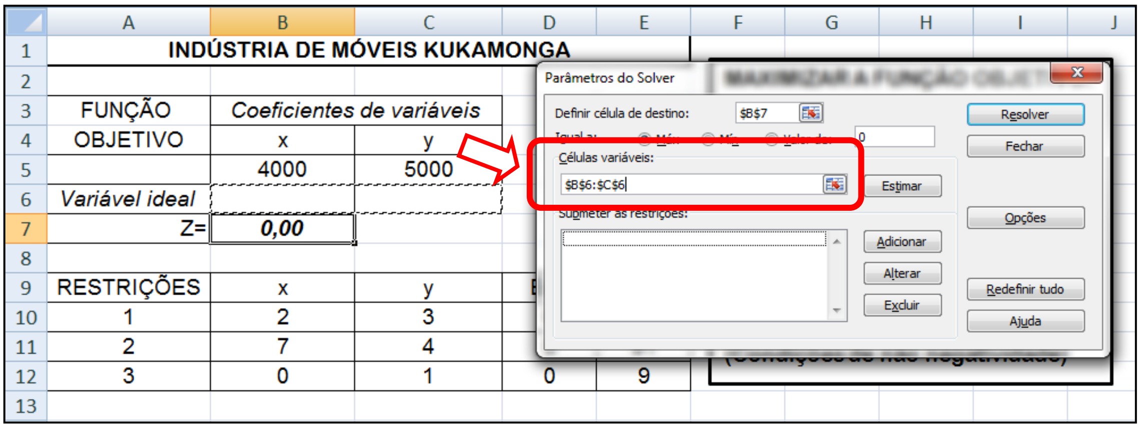


Figura 5.19 – Definindo células variáveis

Agora vamos informar as restrições no campo Submeter às restrições.

Clicando em Adicionar, aparecerá a seguinte janela:

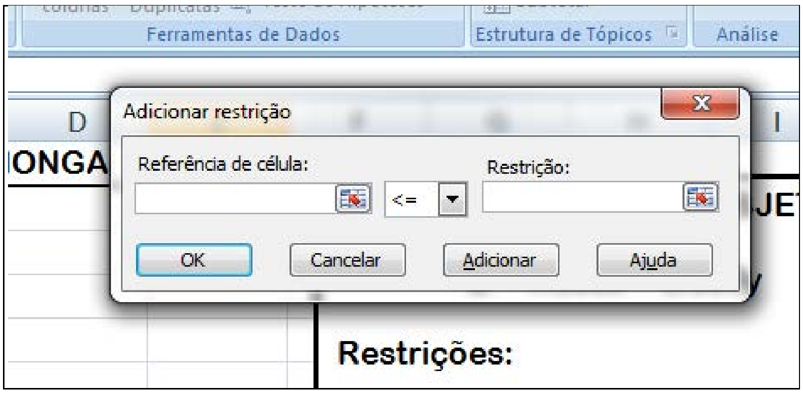


Figura 5.20 – Adicionando restrição

Veja que aparecem os campos Referência de célula, uma desigualdade a ser escolhida e Restrição.

Lembre-se que anteriormente já montamos as fórmulas das desigualdades que estão localizadas na coluna “Esq” da tabela e na coluna “Dir” as constantes de cada inequação. O que falta agora é relacionar as informações da coluna “Esq” com os da coluna “Dir”. Para isto basta informar nesta nova janela as células em que aparecem as fórmulas da coluna “Esq” e as células em que aparecem as constantes da coluna “Dir”. Não se esqueça de escolher a desigualdade necessária.

Para informarmos a 1ª restrição, clique em Referência de célula e selecione a coordenada D10. Agora escolha a desigualdade, que neste caso é menor ou igual. E por fim, clique em Restrição e selecione a coordenada E10.

Temos que informar agora as restrições 2 e 3. O processo é análogo ao anterior: clique em Adicionar e irá aparecer novamente a janela para informar os campos Referência de célula, uma desigualdade a ser escolhida e Restrição.

