

unesp 

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA



**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

O estudo das propriedades elásticas de materiais
compósitos - um tratamento matemático

Tiago Levi Pacheco

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO/SP

2019



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O estudo das propriedades elásticas de materiais compósitos - um tratamento matemático

Tiago Levi Pacheco

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

Co-orientador

Prof. Dr. Flávio Yukio Watanabe

2019

P116e Pacheco, Tiago Levi
O estudo das propriedades elásticas de materiais compósitos -
um tratamento matemático / Tiago Levi Pacheco. -- Rio Claro,
2019
64 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira
Coorientador: Flávio Yukio Watanabe

1. Círculo de Mohr. 2. Geogebra. 3. Métodos Matemáticos. 4.
Resistência dos Materiais. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Tiago Levi Pacheco

O ESTUDO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE MATERIAIS
COMPÓSITOS - UM TRATAMENTO MATEMÁTICO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Orientadora

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho

Profa. Dra. Elaine Cristina Catapani Poletti
Faculdade de Tecnologia - Universidade Estadual de Campinas

Rio Claro, 07 de Agosto de 2019

À minha família.

Agradecimentos

Às Professoras Alice Kimie Miwa Libardi e Renata Zotin Gomes de Oliveira, do Departamento de Matemática, que, com muita paciência e dedicação foram minhas mentoras e porto seguro para a conclusão deste trabalho.

Ao Professor Flávio Yukio Watanabe, estimado amigo, cujos conhecimentos e explicações foram os elementos chave para a minha compreensão do tema.

Aos membros da banca examinadora, tanto de qualificação como de defesa deste trabalho, minha gratidão pela dedicação e seriedade na leitura deste, os quais contribuíram para a melhoria do mesmo.

Aos meus pais e irmãos que sempre me apoiaram, acreditando em meu sucesso mesmo quando eu fraquejei.

Em especial ao meu irmão Diego, modelo que aspiro um dia ser.

A wise man once said nothing.
Anonymous

Resumo

Este trabalho concentra-se no estudo do comportamento elástico de materiais através da análise das matrizes de rigidez e flexibilidade de estruturas elementares. Baseado em conceitos da disciplina Resistência dos Materiais e nas propriedades elásticas dos materiais são apresentadas e demonstradas relações matemáticas que refletem as associações entre as tensões normais e de cisalhamento atuantes e as deformações e distorções decorrentes. Essas relações são ilustradas computacionalmente, através do *software* Geogebra. Transformações de coordenadas possibilitam a determinação de tensões em planos diferentes dos originais de forma analítica ou gráfica. Estes conceitos são aplicados a materiais compósitos ortotrópicos sujeitos a carregamento plano, configuração característica de uma lâmina de material compósito empregada em estruturas mais complexas, possibilitando a determinação das propriedades elásticas de uma lâmina em direções diferentes das chamadas direções principais, alinhadas ou ortogonais à direção das fibras.

Palavras-chave: Círculo de Mohr, Geogebra, Métodos Matemáticos, Resistência dos Materiais.

Abstract

This essay focuses on the study of the elastic behavior of materials through the analysis of the stiffness and flexibility matrices of elementary structures. Based on the concepts of the Material Resistance discipline and the elastic properties of the materials, mathematical relationships are presented and demonstrated that reflect the associations between the acting normal and shear stresses and the resulting deformations and distortions. These relationships are computationally illustrated through Geogebra software. Coordinate transformations allow the determination of stresses in different planes of the originals in an analytical or graphical way. These concepts are applied to orthotropic composites subjected to flat loading, characteristic configuration of a composite material blade used in more complex structures, making it possible to determine the elastic properties of a blade in different directions of the so-called main directions, aligned or orthogonal to the direction of the fibers.

Keywords: Mohr's Circle, Geogebra, Mathematical Methods, Strength of materials.

Lista de Figuras

1.1	Ilustrações dos ensaios com vigas de Leonardo da Vinci. Fonte: e-Book Leonardo DaVince Engeeniring and inventions. Amazon.	22
2.1	Rotação dos eixos de referência.	23
2.2	Novo sistema de eixos rotacionado θ radianos.	25
2.3	Deformação por força cisalhante.	26
2.4	Material composto por lâminas e homogeneidade da camada em observação.	26
3.1	Forças de superfície e corpo	29
3.2	Força em um elemento do corpo	30
3.3	Tensões em um ponto material	30
3.4	Estado de tensão	31
3.5	Tensão normal média	32
3.6	Deformação de um corpo material	32
3.7	Efeito Poisson	34
3.8	Forças opostas e secção cisalhada	35
3.9	Deformação por cisalhamento	35
3.10	Diagrama tensão-deformação.	36
3.11	Coefficientes de rigidez de uma barra composta por duas hastes.	38
3.12	Deformações normais combinadas	41
3.13	Deformações de cisalhamento combinadas	41
3.14	Deformações normais e de cisalhamento.	42
3.15	Variação angular por cisalhamento	42
3.16	Orientação de 45° e tensão de cisalhamento máxima.	43
3.17	Estado de tensão geral e no plano	44
3.18	Tensões em função da orientação e círculo de Mohr.	45
4.1	Exemplo de materiais compósitos com fibras e matriz.	47
4.2	Material ortotópico com isotropia transversal	49
4.3	Módulo de Young e módulo de cisalhamento de material compósito unidirecional em função da orientação das fibras	53
4.4	Razão de Poisson e coeficiente de acoplamento de material compósito unidirecional em função da orientação das fibras	53
4.5	Representação gráfica da variação das constantes de engenharia em função do parâmetro θ	54
4.6	Fluxograma para transformação das constantes de Engenharia específicas do material.	54
5.1	Infográfico percentual de material compósito em uma aeronave.	55

5.2	Aplicação de lâminas de materiais compósitos com diferentes orientações das fibras.	56
A.1	Círculo de Mohr.	59
A.2	Elemento cúbico de um material.	60
A.3	Simulação de uma deformação de cisalhamento.	61
A.4	Simulação de uma deformação normal.	61
A.5	Superposição de deformações.	62
B.1	Tensão de cisalhamento em um plano rotacionado 45° em relação ao esforço solicitante.	63

Lista de Tabelas

3.1	Exemplo de valores do módulo de Young.	33
3.2	Composição das deformações.	41

Sumário

1	Introdução	21
2	Conceitos básicos matemáticos e de ciência dos materiais	23
2.1	Conceitos matemáticos	23
2.2	Conceitos básicos de ciência dos materiais	26
3	Forças, tensões e deformações	29
3.1	Solicitações externas	29
3.2	Tensão	30
3.3	Tensão normal média	31
3.3.1	Deformação normal	32
3.3.2	Módulo de Young	33
3.3.3	Força exercida por uma compressão ou tração	33
3.3.4	O coeficiente de Poisson	33
3.4	Tensão média de cisalhamento	34
3.4.1	Deformação de cisalhamento	34
3.5	O ensaio de tração e compressão	35
3.5.1	Diagrama tensão-deformação	36
3.6	Matrizes de rigidez e flexibilidade	37
3.6.1	Análise estrutural matricial	37
3.6.2	Matriz de rigidez - forças em função dos deslocamentos	37
3.7	Matriz de flexibilidade - deslocamentos em função das forças	39
3.8	A lei de Hooke generalizada	40
3.9	Transformações no estado de tensão no plano	43
4	Materiais compósitos	47
4.1	Definição e características	47
4.2	Materiais transversalmente ortotrópicos em um estado plano de tensões	49
5	Considerações finais	55
	Referências	57
A	Animações no software Geogebra	59
A.1	Círculo de Mohr	59
A.2	Deformações normais e de cisalhamento	60

B	Demonstrações matemáticas	63
B.1	Demonstração da expressão da tensão de cisalhamento máxima	63
B.2	Coeficiente de acoplamento de cisalhamento	64

1 Introdução

Desde a antiguidade, quando o homem começou a explorar técnicas de construção, tornou-se necessário conhecer os materiais utilizados e suas propriedades, em especial, a resistência mecânica e as deformações sofridas por estes. Através de tais conhecimentos foi possível criar padrões e relações matemáticas para se dimensionar elementos e estruturas.

As civilizações antigas já se dedicavam ao estudo dos materiais: os egípcios utilizaram esses conhecimentos para a construção das pirâmides e, posteriormente, os gregos criaram os princípios de todo estudo de resistência de materiais; a estática. Outra civilização cuja contribuição foi importante é a romana, que desenvolveu a construção de pontes com arcos.

Durante o Renascimento, com o ressurgimento do interesse pela ciência, grandes nomes dedicaram-se à engenharia e arquitetura, dentre eles Leonardo da Vinci, que tinha grande interesse pela mecânica e escreveu:

*A mecânica é o paraíso da ciência porque é onde colhemos os frutos da matemática.*¹

Leonardo da Vinci estudou experimentalmente a resistência de materiais. Baseado em suas análises de resistência de vigas, Figura 1.1, afirmou:

*Em todo objeto que é apoiado, mas que pode se curvar, e que apresenta seção transversal e material uniformes, a parte que está mais distante dos apoios será a que mais vai se curvar.*²

Através de uma série de testes, iniciados com uma viga, apoiada em ambos os lados, que pudesse sustentar uma carga pré-definida, recomendou que se testasse diversas vigas de mesma espessura e largura, porém de comprimentos diferentes, e as cargas que poderiam suportar. Concluiu, enfim, que a resistência destas era inversamente proporcional ao comprimento e diretamente proporcional à largura e espessura. Seus esforços constituíram os primeiros passos para o desenvolvimento da Ciência de Materiais e Estruturas.

Galileu Galilei, em seu livro *The New Sciences*, organizou métodos para as análises de esforços em uma sequência lógica. Assim, teve início a resistência de materiais como ciência. Em seu livro, Galileu afirma que ao se construir estruturas similares, porém, com aumento gradativo de suas dimensões, elas se tornam cada vez mais fracas. Exemplificando sua teoria, escreveu:

¹A History and Philosophy of Fluid Mechanics, G.A. Totaty, Courier Corporation, 2013

²Mechanics of Materials, R.C.Hibbeler, Pearson Prentice Hall, 2011

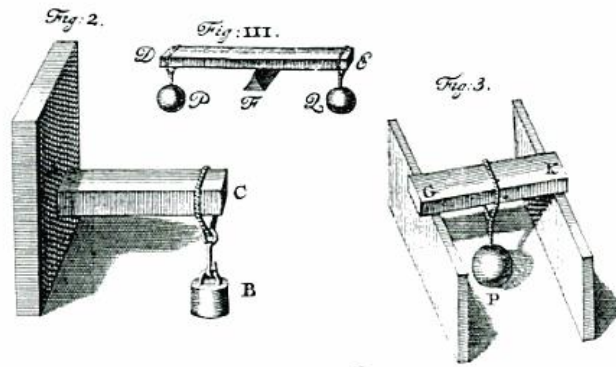


Figura 1.1: Ilustrações dos ensaios com vigas de Leonardo da Vinci. Fonte: e-Book Leonardo DaVince Engeniring and inventions. Amazon.

Um pequeno obelisco ou coluna ou outra figura sólida pode certamente ser deitada ou colocada em pé sem perigo de se quebrar, enquanto que outras maiores são partidas em pedaços devido à mais sutil das perturbações, e isto exclusivamente por causa da ação de seu próprio peso.³

Em seus experimentos submeteu materiais à trações/tensões simples e concluiu que a resistência de uma barra está associada à sua secção transversal e não ao seu comprimento, a qual chamou de *resistência absoluta à ruptura*. Porém, erroneamente assumiu que os materiais seguiam a Lei de Hooke, que rege a relação entre a força e a deformação de uma mola, até o momento de ruptura.

Baseado em seus experimentos, Galileu, comprova relações coerentes entre os parâmetros da barra, comprimento/largura/espessura/secção transversal, e sua resistência *absoluta* e, desta forma, iniciou uma nova ciência.

Neste trabalho temos por objetivo explorar e demonstrar matematicamente as propriedades de materiais compósitos, estudando relações, apenas apresentadas nos livros de engenharia, entre solicitações denominadas tensões normais e de cisalhamento bem como as respectivas deformações produzidas por estas na chamada fase elástica. Espera-se que o material produzido possa trazer contribuições a professores de matemática que atuam em disciplinas de graduação nos diversos cursos de Engenharia e também a professores de Resistência de Materiais.

Os conceitos estudados são baseados nos livros de Hibeller [2] e Daniel e Ishai [1], que tratam da resistência de materiais. Ao longo do texto procuraremos verificar e até mesmo demonstrar algumas relações que são apresentadas pelos autores.

Para uma melhor compreensão do texto é esperado que o leitor tenha noções de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real e Álgebra Linear.

³Dialogues Concerning Two New Sciences, G. Galilei, Tradução: H. Crew, Prometheus Books, 1991

2 Conceitos básicos matemáticos e de ciência dos materiais

Este capítulo tem por objetivo apresentar conceitos matemáticos e de resistência de materiais básicos para o leitor de modo que o entendimento dos capítulos subsequentes seja facilitado.

2.1 Conceitos matemáticos

Frequentemente, nas aplicações e modelagens de problemas de engenharia, certos problemas tornam-se mais fáceis quando se escolhe um referencial adequado. Considerando, por exemplo, uma trajetória elíptica determinada pela equação

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0,$$

que se encontra rotacionada em relação ao sistema de eixos xOy , como representada na Figura 2.1 (a), ao se escolher um novo referencial $x'Oy'$, Figura 2.1 (b) como base nos eixos principais da elipse, a trajetória seria representada pela expressão

$$3(x')^2 + 1(y')^2 = 6,$$

e o tratamento do problema seria significativamente simplificado através de um novo sistema de coordenadas.

