



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT–T.005/14

**Aspectos quânticos e clássicos da instabilidade de campos fundamentais
em espaços-tempos astrofísicos**

Raissa Fernandes Pessoa Mendes

Orientador

George Emanuel Avraam Matsas

Julho de 2014

Agradecimentos

Dedicado a Dinah, minha mãe, meu maior exemplo de força e amor, com o coração cheio de saudade.

Minha profunda gratidão à minha família: a Murilo, meu pai, por seu amor e apoio incondicionais; a meus irmãos, por seu carinho e presença constante em minha vida; a meus sobrinhos, por todos os momentos juntos, repletos da alegria e da magia da infância. A Daniel, meu noivo e futuro marido, não há palavras que expressem a gratidão que sinto por tê-lo ao meu lado e por toda a sua amizade, apoio e amor. Agradeço ainda aos amigos que me acolheram com tanto carinho em São Paulo e àqueles cujos laços de amizade suportam qualquer distância.

Agradeço imensamente ao Prof. George Matsas, pela orientação dedicada e pelo exemplo inspirador de sinceridade e comprometimento na busca pelo conhecimento. Ao Prof. Daniel Vanzella e ao Dr. William Lima, agradeço pela oportunidade de convivência e colaboração, que muito me ensinaram e enriqueceram. Aos professores e colegas do IFT, pelo ambiente propício à aquisição e construção do conhecimento e pelas discussões e exemplos.

Agradeço ainda à Mãe Natureza, da qual somos todos partes, e que nos dá a bênção de, das mais diversas formas, penetrar um pouco em seu Mistério.

Apoio financeiro: A realização deste projeto foi integralmente financiada pela FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Resumo

Campos escalares, além de possibilitarem uma descrição efetiva de interações mais complexas, surgem como extensões interessantes da Relatividade Geral, candidatos para matéria escura ou como peças-chave em modelos cosmológicos. Sua fenomenologia é rica e pode, a princípio, ser acessada por meio de experimentos e observações. Em particular, configurações astrofísicas que seriam estáveis de acordo com a Relatividade Geral podem se tornar instáveis devido à presença, na Natureza, de certos campos escalares não minimamente acoplados com a gravitação. Recentemente, mostrou-se que essa instabilidade pode se manifestar quanticamente por meio da amplificação das flutuações quânticas do campo e da densidade de energia de vácuo. Esse efeito de dominância do vácuo induzida pela gravitação evidencia o importante papel que podem ter efeitos quânticos em espaços-tempos curvos.

O trabalho apresentado nesta Tese tem como objetivo contribuir para um maior entendimento desse efeito, em duas frentes principais. Primeiramente, buscamos esclarecer a relação entre a descrição quântica da instabilidade e a análise clássica dos modos quasinormais do sistema. Em particular, mostramos como flutuações quânticas podem ser simuladas por perturbações clássicas com uma amplitude adequada. Em segundo lugar, estudamos a estabilidade de campos não minimamente acoplados no espaço-tempo de cascas finas esferoidais e com rotação. O objetivo principal desse estudo é caracterizar, em modelos simples, como o espaço de parâmetros da instabilidade se altera quando relaxamos hipóteses assumidas anteriormente, como estaticidade e simetria esférica do espaço-tempo de fundo. A consideração desses aspectos é motivada principalmente pela possibilidade de se colocar vínculos sobre os acoplamentos permitidos na Natureza com base em dados observacionais de estrelas relativísticas. Essas possíveis implicações observacionais da instabilidade e sua relação com outros resultados na literatura também são discutidas neste trabalho.

Palavras Chaves: teoria quântica de campos; instabilidade; campos escalares não minimamente acoplados.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos; Gravitação e Cosmologia.

Abstract

Besides serving as effective models for more complex interactions, scalar fields also arise as interesting extensions of General Relativity, candidates for dark matter or key ingredients in cosmological models. Their phenomenology is rich and may, in principle, be tested by experiments and observations. In particular, general-relativistic stable spacetimes can be made unstable under the presence of certain nonminimally coupled free scalar fields. It has been shown that this instability may express itself quantum-mechanically through the amplification of quantum fluctuations and of the vacuum energy density of those fields. This effect of vacuum dominance induced by gravity illustrates the important role that quantum effects in curved spacetimes may have.

The work presented in this Thesis aims at contributing to a deeper understanding of this effect, along two main lines. First, we clarify the relationship between the quantum approach to instability and the classical analysis of quasinormal modes. In particular, we show how quantum fluctuations can be simulated by classical perturbations of a certain amplitude. Second, we study the stability of nonminimally coupled fields in the spacetime of spheroidal and rotating thin shells of matter, in order to characterize how the parameter space of the instability changes when we drop previously assumed assumptions such as staticity and spherical symmetry of the background spacetime. The consideration of these aspects is mainly motivated by the possibility of using observational data of relativistic stars to constrain the field couplings present in Nature. Possible observational implications of the instability and its relation to other results in the literature are also discussed.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Organização da Tese	6
2	Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos e o Efeito do Despertar do Vácuo	8
2.1	Considerações gerais	9
2.1.1	Sobre os campos e o espaço-tempo	9
2.1.2	Sobre o procedimento de quantização	11
2.1.3	Sobre o operador tensor de energia-momento e as equações semiclássicas de Einstein	14
2.2	Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos estáticos	16
2.3	Despertando o vácuo em estrelas relativísticas	22
2.3.1	Espaço de parâmetros da instabilidade	28
3	Instabilidade Quântica <i>versus</i> Instabilidade Clássica	34
3.1	Análise clássica da estabilidade linear de campos escalares em espaços curvos	35
3.2	Relação entre o tratamento clássico e quântico da instabilidade	47
4	Despertando o vácuo no espaço-tempo de cascas esféricas	50
4.1	Cascas esféricas estáticas	51
4.1.1	Propriedades geométricas da casca	56
4.1.2	Tensor de energia-momento e propriedades físicas	57
4.2	Quantização do campo e análise de estabilidade	60
4.2.1	Cascas esféricas	63
4.2.2	Cascas oblatas e prolatas	67
4.3	Discussões finais	72
5	Despertando o vácuo no espaço-tempo de cascas com rotação	75

5.1	Considerações gerais sobre a quantização do campo em espaços-tempos estacionários	76
5.2	Desvios de primeira ordem do regime estático	81
5.3	Cascas finas com rotação	82
5.4	Desvios de segunda ordem do regime estático no modelo de cascas finas	87
5.5	Discussões finais	97
6	Sobre o estado final da instabilidade	99
6.1	Comentários sobre a evolução quântica	100
6.1.1	Criação de partículas devido à instabilidade taquônica	101
6.1.2	Transição quântico-clássico	103
6.2	Comentários sobre a evolução clássica	107
6.3	Vínculos sobre campos não minimamente acoplados com base em dados astrofísicos	111
7	Conclusões	114
A	Teorias Tensor-Escalar	116
A.1	Definições básicas e diferentes representações	117
A.1.1	Representações de Einstein e Jordan	117
A.2	Vínculos no regime de campo fraco	119
B	Transformada de Laplace	121
B.1	Definição e condições de existência para a TL	121
B.2	Transformada inversa	122
C	Formalismo de cascas finas em Relatividade Geral	123

Capítulo 1

Introdução

A Relatividade Geral e a Mecânica Quântica são pilares essenciais para o entendimento que temos hoje das interações fundamentais da Natureza. A Relatividade Geral [135], por um lado, fornece as bases para o modelo padrão atual de astrofísica e cosmologia. Essa teoria, que descreve a gravitação em termos da influência recíproca entre campos de matéria e a geometria do espaço-tempo, passou por todos os testes experimentais já divisados, que incluem a observação da deflexão da luz por corpos massivos, o efeito Shapiro de dilatação temporal, o avanço do periélio de Mercúrio, o amortecimento do movimento de sistemas binários devido à emissão de ondas gravitacionais, etc. [143]. Por outro lado, a Mecânica Quântica (e sua extensão relativística, a Teoria Quântica de Campos) é o cerne do Modelo Padrão da física de partículas, que unifica a descrição das interações eletromagnética, fraca e forte, e cuja concordância com dados experimentais chega, em certas medidas (como a da constante de estrutura fina), até oito algarismos significativos [34, 65].

A Relatividade Geral (RG) e a Mecânica Quântica (MQ) nasceram quase simultaneamente, há aproximadamente um século, e em pouco tempo teve início a busca por uma teoria de gravitação quântica, que as unificasse em um mesmo arcabouço teórico. Mas quais são as evidências de que a natureza do campo gravitacional é mesmo quântica? Há diversos argumentos sugestivos, porém inconclusivos, que apontam nessa direção*. Além disso, a existência de teoremas de singularidade em RG clássica — mostrando que singularidades aparecem genericamente em soluções cosmológicas ou de colapso gravitacional — é geralmente tida como um indicativo de que a teoria tenha um domínio de validade restrito. Porém, uma vez que a escala de gravitação quântica, dada, por exemplo, pela energia de Planck, $E_P \equiv (\hbar c/G)^{1/2} \approx 10^{16}$ TeV (onde c é a velocidade da luz no vácuo, G é a constante

*Exemplos são os argumentos de Eppley e Hannah [47] e Page e Geiker [109], que indicam que (certas) teorias com um campo gravitacional clássico e matéria quântica seriam inconsistentes. Ver também a Ref. [26] e referências aí.

de Newton e $\hbar$, a constante de Planck reduzida), é muitas ordens de magnitude superior à dos fenômenos mais energéticos a que temos acesso, obter evidências observacionais da quantização do campo gravitacional é uma tarefa extremamente difícil[†]. Ainda assim, a busca por uma teoria unificada que incorporasse a gravitação em seu formalismo se estabeleceu, já há muitas décadas, como um dos principais desafios da Física Teórica. A gravitação parece resistir à quantização por meio das técnicas que se provaram bem sucedidas no caso das demais interações fundamentais, e, embora os formalismos de gravitação quântica hoje existentes tenham gerado um grande corpo de conhecimento, pode-se dizer que ainda hoje não existe uma teoria completa, convincente e consistente de gravitação quântica.

Portanto, levando em conta que (i) a teoria de gravitação quântica deve promover uma mudança profunda das noções clássicas de espaço-tempo, que (ii) as candidatas que temos hoje são teorias altamente complexas, mas cujas implicações físicas ainda são pouco compreendidas, e que (iii) dados experimentais ou observacionais que possam guiar os esforços teóricos ainda são extremamente escassos, torna-se de grande importância a busca por efeitos sólidos de gravitação quântica a baixas energias ($E \ll E_P$), que possam ajudar na construção dos conceitos essenciais à teoria mais fundamental.

Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos

Há algumas linhas de pesquisa nessa direção, entre as quais se destaca o programa de Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos (TQCEC) [19, 58, 136][‡]. A TQCEC consiste no estudo de campos quânticos que se propagam em um espaço-tempo clássico de fundo, sendo adequada à análise de situações em que é relevante a natureza quântica dos campos, mas não a da gravitação. O regime estudado pela TQCEC deve estar presente como um limite da teoria de gravitação quântica, seja ela qual for, e ao estudá-lo podemos, até certo ponto, obter informações sobre

[†]Por exemplo, raios cósmicos podem ter energia de até $\sim 10^6$ TeV, enquanto que o maior colisor de partículas já construído é capaz de promover colisões com energia de até ~ 1 TeV. Correções de gravitação quântica, em geral proporcionais a potências de E/E_P (onde E é a escala de energia do processo em consideração) são, portanto, fortemente suprimidas. Ainda assim, pode ser possível obter informações observacionais sobre efeitos de gravitação quântica, devido à existência de fatores de amplificação para essas correções em certos sistemas. Ver, e.g., a Ref. [4] e referências aí para possibilidades promissoras em fenomenologia de gravitação quântica.

[‡]Outra linha de investigação particularmente interessante é a aplicação do formalismo de teoria de campos efetiva à gravitação quântica [24]. Esse formalismo, capaz de lidar com Lagrangeanas não renormalizáveis, permite o cálculo de correções quânticas à contribuição dominante vinda da RG (ver, por exemplo, [24, 64, 20]). Claramente, essa descrição efetiva se torna inválida quando a energia dos processos considerados é da ordem da escala de Planck.

características da teoria fundamental subjacente.

Mais especificamente, a TQCEC visa combinar princípios básicos de Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos em um formalismo matemático consistente. Entre os princípios fundamentais da RG, estão a descrição do espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ em termos de uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ dotada de uma métrica $\mathbf{g}$ com assinatura Lorentziana, sendo a métrica um campo dinâmico cuja evolução é determinada por meio das equações de Einstein. Entre os princípios básicos de TQC estão a descrição dos campos como operadores satisfazendo certas relações de comutação, e cujos valores esperados em certos estados determinam os observáveis da teoria. Porém, a construção usual de TQC está intimamente atrelada às propriedades e simetrias do espaço-tempo de Minkowski, e seus conceitos precisam ser generalizados para que possa ser definida em um espaço-tempo curvo arbitrário. Em particular, as noções de “vácuo” e “partículas”, que têm grande importância nas aplicações usuais de TQC, como o cálculo de amplitudes de espalhamento, não estão disponíveis em espaços-tempos genéricos. De fato, a não universalidade do conceito de “partícula” pode ser percebida já no espaço-tempo de Minkowski. Por exemplo, se um campo está no estado de vácuo do espaço-tempo de Minkowski, um observador inercial naturalmente não medirá nenhuma partícula; porém, um observador uniformemente acelerado se sentirá imerso num banho térmico de partículas, com temperatura proporcional à sua aceleração. Este é o efeito Unruh [132]. Porém, vale ressaltar que ambos os observadores estarão de acordo sobre as probabilidades de medirem qualquer observável de campo, e que a discordância sobre o conteúdo de partículas apenas aponta para a inadequação desse conceito em geral (embora possa certamente ser útil em situações específicas). Em espaços curvos genéricos, há mais um agravante, pois em geral não existe uma escolha natural para o espaço de Hilbert no qual os operadores devem atuar[§], o que implica que não há um estado de vácuo privilegiado. Assim, o formalismo de TQCEC deve ter um caráter mais abstrato, e pode ser construído (para campos livres e interagentes) de forma bastante autoconsistente e geral, por meio, por exemplo, de uma abordagem “algébrica” em que o ingrediente essencial é a estrutura algébrica dos operadores, e a escolha de estados é um passo secundário (ver [136, 76] e referências aí).

Dentre os efeitos importantes em TQCEC, vale destacar um com consequências observacionais, que aparece em cosmologia: na presença de inflação (expansão ex-

[§]Isso porque existem infinitas representações, sem equivalência unitária, das relações de comutação, e, na ausência de simetrias, não existe critério para privilegiar uma delas como “natural” em detrimento das demais. No espaço-tempo de Minkowski, uma representação privilegiada existe com base na exigência adicional de que a representação tenha um estado (o “vácuo”) invariante por transformações de Poincaré.

ponencial do fator de escala do universo), as flutuações quânticas de campos no universo primitivo podem gerar perturbações aleatórias que seriam responsáveis pela formação de estrutura no universo e gerariam as flutuações de temperatura do espectro de radiação cósmica de fundo [103]. Porém, sem dúvida, o efeito mais paradigmático descoberto no contexto de TQCEC é o efeito Hawking [70] (ver também a Ref. [133]). Seguindo o formalismo desenvolvido em trabalhos pioneiros de Parker [111, 112], Hawking considerou um campo livre, inicialmente no estado de vácuo, se propagando em um espaço-tempo que descreve o colapso gravitacional para um buraco negro de Schwarzschild. O resultado do cálculo do número esperado de partículas no infinito, no futuro assintótico, corresponde à emissão de um corpo negro com temperatura $T_H = \hbar\kappa/2\pi ck_B$, onde κ é a gravidade superficial ($\kappa = c^4/4GM$ para um buraco negro de Schwarzschild com massa M) e k_B é a constante de Boltzmann. O fato de que é possível associar uma temperatura e, consequentemente, uma entropia a buracos negros permite uma analogia impressionante entre as leis da mecânica de buracos negros e as leis usuais da termodinâmica [137]. Além disso, o fato de que buracos negros “emitem” radiação e, consequentemente, evaporam em um tempo finito, tem implicações (como a “perda de coerência quântica”) que ainda hoje são alvo de intenso debate.

Efeito de dominância do vácuo induzida pela gravitação

Dentro do contexto de TQCEC, foi proposto, em 2010, um mecanismo (para “despertar o vácuo”) que evidencia o importante papel que podem ter efeitos quânticos em espaços-tempos curvos, como o de estrelas relativísticas [95, 93]. Os autores estudaram a dinâmica de campos escalares livres não minimamente acoplados[¶], e mostraram que certas evoluções espaço-temporais podem forçar a densidade de energia do vácuo de tais campos a sofrer um crescimento exponencial, tornando-se dominante em relação às componentes clássicas de matéria. Nesse caso, o sistema é inerentemente instável e deve evoluir para uma nova configuração de equilíbrio, conforme ditado pelas flutuações quânticas do campo. Esse efeito de dominância do vácuo induzida pela gravitação, discutido de forma bastante geral na Ref. [95], foi analisado na Ref. [93] no caso particular em que o espaço-tempo de fundo descreve a formação de uma estrela relativística.

Campos escalares não minimamente acoplados surgem em diversos modelos fenomenológicos, como modelos cosmológicos de inflação (ver, por exemplo, as Refs. [120, 48, 18]), ou em certas classes de teorias tensor-escalar [37], que são generalizações

[¶]Ou seja, com um termo proporcional a $\xi R\Phi^2$ na ação que o descreve, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e R é o escalar de curvatura.

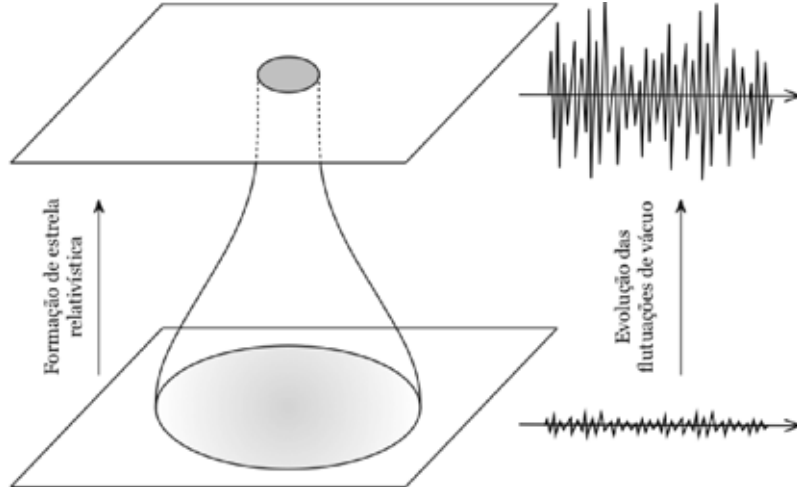


Figura 1.1: Ilustração do “efeito do despertar do vácuo” na formação de estrelas relativísticas: um campo inicialmente no estado de vácuo pode experimentar um crescimento exponencial de suas flutuações quânticas, induzido por certas evoluções espaço-temporais.

da RG frequentemente usadas para parametrizar possíveis desvios do comportamento previsto por ela. Campos fundamentais desse tipo não são ingredientes do Modelo Padrão da física de partículas, mas poderiam compor o “setor escuro” do universo, o qual domina a sua composição energética. A instabilidade de certas configurações desses campos em ambientes astrofísicos levanta, então, a possibilidade interessante de se usar observações astronômicas para buscar indícios da existência de tais campos na Natureza, ou, alternativamente, descartá-los, limitando as regiões fisicamente viáveis do espaço de parâmetros das teorias que os empregam. Para isso, é importante, em particular, um entendimento detalhado do espaço de parâmetros da instabilidade. Tendo isso em vista, e a fim de generalizar resultados anteriores, nesta Tese investigamos como esse espaço de parâmetros é alterado quando hipóteses como estaticidade e simetria esférica do espaço-tempo de fundo são relaxadas. O entendimento desses aspectos é importante para uma determinação mais precisa de que campos seriam instáveis no espaço-tempo de estrelas realistas.

Uma vez identificada a instabilidade de vácuo de um certo campo, surge a questão sobre de que forma o equilíbrio é reestabelecido. Embora algumas características do estado final da instabilidade tenham sido exploradas — como o fato de que ela deve genericamente levar à criação de partículas quando um novo estado de equilíbrio é alcançado [87] — uma análise autoconsistente do seu desenvolvimento por meio das equações semiclássicas de Einstein ainda está em aberto. No entanto, mesmo quando as sementes da instabilidade são as flutuações quânticas do campo, é concebível que

o estado final do sistema possa conter uma configuração essencialmente clássica, em que as grandezas relevantes sejam muito maiores do que a escala quântica. Nesta Tese, discutimos alguns aspectos da relação entre o tratamento quântico e clássico da instabilidade. Em particular, comparamos o acionamento da instabilidade por sementes clássicas e quânticas, mostrando como flutuações quânticas podem ser simuladas por perturbações clássicas com uma amplitude adequada. Esse resultado sugere que, se houver diferenças no estado final da instabilidade devido à natureza quântica ou clássica das sementes iniciais, elas se deverão à evolução *não linear* do sistema. Neste trabalho, também revisamos os resultados relevantes existentes na literatura sobre o desenvolvimento clássico da instabilidade de campos não minimamente acoplados. Dentro da análise clássica, um possível estado final da instabilidade seria uma configuração em que o campo, inicialmente com amplitude arbitrariamente pequena, assume um perfil não trivial — um fenômeno conhecido como “escalarização espontânea” [38]. Tal transição ocorreria no caso em que o acoplamento ξ entre o campo e o escalar de curvatura é negativo, conforme indicado por análises de balanço energético [119, 110] e investigações numéricas em teorias tensor-escalar [107]. Contudo, para valores positivos de ξ , as configurações escalariizadas seriam energeticamente desfavorecidas [110] e o estado final da instabilidade poderia ser, por exemplo, um colapso gravitacional prematuro. Aqui, discutimos a relevância desses resultados para os vínculos atuais sobre campos não minimamente acoplados, bem como perspectivas futuras de se observar ou descartar campos nessa classe com base em observações astrofísicas.

1.1 Organização da Tese

Esta Tese está organizada da seguinte forma.

No Cap. 2, apresentamos os conceitos fundamentais de Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos que formarão a base para a discussão subsequente. Em particular, analisamos o procedimento de quantização canônica em espaços-tempos assintoticamente estáticos, e apresentaremos os fundamentos do mecanismo do “despertar do vácuo”, ou de dominância do vácuo induzida pela gravitação [95]. Além disso, ilustramos esse efeito no espaço-tempo de estrelas relativísticas estáticas e com simetria esférica, revisando os resultados da Ref. [93]. O caso particular de campos escalares minimamente acoplados é discutido em mais detalhes e mostramos por que tais campos devem ser estáveis em espaços-tempos estacionários gerais.

Para aprofundarmos o nosso entendimento sobre o efeito do despertar do vácuo, voltamos nossa atenção, no Cap. 3, para a análise *clássica* de estabilidade no con-

texto de astrofísica relativística. Estaremos a princípio interessados na estabilidade dinâmica de uma configuração de equilíbrio com respeito a perturbações lineares: uma configuração será dita dinamicamente estável se todas as grandezas físicas associadas a perturbações lineares das quantidades de equilíbrio permanecerem limitadas no tempo. Claramente, a descrição clássica de instabilidade requer que se assuma a existência de pequenas perturbações, capazes de forçar que o sistema abandone sua configuração inicial de equilíbrio. Por outro lado, mesmo no “mais vazio” dos estados, a Mecânica Quântica impõe a existência de flutuações inevitáveis proporcionais a $\hbar$. No Cap. 3, mostraremos que o “efeito do despertar do vácuo” pode ser visto como a manifestação quântica da instabilidade de certos sistemas (em particular, de campos não-minimamente acoplados em ambientes astrofísicos), em que as próprias flutuações quânticas do campo são as sementes da instabilidade. Esse Capítulo se baseia essencialmente na Ref. [102].

Com o intuito de investigar como o espaço de parâmetros da instabilidade se altera quando simetrias impostas anteriormente são relaxadas, estudamos, no Cap. 4, a estabilidade de campos não minimamente acoplados em espaços-tempos estáticos, mas sem simetria esférica; ao passo que, no Cap. 5, focamos em espaços-tempos com rotação. Por simplicidade matemática, usaremos como protótipo de objetos compactos esferoidais e com rotação o modelo de cascas finas de matéria (ver o Apêndice C para o formalismo geral). Esses modelos serão suficientes a fim de obtermos resultados interessantes sobre o efeito de desvios da simetria esférica e da estaticidade sobre o espaço de parâmetros da instabilidade, além de permitirem um tratamento essencialmente analítico do problema. Nos Caps. 4 e 5 apresentamos os resultados obtidos nas Refs. [94] e [101], respectivamente.

Por fim, no Cap. 6, revisamos os principais resultados clássicos e quânticos acerca do estado final da instabilidade e discutimos as implicações dos dados astronômicos atuais sobre a existência (ou não) de campos minimamente acoplados na Natureza. O Cap. 7 é dedicado a conclusões e comentários finais.

Notação

Nesta Tese, adotamos unidades naturais, em que $c = G = 1$. Além disso, tomaremos $\hbar = 1$ exceto quando quisermos deixar explícita a natureza quântica dos resultados. A notação tensorial e as convenções geométricas adotadas aqui seguem as Refs. [135, 114].

Capítulo 2

Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos e o Efeito do Despertar do Vácuo

A construção da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos (TQCEC) teve início no fim da década de 60 [111, 112] e, desde então, foi estabelecido um formalismo rigoroso, consistente e geral para descrever a dinâmica de campos quânticos em espaços-tempos clássicos [19, 58, 136] (ver também a Ref. [76] e referências aí). Embora o formalismo de TQCEC possua um domínio de validade restrito, que é ditado pela escala em que a natureza quântica da gravitação não pode mais ser ignorada, ele pode ser aplicado à descrição de diversos fenômenos de interesse. Neste Capítulo, vamos introduzir algumas ferramentas essenciais da teoria quântica de campos livres em espaços curvos, além de apresentar e ilustrar o “efeito do despertar do vácuo” [95, 93].

Considerações gerais sobre os campos de interesse, sobre a geometria espaço-temporal, sobre o procedimento de quantização e sobre o tratamento da retroação do campo sobre o espaço-tempo são feitas na Sec. 2.1. Uma vez que, nesta Tese, os espaços-tempos de fundo de interesse são predominantemente configurações astrofísicas estáticas ou estacionárias, apresentaremos, na Sec. 2.2, mais detalhes sobre o formalismo de quantização em espaços-tempos (assintoticamente) estáticos, de forma a incorporar a possível existência de modos instáveis. Mais tarde, no Cap. 5, voltaremos a considerar o caso de espaços-tempos estacionários, mas não estáticos. Na Sec. 2.3, revisaremos como a instabilidade de certos campos no espaço-tempo de estrelas relativísticas se manifesta quanticamente como um efeito de dominância do vácuo induzida pela gravitação [95, 93]. Daremos especial atenção à determinação do espaço de parâmetros que caracteriza a instabilidade dadas certas hipóteses sobre o espaço-tempo de fundo, reproduzindo resultados da Ref. [93]. Em Capítulos posteriores, examinaremos como esse espaço de parâmetros é alterado quando algumas das hipóteses subjacentes são relaxadas. Alguns comentários gerais concluem e resumem o Capítulo. O material deste Capítulo é essencialmente de revisão, com a

exceção da porção final da Sec. 2.3 sobre a estabilidade de campos minimamente acoplados, cujos resultados foram parcialmente publicados no Apêndice da Ref. [102], mas que, por consistência lógica, optamos por apresentar aqui.

2.1 Considerações gerais

2.1.1 Sobre os campos e o espaço-tempo

Em um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, vamos supor a existência de um campo escalar real livre Φ , cuja dinâmica é descrita pelo funcional de ação

$$S_\Phi[\Phi] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}_\Phi[g_{\mu\nu}, \Phi] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + \tilde{m}^2 \Phi^2 + \xi R \Phi^2), \quad (2.1)$$

onde $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$, a integração é sobre toda a variedade $\mathcal{M}$, $\tilde{m} = m_\Phi/\hbar$ é um parâmetro relacionado à massa (m_Φ) do campo e $\xi \in \mathbb{R}$ determina o acoplamento entre o campo e o escalar de curvatura R . A equação de campo que decorre da variação da Eq. (2.1) com respeito a Φ é a equação de Klein-Gordon

$$(-\square + \tilde{m}^2 + \xi R)\Phi = 0, \quad (2.2)$$

onde $\square\Phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi]$. A partir da densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_\Phi$, podemos definir o tensor de energia-momento do campo:

$$T_{\mu\nu}^\Phi \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\Phi)}{\delta g_{\mu\nu}} = (1 - 2\xi) \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi + \xi R_{\mu\nu} \Phi^2 - 2\xi \Phi \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + \frac{4\xi - 1}{2} [\nabla_\rho \Phi \nabla^\rho \Phi + (\tilde{m}^2 + \xi R) \Phi^2] g_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

A Eq. (2.1) representa um bom funcional de ação em espaços curvos uma vez que é covariante e tende ao limite correto quando a métrica torna-se plana. Em particular, se $\xi = 0$, dizemos que o campo escalar é minimamente acoplado à gravitação. Por outro lado, se $\tilde{m} = 0$, o valor $\xi = 1/6$ também dá origem a uma ação notável por suas simetrias: nesse caso, as Eqs. (2.1) e (2.2) exibem *invariância conforme*, ou seja, se $\Phi(x)$ é uma solução da equação de campo em um espaço-tempo com métrica $g_{\mu\nu}(x)$, então $\Omega(x)^{-1} \Phi(x)$ é solução da equação de campo em um espaço-tempo com métrica $\Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x)$. A propriedade de invariância conforme também é compartilhada pelas equações de Maxwell, de forma que um campo escalar com acoplamento conforme é capaz de simular algumas propriedades do campo eletromagnético. O caso geral de campos escalares não minimamente acoplados ($\xi \neq 0$) surge em diversos modelos fenomenológicos, por exemplo, em modelos inflacionários [120, 48, 18] ou em teorias tensor-escalar (ver Apêndice A). De um ponto de vista mais fundamental, em teorias

com campos interagentes, um contra-termo proporcional a $R\Phi^2$ necessariamente precisa ser introduzido na ação como consequência da renormalização de tais teorias [23], motivando assim o estudo da ação (2.1).

Para garantir que a dinâmica gerada pela Eq. (2.2) tenha uma formulação bem posta como um problema de valor inicial, ou seja, que exista uma solução única da Eq. (2.2) dadas condições iniciais sobre certas superfícies tridimensionais tipo-espaço, é necessário que o espaço-tempo tenha boas propriedades causais, em particular, que seja *globalmente hiperbólico* [71, 135]. Um espaço-tempo temporalmente orientado é dito globalmente hiperbólico se possui uma superfície de Cauchy, Σ ; ou seja, uma superfície tridimensional tipo-espaço com a propriedade que, se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ é qualquer curva causal inextensível, então γ intercepta Σ apenas uma vez. Qualquer espaço-tempo globalmente hiperbólico é, topologicamente, um produto direto $\mathcal{M} \cong \Sigma \times \mathbb{R}$, de forma que admite uma foliação em superfícies de Cauchy Σ_t , sendo t um parâmetro real. Seja n^μ o vetor unitário normal a cada hipersuperfície na foliação: $n^\mu \equiv -N\nabla^\mu t$, onde $N(x) \equiv (-\nabla_\mu t \nabla^\mu t)^{-1/2}$ é a função lapso. Note que n^μ é normalizado e tipo-tempo, $n^\mu n_\mu = -1$, e aponta “para o futuro” (para o sentido de t crescente): $n^\mu \nabla_\mu t = N^{-1} > 0$. Podemos então definir a métrica induzida sobre Σ_t como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu,$$

de forma que $h^\mu{}_\nu$ atua como um operador de projeção, levando vetores arbitrários em vetores puramente tipo-espaço. Pode ser conveniente empregar um sistema de coordenadas $\{t, x^i\}$ ($i = 1, 2, 3$) tal que $n^\mu \nabla_\mu x^i = 0$, pois a métrica, nessas coordenadas, assume a forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(x) dx^i dx^j.$$

A partir da ação (2.1), podemos definir a densidade de momento Π canonicamente conjugada a Φ como

$$\Pi(x) \equiv \frac{\delta S_\Phi}{\delta(\partial_t \Phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial(\partial_t \Phi)} = \sqrt{-g} g^{0\mu} \nabla_\mu \Phi = \sqrt{h} n^\mu \nabla_\mu \Phi, \quad (2.4)$$

onde $h \equiv \det(h_{\mu\nu})$. O espaço de fase $\mathfrak{M}$ da teoria clássica é dado pelo conjunto de pares de funções suaves $\Phi(x)$ e $\Pi(x)$ definidas em $\Sigma_{t_0}^*$. Pode-se mostrar [71] que, em um espaço-tempo globalmente hiperbólico, para qualquer par $(f_0, f_1) \in \mathfrak{M}$, existe uma solução única Φ da Eq. (2.2) tal que

$$\Phi|_{\Sigma_{t_0}} = f_0, \quad \Pi|_{\Sigma_{t_0}} = f_1.$$

*É necessário também que as funções que compõem o espaço de fase decaiam suficientemente rápido no infinito espacial para que estruturas como a Eq. (2.5) sejam bem definidas.

Além disso, Φ tem uma dependência causal da fonte, ou seja, seu valor em um ponto x não muda se f_0 e/ou f_1 são alteradas fora da interseção de Σ_{t_0} com o passado causal de x .

Por fim, é importante notar que podemos definir uma função real bilinear Ω como

$$\Omega(\Phi_1, \Phi_2) = \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h} n^\mu (\Phi_2 \nabla_\mu \Phi_1 - \Phi_1 \nabla_\mu \Phi_2), \quad (2.5)$$

onde $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{S}$ e $\mathfrak{S}$ denota o espaço de soluções da Eq. (2.2) obtidas a partir de valores iniciais em $\mathfrak{M}$. A função Ω é conservada para soluções da Eq. (2.2), ou seja, seu valor independe da superfície de Cauchy onde é avaliada[†]. A forma Ω pode ser estendida, por linearidade, a soluções complexas da Eq. (2.2), e a partir dela definimos o “produto interno” de Klein-Gordon como

$$(\Phi_1, \Phi_2)_{KG} \equiv -i\Omega(\Phi_1^*, \Phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h} n^\mu (\Phi_2 \nabla_\mu \Phi_1^* - \Phi_1^* \nabla_\mu \Phi_2), \quad (2.6)$$

onde $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{S}^\mathbb{C}$. Esse produto interno independe da superfície de Cauchy onde é calculado e tem todas as propriedades de um produto escalar, exceto a de positividade definida.

2.1.2 Sobre o procedimento de quantização

O ponto chave na construção de uma teoria quântica a partir de uma teoria descrevendo um sistema clássico é a escolha do espaço de Hilbert de estados, $\mathfrak{F}$, e de operadores auto-adjuntos $\hat{f}_\alpha : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ que correspondam aos observáveis clássicos fundamentais. Essa escolha é guiada pela relação entre parênteses de Poisson — que equipam o espaço de observáveis clássicos com uma estrutura algébrica — e comutadores — que cumprem a mesma função para observáveis quânticos[‡]:

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}}.$$

No espaço-tempo de Minkowski, o procedimento de quantização segue os seguintes passos. Primeiramente, separamos o espaço de soluções complexas da equação

[†]Para campos complexos (carregados), a existência dessa “carga” independente do tempo se deve à existência de uma corrente de Noether conservada, resultante da simetria da ação por transformações de fase globais.

[‡]Em geral, os operadores relacionados aos observáveis fundamentais da teoria não são limitados, o que introduz dificuldades na interpretação das relações de comutação [117]. Isso pode ser evitado utilizando os operadores unitários (limitados) obtidos pela exponenciação dos operadores auto-adjuntos fundamentais. As relações de comutação são então equivalentes às relações de Weyl [136]. Essa e outras sutilezas matemáticas envolvendo o procedimento de quantização não serão, porém, essenciais para os propósitos desta Tese.

de Klein-Gordon, $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$, em dois subespaços, $\mathcal{H}$ e $\bar{\mathcal{H}}$, de soluções de frequência positiva e negativa, respectivamente. É possível verificar que o produto interno (2.6) é positivo definido em $\mathcal{H}$, de forma que, depois de completarmos $\mathcal{H}$ na norma definida por $(\cdot, \cdot)_{KG}$, $\mathcal{H}$ constitui um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ (o mesmo ocorre para $\bar{\mathcal{H}}$ com relação ao produto interno $-(\cdot, \cdot)_{KG}$). Além disso, temos que, para todo $f \in \mathcal{H}$ e $\bar{g} \in \bar{\mathcal{H}}$, $(f, \bar{g})_{KG} = 0$, e que $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$, ou seja, qualquer solução complexa da Eq. (2.2) pode ser escrita como uma combinação de modos de frequência (e norma) positiva e negativa. O espaço de Hilbert de estados é então definido como o espaço de Fock

$$\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}) \equiv \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}) \oplus \dots,$$

onde $\otimes_s$ denota o produto tensorial simétrico. Ou seja, um vetor do espaço de Fock tem a forma $\Psi = (c, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}, \dots)$ onde $c \in \mathbb{C}$, $\psi^{(1)} \in \mathcal{H}$, $\psi^{(2)} = \psi_1 \otimes_s \psi_2 = 1/2(\psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_2 \otimes \psi_1)$, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$, e assim sucessivamente. Na construção do operador de campo $\hat{\Phi}$, utilizaremos operadores de aniquilação e criação, definidos respectivamente como

$$\hat{a}(\bar{\tau})\Psi \equiv ((\tau, \psi^{(1)})_{KG}, \sqrt{2}\tau \cdot \psi^{(2)}, \sqrt{3}\tau \cdot \psi^{(3)}, \dots), \quad (2.7)$$

$$\hat{a}^\dagger(\sigma)\Psi \equiv (0, c\sigma, \sqrt{2}\sigma \otimes_s \psi^{(1)}, \sqrt{3}\sigma \otimes_s \psi^{(2)}, \dots). \quad (2.8)$$

Aqui, $\tau, \sigma \in \mathcal{H}$ ($\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{H}}$ é o complexo conjugado de τ) e a notação $\tau \cdot \psi^{(n)}$ representa a aplicação do produto interno de Klein-Gordon entre τ e a primeira parcela de cada produto tensorial implícito em $\psi^{(n)}$: por exemplo, para $\psi^{(2)} = \psi_1 \otimes_s \psi_2$, $\tau \cdot \psi^{(2)} = 1/2[(\tau, \psi_1)_{KG}\psi_2 + (\tau, \psi_2)_{KG}\psi_1]$. A partir das expressões (2.7) e (2.8), deduz-se que

$$[\hat{a}(\bar{\tau}), \hat{a}(\bar{\sigma})] = [\hat{a}^\dagger(\tau), \hat{a}^\dagger(\sigma)] = 0, \quad [\hat{a}(\bar{\tau}), \hat{a}^\dagger(\sigma)] = (\tau, \sigma)_{KG}\hat{1}. \quad (2.9)$$

O “estado de vácuo” Ψ_0 (também denotado por $|0\rangle$) é definido pela propriedade $\hat{a}(\bar{\tau})\Psi_0 = 0$ para todo $\tau \in \mathcal{H}$, e corresponde ao vetor normalizado $(c, 0, 0, \dots)$. Agora, seja $\{u_\sigma(x)\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, tal que

$$(u_\sigma, u_{\sigma'})_{KG} = \hbar\delta(\sigma, \sigma'),$$

onde $\delta(\sigma, \sigma')$ representa uma função δ de Dirac generalizada[§]. Então, o conjunto $\{u_\sigma(x), \bar{u}_\sigma(x)\}$ é uma base sobre $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$ e o operador $\hat{\Phi}$ pode ser escrito formalmente[¶]

[§]Ou seja, $f(\alpha) = \int d\mu(\beta)f(\beta)\delta(\alpha, \beta)$ para qualquer função f , onde $d\mu(\alpha)$ é alguma medida no espaço de índices, que pode conter tanto uma soma sobre valores discretos quanto uma integral sobre valores contínuos.

[¶]Na verdade, $\hat{\Phi}$ deve ser interpretado como uma distribuição que toma valores em operadores. O fato de que $\hat{\Phi}$ deve ser entendido no sentido distribucional e, portanto, não possui valor bem definido em um ponto x , se expressa na Eq. (2.10) como uma integral (ou soma) não convergente do lado direito da igualdade. Ainda assim, a expressão é formalmente correta e frequentemente útil.

como

$$\hat{\Phi}(x) = \int d\mu(\sigma)[u_\sigma(x)\hat{a}_\sigma + \bar{u}_\sigma(x)\hat{a}_\sigma^\dagger], \quad (2.10)$$

onde $\hat{a}_\sigma \equiv \hat{a}(\bar{u}_\sigma)$, $\hat{a}_\sigma^\dagger \equiv \hat{a}^\dagger(u_\sigma)$ e $d\mu(\sigma)$ é uma medida sobre o espaço de índices σ . Note que estamos utilizando (aqui e em praticamente toda a Tese) a “representação de Heisenberg”, em que o estado do campo independe do tempo e são os observáveis que evoluem. A expansão (2.10), junto com as relações (2.9), são compatíveis com as relações canônicas de comutação para $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Pi}$:

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Phi}(t, \mathbf{x}')]\big|_{\Sigma_t} &= [\hat{\Pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{x}')]\big|_{\Sigma_t} = 0, \\ [\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{x}')]\big|_{\Sigma_t} &= i\hbar\delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Em Mecânica Quântica, a álgebra definida pelas relações de comutação entre $\hat{q}$ e $\hat{p}$ (os operadores associados a coordenadas generalizadas e momentos conjugados) tem uma representação irredutível única a menos de equivalência unitária. Isso é garantido pelo teorema de Stone-von Neumann (ver, e.g., a Ref. [124]), e significa que, para quaisquer duas representações das relações de comutação, $(\mathfrak{F}, \hat{f}_\alpha)$ e $(\mathfrak{F}', \hat{f}'_\alpha)$, existe um operador unitário $U : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ tal que $U^{-1}\hat{f}'_\alpha U = \hat{f}_\alpha$, o que garante que diferentes representações dão origem a teorias fisicamente equivalentes. Porém, um ingrediente essencial para esse resultado é que o espaço de fase da teoria clássica tenha dimensão finita. Em teorias de campos, por outro lado, em geral representações distintas das relações de comutação não serão unitariamente equivalentes.

Por exemplo, na descrição acima da quantização no espaço-tempo de Minkowski, a princípio poderíamos escolher como o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ qualquer subespaço de $\mathfrak{S}^\mathbb{C}$ tal que (i) $\mathfrak{S}^\mathbb{C} = \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$, (ii) com $(\cdot, \cdot)_{KG}$ positivo definido em $\mathcal{H}$ e (iii) $(f, \bar{g})_{KG} = 0$ para todo $f \in \mathcal{H}$ e $\bar{g} \in \bar{\mathcal{H}}$. Diferentes escolhas de $\mathcal{H}$ em geral dão origem a representações não unitariamente equivalentes das relações de comutação (2.11). No entanto, no espaço-tempo de Minkowski, existe um critério extra, oriundo da invariância da teoria clássica por translações temporais, que dá origem a uma representação “privilegiada”, na qual $\mathcal{H}$ é escolhido como o subespaço de soluções complexas da equação de Klein-Gordon que têm frequência positiva com relação ao tempo de Minkowski. O estado de vácuo dessa representação tem a propriedade adicional de ser o estado fundamental do Hamiltoniano.

Porém, em espaços curvos arbitrários, a ausência de simetrias que permitam privilegiar uma representação em detrimento das demais impede que o procedimento de quantização em Minkowski possa ser consistentemente adaptado e empregado. Ainda assim, a quantização de um campo escalar Φ , obedecendo a Eq. (2.2) em um espaço-tempo globalmente hiperbólico, pode ser feita de forma consistente e geral por meio, por exemplo, de uma abordagem “algébrica” [136, 63]. A estratégia empregada

é partir da definição de uma álgebra apropriada de observáveis quânticos, que incorpore as propriedades físicas relevantes e propriedades algébricas como as relações de comutação. Só então se definem os estados, como funcionais que atuam na álgebra de observáveis, e que podem ser interpretados como responsáveis por determinar os “valores esperados” dos observáveis. Dessa forma, o formalismo algébrico permite tratar em pé de igualdade todos os estados, inclusive aqueles que decorrem de construções distintas e sem equivalência unitária da teoria, e oferece uma formulação satisfatória da teoria quântica de campos em espaços-tempos globalmente hiperbólicos gerais. Contudo, em alguns espaços-tempos de interesse, podemos abrir mão do formalismo geral em prol da adaptação das técnicas usuais de quantização no espaço-tempo de Minkowski. Esse é o caso, por exemplo, de espaços-tempos (assintoticamente) estáticos ou estacionários, que discutiremos na Sec. 2.2.

2.1.3 Sobre o operador tensor de energia-momento e as equações semiclássicas de Einstein

Além do operador campo, $\hat{\Phi}$, outro observável de particular interesse é obtido a partir do tensor de energia-momento a ele associado. Classicamente, sabemos que a matéria se acopla ao campo gravitacional por meio de seu tensor de energia-momento. Para campos de matéria descritos por uma ação S_m , definimos $T_{\mu\nu}^m = -(2/\sqrt{-g})\delta S_m/\delta g^{\mu\nu}$ [para um campo escalar real, $T_{\mu\nu}^\Phi$ é dado na Eq. (2.3)]. A ação total do sistema é dada por $S_{\text{EH}} + S_m$, onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{\text{EH}}[\mathbf{g}] \equiv \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.12)$$

que descreve a dinâmica do campo gravitacional. Ao impormos que a ação total $S_{\text{EH}} + S_m$ seja estacionária com respeito a pequenas perturbações da métrica, obtemos as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^m, \quad (2.13)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. Portanto, o tensor de energia-momento da matéria surge como a fonte do campo gravitacional.

Embora nossa discussão até agora sobre a teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos tenha assumido tacitamente uma geometria espaço-temporal fixa, é de se esperar que o campo quântico retroaja sobre o espaço-tempo, e que isso ocorra via seu tensor de energia-momento. Portanto, em analogia com a abordagem semiclássica em Eletrodinâmica — em que o campo eletromagnético clássico gerado por fontes quânticas é descrito pela equação semiclássica de Maxwell, $\nabla^\mu F_{\mu\nu} =$

$-4\pi\langle\hat{j}_\nu\rangle$ — definimos as equações semiclássicas de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\langle\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi\rangle, \quad (2.14)$$

onde o valor esperado do tensor de energia-momento do campo no estado de interesse aparece como um termo de fonte para o campo gravitacional clássico. Essas equações devem ser aproximadamente válidas enquanto o raio de curvatura do espaço-tempo for muito maior que o comprimento de Planck, enquanto as flutuações da geometria espaço-temporal em torno de seu valor “médio” forem desprezíveis e se as flutuações do tensor de energia-momento no estado de interesse forem muito menores que seu valor médio $\langle\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi\rangle$ [53, 86, 6]. Do ponto de vista mais fundamental, a Eq. (2.14) surge, por exemplo, a partir dos seguintes procedimentos: (i) expandindo uma métrica e um campo escalar quânticos ao redor do espaço-tempo de Minkowski e calculando as equações de movimento para a métrica, mantendo apenas diagramas de nível de árvore para os grávitons e diagramas de até 1 *loop* para o campo escalar (ver, por exemplo, a Ref. [80]); (ii) considerando a interação da gravitação com N campos escalares desacoplados em uma teoria quântica e tomando o limite $N \rightarrow \infty$ [68]; (iii) por meio de manipulações formais da equação de Wheeler-DeWitt no regime adequado [82]; entre outros.

O observável quântico $\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi$ pode, em princípio, ser obtido pela substituição formal de Φ pelo operador de campo $\hat{\Phi}$. Porém, como notamos na discussão da Eq. (2.10), o operador quântico de campo deve ser entendido no sentido distribucional. Consequentemente, a expressão obtida para $\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi$ pelo procedimento acima é apenas formal, já que é quadrática no campo e sabemos que operações não lineares em distribuições, como produtos, não têm sentido matemático bem definido. Essa dificuldade na definição de $\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi$ se traduz em resultados divergentes para o cálculo ingênuo de valores esperados do tensor de energia-momento [19]. De fato, essas dificuldades no cálculo de $\langle\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi\rangle$ aparecem já na construção usual da teoria quântica de campos em Minkowski: substituindo a expansão em modos (2.10) na Eq. (2.3), obtemos uma contribuição divergente vinda da soma das energias de vácuo da coleção infinita de osciladores harmônicos que compõem o campo. Uma vez que em física não gravitacional o valor absoluto da energia não é uma quantidade mensurável (apenas diferenças de energia o são), em espaços-tempos planos esse problema é facilmente contornado pela prescrição de ordenamento normal, que efetivamente corresponde a tomar $\langle 0|\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi|0\rangle = 0$. Porém, esse procedimento não pode ser generalizado diretamente para espaços-tempos curvos, uma vez que o valor absoluto da energia passa então a ser mensurável, já que afeta o espaço-tempo. Procedimentos de renormalização mais elaborados precisam então ser adotados (ver as Refs. [44, 19, 136] para discussões gerais e, e.g., [23, 75, 5, 99] para aplicações específicas). Em 1977, Wald

mostrou [134] (ver também a Ref. [136]) que procedimentos de renormalização que satisfazem um certo conjunto de axiomas gerais dão origem a um valor de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle$, em estados “físicos”, que é único a menos de termos que dependem localmente da geometria de fundo e podem ser absorvidos em constantes como a constante de Newton e a constante cosmológica. Porém, embora em princípio $\langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle$ possa ser calculado, o cálculo da retroação do campo sobre o espaço-tempo por meio da Eq. (2.14) se depara com diversas sutilezas e dificuldades adicionais [136, 51] e a evolução auto-consistente das equações semiclássicas de Einstein e da equação de campo persiste como um tema amplamente em aberto.

2.2 Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos estáticos

Nesta Seção, analisaremos com um pouco mais de detalhes o procedimento de quantização em espaços-tempos estáticos, de forma a incorporar a possível existência de modos instáveis. Antes, porém, vamos revisar algumas noções básicas sobre estaticidade.