Ao informarmos a 3ª restrição, a tela ficará assim:

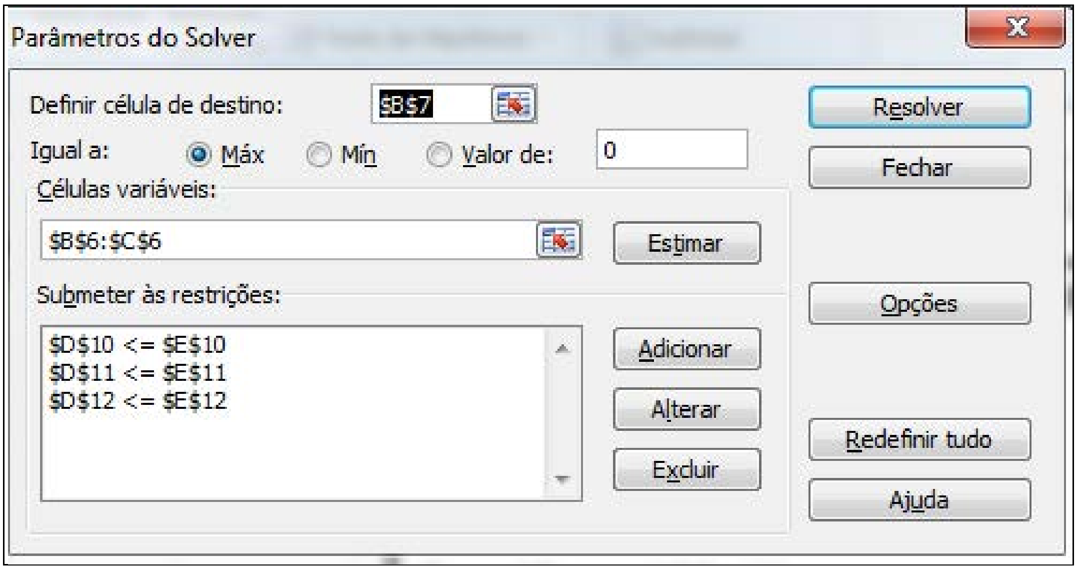


Figura 5.21 – Restrições (1)

Informamos assim as três restrições sugeridas no problema, porém ainda falta indicar ao Solver, as condições de não negatividade, ou seja, as variáveis ideais x e y devem ser maiores ou iguais a zero. Para isto, clique novamente em adicionar e aparecerá novamente a janela para informar os campos Referência de célula, uma desigualdade a ser escolhida e Restrição.

Em Referência de célula, selecione as células B6 e C6, escolha a desigualdade maior ou igual e em Restrição digite 0.

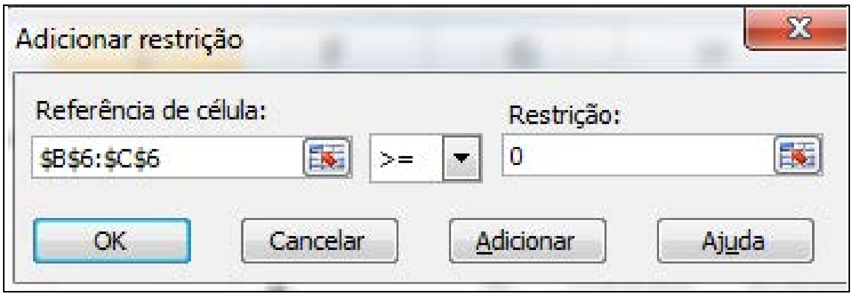


Figura 5.22 – Adicionando restrição de não negatividade

Clique em Ok.

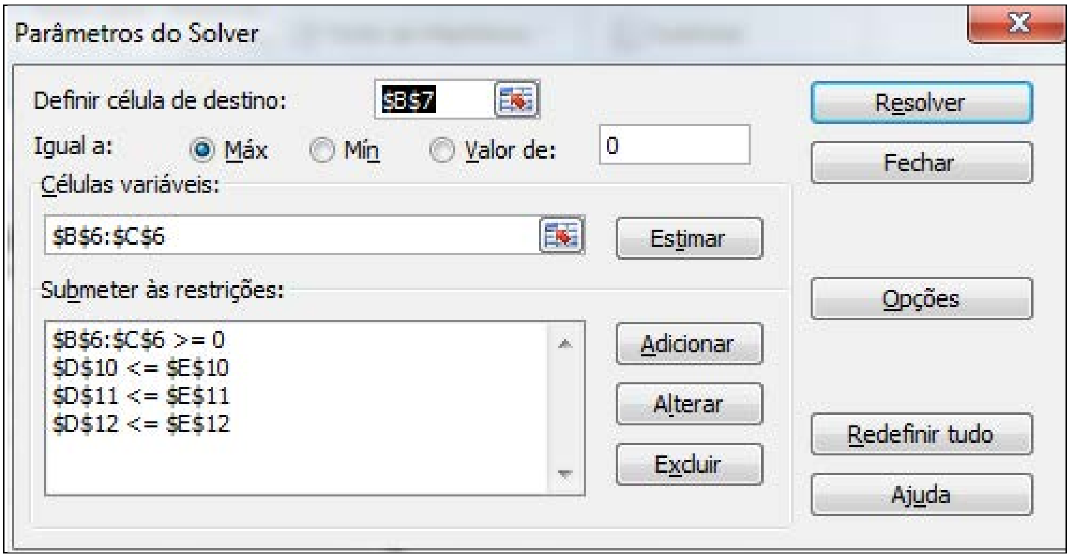


Figura 5.23 – Restrições (2)

