



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"



José Henrique Krähenbühl Ambiel

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO TOTALMENTE
ACOPLADO PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS
HIDROMECÂNICOS EM UM PROGRAMA DE ELEMENTOS
FINITOS EM MATLAB

Bauru
2018

José Henrique Krähenbühl Ambiel

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO TOTALMENTE
ACOPLADO PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS
HIDROMECÂNICOS EM UM PROGRAMA DE ELEMENTOS
FINITOS EM MATLAB

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil na Área de Geotecnia, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli

Bauru
2018

Ambiel, José Henrique Krähenbühl.

Implementação do método totalmente acoplado para a
resolução de sistemas hidromecânicos em um programa de
Elementos Finitos em MatLab / José Henrique Krähenbühl
Ambiel, 2018

110 f. : il.

Orientadora: Osvaldo Luís Manzoli

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru,
2018

1. Poroelasticidade. 2. Materiais porosos. 3.
Acoplamento hidromecânico. 4. Método dos Elementos
Finitos. 4. Oscilação numérica. I. Universidade
Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru.
II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE JOSÉ HENRIQUE KRÄHENBÜHL AMBIEL, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 24 dias do mês de agosto do ano de 2018, às 08:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-graduação / FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES do(a) Departamento de Engenharia Civil / Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Prof. Dr. MARCELO JAVIER SANCHEZ CASTILLA do(a) Department of Civil Engineering / TEXAS A&M UNIVERSITY, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de JOSÉ HENRIQUE KRÄHENBÜHL AMBIEL, intitulada

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO TOTALMENTE ACOPLADO PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS HIDROMECAÑICOS EM UM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS EM MATLAB .

Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI

Osvaldo Manzoli

/ Prof. Dr. LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES

Osvaldo Manzoli

Prof. Dr. MARCELO JAVIER SANCHEZ CASTILLA

[Assinatura]

Agradecimentos

Gostaria de agradecer enormemente à minha família por todo o suporte que sempre deram. Meus pais, José Roberto e Maria Rita, por sempre estarem ao meu lado durante a vida inteira, me apoiando e me incentivando nos estudos. Minha irmã, Maria Emília, por ser minha grande amiga e sempre poder contar com ela. Meus primos e primas, principalmente Ignacio, Martin, Maria Cecília, Fábio e Raquel, por serem grandes companheiros e amigos próximos que também sempre estiveram extremamente presentes na minha vida. Dentre meus vários tios e tias, as minhas duas tias Maria Luíza e Maria Alvina, que são muito especiais e sempre foram mães secundárias para mim, muito influentes na minha vida e na minha formação. Além disso, agradeço também à minha sogra, Creusa, por ter sido sempre tão carinhosa comigo, e à minha namorada Letícia, não apenas pelas experiências maravilhosas que compartilhamos juntos mas também por ter ajudado a me tornar uma pessoa melhor ao longo de todo o namoro.

Agradeço aos meus grandes amigos da minha cidade, Campinas, que estão na minha vida desde o Ensino Fundamental, Carlos, Fábio, João, Gustavo, Alberto, Breno, Caio e Henrique. Sempre foram e são até hoje grandes compartilhadores das minhas experiências de vida. Na cidade de Bauru, tanto durante a minha graduação quanto durante o meu mestrado, também fiz grandes amigos os quais espero manter contato pelo resto da vida, Pedro, Heber, Eduardo, Alfredo e Breno, companheiros de laboratório, e Luciano, João e Daniel, amigos de graduação. Também não posso esquecer de fazer um agradecimento a todos os outros colegas e amigos dos outros laboratórios, com quem tive bastante contato durante o mestrado.

Além disso, também gostaria de fazer um agradecimento especial a todos os professores que tive, ao longo da minha vida acadêmica, pelos grandes ensinamentos que transmitiram a mim, durante a graduação e principalmente durante o mestrado. Em especial ao meu orientador, Osvaldo, que me deu grande capacidade de senso crítico e de análise de problemas.

‘‘Na vida, não existe nada a temer,
mas a entender.’’

— Marie Curie

Resumo

AMBIEL, J. H. K., *Implementação do método totalmente acoplado para a resolução de sistemas hidromecânicos em um programa de Elementos Finitos em MatLab*, Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2018, 97 p., Dissertação (Mestrado).

Materiais porosos constituem uma grande gama de materiais que podem ser encontrados na natureza ou em forma artificial. Rochas reservatório é um exemplo importante desse tipo de material, sendo o estudo delas a motivação principal desse trabalho. O estudo de rochas reservatório, de onde são extraídos gases e petróleo, consiste em um problema físico no qual os sistemas mecânico e hidráulico são acoplados. O acoplamento ocorre pois as deformações (no sistema mecânico) influenciam as pressão (no sistema hidráulico), que por sua vez influenciam as tensões (sistema mecânico). As equações governantes do sistema mecânico são mostradas e as do hidráulico deduzidas. Para a resolução do problema, o Método dos Elementos Finitos (MEF) foi utilizado para ambos os sistemas físicos, logo, as equações governantes são apresentadas em sua forma fraca e, então, aproximada pelo MEF. Numericamente, o acoplamento pode ser tratado de diferentes maneiras, seja considerando um dos sistemas de maneira bem pobre tal como fórmulas empíricas simplistas, seja considerado os sistemas de maneira individual, ou então de maneira completa. Essa última maneira de considerar um acoplamento, o acoplamento total, é formulada, programada e testada nesse trabalho. Para validar a implementação, dois problemas foram analisados: Problema de Terzaghi e Problema Mandel, ambos com solução analítica conhecidas. Os resultados obtidos numericamente comparados aos analíticos indicam que o método totalmente acoplado foi bem implementado, tanto em 2D quanto em 3D. Nesse trabalho também é mostrada a oscilação numérica que há em problemas de acoplamento hidromecânico e uma das formas de amenizá-la.

Palavras-chave: poroelasticidade, materiais porosos, acoplamento hidromecânico, método dos elementos finitos, oscilação numérica.

Abstract

AMBIEL, J. H. K., *Implementation of the fully coupled method to solve hydromechanical systems in a Finite Element Method program in MatLab*, Engineering College of Bauru, UNESP - São Paulo State University, 2016, 97 p., Dissertation (Master's degree).

Porous materials constitute a wide range of materials that can be found in nature and artificially. Reservoir rock is an important example of this kind of material, which is the main motivation of this work. The study of reservoir rocks, from which gases and oil are extracted, consists of a physical problem in which mechanical and hydraulic systems are coupled. The coupling occurs because the deformations (in the mechanical system) influence the pressure (in the hydraulic system), which in turn influence the stresses (mechanical system). The governing equations of the mechanical system are shown and those of the hydraulic system are deduced. To solve the problem, the Finite Element Method (FEM) is used for both physical systems, so the governing equations are presented in their weak form and then approximated according to the FEM. Numerically, the coupling can be handled in different ways, either by considering one of the systems in a very poor way by using simplistic empirical formulas, by considering the systems individually, or in a complete manner. The latter one, the fully-coupled treatment, is formulated, programmed and tested in this work. To validate the implementation, two problems have been analyzed: Terzaghi Problem and Mandel Problem, both with known analytical solutions. The comparison between the results obtained numerically and analytically indicates that the fully coupled method has been well implemented in both 2D and 3D cases. The numerical oscillation existing in hydromechanical coupled problems is also shown and one of the ways to minimize it is presented.

Keywords: poroelasticity, porous materials, hydromechanical coupling, finite element method, numerical oscillation.

Lista de Figuras

1.1	Estratégia totalmente acoplada (Adaptado de (KIM, 2010))	9
1.2	Estratégia acoplada iterativa (Adaptado de (KIM, 2010))	9
2.1	Volume elementar representativo	13
2.2	Representação da porosidade do material poroso	14
4.1	Fluxograma para o método desacoplado	38
4.2	Fluxograma para o método totalmente acoplado (Fully-coupled)	39
4.3	Fluxograma para o acoplamento iterativo	41
4.4	Fluxograma para o acoplamento parcial iterativo	43
5.1	(a) Geometria do problema de Terzaghi e (b) Nomeação do contorno e do domínio do problema de Terzaghi em 2D	46
5.2	Malha em elementos finitos do problema de Terzaghi	48
5.3	Condições de contorno dos intervalos de carregamento (a) 1, (b) 2 e (c) 3 .	50
5.4	Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido compressível	51
5.5	Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido compressível	52
5.6	Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição verti- cal normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos normalizados com fluido compressível	52
5.7	Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição vertical normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos nor- malizados com fluido compressível e não utilizando a matriz S diagonalizada	53
5.8	Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido incompressível	54
5.9	Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido incompressível	55
5.10	Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição verti- cal normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos normalizados com fluido incompressível	56

5.11	Nomeação do contorno e do domínio do problema de Terzaghi em 3D . . .	57
5.12	Malha em elementos finitos do problema de Terzaghi	60
5.13	Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra	61
5.14	Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra	62
5.15	Geometria do problema de Mandel	63
5.16	Porção da amostra do problema de Mandel a ser analisada (parte mais escura)	65
5.17	Malha em elementos finitos da amostra do problema de Mandel	66
5.18	Ilustração da malha em elementos finitos completa do problema de Mandel	67
5.19	Nomeação do contorno e do domínio do problema de Mandel em 2D	69
5.20	Condições de contorno dos intervalos de carregamento (a) 1, (b) 2 e (c) 3 .	71
5.21	Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições horizontais da amostra	71
5.22	Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em duas diferentes posições verticais da amostra	72
5.23	Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição horizontal normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos normalizados	73
5.24	Nomeação do contorno e do domínio do problema de Mandel em 3D	74
5.25	Malha em elementos finitos do problema de Mandel 3D	77
5.26	Curvas numéricas de pressão em função do tempo em duas diferentes posições verticais da amostra 3D	78
5.27	Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em duas diferentes posições verticais da amostra 3D	79
7.1	Representação de um elemento triangular linear	82
7.2	Representação de um elemento tetraédrico linear	86
8.1	Ilustração do método de Newton-Raphson para solução de equações não lineares	91

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros do problema de Terzaghi	48
5.2	Parâmetros do problema de Mandel	65
5.3	Alguns parâmetros da placa rígida e do elemento de elevada razão de aspecto	68

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Fluxo de fluido através de meios porosos	1
1.1.1	Meios porosos	1
1.1.2	Porelasticidade	3
1.2	Soluções analíticas	4
1.3	Métodos numéricos	5
1.3.1	Métodos numéricos para o sistema mecânico	5
1.3.2	Métodos numéricos para o sistema hidráulico	6
1.3.3	Oscilações numéricas no Método dos Elementos Finitos	6
1.4	Acoplamentos	7
1.5	Objetivos	8
1.6	Estrutura da Dissertação	9
2	EQUAÇÕES GOVERNANTES	11
2.1	Volume elementar representativo	12
2.2	Propriedades do fluido e da matriz porosa	13
2.2.1	Porosidade	13
2.2.2	Coeficiente de compressibilidade do fluido	14
2.2.3	Viscosidade do fluido	15
2.2.4	Compressibilidade da matriz, dos grãos sólidos e dos poros	15
2.2.5	Relações constitutivas de sistema mecânico isotrópico	16
2.3	Fluxo de Darcy	17
2.4	Tensão efetiva	18
2.5	Equação de equilíbrio do sistema hidromecânico	19
2.6	Equação de conservação	20
2.7	Formas forte e fraca das equações governantes	21
2.7.1	Formas forte e fraca da equação de equilíbrio	22
3	MODELAGEM NUMÉRICA DO PROBLEMA HIDROMECÂNICO	23
3.1	Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos	23
3.1.1	Aproximação do problema mecânico pelo MEF	23

3.1.2	Aproximação do problema hidráulico pelo MEF	29
3.1.3	Integração numérica dos termos	32
3.1.4	Sistema de equações algébricas	34
3.2	Resolução do sistema	34
3.2.1	Discretização das equações algébricas no tempo	34
4	ACOPLAMENTOS HIDROMECAÑICOS	36
4.1	Estratégias de acoplamento	37
4.1.1	Método desacoplado	37
4.1.2	Totalmente acoplado	38
4.1.3	Acoplamento iterativo	40
4.1.4	Acoplamento parcial iterativo	42
4.2	Escolha do acoplamento	44
5	RESULTADOS E DISCUSSÖES	45
5.1	Problema de Terzaghi bidimensional	45
5.1.1	Modelo numérico do problema de Terzaghi com fluido compressível	47
5.1.2	Modelo numérico do problema de Terzaghi com fluido incompressível	54
5.2	Problema de Terzaghi tridimensional	57
5.3	Problema de Mandel	62
5.3.1	Modelo numérico do problema de Mandel	64
5.4	Problema de Mandel tridimensional	73
6	CONSIDERAÇÖES FINAIS	80
7	ANEXO A	81
7.1	Problemas bidimensionais	81
7.1.1	Elemento triangular linear	82
7.2	Problemas tridimensionais	84
7.2.1	Elemento tetraédrico linear	86
8	ANEXO B	90
8.1	Método de Newton-Raphson	90
8.1.1	Resolução do sistema de equações algébricas	91
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Fluxo de fluido através de meios porosos

1.1.1 Meios porosos

Vários materiais são considerados porosos, alguns exemplos são os solos, areias, rochas de todos os tipos, concreto, cerâmicas, espumas sintéticas, pães, pulmões e rins. Sejam eles naturais, artificiais ou biológicos, todos possuem algo em comum: são compostos por uma fração do domínio total sólida, chamada de matriz sólida, e a outra fração do material é espaço vazio, chamado de poros (BEAR; BACHMAT, 2012). No entanto, essa definição também poderia classificar um material metálico como poroso, já que possui microfissuras em seu domínio. Logo, uma melhor definição de material poroso é dado por Bear (1972): o material não só deve possuir uma matriz sólida e espaços vazios, esses espaços vazios, ou poros, devem estar interconectados de modo a criar caminhos que ligam os contornos do domínio (seja de maneira regular ou randômica).

Tendo sido introduzida a ideia de um meio poroso, agora discute-se o conteúdo dentro dos poros. Nesses espaços vazios interconectados, podem haver uma ou mais fases fluidas, sendo elas gasosas ou líquidas. No caso de uma areia no deserto, por exemplo, os vazios são preenchidos por uma composição de gases, que é o ar. Já no caso de uma areia em regiões litorâneas, os vazios podem ser preenchidos por água e/ou ar. Para esclarecer, uma fase fluida é uma porção homogênea quimicamente, que é fisicamente separada das outras porções por meio de uma interface (camada que delimita a separação entre as fases ou a fase e o sólido) (BEAR; BACHMAT, 2012).

Visto a complexidade geometria que um meio poroso possa vir apresentar, fica difícil ou até impossível de descrever de maneira exata a geometria das faces internas do sólido que delimita os vazios em um material poroso. Esse obstáculo obriga as abordagens teóricas a enxergarem o material poroso não de uma maneira tão detalhada, mas de maneira mais simplificada. Portanto foi adotada uma abordagem de natureza estatística (BEAR, 1972), onde o comportamento do material é caracterizado pela média do mesmo,

ou seja, uma caracterização macroscópica do meio. Logo, introduz-se a ideia do Volume Elementar Representativo, porção mínima do material que permite sua caracterização. A ideia dessa porção representativa do material é melhor abordada na seção 2.1. Essa abordagem estatística permite tratar o problema através dos métodos da mecânica do contínuo (LEWIS; SCHREFLER, 1998).

No caso mais específico desse trabalho, o material poroso em questão é um solo ou uma rocha. O grande exemplo prático de aplicação do estudo desses materiais porosos, que inclusive é a motivação desse trabalho, é na engenharia de reservatórios, na exploração de poços de petróleo e gás.

Os reservatórios de óleo ou gás são formações geológicas porosas que contêm, em seus vazios, além de água, ao menos um hidrocarboneto (óleo ou gás) na fases líquida ou gasosa (BEAR, 1972). Portanto em um mesmo reservatório, é possível haver três fases, sendo duas delas líquida (água e óleo) e uma delas gasosa (gás).

É de extrema importância o estudo desses reservatórios, pois a exploração dos recursos naturais ali confinados pode acarretar grandes mudanças na região, gerando instabilidades e/ou impactos ambientais. A intensa extração de fluidos, por exemplo, pode acarretar o adensamento do solo na região, o que causa grandes movimentos verticais no solo que podem danificar propriedades (VERRUIJT, 1969), ou também a alta pressão introduzida nos poços devido a injeção de água pode causar o fraturamento dos mesmos (HAIMSON; FAIRHURST *et al.*, 1969) e essas fraturas induzidas podem comprometer a integridade das rochas adjacentes e alcançar aquíferos vizinhos à região da extração (RAHM, 2011). Esses são alguns problemas que justificam o estudo mais aprofundado de reservatórios.

Porém, não são apenas os riscos envolvidos na exploração de reservatórios que justificam o seu estudo. Já é bem sabido que as variações de pressão, saturação e temperatura devido à extração de hidrocarbonetos induz a mudanças no estado de tensões do mesmo, ou seja, os efeitos geomecânicos são importantes no comportamento de alguns reservatórios. Para reservatórios pouco consolidados, por exemplo, a mudança das tensões podem causar vários efeitos secundários como aumentar a produção, diminuir a permeabilidade, causar um grande adensamento da superfície e pôr em risco a integridade dos equipamentos de exploração (LONGUEMARE *et al.*, 2002). Ainda de acordo com Longuemare *et al.* (2002), a variação das tensões em reservatórios altamente fraturados ou com grande quantidade de fraturas naturais fazem com que a condutividade nesses canais aumentem ou diminuam, o que causa uma mudança no fluxo dos fluidos. Outro efeito importante na análise de reservatórios é a sua relação com as rochas adjacentes. Em simuladores de reservatórios convencionais, considera-se o reservatório em um estado totalmente confinado (GUTIERREX; LEWIS *et al.*, 1998), no entanto, ainda de acordo com o autor, a exploração dos recursos naturais ali presentes pode fazer com que a rocha-reservatório influencie as condições ou o estado das rochas adjacentes e vice-versa, logo seria importante simular os efeitos geomecânicos das partes no entorno do reservatório.

Esses efeitos só são possíveis de serem previsto se levar em conta estudos mais detalhados dos reservatórios.

Para sintetizar, de acordo com Sen e Settari (2005), o comportamento das rochas no reservatório estão sujeitos a variações do estado de tensões ao longo da atividade de exploração do local. Seu comportamento tem enorme impacto na produção, no desenvolvimento da atividade e na produção, como por exemplo **(1)** no planejamento da exploração, **(2)** na estabilidade e integridade do poço e **(3)** no adensamento e nos efeitos nas regiões adjacentes. Sendo assim, a inclusão dos efeitos geomecânicos nas análises tem papel crucial na exploração dos reservatórios.

1.1.2 Poroelasticidade

As pequenas deformações do meio poroso acopladas ao fluxo de fluidos através de seus vazios interconectados é comumente atribuída à expressão poroelasticidade linear que, de acordo com Wang (2000), é um termo que foi inicialmente introduzido por Geertsma em seu artigo de 1966. Essa teoria mobilizou vários pesquisadores durante vários anos, uma extensa revisão da história dessa teoria pode ser encontrada em Boer (1996) e, de acordo com o autor, os primeiros a desenvolverem uma teoria que leva em conta a influência da pressão dos fluidos nos poros na deformação de solos foi desenvolvida por Fillünger em 1913 e por Terzaghi em 1923, propondo um modelo de adensamento unidimensional. De acordo com Lewis e Schrefler (1998), ambos os autores fizeram contribuições importantes para a teoria dos meios porosos entre 1913 e 1934. A teoria foi generalizada para três dimensões em 1936 por Rendulic e foi então em 1941 que Biot (1941) apresentou uma teoria mais consistente em três dimensões.

Após a teoria ter sido estendida para três dimensões por Biot em 1941 de acordo com Detournay e Cheng (1995), posteriormente o próprio Biot acabou reformulando sua teoria algumas vezes, em seguida foi melhorada por Verruijt e por Rice e Cleary.

A teoria da poroelasticidade procura ligar um comportamento acoplado entre fluido e sólido da seguinte maneira:

- **A influência do sistema hidráulico no mecânico** ocorre quando há uma variação da poropressão no domínio, o que influencia no estado de tensões da região estudada.
- **A influência do sistema mecânico no hidráulico** ocorre quando há uma variação nas deformações do material, o que muda o volume do material poroso, e então a sua quantidade de fluido armazenado muda.

A palavra sólido, no contexto desse trabalho, faz referência ao esqueleto do material, ou seja, sua matriz porosa. Os termos poropressão, pressão no fluido ou apenas pressão,

possuem o mesmo significado. Os acoplamentos em ambos os sentidos, ou seja, mecânico-hidráulico e hidráulico-mecânico, ocorrem de maneira instantânea em situações quasi-estáticas, onde a propagação de ondas elásticas podem ser desconsideradas (WANG, 2000).

A forma matemática mais simples de representar o acoplamento entre o sólido e o fluido no material poroso é por meio de um sistema de equações algébricas lineares. Para chegar nesse sistema, além de aplicar um método de solução de equações diferenciais parciais, por exemplo elementos finitos, algumas hipóteses devem ser tomadas: pequenas deformações, linearidade material, não variação da porosidade e da permeabilidade em relação à variação do volume. O grau de acoplamento entre os sistemas depende de alguns fatores: compressibilidades da matriz sólida, do fluido, dos grãos sólidos e dos poros assim como da porosidade. De acordo com Wang (2000), acoplamentos desprezíveis ocorreriam no caso de fluido altamente compressíveis, como por exemplo gases em variações de pressão não tão elevadas.

1.2 Soluções analíticas

O problema de fluxo de fluido através de um meio poroso, em condições quasi-estáticas e para pequenas deformações é descrito pelo sistema de equações diferenciais parciais a seguir:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - b \nabla p \mathbf{I} + \rho \mathbf{g} = 0 \\ b \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}'$ o tensor das tensões efetivas, b o coeficiente de Biot, p as pressões, $\mathbf{I}$ a matriz identidade, ρ a densidade do material poroso, $\mathbf{g}$ o vetor da gravidade $\mathbf{u}$ os deslocamentos e $\mathbf{q}$ o fluxo de Darcy. Essas equações são obtidas a partir das equações de equilíbrio e de conservação de massa, respectivamente.

Por causa da natureza complexa do sistema de equações 1.1 em relação à determinação das respostas analíticas, apenas respostas para problemas de geometria e condições de contorno simples foram encontradas. Duas delas são descritas a seguir e servirão de *benchmark* para o código a implementado.

- **Problema de Terzaghi.** Esse problema representa um processo de adensamento unidimensional. Foi o primeiro problema acoplado entre fluxo e sólido, em condições saturadas, a ter uma solução analítica. Foi encontrada pelo próprio Terzaghi (TERZAGHI, 1936) levando em conta algumas simplificações. A solução analítica desse problema tem uma resposta bem próxima das experimentais.
- **Problema de Mandel.** Esse é um problema bidimensional, onde duas placas impermeáveis são apertadas com um solo entre elas. Um fluxo de água é então induzido

a sair pelas laterais. Esse exemplo é também um caso onde pode ser observado com nitidez o acoplamento entre fluido e sólido. A pressão, após a aplicação do carregamento, continua a subir, o que é um efeito inesperado na mecânica dos solos. Esse efeito é conhecido como o efeito de *Mandel-Creyer*, que foi observado pela primeira vez por Gibson (1963).

A solução analítica de ambos os problemas pode ser encontradas em Coussy (2004).

1.3 Métodos numéricos

Embora haja solução analítica para alguns problemas mais simples, os problemas de poroelasticidade, na prática, frequentemente possuem geometrias complicadas e heterogeneidades nas propriedades dos materiais, o que torna inviável a obtenção de uma solução analítica de problemas de valor inicial (WANG, 2000). Para contornar esse problema, são usados métodos numéricos para encontrar a solução do sistema.

Atualmente, o uso de técnicas numéricas para a simulação de problemas, não apenas de poroelasticidade, mas de várias frentes da ciência é uma realidade, graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e capacidade de armazenamento de informações. Em função disso, o desenvolvimento de algoritmos vem ganhando cada vez mais espaço no meio da pesquisa científica e industrial (MALISKA, 2017).

Para cada tipo de equação, um algoritmo é melhor adaptado que outro. O problema hidromecânico, por exemplo, é dividido em dois sistemas físicos diferentes (mecânico e fluido) e suas equações são obtidas de maneiras diferentes. A equação que modela o sistema mecânico é obtida a partir do balanço da quantidade de movimento (equação de equilíbrio). Já, a equação que modela o sistema hidráulico é a conservação de massa. Portanto, não necessariamente a melhor técnica numérica para resolver um deles é também a melhor para o outro (MALISKA, 2017). No entanto, isso não exclui a possibilidade de usar uma mesma estratégia numérica para resolver ambos os casos.