Um espaço-tempo globalmente hiperbólico $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é dito *estacionário* se possui um campo de Killing tipo-tempo ξ^μ , que, por definição, obedece $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$, ou, equivalentemente,

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (2.15)$$

O campo de Killing ξ^μ é, portanto, o gerador da isometria que representa a simetria do espaço-tempo por translações temporais. Em particular, em um espaço-tempo estacionário coberto por um sistema de coordenadas $x = (t, x^i)$ tal que $\xi^\mu = \delta_0^\mu$, as componentes métricas independem da coordenada t : $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$. Se, além disso, existe uma hipersuperfície Σ que é ortogonal às órbitas da isometria gerada por ξ^μ , então o espaço-tempo é dito *estático*. Pelo teorema de Frobenius, isso é equivalente a exigir que ξ^μ satisfaça $\xi_{[\mu} \nabla_\nu \xi_{\rho]} = 0$ (ver Apêndice B de [135]). No sistema de coordenadas definido acima, essa condição implica $g_{0i} = 0$, sendo equivalente, também, à exigência de invariância por inversão temporal ($t \rightarrow -t$). O elemento de linha de um espaço-tempo estático pode, portanto, ser escrito na forma

$$ds^2 = N^2(-dt^2 + \gamma_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j), \quad (2.16)$$

onde $N = N(\vec{x}) > 0$, $h_{ij} = N^2 \gamma_{ij}$ é a métrica espacial tridimensional induzida em Σ e $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$. Um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é dito *estacionário/estático no passado* se ele possui uma superfície de Cauchy Σ cujo passado é isométrico ao passado de uma superfície de Cauchy Σ' em algum espaço-tempo estacionário/estático $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$. Critérios semelhantes definem espaços-tempos *estacionários/estáticos no futuro* e espaços-tempos *assintoticamente* estacionários ou estáticos (no passado ou futuro).

Neste Capítulo, estamos interessados em investigar a manifestação quântica da instabilidade de campos descritos pela Eq. (2.1) em certos espaços-tempos estáticos, como aquele que descreve uma estrela sem rotação em equilíbrio. No entanto, não é físico supor que um espaço-tempo que induz a instabilidade de um campo da Natureza possa ser bem descrito por uma métrica globalmente estática. De fato, é mais razoável considerar que o espaço-tempo evolui de (i) uma configuração inicial que não desperta a instabilidade do campo, para (ii) uma que a desperta. Em particular, podemos assumir que as configurações (i) e (ii) são estáticas, pelo menos assintoticamente; por exemplo, assumir que uma estrela em equilíbrio se forma a partir do colapso gravitacional de uma nuvem de gás, que, no passado assintótico, é bem descrita por uma métrica aproximadamente plana. É claro que a configuração (ii), que assumimos que desperta a instabilidade de um campo físico, tampouco pode permanecer estática: o campo deve forçá-la a evoluir para um novo estado de equilíbrio onde o sistema como um todo seja estável. Na maior parte desta Tese, porém, focaremos na descrição da instabilidade, sem levar em conta a retroação do campo sobre o espaço-tempo. Comentários a respeito desse último aspecto são feitos no Cap. 6.

Em um espaço-tempo que, no passado (possivelmente assintótico), é estático e não induz instabilidade em nenhum campo, a construção da teoria quântica pode ser feita por meio do mapeamento de elementos construídos no espaço-tempo globalmente estático $(\mathcal{M}', g'_{\mu\nu})$ isométrico àquela região. Em particular, pode-se construir o espaço de estados do campo, $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_{\text{in}})$, de forma análoga ao procedimento em espaços planos descrito na Sec. 2.1. Essa construção é privilegiada no sentido descrito na Sec. 2.1 e, na região estática, tem uma interpretação natural em termos de partículas. Porém, veremos que algumas dificuldades se apresentam ao tentarmos empregar o mesmo procedimento de quantização para definir o espaço de Fock $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_{\text{out}})$ na região do futuro em que o espaço-tempo é estático mas induz a instabilidade dos campos. Aí, a interpretação em termos de partículas não mais estará disponível, e a princípio não haverá um critério óbvio para privilegiar uma das construções possíveis. Embora seja possível construir mais rigorosamente uma teoria quântica de campos instáveis em espaços-tempos (globalmente) estáticos^{||} [92], essa questão não será tão importante para os nossos propósitos: aqui, o estado do campo será definido no passado assintótico como um vetor em $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_{\text{in}})$, e estaremos in-

^{||}Um problema semelhante surge na quantização de campos carregados sujeitos a um potencial eletrostático independente do tempo. Se o potencial é suficientemente forte, haverá modos instáveis, conforme descoberto em 1940 por Shiff, Snyder e Weinberg [121] (sendo chamado, assim, de “efeito SSW”). A quantização desses modos, nesse contexto, é descrita por Schoer e Swieca na Ref. [123] e por Schroer na Ref. [122]. Ver também o Apêndice da Ref. [58].

interessados na evolução dos valores esperados dos observáveis quânticos quando a instabilidade é acionada. Vamos, agora, tornar mais concreta essa discussão.

Seja um campo escalar governado pela ação (2.1) e definido em um espaço-tempo estático, com métrica (2.16). Como estamos interessados em espaços-tempos astrofísicos, vamos assumir também que a métrica (2.16) é assintoticamente plana, ou seja, que no infinito espacial as componentes métricas se aproximam das de Minkowski em algum sistema de coordenadas. A equação de Klein-Gordon, Eq. (2.2), pode ser reescrita da forma

$$-\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} = [-\Delta + V_{\text{eff}}(\vec{x})]\tilde{\Phi}, \quad (2.17)$$

onde $\tilde{\Phi} \equiv N\Phi$, Δ é o operador de Laplace associado a γ_{ij} : $\Delta f \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i(\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_j f)$, com $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij})$, e o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{eff}}(\vec{x}) = N^{-1}\Delta N + N^2(\tilde{m}^2 + \xi R). \quad (2.18)$$

A Eq. (2.17) pode ser resolvida por separação de variáveis, o que nos motiva a estudar soluções com a forma

$$\tilde{u}_{\omega\sigma}(t, \vec{x}) = F_{\omega\sigma}(\vec{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.19)$$

onde $F_{\omega\sigma}(\vec{x})$ satisfaz

$$[-\Delta + V_{\text{eff}}(\vec{x})]F_{\omega\sigma}(\vec{x}) = \omega^2 F_{\omega\sigma}(\vec{x}) \quad (2.20)$$

e o índice σ rotula soluções distintas da Eq. (2.20). Note que as soluções $\tilde{u}_{\omega\sigma}(t, \vec{x})$ obedecem $\mathcal{L}_\xi \tilde{u}_\sigma(t, \vec{x}) = -i\omega \tilde{u}_\sigma(t, \vec{x})$ e sua forma é motivada, portanto, pela presença do campo de Killing ξ^μ .

A Eq. (2.20) é uma equação de autovalor para o operador $-\Delta + V_{\text{eff}}(\vec{x})$, que é hermitiano em $L^2(\Sigma_t, \sqrt{\gamma}d\vec{x})$, o conjunto de funções complexas de quadrado integrável com relação à medida $\sqrt{\gamma}d\vec{x}$. Portanto, seus autovalores são reais, $\omega^2 \in \mathbb{R}$. No entanto, não necessariamente $\omega^2 > 0$ e um espectro negativo é em princípio possível se o potencial (2.18) for suficientemente negativo. Além disso, autovetores com autovalores distintos ($\omega^2 \neq \omega'^2$) são ortogonais, pois, usando a Eq. (2.20), temos

$$(\omega'^2 - \omega^2) \int_{\Sigma_t} d\vec{x} \sqrt{\gamma} F_{\omega\sigma}^*(\vec{x}) F_{\omega'\sigma'}(\vec{x}) = 0. \quad (2.21)$$

A ortogonalidade dos autovetores $F_{\omega\sigma}(\vec{x})$ e uma escolha natural de normalização são contemplados pela fórmula

$$\int_{\Sigma_t} d\vec{x} \sqrt{\gamma} F_{\omega\sigma}^*(\vec{x}) F_{\omega'\sigma'}(\vec{x}) = [\delta(\omega, \omega') + \delta(\omega, -\omega')]\delta(\sigma, \sigma').$$

Para soluções $u_{\omega\sigma}(t, \vec{x}) = N^{-1}\tilde{u}_{\omega\sigma}(t, \vec{x})$ da Eq. (2.2), podemos calcular o produto interno de Klein-Gordon, Eq. (2.6), e obtemos:

$$(u_{\omega\sigma}, u_{\omega'\sigma'})_{KG} = e^{i(\omega^* - \omega')t}(\omega^* + \omega')[\delta(\omega, \omega') + \delta(\omega, -\omega')]\delta(\sigma, \sigma').$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (u_{\omega\sigma}, u_{\omega'\sigma'})_{KG} &= 2\omega\delta(\omega, \omega')\delta(\sigma, \sigma'), \quad \text{se } \omega \text{ é real,} \\ (u_{\omega\sigma}, u_{\omega'\sigma'})_{KG} &= -2i\Omega\delta_{\Omega, -\Omega'}\delta(\sigma, \sigma'), \quad \text{se } \omega = i\Omega \text{ } (\omega' = i\Omega') \text{ é imaginária,} \end{aligned}$$

onde levamos em conta que o espectro de “frequências imaginárias” é discreto. Vemos, portanto, que modos de frequência real são ortogonais entre si com relação ao produto interno de Klein-Gordon e possuem norma não nula (para $\omega \neq 0$), com sinal determinado pelo sinal de ω . Além disso, são ortogonais aos modos de “frequência imaginária”. Por outro lado, modos de “frequência imaginária” $\omega = i\Omega$ têm norma (de Klein-Gordon) nula e projeção não nula sobre modos com “frequência” $\omega' = -i\Omega$.

De forma alternativa, podemos definir

$$v_{\omega\sigma}^{(+)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \frac{e^{-i\omega t}}{N(\vec{x})} F_{\omega\sigma}(\vec{x}), \quad v_{\omega\sigma}^{(-)} = (v_{\omega\sigma}^{(+)})^*, \quad (2.22)$$

para $\omega > 0$, e

$$w_{\Omega\sigma}^{(+)} = \sqrt{\frac{\hbar}{4\Omega}} \frac{e^{i\beta_\sigma}(e^{\Omega t - i\alpha_\sigma} + e^{-\Omega t + i\alpha_\sigma})}{\sqrt{\sin(2\alpha_\sigma)}N(\vec{x})} F_{\Omega\sigma}(\vec{x}), \quad w_{\Omega\sigma}^{(-)} = (w_{\Omega\sigma}^{(+)})^*, \quad (2.23)$$

para $\omega = i\Omega$, $\Omega > 0$ e $\alpha_\sigma \in (0, \pi/4]$. Nos referiremos aos modos exponencialmente crescentes $w_{\Omega\sigma}^{(\pm)}$ como *taquiônicos*, por estarem associados à presença de uma “massa efetiva negativa” no potencial V_{eff} , emprestando um termo frequentemente usado em cosmologia (ver, e.g., a Ref. [49]). Note que os modos taquiônicos (2.23) não são mais autoestados de frequência com respeito a $i\mathcal{L}_\xi$ e representam uma classe de soluções parametrizadas pelas constantes α_σ e β_σ . Em particular, em [93, 95], foram tomados $\beta_\sigma = 0$ e $\alpha_\sigma = \pi/12$. Para os modos definidos nas Eqs. (2.22) e (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} (v_{\omega\sigma}^{(\pm)}, v_{\omega'\sigma'}^{(\pm)})_{KG} &= \pm\hbar \delta(\omega, \omega')\delta(\sigma, \sigma'), \\ (w_{\Omega\sigma}^{(\pm)}, w_{\Omega'\sigma'}^{(\pm)})_{KG} &= \pm\hbar \delta_{\Omega\Omega'}\delta(\sigma, \sigma'), \\ (v_{\omega\sigma}^{(\pm)}, w_{\Omega'\sigma'}^{(\pm)})_{KG} &= (v_{\omega\sigma}^{(\pm)}, w_{\Omega'\sigma'}^{(\mp)})_{KG} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Portanto, o conjunto $\{v_{\omega\sigma}^{(+)}, w_{\omega\sigma}^{(+)}\}$ e seu complexo conjugado, $\{v_{\omega\sigma}^{(-)}, w_{\omega\sigma}^{(-)}\}$, formam uma base ortonormal para o espaço de soluções complexas da Eq. (2.17). Além disso, o produto interno de Klein-Gordon é positivo definido no espaço gerado por

$\{v_{\omega\sigma}^{(+)}, w_{\omega\sigma}^{(+)}\}$. Assim, analogamente à Eq. (2.10), escrevemos formalmente o operador campo na forma**

$$\hat{\Phi} = \sum_{\sigma} \int d\mu(\omega) [\hat{b}_{\omega\sigma} v_{\omega\sigma}^{(+)}(x) + \hat{b}_{\omega\sigma}^{\dagger} v_{\omega\sigma}^{(-)}(x)] + \sum_{\sigma, \Omega} [\hat{c}_{\Omega\sigma} w_{\Omega\sigma}^{(+)}(x) + \hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} w_{\Omega\sigma}^{(-)}(x)], \quad (2.25)$$

onde $\int d\mu(\omega)$ pode representar tanto uma integral sobre um espectro contínuo de frequências (se $\omega > \tilde{m}$) quanto uma soma sobre valores discretos (se $\omega < \tilde{m}$) [29]. As relações de comutação (2.11) para o campo se traduzem em

$$[\hat{b}_{\omega\sigma}, \hat{b}_{\omega'\sigma'}^{\dagger}] = \delta(\omega, \omega')\delta(\sigma, \sigma'), \quad [\hat{c}_{\Omega\sigma}, \hat{c}_{\Omega'\sigma'}^{\dagger}] = \delta_{\Omega\Omega'}\delta(\sigma, \sigma') \quad (2.26)$$

e demais comutadores nulos [ver Eq. (2.9)], uma vez que os modos obedecem à Eq. (2.24). O estado de “vácuo” $|0\rangle$ é definido como aquele que satisfaz $\hat{b}_{\omega\sigma}|0\rangle = \hat{c}_{\Omega\sigma}|0\rangle = 0$ para todos os valores de ω , Ω e σ .

Note, porém, que para cada escolha de $(\alpha_{\sigma}, \beta_{\sigma})$ na Eq. (2.23), obtemos uma construção distinta do espaço de estados do campo e, em particular, uma redefinição do “estado de vácuo”. Por outro lado, na ausência de modos taquionicos, a representação obtida pelo procedimento acima é fisicamente privilegiada, no sentido que o estado de vácuo $|0\rangle$ é o estado fundamental do Hamiltoniano. Para que isso fique explícito e para ganharmos uma intuição maior sobre o significado da quantização de modos taquionicos, vamos considerar, seguindo a Ref. [87], o operador Hamiltoniano construído a partir da quantidade clássica

$$H \equiv \int_{\Sigma_t} d\Sigma n^{\mu} \xi^{\nu} T_{\mu\nu}^{\Phi}, \quad (2.27)$$

onde $d\Sigma \equiv d^3x\sqrt{h} = d^3xN^3\sqrt{\gamma}$, $n^{\mu} = N^{-1}\delta_0^{\mu}$ é o campo vetorial unitário ortogonal a Σ_t , $\xi^{\mu} = \delta_0^{\mu}$ é campo de Killing tipo-tempo e $T_{\mu\nu}^{\Phi}$ é o tensor de energia-momento definido na Eq. (2.3). Note que, em um espaço-tempo estacionário,

$$\nabla_{\mu}(\xi_{\nu} T_{\Phi}^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.28)$$

o que decorre da conservação local do tensor de energia-momento, $\nabla_{\mu} T_{\Phi}^{\mu\nu} = 0$, e da Eq. (2.15). Integrando a Eq. (2.28) em um volume delimitado por duas superfícies de Cauchy Σ_{t_1} e Σ_{t_2} , e utilizando o teorema de Gauss [114], concluímos que a quantidade H na Eq. (2.27) é conservada (ou seja, não depende da escolha de Σ_t), podendo ser interpretada como a energia total do sistema.

**Ver o Apêndice da Ref. [58] para a quantização de modos de norma (e frequência) nula, que não foram incluídos nessa expressão.

Considere então a expressão obtida a partir de Eq. (2.27) pela substituição formal de Φ na Eq. (2.3) por $\hat{\Phi}$. Utilizando a expressão (2.25) para o campo, obtemos:

$$\hat{H} = \int_{\Sigma_t} d\Sigma N^{-1} \hat{T}_{00} = \sum_{\sigma} \int d\mu(\omega) \hat{H}_{\sigma}(\omega) + \sum_{\sigma, \Omega} \hat{H}_{\Omega\sigma} \quad (2.29)$$

onde

$$\hat{H}_{\sigma}(\omega) \equiv \frac{1}{2} \omega \left(\hat{b}_{\omega\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\omega\sigma} + \hat{b}_{\omega\sigma} \hat{b}_{\omega\sigma}^{\dagger} \right) = \omega \left(\hat{b}_{\omega\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\omega\sigma} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.30)$$

e

$$\hat{H}_{\Omega\sigma} \equiv -\frac{\Omega}{2 \sin(2\alpha_{\sigma})} \left[\cos(2\alpha_{\sigma}) \left(\hat{c}_{\Omega\sigma} \hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} + \hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\Omega\sigma} \right) + e^{2i\beta_{\sigma}} \hat{c}_{\Omega\sigma} \hat{c}_{\Omega\sigma} + e^{-2i\beta_{\sigma}} \hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} \right]. \quad (2.31)$$

Vemos que o operador $\hat{H}_{\sigma}(\omega)$ corresponde à expressão usual para o Hamiltoniano de uma coleção de osciladores harmônicos, associados aos graus de liberdade do campo [19]. Em particular, na ausência de modos taquiônicos, o estado de vácuo $|0\rangle$ definido por $\hat{b}_{\omega\sigma}|0\rangle = 0$ é o estado fundamental do Hamiltoniano $\hat{H}$. Note que a contribuição de $\hat{H}_{\sigma}(\omega)$ para a energia de vácuo, $\langle \hat{H} \rangle$, é divergente, devido à soma de modos com energia arbitrariamente alta (“divergência ultravioleta”), e só se torna finita após o procedimento de renormalização (veja o final da Sec. 2.1).

Para interpretarmos melhor o significado de $\hat{H}_{\Omega\sigma}$, vamos assumir, por simplicidade, o caso $\alpha_{\sigma} = \pi/12$ e $\beta_{\sigma} = 0$ e definir os operadores “posição” e “momento” como

$$\hat{q}_{\Omega\sigma} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega C}} \left(\hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} + \hat{c}_{\Omega\sigma} \right), \quad \hat{p}_{\Omega\sigma} \equiv i\sqrt{\frac{\hbar\Omega C}{2}} \left(\hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} - \hat{c}_{\Omega\sigma} \right), \quad (2.32)$$

onde $C \equiv 2 - \sqrt{3}$. Note que $\hat{q}_{\Omega\sigma}$ e $\hat{p}_{\Omega\sigma}$ satisfazem relações canônicas de comutação: $[\hat{q}_{\Omega\sigma}, \hat{p}_{\Omega'\sigma'}] = i\hbar\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\sigma\sigma'}$ e demais comutadores nulos. Em termos dessas quantidades, a Eq. (2.31) fica

$$\hat{H}_{\Omega\sigma} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_{\Omega\sigma}^2 - \Omega^2 \hat{q}_{\Omega\sigma}^2 \right), \quad (2.33)$$

e $\hat{H}_{\Omega\sigma}$ pode ser interpretado como o Hamiltoniano de um “oscilador harmônico invertido” [13]. Contrariamente ao operador $\hat{H}_{\sigma}(\omega)$, que dá uma contribuição positivo-definida para o valor esperado do Hamiltoniano independentemente do estado do campo, o operador $\hat{H}_{\Omega\sigma}$ dá uma contribuição negativa para alguns estados. Em particular, para estados $|\Psi\rangle$ satisfazendo $\hat{c}_{\Omega\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\Omega\sigma} |\Psi\rangle = n |\Psi\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, temos [87]

$$\langle \Phi | \hat{H}_{\Omega\sigma} | \Psi \rangle = -\sqrt{3}(1/2 + n)\Omega < 0,$$

que pode ser arbitrariamente negativo para valores suficientemente grandes de n , o que reflete o fato de que o operador $\hat{H}_{\Omega\sigma}$ é ilimitado inferiormente. Portanto, na

presença de modos taquiônicos, o Hamiltoniano não possui um estado fundamental (que merecidamente possa ser chamado de vácuo), embora o valor 0 faça parte do espectro (contínuo) de energia.

Os operadores $\hat{q}_{\Omega\sigma}$ e $\hat{p}_{\Omega\sigma}$ na Eq. (2.32) são o ponto de partida para o procedimento de quantização proposto em [123, 122] (ver também o Apêndice de [58]): os autores sugerem considerar como o espaço de Hilbert da teoria o produto tensorial do espaço de Fock $\mathfrak{F}_s(\mathcal{H}_e)$ (onde $\mathcal{H}_e \in \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$ é o espaço gerado pelos modos estáveis $v_{\omega\sigma}^{(+)}$) com um espaço apropriado de funções onde os operadores $\hat{q}_{\Omega\sigma}$ e $\hat{p}_{\Omega\sigma}$ atuem. Porém, como discutido no começo desta Seção, em toda esta Tese estaremos interessados em espaços-tempos que evoluem de (i) uma configuração na qual não há modos taquiônicos do campo, para (ii) outra em que eles estão presentes. Sendo assim, o estado do campo pode ser definido na fase estável e a evolução dos valores esperados dos observáveis de campo pode ser calculada, durante a fase instável, utilizando a expressão (2.10). Em particular, se o campo está no estado de vácuo definido em (i), então o valor esperado de seu tensor de energia-momento sofrerá um aumento exponencial na fase instável (ii). Este “despertar do vácuo” é o que ilustramos agora em uma configuração espaço-temporal específica.

2.3 Despertando o vácuo em estrelas relativísticas

Para ilustrarmos como a gravitação pode induzir a dominância do vácuo de um campo livre sobre as componentes clássicas de matéria, vamos considerar, seguindo as Refs. [95, 93] um espaço-tempo cuja geometria satisfaz as seguintes condições:

$$ds^2 \sim \begin{cases} -dt^2 + d\vec{x}^2, & \text{no passado,} \\ -e^{2\Xi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), & \text{no futuro.} \end{cases} \quad (2.34)$$

Ou seja, a métrica é plana no passado assintótico e estática e esfericamente simétrica no futuro assintótico. Além disso, vamos assumir que o espaço-tempo é assintoticamente plano e que não possui singularidades de nenhum tipo, e tampouco horizonte de eventos ou de Cauchy. Em particular, supomos que $\Xi(r)$ e $\Lambda(r)$ são funções contínuas e limitadas, com $\Xi(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} r^2$, $\Xi(r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ e igualmente para $\Lambda(r)$. A métrica (2.34) pode representar, por exemplo, a situação em que matéria inicialmente difusa colapsa gravitacionalmente para formar uma estrela esfericamente simétrica e estática de acordo com a Relatividade Geral (por exemplo, uma estrela de nêutrons). Nesta Seção, analisaremos esse cenário. Para isso, assumiremos que a matéria que compõe a estrela final é bem descrita por um fluido perfeito, com tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (2.35)$$

onde u^μ é o campo vetorial unitário que representa a quadrivelocidade dos elementos de fluido: $u^\mu = e^{-\Xi(r)}\delta_0^\mu$ no interior da estrela. As funções $\rho(r)$ e $p(r)$ são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão do fluido medidas em seu referencial de repouso. Por meio das equações de Einstein, podemos determinar as componentes métricas $\Xi(r)$ e $\Lambda(r)$ que caracterizam a geometria gerada por (2.35) [135]: denotando por R_s o raio da estrela, temos que, para $r \leq R_s$,

$$\frac{d\Xi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r[r - 2m(r)]}, \quad e^{2\Lambda(r)} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (2.36)$$

onde

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (2.37)$$

e, para $r \geq R_s$,

$$e^{2\Xi(r)} = e^{-2\Lambda(r)} = 1 - 2M/r, \quad (2.38)$$

onde $M = m(R_s)$ é a massa total da estrela. Além disso, as equações de Einstein fornecem uma relação adicional, conhecida como equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), que é necessária para o equilíbrio hidrodinâmico do fluido:

$$\frac{dp}{dr} = -(p + \rho) \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]}. \quad (2.39)$$

Para a caracterização completa do espaço-tempo de uma estrela esfericamente simétrica e estática, é necessário ainda fornecer a forma funcional de $\rho(r)$, ou, alternativamente, uma equação de estado, por exemplo com forma $p = p(\rho)$, que descreva a matéria que compõe o fluido. Neste Capítulo, empregaremos dois perfis de densidade, seguindo a Ref. [93]:

$$\rho(r) = \rho_c \quad \text{e} \quad \rho(r) = \rho_c(1 - r^2/R_s^2). \quad (2.40)$$

O primeiro corresponde à suposição de densidade uniforme, ou fluido incompressível, que dá origem ao modelo mais simples, embora pouco realista, para objetos compactos. Nesse caso, a métrica pode ser obtida analiticamente [135]. O segundo corresponde a um perfil parabólico de densidade, que ainda possibilita uma expressão analítica para a métrica [130], e é vantajoso por aproximar equações de estado mais realistas [89]. Para uma revisão sobre os vínculos atuais e perspectivas futuras sobre a equação de estado de estrelas de nêutrons, ver, por exemplo, a Ref. [88].

No espaço-tempo descrito pela Eq. (2.34), introduzimos um campo escalar Φ obedecendo a Eq. (2.2) e seguimos o procedimento de quantização descrito nas Seções anteriores. Em particular, o operador campo $\hat{\Phi}$ pode ser escrito como

$$\hat{\Phi} = \int d^3k [\hat{a}_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^{(+)}(x) + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^{(-)}(x)], \quad (2.41)$$

onde $\{u_{\vec{k}}^{(\pm)}\}$ é uma base de soluções ortonormais da Eq. (2.2) e que, no passado assintótico, têm a forma

$$u_{\vec{k}}^{(\pm)}(x) \stackrel{\text{passado}}{\sim} \sqrt{\frac{\hbar}{16\pi^3\omega_{\vec{k}}}} e^{\mp i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})}, \quad (2.42)$$

com $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ e $\omega_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + \tilde{m}^2}$. Note que a relação de ortonormalização de $u_{\vec{k}}^{(\pm)}$ com relação ao produto interno de Klein-Gordon pode ser verificada no passado assintótico, e é preservada ao longo da evolução. As relações de comutação (2.11) se traduzem em relações de comutação canônicas para os operadores de aniquilação e criação $\hat{a}_{\vec{k}}$ e $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ [ver Eq. (2.9)]. Daqui em diante assumiremos que o campo se encontra no estado de vácuo $|0_{\text{in}}\rangle$, definido por $\hat{a}_{\vec{k}}|0_{\text{in}}\rangle = 0$ para todo $\vec{k}$. Esse é o estado para o qual observadores estáticos no passado assintótico não atribuem nenhum conteúdo de partículas.

De forma alternativa, o operador campo também pode ser expandido como

$$\hat{\Phi} = \sum_{l\mu} \sum_{\varpi} [\hat{b}_{\varpi l\mu} v_{\varpi l\mu}^{(+)}(x) + \hat{b}_{\varpi l\mu}^\dagger v_{\varpi l\mu}^{(-)}(x)] + \sum_{\Omega l\mu} [\hat{c}_{\Omega l\mu} w_{\Omega l\mu}^{(+)}(x) + \hat{c}_{\Omega l\mu}^\dagger w_{\Omega l\mu}^{(-)}(x)], \quad (2.43)$$

em termos de uma segunda base $\{v_{\varpi l\mu}^{(\pm)}, w_{\Omega l\mu}^{(\pm)}\}$ de soluções ortonormais da Eq. (2.2), formada por modos oscilatórios $v_{\varpi l\mu}^{(\pm)}$ que, no futuro assintótico, têm a forma

$$v_{\varpi l\mu}^{(+)} \stackrel{\text{futuro}}{\sim} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varpi}} e^{-i\varpi t} \frac{\psi_{\varpi l}(r)}{r} Y_{l\mu}(\theta, \varphi), \quad v_{\varpi l\mu}^{(-)} = \left(v_{\varpi l\mu}^{(+)}\right)^*, \quad \varpi > 0, \quad (2.44)$$

e, possivelmente, por um conjunto adicional de modos taquiônicos $w_{\Omega l\mu}^{(\pm)}$, cujo comportamento no futuro assintótico é dado por

$$w_{\Omega l\mu}^{(+)} \stackrel{\text{futuro}}{\sim} \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}} \left(e^{\Omega t - i\pi/12} + e^{-\Omega t + i\pi/12}\right) \frac{\psi_{\Omega l}(r)}{r} Y_{l\mu}(\theta, \varphi), \quad w_{\Omega l\mu}^{(-)} = \left(w_{\Omega l\mu}^{(+)}\right)^*, \quad \Omega > 0. \quad (2.45)$$

Aqui, $l \in \mathbb{N}$, $\mu \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$ e $Y_{l\mu}(\theta, \varphi)$ correspondem a harmônicos esféricos, normalizados da seguinte forma:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l\mu}(\theta, \varphi) Y_{l'\mu'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{\mu\mu'}.$$

Além disso, as funções $\psi_{\varpi l}(r)$ e $\psi_{\Omega l}(r)$ satisfazem

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_{\text{eff}}^{(l)}(r)\right) \psi_{\varpi l}[r(x)] = \varpi^2 \psi_{\varpi l}[r(x)] \quad (2.46)$$

e

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_{\text{eff}}^{(l)}(r)\right) \psi_{\Omega l}[r(x)] = -\Omega^2 \psi_{\Omega l}[r(x)], \quad (2.47)$$

respectivamente, onde a coordenada auxiliar $x \in [0, +\infty)$ é definida como

$$x(r) \equiv \int_0^r e^{\Lambda(r') - \Xi(r')} dr' \quad (2.48)$$

e o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{eff}}^{(l)}(r) = e^{2\Xi} \left(\tilde{m}^2 + \xi R + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + \frac{e^{2(\Xi-\Lambda)}}{r} \left(\frac{d\Xi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right). \quad (2.49)$$

Para uma estrela formada de fluido perfeito, podemos usar a Eq. (2.36) e a relação $R = -8\pi T = 8\pi(\rho - 3p)$, onde $T \equiv T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ é o traço do tensor de energia-momento, para reescrever o potencial efetivo como

$$V_{\text{eff}}^{(l)}(r) = e^{2\Xi} \left[\tilde{m}^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + \frac{8\pi}{3}(\bar{\rho} - \rho) \right], \quad (2.50)$$

onde $\bar{\rho} \equiv 3m(r)/(4\pi r^3)$. A condição (2.24) de ortonormalização dos modos (2.44) e (2.45) implica que

$$\int_0^{+\infty} dx \psi_{\varpi l}^* \psi_{\varpi' l} = \delta(\varpi - \varpi') \quad (2.51)$$

e

$$\int_0^{+\infty} dx \psi_{\Omega l}^* \psi_{\Omega' l} = \delta_{\Omega \Omega'}, \quad (2.52)$$

ao passo que, exigindo regularidade dos modos normais na origem, temos

$$\psi_{\varpi l}[r(x)]|_{x=0} = 0, \quad (2.53)$$

$$\psi_{\Omega l}[r(x)]|_{x=0} = 0. \quad (2.54)$$

Vale notar que, uma vez que ambos os conjuntos $\{u_{\vec{k}}^{(\pm)}\}$ e $\{v_{\varpi l \mu}^{(\pm)}, w_{\Omega l \mu}^{(\pm)}\}$ são completos, podemos expandir

$$u_{\vec{k}}^{(+)} = \sum_{l\mu} \sum_{\varpi} (\alpha_{\varpi l \mu; \vec{k}}^* v_{\varpi l \mu}^{(+)} - \beta_{\varpi l \mu; \vec{k}} v_{\varpi l \mu}^{(-)}) + \sum_{\Omega l \mu} (\alpha_{\Omega l \mu; \vec{k}}^* w_{\Omega l \mu}^{(+)} - \beta_{\Omega l \mu; \vec{k}} w_{\Omega l \mu}^{(-)}) \quad (2.55)$$

e semelhantemente para $u_{\vec{k}}^{(-)}$; essas expressões constituem as chamadas transformações de Bogoliubov [19]. Pode-se verificar diretamente que os coeficientes que aparecem na Eq. (2.55) são dados por $\alpha_{\varpi l \mu; \vec{k}} = (u_{\vec{k}}^{(+)}, v_{\varpi l \mu}^{(+)})_{KG}$, $\beta_{\varpi l \mu; \vec{k}} = -(u_{\vec{k}}^{(-)}, v_{\varpi l \mu}^{(+)})_{KG}$, $\alpha_{\Omega l \mu; \vec{k}} = (u_{\vec{k}}^{(+)}, w_{\Omega l \mu}^{(+)})_{KG}$ e $\beta_{\Omega l \mu; \vec{k}} = -(u_{\vec{k}}^{(-)}, w_{\Omega l \mu}^{(+)})_{KG}$. Então, igualando as expressões (2.41) e (2.43) e fazendo uso da Eq. (2.55), obtemos que

$$\hat{b}_{\varpi l \mu} = \int d^3 \vec{k} \left(\alpha_{\varpi l \mu; \vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} - \beta_{\varpi l \mu; \vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right) \quad (2.56)$$

$$\hat{c}_{\Omega l \mu} = \int d^3 \vec{k} \left(\alpha_{\Omega l \mu; \vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} - \beta_{\Omega l \mu; \vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right). \quad (2.57)$$

Na ausência de modos taquiônicos, podemos definir o estado $|0_{\text{out}}\rangle$ como aquele que satisfaz $\hat{b}_{\varpi l \mu}|0_{\text{out}}\rangle = 0$ para todos os valores de ϖ , l e μ : esse é o estado de vácuo para observadores estacionários no futuro assintótico. O fato de que em geral os modos $u_k^{(+)}$ não podem ser expressos apenas como uma combinação de $v_{\varpi l \mu}^{(+)}$, sendo necessário incluir os modos $v_{\varpi l \mu}^{(-)}$ na expansão [cf. Eq. (2.55)], dá origem ao fenômeno de “criação de partículas” em espaços-tempos não globalmente estacionários: o estado $|0_{\text{in}}\rangle$, associado à ausência de partículas no passado assintótico, difere em geral do estado $|0_{\text{out}}\rangle$, sendo visto por um observador estacionário no futuro assintótico como repleto de partículas. De fato, o valor esperado do operador $N_{\varpi l \mu} = \hat{b}_{\varpi l \mu}^\dagger \hat{b}_{\varpi l \mu}$ no estado $|0_{\text{in}}\rangle$, que expressa o valor esperado do número de partículas associadas aos modos $v_{\varpi l \mu}^{(+)}$ nesse estado, é dado por

$$\langle 0_{\text{in}} | N_{\varpi l \mu} | 0_{\text{in}} \rangle = \int d^3 \vec{k} |\beta_{\varpi l \mu; \vec{k}}|^2, \quad (2.58)$$

e é não nulo sempre que $\beta_{\varpi l \mu; \vec{k}} \neq 0$.

Por outro lado, a existência de modos taquiônicos implica que em geral os modos oscilatórios $u_k^{(\pm)}$ não poderão ser escritos apenas como uma composição de $v_{\varpi l \mu}^{(\pm)}$, sendo necessário incluir os modos $w_{\Omega l \mu}^{(\pm)}$ na expansão [cf. Eq. (2.55)]. Isso se traduz em um crescimento exponencial das flutuações de vácuo no futuro assintótico:

$$\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}^2 | 0_{\text{in}} \rangle \stackrel{\text{futuro}}{\sim} \frac{\hbar \kappa e^{2\bar{\Omega}t}}{8\pi\bar{\Omega}} \left(\frac{\psi_{\bar{\Omega}0}(r)}{r} \right)^2 [1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon t})], \quad (2.59)$$

onde $-\bar{\Omega}^2$ é o menor autovalor negativo do operador $-d^2/dx^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}(r)$, ϵ é uma constante positiva e κ é uma constante tipicamente de ordem 1 que depende das projeções $(u_k^{(\pm)}, w_{\Omega 00}^{(\pm)})_{KG}$, e cujo valor exato depende dos detalhes da transição entre as duas fases estáticas. Na Eq. (2.59), levamos em conta que o menor autovalor negativo do operador $-d^2/dx^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}(r)$ é obtido quando $l = \mu = 0$, uma vez que a barreira centrífuga dá uma contribuição positivo definida para o potencial efetivo. Esse aumento exponencial das flutuações de vácuo também se expressa como um crescimento ilimitado da energia de vácuo armazenada no campo e do valor esperado das demais componentes do tensor de energia-momento do campo. Em particular, temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{00}^\Phi \rangle \stackrel{\text{futuro}}{\sim} \langle \hat{\Phi}^2 \rangle & \left\{ \frac{(1-4\xi)}{2} \left[\bar{\Omega}^2 - \frac{e^{2(\Xi-\Lambda)}}{\psi_{\bar{\Omega}0}/r} \left(\frac{d(\psi_{\bar{\Omega}0}/r)}{dr} \right)^2 + (\tilde{m}^2 + \xi R) e^{2\Xi} \right] \right. \\ & \left. + \xi e^{2\Xi} \left[\square \Xi + \frac{2e^{2\Lambda}}{\psi_{\bar{\Omega}0}/r} \frac{d\Xi}{dr} \frac{d(\psi_{\bar{\Omega}0}/r)}{dr} \right] \right\} [1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon t})] \end{aligned} \quad (2.60)$$

e expressões semelhantes para as demais componentes de $\hat{T}_{\mu\nu}^\Phi$ (veja a Ref. [95] para o valor assintótico de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle$ no caso mais geral em que o espaço-tempo é conformalmente estático no futuro assintótico). A Eq. (2.60), junto com a Eq. (2.59),

implicam que a energia de vácuo armazenada no campo deve sobrepujar qualquer componente clássica de energia em uma escala de tempo determinada por $\bar{\Omega}^{-1}$. Pela Eq. (2.47), temos que essa escala de tempo é da ordem do inverso da raiz quadrada do poço de potencial, $\bar{\Omega}^{-1} \sim |V_{\text{eff}}^{(0)}|^{-1/2}$, que, por sua vez, é da ordem do raio da estrela, $\sim R_s$. Tomando um raio típico de 10km para uma estrela de nêutrons, temos, portanto, $\bar{\Omega}^{-1} \sim 10^{-4}\text{s}$. Portanto, assim que esse crescimento exponencial das flutuações de vácuo é disparado, a aproximação de um espaço-tempo fixo no qual o campo é quantizado deixa de ser válida e o conteúdo energético do próprio campo precisa ser levado em conta na determinação da evolução espaço-temporal subsequente, por meio das equações semiclássicas de Einstein, Eq. (2.14). Vale notar que apesar do crescimento irrestrito de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle$, essa quantidade é covariantemente conservada: $\nabla_\mu \langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle = 0$. Consequentemente, a energia total do vácuo, $\langle \hat{H} \rangle$ [veja a Eq. (2.29)], é conservada: a energia cresce positivamente em algumas regiões espaciais e negativamente em outras, de forma que o valor total é mantido constante. Vale ressaltar também que essa instabilidade quântica, que se traduz em um crescimento exponencial de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle$, é um efeito de baixas energias, e não se relaciona com as divergências que afetam o cálculo de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle$ em geral (de fato, já assumimos aqui a expressão renormalizada para o tensor de energia-momento do campo).

Por fim, é interessante que, embora o espaço de Fock de estados na presença de modos taquiónicos não possua uma interpretação natural em termos de partículas (cf. Sec. 2.2), ainda assim é possível investigar a fase instável por meio do uso de detectores de partículas, como feito na Ref. [87]. Detectores de partículas são comumente descritos por meio de um modelo devido a Unruh [132] (ver também a Ref. [19]), em que o detector, com tempo próprio τ e linha de mundo $x^\mu(\tau)$, interage com o campo por meio de uma Lagrangeana de interação $\epsilon \hat{m}(\tau) \hat{\Phi}[x(\tau)]$, onde ϵ é uma constante de acoplamento pequena e $\hat{m}(\tau)$ é o operador associado ao momento de monopolo do detector. Na Ref. [87], os autores consideraram um detector estático de dois níveis, descritos por autoestados de energia $|E_0\rangle$ e $|E\rangle$, tais que $H_0|E'\rangle = E'|E'\rangle$ e $E > E_0$. O detector, inicialmente no estado fundamental $|E_0\rangle$, é ligado quando o campo entra na fase instável (onde convencionase $\tau = 0$). Então, pode-se calcular, a nível de árvore, a probabilidade de excitação do detector como função do intervalo de tempo próprio T em que ele fica ligado [19]:

$$P_{\text{exc}} = \epsilon^2 |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \mathcal{F}(\Delta E), \quad (2.61)$$

onde $\Delta E \equiv E - E_0$, $\hat{m}(\tau) = e^{iH_0\tau} \hat{m}(0) e^{-iH_0\tau}$ e onde a função de resposta do detector é dada por

$$\mathcal{F}(\Delta E) = \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' e^{-i\Delta E(\tau - \tau')} \langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}[x(\tau)] \hat{\Phi}[x(\tau')] | 0_{\text{in}} \rangle. \quad (2.62)$$

Na ausência de modos taquiônicos, o crescimento da função de resposta em T nunca é mais rápido que uma função linear em T . Por outro lado, quando modos taquiônicos estão presentes, temos que [87]

$$\mathcal{F}(\Delta E) \approx \frac{\exp(2T\bar{\Omega}e^{-\Xi(r_d)})}{8\pi\bar{\Omega}[\Delta E^2 + \bar{\Omega}^2 e^{-2\Xi(r_d)}]} \int d^3\vec{k} \left| \alpha_{\bar{\Omega}\vec{k}}^* \frac{\psi_{\bar{\Omega}0}(r_d)}{r_d} e^{-i\pi/12} - \beta_{\bar{\Omega}\vec{k}} \frac{\psi_{\bar{\Omega}0}^*(r_d)}{r_d} e^{i\pi/12} \right|^2,$$

onde $(r_d, \theta_d, \varphi_d)$ determina a posição espacial do detector. Portanto, se desconsideramos efeitos de retroação do campo sobre o espaço-tempo, vemos que detectores de partículas são copiosamente excitados quando o campo atravessa uma fase instável, como visto a partir do crescimento exponencial de sua função de resposta. Naturalmente, cada excitação do detector deve estar acompanhada pela diminuição da energia armazenada no campo.

2.3.1 Espaço de parâmetros da instabilidade

No restante desta Seção, estaremos interessados em investigar mais detalhadamente a região de parâmetros que caracteriza a o efeito de dominância do vácuo descrito acima. Note que a existência de “estados ligados” do operador $-d^2/dx^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}(r)$, ou soluções regulares e normalizáveis da Eq. (2.47), é a marca característica desse efeito (ou, de forma mais geral, da instabilidade de campos escalares no espaço-tempo de estrelas relativísticas, como discutiremos em mais detalhes no Cap. 3). Tais estados ligados aparecem quando o potencial efetivo se torna suficientemente negativo, o que pode ser obtido para escolhas apropriadas de ξ . Em particular, devemos ter $\tilde{m}^2 \ll |\xi R| = 8\pi|\xi T| \sim 8\pi|\xi\rho|$, onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é o traço do tensor de energia momento da matéria, cuja ordem de grandeza é dada pela densidade de energia ρ da matéria que compõe a estrela. Em unidades convencionais, essa condição equivale a

$$|\xi| \gg \frac{m_\Phi^2 c^2 / \hbar^2}{8\pi G \rho / c^2} \approx \frac{(m_\Phi c^2)^2 / (10^{-11} \text{eV})^2}{\rho / (10^{14} \text{g/cm}^3)}. \quad (2.63)$$

Levando em conta que estrelas relativísticas como estrelas de nêutrons têm densidade típica de $\rho \sim 10^{14} - 10^{17} \text{g/cm}^3$ [88], vemos que campos com acoplamento $|\xi| \sim 1$ (como é o caso do acoplamento conforme) somente seriam instáveis no espaço-tempo dessas estrelas se possuísem massa extremamente pequena. Um campo como o Higgs, com $m_\Phi c^2 \approx 125 \text{GeV}$ [35, 11], apenas seria instável no espaço-tempo de estrelas relativísticas se possuisse um acoplamento $|\xi| \sim 10^{44}$, o que parece estar excluído pelas observações no LHC [10]. Vale notar que, embora em geral correções quânticas possam conferir uma massa relativamente grande a campos escalares (ver, por exemplo, [77]) existem mecanismos capazes de suprimir esses efeitos, permitindo a existência de campos escalares leves “naturais” (ver, por exemplo, [74, 45, 9]). No

que se segue, em geral suporemos $\tilde{m} = 0$, mas um valor não nulo para a massa pode facilmente ser acomodado nos cálculos.

A fim de determinarmos para que configurações estelares um campo com acoplamento ξ com o escalar de curvatura é instável, é necessário que examinemos a existência de soluções da Eq. (2.47) satisfazendo as Eqs. (2.54) e (2.52), que garantem que os modos obtidos a partir delas sejam regulares e normalizados [veja a Eq. (2.45)]. Note, a partir da Eq. (2.50), que, fora da estrela, o potencial efetivo é positivo definido, uma vez que $R = \rho = 0$:

$$V_{\text{eff}}^{(l)}(r) = e^{2\Xi} \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right), \quad \text{se } r \geq R_s. \quad (2.64)$$

Porém, para certas configurações estelares e valores de ξ , o poço potencial no interior da estrela pode ser suficientemente negativo de modo a comportar a existência de estados ligados. Na Fig. 2.1, exibimos o potencial efetivo em função da razão entre a coordenada radial r e o raio da estrela, para os perfis de densidade mostrados na Eq. (2.40).

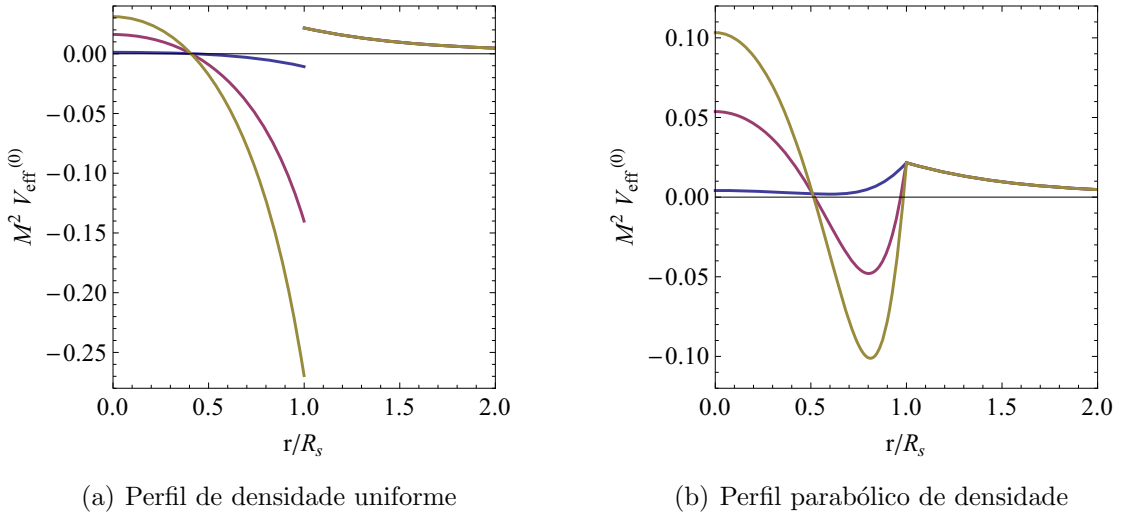


Figura 2.1: Potencial efetivo em função da razão r/R_s para estrelas com razão massa-raio $M/R_s = 0.3$ e perfil de densidade (a) uniforme ou (b) parabólico. Curvas em azul, magenta e amarelo correspondem, respectivamente, a $\xi = 0, -2$ e -4 . Para $r > R_s$, as curvas coincidem.

Vamos então descrever brevemente nossa estratégia para encontrar estados ligados da Eq. (2.47). Note que para $\tilde{m} = 0$, $V_{\text{eff}}^{(l)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ e a Eq. (2.47) admite soluções com os comportamentos assintóticos $\psi_{\Omega l}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{\pm \Omega r}$, onde usamos que $x(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r$.

Claramente, a condição (2.52) exclui soluções assintoticamente divergentes, e ficamos com a condição de fronteira

$$\psi_{\Omega}(r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\propto} e^{-\Omega r}, \quad (2.65)$$

que, juntamente com a Eq. (2.54), determina as condições de contorno relevantes. A estratégia é, então, a seguinte: fixados valores de l , Ω e os parâmetros que caracterizam a estrela, (i) evoluímos numericamente a Eq. (2.47) no interior da estrela, sujeita às condições de fronteira $\psi_{\Omega}(0) = 0$ e $\psi_{\Omega}(R_s) = 1$; (ii) evoluímos numericamente a Eq. (2.47) no exterior da estrela, sujeita às condições $\psi_{\Omega}(R_s) = 1$ e $d\psi_{\Omega}/dr \stackrel{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} -\Omega\psi_{\Omega}(r)$, que equivale à Eq. (2.65), e (iii) calculamos a diferença

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left. \frac{d\psi_{\Omega}}{dr} \right|_{R_s+\epsilon} - \left. \frac{d\psi_{\Omega}}{dr} \right|_{R_s-\epsilon} \right), \quad (2.66)$$

como uma função de ξ , procurando pelo valor de ξ , quando possível, para que essa diferença se anule. A normalização segundo a Eq. (2.52) pode ser fixada a posteriori e não é diretamente relevante. O resultado da busca numérica seguindo esses passos é mostrado na Fig. 2.2. As regiões cinzas caracterizam a instabilidade: um ponto $(\xi, M/R_s)$ nessas regiões representa a existência de (pelo menos) um estado ligado do operador $-d^2/dx^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}$ com algum autovalor $-\Omega^2$ [cf. Eq. (2.47)]. Em particular, as fronteiras dessas regiões correspondem a estados marginalmente ligados, com $\Omega \approx 0$ ^{††}.

Nos quadros (a) e (b) da Fig. 2.2, vemos um comportamento qualitativo semelhante^{††}. Campos com $\xi \lesssim -2$ e $\xi > 1/6$ são instáveis no espaço-tempo de estrelas com certas razões massa-raio. A equação de estado, ou o perfil de densidade assumido, não modifica consideravelmente esses valores críticos. Por outro lado, a equação de estado é crucial na determinação da massa máxima suportada em cada modelo, ou seja, acima da qual as estrelas já seriam instáveis em RG por perturbações radiais. Isso se manifesta na Fig. 2.2 por meio da diferença na escala do eixo vertical entre os quadros (a) e (b).

^{††}De fato, em geral, quando o potencial efetivo é parametrizado suavemente por uma variável real, como é o caso de ξ na Eq. (2.50), a transição da estabilidade para a instabilidade se dá via um modo de frequência nula [56].

^{‡‡}Como discutiremos no Cap. 6, o espaço de parâmetros da instabilidade de campos não minimamente acoplados será o mesmo em que o fenômeno de “escalarização espontânea” acontece. A influência de diferentes equações de estado para esse fenômeno foi analisada, por exemplo, nas Refs. [119, 107, 110]. Ver, por exemplo, a Fig. 1 da Ref. [110], para o caso de uma equação de estado politrópica.