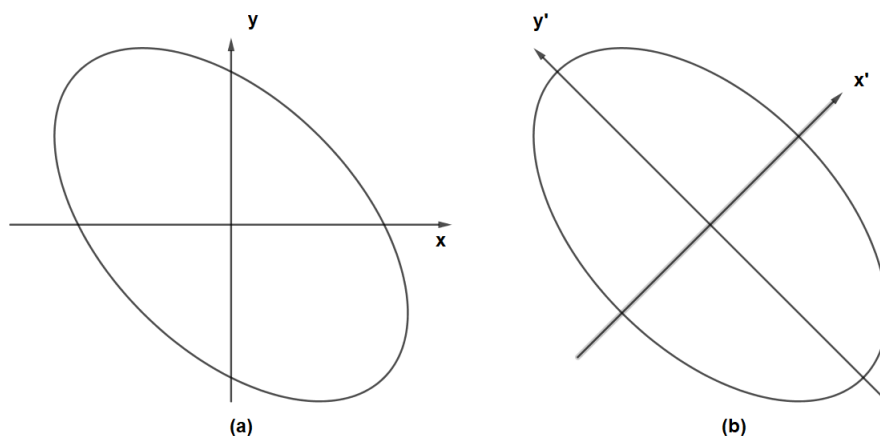


Figura 2.1: Rotação dos eixos de referência.

Após escolher um novo sistema de eixos como referência é preciso determinar a relação entre as coordenadas e valores de um ponto no antigo referencial e suas coordenadas no novo referencial.

Para esse propósito definimos duas bases ordenadas $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ de um mesmo espaço vetorial real V . Com isto é possível escrever um vetor $v \in V$, como uma combinação linear dos elementos em ambas bases β e β' :

$$\begin{aligned} v &= x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \\ v &= y_1 w_1 + \dots + y_n w_n, \end{aligned}$$

em que $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Assim, a relação entre as coordenadas de v na base β

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor na base β'

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

pode ser obtida da seguinte maneira: dado que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V , escrevendo os vetores w_i como combinação linear dos u_i , isto é:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n \\ \dots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n. \end{cases}$$

Reescrevendo-se

$$\begin{aligned} v &= y_1 w_1 + \dots + y_n w_n \\ &= y_1 (a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n) + \dots + y_n (a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n) \\ &= (a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n) u_1 + \dots + (a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n) u_n \end{aligned}$$

e como $v = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ &\dots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Na forma matricial pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \implies [v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

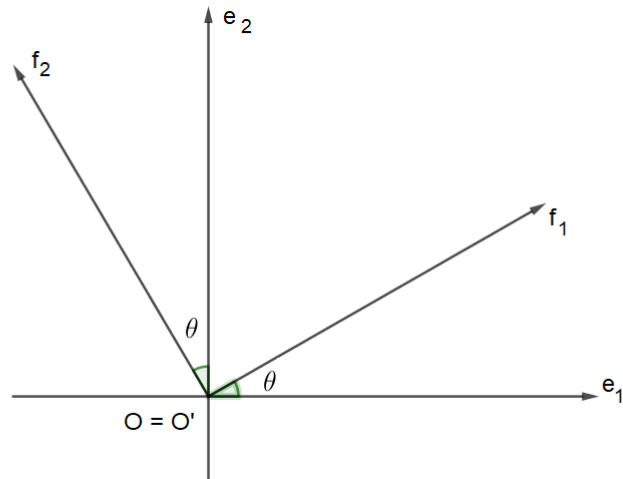


Figura 2.2: Novo sistema de eixos rotacionado θ radianos.

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é denominada *matriz de mudança de base de β' para β* .

Uma aplicação importante e prática, que servirá de referência para transformações de tensões em lâminas planas de materiais através do Círculo de Mohr, é a matriz de rotação de eixos referenciais.

Para construção da matriz de rotação consideram-se em \mathbb{R}^2 a base canônica $\beta = \{e_1, e_2\}$ e a base $\beta' = \{f_1, f_2\}$ obtida a partir da base canônica β através da rotação de um ângulo θ , $0 < \theta < \pi/2$ (Figura 2.2).

Assim, queremos obter $[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [v]_{\beta}$ e portanto é necessário calcularmos $[I]_{\beta'}^{\beta}$. Observe que

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 \cos \theta - f_2 \operatorname{sen} \theta, \\ e_2 &= f_1 \operatorname{sen} \theta + f_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Igualmente importante à rotação de eixos para nosso texto é a transformação linear que modela a deformação de cisalhamento. Nesta transformação linear acontece a deformação de um quadrado em um paralelogramo e poderia ser representada, através de um modelo físico simples, um livro apoiado sobre uma mesa na qual empurramos sua capa superior paralelamente à mesa e notamos as páginas escorregando umas sobre as outras e notamos a inclinação de sua lombada. Sem perda de generalidade, consideremos, como na Figura 2.3, uma força horizontal e tangencial à aresta superior do quadrado.

A transformação representada na Figura 2.3 pode ser modelada matricialmente através da relação

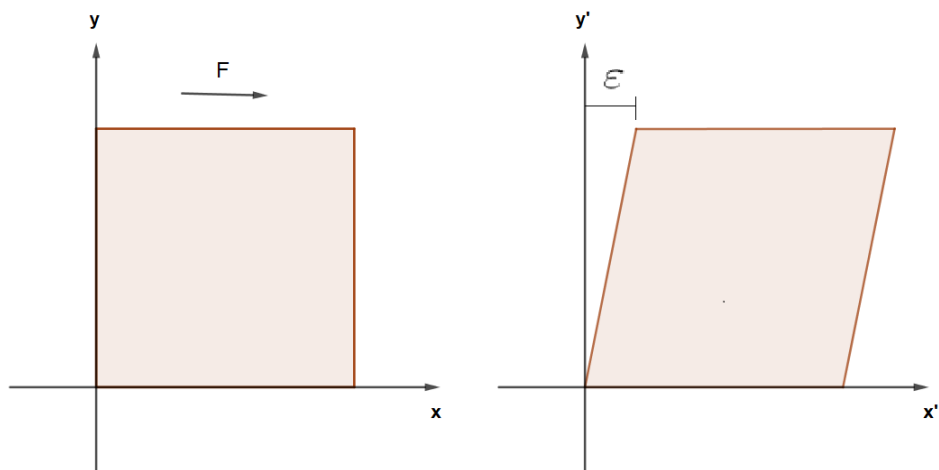


Figura 2.3: Deformação por força cisalhante.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

2.2 Conceitos básicos de ciência dos materiais

As principais características dos materiais que são consideradas neste trabalho são:

Homogeneidade

Um material é chamado homogêneo se suas propriedades mecânicas são as mesmas em todos os pontos ou independente da localização. O conceito de homogeneidade está associado à escala ou volume característico e um material pode ser homogêneo ou heterogêneo, dependendo da escala de observação. Por exemplo, uma placa composta de fibras de carbono (Figura 2.4), envoltas por resina, apesar de ser classificado como compósito, se observada apenas a resina, será classificada como homogênea.

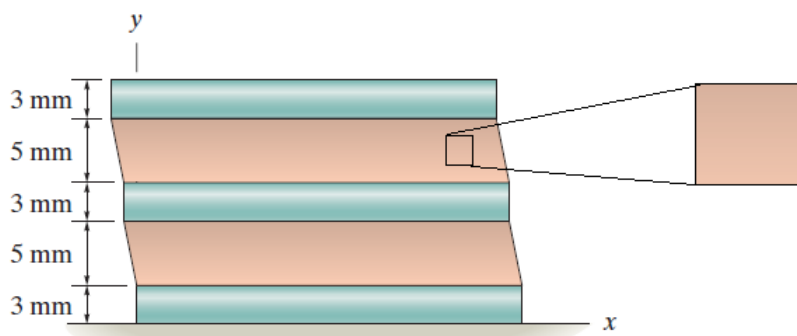


Figura 2.4: Material composto por lâminas e homogeneidade da camada em observação [1].

Isotropia

Muitas propriedades dos materiais como rigidez, dureza, expansão e condução térmica, ductibilidade e permeabilidade estão associadas às direções ou eixos. Um material é *isotrópico* quando suas propriedades são as mesmas em todas as direções ou são independentes da orientação dos eixos de referência. Pode-se citar, como exemplo, a borracha que tem as mesmas propriedades elásticas em todos os pontos de sua extensão.

Ortotropia

Materiais ortotrópicos são materiais que apresentam pelo menos três planos de simetria mutuamente perpendiculares. A intersecção desses planos, dois a dois, definem três eixos mutuamente perpendiculares chamados *eixos de simetria*. Como exemplo de material ortotrópico tem-se as chapas laminadas que, durante sua produção, ao serem comprimidas entre dois rolos, adquirem resistência mecânica, na direção da extrusão, diferente da resistência nas direções perpendiculares ao estiramento do material devido à reorganização dos grãos do mesmo.

Nessa classe de materiais destacam-se os materiais *transversalmente ortotrópicos*. Nesses materiais um de seus planos principais é um plano de isotropia, isto é, em cada ponto há um plano no qual as propriedades mecânicas são as mesmas em todas as direções.

Princípio da superposição

Os efeitos causados por um sistema de forças externas são a soma dos efeitos produzidos por cada força considerada agindo isoladamente e independente das outras.

Lei de Hooke

A Lei de Hooke, válida somente nos casos de deformações elásticas (restituíveis), é uma relação entre a força aplicada e o deslocamento:

$$F = kd, \quad (2.1)$$

onde F é a força aplicada, k é a constante elástica de rigidez e d é o deslocamento ou deformação. Ao analisar a Lei de Hooke considerando a força como grandeza dependente do deslocamento defini-se a rigidez (k) da mola como a força por unidade de deslocamento, ou seja, a força requerida para produzir um deslocamento unitário na mola. Analogamente, tratando o deslocamento como grandeza dependente da força, definimos a flexibilidade (δ) da mola como o deslocamento realizado pela aplicação de uma força de valor unitário,

$$d = \delta F. \quad (2.2)$$

Algebricamente as equações (2.1) e (2.2) podem ser vistas como funções inversas e conseqüentemente, k e δ , com $\delta = 1/k$.

3 Forças, tensões e deformações

Em todo projeto de engenharia, as peças estão sujeitas a uma grande variedade de esforços como, por exemplo, a ação da força peso, a força resultante do vento agindo sobre a estrutura, dentre outras. Estes esforços agem sobre superfícies produzindo deformações nas dimensões das estruturas, ainda que muito pequenas, o quociente *força/área* dá origem ao conceito de tensão. Definiremos neste capítulo as relações matemáticas entre forças e deformações na fase elástica, as matrizes de flexibilidade e rigidez e demonstraremos a expressão que engloba as três mais importantes constantes elásticas dos materiais.

3.1 Solicitações externas

Um corpo está submetido a apenas dois tipos de esforços externos: forças de superfície e forças de corpo. As forças de superfície são causadas através do contato entre dois corpos e é distribuída em toda a superfície de contato. Se a área de contato for pequena a força de superfície pode ser representada como uma força concentrada em um ponto. Forças de corpo são aquelas que ocorrem sem o contato físico dos corpos como, por exemplo, a força peso causada pelo campo gravitacional terrestre ou a atração eletromagnética (Figura 3.1).

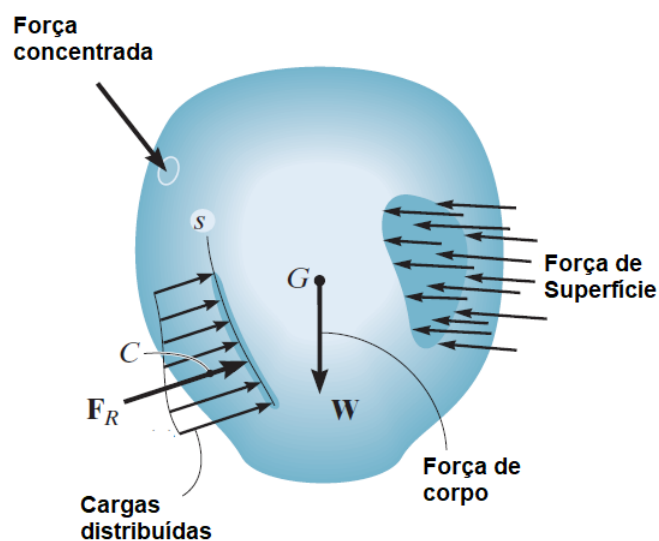


Figura 3.1: Forças de superfície e corpo [1].

3.2 Tensão

Determinar a distribuição de cargas internas no estudo da resistência dos materiais é um fator muito importante e para resolver esse problema é necessário entender o conceito de tensão. Consideramos o corpo mantido em equilíbrio por quatro forças externas F_R , F_1 , F_2 e M_{R_0} , como mostrado na Figura 3.2 (c):

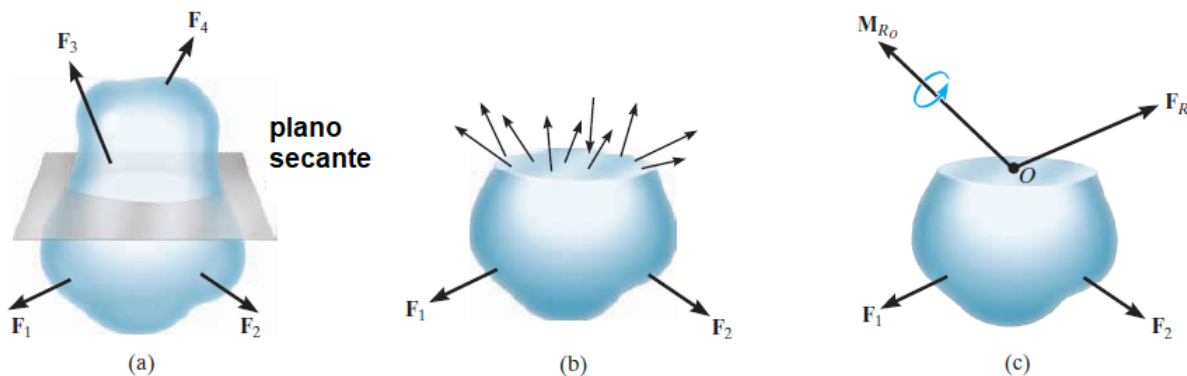


Figura 3.2: Força em um elemento do corpo [2].