Hoje, há vários métodos numéricos e variações deles, adaptados para cada problema da ciência. No entanto, no presente trabalho, apenas alguns métodos, utilizados para a resolução de sistemas mecânicos e hidráulicos, são brevemente citados.

1.3.1 Métodos numéricos para o sistema mecânico

Para a resolução do sistema de equações do problema mecânico, na grande maioria dos casos, o método dos elementos finitos é preferido (ZIENKIEWICZ; SHIOMI, 1984), (LEWIS; SCHREFLER, 1998), (GUTIERREX; LEWIS *et al.*, 1998), (CHIN *et al.*, 2002), (DEAN *et al.*, 2006). Porém, ainda assim há autores que utilizam o método das diferenças finitas (OSORIO *et al.*, 1997), (STONE *et al.*, 2000) e também o método dos volumes

finitos (DEMIRDŽIĆ; MUZAFERIJA, 1994), (PIZZOL; MALISKA, 2012) para a aproximação do problema geomecânico.

Embora o método das diferenças finitas e dos volumes finitos tenham se mostrado capazes de representar os efeitos geomecânicos presentes em sistemas hidromecânicos acoplados, o método dos elementos finitos ainda é o mais utilizado. Isso se deve ao fato dos elementos finitos conseguirem representar geometrias complexas, o que não é trivial utilizando os dois outros.

1.3.2 Métodos numéricos para o sistema hidráulico

Se o método numérico mais utilizado para o sistema mecânico era o método dos elementos finitos, no caso do sistema hidráulico os outros dois métodos (diferenças finitas e volumes finitos) são tão utilizados quanto. Alguns dos autores que optaram por utilizar os elementos finitos na aproximação do problema hidráulico são: (VERMEER; VERRUIJT, 1981), (WAN *et al.*, 2003), (WHITE; BORJA, 2008). Alguns autores que escolheram o método das diferenças finitas foram: (OSORIO *et al.*, 1997), (CHIN *et al.*, 2002), (STONE *et al.*, 2000); e alguns que escolheram o método dos volumes finitos: (KIM *et al.*, 2009), (PIZZOL; MALISKA, 2012).

É importante observar, no entanto, que ao utilizar o método dos elementos finitos, para o tratamento do problema mecânico e hidráulico ao mesmo tempo, um problema numérico é criado. No caso limite de baixa permeabilidade (principalmente com baixo incremento de tempo inicial) ou rápido incremento de carregamento, o fluido nos poros pode impor uma condição próxima à incompressibilidade na deformação da matriz sólida (WHITE; BORJA, 2008), o que pode gerar instabilidades numéricas.

1.3.3 Oscilações numéricas no Método dos Elementos Finitos

Instabilidades numéricas e imprecisões, quando elementos finitos comuns são utilizados, podem aparecer logo no início da simulação de problemas de adensamento de solos (VERMEER; VERRUIJT, 1981). Essa instabilidade, que aparece no contorno drenado, ocorre quando o fluido e os grãos sólidos são ambos incompressíveis. Em tempos iniciais da análise (logo após o carregamento ter sido aplicado), mesmo em condições drenadas, o material comporta-se como não drenado (isso se intensifica a medida que a permeabilidade diminui), gerando uma condição incompressível no material, causando a instabilidade (KIM, 2010).

A estabilidade, nesse caso, pode ser alcançada obedecendo a condição conhecida como Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB). Essa condição impõe que a interpolação do campo dos deslocamentos seja uma ordem maior que a interpolação do campo das pressões.

No entanto, mesmo a condição LBB sendo obedecida, a instabilidade numérica pode ser observada quando o fluido é compressível. Aparentemente, para fluidos compressíveis

e em tempos próximos ao inicial, o problema acoplado não resulta em um problema incompressível, logo a condição LBB não é necessária. Essa instabilidade, nesse caso, é causada pelo salto instantâneo da pressão, o que causa descontinuidade no campo de pressão na borda drenada (KIM, 2010).

Os autores Vermeer e Verruijt (1981), em seu artigo, mostram que há critério para um intervalo de tempo mínimo para que essa instabilidade numérica não ocorra em problemas de adensamento unidimensionais. Outra forma de superar essa oscilação seria refinar a borda drenada do problema (PREISIG; PRÉVOST, 2011). De acordo com Li e Wei (2018), essas oscilações no caso de uma análise transiente de fluxo de calor pode ser eliminada se a técnica da matriz de massa concentrada (*lumped-mass matrix*) for utilizada. No caso da poromecânica a influência dessa técnica ainda não é clara, mas em alguns casos ela pode diminuir as oscilações, como será mostrado nesse trabalho.

1.4 Acoplamentos

Para inúmeros problemas, não há mais dúvidas sobre a importância do acoplamento entre os sistemas, no entanto, historicamente, problemas físicos acoplados foram considerados extremamente complexos de serem resolvidos numericamente devido aos recursos computacionais limitados. Na simulação de reservatórios convencionais, por exemplo, os efeitos da compactação da rocha e da variação da porosidade são levados em consideração de forma indireta, adicionando termos em função da pressão. Fazendo tal mudança, a equação do fluxo nos poros torna-se independente do problema mecânico. Outro exemplo, de acordo com Gai (2004), é a simplificação das equações geomecânicas 3D para apenas uma dimensão, ou seja, ao invés das equações generalizadas de Biot em 1941, comumente usam-se as expressões encontradas por Terzaghi em 1923.

Há também outras formas de acoplar os sistemas hidráulico e mecânico. Geralmente, elas são classificadas em quatro diferentes estratégias: totalmente acoplada, iterativamente acoplada, explicitamente acoplada e desacoplada (SETTARI; WALTERS, 1999). Resumidamente, cada uma das estratégias pode ser explicada como abaixo:

1. **Totalmente acoplado:** As equações governantes de fluxo e geomecânica são resolvidas simultaneamente a cada intervalo de tempo, como mostra a figura 1.1. Por se tratar de um sistema não linear, a convergência da solução no intervalo de tempo pode ser alcançada utilizando um método de solução de equações não lineares, por exemplo o Método de Newton-Raphson. Vários autores utilizaram essa estratégia de acoplamento (GUTIERREX; LEWIS *et al.*, 1998), (DEAN *et al.*, 2006), (GAI, 2004), (ALPAK *et al.*, 2015). Esse tipo de acoplamento, para passos de integração adequados, possui convergência quadrática, porém ele requer o desenvolvimento de um software unificado entre fluxo de fluido e geomecânica e além disso é caro com-

putacionalmente (KIM, 2010).

2. **Acoplamento iterativo (*Two-Way*)**: Nessa estratégia de acoplamento, os problemas hidráulico e mecânico são resolvidos separadamente. O acoplamento é levado em consideração no início de cada um dos simuladores, que usam as variáveis convergidas que o outro simulador acaba de calcular. Essa troca de informações é feita até que haja convergência das respostas. A figura 1.2 ilustra a ideia sequencial que acaba de ser tratada para solução das equações. Cada um dos problemas pode ser não linear, portanto cada vez que um simulador é chamado deve ser aplicado, por exemplo, o Método de Newton-Raphson. Esse método costuma ser bastante explorado na área de reservatórios (SETTARI; WALTERS *et al.*, 2001), (MAINGUY; LONGUEMARE, 2002), (TRAN *et al.*, 2005), (DEAN *et al.*, 2006), pois se convergidos totalmente, apresentam resultados iguais aos do acoplamento total, com a vantagem de, normalmente, serem menos custosos.
3. **Acoplamento parcial iterativo (*One-Way*)**: Assim como na estratégia de acoplamento iterativo, os problemas hidráulico e mecânico são resolvidos separadamente, porém cada simulador é chamado uma única vez antes de passar para o próximo intervalo de tempo. A estratégia de acoplamento parcial iterativa pode ser considerada, então, um caso a parte do acoplamento iterativo, onde apenas uma iteração ocorre no intervalo de tempo e também pode ser representada pela figura 1.1. Sua desvantagem é em relação à precisão, principalmente em problemas com acoplamento forte, porém ela se mostra extremamente atraente em relação ao tempo computacional, o que faz com que alguns autores a prefiram (SETTARI; WALTERS, 1999), (MINKOFF *et al.*, 2003), (DEAN *et al.*, 2006), (CLETO, 2016).
4. **Desacoplado**: Utilizado em larga escala nos simuladores de reservatórios convencionais, essa estratégia de acoplamento é a mais econômica computacionalmente, pois apenas o problema hidráulico é resolvido. Essa estratégia pode levar em consideração os efeitos geomecânicos, mas de maneira pobre, aproximada e pouco precisa. Ela foi estudada por alguns autores com o objetivo de mostrar suas limitações em certos casos onde os efeitos geomecânicos são importantes (MAINGUY; LONGUEMARE, 2002), (SAMIER; GENNARO *et al.*, 2007).

1.5 Objetivos

O intuito do presente trabalho é programar o método totalmente acoplado em MatLab, que servirá como base para futuras simulações do grupo de pesquisa GMCMS (Grupo de Modelagem Computacional em Mecânica dos Sólidos) da UNESP de Bauru. A fim de

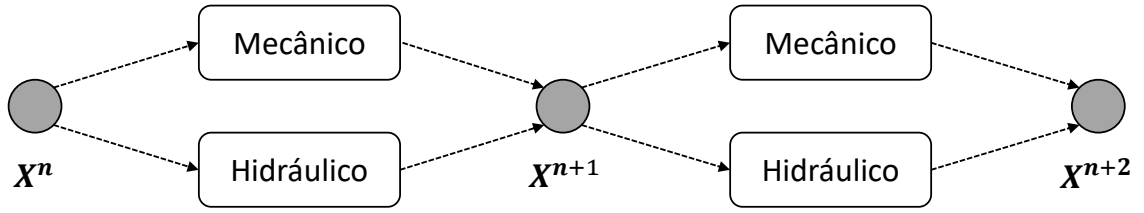


Figura 1.1: Estratégia totalmente acoplada (Adaptado de (KIM, 2010))

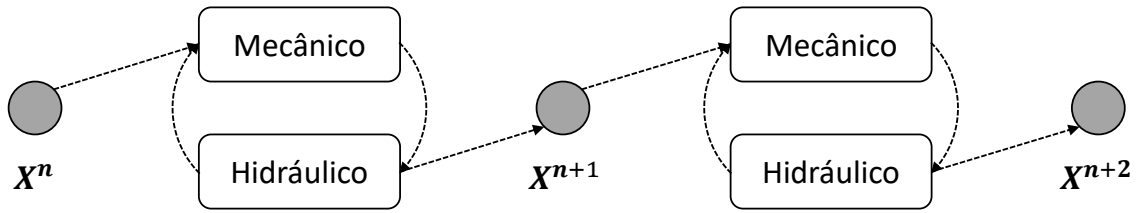


Figura 1.2: Estratégia acoplada iterativa (Adaptado de (KIM, 2010))

verificar se o código foi bem implementado, são usados problemas para os quais a solução analítica é conhecida, que no caso são os problemas de Terzaghi e Mandel.

Além disso, conforme já comentado, o Método dos Elementos Finitos gera algumas oscilações espúrias em certas condições. Essas oscilações são mostradas e é verificado que elas não comprometem os resultados da simulação. Também é apresentada uma maneira de amenizá-las.

1.6 Estrutura da Dissertação

No capítulo 2 são introduzidos parâmetros importantes na caracterização dos solos e rochas. Além disso também são introduzidos os conceitos de tensão efetiva de Terzaghi e fluxo de Darcy. Em seguida, as equações diferenciais parciais que regem o comportamento do sistema hidromecânico são deduzidas.

O capítulo 3 é dedicado à aproximação do sistema de equações encontradas no capítulo 2 para, enfim, poder resolver o problema em um sistema de equações algébricas que podem ser implementadas em qualquer computador. O método escolhido para a aproximação das equações, tanto para o sistema mecânico quanto para o hidráulico é o Método dos Elementos Finitos. Logo, é com base nele que são deduzidas as formas aproximadas das equações.

No capítulo 4 os acoplamentos são explicados de forma mais aprofundada. Além disso, também são apresentadas as vantagens e as desvantagens de cada um deles em

relação a três critérios: Precisão, adaptabilidade e eficiência computacional. Em seguida a importância do método totalmente acoplado é melhor enfatizada para a resolução dos sistemas acoplados e então justificada a sua escolha.

No capítulo 5 é mostrada a comparação entre os resultados numéricos e os resultados analíticos para a validação do código implementado. É também mostrada a oscilação numérica espúria que ocorre no método dos elementos finitos sob certas condições.

Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões do trabalho realizado.

Capítulo 2

EQUAÇÕES GOVERNANTES

O problema acoplado de fluxo de fluido através de um material poroso já foi e vem sendo estudado por vários autores. Iniciou-se com os estudos de Karl von Terzaghi, reconhecido até hoje como o pai da mecânica dos solos. Em suas publicações (TERZAGHI, 1923), (TERZAGHI, 1924) o autor apresenta a base da teoria matemática para problemas de consolidação em uma dimensão, base para o desenvolvimento da mecânica dos solos (BOER; SCHIFFMAN; GIBSON, 1996). Em seus trabalhos, Terzaghi tomou como hipótese básica que a deformação de um solo seria dada exclusivamente pelo rearranjo do sistema de partículas, logo a compressão dos grãos sólidos assim como a compressão do líquido poderia ser ignorada. Essas considerações são aproximações válidas para o caso de solos moles e areias (VERRUIJT, 2013).

Essa teoria foi estendida para três dimensões por Biot (1941) e também por Geertsma *et al.* (1957). Em seus artigos, Biot e Geersman desenvolvem as equações constitutivas de um meio poroso no caso de um fluxo monofásico e propõem ensaios experimentais para a obtenção dos coeficientes necessários de acoplamento. Para fluxos multifásicos, Lewis e Schrefler (1998) apresentam as equações governantes de acoplamento entre o meio poroso e várias fases do fluido.

Outros autores continuaram pesquisando sobre o assunto, e hoje a teoria da poroelasticidade linear alcançou um estágio onde um consenso geral em relação às equações básicas foi alcançado (VERRUIJT, 2008), (COUSSY, 2004).

Esse capítulo tem como objetivo desenvolver as equações que regem o comportamento de um sistema hidromecânico, que consiste na análise de um fluxo de fluido através de um meio poroso, sendo que as deduções são escritas com base no livro de Verruijt (2013). Antes, alguns conceitos básicos são apresentados para então partir para a dedução das equações.

2.1 Volume elementar representativo

Uma breve explicação preliminar é necessária antes de apresentar as equações constitutivas, balanço de massa e de momento. Na teoria clássica do contínuo, as equações e balanços são sempre obtidas a partir de um volume elementar, e por isso é importante, antes de mais nada, explicar o que é um volume elementar na poromecânica.

Para representar o comportamento de certo material, são feitos ensaios de laboratório a fim de obter parâmetros e então poder prever seu comportamento. No caso de um sólido isotrópico, por exemplo, para conseguir representar seu comportamento mecânico, devem ser obtidos dois parâmetros: o Módulo de Elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν . No caso de um material poroso isotrópico, além desses dois parâmetros já citados, há também a porosidade e a permeabilidade (esses parâmetros são melhor explicados ainda nesse capítulo).

No entanto, microscopicamente, todos os materiais possuem pequenas descontinuidades e defeitos que influenciam em seu comportamento, logo bastaria fazer uma análise a nível molecular, representando cada molécula desse material, ou no caso de um material poroso, representar cada grão sólido, para poder então obter o comportamento global do material estudado. Mesmo considerando essa possibilidade como sendo possível (ainda hoje não há técnicas que possibilitem tal detalhamento de um material), embora a capacidade dos processadores ter aumentado exponencialmente nos últimos anos, uma análise numérica de tal material ainda é uma tarefa impossível devido ao grande número de equações que haveria no sistema. Portanto, ao invés disso, procura-se representar o comportamento médio do material com base em métodos estatísticos (BEAR, 1972), possibilitando caracterizá-lo através de uma análise macroscópica.

Para isso, introduz-se o Volume Elementar Representativo (VER) que, na poromecânica, é um volume de tamanho grande o suficiente em relação às microestruturas (i.e. as dimensões dos poros e dos grãos sólidos), porém pequeno suficiente para permitir a representação das heterogeneidades do material (DETournay; CHENG, 1995). A figura 2.1 ilustra a ideia discutida acima, mostrando a razão pela qual o volume elementar não pode ser muito pequeno. Nela pode-se observar que se for utilizado um volume elementar muito pequeno (círculos à direita), as características do material variariam em cada região. Ao contrário, nos círculos à esquerda, pode-se adotar características médias para o material, de forma com que mesmo analisando uma outra região (dentro de uma zona homogênea), as mesmas características seriam obtidas.

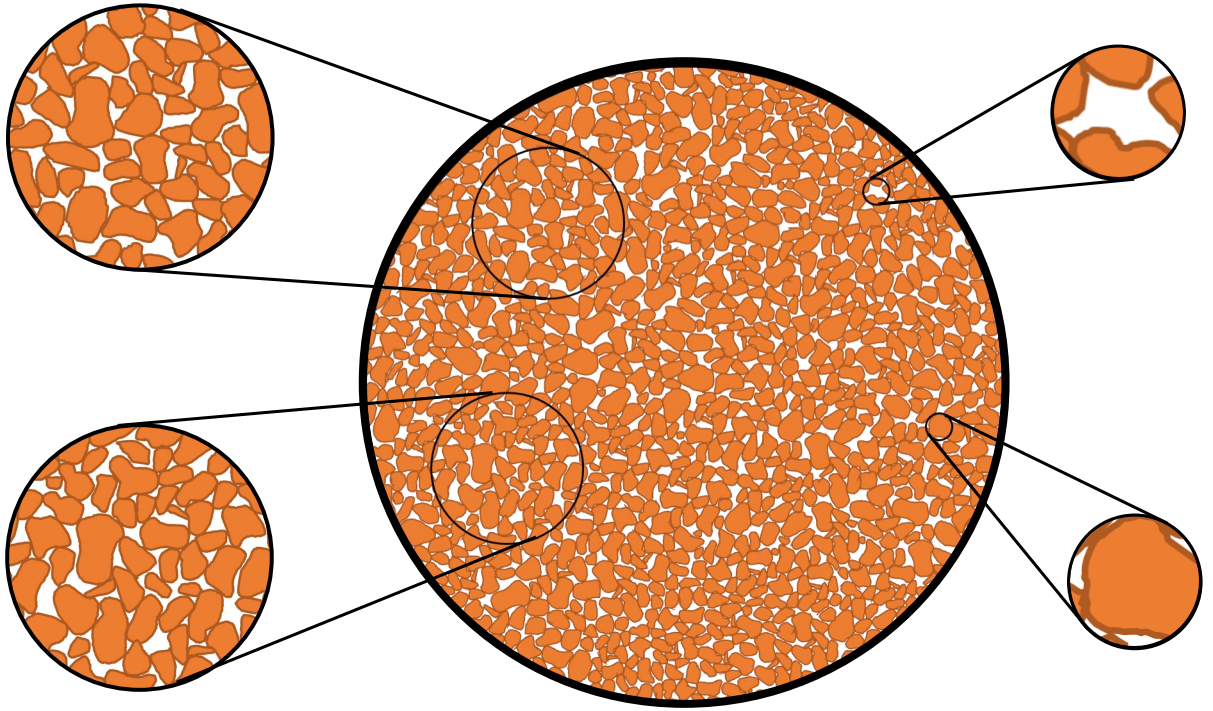


Figura 2.1: Volume elementar representativo

2.2 Propriedades do fluido e da matriz porosa

2.2.1 Porosidade

Um meio poroso saturado é composto por uma matriz (parte sólida do meio) e por seus poros, sendo esse último por onde o fluido flui. No entanto, esse fluido pode percorrer apenas através da rede de poros interconectada. A figura 2.2 ilustra o que seriam os poros interconectados (parte preenchida pelo fluido).

A matriz é a parte pela qual o fluxo de fluido não passa, ou seja, é composta tanto pelos grãos sólidos quanto pelos poros ocultos. A parte complementar do material poroso são os espaços livres conectados que é por onde ocorre o fluxo de fluido.

Porosidade ou porosidade volumétrica, é definida como sendo a relação entre o volume de vazios e o volume total do material. Dois diferentes tipos de porosidade podem ser atribuídas a um meio poroso: porosidade absoluta e porosidade efetiva (BEAR, 1972).

A **porosidade absoluta** (ou porosidade total) n_t é aquela em que o volume dos poros ocultos também são considerados, ou seja, a razão entre o volume de vazios V_p do material sobre seu volume total V , conforme a equação 2.1.

$$n_t = \frac{\text{Volume de vazios}}{\text{Volume total}} = \frac{V_p}{V} \quad (2.1)$$

No entanto, na mecânica dos solos é mais vantajoso contabilizar a porosidade por onde o fluido realmente circula, ou seja, o espaço vazio que está interconectado dentro do

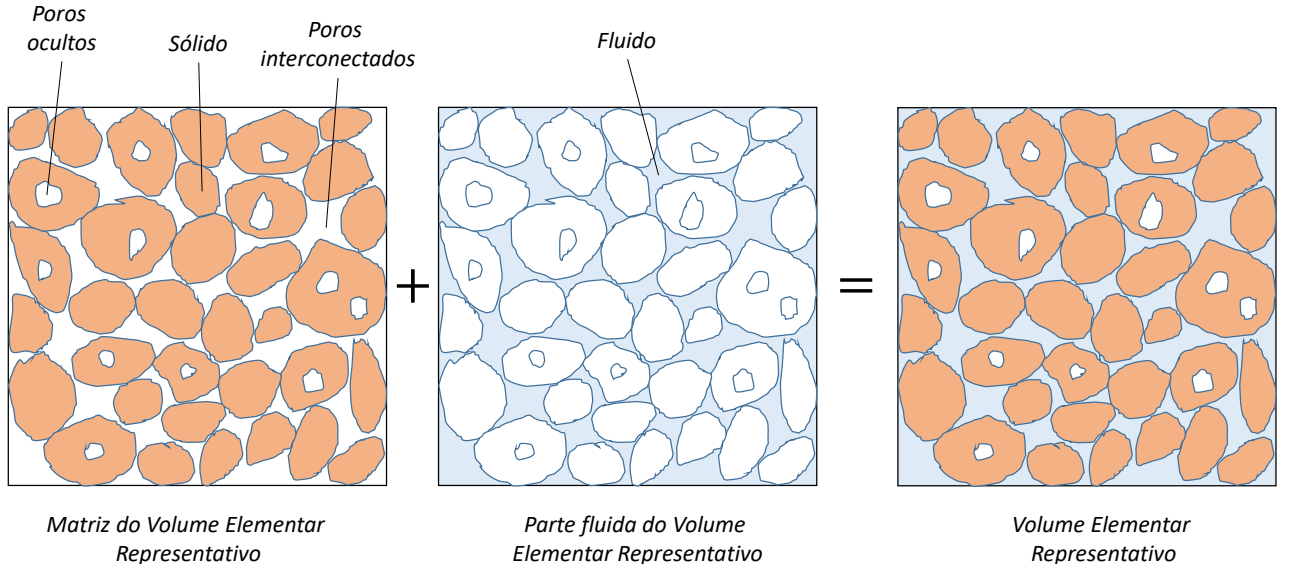


Figura 2.2: Representação da porosidade do material poroso

material poroso. Por isso há um segundo tipo de porosidade, chamada de **porosidade efetiva** n , definida pela razão entre o volume de poros conectados $(V_p)_e$ e o volume total V , conforme mostrada pela equação 2.2.

$$n = \frac{\text{Volume de poros conectados}}{\text{Volume total}} = \frac{(V_p)_e}{V} \quad (2.2)$$

2.2.2 Coeficiente de compressibilidade do fluido

A compressibilidade do fluido é a variação do volume V (relacionado à massa específica ρ) do fluido em relação à variação da pressão (BEAR, 1972). Em condições isotérmicas essa relação é dada por:

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}; \quad T = \text{constante} \quad (2.3)$$

A partir da expressão relacionada à massa específica da equação 2.3, pode-se obter a seguinte relação:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \quad (2.4)$$

sendo p_0 a pressão inicial relacionada à densidade inicial ρ_0 .

No caso desse trabalho, essa lei é válida para a água no estado líquido em condições isotérmicas. Para pequenas variações de pressão, pode-se ainda aproximar a equação 2.4, com a ajuda da série de Taylor de primeira ordem, por:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(p - p_0)] \quad (2.5)$$

2.2.3 Viscosidade do fluido

A viscosidade dinâmica pode ser definida como a resistência de um fluido à tensão cisalhante quando este está em movimento. Em termos mais simples, viscosidade dinâmica é a força de atrito entre duas camadas de fluido. Para fluidos Newtonianos, ela pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.6)$$

sendo τ_{xy} a tensão de cisalhamento na direção x (na horizontal) em um plano com sua normal em y (na vertical).