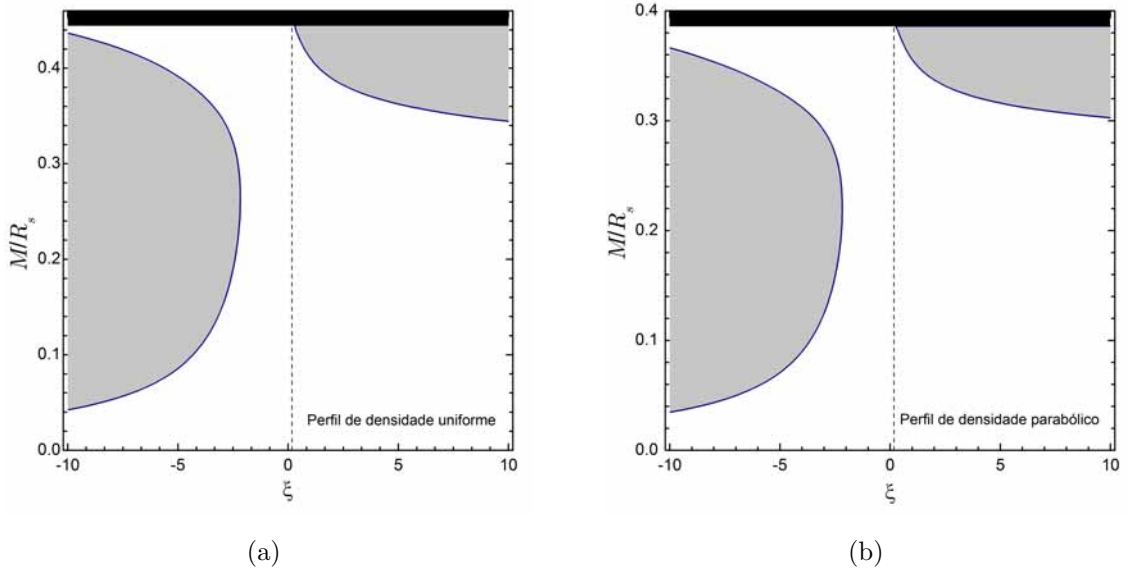


Figura 2.2: Diagrama mostrando os valores da razão M/R_s de objetos compactos com (a) densidade uniforme e (b) perfil parabólico de densidade, em cujo espaço-tempo campos com acoplamento ξ com o escalar de curvatura são instáveis (regiões em cinza). A linha vertical tracejada indica o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$. As regiões pretas, que correspondem a (a) $M/R_s \geq 4/9$ ou (b) $M/R_s \gtrsim 0.3862$, indicam regiões em que não existem soluções clássicas de equilíbrio, uma vez que a pressão central necessária para sustentar o corpo torna-se infinita para esses valores. Esses diagramas reproduzem os encontrados na Ref. [93] (ver também [66] para o caso de densidade uniforme em teorias tensor-escalar). Um diagrama semelhante para uma equação de estado politrópica pode ser encontrado na Ref. [110].

Implicações da instabilidade de campos escalares não minimamente acoplados

Uma implicação interessante da instabilidade de campos não minimamente acoplados no espaço-tempo de estrelas relativísticas é a possibilidade de, a princípio, colocarmos vínculos sobre os valores de ξ permitidos com base em observações astrofísicas. De fato, a Fig. 2.2 sugere que a observação de uma estrela com uma certa razão M/R_s , e equação de estado conhecida, permitiria descartar toda uma faixa de acoplamentos. Por exemplo, se um perfil parabólico de densidade for uma boa aproximação para a equação de estado de estrelas de nêutrons, a observação de uma estrela com $M/R_s \approx 0.2$ descartaria a existência, na Natureza, de campos escalares não massivos com acoplamento $\xi \lesssim -2.21$, pois, se tais campos existissem, suas flutuações quânticas inevitavelmente desestabilizariam a estrela! Vale ressaltar que aqui estamos considerando estrelas esféricas e estáticas. Na ausência dessas sime-

trias, o espaço de parâmetros da instabilidade pode se alterar e, a princípio, isso precisaria ser levado em conta no contato com dados observacionais. O efeito no espaço de parâmetros da ausência de simetria esférica e na presença de rotação será discutido nos Caps. 4 e 5.

Por outro lado, vimos que, assim que a instabilidade é disparada, em frações de segundo a densidade de vácuo do campo pode se tornar comparável à densidade da própria estrela, e a aproximação empregada aqui, de campos evoluindo em um espaço-tempo de fundo fixo, precisa ser abandonada. Assim, é mandatório considerarmos os efeitos de retroação do campo sobre o espaço-tempo e investigarmos os mecanismos de re-estabilização possíveis, antes de fazermos contato com observações astrofísicas. Embora tal análise, do ponto de vista quântico, se depare com muitas dificuldades conceituais e técnicas [veja as observações no fim da Sec. 2.1], veremos no Cap. 6 que muitas informações podem ser obtidas a partir de uma análise puramente clássica.

Campo minimamente acoplado

Da Fig. 2.2, vemos que o vácuo de campos não minimamente acoplados é instável no espaço-tempo de estrelas relativísticas para um grande intervalo de constantes de acoplamento ξ e parâmetros que descrevem a estrela. No entanto, vemos também que, para os dois valores mais naturais de ξ , o acoplamento mínimo, $\xi = 0$, e o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$, o campo é estável. No Cap. 4, veremos um exemplo concreto de espaço-tempo no qual campos com acoplamento conforme são instáveis. Por outro lado, argumentos gerais indicam que campos minimamente acoplados em espaços-tempos estacionários são sempre estáveis. O restante desta Seção será dedicado à discussão desse ponto, seguindo a Ref. [102]. Primeiramente, vamos justificar essa afirmação no caso estático, mostrando que a Eq. (2.47) com $\xi = 0$ não possui soluções satisfazendo ambas as condições (2.54) e (2.65). Para isso, basta analisar o caso $l = 0$ e $\tilde{m} = 0$, pois, ao zerarmos os termos positivos $e^{2\Xi}\tilde{m}^2$ e $l(l+1)/r^2$ no potencial efetivo (2.49), aumentamos a chance de encontrar estados ligados. Portanto, vamos buscar soluções normalizáveis de

$$-d^2\psi_{\Omega 0}/dx^2 + V_{\text{eff}}^{(0)}\Big|_{\xi=0}\psi_{\Omega 0} = -\Omega^2\psi_{\Omega 0}, \quad (2.67)$$

onde $V_{\text{eff}}^{(0)}\Big|_{\xi=0} = (e^{2(\Xi-\Lambda)}/r)(d\Xi/dr - d\Lambda/dr)$ com

$$\psi_{\Omega 0}|_{x=0} = 0, \quad (2.68)$$

o que é exigido pela Eq. (2.54). Além disso, o fato de que $V_{\text{eff}}^{(0)}|_{\xi=0}$ é regular na

origem implica que $d\psi_{\Omega 0}/dx|_{x=0} = \text{const} \neq 0$. Por conveniência, vamos escolher

$$d\psi_{\Omega 0}/dx|_{x=0} = C \exp[\Xi - \Lambda]|_{x=0}, \quad (2.69)$$

onde C é uma constante não nula que é fixada pela Eq. (2.52). As Eqs. (2.68) e (2.69) determinam unicamente uma solução da Eq. (2.67). Por outro lado, vemos, da Eq. (2.48), que $f(x) \equiv Cr(x)$ satisfaz (i) a mesma equação diferencial que $\psi_{\Omega 0}$, Eq. (2.67), contanto que $\Omega = 0$: $-d^2f/dx^2 + V_{\text{eff}}^{(0)}|_{\xi=0} f = 0$, e (ii) condições semelhantes às Eqs. (2.68) e (2.69), ou seja, $f(x)|_{x=0} = 0$ e $df/dx|_{x=0} = C \exp[\Xi - \Lambda]|_{x=0}$. Agora, uma vez que $f(x) = Cr(x)$ é uma função monotonicamente crescente de x [ver a Eq. (2.48)], concluímos imediatamente que a Eq. (2.67) com $\Omega = 0$ não possui soluções satisfazendo a Eq. (2.65). Como o fator Ω^2 na Eq. (2.67) apenas aumenta o valor de $d^2\psi_{\Omega 0}/dx^2$, chegamos à mesma conclusão para $\Omega \neq 0$. Isso implica que campos escalares minimamente acoplados em espaços-tempos estáticos, esféricos e assintoticamente planos (sem horizontes ou singularidades) não possuem modos instáveis.

No caso de espaços-tempos estacionários, um argumento geral que implica a estabilidade de campos minimamente acoplados também pode ser feito. Para isso, lembramos inicialmente que, em espaços-tempos estacionários, a quantidade (2.27) é conservada. Na presença de instabilidade, para que haja conservação da energia (2.27), a quantidade $\rho_{\Phi} \equiv T_{\mu\nu}^{\Phi} n^{\mu} \xi^{\nu}$ deve crescer positivamente em alguns pontos das seções espaciais e negativamente em outros. Portanto, a condição $\rho_{\Phi} > 0$ — também chamada de “condição de energia fraca” — de que a densidade de energia do campo seja positivo definida, é suficiente para garantir a estabilidade do campo. Vamos mostrar que, em particular, essa condição é satisfeita para campos minimamente acoplados. No caso $\xi = 0$, a Eq. (2.3) fica

$$T_{\mu\nu}^{\Phi} = \nabla_{\mu} \Phi \nabla_{\nu} \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_{\rho} \Phi \nabla^{\rho} \Phi + \tilde{m}^2 \Phi^2).$$

Notemos, primeiro, que (i) $T_{\mu\nu}^{\Phi} n^{\mu}$ é tipo tempo:

$$(T_{\mu\nu}^{\Phi} n^{\mu})(T_{\Phi}^{\rho\nu} n_{\rho}) = -[(n^{\mu} \nabla_{\mu} \Phi)^2 \tilde{m}^2 \Phi^2 + (\nabla_{\rho} \Phi \nabla^{\rho} \Phi + \tilde{m}^2 \Phi^2)^2] < 0.$$

Além disso, (ii) $T_{\mu\nu}^{\Phi} n^{\mu}$ aponta para o passado, já que

$$T_{\mu\nu}^{\Phi} n^{\mu} n^{\nu} = \frac{1}{2} (n^{\mu} \nabla_{\mu} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \Phi^2 + h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \Phi \nabla_{\nu} \Phi > 0,$$

onde usamos que $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - n_{\mu} n_{\nu}$. Por fim, temos que $T_{\mu\nu}^{\Phi} n^{\mu} \xi^{\nu} > 0$, o que é consequência de (i), (ii) e do fato de que ξ^{ν} é tipo-tempo e aponta para o futuro. Assim, para campos minimamente acoplados, $\rho_{\Phi} > 0$, o que implica que tais campos são estáveis em espaços-tempos estacionários.

Capítulo 3

Instabilidade Quântica *versus* Instabilidade Clássica

No Cap. 2, vimos que certas evoluções espaço-temporais podem provocar um aumento exponencial das flutuações de vácuo de campos escalares dotados de um acoplamento adequado com o escalar de curvatura. Como consequência, a densidade de energia de vácuo de tais campos, definidos, por exemplo, no espaço-tempo de certas estrelas relativísticas, se tornaria comparável à densidade nuclear em alguns milissegundos. Esse efeito ilustra como as flutuações quânticas do campo, que em geral são desprezíveis por carregarem o “ $\hbar$ ” próprio do mundo quântico, podem desempenhar um papel importante em certas situações.

Neste Capítulo, vamos estudar a contrapartida clássica do efeito quântico discutido no Cap. 2. Classicamente, uma certa configuração de equilíbrio é dita dinamicamente instável se alguma grandeza física associada a perturbações lineares das quantidades de equilíbrio cresce sem limites no tempo. Muitas vezes é útil focarmos no estudo de uma classe particular, mas bastante geral, de perturbações, cuja dependência temporal é $\exp(-i\omega t)$, $\omega \in \mathbb{C}$, e que obedecem condições de contorno adequadas. A existência de tais modos “quasinormais” com $\Im(\omega) > 0$ implica a instabilidade do sistema*.

Em particular, na Ref. [66] (ver também a Ref. [67]), a estabilidade do espaço-tempo de estrelas relativísticas em certas teorias tensor-escalar foi estudada, e a existência de modos quasinormais instáveis foi identificada para um grande intervalo de parâmetros da teoria (analogamente à Fig. 2.2). As características essenciais da instabilidade clássica aparecem ainda em trabalhos anteriores, notavelmente na Ref. [54]. Neste Capítulo, o nosso principal objetivo é estabelecer de forma precisa a relação entre as descrições clássica e quântica da instabilidade. Claramente, a des-

*Claramente a estabilidade dinâmica por perturbações lineares implica estabilidade modal, mas o contrário não é válido, uma vez que a última não exclui, por exemplo, perturbações que cresçam linearmente no tempo (ver, por exemplo, a discussão na Ref. [60]).

crição clássica requer que se assuma a existência de pequenas perturbações, capazes de forçar que o sistema abandone sua configuração inicial de equilíbrio, ao passo que, em Mecânica Quântica, as próprias flutuações do vácuo podem desempenhar esse papel. Portanto, em nossa análise, daremos ênfase especial para o papel das condições iniciais no tratamento clássico. Em resumo, na Sec. 3.1, analisaremos a evolução de pequenas perturbações clássicas do campo em um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, por meio do estudo de seu espectro de modos quasinormais, obtido a partir do formalismo de transformadas de Laplace. Esse formalismo, usado frequentemente no estudo da evolução de perturbações estáveis [90, 106, 105, 83], é adaptado aqui para o caso instável, por permitir um tratamento conveniente das condições iniciais. Na Sec. 3.2, discutiremos as semelhanças e diferenças entre as descrições quântica e clássica da instabilidade e mostraremos como flutuações quânticas podem ser simuladas por perturbações clássicas com uma certa amplitude, proporcional a $\sqrt{\hbar}$. Este Capítulo se baseia essencialmente no artigo [102], publicado na seção de *Brief Reports* da revista *Physical Review D*; aqui, porém, estendemos o material de revisão, alguns passos intermediários e as discussões físicas relevantes.

3.1 Análise clássica da estabilidade linear de campos escalares em espaços curvos

Seja um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, como o de uma estrela relativística sem rotação e em equilíbrio, descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = -e^{2\Xi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

onde $\Xi(r)$ e $\Lambda(r)$ são funções contínuas e limitadas, com $\Xi(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} r^2$, $\Xi(r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ e igualmente para $\Lambda(r)$. A métrica (3.1) deve ser solução das equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^m, \quad (3.2)$$

para alguma distribuição de matéria, descrita pela ação S_m e pelo tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}^m = -(2/\sqrt{-g})\delta S_m/\delta g^{\mu\nu}$.

Vamos então perturbar o sistema introduzindo um campo escalar livre sem massa Φ , governado pela ação S_Φ dada na Eq. (2.1), com $\tilde{m} = 0$. Impondo que a ação total $S_{\text{EH}} + S_m + S_\Phi$, com S_{EH} definida na Eq. (2.12), seja estacionária por pequenas perturbações $\delta g_{\mu\nu}$ com respeito à métrica, obtemos as novas equações de campo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^\Phi), \quad (3.3)$$

onde $T_{\mu\nu}^\Phi$ é dado por

$$T_{\mu\nu}^\Phi = (1 - 2\xi)\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + \xi R_{\mu\nu}\Phi^2 - 2\xi\Phi\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + (2\xi - 1/2)[\nabla_\rho\Phi\nabla^\rho\Phi + \xi R\Phi^2]g_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

A Eq. (3.3), junto com a equação dinâmica para o campo Φ ,

$$(-\nabla^\mu\nabla_\mu + \xi R)\Phi = 0, \quad (3.5)$$

e as equações dinâmicas para os campos de matéria, governam a evolução do sistema como um todo.

Note que assumimos que a configuração de campo nulo, $\Phi = 0$, é uma solução de equilíbrio do conjunto das equações de campo, com a métrica dada na Eq. (3.1). Nesta Seção, estaremos interessados em analisar a evolução de perturbações lineares dessa configuração clássica de campo nulo. Ou seja, vamos definir

$$g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}^{(1)}, \quad \Phi \equiv \Phi_{(0)} + \Phi_{(1)},$$

onde $\Phi_{(0)} = 0$ e $\Phi_{(1)}$ é pequeno no sentido que acarreta uma perturbação $g_{\mu\nu}^{(1)}$ pequena com respeito à métrica de fundo, $g_{\mu\nu}^{(0)}$, dada na Eq. (3.1). Uma vez que $T_{\mu\nu}^\Phi$ depende quadraticamente de Φ , concluímos que, se nos restringimos ao regime de perturbações lineares, descartando termos de segunda ordem nas perturbações, então $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)}$ é solução da Eq. (3.3), ao passo que $\Phi_{(1)}$ evolui de acordo com

$$(-\nabla^\mu\nabla_\mu + \xi R)\Phi_{(1)} = 0, \quad (3.6)$$

onde as quantidades geométricas são construídas a partir da métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$. Espera-se que a aproximação linear seja válida enquanto $g_{\mu\nu}^{(1)}$ for pequena com relação a $g_{\mu\nu}^{(0)}$.

Vamos postular, portanto, que, em algum instante, digamos $t = 0$, um “agente externo” retira o campo $\Phi(t, \mathbf{x})$ de seu estado inicial de equilíbrio, fornecendo uma perturbação inicial, determinada pelos valores de $\Phi_{(1)}(t, \mathbf{x})$ e $\partial_t\Phi_{(1)}(t, \mathbf{x})$ em $t = 0$. Por simplicidade, vamos supor que $\Phi_{(1)}(t, \mathbf{x})$ e $\partial_t\Phi_{(1)}(t, \mathbf{x})$ tenham suporte compacto como funções de $\mathbf{x}$ em $t = 0$. Essa hipótese será empregada em todo o Capítulo por facilitar alguns cálculos e discussões, mas poderia ser substituída pela suposição de um decaimento suficientemente rápido no infinito espacial.

Devido à simetria esférica do espaço-tempo de fundo, descrito pela Eq. (3.1), podemos decompor $\Phi_{(1)}$ como

$$\Phi_{(1)}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu=-l}^l \frac{\chi_{l\mu}(t, r)}{r} Y_{l\mu}(\theta, \varphi), \quad (3.7)$$

onde $\chi_{l\mu}(t, r)$ obedece

$$\partial_t^2 \chi_{l\mu}(t, r) - \partial_x^2 \chi_{l\mu}(t, r) + V_{\text{eff}}^{(l)}(r) \chi_{l\mu}(t, r) = 0, \quad (3.8)$$

com x definida na Eq. (2.48) e

$$V_{\text{eff}}^{(l)}(r) = e^{2\Xi} \left(\xi R + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + \frac{e^{2(\Xi-\Lambda)}}{r} \left(\frac{d\Xi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right). \quad (3.9)$$

As condições iniciais são dadas pela especificação de $\chi_{l\mu}(t, r)$ e $\partial_t \chi_{l\mu}(t, r)$ em $t = 0$. Vale notar que a propriedade de propagação causal de sinais apresentada por equações hiperbólicas como a Eq. (3.6), junto com a hipótese de condições iniciais de suporte compacto, implicam que $\chi_{l\mu}(t, r)$ continua sendo de suporte compacto como função de r para todo t finito (ver Fig. 3.1).

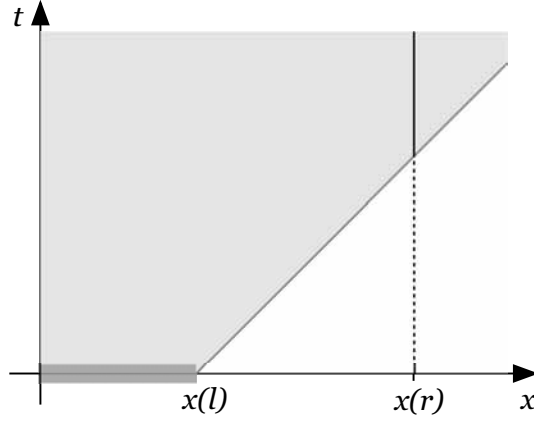


Figura 3.1: Ilustração do suporte da função $\chi_{l\mu}(t, r)$.

Transformada de Laplace e solução pelo método de funções de Green

A fim de lidarmos de forma mais eficaz com as condições iniciais e estabelecermos uma ligação clara entre as análises quântica e clássica, é conveniente empregarmos o formalismo de transformadas de Laplace, adaptando por exemplo o tratamento da Ref. [106] para o nosso caso.

A transformada de Laplace (TL) de $\chi_{l\mu}(t, r)$ com relação à coordenada temporal t é definida como

$$\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-st} \chi_{l\mu}(t, r) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (3.10)$$

em um domínio $\Re(s) > \gamma$ em que $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ é analítica. Aqui, γ é escolhido de forma que $|\chi_{l\mu}(t, r)| \leq M e^{\gamma t}$ se $t > t_0$, para alguns valores de t_0 , $M \in \mathbb{R}^+$ (ver Apêndice B). Das Eqs. (3.8) e (3.10), segue que $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ obedece

$$-\partial_x^2 \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) + [s^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}(r)] \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) = \mathcal{I}_{l\mu}(s, r), \quad (3.11)$$

onde a função

$$\mathcal{I}_{l\mu}(s, r) \equiv [s\chi_{l\mu}(t, r) + \partial_t \chi_{l\mu}(t, r)]_{t=0} \quad (3.12)$$

é determinada pelas condições iniciais. A hipótese de condições iniciais de suporte compacto implica que $\mathcal{I}_{l\mu}(s, r) = 0$ para $r > \ell = \text{const.}$ A vantagem do formalismo de TL é justamente a inclusão natural das condições iniciais na descrição do problema, por meio da Eq. (3.11).

Antes de prosseguirmos para resolver a Eq. (3.11), é importante notar que, devido a $\chi_{l\mu}(t, r)$ ser de suporte compacto como função de r (ver Fig. 3.1), temos, pela Eq. (3.10), que, para valores suficientemente grandes de r (tais que $x(r) - x(\ell) > t_0$),

$$|\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)| \leq \int_{x(r)-x(\ell)}^{+\infty} M e^{-(\Re(s)-\gamma)t} dt. \quad (3.13)$$

Calculando a integral na Eq. (3.13) e tomando o limite, concluímos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) = 0. \quad (3.14)$$

Portanto, o fato de $\chi_{l\mu}(t, r)$ ser de suporte compacto como função de r (ou, de forma mais geral, decair rapidamente no infinito espacial), implica que sua TL, $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$, vai a zero quando $r \rightarrow +\infty$. A forma detalhada de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ dependerá, é claro, da resolução da Eq. (3.11). Uma solução geral dessa equação pode ser escrita como

$$\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) = \int_0^{+\infty} G_l(s; r, r') \mathcal{I}_{l\mu}(s, r') dx', \quad (3.15)$$

onde $r' \equiv r(x')$ e a função de Green $G_l(s; r, r')$ satisfaz

$$-\partial_x^2 G_l(s; r, r') + [s^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}(r)] G_l(s; r, r') = \delta(x - x'). \quad (3.16)$$

Seguindo um procedimento padrão [69], escrevemos a função de Green como

$$G_l(s; r, r') = \frac{1}{W_l(s)} f_l^-(s, r_<) f_l^+(s, r_>), \quad (3.17)$$

onde $f_l^\pm(s, r)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea

$$-\partial_x^2 f_l^\pm(s, r) + (s^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}) f_l^\pm(s, r) = 0. \quad (3.18)$$

Além disso, $r_< \equiv \min(r, r')$, $r_> \equiv \max(r, r')$ e o Wronskiano $W_l(s)$ é definido como

$$W_l(s) \equiv f_l^+(s, r) \partial_x f_l^-(s, r) - f_l^-(s, r) \partial_x f_l^+(s, r). \quad (3.19)$$

É fácil verificar que a expressão (3.17) satisfaz a Eq. (3.16) e que o Wronskiano (3.19) independe de x . Vale também apontar que $G_l(s; r, r')$ não é afetada pela

multiplicação de $f_l^\pm(s, r)$ por qualquer constante não nula, uma vez que, se $f_l^+ \rightarrow Af_l^+$ e $f_l^- \rightarrow Bf_l^-$, então $W_l \rightarrow ABW_l$, e a função de Green permanece inalterada.

As Eqs. (3.16) e (3.17), por si só, não determinam unicamente a função de Green relevante ao problema e, para que ela seja completamente especificada, devemos impor condições de contorno adequadas a $f_l^\pm(s, r)$. Para tanto, note que a Eq. (3.14), combinada com as Eqs. (3.15) e (3.17), requerem

$$f_l^+(s, r)|_{r \rightarrow +\infty} \sim e^{-sx} \quad (3.20)$$

para $\gamma \geq 0$. Além disso, a condição de que $\Phi_{(1)}$ seja regular na origem se traduz na exigência de que $\chi_{l\mu}(t, r)|_{r=0} = 0$ e, portanto,

$$f_l^-(s, r)|_{r=0} = 0. \quad (3.21)$$

A Eq. (3.17), junto com as Eqs. (3.20) e (3.21) determinam completamente a função de Green relevante. Vale notar que, para $|s|$ grande, a função de Green se comporta como

$$G_l(s; r, r') \sim e^{-sx} \sinh(sx_<)/s, \quad (3.22)$$

onde fizemos uso das Eqs. (3.20) e (3.21). Essa propriedade será útil posteriormente.

Com o conhecimento da função de Green $G_l(s; r, r')$ e das condições iniciais dadas por $\mathcal{I}_{l\mu}(s, r)$ [ver a Eq. (3.12)], a função $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ é determinada pela Eq. (3.15).

Transformada inversa de Laplace

Uma vez calculada a transformada $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$, a função $\chi_{l\mu}(t, r)$ é recuperada por meio da transformada inversa de Laplace (ver Apêndice B):

$$\chi_{l\mu}(t, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) ds, \quad (3.23)$$

onde $\kappa > \gamma$, e $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ é dada na Eq. (3.15). Então, $\Phi_{(1)}$ é imediatamente obtida pela Eq. (3.7).

Note que, por construção, o lado esquerdo da Eq. (3.23) é nulo se $t < 0$. De fato, podemos mostrar que isso é consistente com a integral do lado direito. Para isso, fechamos o contorno de integração com um semicírculo à direita da linha $\Re(s) = \kappa$, e notamos que a função $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ é analítica no interior do semicírculo. Então, temos

$$I \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) ds = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(\gamma + Te^{i\theta})t} \tilde{\chi}_{l\mu}(\gamma + Te^{i\theta}, r) e^{i\theta} d\theta. \quad (3.24)$$

Por outro lado, da Eq. (3.15), junto com as Eqs. (3.12) e (3.22), podemos mostrar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{l\mu}(Te^{i\theta}, r) = 0.$$

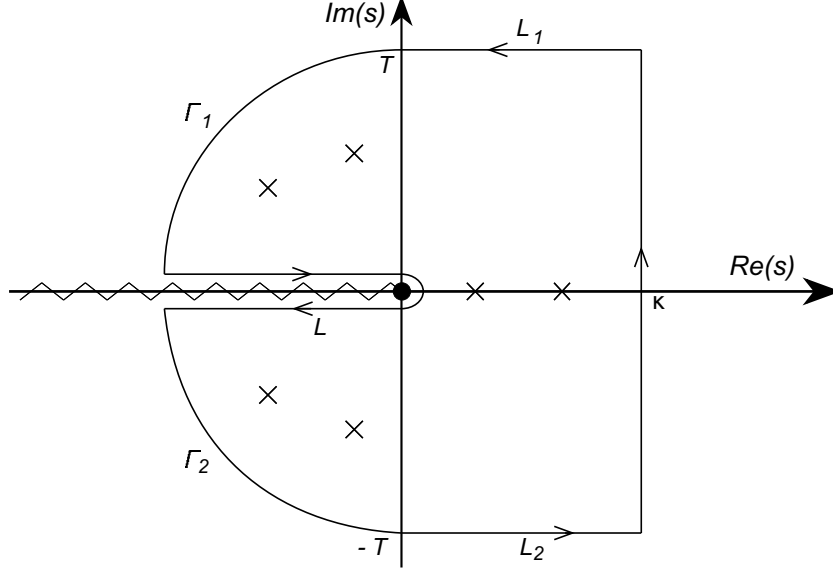


Figura 3.2: A estrutura de singularidades de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ no plano $s \in \mathbb{C}$ e o contorno de integração escolhido para calcularmos $\chi_{l\mu}(t, r)$ ($t > 0$) são exibidos. Na origem, há uma singularidade logarítmica, e o corte de ramificação correspondente foi colocado no eixo real negativo. Os polos de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ são representados pictoricamente pelos símbolos $\times$. Nosso maior interesse é naqueles com $s_0 > 0$, que estão associados com a presença de instabilidade.

Portanto, pelo Lema de Jordan[†], concluímos que $I = 0$ para $t < 0$.

Para $t > 0$, é conveniente estender o domínio de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ para o semiplano $\Re(s) \leq \gamma$, a fim de usarmos o teorema de resíduos para calcular a Eq. (3.23). A extensão de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ para o restante do plano complexo pode apresentar singularidades, incluindo polos que codificam a presença de instabilidade. As singularidades de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ na região $\Re(s) \leq \gamma$ vêm da função de Green $G_l(s; r, r')$, uma vez que $\mathcal{I}_{l\mu}(s, r)$ é uma função holomórfica de $s \in \mathbb{C}$ [veja a Eq. (3.15)]. Por sua vez, as singularidades de $G_l(s; r, r')$ podem advir tanto de singularidades de $f_l^\pm(s, r)$ quanto de zeros do Wronskiano [veja a Eq. (3.17)].

Existe uma literatura extensa a respeito das propriedades analíticas das soluções da Eq. (3.18) com $s \in \mathbb{C}$. Tais propriedades dependem da estrutura global do potencial efetivo $V_{\text{eff}}^{(l)}$ e das condições de contorno satisfeitas pelas soluções de interesse (para uma discussão rigorosa e detalhada a esse respeito, ver a Ref. [104]). Pode-se

[†] Lema de Jordan [69]: Se $\lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{i\theta}) = 0$ uniformemente no intervalo $|\theta| \leq \pi/2$, então, se $a > 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(Re^{i\theta}) e^{-aRe^{i\theta}} d\theta = 0.$$

mostrar que: se f é uma solução de uma equação diferencial ordinária que contém uma função analítica de um parâmetro k , e se f é definida por meio de condições de contorno independentes de k , então f é uma função analítica de k [113, 104]. Portanto, a função $f_l^-(s, r)$ é uma função analítica de s [ver Eqs. (3.18) e (3.21)]. Por outro lado, as propriedades analíticas de $f_l^+(s, r)$ dependem essencialmente do comportamento assintótico do potencial efetivo (3.9). Conforme discutiremos em mais detalhes abaixo, para o potencial efetivo associado com objetos compactos, $f_l^+(s, r)$ possuirá uma singularidade logarítmica em $s = 0$ [104, 31]. Além disso, os zeros do Wronskiano, $W_l(s_0) = 0$, dão origem a polos de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ em $s = s_0$. Para esses valores de s , $f_l^-(s_0, r)$ e $f_l^+(s_0, r)$ são funções linearmente dependentes e, sem perda de generalidade, podemos tomar $f_l^\pm(s_0, r) \equiv f_l(s_0, r)$. A Fig. 3.2 ilustra as singularidades de $\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)$ no plano $s \in \mathbb{C}$.

Conhecendo as singularidades da função de Green, podemos então calcular a Eq. (3.23) para $t > 0$ por meio do teorema de resíduos com o contorno de integração exibido na Fig. 3.2:

$$\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) ds = 2\pi i \sum_{\text{polos}} \text{Res}[e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)] - \int_{L_1 \Gamma_1 L \Gamma_2 L_2} e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) ds. \quad (3.25)$$

Então, usando a Eq. (3.25) na Eq. (3.23), obtemos

$$\chi_{l\mu}(t, r) = \sum_{\text{polos}} c_{l\mu}(s_0) e^{s_0 t} f_l(s_0, r) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1 \Gamma_1 L \Gamma_2 L_2} e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) ds, \quad (3.26)$$

onde

$$c_{l\mu}(s_0) \equiv \frac{1}{dW_l/ds|_{s=s_0}} \int_0^{+\infty} f_l(s_0, r') \mathcal{I}_{l\mu}(s_0, r') dx'. \quad (3.27)$$

No procedimento acima, nós decomposemos a integral original em uma soma de resíduos, uma integral (em L) que circunda o corte de ramificação e integrais de linha ($\Gamma_{1,2}$, $L_{1,2}$) em que tomamos o limite $|s| \rightarrow \infty$. Observa-se que cada um desses diferentes termos contribui maximalmente para o sinal em um intervalo temporal específico; portanto, podemos atribuir uma interpretação física particular a cada um deles, como discutiremos brevemente abaixo. O procedimento acima, além de facilitar os cálculos, é interessante por permitir analisar separadamente essas contribuições.

- **Integral em Γ_1 e Γ_2 :** A contribuição nos quartos de círculo Γ_1 e Γ_2 , quando $|s| \rightarrow \infty$, em geral não se anula. Fisicamente, a integral nesses trechos está relacionada com a propagação direta da perturbação ao observador, contribuindo para o sinal inicial [32, 105]. Para vermos que esse é o caso, note que,

para $|s| \rightarrow \infty$ ($\Re(s) < 0$) e supondo $x > x'$, temos

$$\int_{\Gamma_{1,2}} e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) ds \sim \int_{\Gamma_{1,2}} \frac{ds}{s} \int_0^\infty dx' e^{s(t-x-x')} \mathcal{I}_{l\mu}(s, r').$$

Portanto, a contribuição desse termo é importante apenas para $t < x + x'$, se anulando em seguida.

Vale notar também que, na ausência de um potencial espalhador, a Eq. (3.8) tem como solução $\chi_+(t - x) + \chi_-(t + x)$, ou seja, uma perturbação inicial se propaga ao longo do cone de luz. Nesse caso, a função de Green é regular em todo o plano $s \in \mathbb{C}$ e é a integral no semicírculo formado por Γ_1 e Γ_2 que descreve a propagação do sinal ao observador, o que está de acordo com a interpretação acima no caso de um potencial não nulo (ver também as Figs. 3.3 e 3.4).

- **Integral em L :** Como afirmamos anteriormente, uma singularidade logarítmica de $f_l^+(s, r)$ em $s = 0$ é característica na presença de potenciais efetivos associados a objetos compactos. De fato, as propriedades analíticas de $f_l^+(s, r)$, que é definida pelas Eqs. (3.18) e (3.20), dependem essencialmente do comportamento assintótico do potencial efetivo. Se, para $x \rightarrow \infty$, o potencial efetivo preserva apenas a barreira centrífuga, $V_{\text{eff}}^{(l)} \stackrel{x \rightarrow \infty}{\sim} l(l+1)/x^2$, onde $l \in \mathbb{N}$, então $f_l^+(s, r)$ não apresenta singularidades [104]. Se, além do termo centrífugo, o potencial $V_{\text{eff}}^{(l)}$ possui uma componente adicional que decai suficientemente rápido assintoticamente, o mesmo é verdade[‡]. Porém, se $V_{\text{eff}}^{(l)}$ possui um termo adicional que vai a zero polinomialmente quando $x \rightarrow \infty$, então haverá uma singularidade logarítmica em $s = 0$ [§]. Esse é o caso do potencial efetivo associado a objetos compactos esfericamente simétricos, uma vez que, fora do corpo massivo, a métrica espaço-temporal é a de Schwarzschild e o potencial é dado pela Eq. (2.64).

A integral que circunda o corte de ramificação contribui para o sinal inicial e também está relacionada à cauda que caracteriza o sinal que alcança o observador em tempos tardios (na ausência de instabilidade). Para uma discussão detalhada a respeito dessa componente, ver as Refs. [30, 31] para o caso de po-

[‡]Como mostrado na Ref. [104], se $V_{\text{eff}}^{(l)} = l(l+1)/x^2 + \bar{V}(x)$ e $\bar{V} \stackrel{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\lambda x}$, $f_l^+(s, r)$ possuirá polos na semirreta $s < 0$. Se $\bar{V}(x)$ vai a zero mais rápido que qualquer exponencial, então $f_l^+(s, r)$ é analítica como função de $s \in \mathbb{C}$.

[§]Para campos massivos, a condição de contorno (3.20) é substituída por $f_l^+(s, r)|_{r \rightarrow \infty} \sim \exp(-\sqrt{s^2 + \tilde{m}^2} x)$ e a singularidade logarítmica em $s = 0$ é substituída por dois pontos de ramificação em $s = \pm m$ (ver, por exemplo, a Ref. [85]).

tenciais gerais e [90, 28] (e referências aí contidas) para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild (ver também as Figs. 3.3 e 3.4).

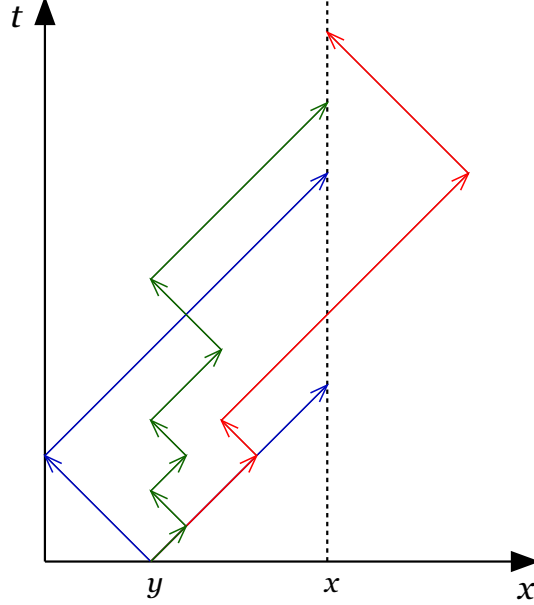


Figura 3.3: Diagrama espaço-temporal ilustrando *heuristicamente* as diferentes contribuições para a função de Green na ausência de instabilidade [31]. A perturbação inicial está centrada em y e vemos sua evolução até o observador, localizado em x . A ação do potencial efetivo é ilustrada pelos múltiplos espalhamentos. As linhas azuis representam a propagação direta, sem espalhamento pelo potencial: parte da onda vai diretamente ao observador e parte é refletida na origem e chega ao ponto de observação em um tempo posterior (essa é uma contribuição preferencial das integrais em Γ_1 e Γ_2). As linhas verdes correspondem a múltiplas reflexões no potencial, e estão associadas aos modos quasinormais do sistema. As linhas vermelhas indicam o espalhamento da onda pela cauda do potencial, e estão associadas à integral ao longo do corte de ramificação.

- **Integral em L_1 e L_2 :** As contribuições em L_1 e L_2 aparecem como consequência da existência de polos com $\Re(s_0) > 0$, e se anulam, como vemos da seguinte forma. Inserindo as Eqs. (3.12) e (3.22) na Eq. (3.15), e supondo $x > x'$, ficamos com

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \pm\infty} |\tilde{\chi}_{l\mu}(a + iT, r)| &\leq \lim_{T \rightarrow \pm\infty} e^{-ax} \left| \int_0^\infty \sinh[(a + iT)x'] \chi_{l\mu}(0, r') dx' \right| \\ &+ \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-ax}}{|T|} \left| \int_0^\infty \sinh[(a + iT)x'] \partial_t \chi_{l\mu}(0, r') dx' \right|, \end{aligned}$$

onde $0 \leq a \leq \kappa$. No limite $T \equiv \Im(s) \rightarrow \pm\infty$, o segundo termo vai para zero com $1/|T|$, e o primeiro termo se anula como resultado das rápidas oscilações do integrando nesse limite. O mesmo raciocínio se aplica para $x < x'$. Portanto, temos que

$$\left| \int_{L_1} e^{st} \tilde{\chi}_{l\mu}(s, r) ds \right| \leq \kappa e^{\kappa t} \max_{L_1} \{ |\tilde{\chi}_{l\mu}(s, r)| \} \xrightarrow{T \rightarrow \pm\infty} 0$$

e semelhantemente para L_2 .

- **Polos com $\Re(s_0) < 0$:** Polos com $\Re(s_0) < 0$ estão associados a *modos quasinormais*[¶] estáveis, que oscilam e decrescem exponencialmente no tempo (para revisões sobre modos quasinormais de sistemas gravitacionais, ver as Refs. [83, 105, 16]). Usualmente, modos quasinormais são definidos como soluções com condição de contorno $\sim e^{-i\omega(t-x)}$ para $x \rightarrow +\infty$, ou seja, somente ondas saindo do domínio em estudo, e “frequência complexa”, $\omega \in \mathbb{C}$. Aqui, chamaremos genericamente de modos quasinormais as contribuições associadas a polos da função de Green. Polos com $\Re(s_0) < 0$ sempre aparecem em pares complexo-conjugados, $s_0 \rightarrow \Re(s_0) \pm i\Im(s_0)$ (ver Fig. 3.2), o que é uma decorrência da hipótese de um campo real. Note também que, apesar do comportamento assintótico exibido por $f_l^+(s_0, r)$ na Eq. (3.20) para $\Re(s_0) < 0$, $\chi_{l\mu}(t, r)$ será bem comportada no infinito espacial devido à hipótese de condições iniciais de suporte compacto^{||}.

Na Fig. 3.3, mostramos uma ilustração heurística da interpretação física das diferentes contribuições para a função de Green, na ausência de instabilidade. Na Fig. 3.4, mostramos o resultado da evolução numérica da Eq. (3.8) para um certo potencial, para o qual não há instabilidade.

[¶]Assim como sistemas fechados (como uma corda com extremidades fixas) possuem modos naturais de vibração, os *modos normais* do sistema, sistemas abertos possuem modos característicos de oscilação, mas cuja amplitude decresce no tempo como resultado da dissipação das perturbações para o infinito. Tais modos são ditos “quasinormais” por serem descritos por frequências complexas, cuja parte real descreve a oscilação e a parte imaginária, o amortecimento do modo. Para um modelo mecânico que ilustra bem a natureza dos modos quasinormais, ver a Ref. [84]. Modos quasinormais de sistemas gravitacionais são extremamente estudados, uma vez que suas frequências características dependem essencialmente das propriedades do potencial espalhador e sua observação (por exemplo, no sinal de ondas gravitacionais) pode fornecer informações importantes sobre o espaço-tempo de fundo. Infelizmente, está fora do escopo desta Tese uma revisão abrangente sobre essa rica literatura.

^{||}Ver a Ref. [81] para uma prova formal de que, no espaço-tempo de Schwarzschild, qualquer perturbação permanece limitada apesar do comportamento dos modos quasinormais correspondentes no infinito espacial.

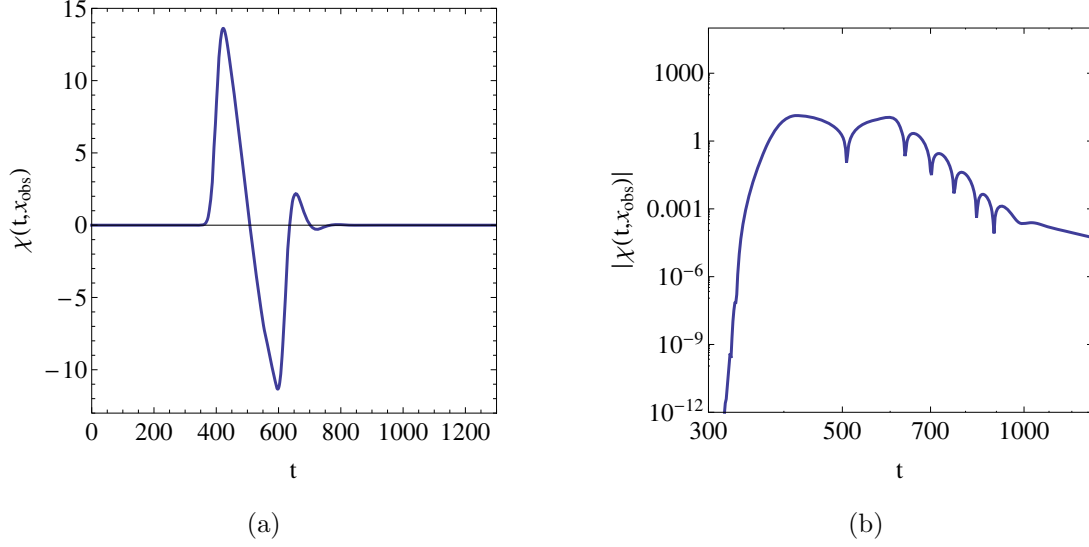


Figura 3.4: Ilustração da dependência temporal de (a) $\chi_{l\mu}(t, x_{\text{obs}})$ e (b) $|\chi_{l\mu}(t, x_{\text{obs}})|$ na ausência de instabilidade, para um potencial fictício. Aqui, evoluímos numericamente a Eq. (3.8) para um potencial efetivo que, se $x > x_c$, simula o de Schwarzschild, $V_{\text{eff}}^{(l)} = l(l+1)/x^2 + \log(x)/x^3$ e que, se $x \leq x_c$, é dado por [31]: $V_{\text{eff}}^{(l)} = 2l(l+1)/(x^2 + x_c^2) + 2 \log[(x + x_c)/2]/(x^3 + x_c^3)$. Em $t = 0$, impomos as condições iniciais $\chi_{l\mu}(0, x) = 0$ e $\partial_t \chi_{l\mu}(0, x) = \exp[-(x - x_0)^2/\eta^2]$. Especificamente, tomamos $l = 1$, $x_c = 50$, assumimos a perturbação inicial centrada em $x_0 = 100$, com largura $\eta = 20$, e representamos o sinal observado em $x_{\text{obs}} = 500$ como função do tempo. Em (a), vemos dois picos maiores, correspondentes ao sinal que se propaga diretamente ao ponto de observação e àquele que é refletido e invertido na origem, chegando ao observador depois de um tempo $2x_0$. Em (b), representamos $|\chi_{l\mu}(t, x_{\text{obs}})|$ em escala logarítmica, em função de t , e fica clara a oscilação e o decaimento exponencial característicos dos modos quasinormais do sistema. Para tempos muito avançados, o sinal é caracterizado por uma cauda polinomial. Ver, por exemplo, a Ref. [8] para um estudo numérico da evolução de perturbações no espaço-tempo de Schwarzschild, que esclarece o papel das diferentes contribuições da função de Green.

- **Polos com $\Re(s_0) > 0$:** Finalmente, chegamos aos polos com $\Re(s_0) > 0$, associados a modos quasinormais instáveis, que impõem um crescimento exponencial no tempo a $\chi_{l\mu}(t, r)$. A presença desses modos caracteriza a instabilidade do sistema, e sua contribuição oblitera as demais na Eq. (3.26), de modo que, para t suficientemente grande,

$$\chi_{l\mu}(t, r) \sim c_{l\mu}(\bar{s}_0) e^{\bar{s}_0 t} f_l(\bar{s}_0, r) [1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon t})], \quad (3.28)$$

onde ϵ é uma constante positiva e denotamos por $\bar{s}_0$ o polo com maior valor de $\Re(s_0)$. A parte radial de $\chi_{l\mu}(t, r)$ é determinada por $f_l(s_0, r)$, que satisfaz a Eq. (3.18) e condições de contorno (3.20) e (3.21). Com essas condições de contorno, o operador $-d^2/dx^2 + V_{\text{eff}}^{(l)}(x)$ é Hermitiano, e concluímos que modos quasinormais instáveis possuem $\Im(s_0) = 0$ (ver a Fig. 3.2).

Inserindo a Eq. (3.28) na Eq. (3.7), ficamos com

$$\Phi_{(1)} \sim - \left[\int_0^{+\infty} f_0(\bar{s}_0, r') \mathcal{I}_{00}(\bar{s}_0, r') dx' \right] \frac{e^{\bar{s}_0 t}}{4\sqrt{\pi\bar{s}_0}} \frac{f_0(\bar{s}_0, r)}{r} [1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon t})], \quad (3.29)$$

onde lançamos mão do fato de que o modo com maior valor de $\Re(s_0)$ está associado aos números quânticos $l = \mu = 0$. Como já discutimos antes, isso ocorre pois a barreira centrífuga, $l(l+1)/r^2$, dá uma contribuição positivo-definida para o potencial efetivo, de modo que, quando $l = 0$, o potencial efetivo é mais “profundo” e acomoda estados ligados com maior valor de s_0^2 . Além disso, na Eq. (3.29), usamos que $dW_l/ds|_{s=\bar{s}_0} = -2\bar{s}_0$ e que podemos impor a condição de normalização

$$\int_0^{+\infty} f_l^2(\bar{s}_0, r) dx = 1, \quad (3.30)$$

uma vez que $f_l^\pm(s, r)$ podem ser reescaladas arbitrariamente. A expressão para a derivada do Wronskiano pode ser obtida pela adaptação de um argumento na Ref. [32] para polos reais positivos: primeiramente, usamos as Eqs. (3.18) e (3.30) para escrever

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{s \rightarrow \bar{s}_0} \int_0^{X \rightarrow \infty} f_l^-(\bar{s}_0, r) f_l^+(s, r) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow \bar{s}_0} \frac{[f_l^+(s, r) \partial_x f_l^-(\bar{s}_0, r) - f_l^-(\bar{s}_0, r) \partial_x f_l^+(s, r)]_{r=0}}{s^2 - \bar{s}_0^2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde já levamos em conta que o limite superior da integração se anula, como podemos ver usando $\partial_x f_l^+(s, r) \approx -s f_l^+(s, r)$ para X suficientemente grande [ver a Eq. (3.20)] e o fato de que $f_l(\bar{s}_0, r) = f_l^\pm(\bar{s}_0, r) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$. Então, fazendo a mudança $\bar{s}_0 \rightarrow s$ no

numerador da Eq. (3.31) para identificá-lo com o Wronskiano e usando a regra de L'Hospital, obtemos $dW_l/ds|_{s=\bar{s}_0} = -2\bar{s}_0$.

Portanto, vimos que a instabilidade do campo é caracterizada pela existência de soluções da Eq. (3.18) com $s > 0$ e satisfazendo ambas as condições de fronteira (3.20) e (3.21). Tais modos quasinormais instáveis podem ser vistos como polos da função de Green (3.17) associados a zeros do Wronskiano. A Eq. (3.29) então mostra como uma perturbação inicial — definida pelo termo (3.12) — evolui na presença de instabilidade.

Para referência posterior, note que

$$\Phi_{(1)}^2 \sim \left[\int_0^{+\infty} f_0(\bar{s}_0, r') \mathcal{I}_{00}(\bar{s}_0, r') dx' \right]^2 \frac{e^{2\bar{s}_0 t}}{16\pi \bar{s}_0^2} \left[\frac{f_0(\bar{s}_0, r)}{r} \right]^2 [1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon t})]. \quad (3.32)$$

3.2 Relação entre o tratamento clássico e quântico da instabilidade

No Cap. 2, vimos que a presença de instabilidade é caracterizada pela existência de soluções da Eq. (2.47) com condição de contorno (2.54) na origem e normalizadas de acordo com a Eq. (2.52), a qual impõe a condição de contorno adicional (2.65). Esse é exatamente o mesmo critério encontrado na análise clássica, se identificarmos $\psi_\Omega(r)$ e $f_l(s_0, r)$ para $\Omega = s_0$, o que é possível já que satisfazem a mesma equação diferencial [ver Eqs. (2.47) e (3.18)] com condições de contorno idênticas e normalizações compatíveis. Portanto, as *condições* que caracterizam a instabilidade são as mesmas quântica ou classicamente, e a principal diferença está na *manifestação* da instabilidade.