Considerando o material contínuo e coeso, ou seja, sem espaços vazios ou trincas e que suas partes estão bem unidas, e subdividindo a área da secção em pequenas áreas ΔA tem-se um força ΔF finita atuando sobre ΔA . Como todas as forças, ΔF pode ser decomposta em três direções, ΔF_x , ΔF_y e ΔF_z , sendo as duas primeiras tangentes e a última normal ao plano, como mostra a Figura 3.3 (a). A razão $\Delta F/\Delta A$, quando o denominador tende a zero, tende a um limite finito e a essa razão dá-se o nome de tensão, isto é, a *intensidade da força interna sobre uma área/plano específico* que passa por um determinado ponto material do corpo.

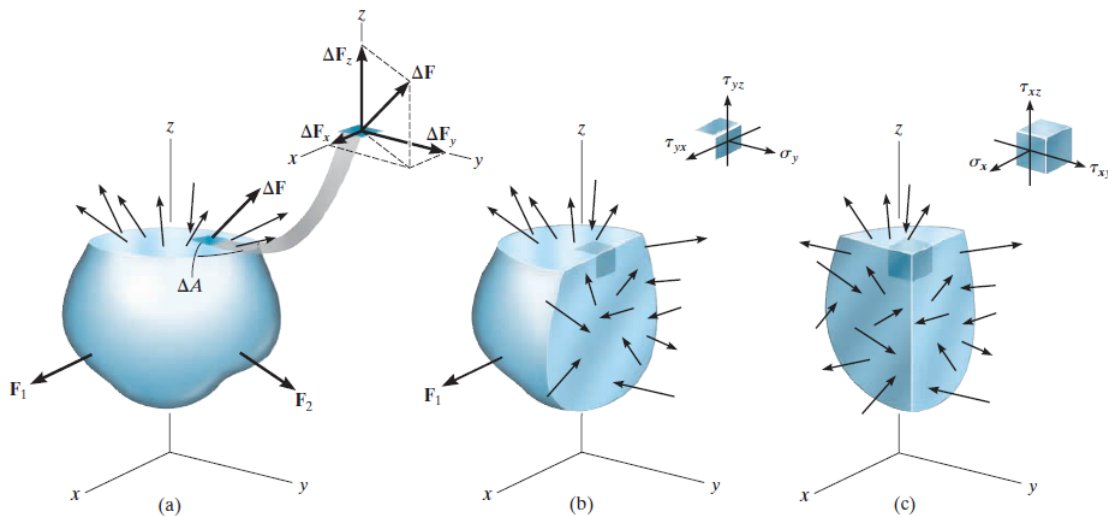


Figura 3.3: Tensões em um ponto material [2].

Definição 1. *Tensão normal* é a força, seja tração ou compressão, que atua perpendicularmente a uma área da seção transversal do corpo e é, geralmente, denotada pela letra grega σ (sigma).

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}. \quad (3.1)$$

Definição 2. *Tensão de cisalhamento* é o quociente entre a intensidade da força tangencial e a área. Dados ΔF_y e ΔF_z tangentes ao plano, tem-se:

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A},$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}.$$

As tensões normal e de cisalhamento, são ilustradas nas Figuras 3.1(b) e 3.1 (c), respectivamente.

Para a simbologia σ_x o índice indica a direção normal ao plano de aplicação da força. Para τ_{xy} e τ_{xz} o primeiro índice indica a orientação do plano e o segundo, a direção das tensões de cisalhamento.

Se seccionarmos o corpo por planos paralelos aos planos xy , xz e yz pode-se tomar um cubo de dimensões tão pequenas quanto necessário, Figura 3.4, e este terá as tensões em suas faces descritas pelas três componentes de tensão, representando assim o **estado de tensão** que atua em um ponto material do corpo. Se os eixos referenciais fossem escolhidos em outras direções as tensões seriam diferentes, como será mostrado adiante.

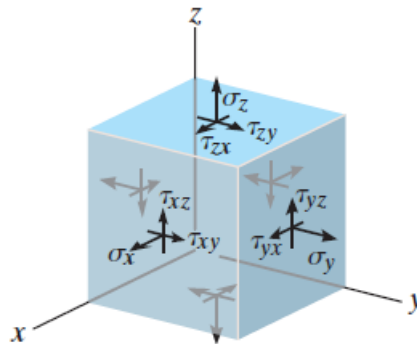


Figura 3.4: Estado de tensão [2].

3.3 Tensão normal média

A distribuição média de tensão que atua com carga axial/normal em uma seção transversal pode ser interpretada como o somatório de todas as pequenas forças normais ΔF que atuam em cada pequeno elemento de área ΔA (Figura 3.5). Da definição de

tensão normal podemos escrever $\Delta F = \sigma \Delta A$ e tomando $\Delta F \rightarrow dF$ e $\Delta A \rightarrow dA$, tem-se:

$$\int dF = \int_A \sigma dA \rightarrow F = \sigma A \rightarrow \sigma = \frac{F}{A}$$

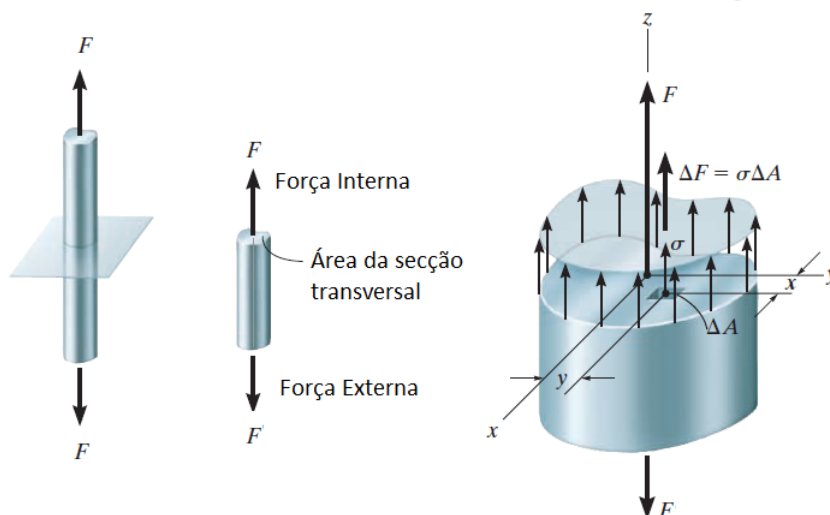


Figura 3.5: Tensão normal média [2].

3.3.1 Deformação normal

Todo material ao receber cargas externas, sejam tração ou compressão, deforma-se. Na Figura 3.6, por exemplo, a barra ao ser tracionada sofre um pequeno alongamento axial e a variação de comprimento pode ser determinada através da relação $\Delta S' - \Delta S$.

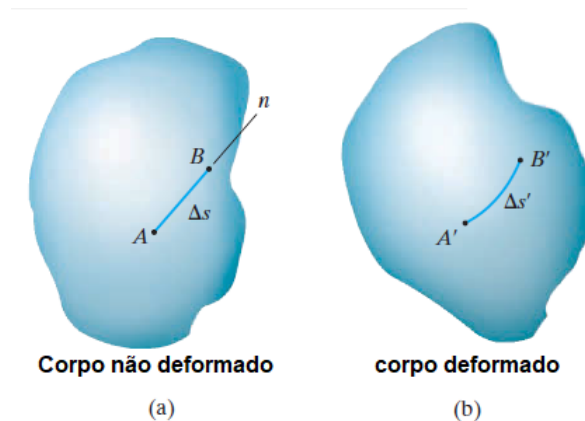


Figura 3.6: Deformação de um corpo material [2].

A partir dessa variação de comprimento define-se *deformação normal média*, usando o símbolo ε (epsilon), através da fórmula:

$$\varepsilon = \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S}$$

A deformação ε é adimensional, sem unidade física, por se tratar de um quociente de comprimentos e pode ser interpretada, por exemplo, como a variação em *mm* por *mm* de comprimento e a medida final, pós deformação, pode ser calculada através de

$$\Delta S' = (1 + \varepsilon)\Delta S.$$

3.3.2 Módulo de Young

O Módulo de Young, também conhecido como módulo de elasticidade e representado pela letra maiúscula E , é a medida da rigidez de um material sólido, uma propriedade mecânica da elasticidade linear que define uma relação entre tensão (força por unidade de área) e deformação em uma material. Seu nome é em homenagem ao cientista britânico Thomas Young e seu valor em Pascal é determinado, na fase de comportamento elástico do material, através da razão:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma = E\varepsilon \quad (3.2)$$

Na Tabela 3.1 podemos encontrar o Módulo de Young, para alguns materiais.

Material	E (GPa)
Borracha	0,01 – 0,1
Nylon	2 – 4
Alumínio	69
Aço	200

Tabela 3.1: Exemplo de valores do módulo de Young [1].

3.3.3 Força exercida por uma compressão ou tração

O Módulo de Young de um material pode ser utilizado para se determinar a relação entre a força que atua nele e a deformação sofrida. Da equação (3.1) temos que tensão é a razão entre força e área e, da razão de Poisson, tem-se que a deformação relativa ε é a razão entre a taxa de variação pelo comprimento inicial, o que permite reescrever a equação 3.2 de outra forma e associá-la à Lei de Hooke, onde $\Delta L = x$ e $EA/L = k$.

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \\ \frac{F}{A} &= E \frac{\Delta L}{L}, \\ F &= \left(\frac{EA}{L} \right) \Delta L, \\ F &= kx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.3.4 O coeficiente de Poisson

O coeficiente de Poisson, em homenagem a Simon Poisson, é a medida do efeito Poisson, um fenômeno no qual um material tende a expandir em direções perpendiculares à direção da força de compressão. Por outro lado, se o material é esticado em vez

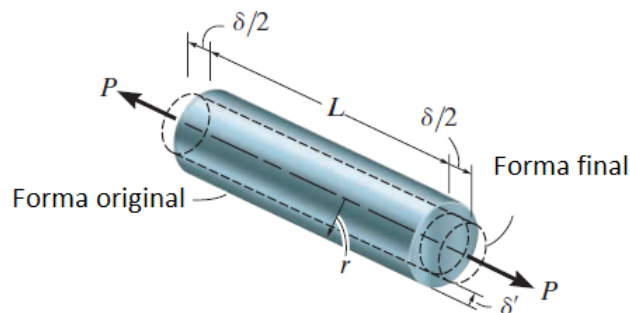


Figura 3.7: Efeito Poisson [2].

de comprimido, geralmente tende a se contrair nas direções transversas à direção do alongamento.

Matematicamente representada pela letra grega ν (nu), o coeficiente de Poisson é definido como a razão negativa entre a variação relativa lateral pela variação relativa axial. Geralmente os valores adimensionais possíveis de ν estão entre 0 e 0,5.

$$\nu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} = -\frac{\varepsilon_{\text{lateral}}}{\varepsilon_{\text{longitudinal}}}.$$

Para melhor entender as deformações normais e o efeito de Poisson formulemos o seguinte experimento: ao tracionarmos axialmente uma borracha em formato cilíndrico esta sofrerá um pequeno aumento no seu comprimento e uma redução na medida de seu raio. Analogamente, ao se comprimir o cilindro, este tem seu comprimento reduzido e a medida de seu raio aumentada. Podemos pensar que durante todo o processo não houve variação na massa/volume o que justifica o fato de ao se ganhar em uma dimensão é preciso perder em outra.

3.4 Tensão média de cisalhamento

Tensão de cisalhamento ou tensão de corte, definida na seção 3.2, representada pela letra grega τ (tau) é a tensão tangente à área e calculada através da razão entre a força aplicada (F) e a área de aplicação (A_{θ}).

$$\tau = \frac{F}{A_{\theta}}. \quad (3.4)$$

Exemplificando a tensão de cisalhamento, na Figura 3.8, a força V aplicada na viga superior, e contra balanceada pelas duas forças F , faz o material deformar-se nos planos AB e CD.

3.4.1 Deformação de cisalhamento

Deformações podem produzir, além do alongamento ou contração, mudança na direção de segmentos do material. A *deformação de cisalhamento* é definida, então, como

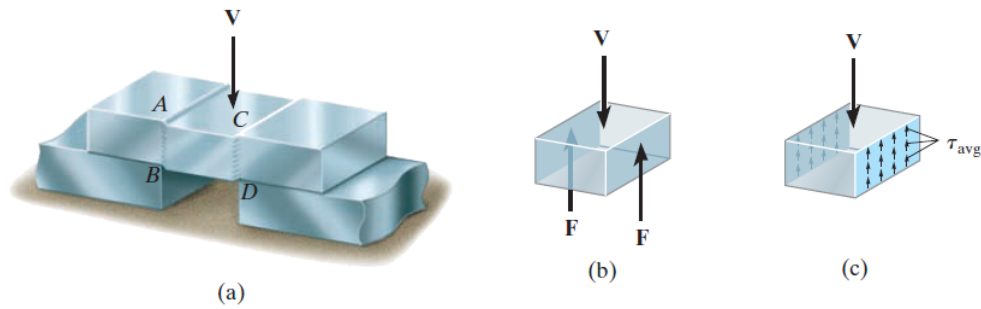


Figura 3.8: Forças opostas e secção cisalhada [2].

a variação da medida do ângulo entre dois segmentos de reta originalmente perpendiculares. Portanto, a deformação de cisalhamento, mede a distorção do elemento através do deslocamento relativo das arestas de uma fração do material representada por um cubo de dimensões suficientemente pequenas. A variação do ângulo é representada pela letra grega γ (gamma) e é medida em radianos (Figura 3.9).