A viscosidade dinâmica também é função da pressão e da temperatura, porém, no presente trabalho, ela é considerada como uma constante. No caso da água a $20^\circ C$, a viscosidade vale $1,003.10^{-9} MPa.s$.

2.2.4 Compressibilidade da matriz, dos grãos sólidos e dos poros

Em 2.2.2 apenas a compressibilidade do fluido foi apresentada, no entanto, para descrever o comportamento de um meio poroso, outras compressibilidades devem ser levadas em consideração. Em seu trabalho, Geertsma *et al.* (1957) diz que devem ser distinguidos três diferentes tipos de compressibilidade:

- a) Compressibilidade dos grãos sólidos: é a variação do volume dos próprios grãos sólidos do meio poroso em relação à variação das tensões de tração ou compressão.
- b) Compressibilidade da matriz porosa: é a variação do volume do esqueleto, ou seja, do Volume Elementar Representativo (sem que haja fluido dentro) com a variação das tensões de tração ou compressão.
- c) Compressibilidade dos poros: é a variação do volume de poros no meio poroso em relação à variação das tensões de tração ou compressão.

A expressão que relaciona as variações de volume descritas acima às variações das tensões, para condições isotérmicas, também podem ser escritas da forma da equação 2.3:

$$C_s = -\frac{1}{V_s} \frac{dV_s}{d\sigma}; \quad C_m = -\frac{1}{V_m} \frac{dV_m}{d\sigma}; \quad C_p = -\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{d\sigma}; \quad (2.7)$$

sendo C_s , C_m e C_p os coeficientes de compressibilidade dos grãos sólidos, da matriz e dos poros, respectivamente. V_s , V_m e V_p os volumes dos grãos sólidos, da matriz e dos poros, respectivamente e σ a tensão total.

No caso da compressibilidade da matriz sólida, seu valor pode ser obtido a partir do Módulo de Young do meio poroso. A relação entre a compressibilidade e o Módulo de Elasticidade pode ser relacionada da seguinte maneira:

$$C_m = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \quad (2.8)$$

sendo E o Módulo de Elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

2.2.5 Relações constitutivas de sistema mecânico isotrópico

Na sessão 2.1 foi apresentado o volume elementar representativo que, com base em métodos estatísticas, permite tirar propriedades médias do meio poroso. Sem essa ferramenta não seria possível (ou no mínimo extremamente complexo) obter o comportamento mecânico e hidráulico do meio poroso. Portanto, é importante deixar claro que a lei constitutiva apresentada nesse tópico é para um meio homogêneo, que no caso de um material poroso pode ser feito com base em um volume elementar representativo. Seguindo as notações de Olivella e Bosch (2017), é possível representar a relação entre as deformações e os deslocamentos em duas dimensões de um meio poroso isotrópico, para pequenas deformações, da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{u}) = \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{u} \quad (2.9)$$

sendo u o vetor deslocamento, x o vetor de coordenadas materiais, $\boldsymbol{\nabla}$ o operador gradiente e $\boldsymbol{\nabla}^S$ o operador gradiente simétrico.

Também fica possível representar a relação entre as tensões e as deformações (na notação de engenharia, onde as tensões e deformações são escritas em forma de vetor) de um meio poroso isotrópico, para pequenas deformações:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.10)$$

sendo $\boldsymbol{\epsilon}$ as deformações infinitesimais do material, $\boldsymbol{\sigma}'$ as tensões efetivas (explicadas na seção 2.4) e $\mathbf{D}$ a matriz constitutiva.

A matriz $\mathbf{D}$ para problemas em duas dimensões (na notação de engenharia) e no estado plano de deformações pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

Já, a matriz $\mathbf{D}$ para problemas tridimensionais (na notação de engenharia) pode ser escrita como:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Outra expressão importante é a da deformação volumétrica, que expressa quanto o material expande ou contrai com a variação do estado de tensões. A deformação volumétrica se dá através da seguinte expressão:

$$\epsilon_v = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.13)$$

Ou seja, $\epsilon_v = \partial \mathbf{u} / \partial x + \partial \mathbf{u} / \partial y + \partial \mathbf{u} / \partial z$, sendo $\mathbf{u}$ o vetor deslocamento da fase sólida. Isso implica que a deformação volumétrica também pode ser expressa por:

$$\epsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.14)$$

2.3 Fluxo de Darcy

O fluxo de líquidos através de meios porosos é um assunto que começou com o engenheiro hidráulico francês Henry Darcy, em 1856, com seus estudos sobre purificação de água por meio de filtros de areia. Nesses estudos, Darcy percebeu que "a vazão através de um meio poroso é proporcional à área aberta ao fluxo e à carga da água, e inversamente proporcional ao comprimento do meio pelo qual o fluido percola". Essa observação pôde ser escrita através da seguinte expressão:

$$q = KA \frac{\Delta h}{L} \quad (2.15)$$

onde q representa a vazão de água através de um filtro de área transversal A e comprimento L . K é uma constante de proporcionalidade, chamada de coeficiente de permeabilidade ou condutividade hidráulica, que é característica do meio poroso e do fluido.

No entanto os avanços nesse campo não cessaram com ele. Após a contribuição de alguns outros pesquisadores, a Lei do fluxo de Darcy passou a ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{q}$ é o vetor de fluxo, $\boldsymbol{\kappa}$ o tensor de permeabilidade intrínseca do material (ao contrário da condutividade hidráulica, a permeabilidade intrínseca depende apenas das características do meio), μ a viscosidade dinâmica do fluido, ρ_f a massa específica do fluido, $\mathbf{g}$ a gravidade e $\boldsymbol{\nabla}$ o operador gradiente. Generalizando, assim, a fórmula de Henry Darcy (2.15).

Se a gravidade estiver atuando na direção z , explicitando cada componente da equação 2.16 e considerando as direções principais coincidentes com os eixos, tem-se:

$$q_x = -\frac{\kappa_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad q_y = -\frac{\kappa_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad q_z = -\frac{\kappa_z}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_f g \right); \quad (2.17)$$

A matriz de permeabilidade intrínseca é um tensor. Se considerar as direções principais desse tensor alinhadas aos eixos adotados, seus termos correspondem à permeabilidade em cada direção:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Caso o meio poroso tenha uma permeabilidade isotrópica, a mesma matriz da equação 2.18 pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Outra maneira de representar o fluxo de Darcy, pode ser escrito em função das velocidades relativas entre as fases sólida ($\mathbf{w}$) e fluida ($\mathbf{v}$) multiplicado pela porosidade, visto que se trata de um meio poroso (VERRUIJT, 2013):

$$\mathbf{q} = n(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \quad (2.20)$$

2.4 Tensão efetiva

O princípio das tensões efetivas foi anunciado pela primeira vez por Karl Von Terzaghi (embora Paul Fillünger tenha publicado em 1913 trabalhos que demonstrem ele ter sido o primeiro a descobrir as tensões efetivas, ela é conhecida como descoberta de Terzaghi). Ele percebeu que ao aplicar uma tensão de tração ou compressão no solo, a pressão diminuía ou aumentava praticamente o mesmo valor (WANG, 2000). Esse princípio, também conhecido por tensões efetivas de Terzaghi, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p\mathbf{I} \quad (2.21)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões totais, $\boldsymbol{\sigma}'$ o tensor de tensões efetivas, $\mathbf{I}$ a matriz identidade e p a pressão nos poros. É importante observar a convenção de sinais utilizada é a mesma de Lewis e Schrefler (1998), ou seja, uma tensão negativa é uma tensão de compressão, para ficar de acordo com a mecânica dos sólidos. Porém para a pressão, um objeto comprimido é um objeto sujeito a uma pressão positiva.

No entanto, a equação 2.21 é apenas uma aproximação da verdadeira equação das tensões efetivas. Biot (1941) em sua teoria geral da consolidação chega na expressão geral das tensões efetivas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - bp\mathbf{I} \quad (2.22)$$

onde b , conhecido como coeficiente de Biot-Willis, é um valor que se encontra entre 0 e 1. A equação encontrada por Biot nada mais é do que uma extensão daquela encontrada por Terzaghi. Se for considerado $b = 1$, a equação 2.22 reduz-se àquela encontrada por Terzaghi (2.21).

O coeficiente de Biot-Willis (ou mais comumente conhecido por apenas coeficiente de Biot) é dado pela seguinte expressão:

$$b = 1 - \frac{C_s}{C_m} \quad (2.23)$$

sendo C_s e C_m os coeficientes de compressibilidade dos grãos sólidos e da matriz do material, respectivamente, definidos em 2.2.4. Conforme mostrado, o coeficiente de Biot pode variar entre 0 e 1. Quando $b = 1$, pode-se deduzir que $C_m \gg C_s$, que é o caso de solos moles.

2.5 Equação de equilíbrio do sistema hidromecânico

A equação de equilíbrio para um volume elementar representativo saturado sobre condições quase-estáticas pode ser dado pela equação a seguir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (2.24)$$

onde $\nabla \cdot ()$ é o operador divergente, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões totais, $\mathbf{g}$ é o vetor da gravidade e $\rho = n\rho_f + (1 - n)\rho_s$ é a densidade do material, sendo n a porosidade, ρ_f a densidade do fluido e ρ_s a densidade do sólido.

Como mostrado em 2.4, a tensão total pode ser decomposta em uma parcela chamada de tensão efetiva e outra parcela da pressão do fluido conforme a equação 2.21. Portanto, pode-se reescrever a expressão 2.24 da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - b\nabla p\mathbf{I} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (2.25)$$

2.6 Equação de conservação

Um dos princípios mais importantes da teoria da consolidação é a conservação da massa de dois componentes, água e sólido. Para o equacionamento do problema, é considerado um VER cujos poros estão completamente preenchidos por água (meio poroso saturado). Nesse volume, a velocidade média do fluido é denotada pelo vetor $\mathbf{v}$ e a do sólido pelo vetor $\mathbf{w}$. As densidades de cada componente são denotadas por ρ_f e ρ_s para a água e para o sólido, respectivamente. A porosidade do VER é representada por n .

As equações de conservação de massa do fluido e do sólido são estabelecidas considerando a variação da quantidade de massa por unidade de tempo e um fluxo de entrada e saída do volume representativo que, de acordo com Verruijt (2013), podem ser escritas da seguinte forma, respectivamente:

$$\frac{\partial(n\rho_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\rho_f\mathbf{v}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial((1-n)\rho_s)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-n)\rho_s\mathbf{w}) = 0 \quad (2.27)$$

A partir da equação da conservação de massa do fluido (2.26), pode-se escrever:

$$\rho_f \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \nabla \cdot (n\mathbf{v}) + (n\mathbf{v}) \cdot \nabla \rho_f = 0 \quad (2.28)$$

O segundo termo da equação acima pode ser escrito da seguinte forma, de acordo com a equação 2.3:

$$n \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = n \rho_f C_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.29)$$

Note que na equação 2.3 derivadas totais são utilizadas, mas a igualdade acima continua sendo verdadeira pois o produto entre a velocidade do fluido e o gradiente da pressão pode ser desprezado, visto que ambos são pequenos (VERRUIJT, 2013). O mesmo pode ser feito para o quarto termo da equação 2.28 (o produto da velocidade do fluido pelo divergente da pressão também pode ser desprezado). Portanto, levando 2.29 em 2.28 tem-se:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n C_f \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (2.30)$$

Assumindo agora a equação da conservação da massa de sólido 2.27, pode-se escrever:

$$-\rho_s \frac{\partial n}{\partial t} + (1-n) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_s \nabla \cdot [(1-n)\mathbf{w}] + [(1-n)\mathbf{w}] \cdot \nabla \rho_s = 0 \quad (2.31)$$

De acordo com Verruijt (2013), a variação da massa específica do sólido em relação ao tempo pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{\rho_s C_s}{1-n} \left(-\frac{\partial \sigma_v}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (2.32)$$

sendo que σ_v representa a tensão total de compressão (ou tração) volumétrica $Tr(\boldsymbol{\sigma})/3$.

Assumindo também que a velocidade do sólido multiplicado pelo divergente da pressão e das tensões é desprezível e substituindo 2.32 em 2.31, tem-se:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + C_s \left(-\frac{\partial \sigma_v}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \nabla \cdot [(1-n)\mathbf{w}] = 0 \quad (2.33)$$

A derivada da porosidade em relação ao tempo aparece tanto na equação 2.30 quanto na 2.33 que pode ser eliminada se essas equações são somadas, obtendo-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} + \nabla \cdot [n(\mathbf{v} - \mathbf{w})] + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} - C_s \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} = 0 \quad (2.34)$$

No primeiro termo da equação acima, a velocidade da fase sólida pode ser escrita como $\partial \mathbf{u} / \partial t$. Graças à propriedade comutativa entre o divergente e a derivada temporal (OLIVELLA; BOSCH, 2017) e à equação 2.14:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (2.35)$$

O segundo termo pode ser escrito como $\nabla \cdot \mathbf{q}$, que representa o fluxo de Darcy, conforme já mostrado pela equação 2.20.

No último termo da equação 2.34 a tensão total pode ser escrita como $\sigma_v = \sigma'_v - bp$, ver equação 2.22, e a tensão efetiva volumétrica pode ser relacionada à deformação volumétrica $\sigma'_v = \epsilon_v / C_m$.

Levando-se em conta essas considerações, a partir da equação 2.34, obtém-se:

$$b \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.36)$$

sendo que $b = 1 - C_s / C_m$, mais conhecido como coeficiente de biot e $S = nC_f + (b - n)C_s$.

2.7 Formas forte e fraca das equações governantes

Com o intuito de preparar as equações para serem aproximadas pelo método dos Elementos Finitos, primeiramente é apresentada a forma forte de ambas as equações governantes do problema de poroelasticidade, a equação de equilíbrio e a de conservação. Em seguida, a forma fraca das equações, forma na qual é aplicada o método, é também apresentada.

2.7.1 Formas forte e fraca da equação de equilíbrio

A equação diferencial de equilíbrio (eq. 2.25) e da equação de conservação (eq. 2.36) junto às condições de contorno do problema mecânico e hidráulico é chamada de forma forte do problema e está representada a seguir, pela equação 2.37.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0, & \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + S\dot{p} + \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu}(-\nabla p + \rho_f \mathbf{g}) = 0, & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \text{em } \Gamma_u \\ p = \bar{p}, & \text{em } \Gamma_p \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, & \text{em } \Gamma_t \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}, & \text{em } \Gamma_q \end{array} \right. \quad (2.37)$$

onde Ω é o domínio e $\mathbf{n}$ é o vetor normal à superfície Γ_q e Γ_t . $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{p}$, $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{q}$ são os deslocamentos, as pressões e as tensões e as vazões prescritas no contorno Γ_u (condição essencial), Γ_p (condição essencial), Γ_t (condição natural) e Γ_q (condição natural), respectivamente.

A forma fraca das equações diferenciais de 2.37, de acordo com (LEWIS; SCHREFLER, 1998), é encontrar $\mathbf{u} \in U^u$ e $p \in U^p$ tais que

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \mathbf{g} d\Omega, \quad \forall \mathbf{w} \in U_0^u \quad (2.38)$$

e

$$\int_{\Omega} \left[w b \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + w S \dot{p} - \nabla w \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \nabla p + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \rho_f \mathbf{g} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} w \frac{q}{\rho_f} d\Gamma = 0, \quad \forall w \in U_0^p \quad (2.39)$$

sendo

$$\begin{aligned} U^u &= \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in H^1, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u\} \\ U_0^u &= \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \in H^1, \mathbf{w} = 0 \text{ em } \Gamma_u\} \\ U^p &= \{p | p \in H^1, p = \bar{p} \text{ em } \Gamma_p\} \\ U_0^p &= \{w | w \in H^1, w = 0 \text{ em } \Gamma_p\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

sendo que $\mathbf{w}$ e w são funções arbitrárias, chamadas de função peso.

Capítulo 3

MODELAGEM NUMÉRICA DO PROBLEMA HIDROMECHANICO

Nesse capítulo é feita a aproximação do problema pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) tanto da equação de equilíbrio quanto da equação da conservação da massa. Em seguida também é apresentada a forma de resolução numérica desse problema através do método iterativo de Newton-Raphson.

3.1 Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos

No presente trabalho, há dois sistemas de equações a serem aproximados pelo MEF. O primeiro é o problema mecânico, cujo comportamento é regido pelo sistema de equações diferenciais mostrado em 2.25. O segundo é o problema hidráulico, regido pela equação diferencial mostrada em 2.36.

3.1.1 Aproximação do problema mecânico pelo MEF

Para a aproximação pelo MEF do sistema mecânico, já serão consideradas as notações de engenharia em acordo com (LEWIS; SCHREFLER, 1998). Os vetores dessa notação são explicitados no Anexo A 7, tanto para duas quanto para três dimensões. Portanto, a equação de equilíbrio (2.24) é agora escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{g} = \{0 \ g\}^T$ ou $\mathbf{g} = \{0 \ 0 \ g\}^T$ é o vetor gravidade em duas e três dimensões, respectivamente, e $\rho = n\rho_f + (1 - n)\rho_s$ é a densidade do material, sendo n a porosidade, ρ_f a densidade do fluido e ρ_s a densidade do sólido. $\mathbf{L}^T$ é o operador equivalente ao divergente, mas se adaptando aos vetores de tensão e deformação (3.1).

Na equação 3.1, a tensão total, $\boldsymbol{\sigma}$, é escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - b\mathbf{m}p \quad (3.2)$$

onde ao invés da matriz identidade $\mathbf{I}$, como em 2.22, nessa notação o vetor $\mathbf{m}$ aparece.

Vale notar que na equação constitutiva (2.10), em que as tensões são relacionadas às deformações, a matriz tangente $\mathbf{D}$, de acordo com a equação 2.11 ou 2.12 para os casos bi e tridimensionais, respectivamente, continua sendo a mesma.

A relação entre as deformações e os deslocamentos, como na equação 2.9, pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.3)$$

Também pode-se dizer que a deformação volumétrica (2.14), fica da seguinte forma:

$$\epsilon_v = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{m}^T \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.4)$$

Tendo sido introduzida a notação de engenharia para o problema mecânico, o sistema de equações do problema pode ser apresentado, em sua forma fraca, a partir da equação 2.38 da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega, \quad \forall \mathbf{w} \quad (3.5)$$

A fim de aproximar a equação 3.5 por elementos finitos, são aproximados, primeiramente, os deslocamentos, a função peso, as deformações, as pressões e as tensões. A forma explícita de cada uma dessas expressões é dada no Anexo A 7, tanto para os elementos triangulares lineares utilizados em 2D, quanto para os elementos tetraédricos lineares utilizados em 3D.

O campo de deslocamentos pode ser aproximado, em elementos finitos, a partir de tal formulação:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &\approx \mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}_u^e(x, y) \mathbf{d}^e, & (x, y) \in \Omega^e \\ \mathbf{w}(x, y) &\approx \mathbf{w}^e(x, y) = \mathbf{N}_u^e(x, y) \mathbf{w}^e, & (x, y) \in \Omega^e \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo que $\mathbf{N}_u^e(x, y)$ é a função de forma do elemento, explicitada no Anexo A 7.

Tendo o campo de deslocamento aproximado dentro do elemento, também é possível encontrar o campo de deformações no mesmo e, de acordo com a equação 3.3, pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\epsilon}^e(x, y) = \mathbf{L} \mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{L} \mathbf{N}_u^e(x, y) \mathbf{d}^e = \mathbf{B}_u^e(x, y) \mathbf{d}^e \quad (3.7)$$

sendo que $\mathbf{B}_u^e(x, y)$, a derivada da matriz de forma que também depende do elemento

utilizado e também é explicitada no Anexo A 7.

Da mesma forma, com o auxílio da equação 3.6, tem-se que $(\mathbf{L}\mathbf{w})^T$ é escrito como:

$$(\mathbf{L}\mathbf{w})^T = (\mathbf{L}\mathbf{N}_u^e(x, y)\mathbf{w}^e)^T = \mathbf{w}^{eT}(\mathbf{L}\mathbf{N}_u^e(x, y))^T = \mathbf{w}^{eT}\mathbf{B}_u^e(x, y)^T \quad (3.8)$$

Da mesma maneira que o campo de deslocamentos, o campo de pressão pode ser aproximado por elementos finitos a partir dos valores nodais da pressão de acordo com a seguinte expressão:

$$p(x, y) \approx p^e(x, y) = \mathbf{N}_p^e(x, y)\mathbf{p}^e \quad (x, y) \in \Omega^e \quad (3.9)$$

sendo que $\mathbf{N}_p^e(x, y)$ é a matriz da função de forma para as pressões, que depende do elemento utilizado e é explicitada no Anexo A 7.

Tendo a forma aproximada do campo de deformações e de pressão dentro do elemento, pode-se deduzir facilmente a expressão aproximada para o campo de tensões totais em seu interior, que é a soma entre as tensões efetivas de Terzaghi e de uma parcela da pressão. Com o auxílio das equações 2.10 e 3.7, a tensão efetiva, em sua forma aproximada, pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\sigma}'^e(x, y) = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}^e(x, y) = \mathbf{D}\mathbf{B}_u^e(x, y)\mathbf{d}^e \quad (3.10)$$

Para o termo da pressão na tensão total, em 3.2, a partir da equação 3.9, tem-se que

$$b\mathbf{m}p = b\mathbf{m}\mathbf{N}_p^e(x, y)\mathbf{p}^e \quad (3.11)$$

Após terem sido introduzidas as expressões aproximadas pelo MEF no espaço, agora fica possível fazer o tratamento de cada um dos termos da equação 3.5.

Expressão em elementos finitos da equação do sistema mecânico

Antes de passar à forma aproximada pelo MEF da forma fraca da equação de equilíbrio (3.5) é preciso definir as expressões aproximadas dos deslocamentos, das pressões e da função peso em sua forma global, pois o equilíbrio do problema é feito de forma global e não elementar. Para tal, é definida a matriz A_u^e e A_p^e , que são matrizes que relacionam os graus de liberdade do elemento com os graus de liberdade no sistema global. Logo, os deslocamentos, a função de forma e as pressões globais podem ser escritas em função das pressões elementares da seguinte maneira:

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{A}_u^e \mathbf{d}$$

$$\mathbf{w}^e = \mathbf{A}_u^e \mathbf{w} \quad \text{ou} \quad \mathbf{w}^{eT} = \mathbf{w}^T \mathbf{A}_u^{eT} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{A}_p^e \mathbf{p}$$

sendo $\mathbf{u}^e$, $\mathbf{w}^e$, $\mathbf{p}^e$ os valores nodais dos deslocamentos, da função peso e das pressões elementares, respectivamente e $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ os valores nodais dos deslocamentos, da função peso e das pressões globais, respectivamente.

Primeiramente, é aproximado o lado esquerdo da equação de equilíbrio (3.5). Com a ajuda das equações 3.10 e 3.11, 3.8 e 3.12, pode-se reescrever o lado esquerdo, de forma global, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{B}_u^{eT} \left(\mathbf{D} \mathbf{B}_u^e \mathbf{d}^e - b \mathbf{m} \mathbf{N}_p^e \mathbf{p}^e \right) d\Omega \right] \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{B}_u^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_u^e \mathbf{d}^e d\Omega - \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{B}_u^{eT} b \mathbf{m} \mathbf{N}_p^e \mathbf{p}^e d\Omega \right] \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{B}_u^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_u^e \mathbf{A}_u^e \mathbf{d} d\Omega - \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{B}_u^{eT} b \mathbf{m} \mathbf{N}_p^e \mathbf{A}_p^e \mathbf{p} d\Omega \right] \\ &= \mathbf{w}^T \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_u^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_u^e d\Omega \mathbf{A}_u^e \right] \mathbf{d} - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_u^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} b \mathbf{m} \mathbf{N}_p^e d\Omega \mathbf{A}_p^e \right] \mathbf{p} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo n_{el} o número total de elementos.

Fazendo-se as seguintes alterações:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_u^e d\Omega \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} b \mathbf{m} \mathbf{N}_p^e d\Omega$$

sendo que $\mathbf{K}^e$ é a matriz de rigidez elementar do sistema mecânico, enquanto que a matriz $\mathbf{Q}^e$ é a matriz elementar que leva em consideração a influência do sistema hidráulico no mecânico.