De fato, no tratamento quântico do Cap. 2, o campo foi definido em um estado de vácuo adequado**, de forma que $\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi} | 0_{\text{in}} \rangle = 0$. Vimos que a instabilidade se manifesta por meio do crescimento exponencial das flutuações de vácuo, ou seja, de $\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}^2 | 0_{\text{in}} \rangle$, conforme ditado pela Eq. (2.59). Por outro lado, no contexto clássico, precisamos postular que, em um certo instante, digamos $t = 0$, um agente externo retira o campo $\Phi(t, \mathbf{x})$ de seu estado inicial de equilíbrio, $\Phi(t, \mathbf{x}) = 0$. A perturbação $\Phi_{(1)}$ então evolui de acordo com a Eq. (3.29). Portanto, classicamente a evolução do campo escalar depende da escolha das condições iniciais, enquanto que, no caso quântico, a instabilidade é acionada por flutuações de vácuo que dependem essencialmente da escolha do estado quântico do campo.

Vale notar que, na abordagem quântica, tanto soluções exponencialmente crescentes quanto soluções exponencialmente decrescentes aparecem na expansão do

**No Cap. 2, assumimos o estado de vácuo $|0_{\text{in}}\rangle$, o estado sem conteúdo de partículas para observadores estacionários no passado assintótico.

campo $\hat{\Phi}$ [ver as Eqs. (2.43) e (2.45)], ao passo que na análise clássica apenas modos exponencialmente crescentes entram na expansão de $\Phi_{(1)}$. Isso ocorre uma vez que no caso quântico os modos normais são obtidos em um espaço-tempo de fundo estático, enquanto que no caso clássico essa simetria é quebrada pela escolha de um instante particular, $t = 0$, para se começar a evolução. É claro que essa diferença nos tratamentos escolhidos não muda a conclusão final sobre a instabilidade.

A fim de compararmos os observáveis $\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}^2 | 0_{\text{in}} \rangle$ e $\Phi_{(1)}^2$, notemos primeiro que eles diferem apenas por um fator multiplicativo:

$$\frac{\Phi_{(1)}^2}{\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}^2 | 0_{\text{in}} \rangle} = \frac{1}{2\hbar\kappa\bar{s}_0} \left[\int_0^{+\infty} f_0(\bar{s}_0, r') \mathcal{I}_{00}(\bar{s}_0, r') dx' \right]^2, \quad (3.33)$$

onde fica claro o papel das condições iniciais na evolução clássica [representadas por $\mathcal{I}_{00}(\bar{s}_0, r)$] e da escolha do estado do campo na abordagem quântica (que está codificada no fator κ).

Vamos então supor o espaço-tempo de uma estrela relativística com raio $r = R_s$ e vamos escolher condições iniciais típicas, como

$$\chi_{00}(t, r)|_{t=0} = A\Theta(R_s - r), \quad \partial_t \chi_{00}(t, r)|_{t=0} = 0,$$

onde notamos que a amplitude A da perturbação inicial tem dimensões de distância em unidades em que $c = G = 1$ [ver, por exemplo, a Eq. (3.7)]. Nesse caso, a Eq. (3.33) se torna

$$\frac{\Phi_{(1)}^2}{\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}^2 | 0_{\text{in}} \rangle} = \frac{A^2 \bar{s}_0}{2\hbar\kappa} \left[\int_0^{x(R_s)} f_0(\bar{s}_0, r') dx' \right]^2. \quad (3.34)$$

Finalmente, usando (i) a Eq. (3.30), (ii) o fato de que $f_0(\bar{s}_0, r) \sim 1/R_s^{1/2}$, já que $f_0(\bar{s}_0, r)$ dá uma contribuição desprezível para a Eq. (3.30) se $r \gtrsim R_s \sim x(R_s)$, e (iii) $R_s^{-2} \sim |V_{\text{eff}}^{(l)}| \sim \bar{s}_0^2$, podemos escrever a Eq. (3.34) como

$$\frac{\Phi_{(1)}^2}{\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}^2 | 0_{\text{in}} \rangle} \sim \frac{A^2}{2\hbar}. \quad (3.35)$$

A condição (iii) vem da Eq. (3.18), se exigimos que $|V_{\text{eff}}^{(l)}|$ seja ao menos da ordem de R_s^{-2} para tornar o potencial “fundo” o suficiente para acomodar estados ligados. Por outro lado, assumindo a existência de estados ligados, o valor de $\bar{s}_0^2$ a eles associado é tipicamente da ordem de $|V_{\text{eff}}^{(l)}|$.

A Eq. (3.35) mostra como o fator $\hbar$ pode ser introduzido em $\Phi_{(1)}$ por uma escolha adequada da magnitude da amplitude inicial como $|A| \sim \hbar^{1/2}$. Portanto, perturbações clássicas com $|A| \sim \hbar^{1/2}$ de certa forma simulam flutuações quânticas.

Conforme discutiremos em mais detalhes no Cap. 6, no tratamento clássico, logo que a instabilidade é acionada, a aproximação linear implícita na Eq. (3.6) deixa de ser válida e faz-se necessário evoluir o sistema completo das equações de Einstein, Eq. (3.3), e equações de campo (3.5). Porém, se $|A| \sim \hbar^{1/2}$, um tratamento quântico da evolução do campo parece mais apropriado. Nesse caso, temos que, se as flutuações do tensor de energia-momento forem “razoavelmente” pequenas [86], o espaço-tempo responderá de acordo com as equações semiclássicas de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle 0 | \hat{T}_{\mu\nu} | 0 \rangle. \quad (3.36)$$

Como já observamos anteriormente, a evolução do sistema quântico com base nas Eqs. (3.5) e (3.36) é uma tarefa altamente não trivial. Contudo, para sistemas instáveis, é razoável supor que, quando as flutuações de vácuo se tornam grandes o suficiente, elas devem de alguma forma “colapsar” em perturbações clássicas (ver, por exemplo, a Ref. [20]), em um processo análogo à formação das anisotropias da radiação cósmica de fundo a partir de flutuações de vácuo primordiais [115]. Depois disso, a evolução do sistema será bem descrita pelas equações clássicas de movimento. No Cap. 6, voltaremos a discutir essas questões ligadas ao estado final da instabilidade, apontando algumas das sutilezas conceituais envolvidas na transição entre os regimes quântico e clássico.

Capítulo 4

Despertando o vácuo no espaço-tempo de cascas esferoidais

Nos Capítulos anteriores, estudamos quântica e classicamente a estabilidade linear de campos escalares não minimamente acoplados em certos espaços-tempos curvos como o de estrelas relativísticas. Em particular, vimos no Cap. 2 que, a princípio, a instabilidade experimentada por certas classes de campos poderia ser usada juntamente com dados astrofísicos para obtermos informações sobre a existência (ou inexistência) de tais campos na Natureza. Portanto, é interessante sabermos como o espaço de parâmetros que caracteriza a instabilidade (ver Fig. 2.2 ou Refs. [93, 110]) é alterado quando hipóteses sobre o modelo estelar, como simetria esférica e estaticidade, são relaxadas. Este será o objeto de estudo deste e do próximo Capítulo.

Neste Capítulo, nosso objetivo é estudar a estabilidade de campos escalares não minimamente acoplados no espaço-tempo de objetos compactos estáticos, mas sem simetria esférica. Em geral, estrelas relativísticas estáticas são bem descritas por um fluido perfeito com alguma equação de estado, e tais modelos necessariamente têm simetria esférica*. Ainda assim, pequenos desvios da hipótese de fluido perfeito e de simetria esférica podem estar presentes em estrelas relativísticas. Por exemplo, estrelas de nêutrons devem apresentar uma crosta sólida com alguma elasticidade, que pode lhes conferir uma pequena elipticidade (ver, e.g., as Refs. [33, 91] para limites teóricos e observacionais a esse respeito). Além disso, para sistemas com rotação ou não isolados, desvios da simetria esférica em geral estão presentes e, em um regime de densidades e pressões menores, sistemas astrofísicos estáticos sem simetria esférica são abundantes.

Portanto, certamente o estudo de objetos compactos sem simetria esférica tem interesse físico; por outro lado, a sua descrição em Relatividade Geral se depara com

*Que fluidos perfeitos autogravitantes estáticos têm simetria esférica foi provado dentro da teoria Newtoniana e é uma conjectura muito plausível em Relatividade Geral [96, 14, 97], embora não tenha sido provada com toda a generalidade possível.

algumas dificuldades e sutilezas. Métricas estáticas sem simetria esférica podem ser construídas em Relatividade Geral levando-se em conta, por exemplo, a elasticidade da matéria [7] ou por meio da junção de uma solução de vácuo conhecida das equações de Einstein (ver, e.g., a Ref. [116]) com uma solução interior adequada (ver, e.g., a Ref. [72]). No entanto, o problema da construção de tais soluções é, por si só, complexo. Portanto, optaremos por adotar aqui um modelo paradigmático e matematicamente mais simples de objetos compactos não esféricos: o de *cascas finas*. Como discutido no Apêndice C, cascas finas são obtidas a partir da junção de duas soluções das equações de Einstein ao longo de uma fronteira limitada. O modelo de cascas esferoidais estáticas apresentado na Sec. 4.1 nos permitirá explorar as consequências de desvios da simetria esférica sobre o espaço de parâmetros da instabilidade, ao mesmo tempo em que evita as complicações envolvidas, por exemplo, na escolha de uma métrica interior apropriada para objetos compactos não esféricos.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma. Na Sec. 4.1, seguimos em grande parte a Ref. [100] e apresentamos as propriedades gerais do espaço-tempo da casca, enfatizando as hipóteses que entram na construção da classe de espaços-tempos em que estaremos interessados. Na Sec. 4.2, que contém os resultados principais deste Capítulo, analisamos a estabilidade de campos escalares não minimamente acoplados nesses espaços-tempos e investigamos como o espaço de parâmetros da instabilidade muda na medida em que nos afastamos do limite esférico. A Sec. 4.3 é dedicada a discussões finais. Em particular, motivados pelo fato de que campos com acoplamento conforme são instáveis no espaço-tempo de certas cascas esféricas, comentamos brevemente sobre a estabilidade do campo eletromagnético em espaços-tempos estáticos e esféricos. Além disso, discutimos alguns aspectos do crescimento exponencial da densidade de energia do vácuo, no contexto de cascas esféricas.

Este Capítulo se baseia essencialmente na Ref. [94], publicada na revista *Physical Review D*.

4.1 Cascas esferoidais estáticas

Para construirmos um modelo de cascas estáticas não esféricas, precisamos combinar duas soluções de vácuo das equações de Einstein com essas propriedades, seguindo o procedimento descrito no Apêndice C. Para os nossos propósitos, será suficiente relaxarmos a condição de simetria esférica, mantendo, porém, a de simetria axial. A métrica mais geral estática e com simetria axial de vácuo pode ser escrita como [129]

$$ds^2 = -e^{2\lambda}dt^2 + e^{2(\nu-\lambda)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 e^{-2\lambda}d\varphi^2, \quad (4.1)$$

onde $\lambda = \lambda(\rho, z)$ e $\nu = \nu(\rho, z)$ satisfazem

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \rho} = \rho \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (4.3)$$

e

$$\frac{\partial \nu}{\partial z} = 2\rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \lambda}{\partial z}. \quad (4.4)$$

Vamos denotar por $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ as porções do espaço-tempo no exterior e no interior da casca, respectivamente, e vamos supor que são descritas pelo elemento de linha (4.1) e cobertas por coordenadas (t, ρ, z, φ) e $(\bar{t}, \bar{\rho}, \bar{z}, \bar{\varphi})$. Vamos denotar por $\mathcal{S}$ a fronteira tridimensional tipo tempo entre $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$, que corresponde ao tubo de mundo da casca. Note que, usando as simetrias do espaço-tempo, podemos escolher as coordenadas temporal e angular em $\mathcal{S}$ de forma que $\bar{t} = t$ e $\bar{\varphi} = \varphi$. Assim, denotaremos as coordenadas internas simplesmente por $(t, \bar{\rho}, \bar{z}, \varphi)$.

Vamos então, seguindo a Ref. [100], fazer algumas hipóteses simplificadoras a fim de obtermos uma classe de cascas descrita por um número mínimo de parâmetros, mas suficientemente rica para os nossos propósitos. Primeiramente, vamos assumir que a superfície $\mathcal{S}$ de junção das métricas é uma superfície de $\lambda = \text{constante}$:

$$\lambda(\rho, z)|_{\mathcal{S}} = \lambda(\bar{\rho}, \bar{z})|_{\mathcal{S}} = \lambda_0 = \text{const}, \quad (4.5)$$

onde a primeira igualdade é consequência da condição de continuidade das métricas induzidas (ver o Apêndice C) se notamos que $\mathcal{S}$ deve ser descrita por vínculos do tipo $f_+(\rho, z) = 0$ e $f_-(\bar{\rho}, \bar{z}) = 0$. A escolha (4.5) introduz uma simplificação significativa na construção do espaço-tempo, uma vez que faz com que a região $\mathcal{V}^-$ seja plana, com elemento de linha

$$ds_-^2 = -e^{2\lambda_0} dt^2 + e^{-2\lambda_0} (d\bar{\rho}^2 + d\bar{z}^2 + \bar{\rho}^2 d\varphi^2). \quad (4.6)$$

Isso pode ser visto da seguinte forma. Primeiro, notemos que $\lambda(\bar{\rho}, \bar{z})$ é uma solução da equação de Laplace (4.2). Portanto, levando em conta a Eq. (4.5) e a propriedade de funções harmônicas de não possuírem máximos ou mínimos locais, segue que $\lambda = \lambda_0$ em todo $\mathcal{V}^-$. Por outro lado, das Eqs. (4.3) e (4.4), vemos que, se $\lambda(\bar{\rho}, \bar{z})$ é constante em $\mathcal{V}^-$, $\nu(\bar{\rho}, \bar{z})$ também o é. Uma vez que $\nu(\bar{\rho}, \bar{z})$ deve se anular sobre o eixo de simetria[†], concluímos que $\nu(\bar{\rho}, \bar{z}) = 0$ em $\mathcal{V}^-$ e o elemento de linha (4.1) se

[†]A condição $\nu(0, z) = 0$ é uma consequência da condição conhecida como *elementary flatness*, segundo a qual para todo círculo infinitesimal tipo espaço, a razão entre a circunferência e o raio deve ser igual a 2π . Em particular, se tomamos um círculo infinitesimal com z e t constantes no espaço-tempo descrito pela Eq. (4.1), essa razão é dada por $\int_0^{2\pi} d\varphi \delta \rho e^{-\lambda} / \int_0^{\delta \rho} e^{\nu-\lambda} d\rho$, que, no limite $\delta \rho \rightarrow 0$, se reduz a 2π quando $\nu(0, z) = 0$.

reduz a (4.6) no interior de $\mathcal{S}$.

A fim de analisarmos a métrica em $\mathcal{V}^+$ e impormos algumas simplificações adicionais, é conveniente realizar a mudança de coordenadas $\{\rho, z\} \rightarrow \{x, y\}$ definida por

$$\rho \equiv a(x^2 - 1)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2}, \quad z \equiv axy,$$

onde $x \in [1, \infty)$, $y \in [-1, 1]$, e $a = \text{const} > 0$. Em termos das coordenadas x e y a Eq. (4.2) é escrita como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 - 1) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - y^2) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.7)$$

ao passo que as Eqs. (4.3) e (4.4) se tornam

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2} \left[x(x^2 - 1) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 - x(1 - y^2) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 - 2y(x^2 - 1) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right], \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \left[y(x^2 - 1) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 - y(1 - y^2) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + 2x(x^2 - 1) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right]. \quad (4.9)$$

A solução mais geral da Eq. (4.7) que é regular em $y = \pm 1$ (o eixo de simetria) e bem comportada quando $x \rightarrow \infty$ (infinito espacial) é dada por

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} A_j Q_j(x) P_j(y), \quad A_j = \text{const}, \quad (4.10)$$

onde $P_j(z)$ e $Q_j(z)$ são as funções associadas de Legendre de ordem zero, de primeiro e segundo tipos, respectivamente [1]. Por simplicidade, vamos nos restringir à classe particular de cascas esferoidais obtidas ao impormos $A_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots$ na Eq. (4.10). Como resultado, temos

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad (4.11)$$

onde $\beta = -A_0 > 0$ desempenhará o papel de um parâmetro geométrico ligado à forma da casca. A solução correspondente para $\nu(x, y)$ pode ser obtida diretamente das Eqs. (4.8) e (4.9):

$$\nu = \frac{\beta^2}{2} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}. \quad (4.12)$$

Além disso, as Eqs. (4.5) e (4.11) implicam que a hipersuperfície $\mathcal{S}$ é determinada pelo vínculo

$$x = x_0 = \text{const} > 1. \quad (4.13)$$

Vale notar que a condição (4.5) combinada com a escolha $A_1 = A_2 = \dots = 0$ reduz a gama de formas e distribuições de energia-momento das cascas consideradas

aqui (ver, por exemplo, a Ref. [116] para espaços-tempos mais gerais). Ainda assim, essa classe de cascas esferoidais, estudada na Ref. [100], é suficientemente geral para os nossos propósitos.

Combinando esses resultados, a métrica em $\mathcal{V}^+$ pode ser escrita como

$$ds_+^2 = - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\beta dt^2 + a^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\beta \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right)^{\beta^2} (x^2-y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right) + a^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\beta (x^2-1)(1-y^2)d\varphi^2. \quad (4.14)$$

Note que, se $\beta = 1$, a Eq. (4.14) se reduz ao elemento de linha de Schwarzschild: por meio da transformação $x = r/M - 1$ e $y = \cos \theta$ e tomando $a = M$, recuperamos o elemento de linha nas coordenadas de Schwarzschild. A condição $x > 1$ corresponde à restrição $r > 2M$.

Por outro lado, em $\mathcal{V}^-$, a métrica (4.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$ds_-^2 = - \left(\frac{x_0-1}{x_0+1} \right)^\beta dt^2 + a^2 \left(\frac{x_0+1}{x_0-1} \right)^\beta (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.15)$$

onde usamos que $\lambda_0 = -(\beta/2) \ln[(x_0+1)/(x_0-1)]$ e fizemos, para conveniência posterior, a mudança de coordenadas $\{\bar{\rho}, \bar{z}\} \rightarrow \{\tilde{r}, \theta\}$ tal que

$$\bar{\rho} \equiv a\tilde{r} \sin \theta, \quad \bar{z} \equiv a\tilde{r} \cos \theta.$$

Condição de junção: continuidade da métrica induzida

Para que a métrica construída a partir da união de $g_{\mu\nu}^+$, Eq. (4.14), e $g_{\mu\nu}^-$, Eq. (4.15), possa ser uma solução das equações de Einstein, devemos impor a condição de junção descrita no Apêndice C: as métricas induzidas em $\mathcal{S}$ a partir de $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ devem ser iguais. É conveniente cobrir a hipersuperfície $\mathcal{S}$ com coordenadas $\zeta^a = (t, y, \varphi)$, $a = 0, 2, 3$, uma vez que $\mathcal{S}$ é determinada por $x = x_0 = \text{const.}$ A condição de junção estabelece, então, uma relação entre as coordenadas internas $\tilde{r}, \theta$, e a coordenada y em $\mathcal{S}$.

Chamando $\tilde{r}|_{\mathcal{S}} = f(y)$ e $\cos \theta|_{\mathcal{S}} = g(y)$, temos

$$ds_-^2|_{\mathcal{S}} = - \left(\frac{x_0-1}{x_0+1} \right)^\beta dt^2 + a^2 \left(\frac{x_0+1}{x_0-1} \right)^\beta \left[\left(f'(y)^2 + f(y)^2 \frac{g'(y)^2}{1-g(y)^2} \right) dy^2 + f(y)^2 (1-g(y)^2) d\varphi^2 \right].$$

Portanto, igualando essa expressão com

$$ds_+^2|_{\mathcal{S}} = - \left(\frac{x_0-1}{x_0+1} \right)^\beta dt^2 + a^2 \left(\frac{x_0+1}{x_0-1} \right)^\beta \left(\frac{x_0^2-1}{x_0^2-y^2} \right)^{\beta^2} \left(\frac{x_0^2-y^2}{1-y^2} \right) dy^2 + a^2 \left(\frac{x_0+1}{x_0-1} \right)^\beta (x_0^2-1)(1-y^2)d\varphi^2,$$

obtemos as condições

$$f(y) = \left[\frac{(x_0^2 - 1)(1 - y^2)}{1 - g(y)^2} \right]^{1/2} \quad (4.16)$$

e

$$\frac{g'(y)(1 - y^2)}{1 - g(y)^2} = g(y)y + (1 - g(y)^2)^{1/2} \left[\left(\frac{x_0^2 - 1}{x_0^2 - y^2} \right)^{\beta^2 - 1} - y^2 \right]^{1/2}, \quad (4.17)$$

onde “ ’ ” $\equiv d/dy$. A função $g(y)$ é obtida pela integração numérica da Eq. (4.17) a partir da condição de contorno $g(0) = 0$, que é adotada por ser compatível com a solução $g(y) = y$ quando $\beta = 1$. Então, $f(y)$ pode ser obtida diretamente a partir da Eq. (4.16). Na Fig. 4.1, ilustramos o comportamento dessas funções.

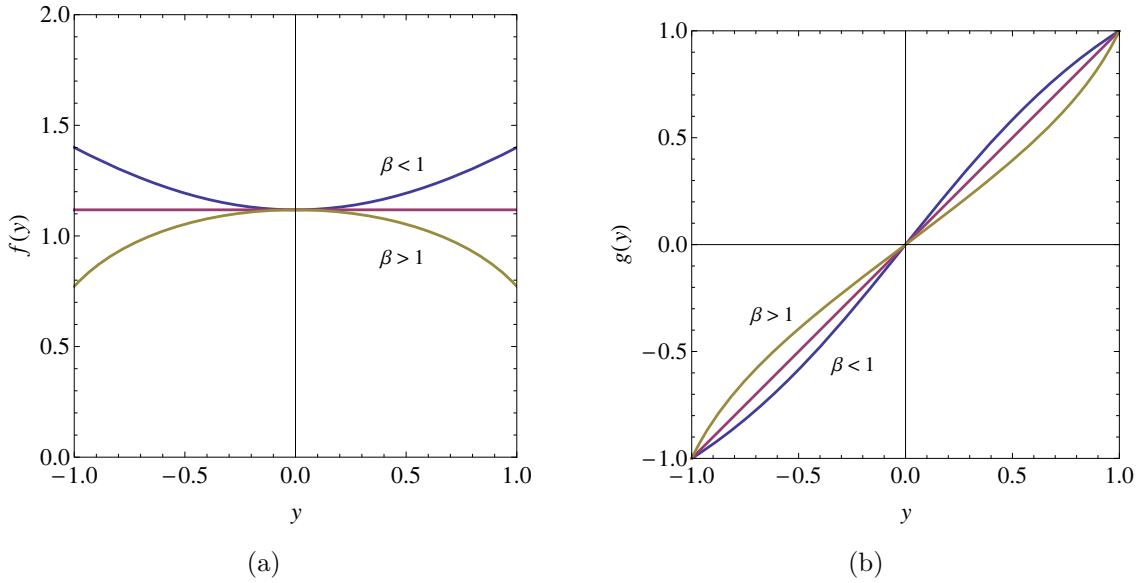


Figura 4.1: Funções (a) $f(y)$ e (b) $g(y)$ como função de y para $x_0 = 1.5$ e $\beta = 0.5$ (azul), 1 (magenta) e 1.4 (amarelo).

Note, da Eq. (4.17), que, para garantirmos que $g(y)$ seja real, devemos impor

$$\left(\frac{x_0^2 - 1}{x_0^2 - y^2} \right)^{\beta^2 - 1} - y^2 \geq 0.$$

Para $0 < \beta \leq 1$ essa desigualdade é sempre verificada (note que $-1 \leq y \leq 1$ e $x_0 > 1$). Porém, para $\beta > 1$, ela é satisfeita para todos os valores de y apenas se

$$x_0 \geq \beta. \quad (4.18)$$

Já vimos que o caso $\beta = 1$ corresponde ao limite esférico. Como veremos em seguida, os valores $0 < \beta < 1$ e $\beta > 1$ corresponderão a configurações prolatas e oblatas, respectivamente. Então, veremos que a condição (4.18), que é necessária para a junção das métricas em $\mathcal{S}$, coloca um limite sobre o quão oblatas as cascas descritas por este modelo poderão ser.

4.1.1 Propriedades geométricas da casca

Para evidenciarmos a dependência da forma da casca sobre os parâmetros β e x_0 , calculamos a razão

$$n \equiv \frac{L_{\text{equatorial}}}{L_{\text{meridional}}} = \frac{(1 - 1/x_0^2)^{(1-\beta^2)/2}}{{}_2F_1(1/2, (\beta^2 - 1)/2, 1; x_0^{-2})}, \quad (4.19)$$

onde $L_{\text{meridional}}$ e $L_{\text{equatorial}}$ são, respectivamente, o comprimento próprio meridional ($\varphi = \text{const}$) e o comprimento próprio equatorial ($y = 0$) da casca, descrita por $x = x_0$, e calculados em alguma seção $t = \text{const}$. Na Eq. (4.19), ${}_2F_1(a, b, c; z)$ denota a função hipergeométrica [1]. Como fica claro na Fig. 4.2, as cascas aqui descritas serão prolatas ($0 < n < 1$), esféricas ($n = 1$) e oblatas ($n > 1$) para $0 < \beta < 1$, $\beta = 1$ e $\beta > 1$, respectivamente. A restrição (4.18) implica que o maior valor de n obtido para o caso oblato ($\beta > 1$) é dado por

$$n_{\text{max}} \equiv \lim_{x_0=\beta \rightarrow \infty} n = e^{1/4}/I_0(1/4) \approx 1.3, \quad (4.20)$$

onde $I_\nu(z)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie. Esse limite, é claro, não deve ser visto como uma restrição geral a cascas oblatas arbitrárias, mas sim como uma consequência das hipóteses do modelo particular que adotamos aqui [ver a discussão abaixo da Eq. (4.13)]. Observe que não existe uma restrição semelhante para cascas prolatas, uma vez que n , dado na Eq. (4.19), pode assumir valores (positivos) arbitrariamente pequenos.

É conveniente também calcularmos neste ponto outra propriedade geométrica das seções $t = \text{const}$ de $\mathcal{S}$: sua área própria, como função de β e x_0 . Um cálculo direto mostra que

$$A = 4\pi x_0^2 a^2 \left(\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} \right)^\beta \left(1 - \frac{1}{x_0^2} \right)^{(\beta^2+1)/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{\beta^2 - 1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{x_0^2} \right). \quad (4.21)$$

Vale ressaltar algumas propriedades da quantidade A . Primeiramente, notemos que, para um certo valor de β , a área própria é mínima no limite $x_0 \rightarrow 1$ e aumenta em função de x_0 . Por exemplo, se $\beta = 1$, $A = 4\pi M^2(x_0 + 1)^2$, onde usamos que $a = M$ no caso esférico, como veremos na próxima seção. Portanto, o limite inferior da área de cascas esféricas é dado por $A \xrightarrow{x_0 \rightarrow 1} 16\pi M^2$, que corresponde ao limite em que o raio da casca tende ao raio de Schwarzschild. Já no caso prolato, $0 < \beta < 1$, temos $A \xrightarrow{x_0 \rightarrow 1} 0$: o limite $x_0 \rightarrow 1$ corresponde a uma vara infinitamente longa e fina, com área própria nula. Por sua vez, no caso oblato, a restrição (4.18) implica que o valor mínimo da área das cascas oblatas consideradas aqui é obtido quando $x_0 = \beta$ (o limite $x_0 \rightarrow 1$ não pode ser tomado nesse caso).

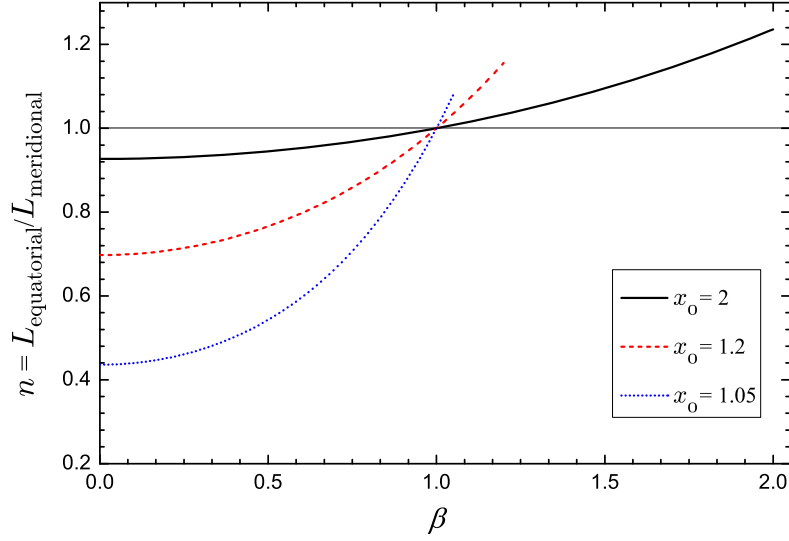


Figura 4.2: A razão $n \equiv L_{\text{equatorial}}/L_{\text{meridional}}$, Eq. (4.19), é representada como função de β para cascas localizadas em diferentes valores de $x_0 = \text{const.}$ Para $0 < \beta < 1$, $\beta = 1$ e $\beta > 1$, temos cascas prolatas ($0 < n < 1$), esféricas ($n = 1$) e oblatas ($n > 1$), respectivamente. O valor máximo de n , $n_{\text{max}} \approx 1.3$, corresponde a uma casca oblata obtida no limite $x = x_0 = \beta \rightarrow \infty$, em cujo caso o diâmetro equatorial é cerca de duas vezes maior que o polar. Cascas com $n \rightarrow 0$ correspondem a varas infinitamente finas e longas, obtidas para $0 < \beta < 1$ e no limite $x = x_0 \rightarrow 1$.

Por completeza, vamos verificar também o comportamento de A quando fixamos um certo valor de n , pois usaremos essa informação na construção dos gráficos na Sec. 4.2.2. Se $n = 1$, $n < 1$ e $n > 1$, o valor mínimo da área será respectivamente $A/16\pi M^2 = 1$, $A/16\pi M^2 < 1$ e $A/16\pi M^2 > 1$ [onde fizemos uso da relação $M = \beta a$, Eq. (4.31) abaixo]. Por exemplo, para $n = 0.25$, $n = 0.5$, $n = 0.75$ e $n = 0.85$, temos, respectivamente, $A_{\text{min}}/16\pi M^2 \approx 0.877, 0.971, 0.996, 0.999$. Para $n = 1.18$, $A_{\text{min}}/16\pi M^2 \approx 1.151$. Para $n = n_0 > 1$ fixo, há ainda um limite máximo para a área das cascas possíveis: se invertemos a Eq. (4.19) para obter $x_0(n_0, \beta)$, então a área A , como função de β satura em um valor máximo quando $\beta \rightarrow \infty$. Para $n = 1.18$, por exemplo, $A_{\text{max}}/16\pi M^2 \approx 1.534$.

4.1.2 Tensor de energia-momento e propriedades físicas

Uma vez estabelecidas as métricas no interior e no exterior de $\mathcal{S}$, Eqs. (4.15) e (4.14), o tensor de energia-momento da casca também é determinado, como descrito no Apêndice C:

$$T^{\mu\nu} = S^{ab} e_a^\mu e_b^\nu \delta(\ell), \quad (4.22)$$

onde ℓ é a distância própria ao longo de geodésicas que interceptam $\mathcal{S}$ ortogonalmente (de modo que $\ell < 0$, $\ell = 0$ e $\ell > 0$ dentro, sobre e fora de $\mathcal{S}$, respectivamente), $e_a^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial \zeta^a$ são as componentes dos vetores coordenados $\partial / \partial \zeta^a$ definidos em $\mathcal{S}$ (com $\{x^\mu\}$ sendo um sistema de coordenadas suave cobrindo uma vizinhança de $\mathcal{S}$) e

$$S^{ab} = -\frac{1}{8\pi}(\Delta K^{ab} - h^{ab}\Delta K) \quad (4.23)$$

é o tensor de energia-momento superficial da casca. Aqui, K_{ab} é a curvatura extrínseca, $K \equiv K_{ab}h^{ab}$, e $\Delta A = A^+ - A^-$ denota a descontinuidade de uma quantidade A através de $\mathcal{S}$. Portanto, a quantidade essencial que determina o tensor de energia-momento da casca é a descontinuidade do tensor de curvatura extrínseca, o qual é dado por $K_{ab}^\pm = \nabla_\nu n_\mu^\pm e_a^{\pm\mu} e_b^{\pm\nu}$, onde n^μ é o campo vetorial unitário normal à casca.

Em particular, em $\mathcal{V}^+$, temos $e_0^{+0} = e_2^{+2} = e_3^{+3} = 1$ e $e_a^{+\mu} = 0$ nos demais casos, além de

$$n_\mu^+ = a \left(\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - 1}{x_0^2 - y^2} \right)^{(\beta^2 - 1)/2} (0, 1, 0, 0). \quad (4.24)$$

Portanto, em $\mathcal{V}^+$, as componentes não nulas do tensor de curvatura extrínseca são

$$\begin{aligned} K_0^{+0} &= \frac{1}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{(\beta^2 - 1)/2} \frac{\beta}{x_0^2 - 1}, \\ K_2^{+2} &= \frac{1}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{(\beta^2 - 1)/2} \left(\frac{x_0 \beta^2 - \beta}{x_0^2 - 1} + \frac{x_0(1 - \beta^2)}{x_0^2 - y^2} \right), \\ K_3^{+3} &= \frac{1}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{(\beta^2 - 1)/2} \frac{x_0 - \beta}{x_0^2 - 1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, em $\mathcal{V}^-$, temos $e_0^{-0} = e_3^{-3} = 1$, $e_2^{-1} = f'(y)$, $e_2^{-2} = -g'(y)/\sqrt{1 - g(y)^2}$ e $e_a^{-\mu} = 0$ nos demais casos, além de

$$n_\mu^- = a \left(\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{g'(y)^2}{1 - g(y)^2} + \frac{f'(y)^2}{f(y)^2} \right)^{-1/2} \left(0, \frac{g'(y)}{\sqrt{1 - g(y)^2}}, f'(y), 0 \right). \quad (4.25)$$

Portanto, em $\mathcal{V}^-$, as componentes não nulas do tensor de curvatura extrínseca são

$$\begin{aligned} K_2^{-2} &= \frac{1}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{(\beta^2 - 1)/2} \left(1 + \frac{y^2(1 - \beta^2)}{x_0^2 - y^2} \right) \frac{1}{H(y)}, \\ K_3^{-3} &= \frac{1}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{(\beta^2 - 1)/2} \frac{H(y)}{x_0^2 - 1}, \end{aligned}$$

onde definimos

$$H(y) \equiv \left(\frac{x_0^2 - 1}{1 - y^2} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{x_0^2 - 1}{x_0^2 - y^2} \right)^{\beta^2 - 1} - y^2 \right]^{1/2}.$$

De posse dessas relações, um cálculo direto então leva a (ver também a Ref. [100])

$$8\pi S_0^0 = A(y)[B(y) + C(y) - 2\beta(x_0^2 - y^2)], \quad (4.26)$$

$$8\pi S_2^2 = A(y)C(y), \quad (4.27)$$

$$8\pi S_3^3 = A(y)B(y), \quad (4.28)$$

onde

$$\begin{aligned} A(y) &\equiv \frac{(x_0^2 - 1)^{-1}}{a(x_0^2 - y^2)} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{(\beta^2 - 1)/2}, \\ B(y) &\equiv \beta^2 x_0(1 - y^2) - U(y)^{-1}(x_0^2 - \beta^2 y^2)(x_0^2 - 1) + x_0(x_0^2 - 1), \\ C(y) &\equiv (x_0^2 - y^2)[x_0 - U(y)], \end{aligned}$$

e

$$U(y) \equiv \left(\frac{x_0^2 - 1}{1 - y^2} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{x_0^2 - 1}{x_0^2 - y^2} \right)^{\beta^2 - 1} - y^2 \right]^{1/2}. \quad (4.29)$$

As propriedades físicas da matéria que constitui a casca são descritas pelas Eqs. (4.26)-(4.28). Em particular, a partir do tensor de energia-momento da casca, podemos calcular sua massa gravitacional, dada por [135]

$$M = 2 \int_{\Sigma_t} \left(T^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} g^\mu{}_\nu T \right) \xi^\nu d\Sigma_\mu, \quad (4.30)$$

onde $\xi^\nu \equiv (\partial/\partial t)^\nu$ é um campo vetorial tipo tempo global, a integral é feita em uma superfície de Cauchy Σ_t com $t = \text{const}$ e $d\Sigma_\mu \equiv \bar{n}_\mu d\Sigma$ onde $\bar{n}^\mu$ é o campo vetorial unitário ortogonal a Σ_t e que aponta para o futuro. Usando a Eq. (4.22) combinada com as Eqs. (4.26)-(4.28), obtemos

$$M = \beta a. \quad (4.31)$$

Além disso, podemos verificar para que parâmetros x_0 e β a matéria que compõe a casca possui propriedades físicas “razoáveis”. Essa noção é codificada em *condições de energia* [135, 114], que expressam boas propriedades da matéria clássica. Em particular, a *condição de energia fraca* é que $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$ para qualquer vetor tipo tempo u^μ que aponta para o futuro, ou seja, a densidade de energia medida por qualquer observador deve ser não negativa. A *condição de energia forte* exige que $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})u^\mu u^\nu \geq 0$ para qualquer u^μ unitário tipo tempo que aponta para o futuro. Por fim, a *condição de energia dominante* exige que, para todo u^μ tipo tempo, direcionado para o futuro, $-T_{\mu\nu}u^\mu$ deve ser um vetor tipo tempo ou tipo luz que aponta para o futuro: uma vez que $-T_{\mu\nu}u^\mu$ é a densidade de momento da matéria como medida por um observador com velocidade u^μ , essa condição expressa a exigência de que a matéria se mova em linhas de mundo tipo tempo ou tipo luz.

As condições de energia acima podem também ser formuladas em termos dos autovalores de S_{ab} [135, 114]. Para isso, é útil definirmos vetores $\hat{e}_\alpha^a$ que formam uma base ortonormal em $\mathcal{S}$, no sentido que

$$h_{ab}\hat{e}_\alpha^a\hat{e}_\beta^b = \eta_{\alpha\beta},$$

onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1)$. A densidade de energia superficial e as pressões principais são definidas como autovalores com respeito a essa base: $\sigma = S_{ab}\hat{e}_0^a\hat{e}_0^b$, $p_2 = S_{ab}\hat{e}_2^a\hat{e}_2^b$, $p_3 = S_{ab}\hat{e}_3^a\hat{e}_3^b$. A condição de energia fraca então implica que $\sigma \geq 0$ e $\sigma + p_i \geq 0$ ($i = 2, 3$), a condição de energia forte é equivalente a $\sigma + p_2 + p_3 \geq 0$ e $\sigma + p_i \geq 0$ ($i = 2, 3$), e a condição de energia dominante implica $\sigma \geq |p_i|$ ($i = 2, 3$).

Pode-se verificar que as condições de energia fraca e forte são sempre satisfeitas pelo tensor de energia-momento (4.22). Em relação à condição de energia dominante, ela será satisfeita se

$$2\beta x_0 \geq -1 + \beta^2 + 3x_0^2 - x_0^{\beta^2}(x_0^2 - 1)^{1-\beta^2/2} - 2x_0^{2-\beta^2}(x_0^2 - 1)^{\beta^2/2}, \quad \text{para } 0 < \beta < 1 \quad (4.32)$$

e

$$x_0 \geq (13/12)\beta, \quad \text{para } \beta > 1. \quad (4.33)$$

Isso é ilustrado na Fig. 4.3. Nela, fica claro que a matéria que compõe essa classe de cascas possui propriedades físicas razoáveis para um intervalo significativo de parâmetros.

4.2 Quantização do campo e análise de estabilidade

No espaço-tempo descrito na Sec. 4.1, vamos considerar um campo escalar não minimamente acoplado e sem massa Φ , satisfazendo a equação de Klein-Gordon

$$-\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi + \xi R \Phi = 0, \quad (4.34)$$

onde R é o escalar de curvatura e ξ é um parâmetro adimensional.

Seguindo o procedimento de quantização canônica, expandimos o operador campo na forma

$$\hat{\Phi} = \int d\vartheta(\eta) [\hat{a}_\eta u_\eta + \hat{a}_\eta^\dagger u_\eta^*],$$

onde ϑ é uma medida definida no conjunto de números quânticos η , e u_η e u_η^* são modos normais satisfazendo a Eq. (4.34), e de norma positiva e negativa, respectivamente, com respeito ao produto interno de Klein-Gordon, Eq. (2.6). Então, os operadores de aniquilação, $\hat{a}_\eta$, e criação, $\hat{a}_\eta^\dagger$, satisfazem as relações de comutação

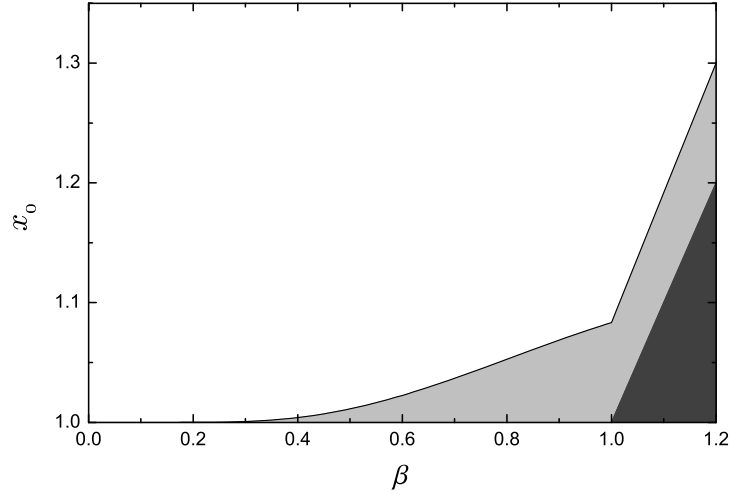


Figura 4.3: A região cinza claro corresponde aos valores de (β, x_0) que não satisfazem a condição de energia dominante, enquanto a região cinza escuro é excluída pelo vínculo (4.18). A região branca corresponde a cascas que satisfazem as condições de energia fraca, forte e dominante.

usuais: $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta(\alpha, \beta)$, $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = 0$, e o estado de vácuo $|0\rangle$ é definido exigindo-se que $\hat{a}_\eta|0\rangle = 0$ para todo η .

Uma vez que nosso espaço-tempo é estático e axialmente simétrico, é natural buscarmos por modos (de norma positiva) com a forma

$$u_\eta(t, \vec{\chi}, \varphi) = T_\sigma(t) F_{\sigma\mu}(\vec{\chi}) e^{i\mu\varphi}, \quad (4.35)$$

onde $\vec{\chi} = (\tilde{r}, \theta)$ e $\vec{\chi} = (x, y)$ dentro e fora de $\mathcal{S}$, respectivamente, $\mu \in \mathbb{Z}$ é o número quântico azimutal e $\sigma = \text{const.}$ Usando a Eq. (4.35) na Eq. (4.34), vemos que $T_\sigma(t)$ obedece

$$\frac{d^2}{dt^2} T_\sigma + \sigma T_\sigma = 0, \quad (4.36)$$

ao passo que $F_{\sigma\mu}(\chi)$ satisfaz

$$-\frac{1}{a^2} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{2\beta} \left[\frac{1}{\tilde{r}^2} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^2 \partial_{\tilde{r}}) + \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) - \frac{\mu^2}{\tilde{r}^2 \sin^2 \theta} \right] F_{\sigma\mu}^- = \sigma F_{\sigma\mu}^- \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a^2} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{2\beta} \left\{ \frac{(x^2 - y^2)^{\beta^2 - 1}}{(x^2 - 1)^{\beta^2}} \{ \partial_x [(x^2 - 1) \partial_x] \right. \\ & \left. + \partial_y [(1 - y^2) \partial_y] \} - \frac{\mu^2}{(x^2 - 1)(1 - y^2)} \right\} F_{\sigma\mu}^+ = \sigma F_{\sigma\mu}^+. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aqui, incluímos os rótulos “−” e “+” em $F_{\sigma\mu}$ a fim de denotarmos soluções válidas dentro e fora da casca, respectivamente.

As soluções da Eq. (4.36) terão as seguintes formas:

$$T_\sigma(t) \rightarrow T_\omega(t) \propto \exp(-i\omega t), \quad \omega > 0, \quad (4.39)$$

para $\sigma \equiv \omega^2 > 0$ e

$$T_\sigma(t) \rightarrow T_\Omega(t) \propto e^{\Omega t - i\pi/12} + e^{-\Omega t + i\pi/12}, \quad \Omega > 0, \quad (4.40)$$

para $\sigma \equiv -\Omega^2 < 0$, onde a Eq. (4.40) expressa uma das possíveis combinações que garantem que u_σ com $\sigma < 0$ seja um modo de norma positiva [ver a Eq. (2.23) e a discussão em seu entorno]. A Eq. (4.39) está conectada com os modos oscilatórios usuais, ao passo que a Eq. (4.40) está associada com modos taquionicos, responsáveis pelo crescimento exponencial das flutuações quânticas do campo, como vimos no Cap. 2. A exigência de que tais modos sejam normalizáveis determina os possíveis valores negativos de σ (caso existam) e, portanto, a existência (ou inexistência) de instabilidade. Essa exigência, associada à Eq. (4.38), implica que o comportamento assintótico de $F_{\sigma\mu}$ com $\sigma \equiv -\Omega^2 < 0$ é dado por

$$F_{\sigma\mu}^+(x, y) \rightarrow F_{\Omega\mu}^+(x, y) \stackrel{x \rightarrow \infty}{\propto} \exp(-\Omega a x). \quad (4.41)$$

Agora, vamos analisar as Eqs. (4.37) e (4.38) em mais detalhes. Devido à Eq. (4.22), temos que

$$R = -8\pi T = -2\Delta K \delta(\ell).$$

Então, vemos, da Eq. (4.34), que $F_{\sigma\mu}$ deve ser contínua em $\mathcal{S}$,

$$F_{\sigma\mu}^-(\tilde{r}, \theta)|_{\mathcal{S}} = F_{\sigma\mu}^+(x, y)|_{\mathcal{S}}, \quad (4.42)$$

e que a derivada primeira de $F_{\sigma\mu}$ ao longo da direção ortogonal à casca deve ser descontínua:

$$\Delta(dF_{\sigma\mu}/d\ell) = \xi\gamma(y)F_{\sigma\mu}|_{\mathcal{S}}. \quad (4.43)$$

Aqui, $\gamma(y) \equiv -2\Delta K$, e lembramos que $\Delta K = 4\pi(S_0^0 + S_2^2 + S_3^3)$. Usando as Eqs. (4.26)-(4.28), obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(y) = & -\frac{2}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{\frac{\beta^2 - 1}{2}} \left[\frac{\beta^2 x_0 - \beta + x_0}{x_0^2 - 1} \right. \\ & \left. + \frac{x_0(1 - \beta^2)}{x_0^2 - y^2} - \frac{1}{U(y)} \left(1 - \frac{y^2(\beta^2 - 1)}{x_0^2 - y^2} \right) - \frac{U(y)}{x_0^2 - 1} \right], \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde $U(y)$ foi definido na Eq. (4.29). A Eq. (4.43) pode ser expressa de uma forma mais conveniente:

$$\left(\frac{dx}{d\ell} \frac{\partial F_{\sigma\mu}^+}{\partial x} \right) \Big|_{\mathcal{S}} - \left(\frac{d\tilde{r}}{d\ell} \frac{\partial F_{\sigma\mu}^-}{\partial \tilde{r}} + \frac{d\theta}{d\ell} \frac{\partial F_{\sigma\mu}^-}{\partial \theta} \right) \Big|_{\mathcal{S}} = \xi \gamma(y) F_{\sigma\mu}|_{\mathcal{S}}, \quad (4.45)$$

onde

$$\frac{dx}{d\ell} \Big|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left(\frac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 - 1} \right)^{(\beta^2 - 1)/2}, \quad (4.46)$$

$$\frac{d\tilde{r}}{d\ell} \Big|_{\mathcal{S}} = \frac{D(y)g'(y)}{\sqrt{1 - g(y)^2}}, \quad (4.47)$$

e

$$\frac{d\theta}{d\ell} \Big|_{\mathcal{S}} = \frac{D(y)f'(y)}{f(y)^2}, \quad (4.48)$$

com

$$D(y) \equiv \frac{1}{a} \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{\beta/2} \left[\frac{g'(y)^2}{1 - g(y)^2} + \frac{f'(y)^2}{f(y)^2} \right]^{-1/2}. \quad (4.49)$$

As expressões (4.46)-(4.48) são obtidas a partir do vetor normal a $\mathcal{S}$, dado por $\mathbf{n} = d\ell = n_{\mu}^{\pm} dx_{\pm}^{\mu}$, o que implica que $dx_{\pm}^{\mu}/d\ell = n_{\pm}^{\mu}$ [ver Eqs. (4.24) e (4.25)].

No que segue, vamos buscar determinar os parâmetros ξ que permitem a existência de modos taquiónicos para uma certa configuração esferoidal, determinada pelos valores de x_0 , β e M . Para esse propósito, devemos buscar soluções regulares $F_{\sigma\mu}^{\pm}(\vec{\chi})$ com $\sigma < 0$, satisfazendo as Eqs. (4.37) e (4.38) dentro e fora da casca, respectivamente, além de respeitar as Eqs. (4.42) e (4.43) sobre a casca e possuir o comportamento assintótico dado na Eq. (4.41).

4.2.1 Cascas esféricas

Vamos começar com uma investigação das condições necessárias para que o campo seja instável no espaço-tempo de cascas esféricas. Esse caso será interessante por si só, permitindo um tratamento analítico completo, e será usado para ilustrar vários pontos interessantes no restante do trabalho. Além disso, o caso esférico servirá para verificarmos os programas usados para tratarmos cascas axialmente simétricas mais gerais em seguida.

Primeiramente, notemos da Eq. (4.31) que $a = M$ para $\beta = 1$. Então, usando as definições $x \equiv r/M - 1$ e $y \equiv \cos \theta$ na Eq. (4.14) e definindo $x_0 \equiv R/M - 1$ na Eq. (4.15), podemos escrever os elementos de linha em $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ como

$$ds_+^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.50)$$

e

$$ds_-^2 = -(1 - 2M/R)dt^2 + (1 - 2M/R)^{-1}M^2(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.51)$$

respectivamente. Devido à simetria esférica do espaço-tempo, podemos identificar não só t e φ , mas também θ dentro e fora de $\mathcal{S}$.

Em termos das coordenadas internas e externas, o lugar geométrico da casca é dado respectivamente por

$$\tilde{r} = (1 - 2M/R)^{1/2}R/M \quad \text{e} \quad r = R.$$

A fim de definirmos uma coordenada radial contínua em $\mathcal{S}$, introduzimos

$$r_- \equiv M\tilde{r}/(1 - 2M/R)^{1/2}, \quad r_+ \equiv r$$

com relação às quais a casca é descrita por $r_{\pm} = R$.