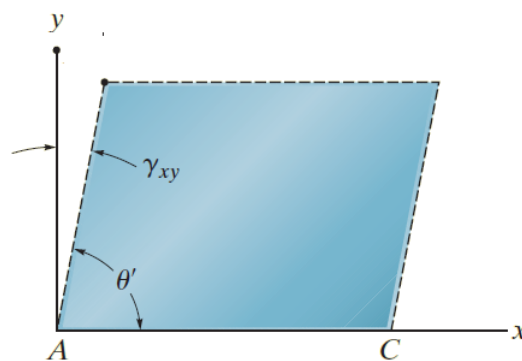


Figura 3.9: Deformação por cisalhamento [2].

Conhecidas a magnitude da tensão cisalhante e a variação angular produzida resultante da deformação sofrida define-se o *módulo de cisalhamento* ou *módulo de elasticidade transversal* como o quociente da tensão pela deformação

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} \Leftrightarrow \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (3.5)$$

sendo G uma constante elástica cujo valor pode ser obtido experimentalmente e depende do material em estudo.

3.5 O ensaio de tração e compressão

A resistência de um material está intimamente ligada à sua capacidade de suportar cargas sem sofrer grandes deformações ou ruptura e é determinada através de um experimento muito importante para os diversos ramos da engenharia: o **teste de tração e compressão**. O principal objetivo deste teste é determinar a relação entre a tensão normal média e a deformação normal média do material em análise.

A realização do experimento, de maneira simples, consiste na marcação de dois pontos, no início do experimento, em um corpo de prova padronizado e a aferição da respectiva distância entre os mesmos. Deve-se medir também a área da seção transversal inicial do corpo. A máquina inicia então o estiramento devagar e uniforme da peça até que se atinja o ponto de ruptura e durante o processo são medidos, em intervalos frequentes, as cargas aplicadas e o alongamento $\delta = L - L_0$ no corpo de provas.

3.5.1 Diagrama tensão-deformação

Os dados coletados no experimento de tração compressão permitem a construção do diagrama de tensão-compressão. Para isso é necessário determinar a tensão normal média e a deformação nominal através das relações

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L_0}, \quad (3.6)$$

onde F é a força aplicada, A_0 é a área da seção transversal do corpo de prova e δ é a variação do comprimento original.

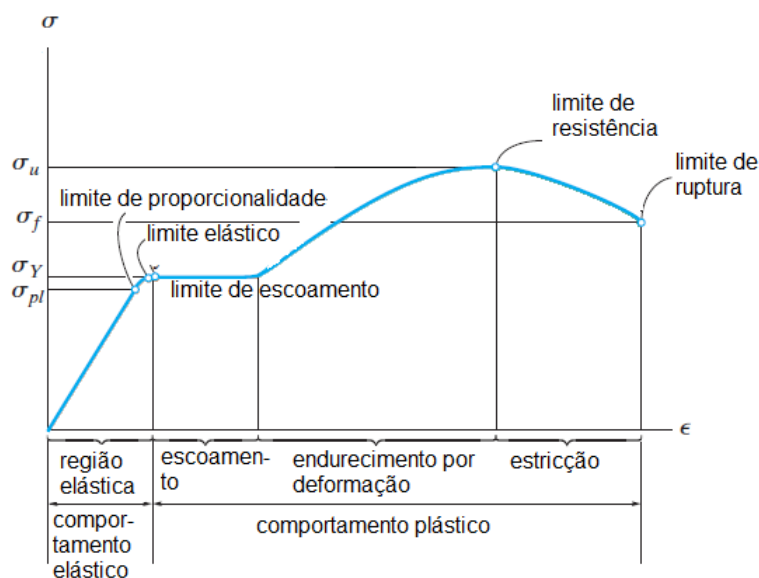


Figura 3.10: Diagrama tensão-deformação.

No decorrer do teste de tração são observadas as quatro fases, Figura 3.10, com comportamentos característicos:

- 1. Comportamento elástico:** o comportamento elástico corresponde ao intervalo de variação da força solicitante onde a tensão é proporcional à deformação chamada deformação elástica. Neste intervalo a curva tensão-deformação é linear e, se cessada a força, o material retorna à sua forma original.
- 2. Escoamento:** com um pequeno aumento da tensão o material entra no regime de escoamento onde sofre deformações permanentes denominadas deformações plásticas. Nesta fase a tensão se mantém constante à medida que o material é alongado.

3. Endurecimento por deformação: após a fase de escoamento, a tensão volta a aumentar e a curva cresce continuamente até o limite de resistência. Durante essa fase a área da seção transversal diminui uniformemente ao longo da extensão do corpo de prova.

4. Estricção: ao atingir o limite de resistência, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região localizada formando um afinamento no material e como a área está diminuindo a carga suportada tende a diminuir até a tensão de ruptura.

3.6 Matrizes de rigidez e flexibilidade

3.6.1 Análise estrutural matricial

O objetivo da análise de uma estrutura com características mecânicas e formas geométricas conhecidas é propor modelos matemáticos e determinar os deslocamentos de todos os seus pontos em função das ações (cargas) às quais é submetida. Uma estrutura será classificada como **linear** quando sofre pequenos deslocamentos e deformações e seu material constituinte for elástico-linear, ou seja, obedecer à Lei de Hooke.

A análise matricial é a proposição e resolução de modelos matriciais da estrutura em questão e possui duas abordagens: o método das forças e o método dos deslocamentos.

Para se determinar as matrizes de rigidez e flexibilidade define-se:

- k_{ij} : representa a ação (força) na coordenada **i** causada por um deslocamento unitário na coordenada **j** enquanto todos os outros deslocamentos são impostos como nulos;
- f_{ij} : representa o deslocamento da coordenada **i** causado por uma ação de valor unitário na coordenada **j** enquanto todas as outras ações são nulas.

3.6.2 Matriz de rigidez - forças em função dos deslocamentos

Seja a estrutura contínua composta por duas hastes, solicitadas por um esforço normal, representada na Figura 3.11.

Nesse caso, por hipótese, são conhecidas as forças que atuam nas coordenadas 1 e 2 (F_1 e F_2) e os coeficientes de rigidez (k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22}) e deseja-se saber os deslocamentos nas coordenadas 1 e 2 (d_1 e d_2).

Para que o nó da coordenada 1 esteja em equilíbrio a força externa F_1 deve ser igual ao somatório das forças internas resultados dos deslocamentos ao longo da estrutura. Assim:

$$F_1 = k_{11}d_1 + k_{12}d_2. \quad (3.7)$$

O mesmo pode ser afirmado com relação ao nó da coordenada 2:

$$F_2 = k_{21}d_1 + k_{22}d_2. \quad (3.8)$$

Unindo as equações (3.7) e (3.8) em uma equação matricial, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A matriz de rigidez pode ser construída determinando-se os coeficientes de rigidez e flexibilidade das relações entre força e deformações.

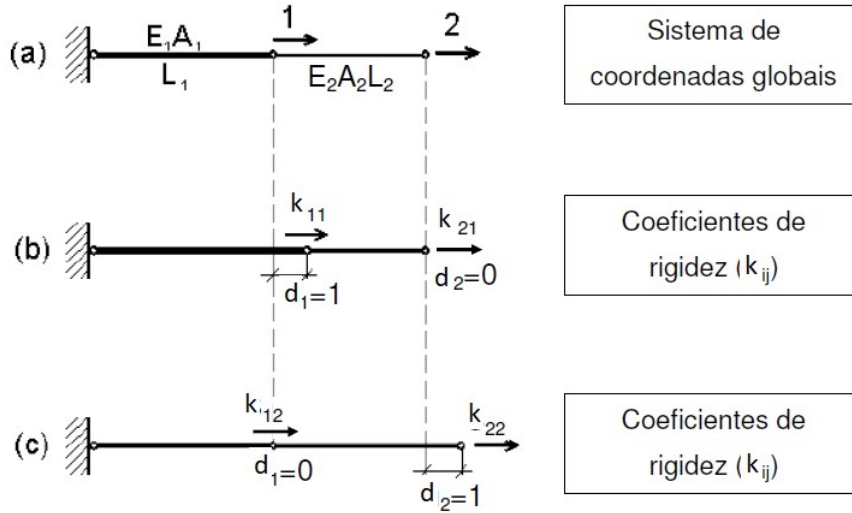


Figura 3.11: Coeficientes de rigidez de uma barra composta por duas hastes [1].

Dado que k_{11} representa a força na coordenada 1 proveniente de um deslocamento unitário na coordenada 1, mantendo-se as demais coordenadas fixas, sua magnitude deve ser equivalente à soma das forças necessárias para se tracionar a haste 1 uma unidade e ao mesmo tempo, comprimir a haste 2 também em uma unidade. As deformações combinadas podem então ser modeladas pela equação (3.3)

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_{11} = \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2}. \quad (3.10)$$

Ao se produzir um deslocamento unitário na coordenada 1 este produz uma força na mesma direção que deve ser contrabalanceada na coordenada 2, que é fixa por hipótese, para se manter o equilíbrio da estrutura. Tem-se então k_{21} que representa a força na coordenada 2 resultante do deslocamento produzido na coordenada 1.

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_{21} = -\frac{E_2 A_2}{L_2}. \quad (3.11)$$

Analogamente, k_{12} , força na coordenada 1 decorrente de um deslocamento unitário na coordenada 2

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k_{12} = -\frac{E_2 A_2}{L_2} \quad (3.12)$$

e, finalmente, k_{22} , a força que traciona apenas a haste 2

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k_{22} = \frac{E_2 A_2}{L_2}. \quad (3.13)$$

Portanto, a Matriz de Rigidez desta estrutura é igual à

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} \right) & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.7 Matriz de flexibilidade - deslocamentos em função das forças

Para se obter a matriz de rigidez foram determinadas as forças em função dos deslocamentos. É possível, também, determinar os deslocamentos em função das forças e desta forma construir a matriz de flexibilidade considerando, por hipótese, a **imposição de uma força unitária para determinação dos deslocamentos produzidos**. Pelo princípio da superposição (regime elástico-linear), o deslocamento final nas coordenadas será igual à soma dos deslocamentos ocorridos pelas forças externas, ou seja:

$$\begin{cases} d_1 = f_{11}F_1 + f_{12}F_2 \\ d_2 = f_{21}F_1 + f_{22}F_2 \end{cases} \quad (3.15)$$

e na forma matricial

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

O deslocamento de uma das coordenadas da estrutura pode ser calculada a partir da equação (3.3):

$$d = \frac{LF}{EA} \Rightarrow f_{ij} = \frac{L_i}{E_i A_i} \cdot 1 \quad (3.17)$$

onde uma força de valor unitário é aplicada em uma coordenada enquanto as demais não sofrem ações.

Ao se aplicar uma força unitária na coordenada 1, enquanto a coordenada 2 fica isenta de qualquer solicitação, tem-se:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{11} = \frac{L_1}{E_1 A_1} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{21} = \frac{L_1}{E_1 A_1} \quad (3.19)$$

pois a deformação na haste 1 desloca a haste 2 na mesma medida pelo fato da coordenada 2 não sofrer nenhuma ação.

O coeficiente f_{12} , que representa o deslocamento da coordenada 1 resultante da solicitação na coordenada 2, tem valor

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f_{12} = \frac{L_1}{E_1 A_1}. \quad (3.20)$$

Finalmente f_{22} será a soma do deslocamento das duas hastes pois ambas estão sob efeito da mesma ação.

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f_{22} = \frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2}. \quad (3.21)$$

Logo, obtém-se a matriz de flexibilidade

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 A_1} & \frac{L_1}{E_1 A_1} \\ \frac{L_1}{E_1 A_1} & \left(\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Na seção 2.2, foi associada a relação inversa entre os coeficientes de elasticidade e rigidez de uma mola ($k = 1/\delta$). Com base nessa definição surge o interesse em verificar se o mesmo se aplicará às matrizes de rigidez e flexibilidade de estruturas e em qual intervalo, se existir, essa relação é válida.

Proposição 1. *As matrizes de Rigidez e Flexibilidade são inversas uma da outra, ou seja, $[K]^{-1} = [F]$ e $[F]^{-1} = [K]$.*

Demonstração. Sejam $[K]$ e $[F]$ as matrizes de rigidez e flexibilidade da estrutura proposta na Figura 3.11. Ao se efetuar o produto matricial, obtém-se:

$$[K] \cdot [F] = \begin{bmatrix} \left(\frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} \right) & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 A_1} & \frac{L_1}{E_1 A_1} \\ \frac{L_1}{E_1 A_1} & \left(\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[F] \cdot [K] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 A_1} & \frac{L_1}{E_1 A_1} \\ \frac{L_1}{E_1 A_1} & \left(\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} \right) & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que mostra que as matrizes de rigidez e flexibilidade são inversas, na fase elástica, assim como os coeficientes de rigidez e flexibilidade da mola. \square

3.8 A lei de Hooke generalizada

Em aplicações reais, uma peça ou elemento de máquina geralmente está sujeito a tensões em diferentes eixos e estas provocam alterações dimensionais, dentro do regime elástico, no material. Considerando um ponto, um cubo infinitesimal, do elemento sob ação das tensões σ_x , σ_y e σ_z tem-se as deformações normais ε_x , ε_y e ε_z e as deformações transversais às tensões pelo efeito Poisson, ambas combinadas pelo princípio da superposição. Considerando, por exemplo, a tensão σ_x e a relação de Poisson $\varepsilon_{lateral} = -\nu \varepsilon_{longitudinal}$ o elemento sofrerá três deformações ao longo do eixo x :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i &= \frac{\sigma_x}{E}, \\ \varepsilon_x^{ii} &= -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \\ \varepsilon_x^{iii} &= -\nu \frac{\sigma_z}{E}. \end{aligned}$$

Quando os três efeitos são superpostos, a deformação normal ε_x pode ser determinada através da relação

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}.$$

De modo análogo, para as deformações na direção dos eixos y e z tem-se:

Organizando os dados da Tabela 3.2 na forma matricial, com as deformações em função das tensões, a Lei de Hooke para tensões normais triaxiais é dada por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Tensão	Deformações		
	Dir x (ε_x)	Dir y (ε_y)	Dir z (ε_z)
σ_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$
σ_y	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$
σ_z	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Tabela 3.2: Composição das deformações.