Substituindo 3.14 em 3.13, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{w}^T \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{A}_u^e] \mathbf{d} - \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{Q}^e \mathbf{A}_p^e] \mathbf{p} \right\} \quad (3.15)$$

Finalmente, ao chamar

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{A}_u^e] \\ \mathbf{Q} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{Q}^e \mathbf{A}_p^e] \end{aligned} \quad (3.16)$$

obtém-se as matrizes em suas formas globais, sendo que $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global do sistema mecânico, enquanto que a matriz $\mathbf{Q}$ é a matriz global que leva em consideração a influência do sistema hidráulico no mecânico.

Sendo assim, o lado esquerda da forma fraca da equação de equilíbrio aproximada pelos elementos finitos, pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{w}^T [\mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{Q}\mathbf{p}] \quad (3.17)$$

O outro lado da igualdade da forma fraca da equação de equilíbrio (3.5), o lado direito da equação, é onde se encontra a influência das forças externas, $\bar{\mathbf{t}}$ representando o carregamento aplicado no contorno e $\rho \mathbf{g}$ representando as forças por unidade de volume que, nesse caso, é apenas a força peso. Para a aproximação global desses termos, são utilizadas as equações 3.6 e 3.12.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Gamma_t^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_u^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_u^{eT} \rho \mathbf{g} d\Omega \right] \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Gamma_t^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{N}_u^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{N}_u^{eT} \rho \mathbf{g} d\Omega \right] \\ &= \mathbf{w}^T \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_u^{eT} \left(\int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^{eT} \rho \mathbf{g} d\Omega \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pode-se substituir as expressões dentro das integrais da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_\Gamma^e &= \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\
\mathbf{f}_\Omega^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^{eT} \rho \mathbf{g} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{f}_\Gamma^e + \mathbf{f}_\Omega^e$$

sendo $\mathbf{f}_\Gamma^e$ o vetor de forças associado às condições de contorno naturais do elemento e $\mathbf{f}_\Omega^e$ o vetor de forças por unidade de volume do elemento.

Substituindo 3.19 em 3.18, tem-se:

$$\int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega = \mathbf{w}^T \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{F}^e \right\} \tag{3.20}$$

Considerando

$$\mathbf{F}_u^{ext} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}_u^{eT} \mathbf{F}^e \tag{3.21}$$

obtém-se a seguinte expressão final para o lado direito da igualdade da forma fraca da equação de equilíbrio:

$$\int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega = \mathbf{w}^T \left[\mathbf{F}_u^{ext} \right] \tag{3.22}$$

A forma fraca do sistema mecânico (3.5) foi aproximada pelo MEF em duas etapas: o lado esquerdo da igualdade (3.17) e o lado direito da igualdade (3.22). Igualando ambas as equações, tem-se a seguinte expressão a nível global:

$$\mathbf{w}^T \left[\mathbf{Kd} - \mathbf{Qp} \right] = \mathbf{w}^T \left[\mathbf{F}_u^{ext} \right] \tag{3.23}$$

$$\mathbf{w}^T \left[\mathbf{Kd} - \mathbf{Qp} - \mathbf{F}_u^{ext} \right] = 0$$

Porém, $\mathbf{w}^T$ é arbitrário, conforme definido em 3.5, isso implica que:

$$\mathbf{Kd} - \mathbf{Qp} = \mathbf{F}_u^{ext} \tag{3.24}$$

3.1.2 Aproximação do problema hidráulico pelo MEF

Para a aproximação do sistema hidráulico pelo MEF, também são utilizadas as notações de engenharia de acordo com (LEWIS; SCHREFLER, 1998). A deformação volumétrica terá a mesma notação que vinha sendo aplicada (3.4), logo, a sua derivada com relação ao tempo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial(\mathbf{m}^T \mathbf{L} \mathbf{u})}{\partial t} = \mathbf{m}^T \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{m}^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.25)$$

Aplicando o mesmo para a derivada da pressão no tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \dot{p} \quad (3.26)$$

Já, no caso do vetor de fluxos, de acordo com a equação 2.16 ele é escrito da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot \frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) = -\nabla^T \frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \quad (3.27)$$

onde o operador gradiente (∇) e o operador divergente (∇^T) têm sua forma explicitada no Anexo A 7.

Portanto, a forma fraca da equação da conservação de massa, a partir da equação 2.39, pode ser representada pela seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \left[w b \mathbf{m}^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} + w S \dot{p} - \nabla w \left(-\frac{\kappa}{\mu} \nabla p + \frac{\kappa}{\mu} \rho_f \mathbf{g} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} w \frac{q}{\rho_f} d\Gamma = 0 \quad (3.28)$$

Expressão em elementos finitos da equação do sistema hidráulico

A mesma aproximação dos deslocamentos da equação 3.6 e das pressões da equação 3.9, tanto a nível de elemento quanto a nível global, são utilizadas, no entanto a aproximação da função peso é diferente. Ela é interpolada no elemento assim como a interpolação da pressão. Aplicando o método de Galerkin, o campo de pressões e o da função peso, aproximados, em qualquer parte do elemento, podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} p(x, y) &\approx p^e(x, y) = \mathbf{N}_p^e(x, y) \mathbf{p}^e, & (x, y) \in \Omega^e \\ w(x, y) &\approx w^e(x, y) = \mathbf{N}_p^e(x, y) \mathbf{w}^e, & (x, y) \in \Omega^e \end{aligned} \quad (3.29)$$

sendo que $\mathbf{N}_p^e(x, y)$ é a função de forma do elemento triangular linear para as pressões, que é explicitada no Anexo A 7.

O gradiente de pressões e o gradiente da função de forma, podem ser escritos como:

$$\nabla p(x, y) = \nabla \mathbf{N}_p^e \mathbf{p}^e = \mathbf{B}_p^e \mathbf{p}^e \quad (3.30)$$

$$\nabla w(x, y) = \nabla \mathbf{N}_p^e \mathbf{w}^e = \mathbf{B}_p^e \mathbf{w}^e$$

sendo que a matriz $\mathbf{B}_p^e$ também é explicitada no Anexo A 7.

Portanto, levando-se em consideração as equações 3.25, 3.26 e 3.29 é possível escrever a forma fraca da equação de conservação da massa (3.28) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} b \mathbf{m}^T \mathbf{L} \mathbf{N}_u^e \dot{\mathbf{d}}^e d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} S \mathbf{N}_p^e \dot{\mathbf{p}}^e d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} (\nabla \mathbf{N}_p^e)^T \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \nabla \mathbf{N}_p^e \mathbf{p}^e d\Omega - \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} (\nabla \mathbf{N}_p^e)^T \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \rho_f \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} \frac{q}{\rho_f} d\Gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando agora a equação acima e as expressões 3.7 e 3.29, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} b \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u^e \dot{\mathbf{d}}^e d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} S \mathbf{N}_p^e \dot{\mathbf{p}}^e d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \mathbf{B}_p^e \mathbf{p}^e d\Omega - \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \rho_f \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} \frac{q}{\rho_f} d\Gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

A fim de passar a equação para as variáveis globais, define-se novamente suas expressões:

$$\dot{\mathbf{d}}^e = \mathbf{A}_u^e \dot{\mathbf{d}}$$

$$\mathbf{w}^e = \mathbf{A}_p^e \mathbf{w} \quad \text{ou} \quad \mathbf{w}^{eT} = \mathbf{w}^T \mathbf{A}_p^{eT} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{A}_p^e \mathbf{p}$$

$$\dot{\mathbf{p}}^e = \mathbf{A}_p^e \dot{\mathbf{p}}$$

sendo $\mathbf{u}^e$, $\mathbf{w}^e$, $\mathbf{p}^e$ e $\dot{\mathbf{p}}^e$ os valores nodais dos deslocamentos, da função peso, das pressões e da derivada das pressões em relação ao tempo, respectivamente, definidos no elemento. E $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ e $\dot{\mathbf{p}}$ os valores nodais dos deslocamentos, da função peso, das pressões globais e da derivada das pressões em relação ao tempo, respectivamente, definidos globalmente.

Utilizando as definições acima, a equação 3.32 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} b \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u^e \mathbf{A}_u^e \dot{\mathbf{d}} d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} S \mathbf{N}_p^e \mathbf{A}_p^e \dot{\mathbf{p}} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \mathbf{B}_p^e \mathbf{A}_p^e \mathbf{p} d\Omega - \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \rho_f \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{N}_p^{eT} \frac{q}{\rho_f} d\Gamma \right] = 0 \quad (3.34)$$

Ao reorganizar a expressão, tem-se

$$\mathbf{w}^T \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_p^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^{eT} b \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u^e d\Omega \mathbf{A}_u^e \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{A}_p^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^{eT} S \mathbf{N}_p^e d\Omega \mathbf{A}_p^e \dot{\mathbf{p}} \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{A}_p^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \mathbf{B}_p^e d\Omega \mathbf{A}_p^e \mathbf{p} - \mathbf{A}_p^{eT} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \rho_f \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}_p^{eT} \frac{q}{\rho_f} d\Gamma \right) \right] \right\} = 0 \quad (3.35)$$

Fazendo-se as seguintes alterações:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{eT} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^{eT} b \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u^e d\Omega \\ \mathbf{S}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^{eT} S \mathbf{N}_p^e d\Omega \\ \mathbf{H}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \mathbf{B}_p^e \\ \mathbf{F}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_p^{eT} \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \rho_f \mathbf{g} - \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}_p^{eT} \frac{q}{\rho_f} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo 3.36 em 3.35, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{A}_u^e \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{S}^e \mathbf{A}_p^e \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{A}_p^e \mathbf{p} - \mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{F}^e \right] \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{w}^T \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{A}_u^e \right] \dot{\mathbf{d}} + \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{S}^e \mathbf{A}_p^e \right] \dot{\mathbf{p}} + \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{A}_p^e \right] \mathbf{p} - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{F}^e \right] \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Fazendo-se novas alterações

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^T &= \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{Q}^e \mathbf{A}_u^e] \\
\mathbf{S} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{S}^e \mathbf{A}_p^e] \\
\mathbf{H} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{A}_p^e] \\
\mathbf{F}_p^{ext} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{A}_p^{eT} \mathbf{F}^e]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

e substituindo-as na equação 3.37, obtém-se:

$$\mathbf{w}^T [\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{F}_p^{ext}] = 0 \tag{3.39}$$

Sendo $w(x, y)$ uma função arbitrária, seus valores aproximados $\mathbf{w}^T$ também são arbitrários, logo a equação 3.39 pode ser escrita como:

$$\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{ext} \tag{3.40}$$

3.1.3 Integração numérica dos termos

Conforme mostrado, para a obtenção das matrizes $\mathbf{K}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{F}_u^{ext}$, $\mathbf{Q}^T$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{F}_p^{ext}$, é necessária a integração de alguns termos. Essa integração é feita mediante à quadratura de Gauss, integração numérica muito utilizada no Método dos Elementos Finitos, pois faz integração de polinômios com grande eficiência e eficácia.

No caso do presente trabalho, onde apenas elementos lineares são utilizados, em 2D os triângulos de três nós e em 3D os tetraédros de quatro nós, apenas um ponto de Gauss é requerido para a integração de todas as matrizes, exceto para a matriz $\mathbf{S}$. O número de pontos de Gauss a serem utilizados para a integração depende do grau do polinômio a ser integrado. Para polinômios de grau 0 (matrizes $\mathbf{K}$ e $\mathbf{H}$) ou de grau 1 (matrizes $\mathbf{Q}$, $\mathbf{F}_u^{ext}$, $\mathbf{Q}^T$ e $\mathbf{F}_p^{ext}$), apenas um ponto de Gauss é suficiente, porém para a matriz $\mathbf{S}$, o polinômio resultante da multiplicação de $\mathbf{N}_p^{eT}$ por $\mathbf{N}_p^e$ resulta em um polinômio de segunda ordem, o que obrigaria outros dois pontos de Gauss para uma integração numérica precisa.

Logo, uma estratégia utilizada para contornar a necessidade desses outros pontos de Gauss, que custaria mais tempo computacional, é condensar todas as componentes da matriz na diagonal, mais conhecida como matriz de massa concentrada *lumped mass matrix*, técnica muito utilizada em dinâmica de sólidos, mas que pode ser aplicada nesse caso. Para entender a forma da matriz concentrada, exemplifica-se com o triângulo linear. Primeiramente considere a matriz $\mathbf{S}^e$ a nível elementar:

$$\mathbf{S}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^{eT} S \mathbf{N}_p^e d\Omega \quad (3.41)$$

Sabendo que o termo S é constante e que $\mathbf{N}_p^e$ é a matriz de forma da pressão no elemento triangular linear, pode-se escrever:

$$\mathbf{S}^e = S \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e \end{bmatrix} d\Omega = S \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1^e N_1^e & N_1^e N_2^e & N_1^e N_3^e \\ N_2^e N_1^e & N_2^e N_2^e & N_2^e N_3^e \\ N_3^e N_1^e & N_3^e N_2^e & N_3^e N_3^e \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.42)$$

Concentrando todos os termos das linhas nas diagonais e fazendo-se algumas operações para simplificação tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^e &\approx S \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1^e N_1^e + N_1^e N_2^e + N_1^e N_3^e & 0 & 0 \\ 0 & N_2^e N_1^e + N_2^e N_2^e + N_2^e N_3^e & 0 \\ 0 & 0 & N_3^e N_1^e + N_3^e N_2^e + N_3^e N_3^e \end{bmatrix} d\Omega \\ &\approx S \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1^e (N_1^e + N_2^e + N_3^e) & 0 & 0 \\ 0 & N_2^e (N_1^e + N_2^e + N_3^e) & 0 \\ 0 & 0 & N_3^e (N_1^e + N_2^e + N_3^e) \end{bmatrix} d\Omega \\ &\approx S \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 \\ 0 & N_2^e & 0 \\ 0 & 0 & N_3^e \end{bmatrix} d\Omega \\ &\approx S A \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (3.43)$$

sendo A a área do elemento triangular de três nós.

No caso de um elemento tetraédrico linear, os termos da diagonal da matriz resultante seria 1/4 do volume total do elemento. Além de melhorar o tempo computacional, essa técnica também pode ajudar a diminuir as oscilações nas bordas drenadas de alguns casos, conforme já dito anteriormente.

3.1.4 Sistema de equações algébricas

O sistema de equações que regem o problema hidromecânico (equações 2.25 e 2.36) foram passados para a forma fraca (equações 3.5 e 3.28). Feito isso, foi possível aproximar o problema pelo Método dos Elementos Finitos e, enfim, chegar no sistema de equações algébricas equivalente, escrito a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{F}_u^{ext} \\ \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{ext} \end{cases} \quad (3.44)$$

sendo $\mathbf{d}$ e $\mathbf{p}$ as variáveis do sistema, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{Q}$ definidos em 3.16, $\mathbf{F}_u^{ext}$ definido em 3.22 e $\mathbf{Q}^T$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{F}_p^{ext}$ definidos em 3.38.

3.2 Resolução do sistema

3.2.1 Discretização das equações algébricas no tempo

No sistema de equações algébricas encontrado anteriormente (equação 3.44), aparece a derivada temporal tanto dos deslocamentos quanto das pressões. Essas duas derivadas no tempo são tratadas usando a formulação do Método das Diferenças Finitas e podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}} &= \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{d}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.45)$$

sendo $\mathbf{d}$ e $\mathbf{p}$ os deslocamentos e as pressões do passo atual, $\mathbf{d}_{t-\Delta t}$ e $\mathbf{p}_{t-\Delta t}$ os deslocamentos e as pressões do passo de tempo anterior e Δt o incremento de tempo de cada passo. Em casos não lineares essas derivadas são tratadas com um esquema de integração implícito no tempo, ou seja, obtidas através de um método iterativo até a sua convergência.

Sendo assim, o sistema de equações em 3.44 pode ser reescrito, utilizando a discretização temporal em diferenças finitas da equação 3.45, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{F}_u^{ext} \\ \mathbf{Q}^T \left[\frac{(\mathbf{d} - \mathbf{d}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{S} \left[\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{ext} \end{cases} \quad (3.46)$$

O que permite escrever:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{F}_u^{ext} \\ \frac{\mathbf{Q}^T}{\Delta t} \mathbf{d} + \frac{\mathbf{S}}{\Delta t} \mathbf{p} + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{ext} + \frac{\mathbf{Q}^T}{\Delta t} \mathbf{d}_{t-\Delta t} + \frac{\mathbf{S}}{\Delta t} \mathbf{p}_{t-\Delta t} \end{cases} \quad (3.47)$$

Visto que $\mathbf{d}_{t-\Delta t}$ e $\mathbf{p}_{t-\Delta t}$ são os valores das variáveis no passo de tempo anterior, então todo o lado direito da equação é conhecido. Além disso, $\mathbf{S}/\Delta t$ e $\mathbf{H}$ estão multiplicando a pressão, logo podem ser agrupados. Portanto, pode-se fazer as seguintes alterações:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^{*T} = \frac{\mathbf{Q}^T}{\Delta t} \\ \mathbf{E} = \frac{\mathbf{S}}{\Delta t} + \mathbf{H} \\ \mathbf{F}_p^{*ext} = \mathbf{F}_p^{ext} + \frac{\mathbf{Q}^T}{\Delta t} \mathbf{d}_{t-\Delta t} + \frac{\mathbf{S}}{\Delta t} \mathbf{p}_{t-\Delta t} \end{cases} \quad (3.48)$$

Substituindo 3.48 em 3.47, obtém-se:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{F}_u^{ext} \\ \mathbf{Q}^{*T} \mathbf{d} + \mathbf{E} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{*ext} \end{cases} \quad (3.49)$$

Esse mesmo sistema de equações algébricas, pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^{*T} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{ext} \\ \mathbf{F}_p^{*ext} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Essa é uma forma matricial alternativa de escrever o sistema de equações algébricas do problema hidromecânico. Essa forma permite escrever o sistema apenas em função de $\mathbf{d}$ e $\mathbf{p}$.

O sistema tratado nesse trabalho, como acaba de ser apresentado na equação 3.50, é um sistema de equações algébricas lineares, ou seja, não são necessárias técnicas iterativas para a sua resolução. No entanto esse caso é o mais simples e nem sempre é capaz de fazer previsões satisfatórias dos fenômenos analisados. Portanto, para casos onde o sistema de equações algébricas são não lineares, o método iterativo de Newton-Raphson foi programado e é apresentado no Anexo B 8.

Capítulo 4

ACOPLAMENTOS HIDROMECÂNICOS

Há algumas alternativas para a resolução do sistema de equações algébricas que caracterizam o problema hidromecânico, representado pela equação 3.44. Settari e Walters (1999) discute em seu artigo os diferentes métodos utilizados para o cálculo do sistema acoplado entre poroelasticidade e fluxo de fluidos. De acordo com os autores, as diferentes estratégias de acoplamento podem ser organizadas em quatro categorias: desacoplado, totalmente acoplado, acoplamento parcial iterativo e acoplamento iterativo, cada um com suas vantagens e desvantagens. Tran *et al.* (2009), em seu artigo, diz que a eficiência do método de acoplamento é classificada de acordo com as seguintes características:

- **Precisão:** Resultados obtidos devem ser precisos e consistentes. As respostas do problema, usando-se uma malha fina, devem se aproximar da resposta analítica ou de resultados de referência.
- **Adaptabilidade:** Um bom método de acoplamento deve ser flexível para a simulação de diferentes casos, ou seja, sem grandes mudanças no código. Uma boa adaptabilidade também ajuda na modificação ou implementação de novas funções no programa.
- **Eficiência computacional:** Fator extremamente importante principalmente para casos onde há grande quantidade de graus de liberdade. Mesmo com o avanço da tecnologia dos processadores, o tempo computacional ainda é um fator limitante para muitas análises.

Cada uma das estratégias de acoplamento possui vantagem em relação a um item, mas desvantagem em relação a outro. Cabe ao analista decidir qual método melhor se encaixa em suas necessidades para a análise. A seguir, é explicado, resumidamente, como cada uma das estratégias de acoplamento funcionam bem como suas vantagens e desvantagens.

4.1 Estratégias de acoplamento

Antes de explicar o procedimento de cada método, vale lembrar que o sistema acoplado pode ser escrito em sua forma matricial da equação 3.44. Esse sistema é usado de forma a melhor entender o funcionamento de cada um dos métodos de acoplamento.

4.1.1 Método desacoplado

Esse método é o mais utilizado até hoje pelos programas de simulação de reservatórios convencionais (SETTARI; WALTERS, 1999). Nessa estratégia de acoplamento, o sistema mecânico é desconsiderado ou levado em consideração através de valores tabelados. De acordo com Samier *et al.* (2006), há duas maneiras que são as mais utilizadas nos *softwares* convencionais:

- (A) **Compressibilidade constante.** Opção disponível em todos os simuladores de reservatório. O acoplamento é levado em consideração apenas na variação do volume dos poros, calculados em função da variação da pressão do fluido. Há também simuladores que nem levam em consideração a alteração do volume de poros, sendo escrito como um problema puramente hidráulico.
- (B) **Pseudo-acoplamento.** Nesse acoplamento, a porosidade e até a permeabilidade são calculadas pelo simulador através de leis empíricas fornecidas na entrada do programa. Esse modelo é capaz de mostrar algumas respostas mecânicas, como por exemplo a compactação, através de relações simples da variação da porosidade e permeabilidade.

Em ambos os tipos, o simulador resolve apenas o sistema de equações referente ao problema hidráulico, ou seja, aplicando o método de Newton-Raphson na seguinte expressão:

$$\mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{ext} \quad (4.1)$$

Caso o simulador considere algum efeito geomecânico, essa influência é colocada nos termos de compressibilidade da matriz $\mathbf{H}$ (SETTARI; WALTERS, 1999), pois em alguns simuladores consideram que a porosidade e/ou permeabilidade variam em função da pressão.

A Figura 4.1 apresenta o fluxograma que representa o método desacoplado, onde n corresponde ao intervalo de tempo no qual as variáveis são calculadas.

Vantagens do Pseudo-acoplamento:

- Método com baixíssimo custo computacional, já que o sistema algébrico a ser resolvido é apenas o hidráulico.

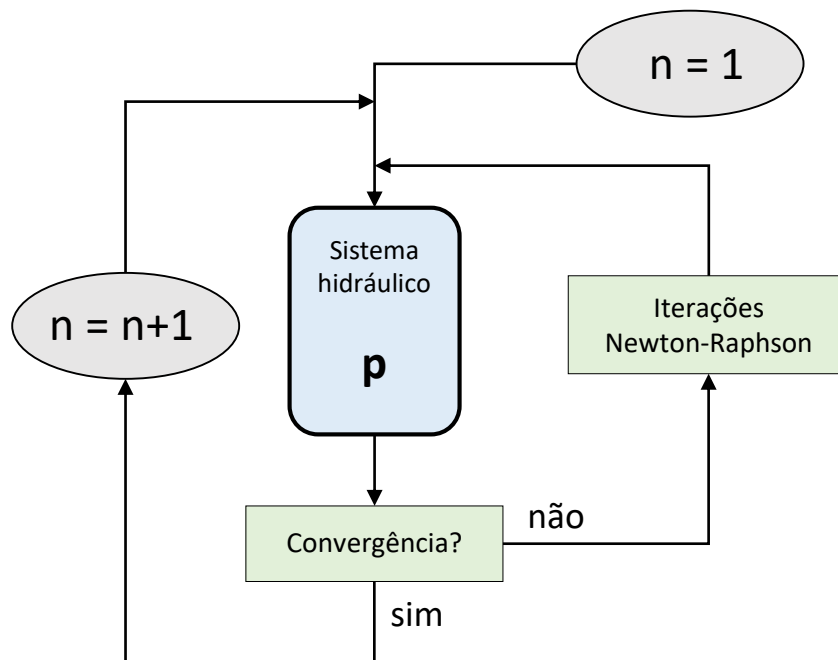


Figura 4.1: Fluxograma para o método desacoplado

- Alta adaptabilidade uma vez que os outros resultados são obtidos através de fórmulas empíricas facilmente programáveis.

Desvantagens do Pseudo-acoplamento:

- Esse método acaba deixando a desejar em relação à precisão dos resultados, pois a parte geomecânica do problema acaba tendo seu comportamento representado de uma maneira muito pobre ou, em alguns casos, nem mesmo representado.

Contudo, o Pseudo-acoplamento é sabiamente utilizado em casos onde o reservatório não apresenta grandes heterogeneidades e em casos de poços convencionais onde as tensões não mudam significativamente (CHIN *et al.*, 2002).

4.1.2 Totalmente acoplado

No outro extremo do acoplamento, encontra-se o método totalmente acoplado, onde as pressões e os deslocamentos são calculadas simultaneamente, com a ajuda de um método de resolução de sistemas não-lineares (por exemplo o método de Newton-Raphson, explicado em 8), por meio de um único sistema de equações (3.44). Esse é o método de acoplamento mais preciso, visto que resolve todas as variáveis ao mesmo tempo. A Figura 4.2 apresenta o fluxograma que representa o método totalmente acoplado.