Soluções gerais das Eqs. (4.37) e (4.38) podem ser colocadas na forma

$$F_{\sigma\mu}^{\pm}(r_{\pm}, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l\mu} \frac{\psi_{\sigma l}^{\pm}(r_{\pm})}{r_{\pm}} P_l^{\mu}(\cos \theta), \quad (4.52)$$

onde $a_{l\mu} = \text{const}$ e $P_l^{\mu}(\cos \theta)$ são funções associadas de Legendre de primeira espécie, grau $l = 0, 1, 2, \dots$ e ordem $\mu = -l, -l+1, \dots, l$. Por conveniência, vamos definir as coordenadas

$$\chi_- \equiv r_-/(1 - 2M/R)^{1/2}, \quad \chi_+ \equiv r_+ + 2M \ln[r_+/(2M) - 1] + D,$$

onde a constante D é escolhida de forma que χ_- e χ_+ sejam iguais sobre a casca. Em termos das coordenadas $\chi_{\pm}$, as funções $\psi_{\sigma l}^{\pm}$ satisfazem equações tipo-Schrödinger:

$$-d^2\psi_{\sigma l}^{\pm}/d\chi_{\pm}^2 + V_{\text{eff}}^{(l,\pm)}\psi_{\sigma l}^{\pm} = \sigma\psi_{\sigma l}^{\pm} \quad (4.53)$$

com

$$V_{\text{eff}}^{(l,-)} = (1 - 2M/R)l(l+1)/r_-^2, \quad (4.54)$$

$$V_{\text{eff}}^{(l,+)} = (1 - 2M/r_+)[l(l+1)/r_+^2 + 2M/r_+^3]. \quad (4.55)$$

A descontinuidade do potencial ao longo da casca (excluindo a parte proporcional à distribuição delta) é $\Delta V_{\text{eff}} = 2M(1 - 2M/R)/R^3$. Note que $V_{\text{eff}}^{(l,\pm)}$ são positivo definidos. Ainda assim, a existência de modos taquiônicos é possível devido ao potencial singular sobre a casca [o que está codificado na Eq. (4.43)]: dependendo dos valores de R/M , ξ e l , o potencial efetivo será suficientemente negativo para que haja soluções normalizáveis da Eq. (4.53) para $\sigma < 0$.

A existência de modos taquiônicos do campo depende, portanto, da existência de soluções $\psi_{\Omega l}^{\pm}$ da Eq. (4.53) com $\sigma = -\Omega^2 < 0$. A condição de regularidade dos modos normais implica que

$$\lim_{\chi_- \rightarrow 0} \psi_{\Omega l}^- = 0^+, \quad (4.56)$$

onde assumimos que a função vai para zero com valores positivos: isso é possível uma vez que o produto interno de Klein-Gordon fixa a normalização dos modos a menos de uma fase multiplicativa arbitrária (que pode ser convenientemente escolhida). Usando a Eq. (4.53) com a Eq. (4.56), concluímos que

$$0 < \psi_{\Omega l}^-(r_-)|_S = \psi_{\Omega l}^+(r_+)|_S, \quad (4.57)$$

onde a igualdade é consequência da Eq. (4.42).

Por outro lado, a Eq. (4.43) implica que a primeira derivada das funções radiais $\psi_{\Omega l}^\pm$ será descontínua em $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} \frac{d(\psi_{\Omega l}^+(r_+)/r_+)}{dr_+} - \frac{d(\psi_{\Omega l}^-(r_-)/r_-)}{dr_-} \right]_S = \\ & - 2 \frac{\xi}{R} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1/2} \left(2 - \frac{3M}{R} - 2 \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} \right) \frac{\psi_{\Omega l}^-(r_-)}{r_-} \Big|_S. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Portanto, o valor de $d\psi_{\Omega l}^+/d\chi_+|_S$ será uma função dos parâmetros do campo e da casca. Agora, note da Eq. (4.53) que

$$\psi_{\Omega l}^\pm \geq 0 \Rightarrow d^2\psi_{\Omega l}^\pm/d\chi_\pm^2 \geq 0;$$

portanto, concluímos que ou $\psi_{\Omega l}^+$ muda de sinal uma única vez, divergindo negativamente no infinito espacial, ou permanece sempre positiva. Modos taquionicos estarão associados com o caso em que $\psi_{\Omega l}^\pm > 0$, com a exigência adicional que

$$\lim_{\chi_+ \rightarrow +\infty} \psi_{\Omega l}^+ = 0^+. \quad (4.59)$$

Segue, então, da Eq. (4.53), que, para uma certa configuração de casca, existirá, no máximo, um modo taquionico para cada valor de l .

A fim de determinarmos para que configurações das cascas o campo é instável, notamos primeiro que sempre existe um valor suficientemente negativo de $\sigma = -\Omega_0^2 < 0$ tal que

$$\lim_{\chi_+ \rightarrow +\infty} \psi_{\Omega_0 l}^+ = +\infty. \quad (4.60)$$

Então, se

$$\lim_{\chi_+ \rightarrow +\infty} \psi_{0l}^+ = -\infty, \quad (4.61)$$

é certo que existirá algum $\Omega \in (0, \Omega_0)$ para o qual a condição (4.59) é satisfeita. Se, por outro lado, a condição (4.61) não for verificada, não haverá modos instáveis do campo.

As soluções da Eq. (4.53) com $\Omega = 0$ satisfazendo a Eq. (4.56) podem ser escritas como

$$\psi_{0l}^-(r_-) = A_l r_-^{l+1}/R^l, \quad A_l > 0, \quad (4.62)$$

$$\psi_{0l}^+(r_+) = B_l P_l(r_+/M - 1)r_+ + C_l Q_l(r_+/M - 1)r_+, \quad (4.63)$$

onde A_l , B_l e C_l são constantes. Em seguida, impondo as condições (4.57) e (4.58) sobre a casca, obtemos

$$\frac{B_0}{A_0} = 1 - \frac{\xi R}{M} \left(\frac{3M}{R} - 2 + 2\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right) \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \quad (4.64)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{B_l}{A_l} = & - \frac{[(l + 4\xi)(Mx_0/R - \sqrt{1 - 2M/R}) - 2M\xi/R]Q_l(x_0)}{(lM/R)[P_l(x_0)Q_{l-1}(x_0) - P_{l-1}(x_0)Q_l(x_0)]} \\ & + \frac{(lM/R)Q_{l-1}(x_0)}{(lM/R)[P_l(x_0)Q_{l-1}(x_0) - P_{l-1}(x_0)Q_l(x_0)]} \end{aligned} \quad (4.65)$$

para $l = 0$ e $l \geq 1$, respectivamente, e

$$\frac{C_l}{A_l} = \frac{1 - (B_l/A_l)P_l(x_0)}{Q_l(x_0)} \quad (4.66)$$

para $l \geq 0$, onde lembramos que, no caso esférico, $x_0 = R/M - 1$. Então, usando que

$$\lim_{r_+ \rightarrow +\infty} Q_l(r_+/M - 1)r_+ \sim r_+^{-l}, \quad (4.67)$$

$$\lim_{r_+ \rightarrow +\infty} P_l(r_+/M - 1)r_+ \sim r_+^{l+1}, \quad (4.68)$$

vemos das Eqs. (4.63) e (4.61) que a condição necessária para a existência de modos taquiônicos com um certo $\Omega > 0$ é que $B_l/A_l < 0$. ($B_l/A_l = 0$ corresponde ao caso de modos “marginalmente” ligados, caracterizados pelo número quântico $\Omega = 0$.) Isso estabelece uma relação entre o parâmetro ξ do campo e a razão massa-raio, M/R , da casca. Nas Figs. 4.4 e 4.5, mostramos, respectivamente, a região de parâmetros em que modos taquiônicos com $l = 0$ e $l = 1$ existem. Uma vez que o potencial efetivo $V_{\text{eff}}^{(l,\pm)}$ é menor quanto mais baixo for o valor de l , a existência de um modo taquiônico com $l = l_0$ implica a existência de modos taquiônicos com $l = 0, \dots, l_0 - 1$. Isso é verificado no caso particular das Figs. 4.4 e 4.5: a região de instabilidade para $l = 1$ está contida naquela para $l = 0$. Claramente, a existência de um único modo instável do campo é suficiente para induzir o crescimento exponencial das suas flutuações quânticas.

Vale notar que, no espaço-tempo de cascas esféricas suficientemente compactas (ou seja, para $M/R \gtrsim 0.4995$), campos escalares com acoplamento conforme,

$\xi = 1/6$, são instáveis, como mostrado nas Figs. 4.4 e 4.5. Contudo, nessas mesmas figuras, pode-se ver que, para essas cascas, a condição de energia dominante, Eq. (4.33), é violada.

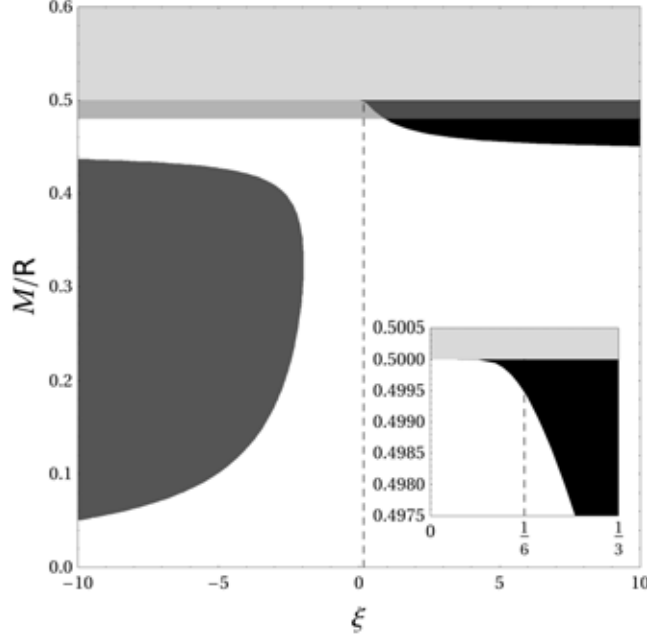


Figura 4.4: As regiões preta e cinza escuro mostram os parâmetros para os quais um campo com acoplamento ξ é instável no espaço-tempo de uma casca esférica com razão massa-raio M/R (ou seja, em que $B_0/A_0 < 0$). A magnitude da densidade de energia de vácuo da casca cresce positivamente e negativamente nas regiões preta e cinza escuro, respectivamente (ver a discussão na Sec. 4.3). A faixa cinza claro é excluída porque não existem soluções estáticas de cascas com $R \leq 2M$, ao passo que a região cinza translúcido abarca configurações que violam a condição de energia dominante. A porção destacada do gráfico mostra que, para cascas suficientemente compactas, campos com acoplamento conforme, $\xi = 1/6$ (linha tracejada vertical), são instáveis, embora a matéria que constitui tais cascas viole a condição de energia dominante.

4.2.2 Cascas oblatas e prolatas

Vamos agora tratar os casos de cascas esferoidais prolatas ($0 < \beta < 1$) e oblatas ($\beta > 1$), focando nossa atenção nas fronteiras que delimitam as regiões de instabilidade. Essas fronteiras estão associadas com a presença de modos marginalmente instáveis, com $\Omega = 0$. Além disso, seguindo o raciocínio do caso esférico, no qual os modos com $l = 0$ (e consequentemente $\mu = 0$) são aqueles que mais facilmente se tor-

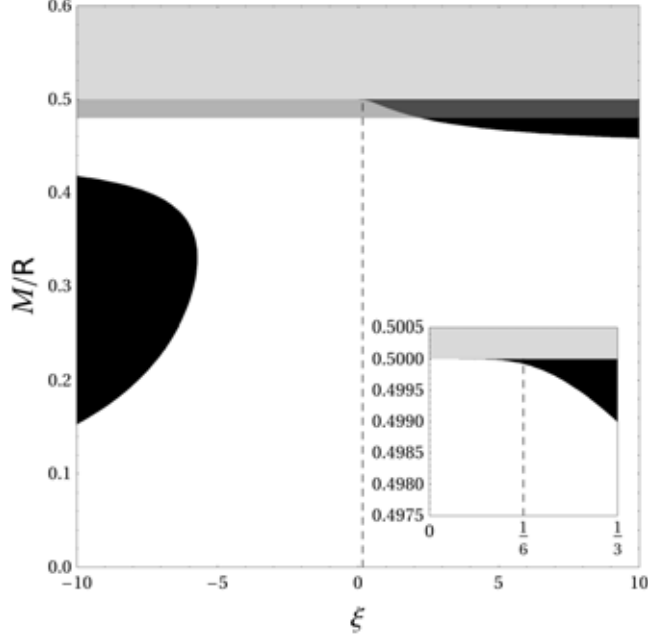


Figura 4.5: As regiões escuras mostram os parâmetros do campo e da casca para os quais existem modos taquiônicos com $l = 1$. As regiões cinzas têm o mesmo significado que na Fig. 4.4. Note que a região de instabilidade para modos com $l = 1$ está contida naquela dos modos com $l = 0$.

nam instáveis, também no caso esferoidal vamos buscar por modos marginalmente instáveis ($\Omega = 0 \Rightarrow \sigma = 0$) com $\mu = 0$.

Então, as soluções das Eqs. (4.37) e (4.38) que são regulares e correspondem a modos normalizáveis são

$$F_{00}^- = \sum_l A_l \tilde{r}^l P_l(\cos \theta) \quad (4.69)$$

e

$$F_{00}^+ = \sum_l C_l Q_l(x) P_l(y). \quad (4.70)$$

Em seguida, inserimos as Eqs. (4.69) e (4.70) na condição de continuidade (4.42), o que nos permite determinar os coeficientes C_l em termos de A_l :

$$C_{l'} = \frac{2l' + 1}{2Q_{l'}(x_0)} \sum_l A_l \int_{-1}^1 dy P_{l'}(y) f(y)^l P_l[g(y)], \quad (4.71)$$

onde lembramos que $f(y)$ e $g(y)$ são definidas pelas Eqs. (4.16) e (4.17), respectivamente, e onde usamos a condição de ortonormalidade dos polinômios de Legendre,

$$\int_{-1}^1 P_n(y) P_m(y) dy = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm}. \quad (4.72)$$

Agora, vamos impor a condição (4.43), que determina o salto da primeira derivada de $F_{\sigma\mu}$ em $\mathcal{S}$. É conveniente notar que, levando em conta as Eqs. (4.69), (4.70) e (4.71), a Eq. (4.43) pode ser escrita como

$$\sum_l A_l G_l(y) = 0$$

para uma função $G_l(y)$ intrincada mas conhecida. Expandindo $G_l(y)$ em termos de polinômios de Legendre, a Eq. (4.43) pode ser escrita como

$$\sum_l \sum_{l'} A_l k_{ll'} P_{l'}(y) = 0, \quad (4.73)$$

onde $k_{ll'} \equiv (l' + 1/2)(k_{ll'}^{(1)} + k_{ll'}^{(2)} + k_{ll'}^{(3)})$ com

$$k_{ll'}^{(1)} = \left[\frac{1}{Q_{l'}(x)} \frac{dQ_{l'}(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \int_{-1}^1 dy P_{l'}(y) f(y)^l P_l[g(y)], \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} k_{ll'}^{(2)} = & - \int_{-1}^1 dy P_{l'}(y) \left[\frac{dx}{d\ell} \right]_{\mathcal{S}}^{-1} \left\{ l f(y)^{l-1} \left[\frac{d\tilde{r}}{d\ell} \right]_{\mathcal{S}} P_l[g(y)] \right. \\ & \left. - \frac{l f(y)^l}{\sqrt{1-g(y)^2}} \left[\frac{d\theta}{d\ell} \right]_{\mathcal{S}} \{-g(y) P_l[g(y)] + P_{l-1}[g(y)]\} \right\} \end{aligned} \quad (4.75)$$

e

$$k_{ll'}^{(3)} = -\xi \int_{-1}^1 dy P_{l'}(y) \left[\frac{dx}{d\ell} \right]_{\mathcal{S}}^{-1} \gamma(y) f(y)^l P_l[g(y)]. \quad (4.76)$$

Lembramos que $\gamma(y)$, $dx/d\ell|_{\mathcal{S}}$, $d\tilde{r}/d\ell|_{\mathcal{S}}$ e $d\theta/d\ell|_{\mathcal{S}}$ são dados, respectivamente, nas Eqs. (4.44), (4.46), (4.47) e (4.48). Então, usando a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, Eq. (4.73), ficamos com

$$\sum_l A_l k_{ll} = 0. \quad (4.77)$$

Vamos considerar, então, os coeficientes $k_{ll'}$ como elementos de uma matriz $\mathcal{K}$. No caso esférico, $\mathcal{K}$ é diagonal: $k_{ll} = g_l \delta_{ll}$, com g_l sendo constantes que dependem dos parâmetros da casca, M/R , e do campo, ξ, l . As fronteiras que delimitam as regiões de instabilidade para cada l são obtidas resolvendo $g_l = 0$ para ξ como função de M/R . Na ausência de simetria esférica, as fronteiras que delimitam as configurações instáveis são obtidas, de forma semelhante, ao zerarmos os autovalores de $\mathcal{K}$. Essa condição implica em resolvermos a equação característica

$$\det \mathcal{K} = 0. \quad (4.78)$$

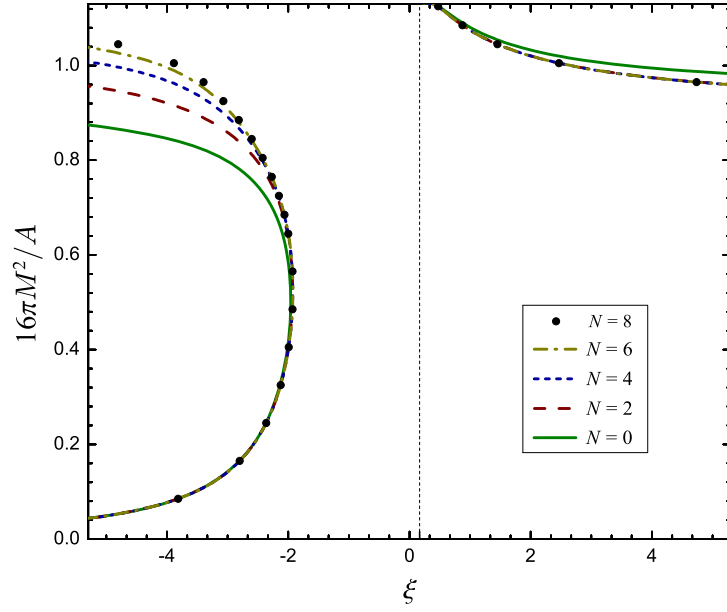


Figura 4.6: Diagrama mostrando como aproximações com valores de N sucessivamente maiores convergem para as fronteiras que de fato delimitam as regiões de instabilidade do campo. Aqui, consideramos uma casca prolata com $n = 0.25$. Configurações instáveis são aquelas à esquerda das curvas do lado esquerdo e à direita das curvas do lado direito. Note que, no regime $16\pi M^2/A \ll 1$, a aproximação com $N = 0$ já é muito satisfatória, contrariamente ao que ocorre quando $16\pi M^2/A \approx 1$. Para $N = 8$, apenas alguns pontos foram obtidos devido ao custo computacional.

Essa condição fará com que a Eq. (4.77) admita uma solução não trivial para os coeficientes A_l . Lembramos que, eventualmente, todos os modos devem ser normalizados, o que fixa a liberdade restante na determinação de A_l .

Para fins computacionais, vamos truncar a matriz (infinita) $\mathcal{K}$, impondo que $0 \leq l, l' \leq N$ para um valor suficientemente grande de N . Isso se justifica uma vez que os elementos de matriz $k_{ll'}$ gradualmente tendem a zero na medida em que os valores de l ou l' aumentam. Fixados os valores dos parâmetros β e x_0 , a Eq. (4.78) será satisfeita para $N + 1$ valores de ξ , o que corresponde, no caso esférico, ao fato de que, para um certo valor de M/R , modos taquiônicos com diferentes valores de $l = 0, \dots, N$ ficam instáveis para valores diferentes de ξ (ver as Figs. 4.4 e 4.5). Uma vez que estamos interessados nas fronteiras que abarcam as regiões de parâmetros em que *algum* modo taquiônico está presente, vamos buscar as soluções para ξ da Eq. (4.78) que levam à maior região instável possível. (No caso esférico, isso corresponde às fronteiras das regiões escuras mostradas na Fig. 4.4, associada com

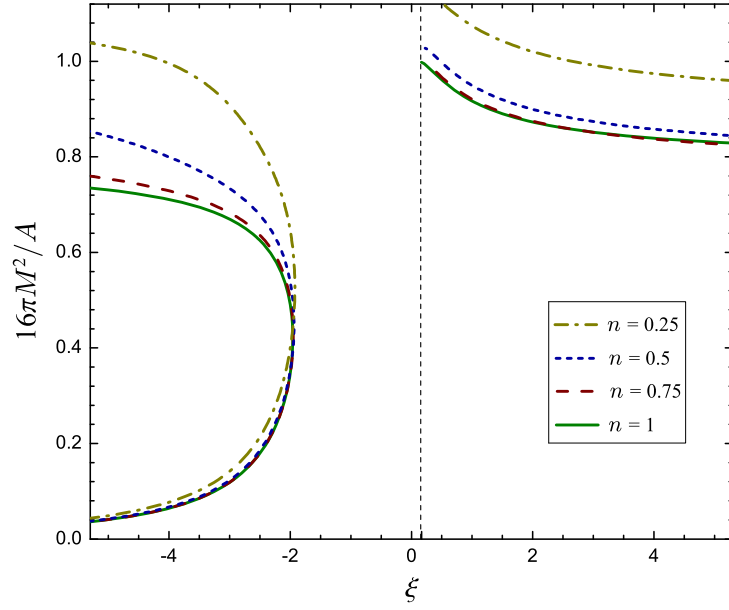


Figura 4.7: Diagrama mostrando as fronteiras que delimitam as regiões de instabilidade para cascas prolatas com $n = 0.25, 0.5$ e 0.75 . O caso esférico é representado para servir de base para a comparação. A linha vertical tracejada indica o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$. Configurações que admitem modos taquiónicos são aquelas à esquerda das curvas da esquerda e à direita daquelas do lado direito.

$l = 0$.) Para desvios relativamente pequenos do caso esférico, uma aproximação já bastante razoável é obtida se tomamos $N = 0$. Ao aumentarmos o valor de N , introduzimos correções a essa primeira aproximação. Tais correções são mais relevantes para grandes desvios da esfericidade (ver a Fig. 4.6 para o caso de uma casca consideravelmente prolata).

Nas Figs. 4.7 e 4.8, nós mostramos os resultados obtidos para algumas cascas prolatas e oblatas, respectivamente, assumindo $N = 6$. Por clareza, nós optamos por caracterizar as cascas pela razão n entre seu comprimento próprio equatorial e meridional [ver a Eq. (4.19)] e por sua área própria A [ver a Eq. (4.21)], uma vez que eles têm uma interpretação física mais imediata do que os parâmetros x_0 e β . A Fig. 4.7 mostra que as curvas que delimitam as regiões de instabilidade para cascas prolatas diferem significativamente do caso esférico, especialmente para configurações mais compactas, $16\pi M^2/A \approx 1$. Em contraste com o caso esférico, em que não existe configuração de equilíbrio para $16\pi M^2/A \geq 1$, no caso prolato a quantidade $16\pi M^2/A$ pode assumir valores arbitrariamente altos para valores suficientemente pequenos de n [ver Sec. 4.1.1]. A Fig. 4.8 mostra os resultados

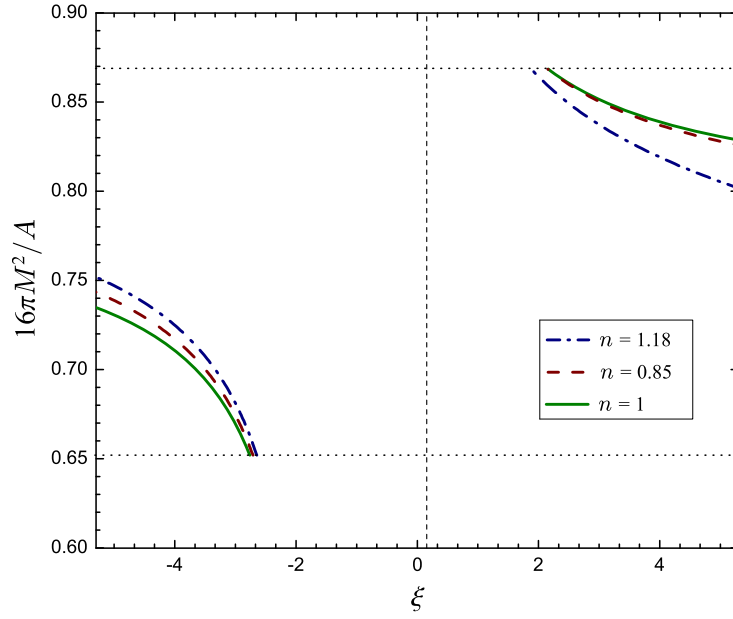


Figura 4.8: Diagrama mostrando as fronteiras que limitam as regiões de instabilidade para uma casca esferoidal com $n = 1/0.85 \approx 1.18$. Os casos prolato com $n = 0.85$ e esférico, $n = 1$, são também representados para servirem de base para a comparação (mas restritos ao domínio do caso oblato, que é indicado pelas linhas pontilhadas horizontais). A linha vertical tracejada indica o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$. Configurações que admitem modos taquiônicos são aquelas à esquerda das curvas da esquerda e à direita daquelas do lado direito.

para o caso oblato. Lembramos, da Sec. 4.1.1, que o desvio máximo da esfericidade permitido por essa classe de soluções é limitado devido ao vínculo (4.18): $\beta > 1 \Rightarrow x_0 > \beta$, levando a $1 < n \lesssim 1.3$. Essa restrição também se reflete nos valores permitidos para $16\pi M^2/A$ [ver discussão abaixo da Eq. (4.21)]. As regiões excluídas da Fig. 4.8 vêm desse vínculo aplicado ao caso oblato considerado no gráfico (para o qual $1.151 \lesssim A/16\pi M^2 \lesssim 1.534$). Dessa figura, vemos também que a casca oblata com $n = 1/0.85 \approx 1.18$ permite uma região maior de instabilidade do que o caso prolato com $n = 0.85$ (no domínio de existência da casca oblata).

4.3 Discussões finais

Neste Capítulo, nós analisamos a estabilidade de campos escalares não minimamente acoplados (e sem massa) no espaço-tempo de certas cascas esferoidais, com o intuito de investigar como ela é afetada por desvios da simetria esférica do espaço-tempo

de fundo. Em particular, a Fig. 4.7 mostra que para cascas prolatas compactas, ou seja, com $16\pi M^2/A \approx 1$, a estabilidade do campo se torna mais sensível a desvios da esfericidade. A Fig. 4.8 mostra que cascas oblatas com $n = n_0$ parecem mais eficientes para disparar a instabilidade do campo do que cascas prolatas com $n = 1/n_0$.

O caso particular de cascas esféricas também foi analisado em detalhes, pois nesse caso podemos obter uma expressão analítica simples para as regiões de parâmetros para os quais o campo é instável. Em particular, vimos que campos com acoplamento conforme, $\xi = 1/6$, podem ser instáveis no espaço-tempo de cascas esféricas suficientemente compactas (ver Figs. 4.4 e 4.5), diferentemente do que ocorre para estrelas relativísticas (ver Sec. 2.3). Isso poderia sugerir que o campo eletromagnético, que também possui a propriedade de invariância conforme, também fosse instável em certos espaços-tempos. Porém, podemos verificar que esse não é o caso. Em um espaço-tempo com simetria esférica, descrito pelo elemento de linha geral

$$ds^2 = -e^{2\Xi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

os graus de liberdade físicos do potencial eletromagnético A_μ dependem essencialmente de soluções da equação

$$-\frac{d^2}{d\chi^2}\psi_l + e^{2\Xi(r)}\frac{l(l+1)}{r^2}\psi_l = \sigma\psi_l, \quad (4.79)$$

onde $d\chi = e^{\Lambda(r)-\Xi(r)}dr$ (ver, e.g., as Refs. [140, 36, 21]). Uma vez que o potencial efetivo $e^{2\Xi(r)}l(l+1)/r^2$ é positivo definido, a Eq. (4.79) não possuirá soluções com $\sigma < 0$, e concluímos que perturbações do campo eletromagnético são sempre estáveis em espaços-tempos estáticos e com simetria esférica.

Por fim, vamos fazer alguns comentários no contexto do efeito do despertar do vácuo, ou seja, da manifestação quântica da instabilidade. Em particular, vamos investigar o crescimento exponencial da densidade de energia de vácuo devido à presença de modos taquiônicos. Primeiro, lembramos que, embora a densidade de energia de vácuo seja uma função não trivial que varia ponto a ponto no espaço-tempo, a energia de vácuo total é conservada no tempo [ver a Eq. (2.60) e a discussão que a acompanha]. Então, vamos supor que uma casca esferoidal evolui de (i) uma configuração estática inicial caracterizada por $(x_0, \beta, M)_{\text{in}}$ tais que a Eq. (4.34) admite apenas modos oscilatórios no tempo, para (ii) uma nova configuração estática caracterizada por $(x_0, \beta, M)_{\text{out}}$ tais que a Eq. (4.34) admite também modos taquiônicos. E vamos assumir que o campo se encontra originalmente, em (i), em seu estado de vácuo, que denotamos por $|0_{\text{in}}\rangle$. Uma vez que os modos oscilatórios em (i) evoluirão para modos oscilatórios e taquiônicos em (ii), a densidade de energia do

vácuo, $\langle \hat{T}_{00}^\Phi \rangle \equiv \langle 0_{\text{in}} | \hat{T}_{00}^\Phi | 0_{\text{in}} \rangle$ crescerá exponencialmente. Aplicando a Eq. (2.60) (ver a Ref. [95] para expressões mais gerais) para o caso particular de cascas esféricas, obtemos as seguintes contribuições dominantes para a densidade de energia de vácuo:

$$\langle \hat{T}_{00}^\Phi \rangle = \langle \hat{T}_{00}^- \rangle \Theta(-\ell) + \langle \hat{T}_{00}^+ \rangle \Theta(\ell) + \langle \hat{T}_{00} \rangle_S, \quad (4.80)$$

onde lembramos que ℓ é a distância própria ao longo de geodésicas que interceptam $\mathcal{S}$ ortogonalmente e $\Theta(\ell)$ é a função degrau de Heaviside. Aqui, $\langle \hat{T}_{00}^- \rangle$, $\langle \hat{T}_{00}^+ \rangle$, e $\langle \hat{T}_{00} \rangle_S$ são as contribuições do vácuo para a densidade de energia dentro, fora e sobre a casca, respectivamente, com

$$\langle \hat{T}_{00}^- \rangle \sim \frac{\hbar \kappa}{8\pi} \frac{e^{2\bar{\Omega}t}}{r_-^2} \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \frac{d}{dr_-} \left[\left(\frac{1-4\xi}{4\bar{\Omega}} \right) r_-^2 \frac{d(\psi_{\bar{\Omega}0}^-(r_-)/r_-)^2}{dr_-} \right], \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{00}^+ \rangle \sim & \frac{\hbar \kappa}{8\pi} \frac{e^{2\bar{\Omega}t}}{r_+^2} \left(1 - \frac{2M}{r_+} \right) \frac{d}{dr_+} \left[\left(\frac{1-4\xi}{4\bar{\Omega}} \right) r_+^2 \left(1 - \frac{2M}{r_+} \right) \frac{d(\psi_{\bar{\Omega}0}^+(r_+)/r_+)^2}{dr_+} \right. \\ & \left. + \frac{\xi M}{\bar{\Omega}} (\psi_{\bar{\Omega}0}^+(r_+)/r_+)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{00} \rangle_S \sim & \frac{\hbar \kappa}{8\pi} e^{2\bar{\Omega}t} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} \frac{\xi}{R} \left\{ (1-4\xi) \left[\frac{3M}{R} - 2 + 2 \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} \right] + \frac{M}{R} \right\} \\ & \times \frac{(\psi_{\bar{\Omega}0}^+(r_+)/r_+)^2}{\bar{\Omega}} \delta(\ell), \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde κ é uma constante positiva de ordem 1, que está relacionada com a decomposição dos modos “in” [em (i)] em termos dos modos “out” [em (ii)], $\bar{\Omega}$ denota o maior valor de Ω , selecionado do conjunto de todas as soluções taquiônicas, e recuperamos o $\hbar$. Analisando o fator que multiplica a distribuição delta na Eq. (4.83), podemos verificar se a contribuição da energia de vácuo para a densidade de energia é positiva ou negativa na casca. Isso está ilustrado na Fig. 4.4: a região preta e a cinza escuro estão associadas, respectivamente, com configurações para as quais $\langle \hat{T}_{00} \rangle_S$ cresce positivamente e negativamente. De forma semelhante, concluímos da Eq. (4.81) que a energia de vácuo total dentro das cascas esféricas é positiva, nula e negativa para $\xi < 1/4$, $\xi = 1/4$ e $\xi > 1/4$, respectivamente.

Como discutiremos em mais detalhes no Cap. 6, uma vez disparada a instabilidade, o campo escalar e o espaço-tempo de fundo devem evoluir para alguma configuração final estável, sem modos taquiônicos. A evolução de sistemas com simetria axial mas não esférica poderia levar a aspectos novos interessantes.

Capítulo 5

Despertando o vácuo no espaço-tempo de cascas com rotação

No Cap. 4, estudamos a estabilidade de campos escalares não minimamente acoplados no espaço-tempo de cascas esferoidais estáticas. Nosso intuito era investigar como o espaço de parâmetros que define configurações instáveis se modifica como função da elipticidade da casca (ver as Figs. 4.8 e 4.7). Neste Capítulo, nosso objetivo é complementar aquela análise, estudando como a instabilidade de tais campos no espaço-tempo de objetos compactos é afetada quando o objeto adquire alguma rotação. Vale notar que rotação é uma propriedade ubíqua e frequentemente importante de objetos compactos astrofísicos como estrelas de nêutrons, cuja frequência angular pode ultrapassar os 700 Hz [73].

Começaremos, na Sec. 5.1, discutindo alguns aspectos da quantização canônica de campos escalares não minimamente acoplados em um espaço-tempo que é aproximadamente plano no passado assintótico e estacionário e axialmente simétrico no futuro. Estaremos interessados no caso em que o campo possui modos instáveis no futuro assintótico, generalizando, assim, para a situação estacionária, os aspectos básicos da construção feita na Sec. 2.2, na qual tratamos o caso estático. Na Sec. 5.2, apresentamos um argumento simples e geral que mostra que o espaço de parâmetros que caracteriza a instabilidade não é modificado em primeira ordem no momento angular do objeto compacto. Então, investigamos desvios de segunda ordem em um modelo específico, tomando uma classe de cascas com pequena rotação como a fonte do campo gravitacional. As propriedades gerais do espaço-tempo da casca são apresentadas na Sec. 5.3. Ao considerarmos o espaço-tempo de cascas finas, introduzimos simplificações consideráveis, que possibilitam um tratamento analítico quase completo do problema. Na Sec. 5.4, chegamos a nossos principais resultados acerca da estabilidade de campos escalares não minimamente acoplados no espaço-tempo de cascas com rotação. A Sec. 5.5 é dedicada a alguns comentários finais.

Este Capítulo se baseia essencialmente na Ref. [101], que está sendo preparada

para publicação.

5.1 Considerações gerais sobre a quantização do campo em espaços-tempos estacionários

Nesta seção, vamos retomar a discussão da Sec. 2.2 sobre a quantização canônica em espaços-tempos estáticos, generalizando-a para o caso estacionário. Especificamente, vamos considerar um espaço-tempo que é aproximadamente plano no passado assintótico e estacionário e axialmente simétrico no futuro, correspondendo à formação de um objeto compacto com rotação a partir de matéria originalmente difusa. Em particular, vamos assumir que no futuro o espaço-tempo é bem descrito pelo elemento de linha [57]

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\varphi + g_{33}d\varphi^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2, \quad (5.1)$$

onde as componentes $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2)$ são suaves na origem e contínuas em todo o seu domínio, $(\partial_t)^\mu$ é um campo de Killing tipo tempo e $(\partial_\varphi)^\mu$ é um campo de Killing tipo espaço com curvas integrais fechadas, que comuta com $(\partial_t)^\mu$ [27]. Além disso, vamos supor que o espaço-tempo como um todo é assintoticamente plano e não possui horizontes de eventos ou de Cauchy.

Nesse espaço-tempo de fundo, vamos considerar a equação de Klein-Gordon

$$(-\nabla^\mu \nabla_\mu + \xi R)\Phi = 0, \quad (5.2)$$

descrevendo a dinâmica de um campo escalar real sem massa e não minimamente acoplado com a gravitação Φ , onde $\xi \in \mathbb{R}$ e R é o escalar de curvatura.

Por um momento, vamos restringir nossa atenção à porção do espaço-tempo descrita pela métrica (5.1) e considerar soluções da Eq. (5.2) com a seguinte forma:

$$\Phi_{\omega m}(t, x^1, x^2, \varphi) = e^{-i\omega t + im\varphi} F_{\omega m}(x^1, x^2), \quad (5.3)$$

que é compatível com as simetrias espaço-temporais. Aqui, $\omega \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $F_{\omega m} = F_{\omega m}(x^1, x^2)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(g^{pq} \sqrt{-g} \frac{\partial F_{\omega m}}{\partial x^q} \right) + \left(\frac{\omega^2 + m^2 g_{00}/g_{33} + 2\omega m g_{03}/g_{33}}{-g_{00} + g_{03}^2/g_{33}} - \xi R \right) F_{\omega m} = 0, \quad (5.4)$$

com $p, q \in \{1, 2\}$ e $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$. Uma vez que assumimos que a métrica (5.1) é assintoticamente plana, o comportamento de $F_{\omega m}(x^1, x^2)$ no infinito espacial é dado por

$$F_{\omega m}(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=\pm} \sum_{l=|m|}^{\infty} N_{\omega l m \lambda} P_l^m(\cos \theta) \frac{e^{i\lambda\omega r}}{r}, \quad (5.5)$$

onde escolhemos coordenadas $\{x^1, x^2\}$ que se reduzem assintoticamente a coordenadas esféricas $\{r, \theta\}$. As constantes $N_{\omega lm \lambda}$ são determinadas pela condição de regularidade no eixo de simetria, a menos de um fator global.

Para $\Im(\omega) \neq 0$, apenas soluções $F_{\omega m}$ com

$$\lambda \Im(\omega) > 0 \quad (5.6)$$

serão fisicamente aceitáveis a fim de que os modos (5.3) sejam bem comportados no infinito espacial. Isso restringe os valores aceitáveis de ω àqueles para os quais $N_{\omega lm+} = 0$ (no caso em que $\Im(\omega) < 0$) ou $N_{\omega lm-} = 0$ (no caso em que $\Im(\omega) > 0$):

$$F_{\omega m}(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} N_{\omega lm \lambda} P_l^m(\cos \theta) \frac{e^{i\lambda \omega r}}{r}, \quad (5.7)$$

com $\Im(\omega) > 0$. Vale notar que a Eq. (5.4) nos permite escrever a seguinte igualdade (a menos de uma constante multiplicativa arbitrária):

$$F_{\omega m}^*(x^1, x^2) = F_{\omega^* m}(x^1, x^2). \quad (5.8)$$

Aqui, estamos interessados no caso em que modos instáveis com a forma (5.3) existem. Esses modos estão presentes sempre que a Eq. (5.4) admite soluções regulares com $\Im(\omega) > 0$ e satisfazendo a Eq. (5.7). Como vimos no Cap. 3 no caso de espaços-tempos estáticos, a existência de tais modos instáveis implica classicamente que uma perturbação linear genérica da configuração de equilíbrio $\Phi = 0$ cresce exponencialmente no tempo. Essa amplificação ilimitada de perturbações clássicas aponta para a inadequação da aproximação de campo-teste, em que o campo evolui em um espaço-tempo fixo, e implica que a interação não linear entre o campo escalar e o campo gravitacional precisa ser levada em conta.

Por outro lado, mesmo na ausência de perturbações clássicas, a Mecânica Quântica fornece um mecanismo natural por meio do qual a instabilidade pode manifestar-se: por meio da amplificação das flutuações quânticas do campo e, consequentemente, da sua energia de vácuo (ver as Refs. [93, 95] e o Cap. 2). De fato, no Cap. 3, nós argumentamos que, se a amplitude média inicial do campo é muito maior que $\sqrt{\hbar}$, a descrição clássica da instabilidade é adequada; porém, se é da ordem de $\sqrt{\hbar}$, então um tratamento quântico deve ser empregado. No restante desta seção, vamos discutir alguns aspectos da quantização do campo na presença de modos instáveis, generalizando parte da discussão da Sec. 2.2 para o caso estacionário*.

*Ver, por exemplo, as Refs. [131, 52, 98] para o procedimento de quantização em alguns espaços-tempos estacionários nos quais o campo é estável. Ver também o Apêndice da Ref. [58], e referências aí, para a quantização de um campo escalar em um potencial eletrostático, cuja descrição é semelhante em muitos aspectos ao que apresentaremos aqui.

Como discutimos no Cap. 2, no procedimento de quantização canônica, o campo e seu momento canonicamente conjugado são promovidos a operadores satisfazendo relações de comutação usuais [cf. Eq. (2.11)]. O operador campo pode ser expandido formalmente em termos de um conjunto de modos ortonormais [cf. Eq. (2.10)]:

$$\hat{\Phi} = \int d\mu(\sigma) [\hat{a}_\sigma u_\sigma^{(+)} + \hat{a}_\sigma^\dagger u_\sigma^{(-)}], \quad (5.9)$$

onde $d\mu(\sigma)$ é uma medida no conjunto de números quânticos σ . Os modos $u_\sigma^{(+)}$ e $u_\sigma^{(-)} = (u_\sigma^{(+)})^*$ são soluções da Eq. (5.2) com norma positiva e negativa, respectivamente, com relação ao produto interno de Klein-Gordon [cf. Eq. (2.6)]:

$$(u_\sigma^{(\pm)}, u_{\sigma'}^{(\pm)})_{KG} = \pm \delta(\sigma, \sigma') \quad \text{e} \quad (u_\sigma^{(\pm)}, u_{\sigma'}^{(\mp)})_{KG} = 0. \quad (5.10)$$

Os operadores $\hat{a}_\sigma$ e $\hat{a}_\sigma^\dagger$ satisfazem $[\hat{a}_\sigma, \hat{a}_{\sigma'}^\dagger] = \delta(\sigma, \sigma')$ e zero para os demais comutadores. O vácuo $|0\rangle$ associado a essa representação é definido por meio da condição $\hat{a}_\sigma|0\rangle = 0$ para todo σ .

Como argumentamos no Cap. 2, embora a quantização ao longo dessas linhas não seja adequada em espaços-tempos gerais, ela é apropriada, em particular, para o nosso caso, em que o espaço-tempo é estacionário no passado assintótico. Portanto, aqui, vamos assumir que o estado do campo é o vácuo $|0_{\text{in}}\rangle$ definido com respeito a uma base $\{u_{\vec{k}}^{(\pm)}\}$ de modos que se comportam como ondas planas no passado assintótico (onde o espaço-tempo é plano):

$$u_{\vec{k}}^{(\pm)} \stackrel{\text{passado}}{\sim} (16\pi^3 |\vec{k}|)^{-1/2} \exp[\mp i(|\vec{k}|t - \vec{k} \cdot \vec{x})], \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.11)$$

onde $(t, \vec{x})$ são coordenadas Cartesianas usuais. Portanto, $|0_{\text{in}}\rangle$ tem a interpretação física de ser o estado sem conteúdo de partículas de acordo com observadores estáticos no passado.

Vamos agora construir um outro conjunto de modos ortonormais definidos por seu comportamento no futuro assintótico. Para esse propósito, note primeiramente que, contrariamente ao caso estático, na Eq. (5.4), o quadrado das frequências ω não aparece como autovalor de um operador hermitiano [cf. Eq. (2.20) e a discussão abaixo]. Por essa razão, as soluções dessa equação não serão ortogonais no sentido usual [cf. Eq. (2.21)], mas satisfarão uma relação diferente. De fato, da Eq. (5.4), segue diretamente que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^p} \left(g^{pq} \sqrt{-g} F_{\omega'm} \frac{\partial F_{\omega m}^*}{\partial x^q} \right) - \frac{\partial}{\partial x^p} \left(g^{pq} \sqrt{-g} F_{\omega m}^* \frac{\partial F_{\omega'm}}{\partial x^q} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{N^2} (\omega' - \omega^*) (\omega^* + \omega' - 2m\Omega) F_{\omega m}^* F_{\omega'm}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde definimos $N = N(x^1, x^2) \equiv (-g_{00} + g_{03}^2/g_{33})^{1/2}$ e $\Omega = \Omega(x^1, x^2) \equiv -g_{03}/g_{33}$. Podemos então integrar os dois lados da Eq. (5.12) em x^1 e x^2 :

$$(\omega' - \omega^*) \int dx^1 dx^2 \frac{\sqrt{-g}}{N^2} (\omega^* + \omega' - 2m\Omega) F_{\omega m}^* F_{\omega' m} = C, \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} C &\equiv \int dx^1 dx^2 [\partial_p (g^{pq} \sqrt{-g} F_{\omega' m} \partial_q F_{\omega m}^*) - \partial_p (g^{pq} \sqrt{-g} F_{\omega m}^* \partial_q F_{\omega' m})] \\ &= \int_0^\pi d\theta g^{11} \sqrt{-g} (F_{\omega' m} \partial_r F_{\omega m}^* - F_{\omega m}^* \partial_r F_{\omega' m}) \Big|_{r=0}^{r \rightarrow \infty} \\ &\quad + \int_0^\infty dr g^{22} \sqrt{-g} (F_{\omega' m} \partial_\theta F_{\omega m}^* - F_{\omega m}^* \partial_\theta F_{\omega' m}) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}, \end{aligned}$$

onde utilizamos coordenadas esféricas para tornar o cálculo mais direto. Então, assumindo que $F_{\omega m}$ seja regular no eixo de simetria (incluindo a origem) e levando em conta que o determinante métrico se anula nesse eixo, C passa a depender unicamente do comportamento de $F_{\omega m}$ no infinito espacial:

$$C = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta g^{11} \sqrt{-g} (F_{\omega' m} \partial_r F_{\omega m}^* - F_{\omega m}^* \partial_r F_{\omega' m}).$$

Agora, usando o fato de que o espaço-tempo é assintoticamente plano e a Eq. (5.5), podemos mostrar que $C = 0$ para todo $\omega, \omega' \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, e que $C = 0$ (no sentido distribucional) se $\omega' \neq \omega$, para $\omega, \omega' \in \mathbb{R}$. Portanto, para $\omega' \neq \omega^*$, temos

$$\int dx^1 dx^2 \frac{\sqrt{-g}}{N^2} (\omega^* + \omega' - 2m\Omega) F_{\omega m}^* F_{\omega' m} = 0. \quad (5.14)$$

A Eq. (5.14) exhibe uma relação de ortogonalidade ponderada entre soluções com $\omega' \neq \omega^*$ e condições de contorno adequadas.

Portanto, fazendo uso da Eq. (5.5) e escolhendo adequadamente a normalização das funções $F_{\omega m}(x^1, x^2)$, podemos exigir que, para $\omega, \omega' \in \mathbb{R}$,

$$\int dx^1 dx^2 \frac{\sqrt{-g}}{N^2} (\omega + \omega' - 2m\Omega) F_{\omega m}^* F_{\omega' m} = 2\omega \delta(\omega - \omega'). \quad (5.15)$$

Por outro lado, para $\omega, \omega' \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, podemos normalizar as funções $F_{\omega m}(x^1, x^2)$ de acordo com [cf. Eq. (5.8)]

$$\int dx^1 dx^2 \frac{\sqrt{-g}}{N^2} (\omega + \omega' - 2m\Omega) F_{\omega m} F_{\omega' m} = 2\omega \delta_{\omega \omega'}. \quad (5.16)$$

Agora, podemos construir um conjunto de soluções ortonormais da Eq. (5.2) por meio da especificação de seu comportamento no futuro assintótico. Esse conjunto pode, em princípio, conter tanto modos oscilatórios ($\Im(\omega) = 0$) quanto modos

taquiônicos ($\Im(\omega) > 0$). Modos oscilatórios de norma positiva obedecem

$$v_{\omega m}^{(+)} \stackrel{\text{futuro}}{\sim} \frac{e^{-i\omega t + im\varphi}}{(4\pi\omega)^{1/2}} F_{\omega m}(x^1, x^2), \quad (5.17)$$

com $\omega > 0$, e $F_{\omega m}$ normalizada de acordo com a Eq. (5.15), ao passo que modos taquiônicos de norma positiva satisfazem

$$w_{\omega m}^{(+)} \stackrel{\text{futuro}}{\sim} \sec(\alpha - \beta)^{1/2} \left[(8\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t + im\varphi} e^{i\alpha} F_{\omega m}(x^1, x^2) + (8\pi\omega^*)^{-1/2} e^{-i\omega^* t + im\varphi} e^{i\beta} F_{\omega m}^*(x^1, x^2) \right], \quad (5.18)$$

com $\Im(\omega) > 0$ e $F_{\omega m}$ normalizada de acordo com a Eq. (5.16) (e onde assumimos que, para $z = re^{i\phi}$, com $-\pi < \phi \leq \pi$, $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}$). Para $\alpha = -\beta = \pi/6$, a Eq. (5.18) corresponde à forma (2.45) para o caso estático, em que a frequência ω é puramente imaginária. Pode-se verificar que o conjunto $\{v_{\omega m}^{(\pm)}, w_{\omega m}^{(\pm)}\}$ caracterizado pelas formas assintóticas (5.17) e (5.18) é ortonormal, de acordo com a Eq. (5.10). Além disso, suporemos que esse conjunto de modos forma uma base para a expansão do campo[†].

Como vimos no Cap. 2, a existência de modos taquiônicos implica que ao menos alguns dos modos (5.11) passarão por uma fase de crescimento exponencial e, conseqüentemente, para o campo no estado de vácuo $|0_{\text{in}}\rangle$, o valor esperado de $\hat{\Phi}^2$ será exponencialmente amplificado no tempo:

$$\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi}^2 | 0_{\text{in}} \rangle \stackrel{\text{futuro}}{\sim} \frac{\hbar\kappa}{4\pi|\bar{\omega}|} e^{2\Im(\bar{\omega})t} |F_{\bar{\omega}\bar{m}}|^2 [1 + O(e^{-\epsilon t})]$$

(embora $\langle 0_{\text{in}} | \hat{\Phi} | 0_{\text{in}} \rangle = 0$). Aqui, $\kappa \sim 1$ codifica informações sobre a transição para a fase instável, ϵ é uma constante positiva, $F_{\bar{\omega}\bar{m}+}$ é a solução normalizada da Eq. (5.4) com maior valor de $\Im(\bar{\omega})$ (obtido para um certo valor de $m = \bar{m}$) e aqui recuperamos o $\hbar$, que havíamos tomado como 1. Como discutimos no Cap. 2, essa amplificação das flutuações de vácuo leva a um aumento exponencial do valor esperado do tensor de energia-momento do campo [cf. Eq. (2.60) e discussão abaixo], que deve então ser levado em conta na análise da evolução subsequente do sistema, por meio das equações semiclássicas de Einstein, Eq. (2.14).