Falta informar ao Solver mais dois parâmetros para realizar o cálculo. Clique em Opções e aparecerá a janela:

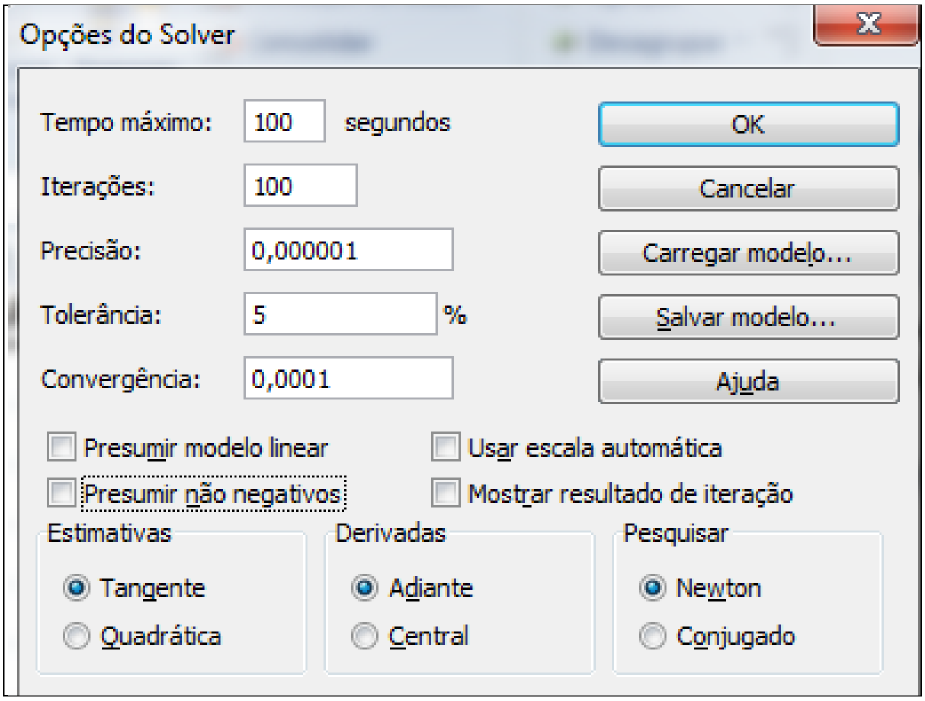


Figura 5.24 – Opções do Solver

Ative o comando Presumir modelo linear (afinal de contas estamos fazendo um problema de Programação Linear), e Presumir não negativo e clique Ok.