Vantagens do método totalmente acoplado:

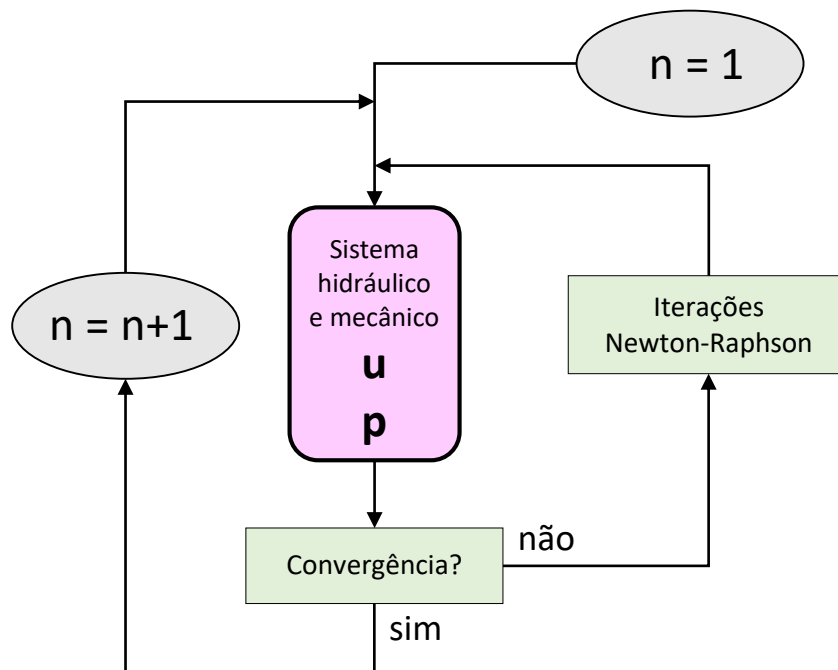


Figura 4.2: Fluxograma para o método totalmente acoplado (Fully-coupled)

- O esquema de acoplamento não introduz erros adicionais na solução, visto que é a maneira mais exata de se tratar o acoplamento.

Desvantagens do método totalmente acoplado:

- É o método de maior custo computacional entre os quatro, pois o simulador deve resolver um sistema de equações referente ao problema hidráulico e geomecânico ao mesmo tempo.
- Em relação a adaptabilidade esse método é o pior dos quatro, principalmente quando o sistema é altamente não linear, como por exemplo material elastoplástico e leis complexas de variação da porosidade e da permeabilidade, pois todos os termos devem ser derivados para entrar na matriz Jacobiana. Outro obstáculo é o desenvolvimento de um simulador que calcula, de maneira acoplada, o sistema de equações do problema hidromecânico.

Por mais que esse método seja o mais custoso computacionalmente, as vezes ele é o método mais apropriado para uma análise, sobretudo nos casos onde se tem um sistema fortemente acoplado. O acoplamento total, por ser o método mais preciso, tem seus resultados como referência para o teste de outros métodos.

4.1.3 Acoplamento iterativo

A ideia do acoplamento iterativo é resolver o sistema geomecânico e hidráulico separadamente. Para tal, em um mesmo passo de tempo, as respostas do primeiro simulador alimentam o segundo, que por sua vez alimenta o primeiro com suas respostas e assim por diante. Essa troca de informação é feita até que haja convergência das respostas, ou seja, que o resíduo seja significativamente pequeno. Logo, começando com o simulador geomecânico, o procedimento para essa estratégia de acoplamento é feito da maneira a seguir:

$$\mathbf{K} \mathbf{d}^k - \mathbf{Q} \mathbf{p}^{k-1} = \mathbf{F}_u^{ext} \quad (4.2)$$

sendo $\mathbf{p}^{k-1}$ as pressões da iteração anterior (caso seja a primeira iteração, utiliza-se a pressão convergida do passo de tempo anterior $\mathbf{p}_{t-\Delta t}$) e $\mathbf{d}^k$ os deslocamentos do passo de tempo atual da iteração k . Então obtém-se a solução pelo método de Newton-Raphson, por exemplo, até a convergência desse sistema de equações.

Em seguida, o simulador geomecânico tendo calculado os deslocamentos, passa-se para o simulador hidráulico. Caso a porosidade e a permeabilidade sejam funções dos deslocamentos, primeiramente seus valores atualizados são computados com base em $\mathbf{d}^k$, e em seguida resolve-se o sistema:

$$\mathbf{Q}^T \left[\frac{(\mathbf{d}^k - \mathbf{d}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{S} \left[\frac{(\mathbf{p}^k - \mathbf{p}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{H} \mathbf{p}^k = \mathbf{F}_p^{ext} \quad (4.3)$$

onde a única variável do problema são as pressões da k -ésima iteração $\mathbf{p}^k$. $\mathbf{d}_{t-\Delta t}$ e $\mathbf{p}_{t-\Delta t}$ já são conhecidos (deslocamentos e pressões convergidas do passo de tempo anterior) e $\mathbf{d}^k$ os deslocamentos que acabaram de ser calculados pelo simulador geomecânico. Para resolver esse sistema, novamente o método de Newton-Raphson, por exemplo, deve ser utilizado.

Em seguida, tendo as pressões dessa iteração, a equação 4.2 é resolvida novamente.

Esse processo é realizado até que os deslocamentos e as pressões de duas iterações consecutivas, $\mathbf{d}^{k+1}$, $\mathbf{d}^k$, $\mathbf{p}^{k+1}$, $\mathbf{p}^k$, respectivamente, sejam relativamente pequenos (diferentes métodos para verificar a tolerância podem ser aplicados).

A Figura 4.3 apresenta o fluxograma que representa o método de acoplamento iterativo.

Vantagens do Acoplamento iterativo:

- O acoplamento fornece resultados precisos do problema. Se convergidos até uma boa tolerância, os resultados podem ser tão precisos quanto os do acoplamento total, com um menor tempo de simulação, dependendo do acoplamento do problema (DEAN *et al.*, 2006) (quanto menor o grau de acoplamento do sistema, mais rápido o acoplamento convergirá).

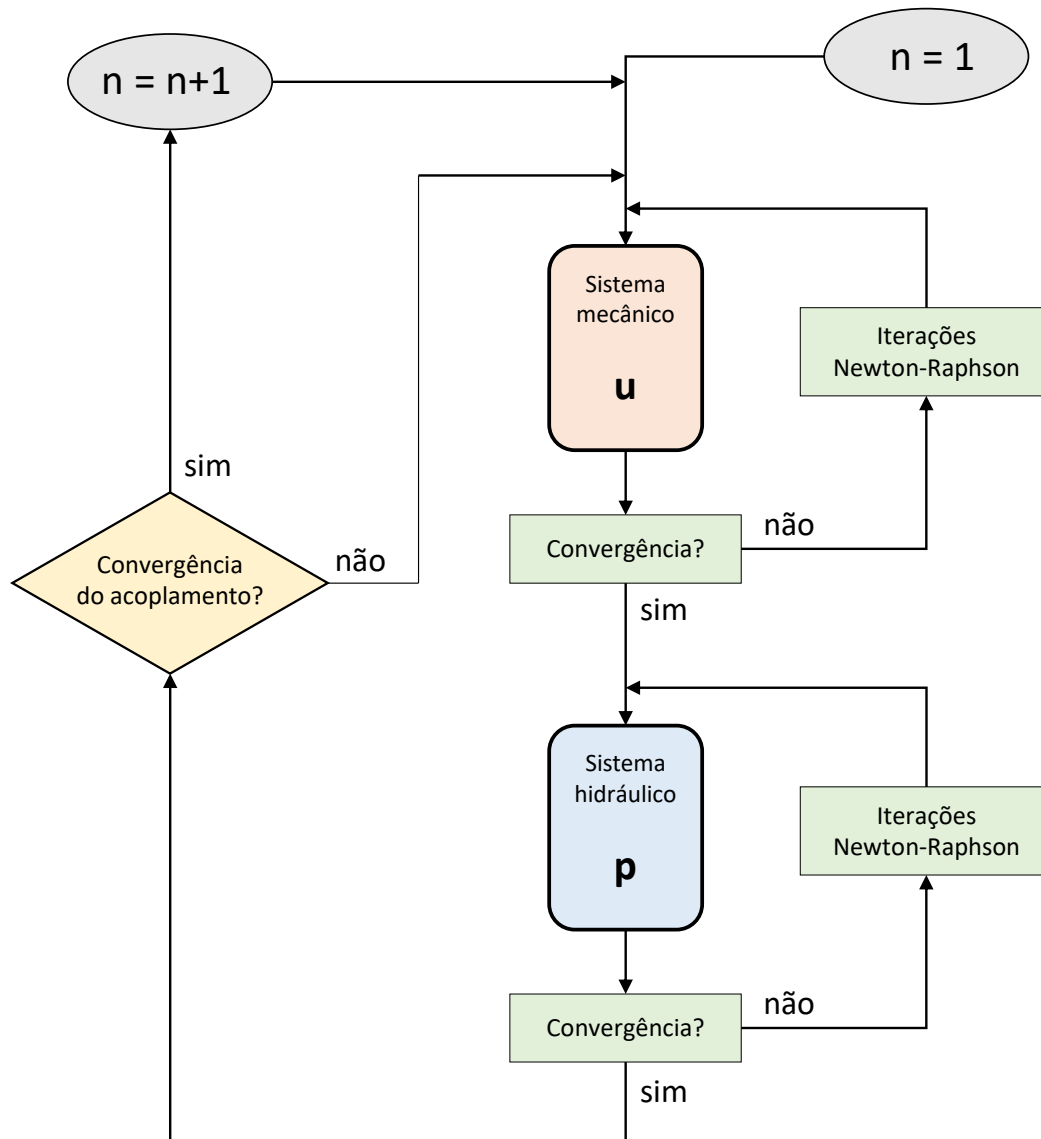


Figura 4.3: Fluxograma para o acoplamento iterativo

- Relativamente simples de fazer modificações e novas implementações pois os sistemas geomecânico e hidráulico são calculados separadamente.
- Uma das maiores vantagens dessa estratégia de acoplamento é a possibilidade do uso de dois diferentes softwares para a resolução do problema, já que que cada sistema físico é resolvido separadamente.

Desvantagens do Acoplamento iterativo:

- Caso o problema seja fortemente acoplado e, dependendo da tolerância desejada no resíduo, o acoplamento iterativo pode ser até mais custoso que o acoplamento total, pois várias iterações terão que ser feitas até a convergência desejada (SETTARI; WALTERS, 1999).

Utilizar diferentes softwares para a simulação do problema hidromecânico traz grandes vantagens, há vários programas muito bem referenciados em cada uma das áreas, geomecânica e hidráulica, com modelos robustos, sofisticados e com solução do sistema algébrico otimizada para cada caso. Além disso, cada problema físico pode ter a sua discretização do domínio do espaço, do tempo e usar diferentes estratégias de resolução numérica, por exemplo elementos finitos para calcular os deslocamentos e diferenças finitas para as pressões.

4.1.4 Acoplamento parcial iterativo

O método de acoplamento parcial iterativo é considerado como uma estratégia de acoplamento fraco, pois as informações de um dos simuladores não afetam o outro simulador no passo de tempo atual, apenas no próximo passo é que as informações são atualizadas, criando um atraso da resposta de um dos simuladores em relação ao outro. A estratégia de acoplamento explícito pode ser considerada como um caso particular do acoplamento iterativo, pois em um mesmo passo de tempo, o simulador geomecânico e hidráulico são chamados apenas uma vez, enquanto que no acoplamento iterativo esses simuladores são chamados até a convergência das respostas. Logo, caso o simulador geomecânico seja calculado primeiro, por exemplo, primeiramente encontra-se os deslocamentos com a ajuda, por exemplo, do método de Newton-Raphson:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{Q} \mathbf{p}^{t-\Delta t} = \mathbf{F}_u^{ext} \quad (4.4)$$

sendo $\mathbf{p}^{t-\Delta t}$ as pressões do passo de tempo anterior e $\mathbf{d}$ as incógnitas.

Em seguida, passando para o simulador hidráulico, calcula-se a pressão:

$$\mathbf{Q}^T \left[\frac{(\mathbf{d} - \mathbf{d}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{S} \left[\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{ext} \quad (4.5)$$

sendo $\mathbf{d}_{t-\Delta t}$ e $\mathbf{p}_{t-\Delta t}$ os deslocamentos e as pressões do passo de tempo anterior, $\mathbf{d}$ os deslocamentos calculados nesse passo de tempo pelo simulador geomecânico e $\mathbf{p}$ a variável a ser calculada através do método de Newton-Raphson, por exemplo.

Como não há iterações dentro de um mesmo passo de tempo, terminado o cálculo das pressões, o processo recomeça no próximo intervalo de tempo.

A Figura 4.4 apresenta o fluxograma que representa o método de acoplamento parcial iterativo.

Vantagens do Acoplamento parcial iterativo:

- Esse acoplamento é relativamente rápido. Apesar de haver dois simuladores a serem resolvidos, eles são resolvidos separadamente e apenas uma vez a cada passo de tempo.

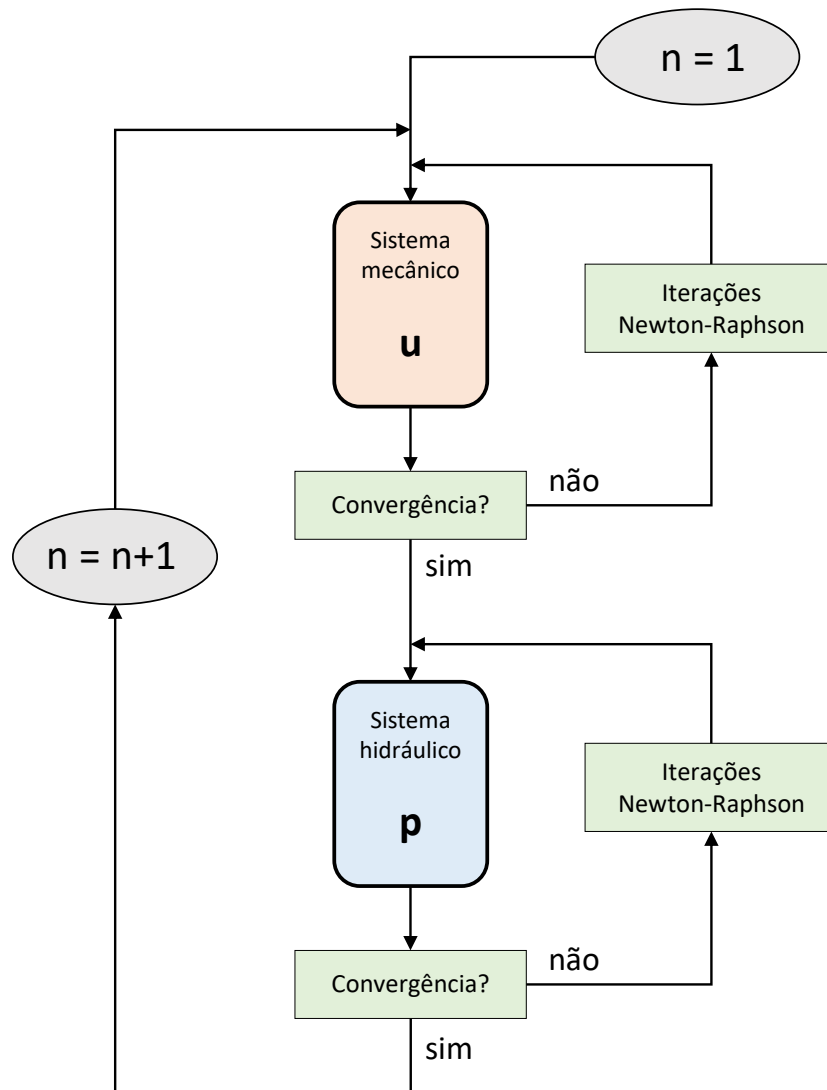


Figura 4.4: Fluxograma para o acoplamento parcial iterativo

- Assim como o acoplamento iterativo, no acoplamento parcial iterativo as implementações são relativamente fáceis de serem feitas já que os sistemas geomecânico e hidráulico são calculados separadamente.
- Possibilidade de usar dois diferentes programas para a resolução do problema já que cada sistema físico é resolvido separadamente.

Desvantagens do Acoplamento parcial iterativo:

- O atraso das respostas entre os simuladores pode prejudicar a precisão da resposta.
- Passos pequenos de tempo devem ser usados nessa estratégia de acoplamento para não propagar o erro de cada iteração e gerar resultados excessivamente errôneos.

Embora haja atraso da resposta entre os simuladores, esse método é preferível em certos casos onde as variáveis do problema não sofrem alterações drásticas durante a simulação, assim o erro causado pelo atraso das respostas é baixo. No caso de alterações maiores, uma alternativa seria diminuir o passo de tempo, contudo isso acaba afetando o tempo de processamento do problema.

4.2 Escolha do acoplamento

O método totalmente acoplado é aquele que naturalmente seria escolhido para todos os tipos de softwares de reservatórios, no entanto ele possui alto custo computacional, muitas vezes inviabilizando as análises desejadas. Uma alternativa bastante simples para contornar essa barreira é o cálculo através do método desacoplado. De acordo com Settari e Walters (1999), os programas de simulação de reservatórios convencionais utilizam o método desacoplado para o cálculo da produção de óleo e gás, pois são reservatórios em que o problema mecânico influencia muito pouco, reduzindo drasticamente o tempo de simulação. No entanto, em alguns reservatórios os efeitos geomecânicos não podem ser desprezados (GUTIERREX; LEWIS *et al.*, 1998). A necessidade do cálculo do sistema mecânico, mas evitando o custo computacional do método totalmente acoplado, fez com que os analistas passassem a usar os acoplamentos sequenciais, parcial iterativo e iterativo (CHIN *et al.*, 2002).

No entanto, para alguns casos de problemas em meios porosos, como por exemplo o problema de propagação de fraturas em meios porosos, o método amplamente utilizado na literatura é o totalmente acoplado (BORST, 2017), pois trata-se de um problema altamente acoplado em que os métodos sequenciais não apresentam bons resultados. Ainda assim vale comentar que, de acordo com Borst (2017), recentemente, algumas abordagens dos métodos sequenciais estão sendo investigadas para desenvolver uma alternativa possível, estável e econômica na solução de problemas onde há propagação de fratura em meios porosos.

Embora nesse trabalho seja considerado um fluxo monofásico e um material elástico, a realidade é bem mais complexa: fluxo multifásico percolando em um material poroso com comportamento não linear, o que gera acoplamentos fortes entre ambos os sistemas, resultando em uma convergência não linear lenta para casos onde a quantidade de graus de liberdade é muito grande. De acordo com Dean *et al.* (2006), a convergência do acoplamento sequencial iterativo é de primeira ordem. Já, a solução de equações não lineares resolvidas pelo Método de Newton-Raphson, apresentam convergência de segunda-ordem.

Além disso, dado que o presente trabalho visa desenvolver uma ferramenta computacional em MatLab básica para futuras incorporações, escolhe-se o método totalmente acoplado como estratégia de acoplamento.

Capítulo 5

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo desse capítulo é verificar se o acoplamento foi bem implementado no Matlab através de problemas que possuem resposta analítica. Foram analisados dois problemas de adensamento que são problemas clássicos da Mecânica dos Solos. O primeiro exemplo consiste em um problema de adensamento unidirecional, conhecido como problema de Terzaghi. O segundo exemplo trata-se do problema de Mandel, um problema de adensamento bidimensional, onde o efeito de Mandel-Cryer é possível ser observado e é explicado mais adiante.

Conforme já foi comentado, o Método dos Elementos Finitos utilizando Galerkin contínuo apresenta certa oscilação indesejada em problemas onde há fluxo de fluidos. Esses exemplos também servirão para mostrar essas oscilações.

Vale observar que esses exemplos foram feitos meramente para comparação da resposta numérica e analítica, sendo assim, os parâmetros da rocha ou do solo não foram baseados em nenhum caso real. Além disso, por mais que os problemas de Terzaghi e Mandel não necessitem uma análise tridimensional, o caso 3D foi também simulado mas apenas para efeito de comparação de respostas e de validação do código implementado.

5.1 Problema de Terzaghi bidimensional

Quando uma camada de solo é exposta a um carregamento extra, parte dele é sustentada pelo esqueleto sólido da matriz e parte é sustentado pelo fluido nos poros. A sustentação da parte sólida induz um aumento das tensões, por outro lado a sustentação do fluido induz um aumento das pressões. Essa pressurização do fluido tende a desaparecer com o tempo, a medida que o fluido escoar em direção à borda drenada. Quanto menos permeável é o meio, maior o tempo para a dissipação dessa pressão extra devido ao carregamento. Esse processo é o fenômeno do adensamento, mas muito relacionado ao nome de Terzaghi (BEAR; BACHMAT, 2012).

Nesse caso clássico de adensamento, um meio poroso saturado de altura h e de espessura infinita (a largura não influencia no problema) é sujeito a um carregamento vertical

em sua face superior, que também é drenada e mantida a pressão zero. As bordas laterais não podem se deslocar horizontalmente, já a borda inferior não pode se deslocar verticalmente. A geometria do problema é ilustrada pela figura 5.1 (a), enquanto que suas condições de contorno pela figura 5.1 (b).

A aplicação das condições de contorno é feita por etapas. Num primeiro momento, são inseridas as condições de contorno essencial, ou seja, restrição dos deslocamentos e imposição da pressão até que o equilíbrio seja atingido, isto é, que todo o material esteja sujeito a pressão nula. Após atingido o equilíbrio, o carregamento vertical é imposto na face superior. Essas condições de contorno em Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 e Ω são explicitadas posteriormente com mais detalhes.

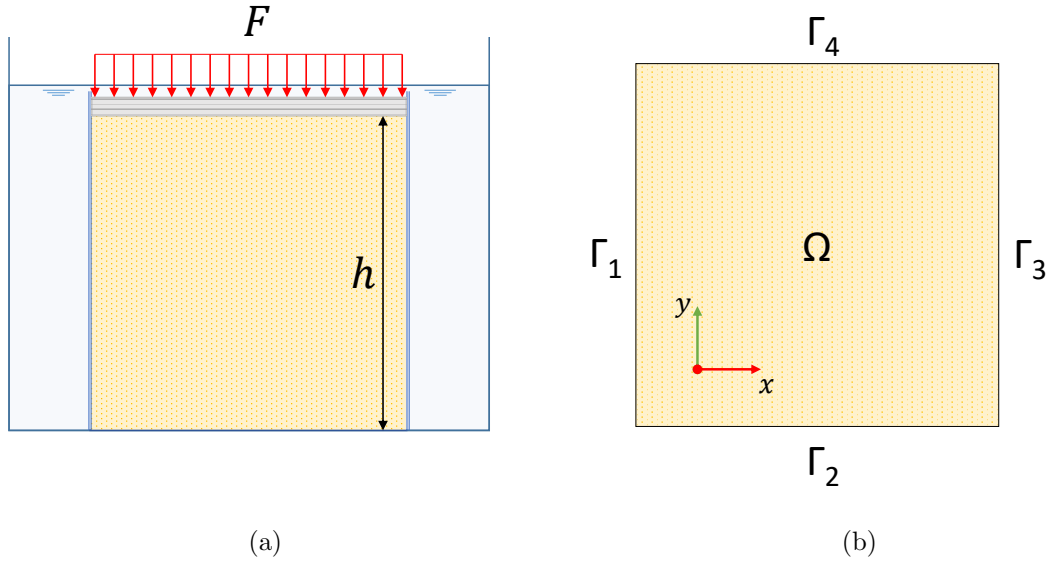


Figura 5.1: (a) Geometria do problema de Terzaghi e (b) Nomeação do contorno e do domínio do problema de Terzaghi em 2D

O problema de Terzaghi é muito utilizado para a verificação do programa ou do método numérico implementado, como por exemplo Kim *et al.* (2009), Pizzol e Maliska (2012), Ribeiro (2016), pois é um caso onde há uma resposta analítica. A resposta analítica do problema de Terzaghi já tinha sido deduzida por ele próprio, mas em um caso onde as partículas sólidas e o fluido são incompressíveis (VERRUIJT, 2013). A solução foi então generalizada para o caso onde o fluido e os grãos sólidos são compressíveis e pode ser encontrada em Coussy (2004). Antes de mostrar as soluções analíticas, é mostrada a forma de algumas variáveis normalizadas, como tempo, pressão e posição vertical. Essas variáveis podem ser escritas da seguinte forma, respectivamente:

$$\bar{t} = \tau t \quad ; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad (5.1)$$

sendo que τ é o fator de normalização do tempo, p_0 é a pressão inicial e h é a altura da amostra. As expressões analíticas para τ e p_0 são:

$$\tau = \frac{h^2}{c_v} \quad ; \quad p_0(z, t = 0^+) = \frac{b m_v}{S + b^2 m_v} q \quad (5.2)$$

sendo q o carregamento inicial, m_v e c_v o módulo de compressibilidade confinada e o coeficiente de compactação, respectivamente, que são dados pelas expressões a seguir:

$$m_v = \frac{1}{K + \frac{4}{3}G} \quad ; \quad c_v = \frac{\kappa}{\mu(S + b^2 m_v)} \quad (5.3)$$

sendo K e G os módulos volumétrico elástico (*bulk modulus*) e de elasticidade transversal do material poroso, κ e μ são a permeabilidade intrínseca e a viscosidade do meio. Os módulos K e G podem ser escritos em função do módulo de Young e do coeficiente de Poisson da seguinte forma:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad e \quad G = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad (5.4)$$

O módulo volumétrico elástico é também o inverso da compressibilidade da matriz sólida.