No restante deste Capítulo, focaremos em procurar por soluções com a forma (5.3), e com $\Im(\omega) > 0$, que sejam regulares na origem e bem comportadas no infinito espacial [cf. Eq. (5.7) com $\lambda = +$]. Modos taquiônicos normalizados, Eq. (5.18),

[†]No caso estacionário, uma vez que a Eq. (5.4) não determina um problema de autovalor para um operador hermitiano, não podemos usar, como no caso estático tratado na Sec. 2.2, o teorema espectral, o que torna muito menos direta a prova da completeza do conjunto de modos aqui considerado.

podem ser construídos a partir dessas soluções, bastando ajustar a normalização de acordo com a Eq. (5.16). Nosso principal objetivo será entender como o intervalo de acoplamentos ξ para os quais modos instáveis existem se altera devido à rotação.

5.2 Desvios de primeira ordem do regime estático

A partir de agora, vamos focar no regime de pequenas rotações, ou seja, $J/M^2 \ll 1$, onde M e J são a massa e o momento angular do objeto compacto (calculados, por exemplo, pelas fórmulas de Komar). Assumiremos que as componentes métricas na Eq. (5.1) são funções suaves de J/M^2 , de modo que faça sentido realizarmos um tratamento perturbativo das correções devidas à rotação. Nesta seção, vamos argumentar que, a fim de obtermos resultados não triviais sobre o efeito da rotação na análise da estabilidade do campo, precisaremos ir além de desvios de primeira ordem em J/M^2 .

Fisicamente, é claro que a instabilidade do campo não pode depender do sentido da rotação. Matematicamente, isso pode ser visto da seguinte forma. Primeiramente, notemos que a inversão do sentido de rotação, $J \rightarrow -J$, equivale à inversão temporal, $t \rightarrow -t$. Isso implica, da Eq. (5.1), que $g_{03}(-J/M^2) = -g_{03}(J/M^2)$, ou seja, g_{03} é uma função ímpar de J , ao passo que as demais componentes métricas, bem como o escalar de curvatura R , são pares. Então, para cada solução regular $F_{\omega m}^{(\xi, J, M, \dots)}$ da Eq. (5.4) satisfazendo as Eqs. (5.7) e (5.6), existirá uma solução correspondente:

$$F_{\omega - m}^{(\xi, -J, M, \dots)} \propto F_{\omega m}^{(\xi, J, M, \dots)},$$

onde acrescentamos o índice $(\xi, J, M, \dots)$ para rotular explicitamente todos os parâmetros do campo e do objeto compacto de que $F_{\omega m}$ depende. Uma vez que modos com todos os valores de m entram na expansão do campo, concluímos que sempre que houver instabilidade para uma configuração $(\xi, J, M, \dots)$, o mesmo será verdade para a configuração $(\xi, -J, M, \dots)$. Em particular

$$\xi_0(J, M, \dots) = \xi_0(-J, M, \dots),$$

onde $\xi_0 = \xi_0(J, M, \dots)$ é o valor de ξ que marca o aparecimento de (quaisquer) modos taquiônicos, como função dos parâmetros do objeto compacto. Assim, efeitos devidos à rotação serão de ordem par em J/M^2 e, para estudá-los, precisamos, ao menos, considerar correções de segunda ordem em J/M^2 .

Muito menos intuitivo é o fato de que

$$\xi_{0; m, \Im(\omega)}(J, M, \dots) = \xi_{0; m, \Im(\omega)}(-J, M, \dots),$$

onde $\xi_{0; m, \mathfrak{S}(\omega)} = \xi_{0; m, \mathfrak{S}(\omega)}(J, M, \dots)$ é o valor de ξ que marca o aparecimento de um modo taquíônico com números quânticos m e $\mathfrak{S}(\omega)$ (aqui, omitimos $\Re(\omega)$, uma vez que é irrelevante na análise da instabilidade). O fato de que $\xi_{0; m, \mathfrak{S}(\omega)}$ é uma função par de J/M^2 decorre do fato de que, se $F_{\omega m}^{(\xi, J, M, \dots)}$ é uma solução regular da Eq. (5.4) satisfazendo as Eqs. (5.7) e (5.6), o mesmo vale para $F_{-\omega^*, m}^{(\xi, -J, M, \dots)}$, uma vez que

$$F_{\omega m}^{(\xi, J, M, \dots)*} \propto F_{-\omega^* - m}^{(\xi, J, M, \dots)} \propto F_{-\omega^* m}^{(\xi, -J, M, \dots)}.$$

Da discussão acima, concluímos que as correções devidas à rotação para ξ_0 e $\xi_{0; m, \mathfrak{S}(\omega)}$ são de ordem par no parâmetro J/M^2 . Isso ficará explícito nos resultados da Sec. 5.4. Portanto, no que segue, exploraremos como a rotação influencia o espaço de parâmetros da instabilidade em segunda ordem no parâmetro J/M^2 , no caso particular do espaço-tempo de cascas finas com rotação, que descrevemos a seguir.

5.3 Cascas finas com rotação

A métrica de Kerr, dada em coordenadas de Boyer-Lindquist por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) dt^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{dr^2}{r^2 - 2Mr + a^2} + d\theta^2 \right) - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\varphi + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5.19)$$

além de ser a única solução de vácuo das equações de Einstein descrevendo buracos negros estacionários, pode também aproximar o campo gravitacional fora de um corpo axialmente simétrico com massa M e momento angular $J = aM$. Em particular, na Ref. [42] uma casca fina com rotação foi considerada como fonte para a métrica de Kerr, e a junção das soluções interna e externa foi feita explicitamente até terceira ordem no parâmetro de rotação. A princípio, a solução interior obtida por esse procedimento não é plana, mas existe uma escolha apropriada do formato da casca para a qual a métrica no interior do tubo de mundo da casca é plana até segunda ordem em a/M . Nesta seção, vamos descrever em algum detalhe esse caso particular de um interior plano combinado com um campo exterior de Kerr até $O(a^2/M^2)$. Esse modelo será suficiente como um protótipo de objeto compacto com rotação para a discussão seguinte.

Portanto, vamos considerar um espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico descrevendo uma casca fina de matéria com rotação. Assumiremos que a região do espaço-tempo interna à casca, que denotaremos por $\mathcal{V}^-$, é plana, com elemento de linha

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2), \quad (5.20)$$

ao passo que a porção do espaço-tempo externa à casca, denotada por $\mathcal{V}^+$, será descrita pela métrica de Kerr, Eq. (5.19), expandida até segunda ordem em a/M :

$$\begin{aligned} ds_+^2 = & - \left[1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta \right) \right] dt^2 - \frac{4aM}{r} \sin^2 \theta dt d\varphi \\ & + \left(r^2 + a^2 \cos^2 \theta - \frac{a^2 r^2}{r^2 - 2Mr} \right) \frac{dr^2}{r^2 - 2Mr} + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ & + \left[r^2 + a^2 \left(1 + \frac{2M}{r} \sin^2 \theta \right) \right] \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Essa aproximação é válida enquanto o erro correspondente for pequeno, ou seja, $g_{\mu\nu}^{\text{kerr}} - g_{\mu\nu}^{\text{aprox}} \ll g_{\mu\nu}^{\text{kerr}}$, o que é satisfeito se

$$a^2 \ll M^2 \quad \text{e} \quad r \gg 2M. \quad (5.22)$$

Seguindo a notação do Cap. 4, o índice “−” (“+”) será usado para indicarmos a restrição de certas quantidades à porção do espaço-tempo interior (exterior) ao tubo de mundo da casca, que denotaremos por $\mathcal{S}$.

Como mostrado no Apêndice C para o caso geral, a união das métricas (5.20) e (5.21) será uma solução das equações de Einstein associada a um tensor de energia momento singular em $\mathcal{S}$ contanto que as métricas induzidas interna e externamente em $\mathcal{S}$, denotadas por h_{ab} , coincidam. Na Ref. [42] mostrou-se que isso é possível se $\mathcal{S}$ é determinada por

$$r|_{\mathcal{S}} = r_{\mathcal{S}}(\theta) \equiv R \left[1 - \frac{a^2 F^2}{R^2} \cos^2 \theta \right], \quad (5.23)$$

onde $R = \text{const} > 0$ é a coordenada radial no equador da casca e

$$F \equiv \sqrt{1 - 2M/R}. \quad (5.24)$$

Uma vez que a Eq. (5.21) vale apenas no regime ditado pelas condições (5.22), é necessário ao menos que $R > 2M$.

É conveniente cobrir $\mathcal{S}$ com coordenadas $\zeta^a = (t, \theta, \varphi)$, $a = 0, 2, 3$, uma vez que a casca está em uma superfície $r = r_{\mathcal{S}}(\theta)$ [cf. Eq. (5.23)]. Então, a condição de continuidade das métricas induzidas nos permite relacionar as coordenadas em $\mathcal{V}^-$ com ζ^a , da seguinte forma:

$$\tau|_{\mathcal{S}} = At, \quad \rho|_{\mathcal{S}} = \rho_{\mathcal{S}}(\theta), \quad \Theta|_{\mathcal{S}} = \Theta_{\mathcal{S}}(\theta), \quad \phi|_{\mathcal{S}} = \varphi - \tilde{\Omega}t, \quad (5.25)$$

onde

$$A \equiv F \left(1 + \frac{2a^2 M^2}{R^4 F^2} \right), \quad (5.26)$$

$$\rho_S(\theta) \equiv R \left[1 + \frac{a^2}{2R^2} \left(1 + \frac{2M}{R} - 3 \cos^2 \theta \right) \right], \quad (5.27)$$

$$\Theta_S(\theta) \equiv \theta + \frac{a^2}{2R^2} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \sin \theta \cos \theta, \quad (5.28)$$

$$\tilde{\Omega} \equiv \frac{2aM}{R^3}. \quad (5.29)$$

Para observadores com momento angular nulo[‡], a casca aqui descrita será um esferoide ligeiramente oblato, uma vez que, em uma seção $t = \text{const}$ de $\mathcal{S}$,

$$\frac{L_{\text{equatorial}}}{L_{\text{meridional}}} = 1 + \frac{3a^2}{4R^2} \geq 1, \quad (5.30)$$

onde $L_{\text{equatorial}}$ e $L_{\text{meridional}}$ são os comprimentos próprios equatorial ($\theta = \pi/2$) e meridional ($\varphi = \text{const}$) da casca, respectivamente. Outras classes de observadores estacionários atribuirão uma elipticidade diferente à casca.

Como vimos no Cap. 4 e no Apêndice C, uma vez que a métrica dentro e fora de $\mathcal{S}$ é determinada, também fixamos o tensor de energia-momento da casca como

$$T^{\mu\nu} = S^{ab} e_a^\mu e_b^\nu \delta(\ell), \quad (5.31)$$

onde ℓ é a distância própria ao longo de geodésicas que interceptam $\mathcal{S}$ ortogonalmente (tal que $\ell < 0$, $\ell = 0$, e $\ell > 0$ dentro, sobre e fora de $\mathcal{S}$, respectivamente), $e_a^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial \zeta^a$ são as componentes dos vetores coordenados $\partial / \partial \zeta^a = (\partial_t, \partial_\theta, \partial_\varphi)$ definidos em $\mathcal{S}$ e

$$S^{ab} = -\frac{1}{8\pi} (\Delta K^{ab} - h^{ab} \Delta K)$$

é o tensor de energia-momento superficial da casca, obtido a partir da descontinuidade em $\mathcal{S}$ do tensor de curvatura extrínseca, dado por $K_{ab}^\pm = \nabla_\nu n_\mu^\pm e_a^{\pm\mu} e_b^{\pm\nu}$, onde n^μ é o campo vetorial unitário normal a $\mathcal{S}$.

Em $\mathcal{V}^-$, temos $e_0^{-0} = A$ [cf. Eq. (5.26)], $e_2^{-1} = 3a^2 \sin 2\theta / 2R$, $e_2^{-2} = 1 + a^2 \cos 2\theta (1 + 2M/R) / 2R^2$, $e_0^{-3} = -\tilde{\Omega}$ [cf. Eq. (5.29)], $e_3^{-3} = 1$ e $e_a^{-\mu} = 0$ nos demais casos, além de

$$n_\mu^- = \left(0, 1, -\frac{3a^2}{2R} \sin 2\theta, 0 \right).$$

[‡]Observadores com momento angular nulo são aqueles cuja quadrivelocidade u^μ obedece $L = u_\mu \varphi^\mu = 0$, ou seja, $u^\mu = N^{-1}(1, 0, 0, \Omega)$, onde $N \equiv (-g_{00} + g_{03}^2/g_{33})^{1/2}$ e $\Omega \equiv -g_{03}/g_{33}$. A seção espacial associada a esses observadores, ou seja, a seção ortogonal à sua quadrivelocidade, é determinada por $t = \text{const}$.

Por outro lado, em $\mathcal{V}^+$ temos $e_0^{+0} = e_2^{+2} = e_3^{+3} = 1$ e $e_a^{+\mu} = 0$ nos demais casos, além de

$$n_\mu^+ = \frac{1}{F} \left[1 + \frac{a^2}{2R^2} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \cos^2 \theta - \frac{a^2}{2R^2 F^2} \right] \left(0, 1, -\frac{a^2}{R} F^2 \sin 2\theta, 0 \right).$$

Com isso, podemos calcular o tensor de energia-momento superficial da casca. As componentes não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} 8\pi S_0^0 &= \frac{2F}{R} - \frac{2}{R} - \frac{a^2}{R^3} \left(2 - 2F + \frac{M}{FR} - \frac{2M}{R} \right) \\ &\quad - \frac{3a^2}{R^3} \left(2F - 2 + \frac{3MF}{2R} - \frac{M}{2FR} - \frac{M^2}{FR^2} \right) \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$8\pi S_2^2 = \frac{F}{R} + \frac{M}{FR^2} - \frac{1}{R} + \frac{a^2}{2R^3} \left(1 - \frac{1}{F} + \frac{2M}{R} - \frac{M}{RF^3} \right) + \frac{3a^2}{2R^3} \left(1 - F - \frac{MF}{R} \right) \cos^2 \theta, \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} 8\pi S_3^3 &= \frac{F}{R} + \frac{M}{FR^2} - \frac{1}{R} + \frac{a^2}{R^3} \left(2F + \frac{1}{2F} - \frac{5}{2} + \frac{M}{R} + \frac{MF}{R} + \frac{2M^2}{FR^2} - \frac{M}{2RF^3} \right) \\ &\quad + \frac{a^2}{R^3} \left(\frac{9}{2} - \frac{9F}{2} - \frac{2M}{FR} - \frac{5MF}{2R} - \frac{2M^2}{FR^2} \right) \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$8\pi S_0^3 = -\frac{aM}{R^4} \left(2 + \frac{1}{F} \right), \quad 8\pi S_3^0 = \frac{3Ma}{FR^2} \sin^2 \theta. \quad (5.35)$$

Um resultado que será particularmente útil na próxima seção é

$$\Delta K = \frac{2F}{R} + \frac{M}{FR^2} - \frac{2}{R} + \frac{a^2}{R^3} \left(2F - 2 + \frac{2M}{R} - \frac{M}{2RF^3} \right) + \frac{3a^2}{R^3} \left(2 - 2F - \frac{3MF}{2R} \right) \cos^2 \theta. \quad (5.36)$$

Pode-se verificar, do tensor de energia-momento acima, que a massa gravitacional e o momento angular da casca são de fato iguais a M e aM , respectivamente. Outras propriedades físicas podem ser mais prontamente estudadas por meio dos autovalores de S_{ab} . Para esse propósito, vamos definir vetores $\hat{e}_\alpha^a$ que formam uma base ortonormal em $\mathcal{S}$, ou seja,

$$h_{ab} \hat{e}_\alpha^a \hat{e}_\beta^b = \eta_{\alpha\beta},$$

onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1)$. A densidade e as pressões superficiais são então autovalores com respeito a essa base, e podem ser calculadas, levando a

$$\sigma = S_{ab} \hat{e}_0^a \hat{e}_0^b = -S_0^0 + \frac{S_0^3 S_3^0}{(S_3^3)^{(0)} - (S_0^0)^{(0)}}, \quad (5.37)$$

$$p_\theta = S_{ab} \hat{e}_2^a \hat{e}_2^b = S_2^2, \quad (5.38)$$

$$p_\varphi = S_{ab} \hat{e}_3^a \hat{e}_3^b = S_3^3 + \frac{S_0^3 S_3^0}{(S_3^3)^{(0)} - (S_0^0)^{(0)}}, \quad (5.39)$$

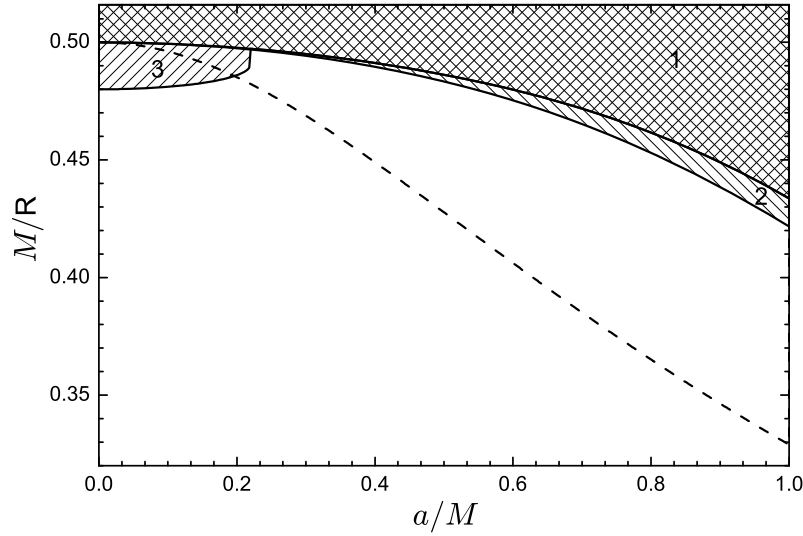


Figura 5.1: As regiões hachuradas indicam valores de M/R que são excluídos pelas condições de energia fraca, forte ou dominante, em termos do parâmetro de rotação a/M . As condições de energia fraca, forte e dominante não são satisfeitas, respectivamente, na região 1, na união das regiões 1 e 2 e na união das regiões 1 e 3. Quando $a = 0$, obtemos o limite estático, em cujo caso a condição de energia dominante é violada para $M/R > 0.48$. A região abaixo da linha tracejada corresponde a valores de M/R para os quais o erro em se aproximar a Eq. (5.19) pela Eq. (5.21) é inferior a 10%.

onde introduzimos o índice “(0)” em alguns termos para indicar que apenas contribuições de ordem zero em a/M precisam ser levadas em conta para mantermos a aproximação consistente até segunda ordem. Essa análise também nos permite obter a velocidade angular da casca como medida por observadores estáticos no infinito:

$$\Omega_{\text{casca}} = \dot{\hat{e}}_0^3 / \dot{\hat{e}}_0^0 = d\varphi/dt = \tilde{\Omega}(1 + 2F)(1 - F)^{-1}(1 + 3F)^{-1}$$

onde $\tilde{\Omega}$ foi definida na Eq. (5.29), e vemos que, nessa aproximação, a casca gira rigidamente.

As condições de energia clássica podem ser explicitamente formuladas em termos dos autovalores (5.37)-(5.39), como discutido no final da Sec. 4.1.2. A região branca na Fig. 5.1 mostra os valores de M/R para os quais as condições de energia fraca, forte e dominante são satisfeitas, como função de a/M . A região abaixo da linha tracejada indica valores de M/R para os quais a condição

$$(g_{\mu\nu}^{\text{kerr}} - g_{\mu\nu}^{\text{aprox}})/g_{\mu\nu}^{\text{kerr}} < 0.1 \quad (5.40)$$

é satisfeita. Na análise subsequente, vamos considerar apenas cascas com M/R abaixo dessa linha tracejada.

5.4 Desvios de segunda ordem do regime estático no modelo de cascas finas

Agora, estamos em posição de investigar a influência da rotação sobre o espaço de parâmetros no qual campos escalares não minimamente acoplados são instáveis. Para isso, tomaremos como modelo de objeto compacto com rotação as cascas finas descritas na Sec. 5.3 e faremos uma busca por soluções instáveis da Eq. (5.2) nesse espaço-tempo.

Sejam Φ^- e Φ^+ soluções de $\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi^\pm = 0$ em $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{V}^+$, respectivamente. Elas poderão ser combinadas para compor uma solução da Eq. (5.2) em todo o espaço-tempo se forem contínuas em $\mathcal{S}$,

$$\Phi^-(\tau, \rho, \Theta, \phi)|_{\mathcal{S}} = \Phi^+(t, r, \theta, \varphi)|_{\mathcal{S}} \quad (5.41)$$

e se sua derivada na direção ortogonal à casca for descontínua, de modo que

$$\Delta(d\Phi/d\ell)|_{\mathcal{S}} = -2\xi \Delta K \Phi|_{\mathcal{S}}, \quad (5.42)$$

o que segue da Eq. (5.2) se notamos [cf. Eq. (5.31)] que

$$R = -8\pi T = -2\Delta K \delta(\ell),$$

onde ΔK é dado na Eq. (5.36). As Eqs. (5.41) e (5.42), junto com condições de contorno adequadas sobre $\Phi^\pm$, determinam unicamente a solução correspondente da Eq. (5.2).

Em $\mathcal{V}^-$, soluções com a forma (5.3) podem ser escritas como

$$\Phi_{\omega' m'}^-(\tau, \rho, \Theta, \phi) = \sum_{l=|m'|}^{\infty} N_{\omega' l m'}^- e^{-i\omega' \tau} \chi_{\omega' l}(\rho) Y_{lm'}(\Theta, \phi), \quad (5.43)$$

onde $\omega' \in \mathbb{C}$, $m' \in \mathbb{Z}$, $Y_{lm'}(\Theta, \phi)$ são harmônicos esféricos, $N_{\omega' l m'}^-$ são constantes complexas arbitrárias e $\chi_{\omega' l}(\rho)$ satisfaz a equação de Bessel esférica,

$$\rho^2 \frac{d^2 \chi_{\omega' l}}{d\rho^2} + 2\rho \frac{d\chi_{\omega' l}}{d\rho} + [\omega'^2 \rho^2 - l(l+1)] \chi_{\omega' l} = 0, \quad (5.44)$$

com a condição adicional de regularidade na origem, de modo que, para $\omega' \neq 0$, $\chi_{\omega' l}(\rho) \propto j_l(\omega' \rho)$. A somatória foi incluída na Eq. (5.43) uma vez que o espaço-tempo não é esfericamente simétrico e, como veremos abaixo, a condição (5.41) misturará valores diferentes de l .

Em $\mathcal{V}^+$, escrevemos analogamente

$$\Phi_{\omega m}^+(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=|m|}^{\infty} N_{\omega lm}^+ e^{-i\omega t + im\varphi} \psi_{\omega lm}(r) S_{\omega lm}(\cos \theta), \quad (5.45)$$

onde $\omega \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Aqui, $S_{\omega lm}(\cos \theta)$ são harmônicos esféricos, que satisfazem

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS_{\omega lm}}{d\theta} \right) + \left(\Lambda_{lm} + a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) S_{\omega lm} = 0,$$

onde Λ_{lm} são constantes de separação. A expansão de Λ_{lm} e $S_{\omega lm}(y)$ em potências do parâmetro adimensional $a\omega$ tem os seguintes termos dominantes [50]:

$$\Lambda_{lm} = l(l+1) - \frac{(2l^2 + 2l - 2m^2 - 1)a^2\omega^2}{(2l-1)(2l+3)} + O(a^4\omega^4),$$

$$S_{\omega lm}(y) = P_l^m(y) + a^2\omega^2 \left[-\frac{(l+m-1)(l+m)}{2(2l+1)(2l-1)^2} P_{l-2}^m(y) + \frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2(2l+1)(2l+3)^2} P_{l+2}^m(y) \right] + O(a^4\omega^4).$$

As funções radiais $\psi_{\omega lm}(r)$ obedecem a equação diferencial (até segunda ordem em a/M)

$$f \left(f + \frac{2a^2}{r^2} \right) \frac{d^2 \psi_{\omega lm}}{dr^2} + \frac{2}{r} \left(f + \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{M}{r} \right) \frac{d\psi_{\omega lm}}{dr} + \left[\omega^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2Ma^2}{r^3} \right) - \frac{4aM\omega m}{r^3} + \frac{m^2 a^2}{r^4} - \left(\frac{\Lambda_{lm} f}{r^2} + \frac{l(l+1)a^2}{r^4} \right) \right] \psi_{\omega lm} = 0, \quad (5.46)$$

onde $f = f(r) \equiv 1 - 2M/r$. Uma vez que estamos buscando soluções normalizáveis com $\Im(\omega) > 0$, $\psi_{\omega lm}(r)$ deve ter o seguinte comportamento assintótico [cf. Eq. (5.7)]:

$$\psi_{\omega lm}(r) \stackrel{r \rightarrow +\infty}{\propto} \frac{e^{i\omega r}}{r}. \quad (5.47)$$

A condição de continuidade, Eq. (5.41), então leva a

$$m' = m, \quad (5.48)$$

$$\omega' = \frac{\omega - m\tilde{\Omega}}{A} = \frac{1}{F} \left(\omega - \frac{2Mma}{R^3} - \frac{2\omega a^2 M^2}{R^4 F^2} \right), \quad (5.49)$$

e

$$\sum_{l \geq |m|} N_{\omega lm}^+ S_{\omega lm}(\cos \theta) \psi_{\omega lm}[r_S(\theta)] = \sum_{l \geq |m|} N_{\omega' lm}^- P_l^m[\cos \Theta_S(\theta)] \chi_{\omega' l}[\rho_S(\theta)], \quad (5.50)$$

onde lembramos que $F = \sqrt{f(R)}$ [cf. Eq. (5.24)] e que $r_S(\theta)$, $\rho_S(\theta)$ e $\Theta_S(\theta)$ são dados nas Eqs. (5.23), (5.27) e (5.28), respectivamente. A Eq. (5.48) é uma consequência da simetria axial do espaço-tempo, ao passo que a Eq. (5.49) relaciona as energias atribuídas a um certo modo por um observador inercial em $\mathcal{V}^-$ com tempo próprio τ e por um observador estático no infinito espacial: ω e ω' diferem não apenas devido ao *redshift* (desvio para o vermelho), mas também devido ao acoplamento entre a rotação e o momento angular do modo.

A Eq. (5.50) pode ser usada para expressarmos os coeficientes $N_{\omega lm}^+$ em termos de $N_{\omega' lm}^-$. Para tanto, é útil expandir as funções $\chi_{\omega' l}[\rho_S(\theta)]$ e $\psi_{\omega lm}[r_S(\theta)]$ em uma série de Taylor ao redor de $\rho = R$ e $r = R$, respectivamente:

$$\chi_{\omega' l}[\rho_S(\theta)] = \chi_{\omega' l}(R) + \frac{a^2}{2R} \left(1 + \frac{2M}{R} - 3 \cos^2 \theta \right) \frac{d\chi_{\omega' l}^{(0)}(\rho)}{d\rho} \Big|_R, \quad (5.51)$$

$$\psi_{\omega lm}[r_S(\theta)] = \psi_{\omega lm}(R) - \frac{a^2}{R} F^2 \cos^2 \theta \frac{d\psi_{\omega lm}^{(0)}(r)}{dr} \Big|_R. \quad (5.52)$$

Além disso, é conveniente fixarmos $\chi_{\omega' l}(R) = 1$ e $\psi_{\omega lm}(R) = 1$, o que pode ser feito sem perda de generalidade, uma vez que a arbitrariedade na normalização de $\Phi_{\omega' m}^-$ e $\Phi_{\omega m}^+$ fica totalmente codificada na escolha de $N_{\omega' lm}^-$ e $N_{\omega lm}^+$, os quais podem ser ajustados de forma que a Eq. (5.16) seja satisfeita. Em seguida, escrevemos

$$N_{\omega' lm}^- = N_{\omega' lm}^{-(0)} + \frac{a^2}{M^2} N_{\omega' lm}^{-(2)}, \quad (5.53)$$

e semelhantemente para $N_{\omega lm}^+$. Para $a = 0$, a Eq. (5.50) impõe que $N_{\omega lm}^{+(0)} = N_{\omega' lm}^{-(0)}$. Assim, até $O(a^2/M^2)$, podemos escrever

$$N_{\omega lm}^+ = N_{\omega' lm}^- + \frac{a^2}{M^2} g_{\omega' lm}, \quad l \geq |m|. \quad (5.54)$$

Inserindo a Eq. (5.54) e as Eqs. (5.51) e (5.52) na Eq. (5.50), e em seguida multiplicando a Eq. (5.50) por $P_l^m(\cos \theta)$ e integrando em θ , nós obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$g_{\omega' lm} = N_{\omega' lm}^{-(0)} \alpha_1 + N_{\omega' (l+2)m}^{-(0)} \alpha_2 + N_{\omega' (l-2)m}^{-(0)} \alpha_3 H(l - |m| - 2), \quad (5.55)$$

onde $H(x)$ é a função degrau de Heaviside,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{M^2}{R} \left(\frac{M}{R} - \frac{l^2 + l - 3m^2}{(2l+3)(2l-1)} \right) \frac{d\chi_{\omega' l}^{(0)}(\rho)}{d\rho} \Big|_R \\ &+ \frac{M^2 F^2}{R} \left(\frac{2l^2 + 2l - 1 - 2m^2}{(2l+3)(2l-1)} \right) \frac{d\psi_{\omega lm}^{(0)}(r)}{dr} \Big|_R \\ &- \frac{M^2}{2R^2} \left(\frac{l^2 + l - 3m^2}{(2l+3)(2l-1)} \right) \left(1 + \frac{2M}{R} \right), \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{M^2}{R} \left(\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)(2l+5)} \right) \left[-\frac{l+3}{2R} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \frac{\omega^2 R}{4l+6} + F^2 \frac{d\psi_{\omega(l+2)m}^{(0)}(r)}{dr} \Big|_R - \frac{3}{2} \frac{d\chi_{\omega'(l+2)}^{(0)}(\rho)}{d\rho} \Big|_R \right],$$

e

$$\alpha_3 = \frac{M^2}{R} \left(\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-1)(2l-3)} \right) \left[\frac{l-2}{2R} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) - \frac{\omega^2 R}{4l-2} + F^2 \frac{d\psi_{\omega(l-2)m}^{(0)}(r)}{dr} \Big|_R - \frac{3}{2} \frac{d\chi_{\omega'(l-2)}^{(0)}(\rho)}{d\rho} \Big|_R \right].$$

Vale ressaltar, na Eq. (5.55), o acoplamento entre índices multipolares l e $l \pm 2$ que aparece em $O(a^2/M^2)$ devido à ausência de simetria esférica. Desvios mais gerais da simetria esférica, como aqueles considerados no Cap. 4, podem dar origem a um acoplamento mais intrincado entre esses índices.

A condição de descontinuidade das derivadas, Eq. (5.42), pode ser escrita mais explicitamente como

$$\begin{aligned} & \sum_{l \geq |m|} N_{\omega lm}^+ \left[\frac{dr}{d\ell} \Big|_S \frac{d\psi_{\omega lm}(r)}{dr} \Big|_{r_S} S_{\omega lm}(\cos \theta) + \frac{d\theta}{d\ell} \Big|_S \frac{dS_{\omega lm}(\cos \theta)}{d\theta} \psi_{\omega lm}(r_S) \right] \\ & - \sum_{l \geq |m|} N_{\omega' lm}^- \left[\frac{d\rho}{d\ell} \Big|_S \frac{d\chi_{\omega' l}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho_S} P_l^m(\cos \Theta_S) + \frac{d\Theta}{d\ell} \Big|_S \frac{dP_l^m(\cos \Theta)}{d\Theta} \Big|_{\Theta_S} \chi_{\omega' l}(\rho_S) \right] \\ & = -2\xi \Delta K \sum_{l \geq |m|} N_{\omega' lm}^- \chi_{\omega' l}(\rho_S) P_l^m(\cos \Theta_S), \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde omitimos a dependência de vários termos em θ e onde

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\ell} \Big|_S &= F - \frac{a^2 F}{2R^2} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \cos^2 \theta + \frac{a^2}{2R^2 F}, & \frac{d\rho}{d\ell} \Big|_S &= 1, \\ \frac{d\theta}{d\ell} \Big|_S &= -\frac{a^2 F}{R^3} \sin 2\theta, & \frac{d\Theta}{d\ell} \Big|_S &= -\frac{3a^2}{2R^3} \sin 2\theta \end{aligned}$$

são componentes do campo vetorial unitário normal a $\mathcal{S}$. É possível manipular a Eq. (5.56) a fim de obtermos uma expressão mais esclarecedora. Para isso, usamos as Eqs. (5.54) e (5.55), bem como expansões em Taylor de $d\chi_{\omega' l}(\rho)/d\rho|_{\rho=\rho_S}$ e $d\psi_{\omega lm}(r)/dr|_{r=r_S}$ ao redor de $\rho = R$ e $r = R$ [analogamente às Eqs. (5.51) e (5.52)]. Então, multiplicando a Eq. (5.56) por $P_l^m(\cos \theta)$ e integrando em θ , podemos escrever a equação resultante no seguinte formato:

$$\beta_0^l N_{\omega' lm}^- + \frac{a^2}{M^2} \left[\beta_1^l N_{\omega' lm}^{-(0)} + \beta_2^l N_{\omega' (l+2)m}^{-(0)} + \beta_3^l N_{\omega' (l-2)m}^{-(0)} H(l - |m| - 2) \right] = 0, \quad l \geq |m|, \quad (5.57)$$

onde β_j^l , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, são coeficientes que dependem, a princípio, de todos os parâmetros que caracterizam o modo e o espaço-tempo, exceto a . Suas formas explícitas são muito extensas, e escreveremos apenas quando se tornarem necessárias.

Em ordem zero no parâmetro de rotação, a Eq. (5.57) se reduz a

$$\beta_0^l N_{\omega'lm}^{-(0)} = 0,$$

que dá origem a uma solução não trivial para $\Phi_{\omega'm}^-$ [cf. Eq. (5.43)] se

$$\beta_0^{l_0} = 0 \quad (5.58)$$

para algum $l = l_0 \geq |m|$. Nesse caso, $N_{\omega'l_0m}^{-(0)} \neq 0$ é fixado pela normalização de Klein-Gordon, ao passo que $N_{\omega'lm}^{-(0)} = 0$ para $l \neq l_0$, ou seja,

$$N_{\omega'lm}^{-(0)} = N_{\omega'l_0m}^{-(0)} \delta_{ll_0}. \quad (5.59)$$

A condição (5.58) pode ser escrita como

$$\xi^{(0)} = \left(\frac{4F}{R} + \frac{2M}{FR^2} - \frac{4}{R} \right)^{-1} \left(\frac{d\chi_{\omega'l_0}^{(0)}}{d\rho} \Big|_R - F \frac{d\psi_{\omega'l_0m}^{(0)}}{dr} \Big|_R \right), \quad (5.60)$$

onde usamos $\xi = \xi^{(0)} + \frac{a^2}{M^2} \xi^{(2)}$, até segunda ordem. Assim, a Eq. (5.60) nos dá o valor de ξ que o campo deve ter a fim de que modos instáveis com números quânticos ω' ($= \omega/F$), l_0 e m existam no espaço-tempo de uma casca esférica estática com razão massa-raio M/R .

Em segunda ordem em a/M , a Eq. (5.57) se reduz a

$$\beta_0^l N_{\omega'lm}^{-(2)} + \beta_1^l N_{\omega'lm}^{-(0)} + \beta_2^l N_{\omega'(l+2)m}^{-(0)} + \beta_3^l N_{\omega'(l-2)m}^{-(0)} H(l - |m| - 2) = 0, \quad l \geq |m|. \quad (5.61)$$

Para $|m| \leq l \neq l_0$, a Eq. (5.61) pode ser resolvida para $N_{\omega'lm}^{-(2)}$:

$$N_{\omega'lm}^{-(2)} = -N_{\omega'l_0m}^{-(0)} \left(\frac{\beta_2^{l_0-2}}{\beta_0^{l_0-2}} \delta_{ll_0-2} + \frac{\beta_3^{l_0+2}}{\beta_0^{l_0+2}} \delta_{ll_0+2} \right). \quad (5.62)$$

As Eqs. (5.59) e (5.62) determinam completamente $N_{\omega'lm}^-$ na Eq. (5.53) (com $N_{\omega'l_0m}^{-(0)}$ fixado pela normalização). Por outro lado, para $l = l_0 \geq |m|$, a Eq. (5.61) leva à condição

$$\beta_1^{l_0} = 0, \quad (5.63)$$

que pode ser resolvida para $\xi^{(2)}$ em termos dos parâmetros do espaço-tempo e do modo. Porém, é mais conveniente escrevermos a expressão

$$\beta_0^{l_0} + \frac{a^2}{M^2} \beta_1^{l_0} = 0, \quad (5.64)$$

que decorre da Eq. (5.57), com as Eqs. (5.59) e (5.62), e é equivalente ao conjunto das Eqs. (5.58) e (5.63). Explicitamente, a Eq. (5.64) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
& \xi \left(\frac{4F}{R} + \frac{2M}{FR^2} - \frac{4}{R} \right) \left[1 + \frac{a^2}{2R^2} \frac{4RF^4 - 4RF^3 + 4MF^3 - M}{2RF^4 + MF^2 - 2RF^3} + \frac{a^2}{2R^2} \frac{2l_0^2 + 2l_0 - 1 - 2m^2}{(2l_0 + 3)(2l_0 - 1)} \right. \\
& \times \frac{12RF - 12RF^2 - 9MF^2}{2RF^2 + M - 2RF} + \frac{a^2}{R} \left(\frac{M}{R} - \frac{l_0^2 + l_0 - 3m^2}{(2l_0 + 3)(2l_0 - 1)} \right) \left. \frac{d\chi_{\omega'l_0}^{(0)}}{d\rho} \right] \Big|_R \\
& - \frac{a^2}{2R^2} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \frac{l_0^2 + l_0 - 3m^2}{(2l_0 + 3)(2l_0 - 1)} \Big] = -F \frac{d\psi_{\omega lm}}{dr} \Big|_R + \frac{d\chi_{\omega'l_0}}{d\rho} \Big|_R \\
& - \frac{a^2 F}{R^2} \left[\alpha_1 R^2 - \frac{2l_0^2 + 2l_0 - 1 - 2m^2}{2(2l_0 + 3)(2l_0 - 1)} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) + \frac{1}{2F^2} \right] \frac{d\psi_{\omega lm}^{(0)}}{dr} \Big|_R \\
& + \frac{a^2 F^3}{R} \frac{2l_0^2 + 2l_0 - 1 - 2m^2}{(2l_0 + 3)(2l_0 - 1)} \frac{d^2 \psi_{\omega lm}^{(0)}}{dr^2} \Big|_R + \frac{a^2}{R} \left(\frac{M}{R} - \frac{l_0^2 + l_0 - 3m^2}{(2l_0 + 3)(2l_0 - 1)} \right) \frac{d^2 \chi_{\omega'l_0}^{(0)}}{d\rho^2} \Big|_R \\
& - \frac{a^2}{2R^2} \frac{l_0^2 + l_0 - 3m^2}{(2l_0 - 1)(2l_0 + 3)} \left[\frac{4F}{R} - \frac{6}{R} + \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \frac{d\chi_{\omega'l_0}^{(0)}}{d\rho} \Big|_R \right], \tag{5.65}
\end{aligned}$$

e é a fórmula central para a nossa análise. É interessante notar que os coeficientes α_2 , α_3 , β_2 e β_3 , que codificam o acoplamento de diferentes valores de l nas Eqs. (5.55) e (5.57), não são diretamente relevantes para a Eq. (5.65).

Escrevendo $\omega = \omega_R + i\omega_I$, então, para cada conjunto $\{\omega_I, l_0, m, M/R, a/M\}$ de parâmetros, a Eq. (5.65) é uma equação complexa, cuja parte imaginária pode ser resolvida para ω_R e cuja parte real pode ser resolvida para ξ . Então, para cada valor fixo de $l_0 \geq |m|$, ξ é o acoplamento do campo que marca o aparecimento de termos instáveis (“modos parciais”) na soma da Eq. (5.43) com números quânticos ω' e m , e com $N_{\omega'lm}^-$ dado na Eq. (5.53), com (5.59) e (5.62) [o termo correspondente em $\mathcal{V}^+$ é determinado a partir da Eq. (5.45), junto com as Eqs. (5.54) e (5.55)]. O procedimento acima para se calcular ξ depende do conhecimento da função $\psi_{\omega lm}(r)$, que calculamos numericamente, por meio da integração da Eq. (5.46) sujeita à condição de contorno (5.47) e normalização $\psi_{\omega lm}(R) = 1$. Note que a função $\psi_{\omega lm}(r)$ assim obtida pode, a princípio, conter todas as potências de a/M .

Na Fig. 5.2, o método delineado acima foi empregado para obtermos os valores de ξ e M/R para os quais um modo parcial com $l_0 = m = 0$ é instável ($0 < \omega_I \leq 0.4$) no espaço-tempo de uma casca com rotação, com $a/M = 0.2$. Note, da Fig. 5.2, que as fronteiras externas das regiões instáveis (curvas pretas) são numericamente consistentes com $\omega_I = \omega_R = 0$, o que é compatível com o resultado geral [56] de que a transição da estabilidade para a instabilidade ocorre por meio de modos de frequência nula. Portanto, vamos agora focar nas fronteiras das regiões instáveis, caracterizadas por $\omega = 0$, em cujo caso podemos obter analiticamente a aproximação

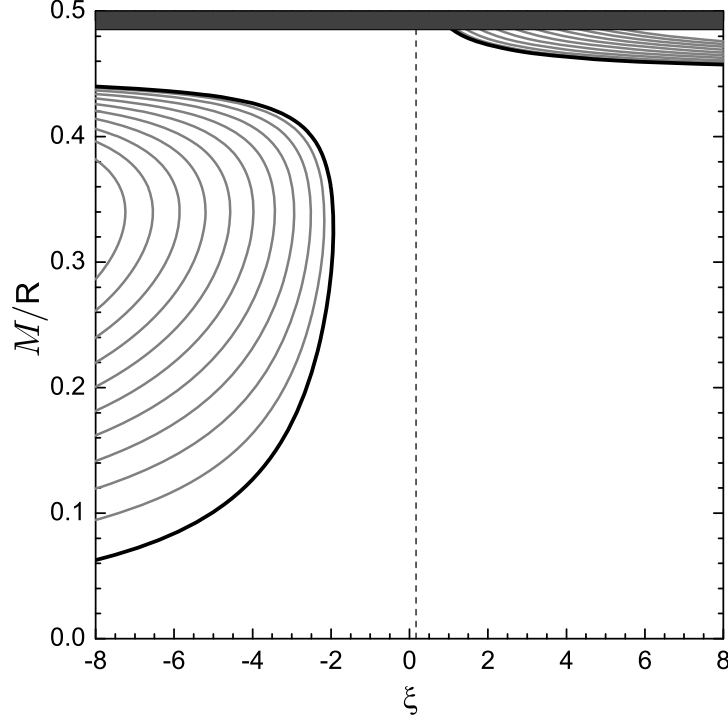


Figura 5.2: Diagrama mostrando as regiões no espaço de parâmetros $(\xi, M/R)$ nas quais a instabilidade é disparada quando $a/M = 0.2$. As curvas pretas são caracterizadas por $\omega_I \approx 0$ e fornecem as fronteiras das regiões instáveis. As curvas cinzas internas são caracterizadas por valores de ω_I que aumentam em passos de 0.04 até $\omega_I = 0.4$. Aqui, tomamos $l_0 = m = 0$. A faixa escura exclui valores de M/R para os quais o critério (5.40) não é satisfeito, e a linha vertical tracejada indica o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$.

de segunda ordem para as funções implícitas na Eq. (5.65). Portanto, escrevemos, até segunda ordem,

$$\chi_{\omega'_0 l}(\rho) = \chi_{\omega'_0 l}^{(0)}(\rho) + \frac{a^2}{M^2} \chi_{\omega'_0 l}^{(2)}(\rho), \quad (5.66)$$

onde $\omega'_0 \equiv -m\tilde{\Omega}/F$ é o valor da frequência ω' quando $\omega = 0$ e

$$\psi_{0lm}(r) = \psi_{0lm}^{(0)}(r) + \frac{a^2}{M^2} \psi_{0lm}^{(2)}(r). \quad (5.67)$$

O limite estático, $a = 0$, é direto [cf. Eqs. (5.44) e (5.46)]:

$$\chi_{\omega'_0 l}^{(0)}(\rho) = \frac{\rho^l}{R^l}, \quad \psi_{0lm}^{(0)}(r) = \frac{Q_l(r/M - 1)}{Q_l(R/M - 1)}, \quad (5.68)$$

onde $Q_l(x)$ é a função de Legendre de segunda espécie. Inserindo as Eqs. (5.66) e (5.67), bem como a Eq. (5.68), nas Eqs. (5.44) e (5.46), vemos que as funções $\chi_{\omega'_0 l}^{(2)}(\rho)$

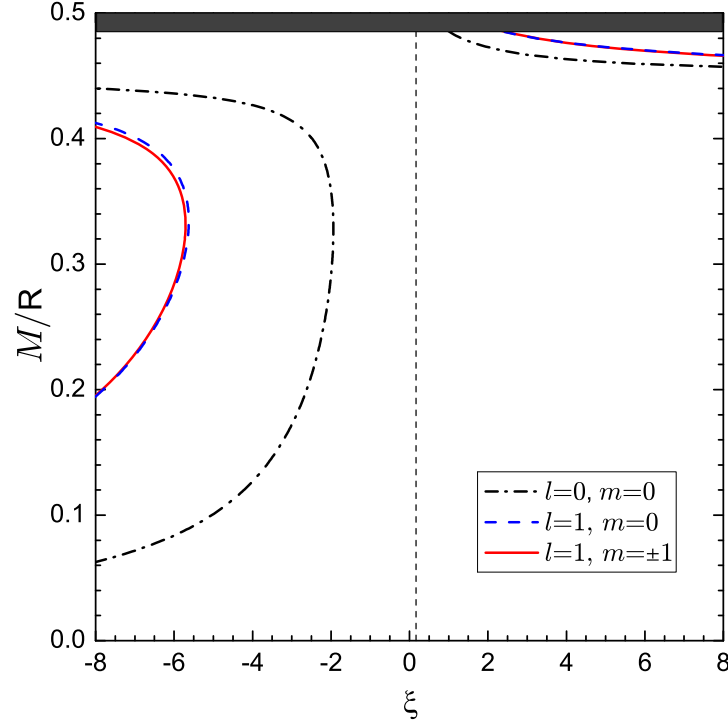


Figura 5.3: Curvas caracterizando a transição da estabilidade para a instabilidade de modos parciais com $l_0 = 0$ e $l_0 = 1$ ($m = 0$ e $m = \pm 1$). A rotação é fixada em $a/M = 0.2$. Configurações instáveis são aquelas à esquerda das curvas do lado esquerdo e à direita das curvas do lado direito. Curvas com o mesmo valor de l_0 e valores opostos de m são degeneradas. O gráfico está restrito ao intervalo de M/R no qual o critério (5.40) é válido. A linha vertical tracejada indica o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$.

e $\psi_{0lm}^{(2)}(r)$ satisfarão equações diferenciais inhomogêneas, que podem ser resolvidas por métodos usuais, como o método da variação dos parâmetros (ver, por exemplo, a Ref. [69]). Em particular, obtemos

$$\left. \frac{d\chi_{\omega_0 l}}{d\rho} \right|_{\text{R}} = \frac{l}{\text{R}} - \frac{4a^2 M^2 m^2}{\text{R}^5 F^2 (3 + 2l)} \quad (5.69)$$

e

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\psi_{0lm}}{dr} \right|_{\text{R}} &= \frac{1}{Q_l(\text{R}/M - 1)} \left. \frac{d}{dr} Q_l(r/M - 1) \right|_{\text{R}} \\ &+ \frac{a^2 C_l}{M^2 Q_l(\text{R}/M - 1)} \left[\left. \frac{dP_l(r/M - 1)}{dr} \right|_{\text{R}} - \frac{P_l(\text{R}/M - 1)}{Q_l(\text{R}/M - 1)} \left. \frac{dQ_l(r/M - 1)}{dr} \right|_{\text{R}} \right], \end{aligned} \quad (5.70)$$

onde

$$C_l \equiv \int_1^\infty dx Q_l(xR/M - 1) \left[\frac{M}{R} \frac{d^2 Q_l(tR/M - 1)}{dt^2} \Big|_{t=x} + \frac{m^2}{x^2 R/M - 2x} Q_l(xR/M - 1) \right]. \quad (5.71)$$

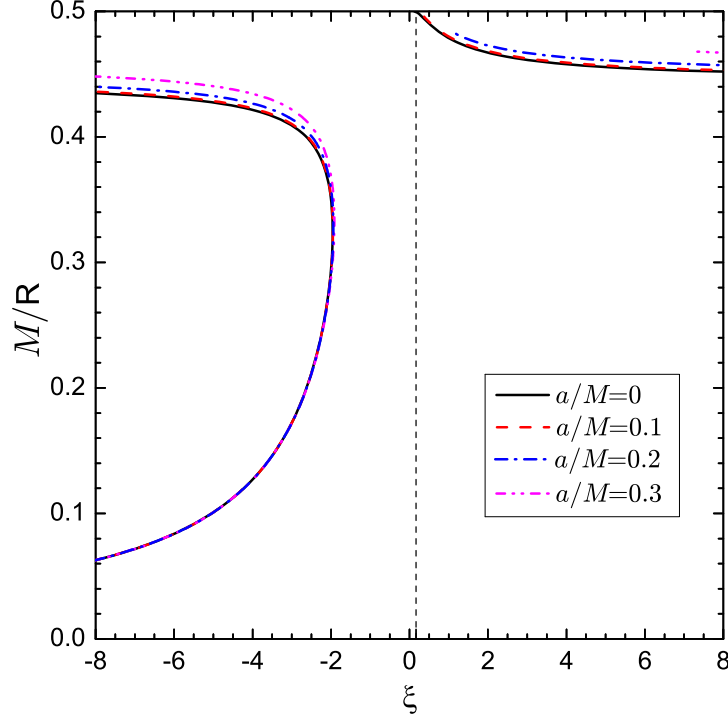


Figura 5.4: Diagrama mostrando as fronteiras ($\omega = 0$, $l_0 = 0$) das regiões no espaço de parâmetros (ξ , M/R) em que o campo é instável para $a/M = 0.1, 0.2$, e 0.3 . O caso estático, $a = 0$, é mostrado como base para a comparação. A linha vertical tracejada indica o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$. Configurações que comportam modos taquiónicos são aquelas à esquerda das curvas do lado esquerdo e à direita das curvas do lado direito. As curvas estão restritas ao intervalo de M/R no qual o critério (5.40) é válido.