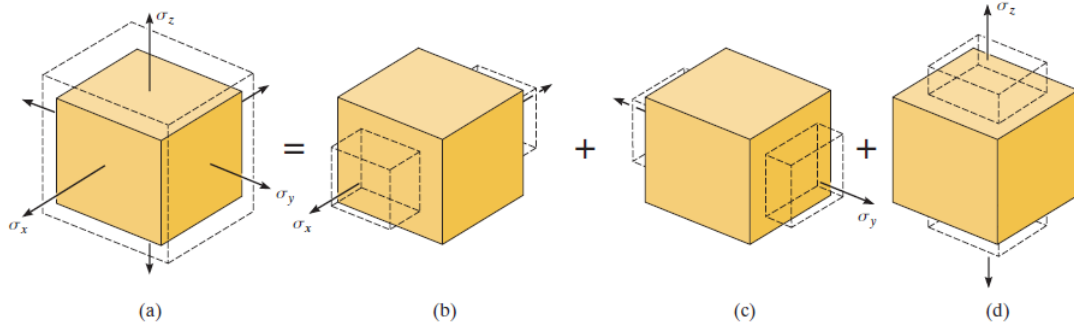


Figura 3.12: Deformações normais combinadas [2].

e, explicitando as tensões em função das deformações temos

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & \nu \\ \nu & (1 - \nu) & \nu \\ \nu & \nu & (1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Considerando a aplicação de tensões de cisalhamento, a Lei de Hooke pode ser escrita como

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},$$

ilustradas pela Figura 3.13.

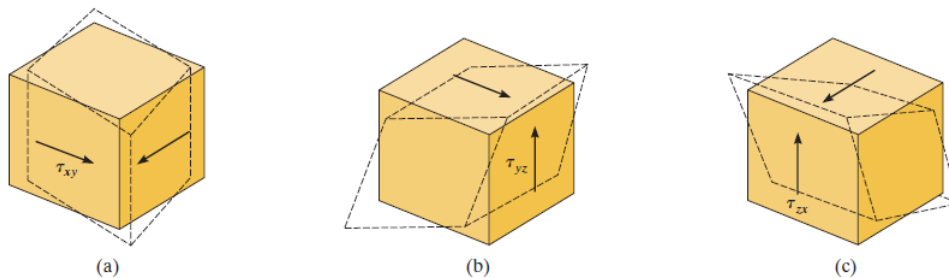


Figura 3.13: Deformações de cisalhamento combinadas [2].

Proposição 2. As constantes elásticas estão relacionadas através da expressão $G = E/[2(1 + \nu)]$.

Demonstração: Uma barra sujeita à uma tração normal na direção x irá alongar-se ε_x na direção da solitação e contrair-se, devido o efeito Poisson, $-\nu\varepsilon_x$ nas direções

y e z . Tomando um elemento de forma cúbica com lados iguais à 1, conforme Figura 3.14, este irá deformar-se em um paralelepípedo de dimensões $1 + \epsilon_x$, $1 - \nu\epsilon_x$ e $1 - \nu\epsilon_x$. Em contrapartida, se o cubo for rotacionado 45° em relação ao eixo que está sendo tracionado, a face mostrada na figura irá deformar-se em um losango devido à deformação de cisalhamento γ' , que é igual ao montante cujos ângulos retos, da face quadrada do elemento cúbico, aumentam ou diminuem.

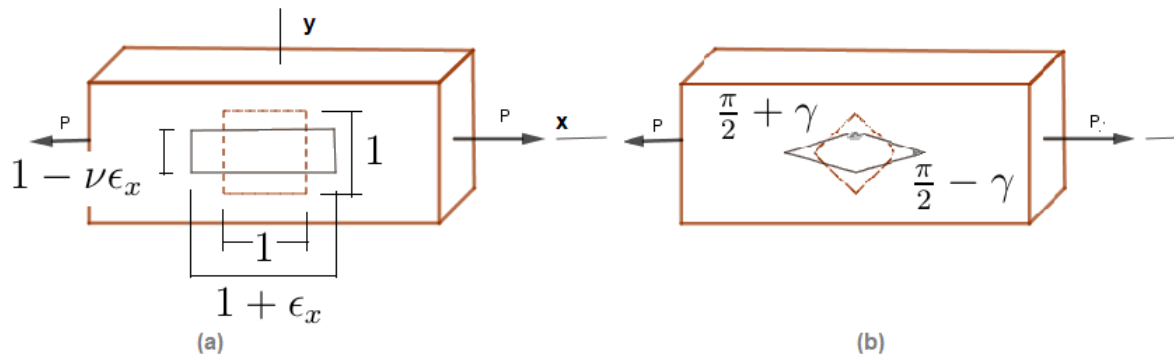


Figura 3.14: Deformações normais e de cisalhamento.

Considerando o cubo da Figura 3.15 (a) tem-se as medidas pré e pós tração axial como mostrado na Figura 3.14.

Após a deformação, o ângulo entre a diagonal e a aresta da base do cubo que tem medida igual à metade de um ângulo reto, assume o valor:

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}.$$

Aplicando a fórmula da tangente da soma para o ângulo β obtém-se

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Como o ângulo γ é muito pequeno e desta forma $\operatorname{tg}(x) \approx x$ com base na série de Taylor para $\operatorname{tg}(x)$, é possível aproximar a expressão para

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}.$$

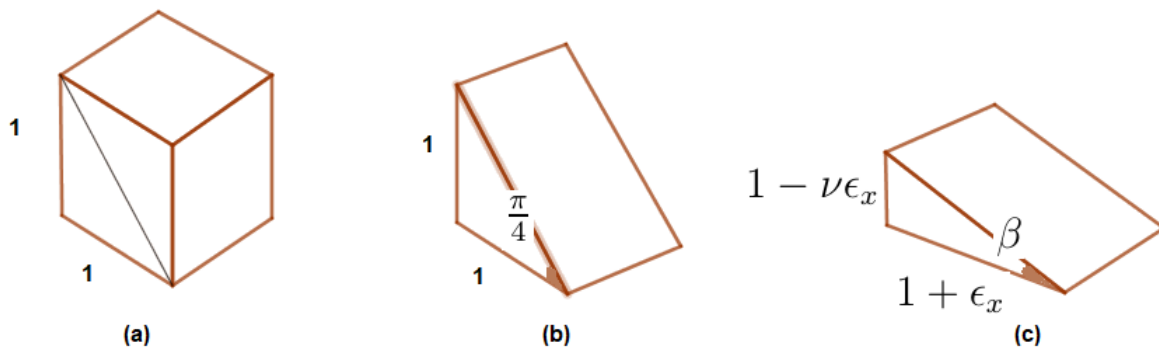


Figura 3.15: Variação angular por cisalhamento .

Por outro lado, a partir das deformações nas direções dos eixos x e y é possível escrever $tg\beta$ como

$$tg\beta = \frac{1 - \nu\epsilon_x}{1 + \epsilon_x}$$

e, igualando as duas expressões para $tg\beta$ e isolando γ , obtém-se

$$\gamma = \frac{(1 + \nu)\epsilon_x}{1 + \frac{1-\nu}{2}\epsilon_x}.$$

Dado que $\epsilon_x \ll 1$ na fase elástica e que multiplica o coeficiente de Poisson, que também é muito pequeno, o denominador da expressão pode ser aproximado para 1, resultando em

$$\gamma = (1 + \nu)\epsilon_x.$$

Para obter-se E e G na expressão aplica-se a Lei de Hooke para deformações normais e de cisalhamento seguidas das expressões $\sigma = P/A$ e $\tau = P/2A$ demonstradas no Apêndice B.1.

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{G} &= (1 + \nu) \frac{\sigma_x}{E} \\ \frac{P}{2AG} &= (1 + \nu) \frac{P}{AE} \\ G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \tag{3.25}$$

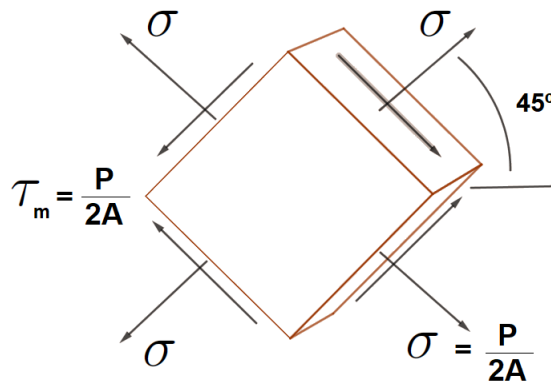


Figura 3.16: Orientação de 45° e tensão de cisalhamento máxima.

3.9 Transformações no estado de tensão no plano

Na Seção 3.2 foi visto que o estado geral em um ponto material é determinado pelas seis tensões, normais e de cisalhamento, que agem nas faces do cubo elemental do material. Com frequência, em aplicações práticas de engenharia, esse estado não é encontrado pois, geralmente, são feitas aproximações para simplificar as tensões aplicadas ao corpo a fim de que estas possam ser analisadas em um plano simples. Nesta situação diz-se que o material está sujeito a um plano de tensões representado no plano xy e pelas tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} (Figura 3.17).

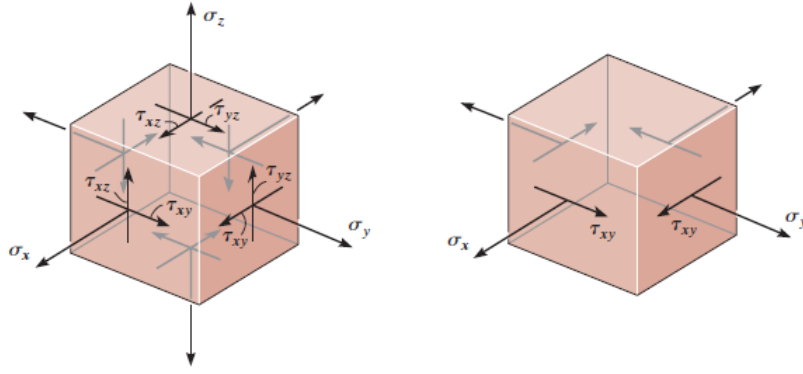


Figura 3.17: Estado de tensão geral e no plano [2].

As tensões aplicadas, além de manter o elemento em equilíbrio, variam em função da orientações do mesmo e podem ser modeladas através das equações de equilíbrio estático, podendo-se desta forma, prever as direções que sofrerão as maiores sollicitações e realizar reforços estruturais nestas. Para efeito de cálculo as orientações positivas dos eixos de tensões normais atuam para fora das faces e a tensão de cisalhamento, para cima na face direita e para direita na face superior.

Usando a convenção de sinal estabelecida, secciona-se o elemento da Figura 3.18 ao longo do plano inclinado e isola-se o segmento como mostrado na figura. Se a área seccionada medir ΔA , as faces horizontal e vertical irão medir $\Delta A \cos \theta$ e $\Delta A \sin \theta$ respectivamente. Aplicando as equações de equilíbrio de força para determinar os componentes desconhecidos de tensões normal e de cisalhamento $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} \Delta A - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta &= 0 \\ \tau_{x'y'} \Delta A + (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \sin \theta &= 0, \end{aligned}$$

que podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta) \\ \tau_{x'y'} &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Estas duas equações podem ser simplificadas utilizando-se as identidades trigonométricas $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ e $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.26)$$

Através destas equações pode-se determinar as tensões em um ponto do material para qualquer orientação desejada e para se calcular a tensão normal na direção y' basta substituir θ por $\theta + 90^\circ$, o que resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

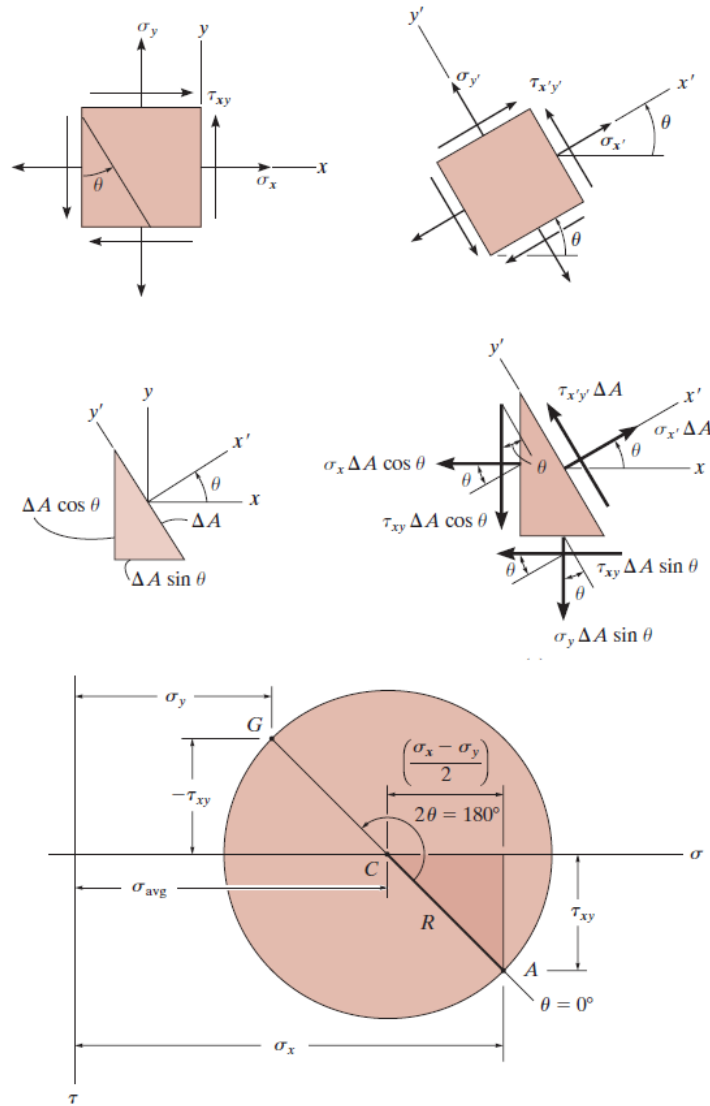


Figura 3.18: Tensões em função da orientação e círculo de Mohr [2].