Portanto, a expressão analítica da pressão em qualquer ponto da amostra em função do tempo a partir das variáveis normalizadas, definidas na equação 5.1, pode ser escrita como:

$$\bar{p}(\bar{z}, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\bar{z}\right) \exp\left(-(2k+1)^2\frac{\pi^2}{4}\bar{t}\right) \quad (5.5)$$

Conforme já discutido anteriormente, em 1.3.3, já é sabido que em casos de adensamento com um fluido incompressível e o não cumprimento da condição LBB, logo no início da análise, podem gerar oscilações puramente numéricas na pressão. Porém, também foi mostrado por Kim (2010) que mesmo um fluido compressível poderia gerar esses erros numéricos na resposta.

5.1.1 Modelo numérico do problema de Terzaghi com fluido compressível

Foi utilizado um fluido compressível, de características compatíveis às da água, para a obtenção das respostas numéricas e analíticas. O valor dos parâmetros, tanto do fluido quanto do solo, para o problema hidromecânico são mostrados na tabela 5.1.

Para a criação da malha, foram escolhidos elementos triangulares lineares tanto para os deslocamentos quanto para as pressões. Embora o problema seja unidimensional e a malha de elementos finitos não precise ser bem discretizada na horizontal, ainda assim optou-se por discretizar razoavelmente bem essa direção. Já, na vertical é desejado um

Tabela 5.1: Parâmetros do problema de Terzaghi		
Parâmetro	Unidade	Valor
Módulo de Young	MPa	1×10^3
Coeficiente de Poisson	—	0,3
Porosidade	—	0,3
Coeficiente de Biot	—	0,75
Compressibilidade do fluido	MPa^{-1}	1×10^{-4}
Massa específica do fluido	Kg/m^3	1002,6
Carregamento	MPa	1
Permeabilidade	m^2	1×10^{-15}
Viscosidade	m^2/s	1×10^{-9}
Altura h	m	1

número razoável de elementos para que se possa ver o efeito da dissipação da pressão ao longo do tempo, por isso a malha possui mais elementos nessa direção. A malha gerada pode ser observada na figura 5.2.

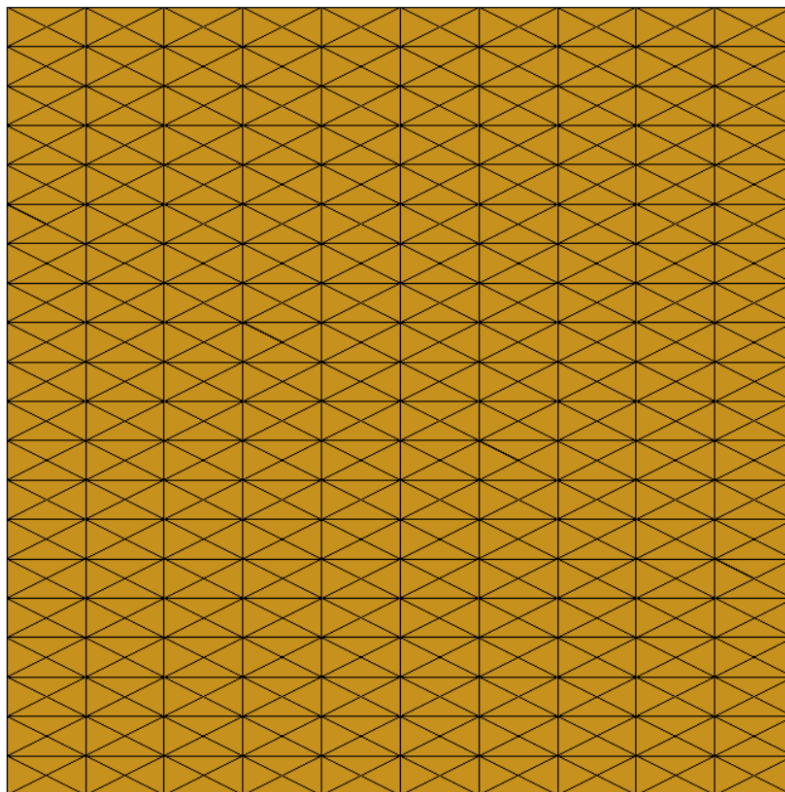


Figura 5.2: Malha em elementos finitos do problema de Terzaghi

As condições de contorno do problema de Terzaghi são aplicadas em 3 diferentes intervalos de carregamento. Levando em consideração a nomeação dos contornos da figura 5.1 (b), as condições de contorno de cada um desses intervalos de carregamento são:

- **Intervalo de carregamento 1:**

- Pressão igual a zero é aplicada na face superior Γ_4 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é aplicado nas faces laterais Γ_1 e Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é aplicado na face inferior Γ_2 .

$$\Gamma_4 \rightarrow \{p = 0 \text{ MN/m}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

Esse intervalo de carregamento é mantido até que todo o material esteja com pressão igual a zero.

• **Intervalo de carregamento 2:**

- Carregamento vertical de 1 MN/m é aplicado na face superior Γ_4 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido nas faces laterais Γ_1 e Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 .

$$\Gamma_4 \rightarrow \{q_y = -1 \text{ MN/m}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

É importante observar que, nesse intervalo de carregamento, a imposição da pressão na face superior é retirada, de forma a fazer com que as pressões e as tensões se equilibrem no interior da amostra enquanto todo o seu contorno encontra-se impermeável.

• **Intervalo de carregamento 3:**

- Carregamento vertical de 1 MN/m é mantido na face superior Γ_4 ;
- Pressão igual a zero é reaplicada na face superior Γ_4 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido nas faces laterais Γ_1 e Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 .

$$\Gamma_4 \rightarrow \begin{cases} q_y = -1 \text{ MN}/m \\ p = 0 \text{ MN}/m \end{cases}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \{u_x = 0\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0\}$$

Nesse intervalo de carregamento, uma pressão nula volta a ser aplicada na face superior, de forma a deixá-la permeável novamente e deixar o fluido sair, aliviando a pressão e aumentando as tensões efetivas com o avanço do tempo.

A figura 5.3 ilustra as condições de contorno dos três intervalos de carregamento descritos acima do problema de Terzaghi.

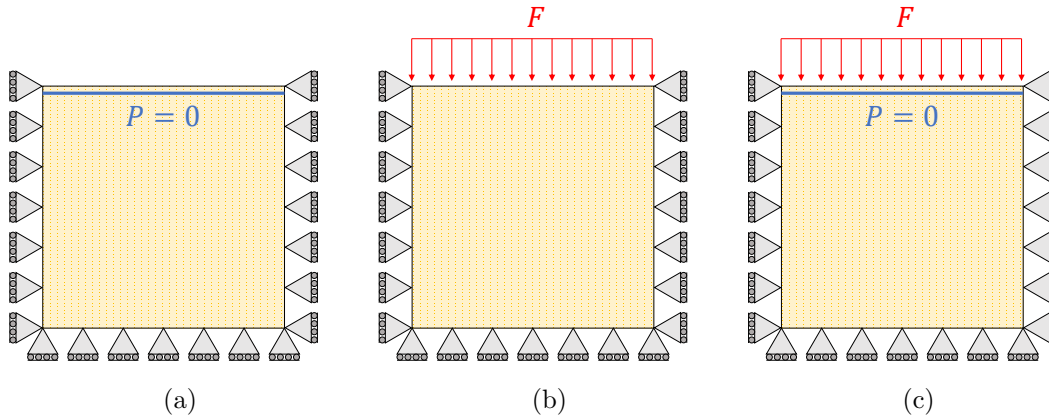


Figura 5.3: Condições de contorno dos intervalos de carregamento (a) 1, (b) 2 e (c) 3

A figura 5.4 mostra as curvas obtidas pela fórmula analítica (equação 5.5) e pela simulação numérica da pressão em função do tempo. Nessa figura, a pressão é medida em três diferentes pontos ao longo da posição vertical da amostra em relação a sua parte inferior, $0,075 \text{ m}$, $0,525 \text{ m}$ e $0,875 \text{ m}$.

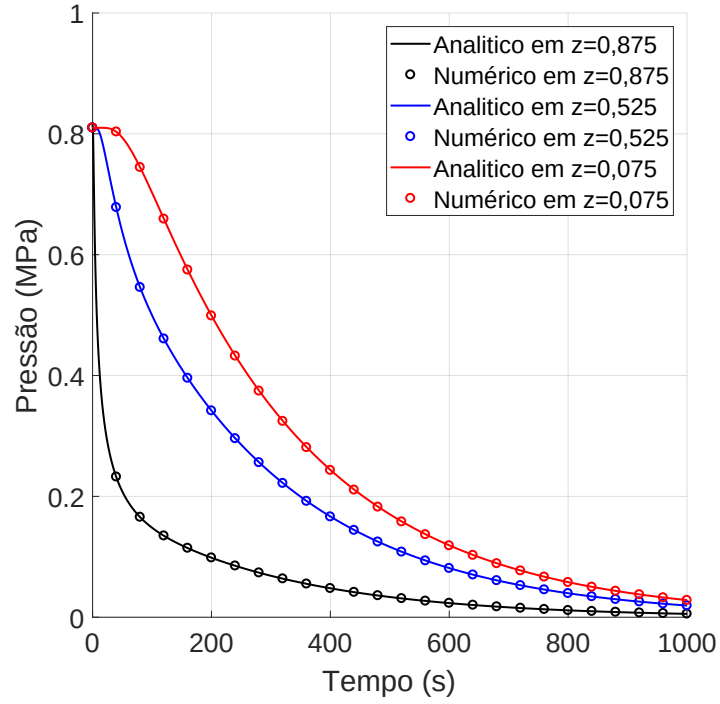


Figura 5.4: Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido compressível

Pode-se observar que as curvas analíticas e numéricas estão em acordo para as três diferentes posições onde a pressão foi medida na amostra. O valor inicial analítico da pressão, de acordo com a equação 5.2, é de 0.80996885 MPa , enquanto que o valor inicial numérico é de 0.80996883 MPa , o que significa uma boa predição do valor da pressão. Além disso, também é possível analisar, a partir da figura 5.5, que a tensão total, em qualquer que seja a posição vertical relativa da amostra, é constante durante toda a análise com um valor de 1 MPa , o que era de se esperar, já que o problema é unidimensional e essa tensão total equilibra o carregamento de 1 MPa imposto na face superior da amostra. Porém também é possível observar que há uma pequena oscilação da tensão total próximo à borda drenada, ou seja, com posição vertical próxima a 1 m . Esse efeito é devido à oscilação da pressão em pontos próximos à borda drenada, conforme já explicados.

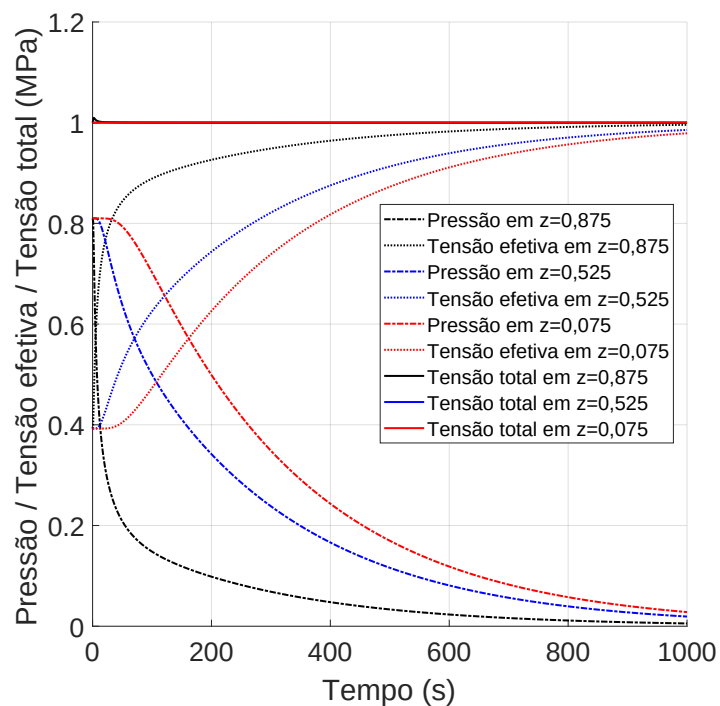


Figura 5.5: Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido compressível

Por fim, a figura 5.6 mostra o valor da pressão normalizada ao longo de todo o comprimento da amostra, para diferentes tempos.

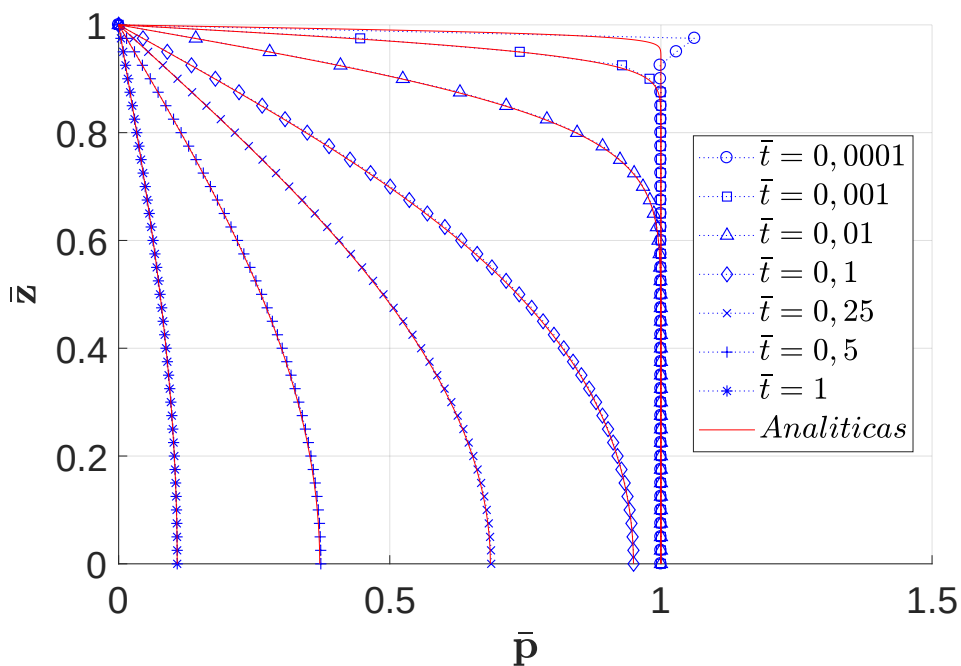


Figura 5.6: Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição vertical normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos normalizados com fluido compressível

Nessa figura, pode-se observar que as curvas de pressão analítica e numérica, para diferentes tempos, ao longo de todo o comprimento da amostra são próximas, o que mostra um resultado satisfatório da simulação.

No entanto, assim como na figura 5.5, onde há uma pequena oscilação próximo à borda drenada, na figura 5.6 o motivo dessa oscilação fica claro. A pressão, para tempos pequenos e em pontos próximos à borda drenada oscila consideravelmente.

Outra análise interessante de se fazer, ainda considerando um fluido compressível, é com relação ao tratamento da matriz $\mathbf{S}$, matriz que multiplica a derivada temporal da pressão nas equações algébricas do problema hidromecânico (equação 3.44). Os resultados obtidos até agora foram simulados considerando a matriz $\mathbf{S}$ concentrada, ou seja, o valor da somatória das componentes em toda a linha é concentrada na diagonal e fora da diagonal o valor é nulo, conforme a equação 3.43.

A figura 5.7 mostra o resultado da pressão normalizada ao longo de todo o comprimento da amostra para diferentes tempos, com a matriz $\mathbf{S}$ sendo calculada da maneira não concentrada, ou seja, uma matriz cheia como na equação 3.42.

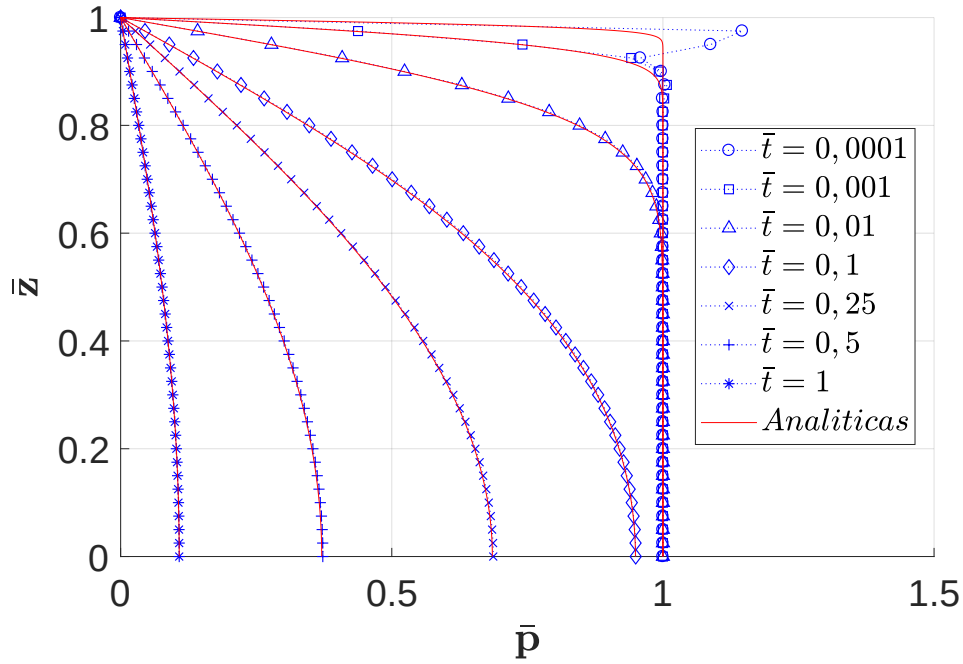


Figura 5.7: Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição vertical normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos normalizados com fluido compressível e não utilizando a matriz $\mathbf{S}$ diagonalizada

É possível observar que ao considerar a matriz $\mathbf{S}$ em sua forma não concentrada, a oscilação para tempo pequenos é intensificada. Considerando a $\mathbf{S}$ em sua forma concentrada, no tempo normalizado $\bar{t} = 0,0001$ há uma oscilação visível, porém no tempo $\bar{t} = 0,001$ essa oscilação praticamente desaparece. Já, ao considerar a matriz $\mathbf{S}$ em sua forma não concentrada, no tempo normalizado $\bar{t} = 0,0001$, a oscilação fica ainda maior e é possível

ver que até no tempo $\bar{t} = 0,001$ ocorre uma oscilação. Isso sugere que o tratamento da matriz $\mathbf{S}$, tornando-a diagonal, estabiliza a pressão para tempos pequenos.

5.1.2 Modelo numérico do problema de Terzaghi com fluido incompressível

A incompressibilidade do fluido, além de gerar oscilações na pressão, pode causar alguns problemas numéricos em partes não drenadas da amostra, por exemplo nas partes inferiores em tempos iniciais, quando o fluido ainda não teve tempo de fluir. Nesses locais, o fluido, incompressível, está confinado e não deixa a amostra se deformar no local, o que acarreta em resultados incorretos. Os mesmos parâmetros da tabela 5.1 foram usados, com exceção da compressibilidade do fluido, que nesse caso é nula.

A figura 5.4 mostra as curvas obtidas pela fórmula analítica (equação 5.5) e pela simulação numérica da pressão em função do tempo. Nessa figura, a pressão é medida em três diferentes pontos ao longo da posição vertical da amostra em relação a sua parte inferior, $0,075\text{ m}$, $0,525\text{ m}$ e $0,875\text{ m}$.

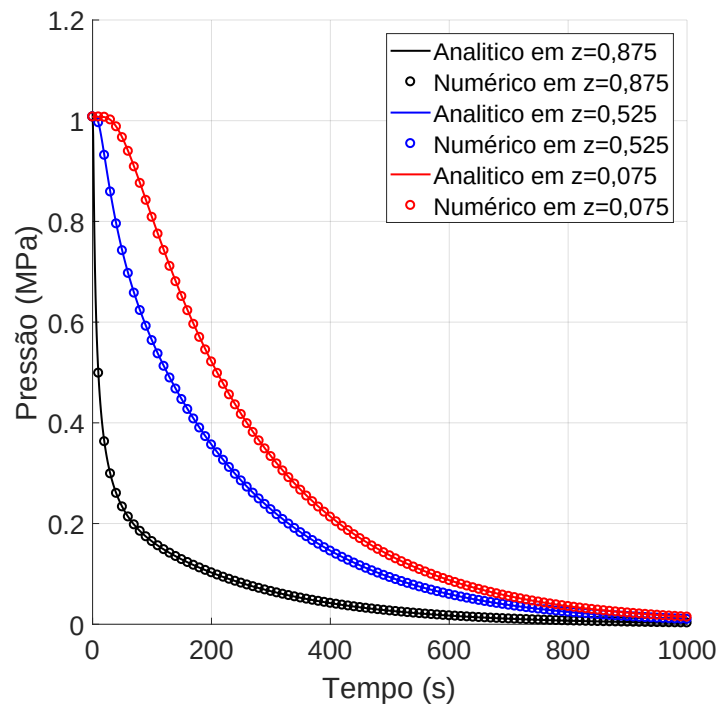


Figura 5.8: Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido incompressível

As pressões numéricas nesses três pontos são próximas às pressões analíticas. A pressão inicial analítica é de $1,0077519\text{ MPa}$ e a numérica é de $1,0077519\text{ MPa}$, o que mostra grande compatibilidade das repostas.

Porém, vendo o gráfico da figura 5.9, pode-se observar que a tensão total em um ponto da parte inferior da amostra ultrapassa ligeiramente o valor de 1 MPa . Essa inconsistência é devido ao problema da incompressibilidade do fluido citada anteriormente.

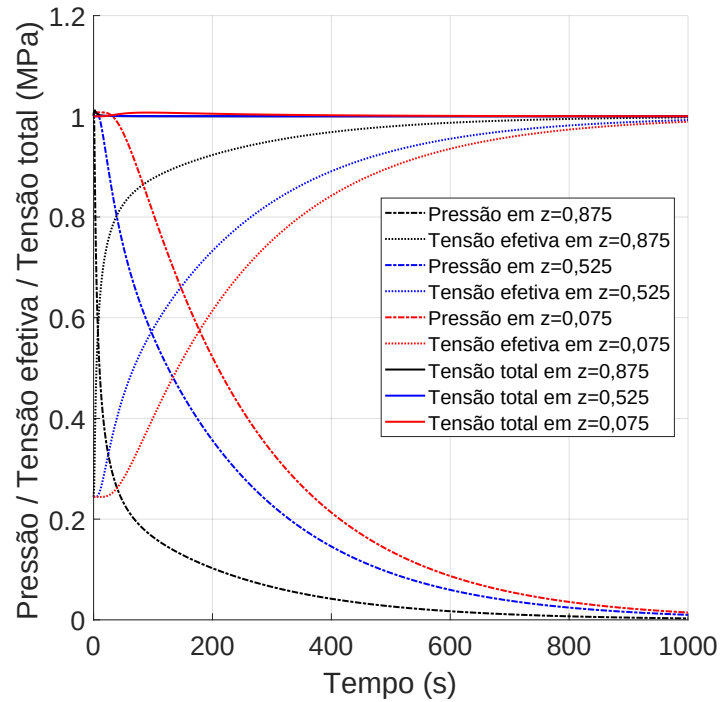


Figura 5.9: Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra com fluido incompressível

A figura 5.10 mostra o valor da pressão normalizada ao longo de todo o comprimento da amostra, para diferentes tempos, e nela pode ser observada novamente a oscilação para tempos pequenos, mas dessa vez ainda maior.