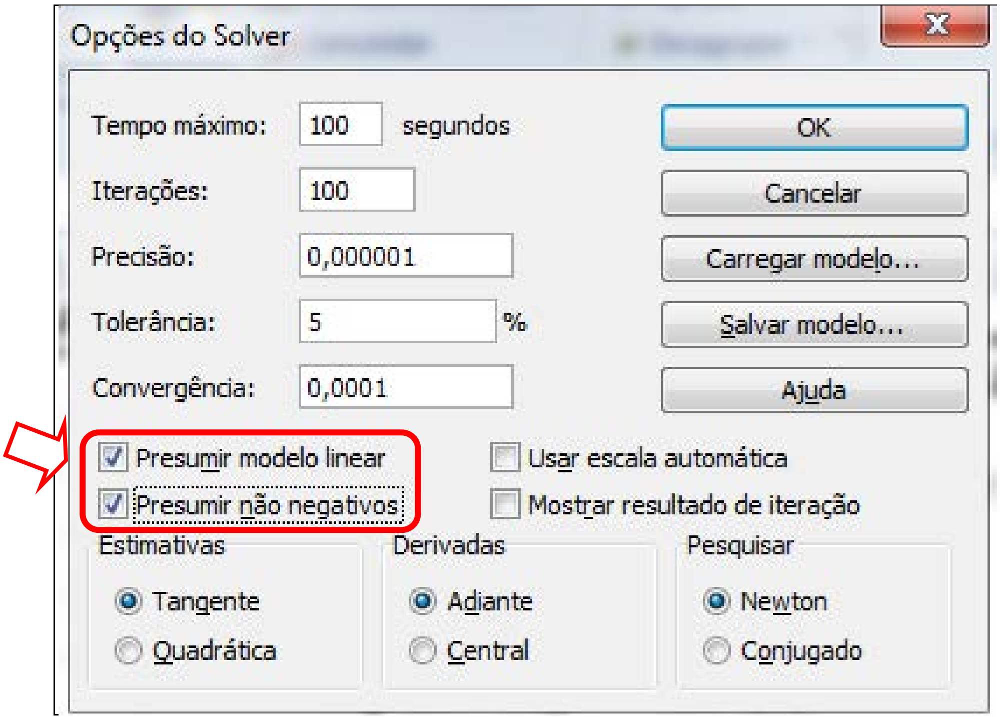


Figura 5.25 – Opções do Solver – Presumir: Modelo Linear e não negativos

Agora é só clicar Resolver.

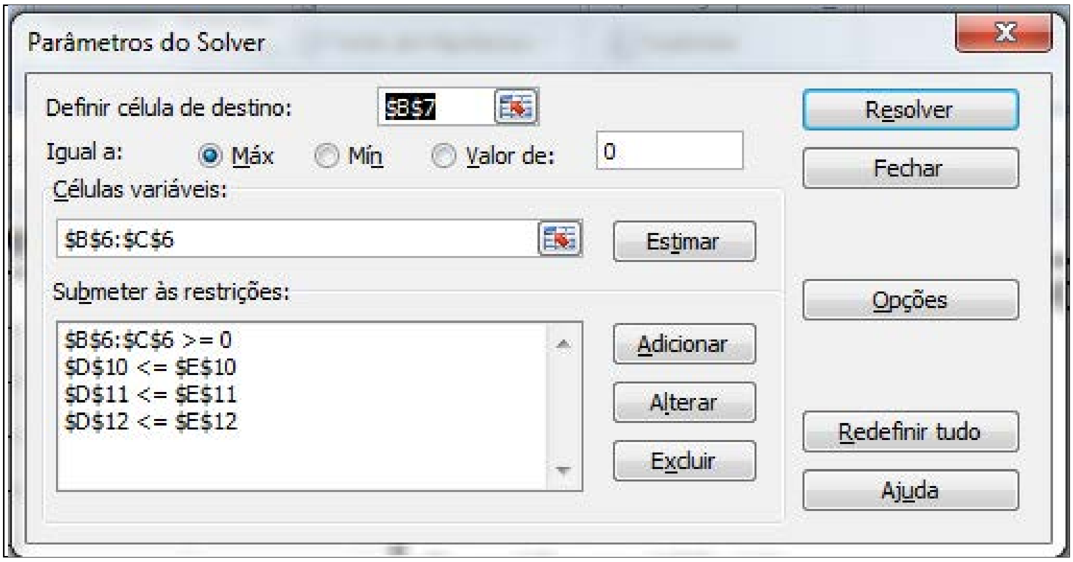


Figura 5.26 – Parâmetros do Solver - Resolver

Aparecerá a seguinte tela perguntando para Manter solução do Solver:

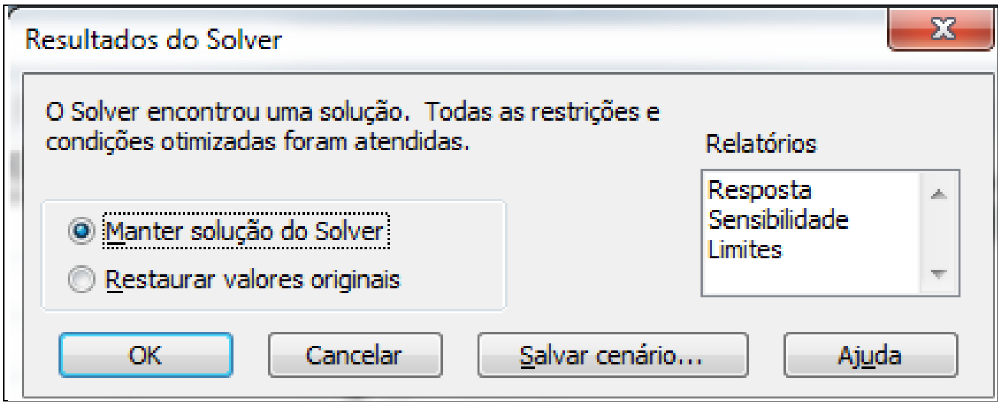
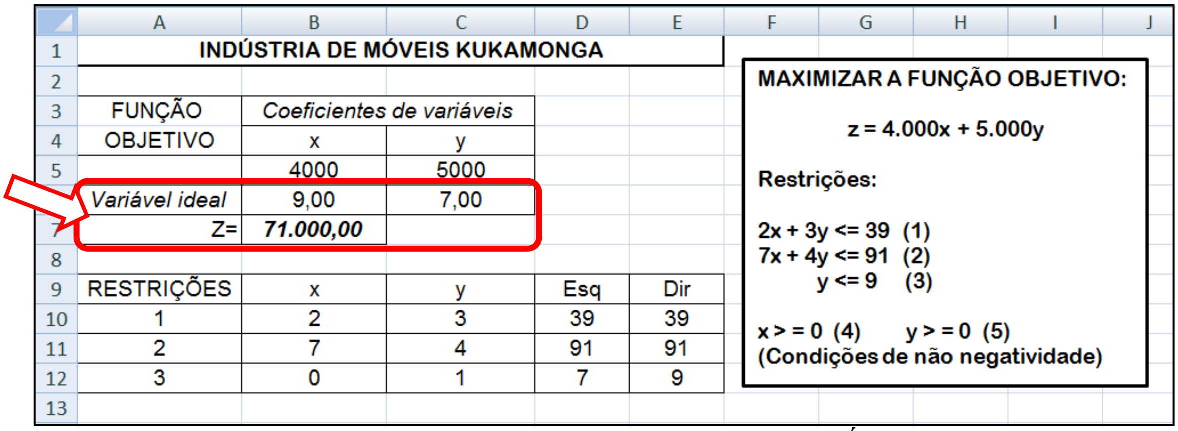


Figura 5.27 – Resultados do Solver

Clique em Ok e finalmente a tabela está completa: A quantidade ideal de produção do modelo Arcobaleno é igual a 9 unidades e do modelo Gioia é igual a 7 unidades, obtendo assim um lucro máximo de R$ 71.000,00.



	A	B	C	D	E
1	**INDÚSTRIA DE MÓVEIS KUKAMONGA**				
2					
3	FUNÇÃO	*Coeficientes de variáveis*			
4	OBJETIVO	x	y		
5		4000	5000		
6	*Variável ideal*	9,00	7,00		
7	Z=	***71.000,00***			
8					
9	RESTRIÇÕES	x	y	Esq	Dir
10	1	2	3	39	39
11	2	7	4	91	91
12	3	0	1	7	9
13					

MAXIMIZAR A FUNÇÃO OBJETIVO:

z = 4.000x + 5.000y

Restrições:

2x + 3y <= 39 (1)
7x + 4y <= 91 (2)
y <= 9 (3)

x > = 0 (4) y > = 0 (5)
(Condições de não negatividade)

Figura 5.28 – Planilha Final – Solução Ótima

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O grande desafio do professor de matemática é conquistar seus alunos e mostrar quão bela e importante a matemática é. Para isto, o aluno tem que perceber onde ela pode ser aplicada e que ele consiga ter sua famosa pergunta respondida: “Para que serve isso que vamos aprender?”.

Dos vários temas que poderiam ser abordados, foi escolhido a resolução de problemas de otimização para mostrar ao aluno uma aplicação da matemática numa situação real.

Com esse tema, o aluno pode trabalhar com representações gráficas no plano cartesiano, funções, sistemas de equações e inequações lineares, assuntos estes que são amplamente abordados em sala de aula.

A proposta de se resolver problemas de otimização através do Método Gráfico e pelo Método Simplex possibilita o aluno a perceber que problemas que ocorrem na prática, em empresas, por exemplo, podem ser resolvidos muitas vezes com conhecimentos adquiridos no Ensino Médio.

Ao ser apresentado o Método Gráfico ao aluno, ele pode realizar uma interpretação mais intuitiva. Já com o Método Simplex o aluno, entra em contato com a realidade dos algoritmos e pode perceber também que os passos envolvidos na resolução dos problemas podem ser implementados num programa computacional principalmente quando estão envolvidas várias variáveis.

Depois de realizar vários problemas aplicando o Método Simplex, o professor deve oferecer ao aluno uma alternativa mais prática utilizando a tecnologia.