Uma maneira gráfica mais simples e prática de se analisar a variação das tensões em função da orientação do elemento infinitesimal é através do círculo de Mohr, proposto pelo engenheiro alemão Christian Otto Mohr, cujo desenvolvimento ocorre ao se quadrar e somar as equações (3.26).

Nesta representação geométrica, Figura 3.18, os valores das tensões σ_x e σ_y são mostrados no eixo horizontal com orientação positiva para direita e o eixo vertical, orientado positivamente para baixo, a tensão de cisalhamento τ_{xy} .

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{x'} - \sigma_{avg})^2 + \tau_{x'y'}^2 &= R^2 \\
 \sigma_{avg} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\
 R &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Com base nos conceitos e relações estudados anteriormente, os objetivos voltam-se para a implementação de representações visuais das transformações de tensão e deformação utilizando-se o software *Geogebra*. Serão representados o círculo de Mohr e gráficos relativos às variações das constantes elásticas de lâminas de materiais compósitos quando estes são solicitados em eixos que diferem dos eixos principais das fibras do material.

4 Materiais compósitos

4.1 Definição e características

Um material classificado como compósito é um sistema constituído por duas ou mais fases em escala macroscópica cujas propriedades e performance são projetadas para ser superior às dos materiais constituintes isolados. Uma fase, geralmente descontínua mais rígida e forte, é chamada de *reforço* ou fibras e a outra, contínua e com menor rigidez e mais fraca, de *matriz*. As propriedades do material compósito dependem das propriedades e geometria de suas fases constituintes e a distribuição do reforço determina a uniformidade do material.

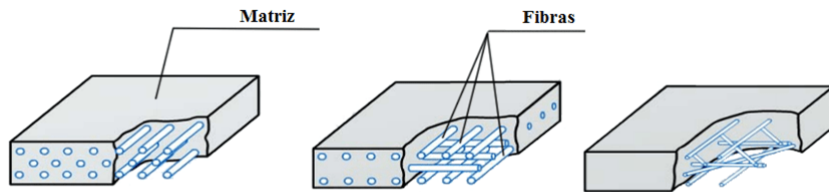


Figura 4.1: Exemplo de materiais compósitos com fibras e matriz.

De maneira análoga aos materiais isotrópicos, os materiais compósitos assintrópicos também tem um estado de tensão que pode ser estudado analisando-se um cubo infinitesimal do mesmo. Porém, diferentemente do primeiro grupo, estes podem ter suas constantes de flexibilidade e resistência diferentes para diferentes eixos ou direções, e portanto faz-se necessário o uso de até nove componentes de tensão que atuam nas seis faces do cubo e nove constantes de deformação para representar o estado de deformação. No caso mais geral, os estados de tensão e deformação podem ser representados, da seguinte forma, pela Lei de Hooke generalizada:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1113} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2213} & S_{2221} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} & S_{2332} & S_{2313} & S_{2321} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3123} & S_{3131} & S_{3112} & S_{3132} & S_{3113} & S_{3121} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1231} & S_{1212} & S_{1232} & S_{1213} & S_{1221} \\ S_{3211} & S_{3222} & S_{3233} & S_{3223} & S_{3231} & S_{3212} & S_{3232} & S_{3213} & S_{3221} \\ S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1331} & S_{1312} & S_{1332} & S_{1313} & S_{1321} \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2113} & S_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} &= S_{ijkl} \sigma_{kl}, \end{aligned}$$

sendo C_{ijkl} e S_{ijkl} , respectivamente, os coeficientes de rigidez e flexibilidade do material compósito. Embora, no caso mais geral, sejam necessárias 81 constantes elásticas, de rigidez e de flexibilidade, para caracterizar completamente um material, a simetria das matrizes de tensão e deformação reduz para 36 o número de coeficientes, dado que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Desta forma pode-se descrever as tensões e deformações através das equações:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

e

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

com

$$\begin{aligned} \sigma_i &= C_{ij} \varepsilon_j, \\ \varepsilon_i &= S_{ij} \sigma_j. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para o caso dos materiais ortotrópicos as relações de tensão e deformação também tem as formas das equações (4.2) porém o número de constantes é reduzido para nove.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

4.2 Materiais transversalmente ortotrópicos em um estado plano de tensões

Materiais compósitos, na maioria das aplicações estruturais, são usados na forma de finas camadas/lâminas sobrepostas e desta forma podem ser consideradas sob ação de tensões em um plano de tensão e sem tensões ou solicitações exteriores a este.

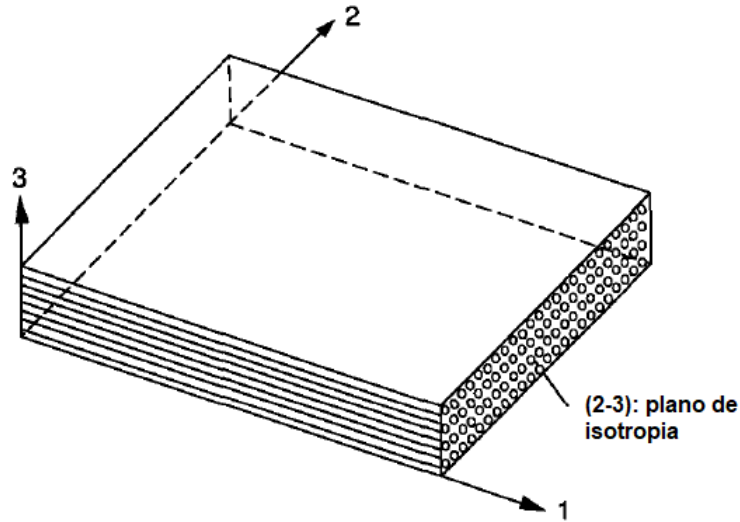


Figura 4.2: Material ortotrópico com isotropia transversal [1].

Matematicamente temos:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 0 \\ \tau_{23} = \tau_4 &= 0 \\ \tau_{13} = \tau_5 &= 0, \end{aligned}$$

e as relações tensão-deformação ficam reduzidas à:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = 0 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6.\end{aligned}$$

Eliminando ε_3 , obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2 = Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 = Q_{66}\gamma_6\end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde os coeficientes de rigidez da matriz são dados por $Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}}$ e as relações inversas por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Quando as solicitações e deformações aplicadas nas direções dos eixos $x - y$ não coincidirem com os eixos principais 1 – 2 de orientação do material compósito estas podem ser representadas em função dos parâmetros do sistema x_0y através das relações

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} &= [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} &= [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},\end{aligned} \quad (4.8)$$

onde a matriz de transformação $[T]$ pode ser obtida através do sistema de equações 3.26 reescrito em sua forma matricial e tem a forma

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Sendo a matriz de rotação invertível, para se obter T^{-1} basta fazer uma rotação no sentido anti-horário, ou seja, substituir o parâmetro θ por $-\theta$.

Proposição 3. *A matriz dos coeficientes de rigidez e flexibilidade no novo sistema de referência tem a forma $[T^{-1}][Q_{12}][T]$ e $[T^{-1}][S_{12}][T]$.*

Demonstração: Partindo da equação 4.8 temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= [T^{-1}] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T^{-1}] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\ &= [T^{-1}] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= [T^{-1}] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [T^{-1}] \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \\ &= [T^{-1}] \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As relações tensão-deformação mostram que, quando a lâmina é carregada somente em tensão ou compressão ao longo dos eixos principais do material, denominados (1-2), não há tensão de cisalhamento. Da mesma forma, quando a lâmina é carregada sob cisalhamento puro, τ , somente no plano principal (1-2) uma tensão de cisalhamento, γ_{12} , é produzida no plano 1-2. Assim, não há **acoplamento** entre a tensão normal e deformação por cisalhamento e entre tensão de cisalhamento e deformações normais. Isso não é o caso em que a lâmina é carregada ao longo dos eixos arbitrários x e y .

Definição 3. *Coefficiente de acoplamento de cisalhamento* η_{xs} é a razão entre a deformação de cisalhamento $\gamma_s = \gamma_{xy}$ e a deformação normal axial ε_x . Analogamente, η_{sx} é o inverso de η_{xs} :

$$\eta_{xs} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x}, \eta_{sx} = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}.$$

Quando solicitado por uma tensão σ_x em um eixo x diferente dos eixos principais (1-2) do material, esta produz as seguintes deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x}, \varepsilon_y = \frac{-\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x, \gamma_s = \frac{\eta_{xs}}{E_x} \sigma_x,$$

sendo a razão de Poisson ν_{xy} a razão negativa entre ε_y e ε_x e o coeficiente de acoplamento de cisalhamento η_{xs} , a razão entre γ_s e ε_x . Analogamente, a solicitação σ_y produz as deformações

$$\varepsilon_x = \frac{-\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y, \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y}, \gamma_s = \frac{\eta_{ys}}{E_y} \sigma_y$$

e uma tensão de cisalhamento pura τ_s , com η_{sx} e η_{sy} sendo as razões de ε_x e ε_y com γ_s respectivamente, gerará as deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \tau_s, \varepsilon_y = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \tau_s, \gamma_s = \frac{\tau_s}{G_{xy}}.$$

Desta forma, pelo princípio da superposição de esforços, as deformações-tensões em função dos parâmetros do material são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xs}}{E_x} & \frac{\eta_{sy}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}.$$

Através das relações entre constantes de rigidez e flexibilidade e das transformações de tensões-deformações tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xs}}{E_x} & \frac{\eta_{sy}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} = [T^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} [T],$$

em cuja forma de sistema de equações, após realizar os produtos matriciais, permite determinar as constantes de engenharia para um sistema de eixos $x - y$ arbitrário de aplicação das tensões em função dos parâmetros E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{21} e ν_{12} associados aos eixos principais da lâmina de material.

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_x} &= \frac{\cos^2\theta}{E_1}(\cos^2\theta - \nu_{12}\text{sen}^2\theta) + \frac{\text{sen}^2\theta}{E_2}(\text{sen}^2\theta - \nu_{21}\cos^2\theta) + \frac{\cos^2\theta.\text{sen}^2\theta}{G_{12}} \\ \frac{1}{E_y} &= \frac{\text{sen}^2\theta}{E_1}(\text{sen}^2\theta - \nu_{12}\cos^2\theta) + \frac{\cos^2\theta}{E_2}(\cos^2\theta - \nu_{21}\text{sen}^2\theta) + \frac{\cos^2\theta.\text{sen}^2\theta}{G_{12}} \\ \frac{1}{G_{xy}} &= \frac{4\cos^2\theta\text{sen}^2\theta}{E_1}(1 + \nu_{12}) + \frac{4\cos^2\theta\text{sen}^2\theta}{E_2}(1 + \nu_{21}) + \frac{(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)^2}{G_{12}} \\ \frac{\nu_{xy}}{E_x} &= \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\cos^2\theta}{E_1}(\nu_{12}\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + \frac{\text{sen}^2\theta}{E_2}(\nu_{21}\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) + \frac{\cos^2\theta.\text{sen}^2\theta}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{xs}}{E_x} &= \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} = \frac{2\cos^3\theta\text{sen}\theta}{E_1}(1 + \nu_{12}) - \frac{2\cos\theta\text{sen}^3\theta}{E_2}(1 + \nu_{21}) - \frac{\cos\theta\text{sen}\theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{ys}}{E_y} &= \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} = \frac{2\cos\theta\text{sen}^3\theta}{E_1}(1 + \nu_{12}) - \frac{2\cos^3\theta\text{sen}\theta}{E_2}(1 + \nu_{21}) - \frac{\cos\theta\text{sen}\theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{G_{12}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Desta forma, conhecidas as constantes específicas E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} e ν_{21} da lâmina de material compósito e com base das equações (4.9) é possível elaborar um fluxograma para se determinar os valores das tensões, deformações e das constantes elásticas em um novo sistema de eixos determinado a partir da rotação de θ graus em relação aos eixos principais do material.

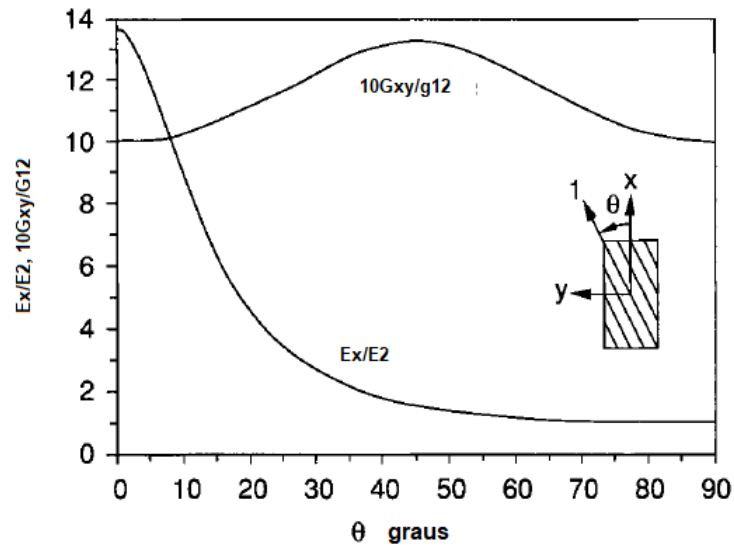


Figura 4.3: Módulo de Young e módulo de cisalhamento de material compósito unidirecional em função da orientação das fibras [1].