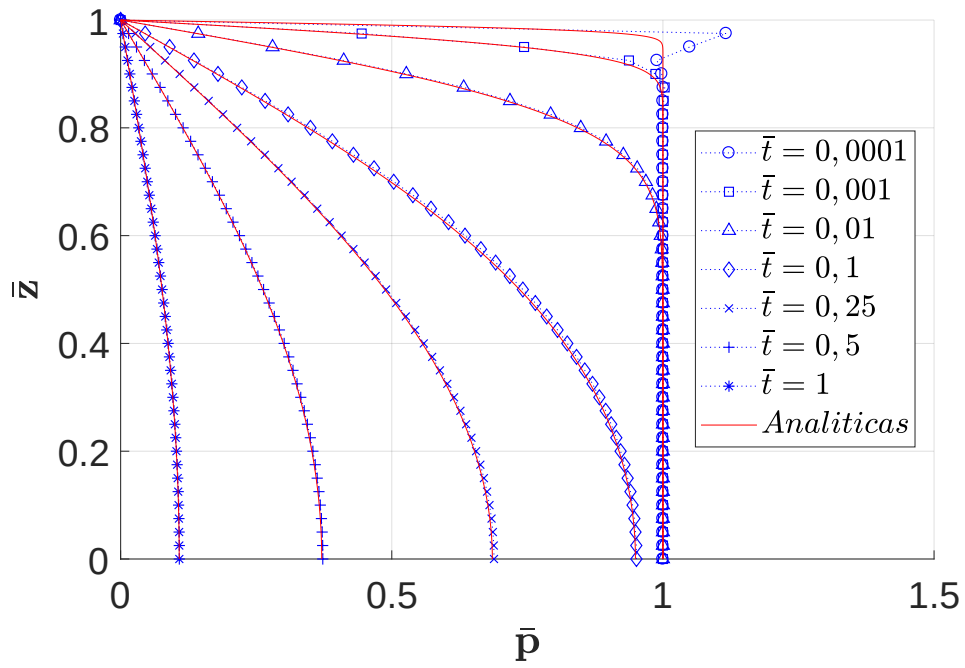


Figura 5.10: Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição vertical normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos normalizados com fluido incompressível

5.2 Problema de Terzaghi tridimensional

O problema de Terzaghi tridimensional pode ser facilmente estendido do bidimensional. As únicas alterações a serem feitas é em relação às condições de contorno e à malha do problema. Em relação às propriedades do material, foram usadas aquelas da tabela 5.1, ou seja, parâmetros iguais aos do caso bidimensional e com fluido compressível. Vale aqui deixar claro que a matriz S utilizada para a simulação foi a forma diagonalizada como da equação 3.43.

No que diz respeito às condições de contorno, referente à figura 5.1(b), Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 e Γ_4 , no caso 3D, são agora superfícies e Ω é agora um volume. Além desses contornos, aparecem também Γ_5 e Γ_6 que são as faces frontal e traseira, cujas normais são o eixo z (eixo de profundidade). Esses contornos são mostrados na figura 5.11.

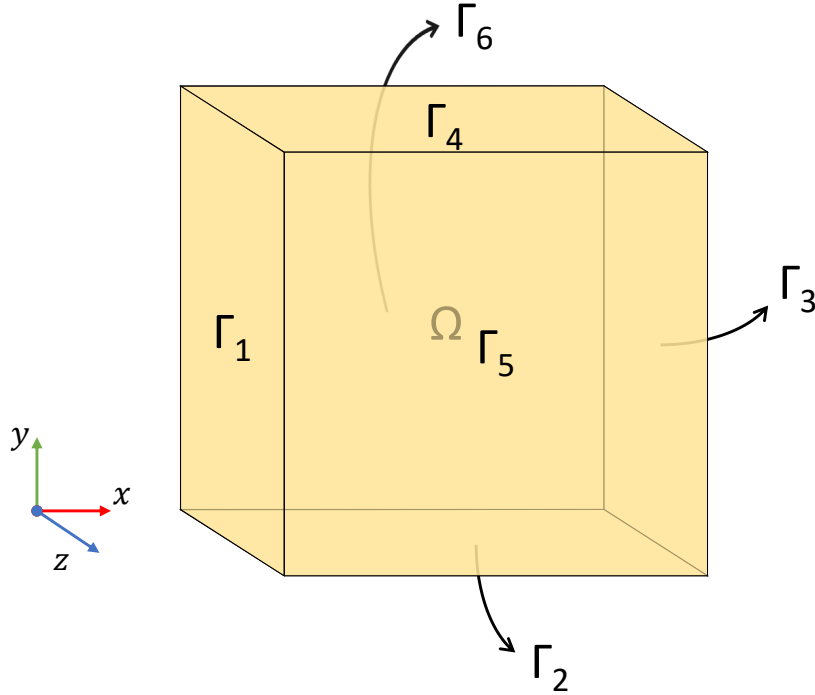


Figura 5.11: Nomeação do contorno e do domínio do problema de Terzaghi em 3D

As condições de contorno do problema de Terzaghi tridimensional possuem a mesma dinâmica do caso 2D, a única diferença é que no caso 3D deve-se impedir o deslocamento no eixo z das faces frontal e traseira. Levando em consideração a nomeação dos contornos da figura 5.11, as condições de contorno de cada um desses intervalos de carregamento são especificadas abaixo.

- **Intervalo de carregamento 1:**

- Pressão igual a zero é aplicada na face superior Γ_4 ;

- Restrição ao deslocamento horizontal é aplicado nas faces laterais Γ_1 e Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é aplicado na face inferior Γ_2 .
- Restrição ao deslocamento no eixo z é aplicado nas faces fronteira Γ_5 e traseira Γ_6 ;

$$\Gamma_4 \rightarrow \{p = 0 \text{ MPa}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_5, \Gamma_6 \rightarrow \{u_z = 0 \text{ m}\}$$

Esse intervalo de carregamento é mantido até que todo o material esteja com pressão igual a zero.

• **Intervalo de carregamento 2:**

- Carregamento vertical de 1 MPa é aplicado na face superior Γ_4 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido nas faces laterais Γ_1 e Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 .
- Restrição ao deslocamento no eixo z é aplicado nas faces fronteira Γ_5 e traseira Γ_6 ;

$$\Gamma_4 \rightarrow \{q_y = -1 \text{ MPa}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_5, \Gamma_6 \rightarrow \{u_z = 0 \text{ m}\}$$

É importante observar que, nesse intervalo de carregamento, a imposição da pressão na face superior é retirada, de forma a fazer com que as pressões e as tensões se equilibrem no interior da amostra enquanto todo o seu contorno encontra-se impermeável.

• **Intervalo de carregamento 3:**

- Carregamento vertical de 1 MPa é mantido na face superior Γ_4 ;
- Pressão igual a zero é reaplicada na face superior Γ_4 ;

- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido nas faces laterais Γ_1 e Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 .
- Restrição ao deslocamento no eixo z é aplicado nas faces fronteira Γ_5 e traseira Γ_6 ;

$$\Gamma_4 \rightarrow \begin{cases} q_y = -1 \text{ MPa} \\ p = 0 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_5, \Gamma_6 \rightarrow \{u_z = 0 \text{ m}\}$$

Nesse intervalo de carregamento, uma pressão nula volta a ser aplicada na face superior, de forma a deixá-la permeável novamente e deixar o fluido sair, aliviando a pressão e aumentando as tensões efetivas com o avanço do tempo.

Essas condições de contorno são aplicadas na malha de elementos finitos da figura 5.12. A malha é composta por elementos tetraédricos de quatro nós, ou seja, com funções interpoladoras lineares. Assim como comentado no caso bidimensional, esse problema possui efeito unidirecional, logo a única direção que deveria ser bem discretizada é a vertical, direção na qual o gradiente de pressão é formado conforme o fluido escoar pela face superior. No entanto, as duas outras direções também foram discretizadas razoavelmente.

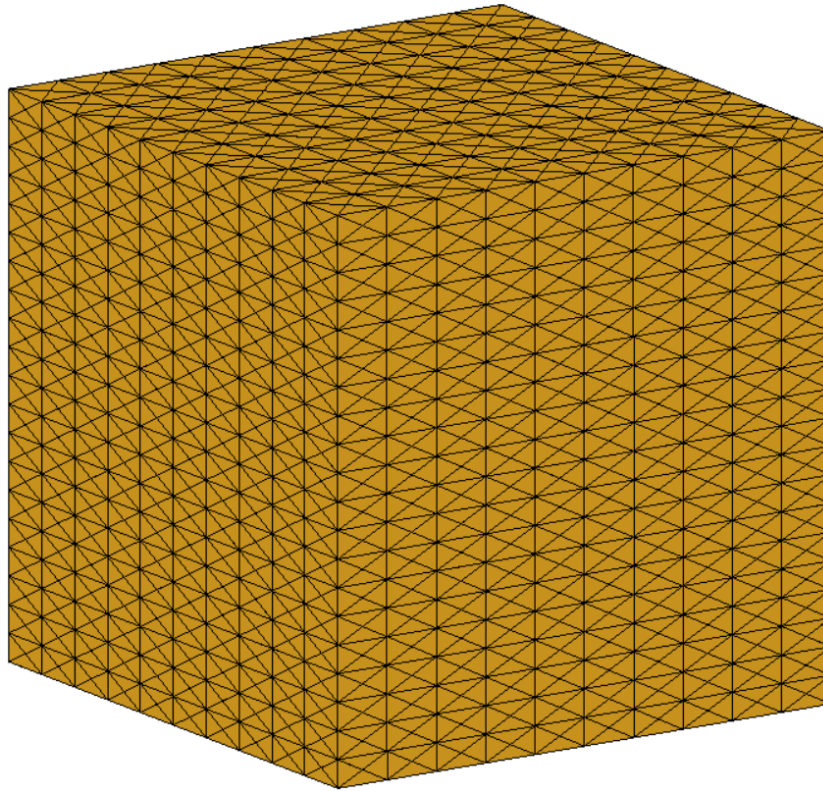


Figura 5.12: Malha em elementos finitos do problema de Terzaghi

A figura 5.13 mostra as curvas analíticas e numéricas da pressão em função do tempo. A pressão é medida em três diferentes pontos ao longo da posição vertical da amostra em relação a sua parte inferior, $0,075\text{ m}$, $0,525\text{ m}$, $0,875\text{ m}$. Esses pontos foram tomados na linha central da amostra.

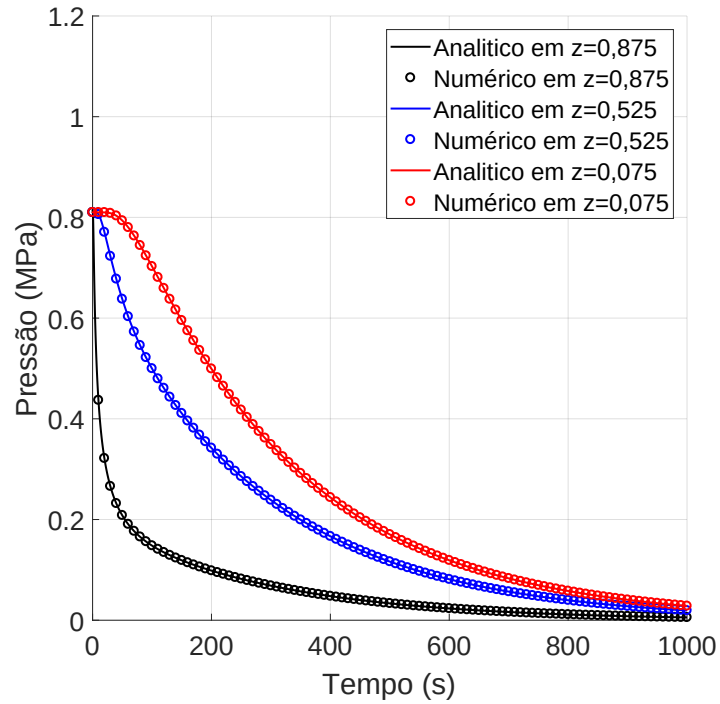


Figura 5.13: Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra

Na análise do problema de Terzaghi tridimensional, a pressão inicial obtida através da simulação numérica foi de 0.80996885 MPa , enquanto que a pressão inicial analítica é de 0.80996885 MPa , o que se resume em um resultado obtido bem coerente. Além da pressão em função do tempo, também pode ser analisada a curva numérica da tensão total em cada um dos pontos. Na figura 5.14, foram traçadas as curvas de pressão, da tensão efetiva e da tensão total em função do tempo. Nela é possível observar que a tensão total se mantém em 1 MPa , o que era esperado como já mostrado anteriormente. A oscilação da pressão também é observada na curva da tensão total do ponto próximo à borda drenada, visto que a tensão total excede um pouco do valor de 1 MPa .

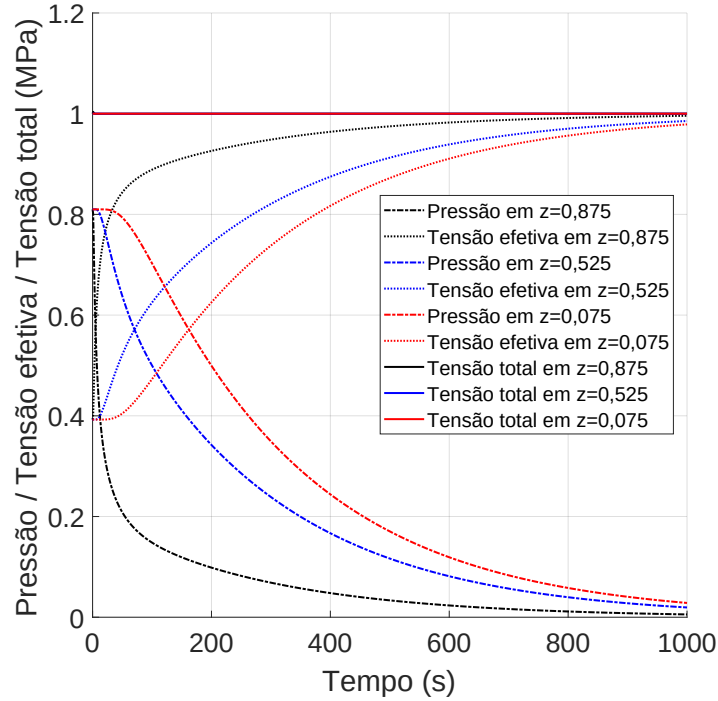


Figura 5.14: Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em diferentes posições verticais da amostra

5.3 Problema de Mandel

O problema de Mandel é outro caso típico onde o acoplamento entre o fluido e o sólido fica claro. Esse problema, feito por Mandel e Cryer, foi o primeiro a mostrar um comportamento não intuitivo do solo quando sujeito a um adensamento tridimensional (embora possa ser analisado em duas dimensões). Esse comportamento, conhecido como efeito de Mandel-Cryer, é visto em alguns casos onde, em tempos curtos, a pressão supera a pressão inicial na amostra sem que haja aumento no carregamento, e após isso a pressão começa a se dissipar.

O problema de Mandel também é muito interessante pois trata-se de um problema bidimensional que possui solução analítica, portanto é também utilizado para a verificação de códigos implementados, como por exemplo em Kim *et al.* (2009), Pizzol e Maliska (2012), Ribeiro (2016). Nesse caso clássico de adensamento, uma amostra saturada de largura $2a$ e espessura infinita (a altura não influencia no problema), é colocada entre duas placas rígidas e impermeáveis e com atrito nulo entre as placas e a amostra, conforme mostra a figura 5.15.

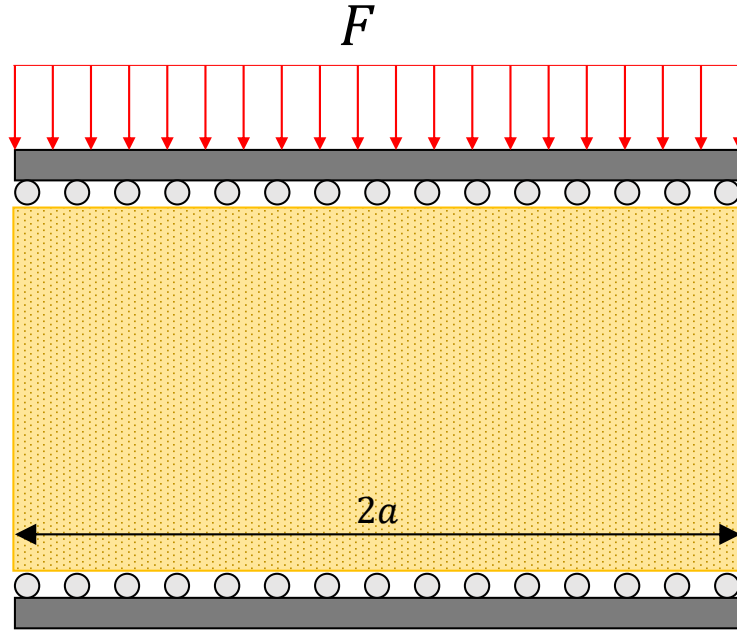


Figura 5.15: Geometria do problema de Mandel

As condições de contorno também são impostas por etapas. Num primeiro momento, aplicam-se as condições de contorno essenciais, ou seja, restrição ao deslocamento e pressão imposta (de 0 MPa). Feito isso, espera-se até que a amostra atinja o estado estacionário, que nesse caso é todo o domínio com pressão nula. Em seguida, aplica-se um carregamento na placa rígida superior e, por fim, observa-se a dissipação da pressão ao longo do tempo.

É importante observar que o carregamento deve ser aplicado sobre a placa rígida e não sobre a parte superior da amostra, já que toda a parte superior deve se deslocar de forma uniforme para que o efeito desejado seja observado.

O efeito de Mandel-Cryer, pode ser explicado da seguinte maneira: Uma amostra, em condições não drenadas, é inicialmente sujeita a um carregamento vertical na placa rígida superior. Após atingido o equilíbrio, a amostra possui uma pressão e uma tensão efetiva uniforme. Uma vez o equilíbrio tendo sido alcançado, as laterais da amostra passam a ser permeáveis, fazendo com que a pressão relativa nas extremidades sejam menores que a interior, acarretando em um fluxo de fluido. Durante todo esse processo, o equilíbrio das forças internas com as forças externas na amostra deve ser respeitado e, com a saída do fluido pelas laterais, há uma queda da pressão, o que causa uma perda de sustentação por parte das extremidades. Para compensar essa diminuição da sustentação do carregamento externo, o centro da amostra é mais solicitado, gerando então um aumento inesperado na pressão.

A resposta analítica desse problema pode ser encontrada em Coussy (2004) e a pressão também é expressa em função de variáveis normalizadas. O tempo, a pressão e a posição

horizontal normalizadas são expressas da seguinte maneira:

$$\bar{t} = \tau t \quad ; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{x}{a} \quad (5.6)$$

sendo que τ é o fator de normalização do tempo, p_0 é a pressão inicial e a é a metade do comprimento da amostra (a variação da posição horizontal na amostra varia entre $-a$ e a , por isso a utilização de a e não $2a$ na normalização das variáveis). As expressões analíticas para τ e p_0 são:

$$\tau = \frac{a^2}{c_v} \quad ; \quad p_0(z, t = 0^+) = \frac{1}{3} B(1 + \nu_u) q \quad (5.7)$$

sendo q o carregamento inicial, B o coeficiente de Skempton e ν_u o coeficiente de Poisson em condições não drenadas, que podem ser definidos pelas seguintes expressões:

$$B = \frac{b}{SK_u} \quad ; \quad \nu_u = \frac{\frac{bB(1-2\nu)}{3} + \nu}{1 - \frac{bB(1-2\nu)}{3}} \quad (5.8)$$

sendo S é o mesmo coeficiente da equação 2.36 e K_u o módulo volumétrico elástico em condições não drenadas, que são definidos por:

$$S = nC_f + (b - n)C_s \quad ; \quad K_u = K + \frac{b^2}{S} \quad (5.9)$$

com K tendo sido definido na equação 5.4, n a porosidade C_f a compressibilidade do fluido e C_s a dos grãos sólidos.

Logo, a expressão analítica do problema de Mandel pode ser escrita como:

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_n \bar{x}) - \cos(\alpha_n)}{\alpha_n - \sin(\alpha_n) \cos(\alpha_n)} \exp(-\alpha_n^2 \bar{t}) \quad (5.10)$$

5.3.1 Modelo numérico do problema de Mandel

Diferentemente do problema de Terzaghi, o problema de Mandel é analisado apenas com fluido compressível, com características iguais às da água. A tabela 5.2 mostra os valores dos parâmetros utilizados para a análise do problema de Mandel.

É possível observar algumas simetrias nesse problema. A primeira simetria é em relação ao plano vertical que passa no centro da amostra e a segunda é em relação ao plano horizontal que também passa pelo centro da amostra. Logo, uma porção reduzida do problema (um quarto da amostra, como mostrado na figura 5.16) pode ser simulada de forma a economizar tempo.

No entanto, embora o problema seja bidimensional, o fluxo de fluido que caminha do centro para as extremidades não depende da posição vertical. Logo, não há necessidade

Tabela 5.2: Parâmetros do problema de Mandel

Parâmetro	Unidade	Valor
Módulo de Young	MPa	1×10^3
Coefficiente de Poisson	—	0,3
Porosidade	—	0,3
Coefficiente de Biot	—	0,75
Compressibilidade do fluido	MPa^{-1}	1×10^{-4}
Massa específica do fluido	Kg/m^3	1002,6
Carregamento	MPa	1
Permeabilidade	m^2	1×10^{-15}
Viscosidade	m^2/s	1×10^{-9}
Comprimento a	m	1

de uma grande discretização da malha no sentido vertical. No entanto, ainda assim a malha é bem discretizada na direção vertical. A figura 5.17 mostra a malha criada da porção analisada.

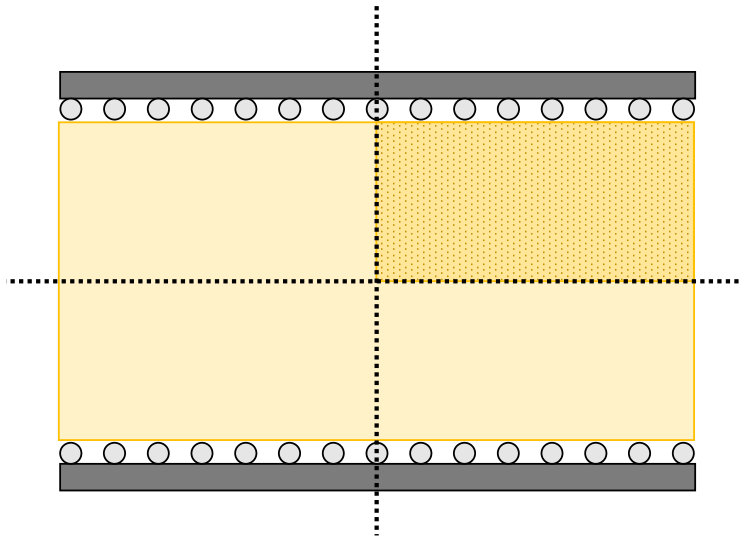


Figura 5.16: Porção da amostra do problema de Mandel a ser analisada (parte mais escura)

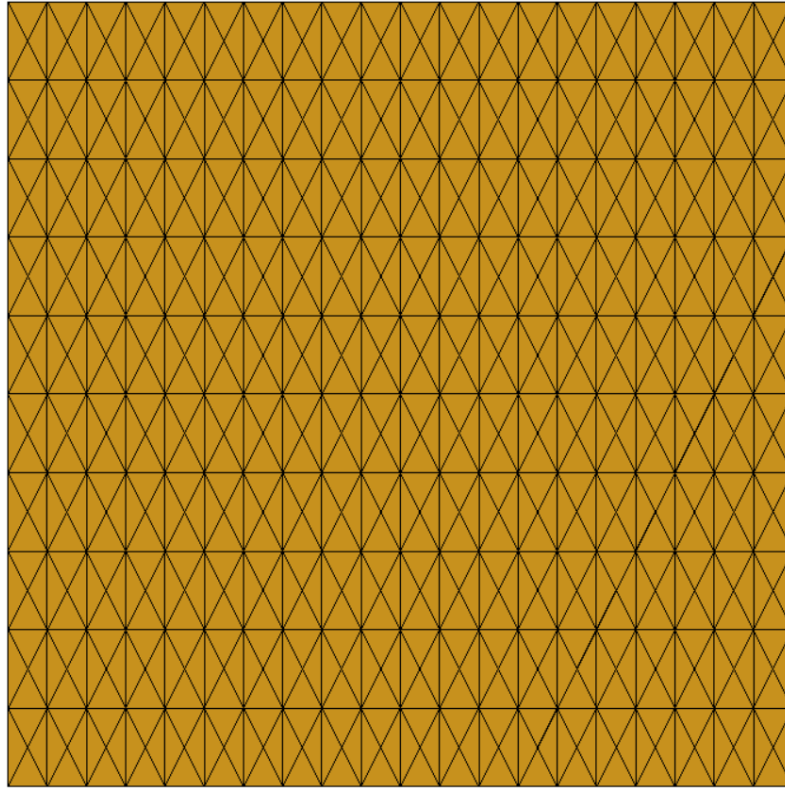


Figura 5.17: Malha em elementos finitos da amostra do problema de Mandel

Porém, conforme mostrado anteriormente, não convém aplicar o carregamento na parte superior da amostra, pois seus nós superiores não se deslocariam uniformemente para baixo, condição essencial para que o efeito de Mandel-Cryer seja observado. Portanto, é importante que seja igualmente modelizada a placa rígida e que o carregamento seja imposto sobre ela.