A alternativa computacional oferecida neste trabalho, a utilização da função Solver, encontrada no programa Excel da Microsoft, apesar de não ser um software livre ele foi escolhido por ser de fácil acesso e manuseio.

Sabemos que fazer nossas aulas ficarem 100% práticas, aplicáveis no cotidiano, é uma tarefa extremamente difícil, porém devemos ficar sempre atentos de fazermos o possível de aproveitar todas as oportunidades para melhorarmos cada vez mais nosso trabalho.

APÊNDICE

A LISTA DE EXERCÍCIOS – PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

1) Resolva graficamente:

$$a)\ \textit{Maximizar}\ \ z = 4x + 3y$$

$$\textit{Sujeito a}\ \begin{cases} 3x + 4y \le 48 \\ x \le 18 \\ y \le 15 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

$$b)\ \textit{Minimizar}\ \ z = 8x + 5y$$

$$\textit{Sujeito a}\ \begin{cases} 3x + 6y \ge 18 \\ 6x + 2y \ge 24 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

2) Resolver pelo método Simplex:

$$\textit{Maximizar}\ \ z = x + 1{,}5y$$

$$\textit{Sujeito a}\ \begin{cases} 2x + 4y \le 12 \\ 6x + 2y \le 16 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3) Resolva pelo método Simplex o seguinte problema de programação linear:

$$\textit{Maximizar}\ \ z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$\textit{Sujeito a}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

4) Um agricultor pode produzir bois para abate e ovelhas para lã. A produção de um boi por ano requer a existência de um rebanho bovino que ocupa 11 ha de pastagens e que exige uma hora de trabalho por dia. A produção de uma tonelada de lã por ano requer a existência de um rebanho ovino que ocupa 60 ha de pastagens e que exige duas horas de trabalho por dia. O produtor prevê lucros de R$ 700,00 e R$ 1.500,00 por boi e por tonelada de lã produzidos, respectivamente. Seus recursos produtivos são limitados a 500 ha de pastagens e, dado que seus dois filhos o auxiliam no trabalho, dispõe de 24 horas de trabalho diárias. O produtor desejaria seguir um plano que maximizasse seus lucros totais. Determine qual é esse lucro máximo.

5) Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. Ela produz dois tipos de ligas especiais: Uma de Alta resistência e outra de Baixa resistência. A tabela abaixo ilustra a proporção de cada material na mistura para obtenção das ligas passíveis de fabricação. O preço esta cotado em Reais por tonelada da liga fabricada. Também em toneladas estão expressas as restrições de disponibilidade de matéria-prima. Calcule o total de cada liga deve ser produzida para que a metalúrgica atinja seu objetivo.

	Liga Especial de Baixa Resistência	Liga Especial de Alta Resistência	Disponibilidade de Matéria-Prima
Cobre	0,5	0,2	16 Ton
Zinco	0,25	0,3	11 Ton
Chumbo	0,25	0,5	15 Ton
Preço de Venda (R$/Ton)	R$ 3.000,00	R$ 5.000,00	

6) Uma refinaria produz gasolina e óleo combustível. Sua matéria-prima é petróleo, que pode ser adquirido em três países diferentes: Um, Dois e Três. A partir de um barril de petróleo do país Um, que custa $30,00, a refinaria obtém 20 litros de gasolina e 40 kg de óleo combustível. A partir de um barril de petróleo do país Dois, que custa $28,00, a refinaria obtém 17 litros de gasolina e 43 kg de óleo combustível.

A partir de um barril de petróleo do país Três, que custa $ 34,00, a refinaria obtém 25 litros de gasolina e 35 kg de óleo combustível. A gerência da refinaria assinou contratos para a entrega de pelo menos 200.000 litros de gasolina e de pelo menos 380.000 kg de óleo combustível por semana, nos próximos 2 meses. Que quantidade de barris deve ser adquirida de cada país de modo que a refinaria possa cumprir seus contratos ao menor custo de matéria prima possível?

7) Uma grande fábrica de móveis dispõe em estoque de 250 metros de tábuas, 600 metros de pranchas e 500 metros de painéis de conglomerado. A fábrica normalmente oferece uma linha de móveis composta por um modelo de escrivaninha, uma mesa de reunião, um armário e uma prateleira. Cada tipo de móvel consome certa quantidade de matéria prima, conforme a tabela a seguir. A escrivaninha é vendida por R$ 100,00, a mesa por R$ 80,00, o armário por R$ 120,00 e a prateleira por R$ 20,00. A fábrica pretende maximizar sua receita. Determine qual deverá ser essa receita máxima.