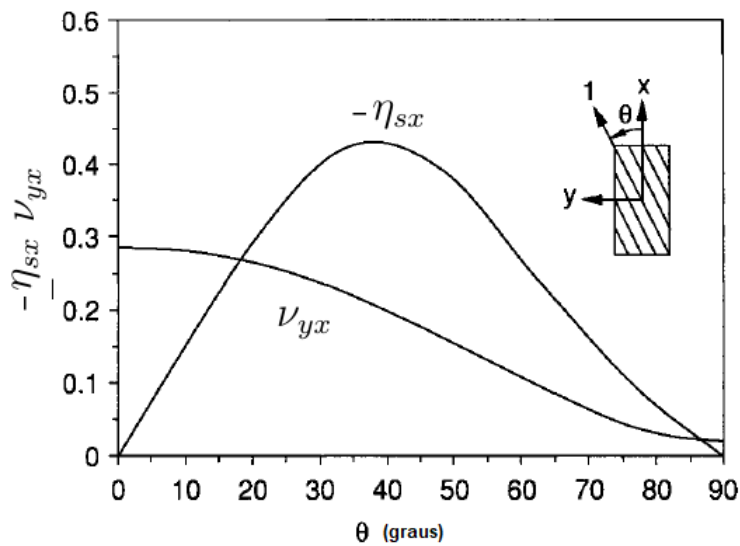


Figura 4.4: Razão de Poisson e coeficiente de acoplamento de material compósito unidirecional em função da orientação das fibras [1].

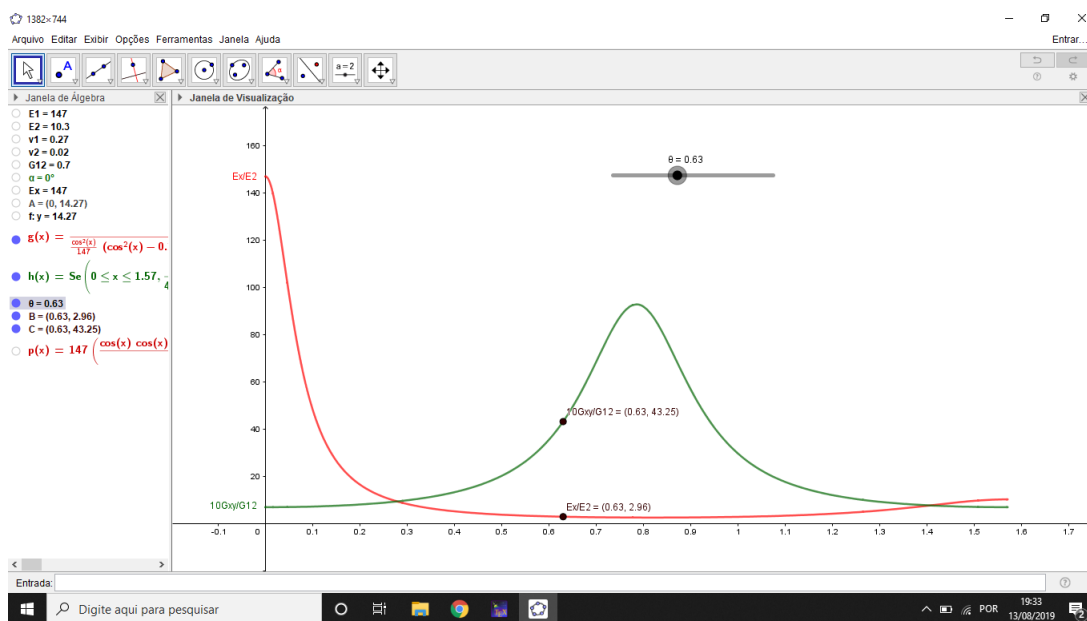


Figura 4.5: Representação gráfica da variação das constantes de engenharia em função do parâmetro θ .

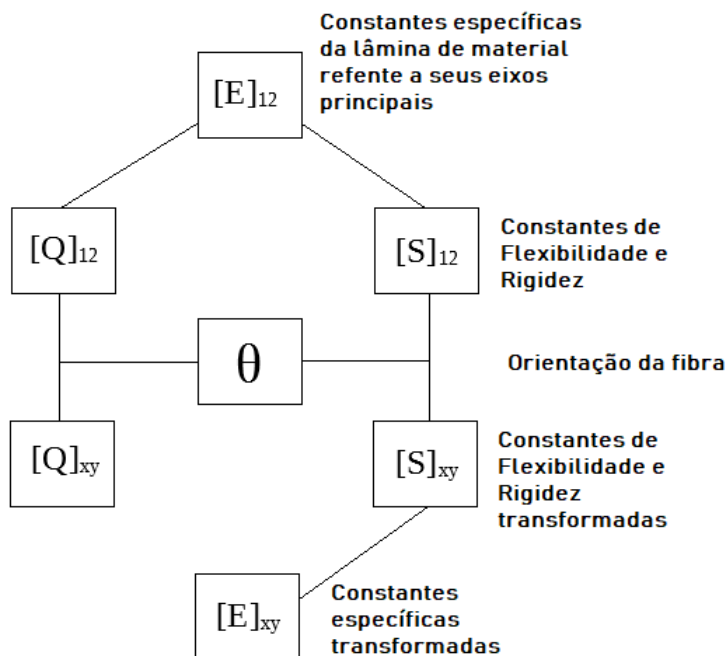


Figura 4.6: Fluxograma para transformação das constantes de Engenharia específicas do material.

5 Considerações finais

Este trabalho teve como principal objetivo explorar matematicamente as relações entre tensões e deformações e a modelagem de equações para situações onde os eixos principais dos materiais não coincidiam com as direções das tensões aplicadas.

Ao longo deste trabalho, visando facilitar o entendimento por parte do leitor, foram apresentados conceitos básicos de Álgebra Linear e Física e ilustrações que esclareciam os modelos matemáticos estudados. Adicionalmente, foram apresentadas as constantes elásticas características de materiais e a forma como estas se inter-relacionam.

Os materiais compósitos são amplamente utilizados na indústria moderna devido à sua alta resistência mecânica e baixo peso. No ramo aeronáutico, segundo dados da Revista Fapesp de julho de 2018, edição 268, o percentual de material compósito utilizado na construção da aeronave *Boeing 787 Dreamliner* chega à 50% de todo material utilizado. Desta forma é necessário conhecer as relações matemáticas que descrevem os comportamentos dos materiais para se projetar as peças e estruturas.

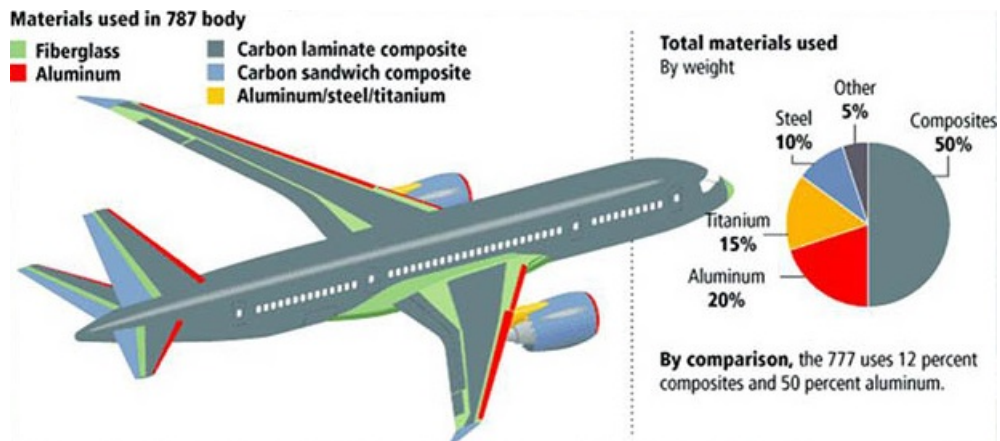


Figura 5.1: Infográfico percentual de material compósito em uma aeronave.[6]

As lâminas de materiais compósitos têm propriedades associadas aos seus eixos principais e quando as forças impostas a ele não coincidem com estes eixos é possível determinar as novas constantes elásticas através das equações (4.9) construídas na seção anterior. De acordo com o processo de fabricação e a disposição das fibras a resistência nos eixos (1 – 2) podem ser diferentes e com isso torna-se necessário então uso de várias lâminas do material compósito aplicadas por camadas com alternância nas orientações das fibras/eixos para a obtenção de uma maior resistência às solicitações e deformações que ocorrem em várias direções.

São propostas para a continuação deste trabalho o estudo da transformação das de-

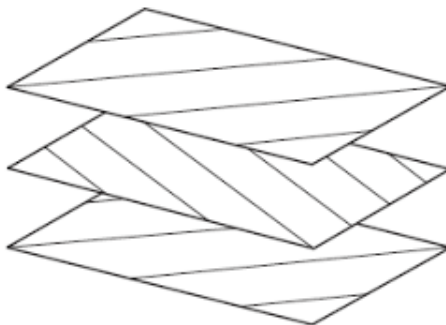


Figura 5.2: Aplicação de lâminas de materiais compósitos com diferentes orientações das fibras.

formações, de forma análoga à realizada para a transformação das tensões; a elaboração de um aplicativo no Geogebra que possibilite a determinação das propriedades elásticas de lâminas de materiais compósitos com diferentes angulações, tendo como base as propriedades elásticas nas direções principais e a realização do estudo do comportamento da superposição destas lâminas na modelagem matemática e simulação computacional das deformações e tensões visando possíveis aplicações. Além disso, pretende-se que esse estudo torne a exposição do assunto mais fácil aos alunos de engenharia.

Referências

- [1] Daniel, I.M.; Ishai, O. - *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press, 2006.
- [2] Hibbeler, R.C. - *Mechanics of Materials*, Pearson Prentice Hall, 2011.
- [3] Beer, F.P.; Johnston, E.R.; Dewolf, J.T.; Mazurek, D.F. - *Mechanics of Materials*, McGraw Hill High Education, New York, 2009.
- [4] Boldrini, J.L.; Costa, S.I.R.; Figueiredo, V.L.; Wetzler, H.G.- *Álgebra Linear*, Editora Harbra, 1986.
- [5] Van Vlack, L.H.- *Princípios de Ciências e Tecnologia dos materiais*, Editora Campus, 1984.
- [6] Revista Fapesp, Edição 268, Julho de 2108.

A Animações no software Geogebra

Este trabalho dissertou sobre as relações de tensão e deformação de materiais e suas aplicações em materiais compósitos e visando auxiliar a assimilação dos conceitos por parte do leitor, foram desenvolvidas em paralelo, no software *Geogebra*, animações representando as deformações em um cubo de material em função das tensões aplicadas e a variação das tensões em função da orientação da lâmina de material sob ação das forças.

Neste apêndice serão explicados os comandos e modos de uso de tais animações que se encontram disponíveis para uso online e download, juntamente com o software *Geogebra* no link <https://www.geogebra.org/u/tiagolevipacheco>.

A.1 Círculo de Mohr

No capítulo 3 foi apresentada uma maneira prática de se determinar a variação das tensões normais e de cisalhamento através do círculo de Mohr. Este dispositivo foi modelado no software *Geogebra* onde o leitor pode observar a variação das tensões através da variação do parâmetro θ .

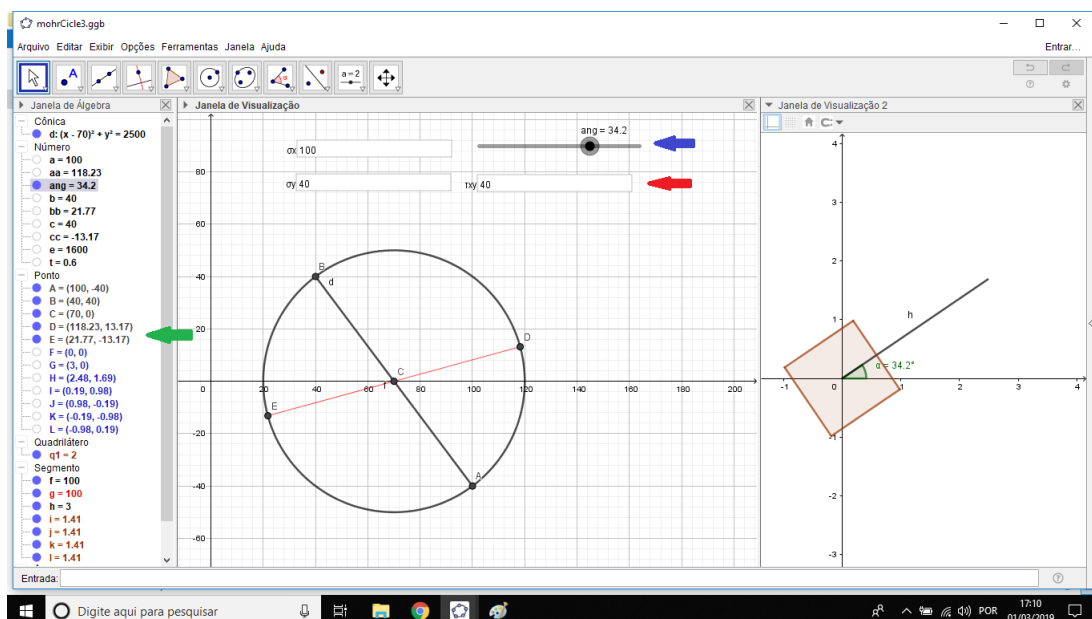


Figura A.1: Círculo de Mohr.

Através da caixa de entrada (seta vermelha) é possível fornecer os valores das tensões

normais σ_x e σ_y e de cisalhamento τ_{xy} . Movimentando-se o controle deslizante ang (seta azul) produz-se as variações nas tensões. As novas tensões $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$ podem ser observadas nas coordenadas x dos pontos D e E , respectivamente, e $\tau_{x'y'}$, na coordenada y dos pontos.

A.2 Deformações normais e de cisalhamento

As deformações produzidas pelas tensões podem ser melhor compreendidas através da visualização destas em elemento cúbico do material em estudo.