Portanto, inserindo as Eqs. (5.68), (5.69) e (5.70) na Eq. (5.65), obtemos uma expressão analítica [exceto pela integral na Eq. (5.71)], que pode ser resolvida diretamente para ξ , resultando nas fronteiras das regiões no espaço de parâmetros em que modos parciais do campo são instáveis. A Fig. 5.3 representa essas curvas limítrofes para $a/M = 0.2$ e diferentes valores de l_0 e m . Claramente, as regiões instáveis para modos parciais com $l_0 = m = 0$ englobam aquelas para multipolos mais altos.

Na Fig. 5.4, as fronteiras ($\omega = 0$, $l_0 = 0$) que determinam as regiões no espaço de parâmetros em que o campo é instável são representadas para diferentes valores de

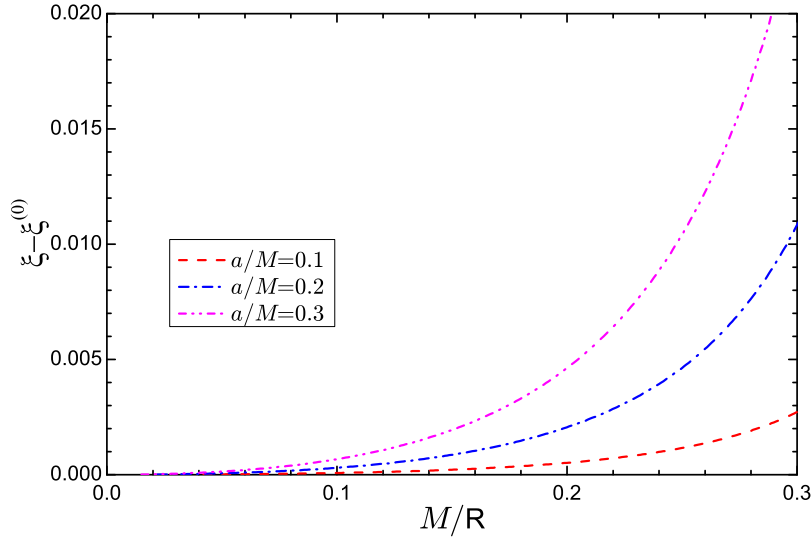


Figura 5.5: Diferença $\xi - \xi^{(0)}$ entre os valores de ξ que descrevem as fronteiras das regiões instáveis para uma casca com rotação e uma configuração estática com a mesma razão de massa por raio equatorial, como função de M/R . Aqui, $l_0 = m = 0$ e $a/M = 0.1, 0.2$ e 0.3 .

a/M . A Fig. 5.5 ilustra um intervalo de valores de M/R que não é claramente visível na Fig. 5.4. Na Fig. 5.5, representamos a diferença $\xi - \xi^{(0)}$ como função de M/R , onde $\xi^{(0)}$ e ξ são dados nas Eqs. (5.60) e (5.65), respectivamente. Das Figs. 5.4 e 5.5, concluímos que o efeito da rotação é transladar as fronteiras de instabilidade para a direita, de forma que a região instável para valores negativos de ξ aumenta e aquela para valores positivos de ξ diminui. O efeito absoluto, contudo, acaba sendo relativamente pequeno, como poderíamos esperar por ser esta uma correção de segunda ordem.

Finalmente, a Fig. 5.6 mostra o valor de $\xi - \xi^{(0)}$ como função de M/R para $a/M = 0.3$, $l_0 = 3$ e $m = 0, \pm 1, \pm 2$ e ± 3 . Diferentemente do caso com $l_0 = 0$, vemos que, para multipolos mais altos, o valor de $\xi - \xi^{(0)}$ não é sempre positivo. Aqui e na Fig. 5.3 fica claro que a inversão do sentido da rotação (descrita por $a \rightarrow -a$ ou por $m \rightarrow -m$) não tem efeito algum sobre o espaço de parâmetros da instabilidade, o que é uma consequência direta do resultado geral discutido na Sec. 5.2. Ainda há, porém, um acoplamento entre a rotação do objeto e o momento angular do campo em ordens superiores; esse acoplamento, que aparece, por exemplo, no termo proporcional a $a^2 m^2$ na Eq. (5.46), quebra a degenerescência em m que é característica do regime estático.

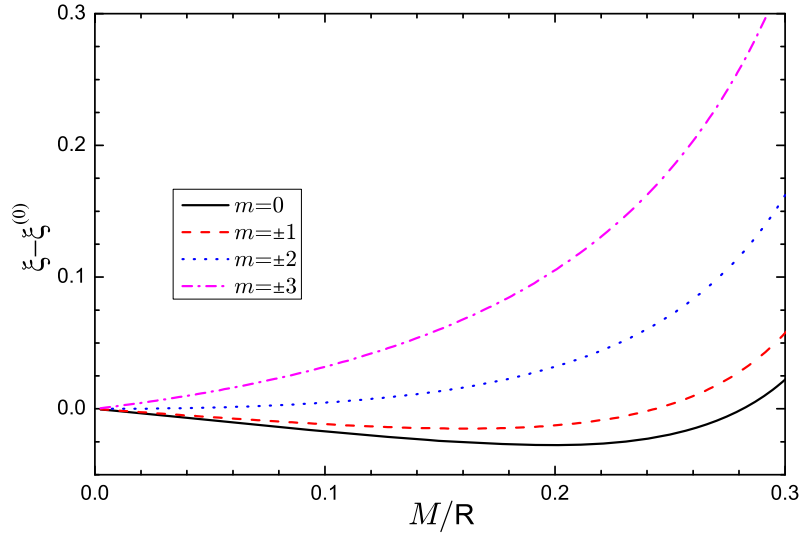


Figura 5.6: Diferença $\xi - \xi^{(0)}$ entre os valores de ξ que descrevem as fronteiras das regiões instáveis para uma casca com rotação e uma configuração estática com a mesma razão de massa por raio equatorial, como função de M/R . Aqui, $a/M = 0.3$, $l_0 = 3$ e $m = 0, \pm 1, \pm 2$ e ± 3 .

5.5 Discussões finais

Em resumo, neste Capítulo vimos que campos escalares não minimamente acoplados podem ser instáveis no espaço-tempo de objetos compactos com rotação para um grande intervalo de acoplamentos do campo e parâmetros descrevendo o espaço-tempo. A instabilidade se manifesta mais naturalmente em uma análise quântica, uma vez que, nesse caso, as próprias flutuações de vácuo do campo podem cumprir o papel de sementes para a fase instável (ver a Sec. 5.1).

Em Relatividade Geral, a rotação se expressa de forma mais evidente por meio do arrasto de referenciais, ou seja, pelo seu acoplamento em primeira ordem com o momento angular de campos ou partículas teste (no caso de um campo, com seu número quântico azimutal). Porém, na Sec. 5.2, nós argumentamos que o espaço de parâmetros que caracteriza a instabilidade de campos escalares não minimamente acoplados no espaço-tempo de um objeto compacto não é afetado em primeira ordem no parâmetro de rotação. Então, estudamos efeitos de segunda ordem nesse parâmetro em um espaço-tempo específico. Para isso, usamos como protótipo de sistema com rotação o espaço-tempo de cascas finas descrito na Sec. 5.3. Esse modelo nos permite realizar um cálculo essencialmente analítico, que tem como principal resultado a Eq. (5.65), que é ilustrada nas Figs. 5.2 - 5.6. Em particular, observa-

mos que as regiões do espaço de parâmetros em que um modo parcial com um certo valor de l_0 é instável são invariantes por $m \rightarrow -m$ mas não degeneradas em m , como vemos nas Figs. 5.3 e 5.6. A Fig. 5.3 também mostra que a instabilidade é desencadeada preferencialmente por modos parciais com $l_0 = 0$. Nossa análise sugere que o efeito geral de pequenas rotações é aumentar o espaço de parâmetros para valores negativos de ξ e diminuir aquele para valores positivos de ξ , como indicado nas Figs. 5.4 e 5.5.

Vale notar que, uma vez que corpos com rotação em geral são oblatos, os resultados aqui obtidos também estão associados ao formato da casca. No entanto, uma comparação clara entre uma casca com rotação (definida pelos valores de a/M e R/M) e uma casca estática com mesma elipticidade não é tão direta, uma vez que, no caso com rotação, observadores estacionários com diferentes velocidades angulares em geral atribuirão elipticidades diferentes ao mesmo objeto. É interessante também fazermos um breve comentário sobre a relação entre nossos resultados a respeito da instabilidade linear de campos não minimamente acoplados no espaço-tempo de corpos com rotação e o efeito não linear conhecido como “escalarização espontânea” [38], que descreveremos em mais detalhes no Cap. 6. Por agora, notamos apenas que nossos resultados estão de acordo com um trabalho recente [46], que mostrou numericamente que estrelas de nêutrons “escalarizadas” com alta rotação existem para um intervalo maior de acoplamentos *negativos* do que no caso estático. Na Ref. [110], argumentou-se que as fronteiras das regiões de parâmetros que caracterizam o tipo de instabilidade linear estudada aqui também delimitam as regiões em que o efeito de escalarização espontânea acontece. Embora o argumento tenha sido feito para sistemas com simetria esférica, o mesmo raciocínio parece ser aplicável ao caso estacionário. Portanto, o comportamento observado nas Figs. 5.4 e 5.5 parece estar de acordo com as conclusões do cálculo numérico desenvolvido na Ref. [46].

Capítulo 6

Sobre o estado final da instabilidade

Nos Capítulos anteriores, que constituem o cerne deste trabalho, focamos no estudo da instabilidade linear de campos não minimamente acoplados no espaço-tempo de objetos compactos, e nas manifestações quântica e clássica da instabilidade. Dentro da aproximação linear que empregamos, está a suposição de que a contribuição do campo para o tensor de energia-momento que gera a geometria espaço-temporal é desprezível e, conseqüentemente, que o campo evolui em um espaço-tempo fixo. Contudo, é claro que tal aproximação é válida apenas até os momentos iniciais após o acionamento da instabilidade, devendo ser abandonada tão logo o tensor de energia-momento do campo (ou, na abordagem quântica, o valor esperado do operador correspondente) se torne comparável às contribuições devidas ao objeto compacto. Assim, para obtermos informações sobre o estado final da instabilidade, é necessário evoluirmos conjuntamente o campo e o espaço-tempo, levando em conta o acoplamento não linear entre eles.

O estudo da forma como, uma vez acionada a instabilidade, o sistema evolui para uma nova configuração de equilíbrio, está, em muitos aspectos, além do escopo deste trabalho. No entanto, neste Capítulo, vamos tecer alguns comentários sobre esse problema, levando em conta resultados chave existentes na literatura e apontando as questões interessantes que, no nosso entender, ainda estejam em aberto nesse contexto. Começaremos, na Sec. 6.1, com alguns comentários sobre o estado final da instabilidade dentro da análise quântica. Embora a evolução do sistema por meio das equações semiclássicas de Einstein seja ainda um problema em aberto, veremos que algumas informações sobre propriedades do estado final da instabilidade podem ser obtidas mesmo dentro da aproximação linear [87]. Por outro lado, é razoável que, uma vez que as flutuações do vácuo se tornem suficientemente grandes, elas de alguma forma “colapsem” em perturbações clássicas — em um processo análogo à formação das anisotropias da radiação cósmica de fundo a partir de flutuações primordiais do vácuo [115] — e que, então, a evolução por

meio das equações clássicas seja adequada. Alguns comentários sobre a transição do regime quântico para o clássico serão feitos na Sec. 6.1.2, extrapolando para o caso de interesse algumas conclusões obtidas na análise do modelo simples de um oscilador harmônico invertido [61]. Na Sec. 6.2, abordaremos o problema da retroação do campo sobre o espaço-tempo do ponto de vista puramente clássico. Em particular, discutiremos o efeito de escalarização espontânea, comentando sobre alguns resultados importantes na literatura a esse respeito. Como a quase totalidade desses resultados foi obtida no contexto de teorias tensor-escalar, nos reportaremos frequentemente ao Apêndice A para fórmulas e conceitos relevantes. Por fim, na Sec. 6.3, comentaremos sobre a possibilidade de se usar dados astrofísicos para se obter informações sobre a existência/inexistência de campos minimamente acoplados na Natureza, apresentando vínculos existentes na literatura e comentando sobre perspectivas interessantes nesse contexto.

6.1 Comentários sobre a evolução quântica

Como vimos no Cap. 2, a instabilidade linear de campos quânticos em certos espaços-tempos manifesta-se, mesmo quando o campo está em seu estado de vácuo, por meio de um crescimento exponencial das flutuações quânticas [cf. Eq. (2.59)] e do valor esperado do tensor de energia-momento do campo nesse estado [cf. Eq. (2.60)]. No caso do espaço-tempo de estrelas relativísticas, o tempo característico da instabilidade é da ordem de $\bar{\Omega}^{-1} \sim 10^{-4}\text{s}$, de forma que, após um intervalo de tempo dessa ordem, a aproximação linear para os campos precisa ser abandonada e efeitos de retroação do campo sobre o espaço-tempo devem ser considerados.

Como discutido na Sec. 2.1.3, é natural postularmos a equação semiclássica

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle, \quad (6.1)$$

para descrever, como uma primeira aproximação, a retroação de campos quânticos sobre o espaço-tempo (clássico). Essa equação é justificada por diferentes aproximações (ver discussão na Sec. 2.1.3), embora seu domínio de aplicabilidade não seja completamente conhecido. Portanto, o problema de interesse é a resolução do sistema formado pela equação de Klein-Gordon [cf. Eq. (2.2)] para um campo quântico e a equação

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{\text{class}} + 8\pi \langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle, \quad (6.2)$$

onde $T_{\mu\nu}^{\text{class}}$ é o tensor de energia-momento das componentes clássicas de matéria e energia que existem no espaço-tempo. Embora a investigação desse problema fuja ao escopo desta Tese, vale ressaltar brevemente alguns pontos aqui. Primeiramente, lembramos que o procedimento de quantização delineado na Sec. 2.2, que

tem como base a escolha de um espaço de Hilbert de estados específico, a princípio não é adequado para espaços-tempos desprovidos de alguma simetria temporal e, nesse caso, outras formulações, como a abordagem algébrica, podem ser mais úteis. Vale também notar que, em geral, o cálculo da retroação de campos quânticos sobre o espaço-tempo é feito perturbativamente (ver a Ref. [51] para um exemplo) e se depara com dificuldades vindas, principalmente, da existência de soluções patológicas e presumivelmente espúrias dessas equações. Tais soluções surgem uma vez que o valor esperado *renormalizado* do tensor de energia-momento, que entra na Eq. (6.1), contém em geral quantidades geométricas com derivadas de ordem superior a 2. Note, porém, que, na presença de instabilidade, o valor esperado do tensor de energia-momento do campo é dominado por modos instáveis de baixa energia [ver, por exemplo, a Eq. (2.60), com a Eq. (2.59)], o que introduz simplificações no cálculo de correções para a métrica devidas ao crescimento exponencial de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}^\Phi \rangle$ e, de certa forma, parece aproximá-lo do cálculo clássico. De qualquer forma, o problema da obtenção de previsões sobre o estado final da instabilidade segundo a abordagem semiclássica, e se estas difeririam das previsões clássicas correspondentes, ainda está em aberto.

6.1.1 Criação de partículas devido à instabilidade taquiônica

Ainda assim, mesmo sem a evolução das equações semiclássicas, é possível obter informações interessantes sobre características do estado final da instabilidade. Em particular, na Ref. [87], mostrou-se que pelo menos parte das flutuações quânticas amplificadas durante a fase instável eventualmente darão origem a criação de partículas, na medida em que o sistema recupera o equilíbrio. Aqui, descreveremos as ideias principais por trás desse resultado.

O ponto de partida para a análise apresentada na Ref. [87] é o reconhecimento de que a retroação do campo sobre o espaço-tempo deve necessariamente levar a uma nova configuração de equilíbrio do sistema. Assim, pode-se supor, como na Sec. 2.3, que o espaço-tempo é plano no passado assintótico (região A) e evolui para uma configuração estática em que o campo é instável (região B). Então, suporemos que mecanismos de retroação entram em cena, reconduzindo o sistema para uma nova configuração estática (região C) na qual o campo escalar é estável. Ou seja, a métrica espaço-temporal pode ser escrita como

$$ds^2 \sim \begin{cases} -dt^2 + d\vec{x}^2 & \text{(A)} \\ N_{(B)}^2(-dt^2 + h_{ij}^{(B)} dx^i dx^j) & \text{(B)} \\ N_{(C)}^2(-dt^2 + h_{ij}^{(C)} dx^i dx^j) & \text{(C)} \end{cases} \quad (6.3)$$

onde $N_{(J)} \equiv N_{(J)}(\vec{x}) > 0$, $J \in \{B, C\}$ são funções suaves, $h_{ij}^{(J)} \equiv h_{ij}^{(J)}(\vec{x})$ e, por simplicidade, a mesma notação é usada para as coordenadas nas três regiões de interesse. Uma vez que a região C é estática, podemos investigar qual é o conteúdo de partículas do campo escalar medido por observadores estáticos nessa região. De fato, vimos na Sec. 2.3 que, mesmo na ausência de instabilidade (ou seja, da região B), o estado $|0_{\text{in}}\rangle$, associado ao vácuo natural na região A, em geral será percebido como repleto de partículas por um observador estático em C [cf. Eq. (2.58) e discussão precedente]. Essa criação de partículas devida à mudança na geometria de fundo torna-se, porém, desprezível no regime adiabático, em que a geometria espaço-temporal muda de forma suficientemente lenta [19]. Porém, como veremos, a presença de uma região intermediária B entre A e C em que o campo é instável amplifica o número de partículas criadas e é relevante mesmo no regime adiabático. Fisicamente, essa produção copiosa de partículas quando o sistema sai da fase instável é devida ao fato de que as flutuações do vácuo $|0_{\text{in}}\rangle$, após serem exponencialmente amplificadas durante a fase B, não poderão, em geral, ser acomodadas como meras flutuações do vácuo $|0_{\text{out}}\rangle$ da região C.

Para estimar o número esperado de partículas criadas, foi analisado, na Ref. [87], o caso particular em que o espaço-tempo é simétrico por reflexão temporal com respeito a uma superfície de Cauchy Σ_{t_S} na região B. Nesse caso, supõe-se que a região C é plana, com elemento de linha igual ao de A. Modos normais em A e C então têm a forma

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}}^{(\pm)} &\stackrel{(A)}{=} (16\pi^3 \omega_{\vec{k}})^{-1/2} \exp[\mp i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x})], \\ \nu_{\vec{k}}^{(\pm)} &\stackrel{(C)}{=} (16\pi^3 \omega_{\vec{k}})^{-1/2} \exp[\mp i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x})]. \end{aligned}$$

Vamos denotar por t_0 a coordenada temporal no início da fase instável B, que tem duração T . Então, similarmente à Eq. (2.58), temos que o número esperado de partículas criadas com número quântico $\vec{k}'$, logo que o sistema sai da região instável, é dado por

$$\langle 0_{\text{in}} | N_{\vec{k}'} | 0_{\text{in}} \rangle = \int d^3 \vec{k} \left| \left(\nu_{\vec{k}'}^{(-)}(t_0 + T, \vec{x}), u_{\vec{k}}^{(+)}(t_0 + T, \vec{x}) \right)_{KG} \right|^2. \quad (6.4)$$

O cálculo do produto interno na Eq. (6.4) é simplificado devido à hipótese de que o espaço-tempo é simétrico por inversão temporal com respeito a Σ_{t_S} , uma vez que isso implica, em particular, que

$$u_{\vec{k}}^{(+)}(t_0, \vec{x}) \stackrel{(B)}{=} \nu_{-\vec{k}}^{(-)}(t_0 + t, \vec{x}).$$

Então, pode-se calcular [87], para $T\bar{\Omega}$ suficientemente grande,

$$\langle 0_{\text{in}} | N_{\vec{k}'} | 0_{\text{in}} \rangle \sim e^{2\bar{\Omega}T} \int d^3 \vec{k} |\zeta_{\vec{k}\vec{k}'}|^2, \quad (6.5)$$

com

$$\zeta_{\vec{k}\vec{k}'} = i[(\alpha_{\bar{\Omega}l\mu;\vec{k}}^* e^{-i\pi/6} - \beta_{\bar{\Omega}l\mu;\vec{k}})\alpha_{\bar{\Omega}l\mu;-\vec{k}'} - (\alpha_{\bar{\Omega}l\mu;\vec{k}}^* - \beta_{\bar{\Omega}l\mu;\vec{k}} e^{i\pi/6})\beta_{\bar{\Omega}l\mu;-\vec{k}'}^*],$$

onde $\alpha_{\bar{\Omega}l\mu;\vec{k}} = (u_{\vec{k}}^{(+)}, w_{\bar{\Omega}l\mu}^{(+)})_{KG}$ e $\beta_{\bar{\Omega}l\mu;\vec{k}} = -(u_{\vec{k}}^{(-)}, w_{\bar{\Omega}l\mu}^{(+)})_{KG}$ são as projeções dos modos $u_{\vec{k}}^{(\pm)}$ sobre o modo taquiônico, na região B, com maior valor de $\Omega (= \bar{\Omega})$. Assim, vemos, da Eq. (6.5), que o número esperado de partículas criadas no final da fase instável é proporcional a $\exp(2\bar{\Omega}T)$. Ele depende essencialmente, portanto, da razão T/τ_0 entre o tempo T de duração da fase instável e o tempo $\tau_0 \equiv \bar{\Omega}^{-1}$ característico da instabilidade; essa razão codifica o quanto as flutuações do vácuo $|0_{\text{in}}\rangle$ são amplificadas durante a fase instável*.

6.1.2 Transição quântico-clássico

Agora, vamos nos concentrar novamente na fase instável e analisar de que forma flutuações do vácuo suficientemente grandes podem ser entendidas classicamente. Boa parte da intuição apresentada aqui foi obtida ao longo das últimas décadas no contexto de modelos cosmológicos de inflação e, em particular, em estudos sobre como flutuações quânticas amplificadas durante a fase inflacionária podem dar origem a perturbações de densidade responsáveis pela formação de estruturas no Universo (ver, e.g., Ref. [115]). Um modelo simples utilizado nesse contexto para exemplificar alguns conceitos é o de um oscilador harmônico quântico invertido [61, 2, 13]. Da mesma forma que, em muitos aspectos, uma teoria de campos é análoga à teoria descrevendo uma coleção de osciladores harmônicos acoplados, a presença de modos instáveis do campo estaria associada a osciladores harmônicos invertidos (ver a Eq. (2.33) e discussão subsequente). Portanto, aqui vamos revisitar, seguindo a Ref. [61], como se dá a transição do regime quântico para o regime clássico no modelo particular de um oscilador harmônico invertido. Muitas das principais características desse modelo podem ser esperadas no caso da instabilidade quântica investigada no Cap. 2.

Seja o Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{k\hat{q}^2}{2} = -\frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger), \quad (6.6)$$

que descreve a evolução dinâmica de uma partícula quântica com massa m em um potencial de oscilador harmônico invertido, com constante de mola k . Na Eq. (6.6), definimos

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right),$$

*Ver a Sec. V B da Ref. [87] para um modelo idealizado que ilustra concretamente essa discussão.

onde $\omega^2 \equiv k/m$.

Vamos adotar a representação de Schrödinger e supor que a função de onda inicial da partícula é uma gaussiana centrada em $q = 0$ e com variância $\hbar/m\omega$, que está associada ao estado $|0\rangle$ tal que $\hat{a}|0\rangle = 0$ (ou seja, o estado de vácuo do oscilador harmônico não invertido correspondente). Para $t > 0$, o estado da partícula é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle = \exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}^2 e^{-2i\phi} - H.c.)\right]|0\rangle, \quad (6.7)$$

onde $r = \omega t$ e $\phi = -\pi/4$. O operador de evolução na Eq. (6.7) tem a forma de um operador de “compressão” (*squeezing*), com parâmetros característicos r e ϕ [138]. O significado físico desse operador será visto adiante e é ilustrado na Fig. 6.1. Em situações mais complexas, como no contexto cosmológico [115] ou para o operador $\hat{H}_{\Omega\sigma}$ na Eq. (2.31), os parâmetros r e ϕ podem ser funções mais gerais do tempo.

A função de onda $\psi(q, t) = \langle q|\Psi(t)\rangle$ obedece

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - \frac{kq^2}{2} \psi$$

e é dada por [61]

$$\begin{aligned} \psi(q, t) &= \frac{\exp\left[-\left(\text{sech}(2\omega t) - i \tanh(2\omega t)\right) \frac{q^2}{2a^2}\right]}{(\pi a^2)^{1/4} (\cosh(\omega t) + i \sinh(\omega t))^{1/2}} \\ &\stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}(\omega t + i\pi/4)} \exp\left[\frac{iq^2}{2a^2} - \frac{q^2}{a^2} e^{-2\omega t}\right], \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde definimos $a^2 = \hbar/m\omega$ e ressaltamos o comportamento da função de onda para $\omega t \gg 1$, que é o limite de interesse aqui. Podemos então calcular algumas quantidades de interesse. Em particular, temos $\langle \hat{q} \rangle = 0$ e

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq q^2 |\psi(q, t)|^2 \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a^2}{4} e^{2\omega t}, \quad (6.9)$$

ou seja, a função de onda da partícula é uma gaussiana cuja variância aumenta exponencialmente no tempo. O mesmo comportamento é observado para a distribuição de momento. Vale ressaltar a semelhança entre o crescimento exponencial de $\langle \hat{q}^2 \rangle$ e de $\langle \hat{\Phi}^2 \rangle$ nas Eqs. (6.9) e (2.59), respectivamente.

Uma das formas de caracterizarmos a transição do regime quântico para o regime clássico é por meio de propriedades da função de Wigner correspondente. A transformada de Wigner [141] da função de onda $\psi(q, t)$ é definida como

$$W(t, q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipy/\hbar} \psi^*(q + y/2, t) \psi(q - y/2, t) dy. \quad (6.10)$$

A partir da função de Wigner $W(t, q, p)$, a distribuição de probabilidade de q é obtida como uma distribuição marginal em p e vice-versa. Porém, em geral $W(t, q, p)$ não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade conjunta de q e p uma vez que não é positivo definida. De fato, entende-se que a existência de regiões em que a função de Wigner é negativa esteja intimamente ligada a propriedades intrinsecamente quânticas do sistema; por exemplo, emaranhamento (ver, e.g., a Ref. [139] e referências aí para uma discussão teórica e a Ref. [43] para um exemplo experimental a esse respeito).

Usando a Eq. (6.8), podemos calcular, para $t = 0$,

$$W(0, q, p) = \frac{1}{\hbar\pi} e^{-a^2 p^2 / \hbar^2} e^{-q^2 / a^2} \quad (6.11)$$

e, para $\omega t \gg 1$,

$$W(t, q, p) \sim \frac{1}{\hbar\pi} \exp \left[- \left(p - \frac{\hbar q}{a^2} \right)^2 e^{2\omega t} \frac{a^2}{2\hbar^2} \right] \exp \left[- \frac{2q^2}{a^2} e^{-2\omega t} \right]. \quad (6.12)$$

A Fig. 6.1 ilustra a função de Wigner para $\omega t = 0$ e $\omega t = 3$ no espaço de fase do sistema. Note que, nesse regime, $W(t, q, p) > 0$, o que torna possível interpretá-la como uma distribuição de probabilidade clássica conjunta sobre posições e momentos[†]. Por outro lado, uma prescrição para obtermos o limite clássico de uma teoria é tomarmos o limite formal $\hbar \rightarrow 0$ (ver a Ref. [139] e referências aí). No nosso caso, isso significa que as distâncias de interesse obedecem $q^2 \gg a^2 = \hbar/m\omega$. Para $\omega t \gg 1$, temos

$$W(t, q, p) \stackrel{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-\omega t} \exp \left[- \frac{2q^2}{a^2} e^{-2\omega t} \right] \delta(p - q\sqrt{m\hbar}), \quad (6.13)$$

onde usamos a Eq. (6.12) e a representação da distribuição delta $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-x^2/4\epsilon} = \delta(x)$. A Eq. (6.13) implica que, para $\omega t \gg 1$ e no limite em que as distâncias relevantes são muito maiores que $\sqrt{\hbar/m\omega}$, o momento da partícula é bem definido ($p = q\sqrt{m\hbar}$) e sua posição obedece uma distribuição clássica de probabilidade. Note que o momento $p = q\sqrt{m\hbar}$ é o mesmo que teria uma partícula clássica inicialmente em repouso que rolasse do topo do potencial até o ponto q . A trajetória obedecida pela partícula pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$q(t) = q_0 e^{\omega t}, \quad (6.14)$$

[†]O fato de que, em algum regime, a função de Wigner pode ser vista como uma distribuição de probabilidade conjunta sobre posições e momentos significa que o sistema quântico em questão pode ser descrito por uma teoria clássica probabilística. É uma questão de terminologia, então, dizer que esse sistema está em um estado clássico ou não, uma vez que várias características fundamentais da Mecânica Quântica não podem ser acessadas por uma teoria clássica probabilística (por exemplo, violação das desigualdades de Bell [15]).

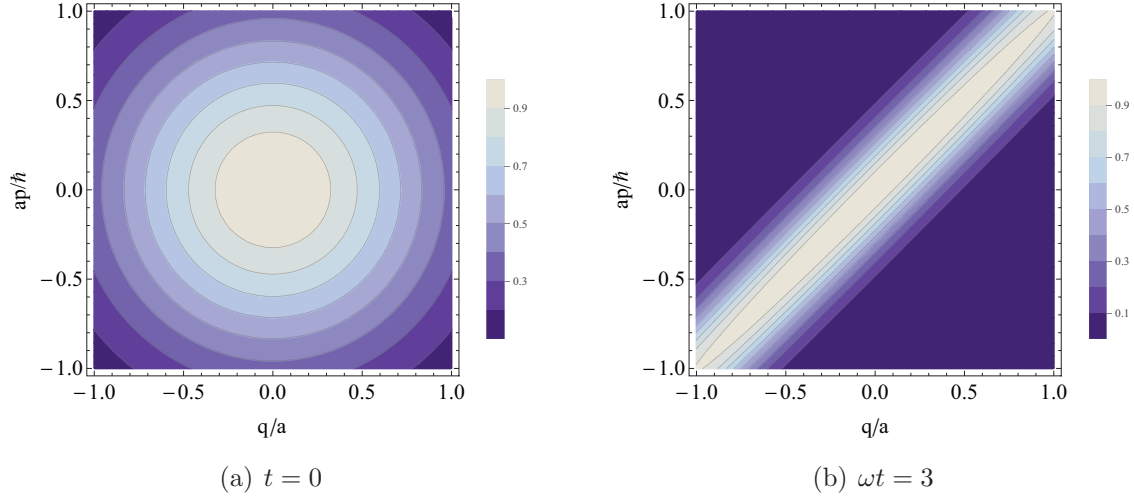


Figura 6.1: Distribuição de quasi-probabilidade determinada pela função de Wigner para (a) $\omega t = 0$, quando o estado da partícula é descrito por uma função de onda gaussiana centrada na origem e com variância $a^2 = \hbar/m\omega$ e para (b) $r = \omega t = 3$, quando o estado da partícula é um estado comprimido (*squeezed*). Aqui, fica claro que o efeito do operador de evolução temporal é comprimir o estado ao longo do eixo $q = p$. Isso reflete o fato de que, na teoria clássica com Hamiltoniano (6.6), o valor de $p + q$ cresce exponencialmente no tempo, ao passo que o valor de $p - q$ decresce exponencialmente [2].

onde usamos que $p = q\sqrt{mk}$ e que $dq/dt = p/m$. Por outro lado, a constante q_0 é uma variável aleatória, que obedece uma distribuição de probabilidade gaussiana [cf. Eq. (6.13)]:

$$P(q_0) = P(q) \frac{dq}{dq_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-2q_0^2/a^2}.$$

De forma alternativa, escrevendo $q_0 = \pm a \exp(-\omega\tau)$, temos que

$$q(t) = \pm a e^{-\omega(t-\tau)},$$

onde a distribuição de probabilidade para τ é dada por (ver a Fig. 6.2)

$$P(\tau) = 2P(q_0) \left| \frac{dq_0}{d\tau} \right| = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega e^{-\omega\tau} \exp(-2e^{-2\omega\tau}). \quad (6.15)$$

Portanto, pode-se interpretar a variável aleatória q_0 como estabelecendo um tempo característico τ , de origem quântica, mas obtido a partir de uma distribuição clássica de probabilidade, que determina uma defasagem temporal para que a partícula comece a rolar do topo do potencial.

Para a instabilidade quântica investigada no Cap. 2, é razoável que conclusões semelhantes se apliquem, tendo em vista a semelhança do operador Hamiltoniano

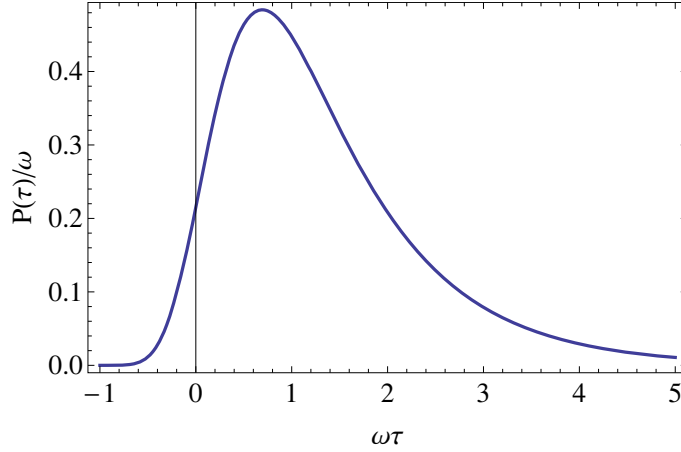


Figura 6.2: Distribuição de probabilidade $P(\tau)$ dada na Eq. (6.15).

(2.33) com o modelo de osciladores harmônicos invertidos descrito aqui. Em particular, para $\Omega t \gg 1$ (onde $\Omega^{-1} \sim R_s$ é o tempo característico da instabilidade), espera-se, analogamente à Eq. (6.14), que o campo Φ possa ser evoluído deterministicamente a partir de uma amplitude inicial Φ_0 , obtida a partir de uma distribuição clássica de probabilidade. É claro que ainda permanece a questão, ligada ao problema fundamental da medida em Mecânica Quântica, de como a Natureza seleciona, a partir dessa distribuição de probabilidade, o valor específico de q_0 (ou Φ_0) que é inferido classicamente.

6.2 Comentários sobre a evolução clássica

Na Seção anterior, argumentamos, com base no modelo de oscilador harmônico invertido [61], que, para um tempo $t = \tau_0 \gg \Omega^{-1}$, ou seja, muito maior que o tempo característico da instabilidade, e quando as distâncias relevantes são muito maiores que $\sqrt{\hbar/m\omega}$, as flutuações quânticas do campo devem se comportar como perturbações clássicas, seguindo trajetórias bem definidas no espaço de fase. A amplitude do campo em $t = \tau_0$ seria determinada a partir de uma distribuição probabilística (clássica), que emerge do tratamento quântico do sistema. Portanto, a partir de um certo momento, as equações clássicas devem ser adequadas para estudarmos o desenvolvimento da instabilidade e seu estado final. Ou seja, devemos resolver o sistema acoplado de equações não lineares dado por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^m + 8\pi T_{\mu\nu}^\Phi, \quad (6.16)$$

$$(-\nabla_\mu \nabla^\mu + \tilde{m}^2 + \xi R)\Phi = 0, \quad (6.17)$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^m = 0, \quad (6.18)$$

com condições iniciais apropriadas, onde $T_{\mu\nu}^\Phi$ é o tensor de energia-momento do campo, Eq. (2.3), e $T_{\mu\nu}^m$ é o tensor de energia-momento das demais componentes de matéria, que obedece a equação de conservação (6.18). Antes de comentarmos sobre alguns resultados existentes na literatura em que a evolução numérica do sistema de equações (6.16)-(6.18) é realizada, é interessante discutirmos de que forma algumas informações importantes sobre o estado final da instabilidade podem ser obtidas por meio da análise das soluções *de equilíbrio* desse sistema.

Para isso, considere uma configuração de equilíbrio $C = \{g_{\mu\nu}, \psi^{\text{mat}}, \Phi = 0\}$ do sistema de equações (6.16)-(6.18), que descreve, por exemplo, o espaço-tempo de uma estrela relativística descrita por campos de matéria ψ^{mat} . Vamos supor que, para uma estrela com mesma composição, o sistema (6.16)-(6.18) possua outra solução de equilíbrio $C' = \{g'_{\mu\nu}, \psi^{\text{mat}}, \Phi'\}$, com um perfil não trivial para o campo escalar (ver a Fig. 6.3 para um exemplo). Nesse caso, se a configuração C for instável por pequenas perturbações do campo escalar e se a configuração C' for estável e energeticamente favorável, é natural supor que o sistema evolua de C para C' , irradiando a diferença de energia entre as duas configurações na forma de ondas gravitacionais e do campo Φ . Esse fenômeno, conhecido como “escalarização espontânea”[‡], foi descoberto em 1993 no contexto de teorias tensor-escalar (TTE) [38] e promoveu novo ímpeto no estudo de tais teorias [39, 66, 107, 41, 67, 119] (ver também trabalhos mais recentes como [3, 118, 126, 55, 46, 12], para citar apenas alguns).

Nesse contexto, vale ressaltar alguns pontos. Primeiramente, é interessante notarmos que o espaço de parâmetros para o qual a configuração de campo nulo (C) é linearmente instável (ver Fig. 2.2) é o mesmo em que existem soluções de equilíbrio “escalarizadas” (C'), ou seja, com um perfil não trivial para o campo escalar. Isso foi notado inicialmente na Ref. [66] para uma certa TTE e mostrado numericamente para o caso de campos não minimamente acoplados na Ref. [110]. A razão matemática dessa coincidência pode ser vista da seguinte forma [110]. Vimos, nos Capítulos anteriores, que as fronteiras que demarcam as regiões no espaço de parâmetros em que o campo é linearmente instável correspondem à presença de modos de frequência nula, $\omega = 0$. Esses modos são efetivamente soluções estáticas da Eq. (6.17) para um espaço-tempo fixo. Por outro lado, as fronteiras das regiões em que existem configurações de equilíbrio “escalarizadas” estão associadas a uma amplitude arbitrariamente pequena do campo, $\Phi \approx 0$, de forma que a contribuição de $T_{\mu\nu}^\Phi$ na Eq. (6.16) é desprezível. Portanto, buscar soluções de equilíbrio do sistema de

[‡]O nome “escalarização espontânea” foi dado devido à analogia com o fenômeno de magnetização espontânea, no qual materiais ferromagnéticos abaixo da temperatura de Curie adquirem uma magnetização não nula mesmo na ausência de um campo magnético externo [39].

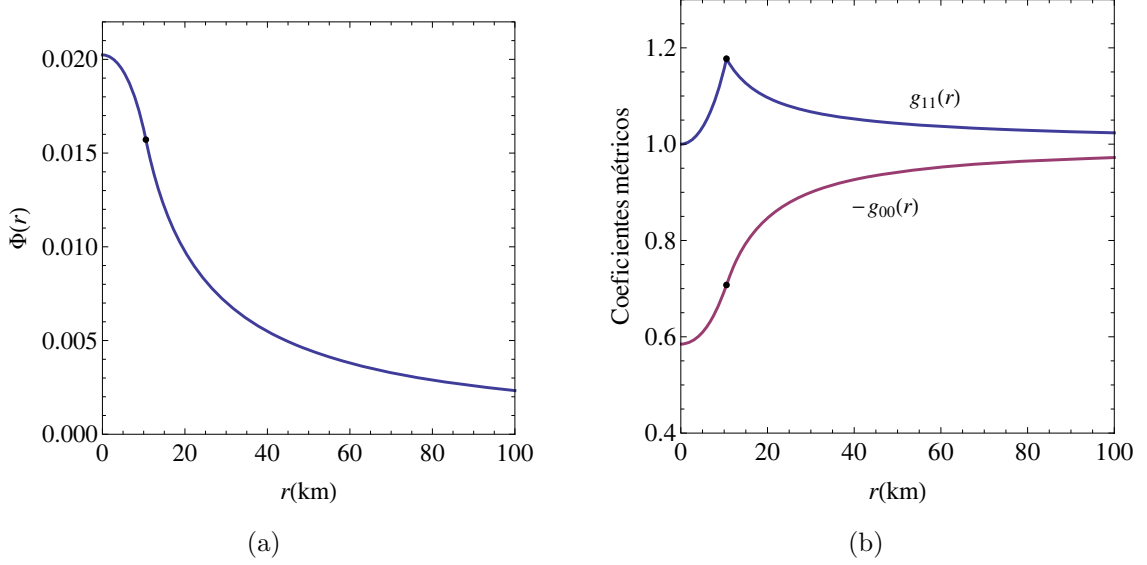


Figura 6.3: Exemplo de configuração de equilíbrio com perfil não trivial do campo escalar (“escalarização espontânea”). Aqui, construímos uma solução de equilíbrio com simetria esférica para o sistema de equações (6.16)-(6.18), considerando uma estrela com densidade constante, $\rho \sim 7.4\rho_{\text{nuc}}$ ($\rho_{\text{nuc}} = 1.66 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$) e um campo escalar com acoplamento $\xi = -12$. Em (a), mostramos o perfil do campo escalar e, em (b), os coeficientes métricos $-g_{00}$ e g_{11} , como função de r . Os pequenos pontos mostram a localização da superfície da estrela ($R_s \sim 10.5 \text{ km}$). A massa total do sistema é $M_{\text{ADM}} \sim 0.44M_{\odot}$ ($GM_{\text{ADM}}/Rc^2 \sim 0.12$). Aqui, integramos as equações da forma descrita na Ref. [119] (note que é necessário aplicar a transformação $\xi \rightarrow -\xi/2$ às equações mostradas nessa referência por consistência com as convenções adotadas aqui). Como mostrado, por exemplo, na Ref. [110], o espaço de parâmetros para o qual configurações “escalarizadas” de equilíbrio existem é o mesmo em que a configuração com campo nulo é instável.

equações (6.16)-(6.18) se reduz a buscar uma solução estática para o campo obedecendo a Eq. (6.17) em um espaço-tempo fixo. Assim, as equações a serem resolvidas são as mesmas e as mesmas condições de contorno — regularidade e decaimento assintótico — se aplicam nos dois casos.

Portanto, se um campo com acoplamento ξ é linearmente instável no espaço-tempo de uma estrela relativística com razão massa-raio M/R_s , podemos esperar que existam outras configurações de equilíbrio para a mesma estrela, mas em que o campo possua um perfil não trivial. Assim, o próximo passo é sabermos se a configuração escalarizada é energeticamente favorável à configuração com $\Phi \approx 0$ ou

não. Para isso, pode-se analisar a energia de ligação do sistema, definida como

$$E_b \equiv \bar{m} - M,$$

onde $\bar{m}$ é a massa bariônica da estrela e M é a massa total do sistema. Com essa definição, configurações com $E_b > 0$ são gravitacionalmente ligadas e, para $\bar{m}$ fixa, a configuração com maior energia de ligação é energeticamente favorecida. Análises ao longo dessas linhas foram feitas, por exemplo, nas Refs. [119, 107, 110]. A conclusão a que se chega é que, para $\xi < 0$ e $\bar{m}$ fixo, tem-se que $E_b > 0$ e $E_b|_{C'} > E_b|_C$, ou seja, a configuração escalarizada é energeticamente favorável àquela com $\Phi = 0$. Por outro lado, para $\xi > 0$, mostrou-se que, quando $E_b > 0$, $E_b|_{C'} < E_b|_C$, ou seja, a configuração escalarizada é energeticamente desfavorável com relação àquela com $\Phi \approx 0$ [110].

Portanto, análises de balanço energético indicam que, para $\xi < 0$, o provável estado final da instabilidade é uma configuração com perfil não trivial para o campo escalar. Essa conjectura é apoiada por trabalhos em que o sistema de equações (6.16)-(6.18) foi de fato evoluído numericamente. Em particular, na Ref. [107], a transição dinâmica para uma configuração escalarizada foi estudada numericamente pela primeira vez. O autor considerou uma configuração inicial instável com campo $\Phi \approx 0$ e acompanhou a evolução do sistema: as fortes flutuações sofridas pelo raio e densidade central da estrela até a restituição do equilíbrio, e o aumento do valor (absoluto) central do campo escalar, que desenvolve um perfil não trivial. Mostrou-se que existem duas configurações escalarizadas (associadas a Φ e $-\Phi$), que são estáveis, e que o campo instável evolui para uma delas. A diferença de energia entre a configuração inicial e final é irradiada como ondas gravitacionais: a maior parte é irradiada rapidamente nos estágios iniciais da evolução, quando o campo escalar evolui para seu novo valor, e o restante é irradiado posteriormente por oscilações quasinormais da estrela e do campo escalar. Embora, nesse estudo, tenha-se assumido um espaço-tempo estático com um perfil de campo $\Phi = 0$ instável, a situação física que o inspira é a de uma estrela relativística que acreta matéria, tornando-se progressivamente mais compacta, até o momento em que adentra a região em que o perfil de campo $\Phi = 0$ é instável. Estudos semelhantes também foram feitos no contexto de estrelas de bósons [3]. Um outro cenário, bastante natural, explorado recentemente [12] é o da fusão de estrelas de nêutrons. Embora a formulação numérica nesse caso seja bastante diferente, a intuição física é semelhante: quando separadas, as estrelas não são suficientemente compactas para que a configuração trivial do campo seja instável; porém, na medida em que se aproximam, o sistema pode se tornar suficientemente compacto para que o perfil trivial do campo se torne instável e a evolução para uma configuração escalarizada é então observada.

Por outro lado, análises de balanço energético indicam que, para $\xi > 0$, a configuração escalarizada é energeticamente desfavorecida, o que sugere um estado final diferente para a instabilidade; por exemplo, um colapso gravitacional prematuro ou uma explosão em que a estrela libere matéria e torne-se menos compacta, de modo que a configuração de campo nulo volte a ser estável. No entanto, não existem, até o presente, resultados numéricos da evolução do sistema nesse caso, o que o torna um problema interessante em aberto.

6.3 Vínculos sobre campos não minimamente acoplados com base em dados astrofísicos

A instabilidade de campos não minimamente acoplados (pouco massivos ou sem massa) em ambientes astrofísicos e a possibilidade de reestabilização do sistema por meio do efeito de escalarização espontânea abrem perspectivas interessantes para a obtenção de informações sobre a existência ou inexistência de tais campos na Natureza com base em observações astrofísicas. De fato, como discutimos no fim do Apêndice A, observações e experimentos no regime de campo gravitacional fraco são incapazes de colocar vínculos sobre a existência de campos não minimamente acoplados. No entanto, isso passa a ser possível no regime de campo gravitacional forte[§]. Nesta Seção, discutiremos brevemente os vínculos existentes e perspectivas a esse respeito.

Pouco tempo depois da descoberta do mecanismo de escalarização espontânea em TTE [38], as consequências observacionais desse efeito passaram a ser investigadas. Em particular, na Ref. [39], foram analisadas as implicações da escalarização em sistemas binários contendo pulsares: mostrou-se que o momento de inércia do pulsar sofreria uma variação temporal causada pelo perfil não trivial de campo escalar ao redor do companheiro, e que essa variação teria um efeito observável no período do sinal do pulsar. Os vínculos no espaço de parâmetros de TTE gerais (parametrizadas pelos valores de α_0 e β_0 discutidos no Apêndice A) continuam a melhorar e restringir ainda mais fortemente o espaço de teorias viáveis [55].

Em particular, no caso de campos não minimamente acoplados sem massa, para

[§]Para teorias tensor-escalar gerais, experimentos e observações no regime de campo fraco são capazes apenas de colocar vínculos sobre o parâmetro $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_0)$, que é identicamente nulo no caso de campos não minimamente acoplados. Por outro lado, a instabilidade que surge no regime de campo forte, bem como o fenômeno de escalarização espontânea, dependem basicamente do parâmetro $\beta_0 \equiv d\alpha/d\varphi|_{\varphi=\varphi_0}$, que é inacessível ao regime de campo fraco (cf. Sec. A.2).

os quais $\alpha_0 = 0$ e $\beta_0 = 2\xi$, os vínculos existentes implicam que valores de

$$\xi < \xi_{\text{exc}} \approx -2.4 \quad (6.19)$$

estão excluídos por medidas do período de pulsares[¶] [39, 55]. Para $-2.4 \approx \xi_{\text{exc}} < \xi < \xi_c \approx -2.17$, o efeito de escalarização ainda pode ocorrer para certos sistemas [67], e novas observações do período de pulsares podem colocar vínculos nessa faixa de acoplamentos. É importante notar que os valores exato de ξ_{exc} e ξ_c dependem da equação de estado atribuída à estrela [41]. Além disso, o valor de ξ_c pode aumentar se o sistema em questão tiver uma rápida rotação [46] (ver também discussão no final do Cap. 5).

Para $\xi_c < \xi \leq 0$, a configuração de campo escalar nulo é estável e a existência de campos com tais acoplamentos não pode ser testada por meio dos mecanismos descritos aqui. Por outro lado, vimos que campos com acoplamento $\xi > 0$ podem ser instáveis no espaço-tempo de certos objetos compactos e que, nesse caso, a configuração escalarizada é energeticamente desfavorecida com relação àquela de campo nulo. Embora o estudo numérico do estado final da instabilidade para $\xi > 0$ seja um problema interessante a ser explorado, é razoável supor que, nesse caso, a estrela colapse ou expulse matéria de forma a tornar-se menos compacta e sair da região de instabilidade. Portanto, a princípio, a observação de estrelas de nêutrons com equação de estado conhecida e razão massa-raio suficientemente grande para disparar a instabilidade de campos com certos acoplamentos $\xi > 0$ permitiria colocar vínculos importantes sobre a existência de campos escalares com tais acoplamentos. No entanto, ainda hoje existe uma grande incerteza sobre a equação de estado de estrelas de nêutrons [88] e sobre a melhor forma de inferir o raio dessas estrelas a partir de observações astrofísicas [128]. Para diferentes modelos de equação de estado, o valor máximo permitido da razão massa-raio em geral se encontra entre 0.2 e 0.3 [59, 88], o que é consistente com as inferências para o valor dessa quantidade a partir das observações existentes [128, 108, 62]. Por exemplo, a massa e o raio da estrela de nêutrons no sistema binário 4U 1820-30 são estimados como $M/M_\odot = 1.58 \pm 0.06$ e $R = 9.1 \pm 0.4$ km [62], de forma que $GM/Rc^2 = 0.26 \pm 0.02$. Além de um conhecimento relativamente preciso sobre razões massa-raio de estrelas

[¶]É interessante notar que, para TTE mais gerais, em que $\alpha_0 \neq 0$, outros limites podem ser impostos com base em experimentos de campo gravitacional fraco e vínculos sobre a emissão de ondas escalares em sistemas binários contendo pulsares (ver a Fig. 7 da Ref. [55] para limites recentes). De fato, um dos desvios mais marcantes de TTE com relação à Relatividade Geral é a possibilidade de emissão de ondas escalares. Isso contribui, em particular, para a variação observada do período orbital de pulsares e também seria perceptível em experimentos de ondas gravitacionais [41].

bastante compactas, para colocarmos vínculos significativos sobre $\xi > 0$, é também preciso um bom entendimento da equação de estado desses objetos, uma vez que, como vimos na Fig. 2.2, a escala do eixo vertical é bastante modificada em função da equação de estado adequada. Uma análise cuidadosa desses aspectos é uma questão bastante interessante em aberto, e que muito se beneficiará da melhoria das técnicas observacionais e do entendimento teórico dos processos astrofísicos associados a estrelas de nêutrons.