	Quantidade de material em metros consumidos por unidade de produto				Disponibilidade do Recurso (m)
	Escrivaninha	Mesa	Armário	Prateleira	
Tábua	1	1	1	4	250
Prancha	0	1	1	2	600
Painéis	3	2	4	0	500
Valor de Revenda	R$ 100,00	R$ 80,00	R$ 120,00	R$ 20,00	

8) A Companhia Lótus fabrica um silenciador de automóvel marca “Silence” de um tamanho apenas. Contudo, ela produz dois modelos: o “Lux” e o “Economic”. O “Lux” é de metal mais pesado e recebe um banho de liga especial antes de ser pintado.

Tendo em vista que a companhia é nova e opera com uma margem de lucros relativamente pequena, os proprietários estão desejosos de encontrar a exata combinação de produção que dará a máxima receita. No momento, ambos os tipos de silenciadores estão vendendo muito bem e nenhum dos dois modelos parece ter o melhor potencial de mercado.

Pode-se trabalhar até 37,5 horas por semana nas operações de pintura. São pintadas duas unidades de cada vez. A operação de banho das peças pode ser executada durante 8 horas por dia (5 dias por semana). Podem ser banhadas duas unidade de cada vez. Como os dois tipos de silenciadores são do mesmo tamanho, o departamento de expedição pode processar até 800 unidades por semana, independentemente do modelo. Dispõe-se de 900 homens-hora semanais no departamento de fabricação.

Modelo	Total de homens-hora exigidos para a fabricação por unidade	Tempo necessário (por par) para o banho (horas)	Tempo exigido (por par) para pintura (horas)	Contribuição por unidade (Reais)
“Lux”	1,5	0,2	0,1	0,90
“Economic”	1,0	---	0,1	0,80

Determine essa melhor combinação de produção que dará a máxima receita.

9) A Companhia “Courex” produz dois tipos de carteiras masculinas em couro. A linha de carteiras “Gold”, mais caras, usa material de primeira qualidade e são feitas quase que inteiramente a mão. A do tipo mais barato, “Silver” é quase inteiramente feita à máquina e usa uma percentagem maior de materiais Standart, que são de qualidade um pouco inferior. Cada carteira do primeiro tipo e do segundo tipo contribui, respectivamente, com 15 e 9 reais para o lucro.

A firma produz 600 unidades do primeiro tipo e 300 do segundo, semanalmente. As mais recentes previsões de vendas indicam que essas quantidades representam as vendas máximas possíveis durante a próxima semana. A mão de obra direta de 10 empregados é de 36 horas semanais/funcionário.

Os fornecedores da companhia acabaram de comunicar que devido a uma escassez temporária de materiais deixará de entregar matéria-prima durante, pelo menos, uma semana. Isto significa que os materiais agora disponíveis, a previsão de vendas, e a mão de obra disponível devem ser consideradas no desenvolvimento da programação da semana seguinte.

As necessidades de material e a disponibilidade de mão de obra são as seguintes:

	"Gold"	"Silver"	Disponível
Materiais de 1ª qualidade	4 dm^2/unidade	2 dm^2/unidade	2.560 dm^2
Materiais Standart	3 dm^2/unidade	5 dm^2/unidade	2.760 dm^2
Trabalho	0,5 horas/unidade	0,2 horas/unidade	360 h/semana

Determine a quantidade de cada modelo de carteira que deve ser produzida para que a companhia "Courex" maximize seu lucro.

10) O proprietário de uma pequena padaria, que é especializada em biscoitos, está interessado nos tipos e quantidades de biscoitos a serem preparados para a venda no dia seguinte. Os biscoitos são de dois tipos: o de Polvilho e o de Nata, dos quais ele pode escolher o que ofertar ao público consumidor.

A padaria tem recursos limitados para criar produtos finais. Desde que estamos interessados com o que produzir para o dia seguinte, os recursos da padaria são relativamente fixos. Há pouca oportunidade, por exemplo, de aumentar o trabalho noturno, quer a quantidade da força de trabalho, que o equipamento disponível. Em consequência, em curto prazo, a capacidade de produção do padeiro é limitada pelo montante do material, trabalho, equipamento e outros recursos a seu dispor, durante o período de tempo em que a decisão estiver em vigor. Qualquer decisão sobre a combinação de produtos tomada pelo dono da padaria deve, portanto, ser técnica ou fisicamente possível, no sentido de que seja possível realizar o trabalho com seus recursos disponíveis.