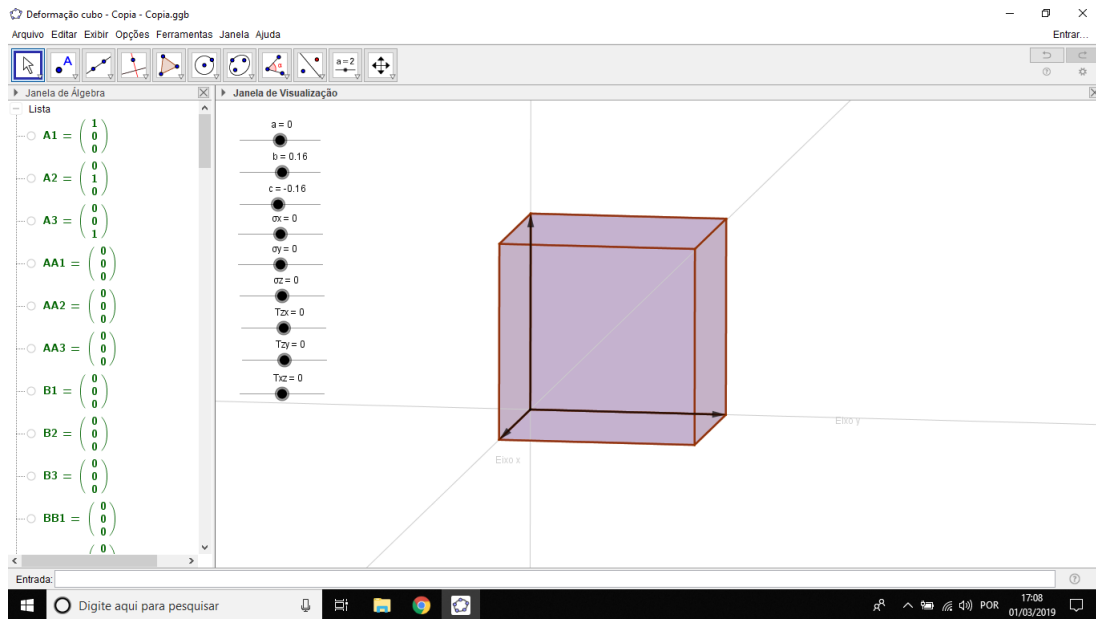


Figura A.2: Elemento cúbico de um material.

Representado na imagem da animação na cor cinza o sistema de eixos cartesianos $x \perp y \perp z$ utilizado como referência para a construção do elemento cúbico, a posição de observação em relação pode ser controlada pelos controles deslizantes a , b e c , que representam a rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente. Abaixo destes encontram-se os controles deslizantes para as tensões normais e de cisalhamento. Movendo-se o cursor manualmente ou comandando-o para oscilar entre seus valores máximo e mínimo automaticamente é possível observar a respectiva deformação no cubo por diversos ângulos. Na representação existem dois cubos sobrepostos, um azul fixo, que representa o material livre de tensões, e um marrom claro que simula as deformações sofridas tornando possível comparar as situações pré e pós tensão.

Na Figura A.3 é possível observar uma tensão de cisalhamento de 100kPa na direção do eixo y aplicada na face orientada na direção do eixo z e a deformação produzida. Na Figura A.4 é possível observar a deformação normal produzida por uma tensão normal de 84kPa na direção do eixo y . As tensões são independentes entre si e podem ser combinadas em uma mesma simulação de acordo com o princípio da superposição.

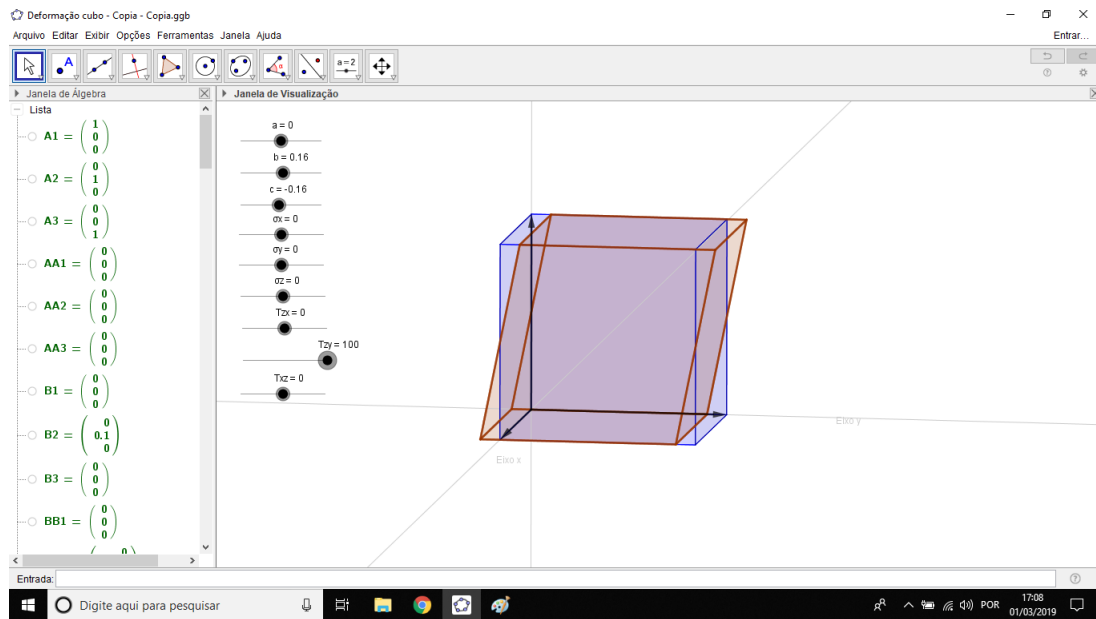


Figura A.3: Simulação de uma deformação de cisalhamento.

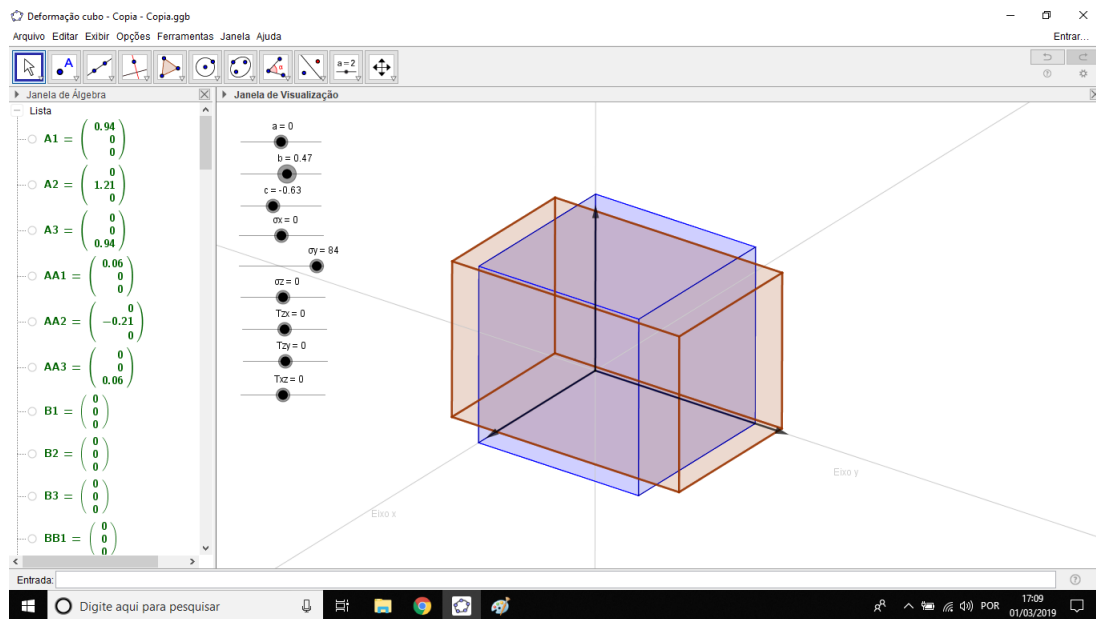


Figura A.4: Simulação de uma deformação normal.

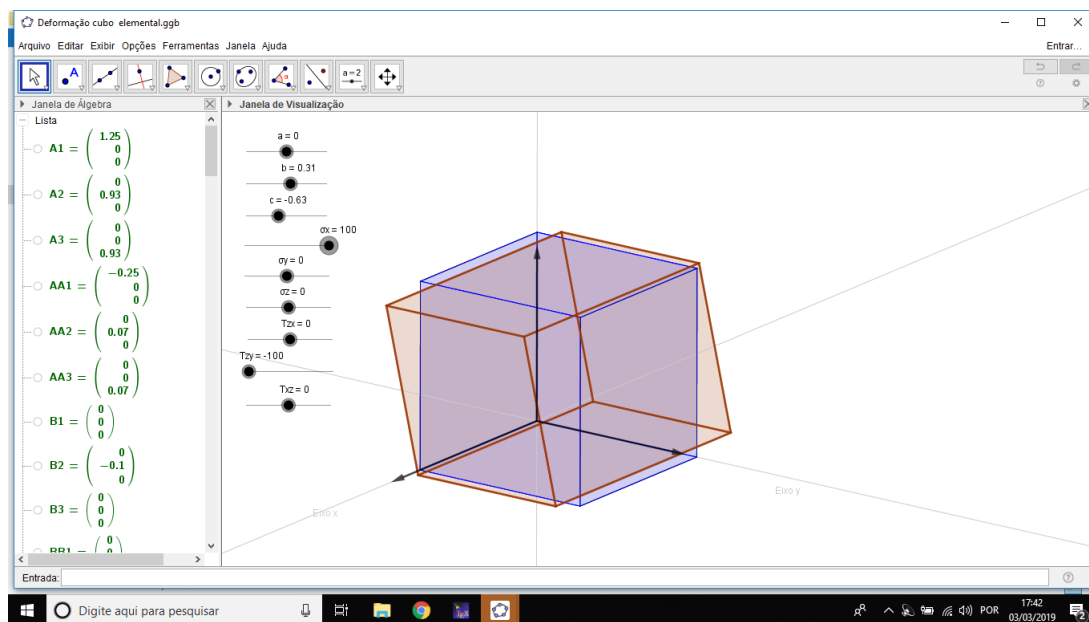


Figura A.5: Superposição de deformações.

B Demonstrações matemáticas

B.1 Demonstração da expressão da tensão de cisalhamento máxima

Consideremos uma barra de material sujeita à tensão normal F .

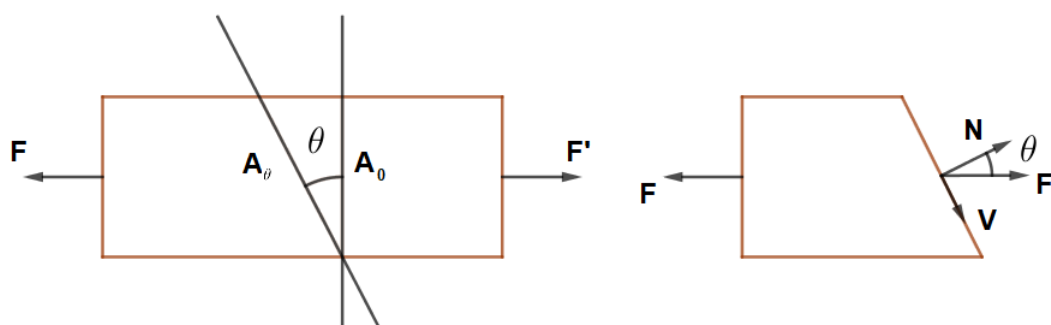


Figura B.1: Tensão de cisalhamento em um plano rotacionado 45° em relação ao esforço solicitante.

Nesta situação, sendo A_0 a área da secção perpendicular ao eixo principal da barra e A_θ a área da secção inclinada de θ graus pode-se escrever

$$A_\theta = A_0 / \cos\theta.$$

Sendo N e V , respectivamente, as tensões normal e de cisalhamento na face A_θ . A partir das definições de tensão normal e de cisalhamento podemos escrever

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A_\theta} \\ \sigma &= \frac{F \cos\theta}{A_0 / \cos\theta} \\ \sigma &= \frac{F \cos^2\theta}{A_0}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{V}{A_\theta} \\ \tau &= \frac{F \operatorname{sen} \theta}{A_0 / \cos \theta} \\ \tau &= \frac{F \operatorname{sen} 2\theta}{2A_0}\end{aligned}$$

Considerando $\theta = 45^\circ$, medida angular para a qual a tensão de cisalhamento é máxima, teremos $\sigma = \tau = F/2A_0$.

B.2 Coeficiente de acoplamento de cisalhamento

No capítulo 4.2 foi definido o coeficiente de acoplamento de cisalhamento η_{xs} e η_{sx} e as relações matemáticas entre tensões e deformações em eixos arbitrários $x - y$,

$$\gamma_{xy} = \frac{\eta_{xs}}{E_x} \sigma_x \quad \varepsilon_x = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \tau_{xy}.$$

Estas relações podem ser demonstradas através dos quocientes entre as equações (3.2) e (3.5)

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} = \frac{G_{xy} \gamma_{xy}}{E_x \varepsilon_x}$$

onde $\eta_{xs} = \gamma_{xy} / \varepsilon_x$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} &= \frac{G_{xy}}{E_x} \eta_{xs} \\ \frac{G_{xy} \gamma_{xy}}{\sigma_x} &= \frac{G_{xy}}{E_x} \eta_{xs} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\sigma_x}{E_x} \eta_{xs}.\end{aligned}$$

De maneira análoga, invertendo o quociente, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} &= \frac{E_x \varepsilon_x}{G_{xy} \gamma_{xy}} \\ \frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} &= \frac{E_x}{G_{xy}} \eta_{sx} \\ \frac{E_x \varepsilon_x}{\tau_{xy}} &= \frac{E_x}{G_{xy}} \eta_{sx} \\ \varepsilon_x &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \eta_{sx}.\end{aligned}$$