Capítulo 7

Conclusões

O trabalho desenvolvido nesta Tese se insere, a meu ver, dentro de dois grandes programas. O primeiro, descrito com mais detalhes no Cap. 1, se refere à busca por fenômenos de gravitação quântica de baixas energias, dentro do programa de Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos, com o intuito de colaborar para o entendimento dos fundamentos de gravitação quântica. O segundo diz respeito ao estudo da fenomenologia de modelos e teorias que, em um certo limite, são indistinguíveis dos modelos-padrão, na tentativa de explorar regimes em que os desvios entre eles passem a ser observáveis. De fato, na área de Gravitação e Cosmologia, por exemplo, contamos atualmente com uma grande abundância de dados observacionais que vão desde a nossa vizinhança, no sistema solar, até as largas escalas cosmológicas, tornando possíveis os mais variados testes das teorias e modelos existentes.

Em particular, nesta Tese, estudamos certos aspectos da fenomenologia da classe de campos escalares definida pela ação (2.1) em espaços-tempos astrofísicos. No regime de gravitação fraca, não é possível discernir a presença de tais campos se sua amplitude é arbitrariamente pequena. No entanto, para campos gravitacionais mais intensos, como no espaço-tempo de estrelas relativísticas, essa configuração de campo nulo é instável. O que se mostrou nas Refs. [95, 93], que motivaram a maior parte deste trabalho, é que, mesmo na ausência de perturbações clássicas, a instabilidade se manifesta por meio da amplificação das flutuações quânticas do campo. Nesse caso, a evolução subsequente do sistema é ditada pelas leis quânticas, pelo menos até o momento em que o sistema perca coerência e emerja no regime clássico (cf. Sec. 6.1.2). A primeira parte do trabalho desta Tese, descrita no Cap. 3, consistiu em realizar uma análise comparativa entre a descrição quântica da instabilidade e a abordagem clássica, via modos quasinormais. Vimos que as condições que caracterizam a instabilidade são as mesmas quântica ou classicamente. Por outro lado, contrariamente à análise clássica, que requer a presença de perturbações iniciais para que a instabilidade se manifeste, as flutuações de vácuo são sementes naturais para a

fase instável. Para que o sistema possa ser tratado classicamente, a amplitude média das perturbações iniciais deve ser muito maior que $\sqrt{\hbar}$, caso contrário, o tratamento quântico é mais adequado.

A segunda parte desta Tese, descrita nos Caps. 4 e 5, consistiu em explorar o espaço de parâmetros que caracteriza a instabilidade de campos não minimamente acoplados sem massa, no espaço-tempo de cascas esferoidais e com rotação. O modelo de cascas finas de matéria foi utilizado como protótipo de objeto compacto por sua maior simplicidade matemática: de fato, especialmente no Cap. 5, foi possível obter uma expressão essencialmente analítica para o desvio da fronteira das regiões instáveis devido à rotação. Como discutimos no Cap. 6, o espaço de parâmetros da instabilidade é o mesmo do fenômeno de escalarização espontânea, o que torna os resultados dos Caps. 4 e 5 relevantes também para o estudo desse fenômeno. Em particular, no Cap. 4, fomos capazes de explorar o espaço de parâmetros da instabilidade no espaço-tempo de objetos bastante prolatos (com razão de até $n = 0.25$ entre seu comprimento próprio equatorial e meridional, cf. Fig. 4.7). Por outro lado, a classe de cascas estudadas nesse Capítulo necessariamente têm $n \lesssim 1.3$ e os resultados para cascas oblatas nos permitem considerar apenas parte do espaço de parâmetros de interesse (cf. Fig. 4.8). No Cap. 5, generalizamos o estudo do “efeito do despertar do vácuo” para o caso estacionário e, para o modelo de cascas com rotação investigado, concluímos que, até $O(a^2/M^2)$, o efeito da rotação é aumentar o espaço de parâmetros para $\xi < 0$ e diminuir aquele para $\xi > 0$ (cf. Figs. 5.4 e 5.5), de acordo com resultados recentes sobre escalarização espontânea em teorias tensor-escalar [46].

Entre as questões interessantes que estão em aberto, se destacam, a meu ver, as seguintes: (i) o estudo do desenvolvimento da instabilidade com base nas equações semiclássicas e um entendimento mais detalhado da “classicalização” do sistema, (ii) a evolução numérica das equações clássicas de movimento para determinar o estado final da instabilidade para $\xi > 0$, (iii) a investigação de formas em que os dados observacionais existentes hoje e prometidos por experimentos futuros possam ser usados para colocar melhores vínculos sobre os campos existentes na Natureza, especialmente para $\xi > 0$.

Em suma, a busca por efeitos quânticos em espaços curvos é importante não só por permitir *insights* sobre certos fundamentos de gravitação quântica a baixas energias, mas também pode ter efeitos observáveis mensuráveis, contribuindo para testes de teorias e modelos.

Apêndice A

Teorias Tensor-Escalar

Teorias Tensor-Escalar (TTE) são extensões da Relatividade Geral, em que a gravitação é mediada não só por um campo de spin 2, mas também por um ou mais campos escalares adicionais. Dentre as TTE, a teoria de Brans-Dicke [22] é a mais simples e bem conhecida, mas a classe abrange diversas outras teorias de interesse [37, 38] (ver a monografia [78] para uma revisão bibliográfica sobre o tema).

Parte da motivação para o estudo de TTE vem de teorias de gravitação quântica como a teoria de cordas, cujo limite de baixas energias contém uma grande quantidade de campos escalares pouco massivos [9]. Além disso, teorias como as TTE oferecem uma estrutura concreta para se interpretar testes da Relatividade Geral no regime de campo forte. De fato, no regime de campo fraco, ou *pós-newtoniano*, os possíveis desvios da Relatividade Geral podem ser parametrizados de uma forma geral e independente da teoria fundamental subjacente [142]. Contudo, no regime de campo forte, não existe uma parametrização completamente geral dos desvios da RG, e frequentemente é útil explorar as consequências observacionais de teorias específicas [143].

Aqui, exporemos as definições básicas de TTE, sua formulação geral e nas representações de Einstein e de Jordan. Comentaremos também sobre os vínculos colocados sobre TTE no regime de campo fraco (os vínculos no regime de campo forte são descritos no Cap. 6). Como veremos, as TTE abarcam o caso de um campo escalar livre não minimamente acoplado com a gravitação, Eq. (2.1), como um caso particular, o que torna muitos dos estudos feitos nesse contexto relevantes para o nosso problema.

A.1 Definições básicas e diferentes representações

A ação fundamental que descreve Teorias Tensor-Escalar com apenas um campo escalar extra é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [A(\varphi)R - 2B(\varphi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - V(\varphi)] + S_m[\Psi, a^2(\varphi)g_{\mu\nu}]. \quad (\text{A.1})$$

O primeiro termo na Eq. (A.1) é ação gravitacional, que conta com um termo cinético para a métrica, ponderado por uma função arbitrária do campo φ , além de um termo cinético e um potencial para o campo escalar φ . O segundo termo consiste na ação que descreve os campos de matéria, denotados coletivamente por Ψ , e que se acoplam com a combinação $a^2(\varphi)g_{\mu\nu}$.

A escolha das funções A, B, V e a , em princípio, determinaria uma teoria específica dentro da classe descrita pela Eq. (A.1). Porém, existe alguma redundância na forma como escrevemos a Eq. (A.1), uma vez que algumas das funções A, B, V e a podem ser escolhidas sem perda de generalidade, ou seja, sem determinar uma teoria específica dentro da classe. Para mostrarmos isso, notemos que a ação (A.1) é formalmente invariante por transformações conformes arbitrárias, da forma $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu}$ *. Essa propriedade nos permite igualar uma das funções A, B, V ou a a uma constante não nula, por meio de uma escolha adequada de $\Omega(\varphi)$. Além disso, podemos também redefinir o campo escalar à vontade, $\varphi \rightarrow f(\varphi)$, o que nos permite igualar outra dessas funções a uma constante. Essa arbitrariedade é análoga à liberdade de calibre ou à liberdade de escolha de um sistema de coordenadas, e, ao fixá-la, escolhemos uma *representação* particular, e não uma teoria específica (para uma discussão sobre essa arbitrariedade na escolha da representação, ver a Ref. [127]).

A.1.1 Representações de Einstein e Jordan

Duas representações são de particular interesse, as assim chamadas representações de Einstein e Jordan.

A representação de Einstein é obtida se escolhemos $A = B = 1$, em cujo caso a ação fica

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - V(\varphi)] + S_m[\Psi, a^2(\varphi)g_{\mu\nu}]. \quad (\text{A.2})$$

*Vale notar que, se $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu}$, então $\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^4\sqrt{-g}$ e o escalar de curvatura se transforma como [135]

$$R \rightarrow \tilde{R} = \Omega^{-2}R - 6\Omega^{-3}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\Omega.$$

Observe que, nessa representação, os campos de matéria não se acoplam diretamente à métrica $g_{\mu\nu}$, mas à combinação $a^2(\varphi)g_{\mu\nu}$. As equações de campo são obtidas a partir da ação (A.2) exigindo que ela seja estacionária por pequenas variações da métrica e do campo escalar, e são dadas por

$$G_{\mu\nu} - 2\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi + g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\varphi\nabla_\sigma\varphi + \frac{1}{2}V(\varphi)g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

e

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - \frac{1}{4}V'(\varphi) = -4\pi\alpha(\phi)T, \quad (\text{A.4})$$

onde o tensor de energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m[\Psi, a^2(\varphi)g_{\rho\sigma}]}{\delta g_{\mu\nu}},$$

na representação de Einstein, $T \equiv g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, e definimos $V'(\varphi) = dV(\varphi)/d\varphi$ e

$$\alpha(\varphi) \equiv \frac{d \ln a(\varphi)}{d\varphi}. \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado, a representação de Jordan é obtida escolhendo $\alpha = 0$ e $A(\varphi) = \varphi$. Na forma mais comumente encontrada na literatura (ver, por exemplo, [142]), temos

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\phi \tilde{R} - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m[\Psi, \tilde{g}_{\mu\nu}], \quad (\text{A.6})$$

onde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e ϕ podem ser obtidos a partir dos campos $g_{\mu\nu}$ e φ da representação de Einstein por meio de uma transformação conforme da métrica e da redefinição do campo escalar. O caso particular da teoria de Brans-Dicke é obtido para $\omega(\phi) = \omega_{BD} = \text{const}$, sendo que no limite $\omega_{BD} \rightarrow \infty$ (ou $\alpha(\varphi) = \alpha_0 \rightarrow 0$ na representação de Einstein), a teoria se torna indistinguível da Relatividade Geral.

Uma vez que, na representação de Jordan, os campos de matéria se acoplam diretamente à métrica, esta possui uma interpretação física mais direta que a métrica correspondente na representação de Einstein. Por outro lado, as equações de campo na representação de Jordan são significativamente mais complicadas, e para muitas aplicações, a representação de Einstein é mais conveniente. Para maiores discussões a esse respeito, ver as Refs. [127, 37, 142].

Relação com a ação (2.1):

Note que a Eq. (2.1) trata-se de um caso particular da Eq. (A.1), em que tomamos

$$A(\varphi) = 1 - 8\pi\xi\varphi^2, \quad B(\varphi) = 4\pi, \quad V(\varphi) = 8\pi\tilde{m}^2\varphi^2, \quad a(\varphi) = 1$$

com $\Phi = \varphi$. É útil reescrever essa ação na representação de Einstein (ver a Sec. VI da Ref. [39]). Denotando por $g_{\mu\nu}^{(E)}$ e φ a métrica e o campo escalar na representação de Einstein, vemos que a ação (A.2) corresponde à Eq. (2.1) para

$$g_{\mu\nu}^{(E)} = \Omega^2(\Phi)g_{\mu\nu}, \quad \text{com } \Omega^2(\Phi) = 1 - 8\pi\xi\Phi^2, \quad (\text{A.7})$$

$$\varphi = \varphi(\Phi), \quad \text{com } d\varphi = 2\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{1 - 8\pi\xi(1 - 6\xi)\Phi^2}}{1 - 8\pi\xi\Phi^2}d\Phi, \quad (\text{A.8})$$

$$V(\varphi) = 8\pi\tilde{m}^2\Phi^2, \quad (\text{A.9})$$

$$a^2(\varphi) = \Omega^{-2}(\Phi) = (1 - 8\pi\xi\Phi^2)^{-1}. \quad (\text{A.10})$$

A Eq. (A.8) pode ser integrada para obtermos $\varphi = \varphi(\Phi)$. Nota-se que, para $\Phi \rightarrow 0$, $\varphi - \varphi_0 = 2\sqrt{\pi}\Phi + \mathcal{O}(\Phi^3)$, onde φ_0 é uma constante, às vezes chamada valor de vácuo ou cosmológico, à qual o campo tende assintoticamente, ou seja, longe do sistema gravitacional considerado. Notamos também que, no caso de um campo com acoplamento não mínimo, a função $\alpha(\varphi)$ na Eq. (A.5) e sua primeira derivada são dadas por:

$$\alpha(\varphi) = \frac{4\sqrt{\pi}\xi\Phi}{\sqrt{1 - 8\pi\xi(1 - 6\xi)\Phi^2}}, \quad \beta(\varphi) \equiv \frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi} = 2\xi\frac{1 - 8\pi\xi\Phi^2}{(1 - 8\pi\xi(1 - 6\xi)\Phi^2)^2}, \quad (\text{A.11})$$

com $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_0) = 0$ e $\beta_0 \equiv \beta(\varphi_0) = 2\xi$.

Portanto, a ação (2.1), que descreve a dinâmica de um campo escalar livre não minimamente acoplado com o escalar de curvatura, é equivalente à Teoria Tensor-Escalar descrita acima. Assim, ao menos no nível clássico, tratar o campo escalar como uma componente da matéria ou como um mediador do campo gravitacional é uma questão apenas de interpretação (ver a discussão em [127]).

A.2 Vínculos no regime de campo fraco

No regime de campo fraco, caracterizado por velocidades muito menores que a velocidade da luz e campos gravitacionais pouco intensos, como ocorre no sistema solar, uma ferramenta muito útil para se comparar teorias gravitacionais e observações é o formalismo pós-newtoniano parametrizado [142]. Esse formalismo descreve desvios das predições da RG perturbativamente (em uma expansão em $1/c^2$) por meio de um conjunto de parâmetros fenomenológicos.

No caso particular de TTE, em primeira ordem pós-newtoniana, desvios da RG são proporcionais a dois parâmetros, que estão relacionados com os valores de $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_0)$ e $\beta_0 \equiv d\alpha/d\varphi|_{\varphi=\varphi_0}$ (na representação de Einstein) [37]:

$$\bar{\gamma} = -\frac{2\alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2}, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{2}\frac{\beta_0\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2}. \quad (\text{A.12})$$

Em segunda ordem pós-newtoniana, entram outros dois novos parâmetros [40]*:

$$\epsilon = \frac{\beta'_0 \alpha_0^3}{(1 + \alpha_0^2)^3}, \quad \zeta = \frac{\beta_0^2 \alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^3}, \quad (\text{A.13})$$

onde $\beta'_0 \equiv d^2\alpha/d\varphi^2|_{\varphi=\varphi_0}$. Pode-se mostrar que os parâmetros pós-newtonianos que caracterizam desvios da RG são todos proporcionais a potências de α_0 [40]. Portanto, testes da RG no sistema solar, como a medida do efeito Shapiro de atraso temporal pelo experimento Cassini [17], podem apenas colocar vínculos sobre combinações de parâmetros envolvendo α_0 e, para $|\alpha_0|$ suficientemente pequeno, esses testes são satisfeitos independentemente dos demais parâmetros. Por exemplo, o vínculo [17]

$$\bar{\gamma} = -(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$$

tem como consequência o limite

$$|\alpha_0| < 0.005$$

(ver também [25]). Em particular, testes de campo fraco não são capazes de colocar vínculos sobre o valor do acoplamento ξ entre o campo e o escalar de curvatura no modelo descrito pela ação (2.1). A situação é diferente, porém, no regime de campo forte, onde efeitos não perturbativos podem estar presentes [38, 119]. Nesse caso, observações de propriedades de sistemas binários contendo pulsares podem efetivamente descartar muitos valores desse acoplamento [39, 55]. No Cap. 6, discutimos os vínculos existentes e a relação entre o efeito não perturbativo chamado “escalarização espontânea” [39, 119] e a instabilidade de campos não minimamente acoplados em espaços-tempos astrofísicos, que é o tema desta Tese.

Apêndice B

Transformada de Laplace

Neste Apêndice, revisamos brevemente, seguindo a Ref. [125], a definição da Transformada de Laplace (TL) e suas condições de existência, além de justificarmos a expressão para a Transformada Inversa de Laplace (TIL) usada no Cap. 3.

B.1 Definição e condições de existência para a TL

Vamos supor que uma função $f(t)$ seja definida para todo t , $0 < t < \infty$. Sua TL é dada por

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (\text{B.1})$$

A existência da TL depende da existência do limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^T e^{-st} f(t) dt. \quad (\text{B.2})$$

Para a existência da integral acima, é suficiente que $f(t)$ seja integrável em todo intervalo $\epsilon \leq t \leq T$. Vamos então examinar os limites. Na vizinhança de $t = 0$ e para s fixo, e^{-st} é absolutamente limitada e o comportamento da integral no limite $\epsilon \rightarrow 0$ é essencialmente o mesmo de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^T f(t) dt. \quad (\text{B.3})$$

Além disso, se, quando $t \rightarrow \infty$, $f(t)$ cresce menos rapidamente que $e^{\gamma t}$ para alguma constante real γ , então podemos encontrar um valor t_0 tal que, para $t > t_0$,

$$|f(t)| < M e^{\gamma t} \quad (\text{B.4})$$

para algum M constante. Assim, se $T'' > T' > t_0$,

$$\left| \int_{T'}^{T''} e^{-st} f(t) dt \right| < M \int_{T'}^{T''} e^{[\gamma - \Re(s)]t} dt. \quad (\text{B.5})$$

Contanto que $\Re(s) > \gamma$, a integral acima pode ser tão pequena quanto queiramos tomando T' suficientemente grande. Assim, é suficiente para a existência de $\tilde{f}(s)$ que:

1. $f(t)$ seja integrável em todo intervalo finito $[t_1, t_2]$, onde $0 < t_1 < t_2 < \infty$,
2. o limite (B.3) exista para T fixo,
3. existam t_0 , M e γ tais que $|e^{-\gamma t} f(t)| < M$ se $t > t_0$.

A TL é então definida como Eq. (B.1) para $\Re(s) > \gamma$.

B.2 Transformada inversa

A definição da Transformada Inversa de Laplace (TIL) pode ser justificada a partir da definição da Transformada Inversa de Fourier. Se $G(\omega)$ é a transformada de Fourier da função $F(t)$ (contínua por partes e absolutamente integrável), então

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{i\omega t} G(\omega) d\omega \quad (\text{B.6})$$

e

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt. \quad (\text{B.7})$$

Em geral, assume-se que ω é uma variável real; porém, se $|F(t)| \sim \mathcal{O}(e^{-\alpha t})$ quando $t \rightarrow \infty$ e $|F(t)| \sim \mathcal{O}(e^{\beta t})$ quando $t \rightarrow -\infty$, $\alpha, \beta > 0$, a integral (B.7) continua a convergir se

$$-\beta < \Im(\omega) < \alpha.$$

Então, podemos substituir a Eq. (B.6) por

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T-i\kappa}^{T-i\kappa} e^{i\omega t} G(\omega) d\omega, \quad (\text{B.8})$$

onde κ é qualquer número real tal que $-\alpha < \kappa < \beta$. Substituindo $\omega = -is$, tomando $F(t) = f(t)\Theta(t)$, onde $\Theta(t)$ é a função de Heaviside, e escrevendo $G(-is) = \tilde{f}(s)$, a Eq. (B.8) fica

$$f(t)\Theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} e^{st} \tilde{f}(s) ds. \quad (\text{B.9})$$

Uma vez que $f(t)\Theta(t)$ é identicamente nula para $t < 0$, podemos tomar $\beta \rightarrow \infty$ e ficamos apenas com a condição $\kappa > -\alpha$, que se traduz, à luz do item 3 da Sec. B.1, em $\kappa > \gamma$. Portanto, o contorno de integração no plano $s \in \mathbb{C}$ que é usado no cálculo da TIL é uma linha vertical à direita das singularidades de $f(s)$.

Apêndice C

Formalismo de cascas finas em Relatividade Geral

Neste Apêndice, vamos apresentar as noções básicas do formalismo de cascas finas em Relatividade Geral, que são usadas nos Caps. 4 e 5.

Primeiramente, vamos lembrar que uma hipersuperfície S , coberta por coordenadas y^a , é caracterizada por dois tensores principais. A métrica induzida na superfície é definida como $h_{ab} = g_{\mu\nu}|_S e_a^\mu e_b^\nu$, onde $e_a^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial y^a$ são as coordenadas dos vetores $\partial / \partial y^a$ definidos em S^* . Além do tensor h_{ab} , que expressa as propriedades “intrínsecas” da superfície, será importante definirmos o tensor de curvatura extrínseca K_{ab} , que caracteriza como S está imersa no espaço-tempo: temos $K_{ab} \equiv \nabla_\nu n_\mu e_a^\mu e_b^\nu$, onde n^μ é o campo vetorial unitário normal à hipersuperfície.

Aqui, vamos estudar o caso em que uma hipersuperfície tipo tempo $\mathcal{S}$ divide o espaço-tempo em duas regiões, $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{V}^+$, cobertas por coordenadas x_-^μ e x_+^μ e com métricas $g_{\mu\nu}^-$ e $g_{\mu\nu}^+$, respectivamente. Seguindo a Ref. [114][†], vamos mostrar quais as condições que devem ser satisfeitas pelas métricas para que a união delas seja uma solução das equações de Einstein. Como veremos, se as curvaturas extrínsecas K_{ab}^- e K_{ab}^+ de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{V}^+$ não coincidirem, essa hipersuperfície poderá ser interpretada como o tubo de mundo de uma casca fina de matéria, com tensor de energia-momento singular.

Antes de apresentarmos as condições de junção, vamos introduzir algumas hipóteses e construções auxiliares que serão úteis em seguida. Em particular, vamos supor que as mesmas coordenadas podem ser definidas em ambos os lados de $\mathcal{S}$, e denotá-las por y^a . Vamos também supor que podemos definir um sistema de coordenadas contínuo $\{x^\mu\}$, em princípio distinto de $\{x_\pm^\mu\}$, em uma vizinhança aberta de $\mathcal{S}$. Então, construímos uma congruência de geodésicas (tipo espaço) que intercepta $\mathcal{S}$

*Note que $ds^2|_S = g_{\mu\nu}|_S dx^\mu dx^\nu = (g_{\mu\nu}|_S e_a^\mu e_b^\nu) dy^a dy^b = h_{ab} dy^a dy^b$, o que motiva a definição de h_{ab} .

[†]Ver também a Ref. [79] e as referências aí para os trabalhos pioneiros sobre o formalismo de cascas finas.

ortogonalmente e denotamos por ℓ a distância própria ao longo dessas geodésicas, de forma que $\ell = 0$ em $\mathcal{S}$, $\ell < 0$ em $\mathcal{V}^-$ e $\ell > 0$ em $\mathcal{V}^+$. Por construção, o deslocamento a partir de $\mathcal{S}$ ao longo de uma das geodésicas é dado por $dx^\mu = n^\mu d\ell$, onde n^μ é o vetor unitário normal a $\mathcal{S}$, que aponta de $\mathcal{V}^-$ para $\mathcal{V}^+$. Além disso,

$$n_\mu = \partial_\mu \ell, \quad (\text{C.1})$$

de forma que $n^\mu n_\mu = 1$.

Primeira condição de junção: continuidade da métrica induzida

Primeiramente, escrevemos a métrica $g_{\mu\nu}$ no sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ como

$$g_{\mu\nu} = \Theta(\ell)g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)g_{\mu\nu}^-, \quad (\text{C.2})$$

onde $\Theta(\ell)$ é a distribuição de Heaviside e as métricas $g_{\mu\nu}^\pm$ são expressas no sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$. Nosso objetivo é verificar sob que condições a métrica (C.2) poderia ser obtida como uma solução das equações de Einstein. Para isso, as quantidades geométricas como os símbolos de Christoffel e tensores de curvatura, construídos a partir de (C.2), devem estar bem definidos no sentido distribucional. Porém, lembrando que $d\Theta(\ell)/d\ell = \delta(\ell)$ e usando a Eq. (C.1), encontramos

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Theta(\ell)\partial_\rho g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)\partial_\rho g_{\mu\nu}^- + \delta(\ell)n_\rho \Delta g_{\mu\nu},$$

onde definimos $\Delta A \equiv A(\mathcal{V}^+)|_{\mathcal{S}} - A(\mathcal{V}^-)|_{\mathcal{S}}$. Logo, os símbolos de Christoffel conterão termos proporcionais a $\Theta(\ell)\delta(\ell)$, que não estão definidos como distribuições. Para eliminarmos esses termos problemáticos, devemos impor que a métrica seja contínua ao longo de $\mathcal{S}$, ou seja, $\Delta g_{\mu\nu} = 0$. Essa condição vale apenas no sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, mas pode ser transformada em uma condição independente do sistema de coordenadas se notamos que $\Delta e_a^\mu = \Delta(\partial x^\mu / \partial y^a) = 0$ (já que x^μ são contínuas e y^a são as mesmas em $\mathcal{V}^\pm$) e, assim, $0 = (\Delta g_{\mu\nu})e_a^\mu e_b^\nu = \Delta(g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu)$. Portanto, obtemos a condição

$$\Delta h_{ab} = 0, \quad (\text{C.3})$$

ou seja, a métrica induzida deve ser a mesma nos dois lados de $\mathcal{S}$. A Eq. (C.3) é também chamada de primeira condição de junção.

Segunda condição de junção e tensor de energia-momento superficial

O próximo passo é, então, o cálculo do tensor de Riemann. Com a condição (C.3), temos que $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Theta(\ell)\Gamma_{\mu\nu}^{+\rho} + \Theta(-\ell)\Gamma_{\mu\nu}^{-\rho}$ e que

$$\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Theta(\ell)\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^{+\rho} + \Theta(-\ell)\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^{-\rho} + \delta(\ell)n_\sigma \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho.$$

Portanto, o tensor de Riemann é dado por

$$R_{\mu\nu\sigma}^\rho = \Theta(\ell)R_{\mu\nu\sigma}^{+\rho} + \Theta(-\ell)R_{\mu\nu\sigma}^{-\rho} + \delta(\ell)A_{\mu\nu\sigma}^\rho, \quad (\text{C.4})$$

com

$$A_{\mu\nu\sigma}^\rho = n_\nu \Delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - n_\sigma \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho. \quad (\text{C.5})$$

Assim, vemos que o tensor de Riemann está bem definido como uma distribuição. Ele possui, porém, uma componente singular, que pode ser interpretada por meio das equações de Einstein como devida à presença de uma casca fina de matéria em $\mathcal{S}$. Para vermos isso, notamos que a Eq. (C.4) nos permite escrever o tensor de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = \Theta(\ell)G_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)G_{\mu\nu}^- + \delta(\ell) \left(A_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}A \right),$$

onde $A_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\rho\nu}^\rho$ e $A \equiv A_\mu^\mu$. Escrevendo para o tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \Theta(\ell)T_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)T_{\mu\nu}^- + \delta(\ell)S_{\mu\nu},$$

vemos que podemos identificar $8\pi S_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}A/2$. Portanto, os termos singulares dos tensores de curvatura podem ser interpretados como devido à presença de uma casca fina de matéria em $\mathcal{S}$ com tensor de energia-momento superficial $S_{\mu\nu}$.

Por fim, é útil reescrever o tensor $S_{\mu\nu}$ de uma forma mais conveniente. Para isso, notemos, primeiro, que, uma vez que a métrica $g_{\mu\nu}$ é uma função contínua das coordenadas x^μ , sua derivada na direção tangencial a $\mathcal{S}$ também deve ser contínua. Portanto, temos que, se a derivada da métrica for descontínua, ela o deve ser ao longo da direção ortogonal a $\mathcal{S}$, ou seja,

$$\Delta(\partial_\rho g_{\mu\nu}) = \kappa_{\mu\nu}n_\rho,$$

para um certo campo tensorial simétrico $\kappa_{\mu\nu}$. Podemos então reescrever a expressão (C.5) em termos de $\kappa_{\mu\nu}$:

$$A_{\mu\nu\sigma}^\rho = \frac{1}{2}(\kappa_\sigma^\rho n_\mu n_\nu - \kappa_\nu^\rho n_\mu n_\sigma - \kappa_{\mu\sigma} n^\rho n_\nu + \kappa_{\mu\nu} n^\rho n_\sigma),$$

e obtemos prontamente as contrações $A_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\rho\nu}^\rho$ e $A \equiv A_\mu^\mu$. Portanto, temos que

$$16\pi S_{\mu\nu} = \kappa_{\rho\mu} n^\rho n_\nu + \kappa_{\rho\nu} n^\rho n_\mu - \kappa n_\mu n_\nu - \kappa_{\mu\nu} - (\kappa_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma - \kappa)g_{\mu\nu}, \quad (\text{C.6})$$

onde $\kappa \equiv \kappa_\mu^\mu$. Note que $S_{\mu\nu}n^\nu = 0$: o tensor $S_{\mu\nu}$ é tangente a $\mathcal{S}$. Portanto, podemos escrevê-lo como

$$S^{\mu\nu} = S^{ab}e_a^\mu e_b^\nu$$

com

$$S_{ab} = -\kappa_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu - (\kappa_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma - \kappa)h_{ab} = -\kappa_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu + h^{cd}\kappa_{\mu\nu}e_c^\mu e_d^\nu h_{ab},$$

onde usamos que $g^{\mu\nu} = h^{ab}e_a^\mu e_b^\nu + n^\mu n^\nu$.

Por outro lado, temos que

$$\Delta(\nabla_\nu n_\mu) = -n_\rho \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}(\kappa_{\mu\nu} - \kappa_{\rho\mu}n^\rho)\nu n^\nu - \kappa_{\rho\nu}n_\mu n^\rho.$$

Logo, podemos calcular a descontinuidade do tensor de curvatura extrínseca, que é dada por

$$\Delta K_{ab} = \Delta(\nabla_\nu n_\mu)e_a^\mu e_b^\nu = \frac{1}{2}\kappa_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu.$$

Com isso, é direto percebermos que

$$S_{ab} = -\frac{1}{8\pi}(\Delta K_{ab} - h_{ab}\Delta K). \quad (\text{C.7})$$

Portanto, a segunda condição de junção, que garante que a colagem das métricas seja suave, é que $\Delta K_{ab} = 0$, ou seja, a curvatura extrínseca deve ser a mesma de ambos os lados da superfície $\mathcal{S}$. Por outro lado, $\Delta K_{ab} \neq 0$ corresponde à presença de uma casca fina em $\mathcal{S}$, com tensor de energia-momento

$$T_S^{\mu\nu} = \delta(\ell)S^{ab}e_a^\mu e_b^\nu, \quad (\text{C.8})$$

onde S_{ab} é dado na Eq. (C.7).

Nos Caps. 4 e 5, usamos os conceitos acima na construção de modelos de cascas esferoidais e com rotação, nos quais assumimos que as métricas $g_{\mu\nu}^\pm$ são soluções das equações de Einstein no vácuo. Para mais exemplos e detalhes sobre o formalismo de cascas finas em RG, ver a Ref. [114].

Referências

- [1] M. Abramowicz e I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Courier Dover Publications, (1972).
- [2] A. Albrecht, P. Ferreira, M. Joyce e T. Prokopec. Inflation and squeezed quantum states. *Phys. Rev. D* **50**, 4807–4820, (1994).
- [3] M. Alcubierre, J. C. Degollado, D. Núñez, M. Ruiz e M. Salgado. Dynamic transition to spontaneous scalarization in boson stars. *Phys. Rev. D* **81**, 124018, (2010).
- [4] G. Amelino-Camelia. Quantum-Spacetime Phenomenology. *Living Rev. Relativ.* **16**, (2013).
- [5] P. R. Anderson, W. A. Hiscock e D. A. Samuel. Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D* **51**, 4337–4358, (1995).
- [6] P. R. Anderson, C. Molina-París e E. Mottola. Linear response, validity of semiclassical gravity, and the stability of flat space. *Phys. Rev. D* **67**, 024026, (2003).
- [7] L. Andersson, R. Beig e B. G. Schmidt. Static self-gravitating elastic bodies in Einstein gravity. *Commun. Pure Appl. Math.* **61**, 988–1023, (2008).
- [8] N. Andersson. Evolving test fields in a black-hole geometry. *Phys. Rev. D* **55**, 468–479, (1997).
- [9] A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, N. Kaloper e J. March-Russell. String axiverse. *Phys. Rev. D* **81**, 123530, (2010).
- [10] M. Atkins e X. Calmet. Bounds on the Nonminimal Coupling of the Higgs Boson to Gravity. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 051301, (2013).

- [11] ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B* **716**, 1–29, (2012).
- [12] E. Barausse, C. Palenzuela, M. Ponce e L. Lehner. Neutron-star mergers in scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D* **87**, 081506, (2013).
- [13] G. Barton. Quantum mechanics of the inverted oscillator potential. *Ann. Phys. (N. Y.)*. **166**, 322–363, (1986).
- [14] R. Beig e W. Simon. On the uniqueness of static perfect-fluid solutions in general relativity. *Commun. Math. Phys.* **144**, 373–390, (1992).
- [15] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics (College. Park. Md.)*. **1**, 195–200, (1964).
- [16] E. Berti, V. Cardoso e A. O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class. Quantum Gravity* **26**, 163001, (2009).
- [17] B. Bertotti, L. Iess e P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature* **425**, 374–6, (2003).
- [18] F. Bezrukov e M. Shaposhnikov. The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Phys. Lett. B* **659**, 703–706, (2008).
- [19] N. D. Birrell e P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, (1984).
- [20] M. P. Blencowe. Effective Field Theory Approach to Gravitationally Induced Decoherence. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 021302, (2013).
- [21] P. Boonserm, T. Ngampitipan e M. Visser. Regge-Wheeler equation, linear stability, and greybody factors for dirty black holes. *Phys. Rev. D* **88**, 041502, (2013).
- [22] C. Brans e R. H. Dicke. Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.* **124**, 925–935, (1961).
- [23] T. S. Bunch, P. Panangaden e L. Parker. On renormalisation of lambda-phi-4 field theory in curved space-time. I. *J. Phys. A. Math. Gen.* **13**, 901–918, (1980).
- [24] C. P. Burgess. Quantum Gravity in Everyday Life: General Relativity as an Effective Field Theory. *Living Rev. Relativ.* **7**, (2004).

- [25] S. Capozziello e A. Troisi. Parametrized post-Newtonian limit of fourth order gravity inspired by scalar-tensor gravity. *Phys. Rev. D* **72**, 044022, (2005).
- [26] S. Carlip. Is quantum gravity necessary? *Class. Quantum Gravity* **25**, 154010, (2008).
- [27] B. Carter. The commutation property of a stationary, axisymmetric system. *Commun. Math. Phys.* **17**, 233–238, (1970).
- [28] M. Casals e A. Ottewill. Analytic investigation of the branch cut of the Green function in Schwarzschild space-time. *Phys. Rev. D* **87**, 064010, (2013).
- [29] J. Castiñeiras, L. C. B. Crispino, G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella. Free massive particles with total energy $E \geq mc^2$ in curved spacetimes. *Phys. Rev. D* **65**, 104019, (2002).
- [30] E. S. C. Ching, P. Leung, W. Suen e K. Young. Late-Time Tail of Wave Propagation on Curved Spacetime. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2414–2417, (1995).
- [31] E. S. C. Ching, P. Leung, W. Suen e K. Young. Wave propagation in gravitational systems: Late time behavior. *Phys. Rev. D* **52**, 2118–2132, (1995).
- [32] E. S. C. Ching, P. T. Leung, W.-M. Suen e K. Young. Quasinormal Mode Expansion for Linearized Waves in Gravitational Systems. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2414–2417, (1995).
- [33] A. I. Chugunov e C. J. Horowitz. Breaking stress of neutron star crust. *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.* **407**, L54–L58, (2010).
- [34] P. Cladé, E. de Mirandes, M. Cadoret et al. Determination of the Fine Structure Constant Based on Bloch Oscillations of Ultracold Atoms in a Vertical Optical Lattice. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 033001, (2006).
- [35] CMS Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett. B* **716**, 30–61, (2012).
- [36] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas. Quantization of the electromagnetic field outside static black holes and its application to low-energy phenomena. *Phys. Rev. D* **63**, 124008, (2001).
- [37] T. Damour e G. Esposito-Farèse. Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Class. Quantum Gravity* **9**, 2093–2176, (1992).

- [38] T. Damour e G. Esposito-Farèse. Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2220–2223, (1993).
- [39] T. Damour e G. Esposito-Farèse. Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments. *Phys. Rev. D* **54**, 1474–1491, (1996).
- [40] T. Damour e G. Esposito-Farèse. Testing gravity to second post-Newtonian order: A field-theory approach. *Phys. Rev. D* **53**, 5541–5578, (1996).
- [41] T. Damour e G. Esposito-Farèse. Gravitational-wave versus binary-pulsar tests of strong-field gravity. *Phys. Rev. D* **58**, 042001, (1998).
- [42] V. De La Cruz e W. Israel. Spinning Shell as a Source of the Kerr Metric. *Phys. Rev.* **170**, 1187–1192, (1968).
- [43] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. Sayrin et al. Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence. *Nature* **455**, 510–4, (2008).
- [44] B. S. DeWitt. Quantum field theory in curved spacetime. *Phys. Rep.* **19**, 295–357, (1975).
- [45] A. Dias, V. Pleitez e M. Tonasse. Naturally light invisible axion in models with large local discrete symmetries. *Phys. Rev. D* **67**, 095008, (2003).
- [46] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, N. Stergioulas e K. D. Kokkotas. Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D* **88**, 084060, (2013).
- [47] K. Eppley e E. Hannah. The necessity of quantizing the gravitational field. *Found. Phys.* **7**, 51–68, (1977).
- [48] R. Fakir e W. G. Unruh. Improvement on cosmological chaotic inflation through nonminimal coupling. *Phys. Rev. D* **41**, 1783–1791, (1990).
- [49] G. Felder e A. Linde. Tachyonic instability and dynamics of spontaneous symmetry breaking. *Phys. Rev. D* **64**, 123517, (2001).
- [50] C. Flammer. *Spheroidal Wave Functions*. Stanford University Press, (1957).
- [51] E. Flanagan e R. M. Wald. Does back reaction enforce the averaged null energy condition in semiclassical gravity? *Phys. Rev. D* **54**, 6233–6283, (1996).
- [52] L. H. Ford. Quantization of a scalar field in the Kerr spacetime. *Phys. Rev. D* **12**, 2963–2977, (1975).

- [53] L. H. Ford. Gravitational Radiation by Quantum Systems. *Ann. Phys. (N. Y.)* **144**, 238–248, (1982).
- [54] L. H. Ford. Cosmological-constant damping by unstable scalar fields. *Phys. Rev. D* **35**, 2339–2344, (1987).
- [55] P. C. C. Freire, N. Wex, G. Esposito-Farèse et al. The relativistic pulsar-white dwarf binary PSR J1738+0333 - II. The most stringent test of scalar-tensor gravity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **423**, 3328–3343, (2012).
- [56] J. L. Friedman e B. F. Schutz. On the stability of relativistic systems. *Astrophys. J.* **200**, 204, (1975).
- [57] J. L. Friedman e N. Stergioulas. *Rotating Relativistic Stars*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (2013).
- [58] S. A. Fulling. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, (1989).
- [59] N. Glendenning. Limiting rotational period of neutron stars. *Phys. Rev. D* **46**, 4161–4168, (1992).
- [60] S. R. Green, J. S. Schiffrin e R. M. Wald. Dynamic and thermodynamic stability of relativistic, perfect fluid stars. *Class. Quantum Gravity* **31**, 035023, (2014).
- [61] A. Guth e S.-Y. Pi. Quantum mechanics of the scalar field in the new inflationary universe. *Phys. Rev. D* **32**, 1899–1920, (1985).
- [62] T. Güver, P. Wroblewski, L. Camarota e F. Özel. The Mass and Radius of the Neutron Star in 4U 1820 30. *Astrophys. J.* **719**, 1807–1812, (2010).
- [63] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, (1996).
- [64] T. Han e S. Willenbrock. Scale of quantum gravity. *Phys. Lett. B* **616**, 215–220, (2005).
- [65] D. Hanneke, S. Fogwell e G. Gabrielse. New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801, (2008).
- [66] T. Harada. Stability Analysis of Spherically Symmetric Star in Scalar-Tensor Theories of Gravity. *Prog. Theor. Phys.* **98**, 359–379, (1997).

- [67] T. Harada. Neutron stars in scalar-tensor theories of gravity and catastrophe theory. *Phys. Rev. D* **57**, 4802–4811, (1998).
- [68] J. Hartle e G. Horowitz. Ground-state expectation value of the metric in the 1N or semiclassical approximation to quantum gravity. *Phys. Rev. D* **24**, 257–274, (1981).
- [69] S. Hassani. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer, (1999).
- [70] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.* **43**, 199–220, (1975).
- [71] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, (1973).
- [72] W. Hernandez. Static, Axially Symmetric, Interior Solution in General Relativity. *Phys. Rev.* **153**, 1359–1363, (1967).
- [73] J. W. T. Hessels, S. M. Ransom, I. H. Stairs et al. A radio pulsar spinning at 716 Hz. *Science* **311**, 1901–4, (2006).
- [74] C. Hill e A. Leibovich. Natural theories of ultralow mass pseudo Nambu-Goldstone bosons: Axions and quintessence. *Phys. Rev. D* **66**, 075010, (2002).
- [75] W. A. Hiscock. Gravitational vacuum polarization around static spherical stars. *Phys. Rev. D* **37**, 2142–2150, (1988).
- [76] S. Hollands e R. M. Wald. Quantum fields in curved spacetime. *arXiv:1401.2026 [gr-qc]* (2014).
- [77] R. Holman, S. D. Hsu, T. W. Kephart et al. Solutions to the strong-CP problem in a world with gravity. *Phys. Lett. B* **282**, 132–136, (1992).
- [78] M. W. Horbatsch. *Neutron stars and black holes in scalar-tensor gravity*. PhD thesis, McMaster University, (2012).
- [79] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cim. B Ser. 10* **44**, 1–14, (1966).
- [80] R. Jordan. Stability of flat spacetime in quantum gravity. *Phys. Rev. D* **36**, 3593–3603, (1987).

- [81] B. S. Kay e R. M. Wald. Linear stability of Schwarzschild under perturbations which are non-vanishing on the bifurcation 2-sphere. *Class. Quantum Gravity* **4**, 893–898, (1987).
- [82] C. Kiefer. The semiclassical approximation to quantum gravity. In *Canonical Gravity From Class. to Quantum*, volume 434 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 170–212. Springer Berlin Heidelberg, (1994).
- [83] K. D. Kokkotas e B. G. Schmidt. Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. *Living Rev. Relativ.* **2**, 74, (1999).
- [84] K. D. Kokkotas e B. F. Schutz. Normal Modes of a Model Radiating System. *Gen. Relativ. Gravit.* **18**, 913–921, (1986).
- [85] H. Koyama e A. Tomimatsu. Asymptotic tails of massive scalar fields in a Schwarzschild background. *Phys. Rev. D* **64**, 044014, (2001).
- [86] C.-I. Kuo e L. H. Ford. Semiclassical gravity theory and quantum fluctuations. *Phys. Rev. D* **47**, 4510–4519, (1993).
- [87] A. G. S. Landulfo, W. C. C. Lima, G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella. Particle creation due to tachyonic instability in relativistic stars. *Phys. Rev. D* **86**, 104025, (2012).
- [88] J. Lattimer e M. Prakash. Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints. *Phys. Rep.* **442**, 109–165, (2007).
- [89] J. M. Lattimer e M. Prakash. Neutron Star Structure and the Equation of State. *Astrophys. J.* **550**, 426–442, (2001).
- [90] E. W. Leaver. Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry. *Phys. Rev. D* **34**, 384–408, (1986).
- [91] LIGO Collaboration. Searches of Gravitational Waves from Known Pulsars with Science Run 5 LIGO Data. *Astrophys. J.* **713**, 671–685, (2010).
- [92] W. C. C. Lima. Quantization of unstable linear scalar fields in static spacetimes. *Phys. Rev. D* **88**, 124005, (2013).
- [93] W. C. C. Lima, G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella. Awaking the Vacuum in Relativistic Stars. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 151102, (2010).
- [94] W. C. C. Lima, R. F. P. Mendes, G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella. Awaking the vacuum with spheroidal shells. *Phys. Rev. D* **87**, 104039, (2013).

- [95] W. C. C. Lima e D. A. T. Vanzella. Gravity-induced vacuum dominance. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 161102, (2010).
- [96] L. Lindblom. On the Symmetries of Equilibrium Stellar Models. *Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* **340**, 353–364, (1992).
- [97] L. Lindblom e A. K. M. Masood-ul Alam. On the spherical symmetry of static stellar models. *Commun. Math. Phys.* **162**, 123–145, (1994).
- [98] A. Matacz, P. Davies e A. Ottewill. Quantum vacuum instability near rotating stars. *Phys. Rev. D* **47**, 1557–1562, (1993).
- [99] J. Matyjasek. Renormalized energy-momentum tensor of the quantized conformal fields in the Unruh state in Schwarzschild spacetime. *Phys. Rev. D* **59**, 044002, (1999).
- [100] J. D. McCrea. Static axially symmetric gravitational fields with shell sources. *J. Phys. A* **9**, 697–707, (1976).
- [101] R. F. P. Mendes, G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella. Instability of nonminimally coupled fields in the spacetime of slowly rotating compact objects (in preparation).
- [102] R. F. P. Mendes, G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella. Quantum versus classical instability of scalar fields in curved backgrounds. *Phys. Rev. D* **89**, 047503, (2014).
- [103] V. Mukhanov, H. A. Feldman e R. H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.* **215**, 203–333, (1992).
- [104] R. G. Newton. Analytic Properties of Radial Wave Functions. *J. Math. Phys.* **1**, 319, (1960).
- [105] H.-P. Nollert. Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars. *Class. Quantum Gravity* **16**, R159–R216, (1999).
- [106] H.-P. Nollert e B. Schmidt. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: Defined and calculated via Laplace transformation. *Phys. Rev. D* **45**, 2617–2627, (1992).
- [107] J. Novak. Neutron star transition to a strong-scalar-field state in tensor-scalar gravity. *Phys. Rev. D* **58**, 064019, (1998).

- [108] F. Özel, G. Baym e T. Güver. Astrophysical measurement of the equation of state of neutron star matter. *Phys. Rev. D* **82**, 101301, (2010).
- [109] D. Page e C. Geilker. Indirect Evidence for Quantum Gravity. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 979–982, (1981).
- [110] P. Pani, V. Cardoso, E. Berti, J. Read e M. Salgado. Vacuum revealed: The final state of vacuum instabilities in compact stars. *Phys. Rev. D* **83**, 081501, (2011).
- [111] L. Parker. Particle Creation in Expanding Universes. *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562–564, (1968).
- [112] L. Parker. Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. I. *Phys. Rev.* **183**, 1057–1068, (1969).
- [113] H. Poincaré. Sur les groupes des équations linéaires. *Acta Math.* **4**, 201–312, (1884).
- [114] E. Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, (2007).
- [115] D. Polarski e A. A. Starobinsky. Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations. *Class. Quantum Gravity* **13**, 377–391, (1996).
- [116] H. Quevedo. General static axisymmetric solution of Einstein’s vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates. *Phys. Rev. D* **39**, 2904–2911, (1989).
- [117] M. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional analysis, Volume 1*. Academic Press, (1980).
- [118] M. Ruiz, J. C. Degollado, M. Alcubierre, D. Núñez e M. Salgado. Induced scalarization in boson stars and scalar gravitational radiation. *Phys. Rev. D* **86**, 104044, (2012).
- [119] M. Salgado, D. Sudarsky e U. Nucamendi. Spontaneous scalarization. *Phys. Rev. D* **58**, 124003, (1998).
- [120] D. S. Salopek e J. M. Bardeen. Designing density fluctuation spectra in inflation. *Phys. Rev. D* **40**, 1753–1788, (1989).
- [121] L. Schiff, H. Snyder e J. Weinberg. On The Existence of Stationary States of the Mesotron Field. *Phys. Rev.* **57**, 315–318, (1940).

- [122] B. Schroer. Quantization of negative m^2 Field Equations. *Phys. Rev. D* **3**, 1764–1770, (1971).
- [123] B. Schroer e J. Swieca. Indefinite Metric and Stationary External Interactions of Quantized Fields. *Phys. Rev. D* **2**, 2938–2944, (1970).
- [124] B. Simon. Topics In Functional Analysis. In R. F. Streater, editor, *Math. Contemp. Phys.*, pp. 17–72. Academic Press Inc, (1972).
- [125] M. G. Smith. *Laplace transform theory*. Van Nostrand, (1966).
- [126] H. Sotani. Slowly rotating relativistic stars in scalar-tensor gravity. *Phys. Rev. D* **86**, 124036, (2012).
- [127] T. P. Sotiriou, S. Liberati e V. Faraoni. Theory of gravitation theories: a no-progress report. *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 399–423, (2008).
- [128] A. W. Steiner, J. M. Lattimer e E. F. Brown. The Equation of State from Observed Masses and Radii of Neutron Stars. *Astrophys. J.* **722**, 33–54, (2010).
- [129] J. L. Synge. *Relativity: the general theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1960).
- [130] R. C. Tolman. Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid. *Phys. Rev.* **55**, 364–373, (1939).
- [131] W. G. Unruh. Second quantization in the Kerr metric. *Phys. Rev. D* **10**, 3194–3205, (1974).
- [132] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D* **14**, 870–892, (1976).
- [133] R. M. Wald. On particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.* **45**, 9–34, (1975).
- [134] R. M. Wald. The back reaction effect in particle creation in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.* **54**, 1–19, (1977).
- [135] R. M. Wald. *General relativity*. University Of Chicago Press, (1984).
- [136] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. University of Chicago Press, (1994).
- [137] R. M. Wald. The Thermodynamics of Black Holes. *Living Rev. Relativ.* **4**, (2001).

- [138] D. F. Walls e G. J. Milburn. *Quantum optics*. Springer-Verlag, (1995).
- [139] R. F. Werner. The classical limit of quantum theory. *arXiv:quant-ph/9504016* (1995).
- [140] J. Wheeler. Geons. *Phys. Rev.* **97**, 511–536, (1955).
- [141] E. Wigner. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.* **40**, 749–759, (1932).
- [142] C. M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, (1993).
- [143] C. M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativ.* **9**, 1–100, (2006).