A padaria tem disponíveis os seguintes recursos:

Mistura de biscoito – 120 kg
Mistura de nata – 32 kg
Equipamento de panificação – Forno contínuo com capacidade de 120 dúzias por dia
Trabalho de panificação – 15 horas

Sabe-se que uma dúzia de biscoitos de nata necessita de 1 kg de mistura de biscoitos e 0,4 kg de mistura de nata. Já uma dúzia de biscoito de polvilho consome 0,6 kg de mistura de biscoito e nada de mistura de nata.

O Padeiro sabe que 0,10 da hora de trabalho de panificação são necessários para cada dúzia de biscoitos de polvilho. Para os biscoitos de nata são necessários 0,15 da hora por dúzia.

O preço de venda dos biscoitos de nata é igual a R$ 0,70 a dúzia e que o material direto e os custos do trabalho necessário à sua produção sejam de R$ 0,50 a dúzia.

Os dados correspondentes para os biscoitos de polvilho são de R$ 0,60 e R$ 0,45, respectivamente. Cada dúzia de biscoito de nata vendida “contribui” com R$ 0,20 para os custos fixos (para todas as quantidades abaixo do ponto de equilíbrio de custo). Da mesma forma, a “contribuição” dos biscoitos de polvilho é de R$ 0,15 por dúzia.

Determine a quantidade de biscoitos de polvilho e de nata que deverão ser produzidos para que o lucro da padaria seja máximo.

RESPOSTAS E SUGESTÕES PARA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

1) a) z = 64 onde x = 16 e y = 0
   b) z = 34,80 onde x = 3,6 e y = 1,2

2) z = 5 onde x = 2 e y = 2

3) z = 695/7 onde $x_1 = 50/7$; $x_2 = 0$; $x_3 = 55/7$ e $x_4 = 0$

4) R$ 17.421,05 por ano

   Sugestão de modelo:

$$\begin{aligned}&\textit{Maximizar}\ \ z = 700x + 1500y\\ &\textit{Sujeito a}\ \ \begin{cases} 11x + 60y \leq 500 \\ x + 2y \leq 24 \\ \ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

5) 20 toneladas de cada liga

   Sugestão de modelo:

$$\begin{aligned}&\textit{Maximizar}\ \ z = 3000x + 5000y\\ &\textit{Sujeito a}\ \ \begin{cases} 0,5x + 0,2y \leq 16 \\ 0,25x + 0,3y \leq 11 \\ 0,25x + 0,5y \leq 15 \\ \ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

6) 8.837,21 barris aproximadamente do país Dois

   Sugestão de modelo:

$$\begin{aligned}&\textit{Minimizar}\ \ z = 30x + 28y + 34z\\ &\textit{Sujeito a}\ \ \begin{cases} 20x + 17y + 25z \geq 200.000 \\ 40x + 43y + 35z \geq 380.000 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

7) R$ 20.000,00

Sugestão de modelo:

$$Maximizar \;\; z = 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4$$

$$Sujeito\ a \;\; \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \le 250 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 \le 600 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 500 \\ \;x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

8) 300 unidades do modelo Lux e 450 unidades do modelo Economic

Sugestão de modelo:

$$Maximizar \;\; z = 0,9x + 0,8y$$

$$Sujeito\ a \;\; \begin{cases} 1,5x + y \le 900 \\ 0,2x \le 80 \\ 0,1x + 0,1y \le 75 \\ x + y \le 800 \\ \;x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

9) Gold: 520 unidades Silver: 240 unidades

Sugestão de modelo:

$$Maximizar \;\; z = 15x + 9y$$

$$Sujeito\ a \;\; \begin{cases} 4x + 2y \le 2560 \\ 3x + 5y \le 2760 \\ 0,5x + 0,2y \le 360 \\ x \le 600 \\ y \le 300 \\ \;x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

10) 30 dúzias de biscoito de polvilho e 80 dúzias de biscoito de nata

Sugestão de modelo:

$$Maximizar \;\; z = 0,15x + 0,20y$$

$$Sujeito\ a \;\; \begin{cases} 0,6x + 1y \le 120 \\ x + y \le 120 \\ 0,4y \le 32 \\ 0,10x + 0,15y \le 15 \\ \;x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

GOLDBARG, M. C. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

LANZER, E. A. **Programação linear: conceitos e aplicações**. Rio de Janeiro: IPEA/INPES, 1982.

MOREIRA, D. A. **Administração da produção e operações**. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa operacional: Curso introdutório**. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

STOCKTON, R. S. **Introdução à programação linear**. São Paulo: Atlas S.A., 1970.