No entanto, como a placa é extremamente rígida, ela se deformará muito pouco verticalmente e ainda menos horizontalmente. O problema relacionado a isso vem da condição de livre deslocamento horizontal que os nós superiores da amostra precisam ter. Sendo os nós da parte inferior ao da placa os mesmos da parte superior da amostra, esses nós da amostra não teriam deslocamento horizontal, o que alteraria o resultado.

A ideia para contornar tal problema, seria permitir o deslocamento relativo entre esses nós (os inferiores da placa e os superiores da amostra). A solução encontrada está relacionada à ideia dos elementos finitos de elevada razão de aspecto (elementos de interface) no artigo de Manzoli *et al.* (2012). Nesse artigo, esses elementos possuem um modelo de dano que degrada as constantes elásticas conforme a tensão ultrapassa a admissível.

Vale notar que o modelo constitutivo de dano, apresentado por Manzoli *et al.* (2012) não precisou ser implementado, pois nesse trabalho o elemento de interface já está com sua rigidez ao cisalhamento completamente degradada, ou seja, apenas a ideia de Manzoli *et al.* (2012) foi utilizada. Então basta programar a matriz constitutiva desses elementos de interface da seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & G_{interface} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

onde $G_{interface}$ é a componente da matriz constitutiva do elemento de interface referente ao cisalhamento. O valor de $G_{interface}$ nesse elemento é bem pequeno, correspondendo a uma degradação total do elemento ao cisalhamento. Em relação ao coeficiente de Poisson ν e porosidade n , tanto do elemento de interface quanto da placa rígida, não há muitas restrições a eles, logo foi escolhido um valor nulo para ambos.

Para manter a simetria vertical do problema, como mostrado anteriormente, a face superior da amostra deve ser impermeável assim como a face inferior, ou seja, deve haver um fluxo nulo nessas faces e, para tal, a permeabilidade tanto da placa rígida quanto do elemento de interface são extremamente baixas. Como a permeabilidade da amostra é de 1×10^{-15} , a de ambos os outros é de 1×10^{-30} .

A figura 5.18 mostra a malha final do problema de Mandel, com a placa rígida e o elemento interface entre a placa e a amostra, de forma a respeitar as condições de contorno do problema.

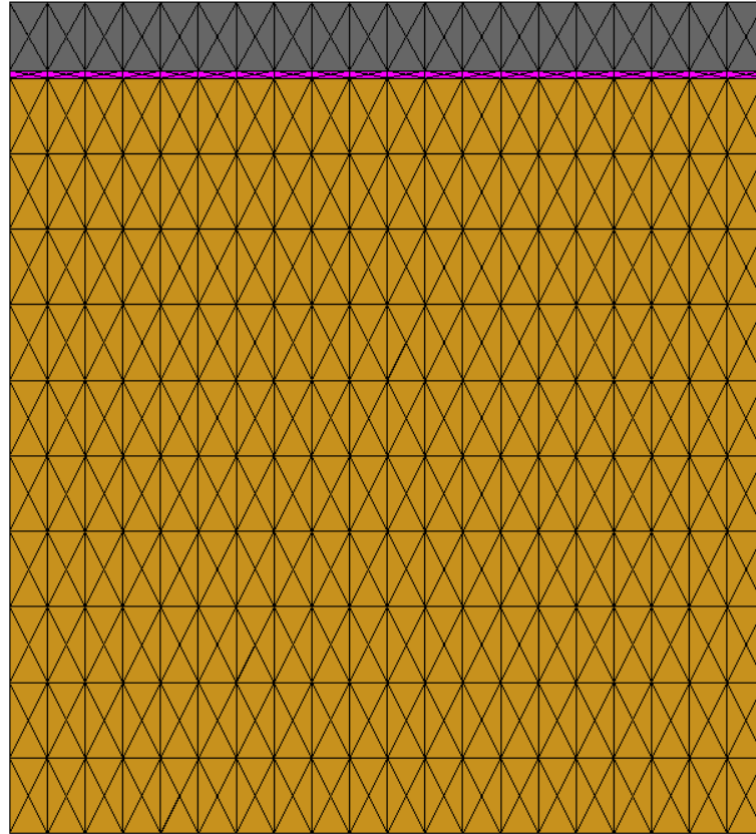


Figura 5.18: Ilustração da malha em elementos finitos completa do problema de Mandel

Tabela 5.3: Alguns parâmetros da placa rígida e do elemento de elevada razão de aspecto

Parâmetro	Unidade	Placa rígida (cinza)	Elemento de interface (rosa)
Módulo de Young	MPa	1×10^{10}	1×10^{10}
Coefficiente de Poisson	—	0	0
$G_{interface}$	MPa	$(1 - 2\nu)/2$	1×10^{-15}
Porosidade	—	0	0
Permeabilidade	m^2	1×10^{-30}	1×10^{-30}
Dimensão vertical	m	0,0999	0,0001

É importante observar que a região rosa, referente à interface, na figura 5.18, está com sua dimensão vertical aumentada para uma melhor ilustração do material, sua espessura real é de $0,0001m$.

De modo com que não haja dúvidas em relação às propriedades dessas outras regiões e para resumir as informações anteriores, a tabela 5.3 mostra os valores de rigidez bem como o de outros parâmetros e dimensões necessárias para a caracterização dessas regiões. Nela, é importante observar que o valor de $G_{interface}$ para a placa rígida é o valor comum da matriz de rigidez bidimensional em EPD (Estado Plano de Deformação), conforme a equação 2.11.

A figura 5.19 nomeia cada um dos contornos e o domínio do problema. Ω é o domínio total do problema, amostra, placa rígida e material extra. Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 são os contornos lateral esquerdo, inferior e lateral direito, respectivamente, da amostra. Γ_4 é o contorno superior da placa rígida. Finalmente, Γ_5 e Γ_6 são os contornos laterais esquerdo e direito, respectivamente, tanto da placa rígida quanto da interface. É importante observar, para a boa aplicação das condições de contorno, que o nó superior direito da amostra, que é também o nó inferior da interface, pertence a Γ_3 .

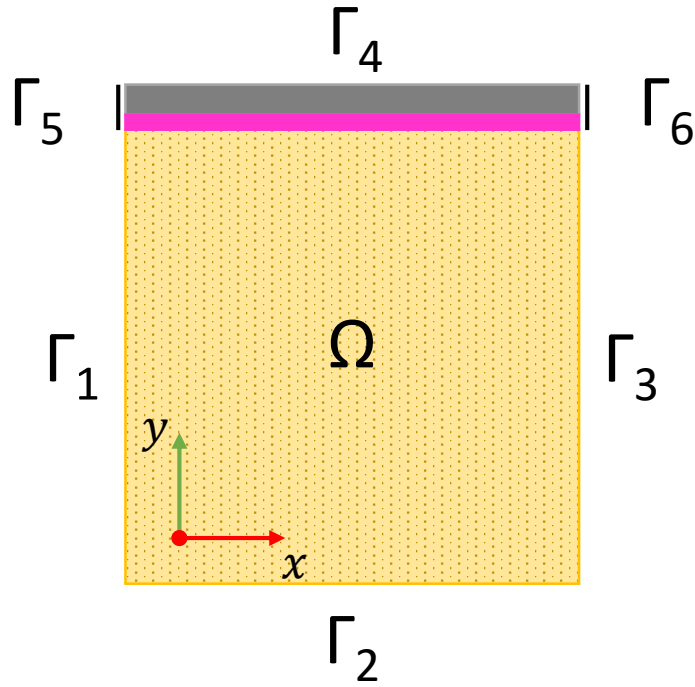


Figura 5.19: Nomeação do contorno e do domínio do problema de Mandel em 2D

Analogamente ao problema de Terzaghi, as condições de contorno do problema de Mandel são aplicadas em 3 diferentes intervalos de carregamento. Levando em consideração a nomeação dos contornos da figura 5.19, as condições de contorno de cada um desses intervalos de carregamento são:

- **Intervalo de carregamento 1:**

- Pressão igual a zero é aplicada na face lateral direita da amostra Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é aplicado na face inferior Γ_2 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é aplicado em toda a face lateral esquerda do problema Γ_1 e Γ_5 .

$$\Gamma_3 \rightarrow \{p = 0 \text{ MN/m}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

Esse intervalo de carregamento é mantido até que todo o material esteja com pressão nula.

- **Intervalo de carregamento 2:**

- Carregamento vertical de $1\text{ MN}/m$ é aplicado na face superior da placa rígida Γ_4 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido em toda a face lateral esquerda do problema Γ_1 e Γ_5 .

$$\Gamma_4 \rightarrow \{q_y = -1\text{ MN}/m$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0\text{ m}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \{u_x = 0\text{ m}$$

É importante observar que, nesse intervalo de carregamento, a imposição da pressão na face lateral direita da amostra é retirada, de forma a fazer com que as pressões e as tensões se equilibrem no interior da amostra enquanto todo o seu contorno encontra-se impermeável.

• **Intervalo de carregamento 3:**

- Carregamento vertical de $1\text{ MN}/m$ é mantido na face superior Γ_4 ;
- Pressão igual a zero é aplicada na face lateral direita da amostra Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido em toda a face lateral esquerda do problema Γ_1 e Γ_5 .

$$\Gamma_4 \rightarrow \{q_y = -1\text{ MN}/m$$

$$\Gamma_3 \rightarrow \{p = 0\text{ MN}/m$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0\text{ m}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \{u_x = 0\text{ m}$$

Nesse intervalo de carregamento, uma pressão nula volta a ser aplicada na face lateral direita da amostra, de forma a deixá-la permeável novamente e deixar o fluido sair para, após ocorrer o efeito Mandel-Cryer, a pressão se aliviar no interior da amostra.

A figura 5.20 procura ilustrar as condições de contorno dos três intervalos de carregamento descritos acima do problema de Mandel.

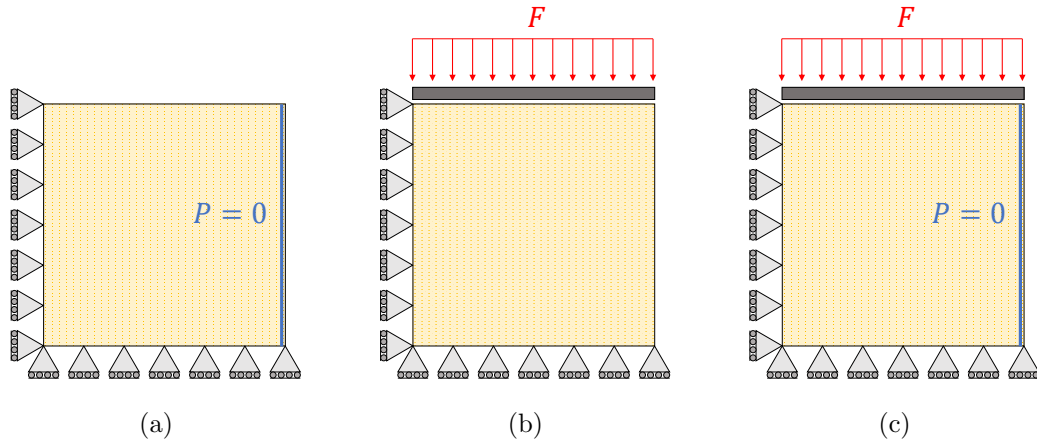


Figura 5.20: Condições de contorno dos intervalos de carregamento (a) 1, (b) 2 e (c) 3

A figura 5.21 mostra as curvas obtidas pela fórmula analítica (equação 5.10) e pela simulação numérica da pressão em função do tempo. Nessa figura, a pressão é medida em três diferentes pontos ao longo da posição horizontal da amostra em relação a sua face lateral esquerda, $0,075\text{ m}$, $0,525\text{ m}$ e $0,875\text{ m}$.

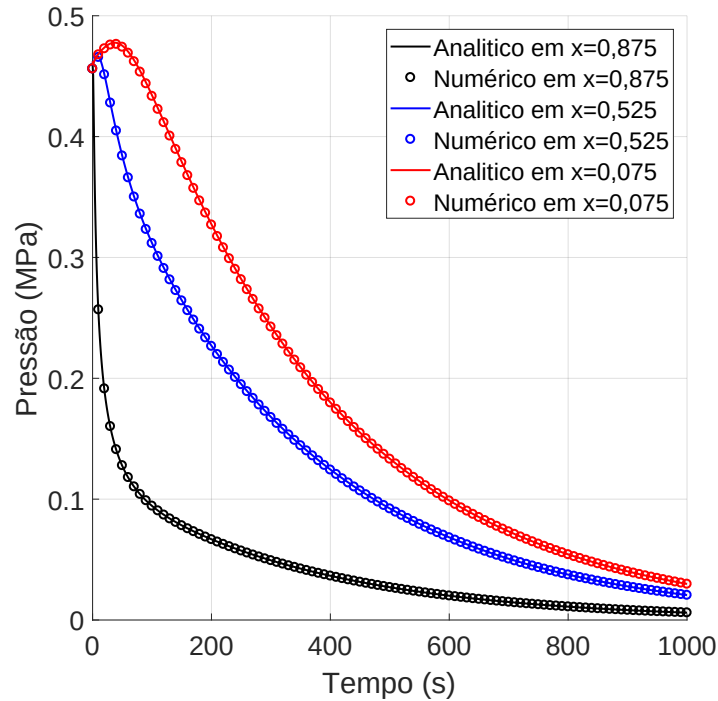


Figura 5.21: Curvas de pressão em função do tempo em diferentes posições horizontais da amostra

Pode-se observar que as curvas numéricas estão de acordo com as analíticas para suas respectivas posições. O valor analítico da pressão inicial é de 0.456140 MPa enquanto que o valor da pressão inicial obtido pelo modelo numérico em elementos finitos é de 0.456126 , o que é um resultado satisfatório. É também possível observar que, quanto mais próximo

o ponto à face esquerda (o que no problema original significa ser mais próximo ao centro), maior é o pico de pressão devido ao efeito de Mandel-Cryer. Enquanto isso, quanto mais afastado da face esquerda (mais próximo à extremidade), mais intensa é a queda da pressão.

Anteriormente foi dada, pelo próprio autor, uma interpretação do efeito de Mandel-Cryer, portanto é interessante mostrar essa explicação em forma de gráficos para o melhor entendimento do fenômeno. Foi com base nesse propósito que foram traçadas curvas de pressão, tensão efetiva e tensão total para duas diferentes posições horizontais na amostra, uma próxima à face esquerda (ponto próximo ao centro no problema original) e outra próxima à face direita. Essas curvas estão ilustradas na figura 5.22.

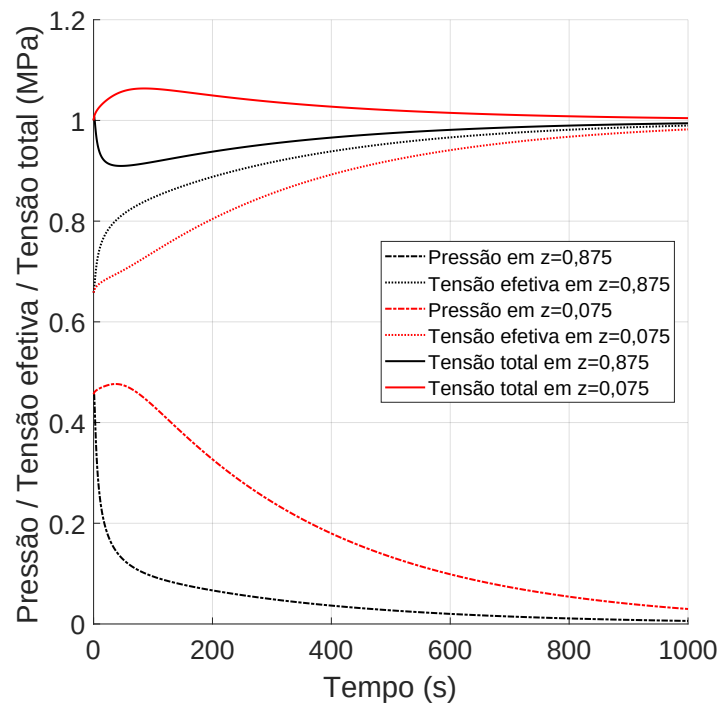


Figura 5.22: Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em duas diferentes posições verticais da amostra

Na figura 5.22, enquanto que há um aumento das tensões totais em um ponto próximo à face esquerda (curva vermelha), em um ponto próximo à face direita (curva preta) há uma queda. Isso significa que os pontos próximos à face esquerda estão sendo sobrecarregados para compensar a perda da sustentação na extremidade direita (devido à saída do fluido).

Enfim, a figura 5.23 exibe o comportamento da pressão ao longo de todo o comprimento horizontal da amostra para diferentes tempos. Nessa figura, pode ser observado o aumento da pressão, em tempos pequenos, nos pontos mais a esquerda da amostra. Além disso, também é possível dizer que o modelo numérico foi capaz de prever o comportamento da amostra.

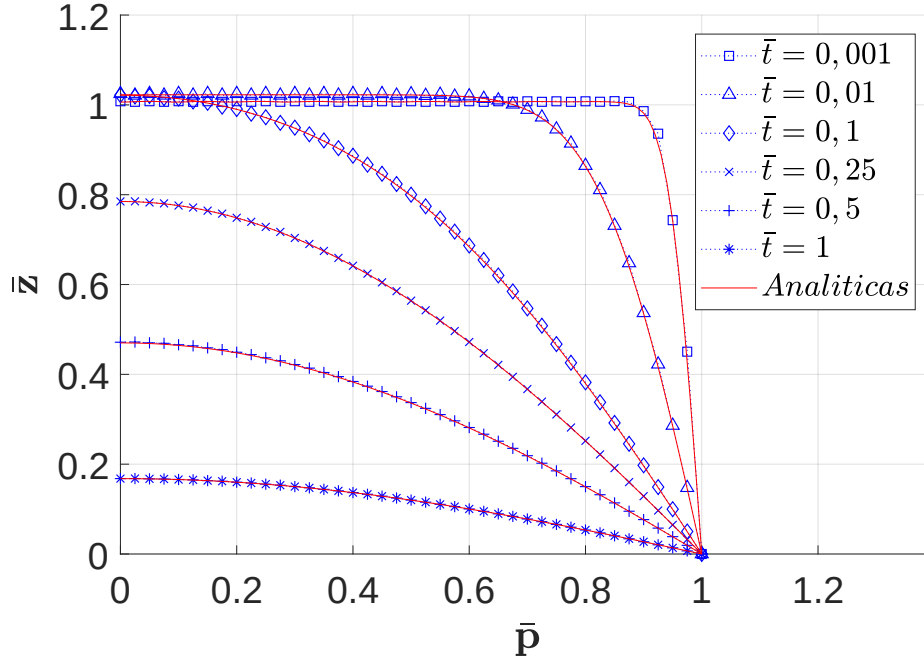


Figura 5.23: Curvas numéricas (em azul) e analíticas (em vermelho) da posição horizontal normalizada em relação à pressão normalizada para diferentes tempos normalizados

5.4 Problema de Mandel tridimensional

O problema de Mandel tridimensional também pode ser facilmente estendido do bidimensional. As únicas alterações a serem feitas é em relação às condições de contorno e à malha do problema. Em relação às propriedades do material, foram usadas aquelas da tabela 5.2, ou seja, parâmetros iguais aos do caso bidimensional e com fluido compressível. Vale aqui deixar claro que a matriz S utilizada para a simulação foi a forma diagonalizada como da equação 3.43.

No que diz respeito às condições de contorno, referente à figura 5.19(b), Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 , Γ_5 e Γ_6 , no caso 3D, são agora superfícies e Ω é agora um volume. Além desses contornos, aparecem também Γ_7 , Γ_8 , Γ_9 e Γ_{10} que são as superfícies da frente e de trás da amostra e da placa rígida com material extra, cujas normais são o eixo z (eixo de profundidade, saindo do papel). Esses contornos são mostrados na figura 5.24.

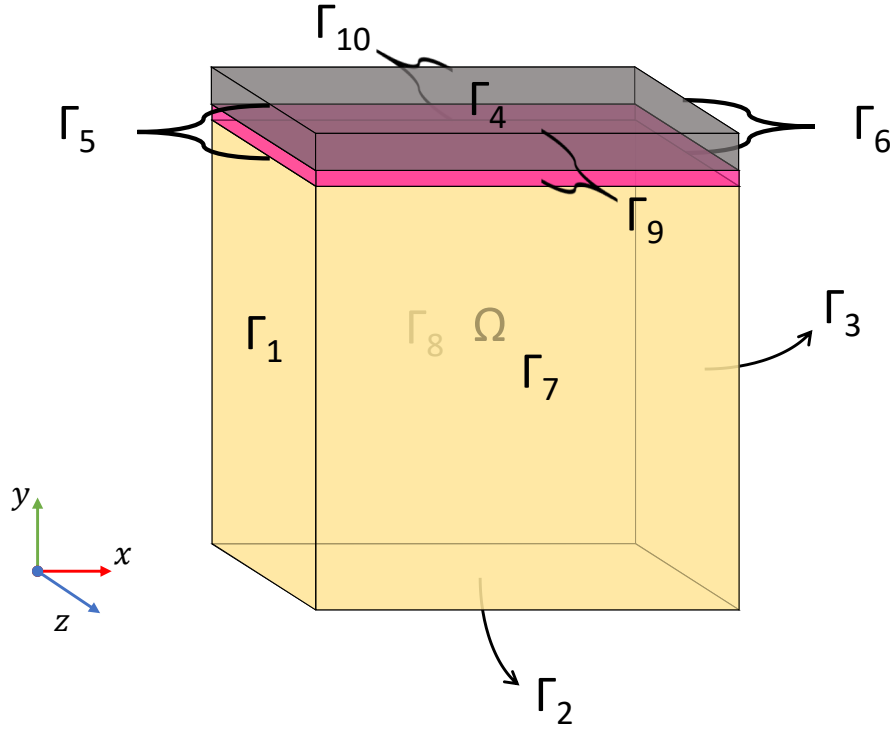


Figura 5.24: Nomeação do contorno e do domínio do problema de Mandel em 3D

As condições de contorno do problema de Terzaghi tridimensional possuem a mesma dinâmica do caso 2D, a única diferença é que no caso 3D deve-se impedir o deslocamento no eixo z das faces frontal e traseira da amostra, da placa rígida e do material extra. Levando em consideração a nomeação dos contornos da figura 5.24, as condições de contorno de cada um desses intervalos de carregamento são especificadas abaixo.

• **Intervalo de carregamento 1:**

- Pressão igual a zero é aplicada na face lateral direita da amostra Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é aplicado na face inferior Γ_2 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é aplicado em toda a face lateral esquerda do problema Γ_1 e Γ_5 .
- Restrição ao deslocamento no eixo z é aplicado em toda a face frontal e traseira do problema Γ_7 , Γ_8 , Γ_9 e Γ_{10} .

$$\Gamma_3 \rightarrow \{p = 0 \text{ MPa}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9, \Gamma_{10} \rightarrow \{u_z = 0 \text{ m}\}$$

Esse intervalo de carregamento é mantido até que todo o material esteja com pressão nula.

• **Intervalo de carregamento 2:**

- Carregamento vertical de 1 MPa é aplicado na face superior da placa rígida Γ_4 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido em toda a face lateral esquerda do problema Γ_1 e Γ_5 .
- Restrição ao deslocamento no eixo z é aplicado em toda a face frontal e traseira do problema $\Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9$ e Γ_{10} .

$$\Gamma_4 \rightarrow \{q_y = -1 \text{ MPa}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9, \Gamma_{10} \rightarrow \{u_z = 0 \text{ m}\}$$

É importante observar que, nesse intervalo de carregamento, a imposição da pressão na face lateral direita da amostra é retirada, de forma a fazer com que as pressões e as tensões se equilibrem no interior da amostra enquanto todo o seu contorno encontra-se impermeável.

• **Intervalo de carregamento 3:**

- Carregamento vertical de 1 MPa é mantido na face superior Γ_4 ;
- Pressão igual a zero é aplicada na face lateral direita da amostra Γ_3 ;
- Restrição ao deslocamento vertical é mantido na face inferior Γ_2 ;
- Restrição ao deslocamento horizontal é mantido em toda a face lateral esquerda do problema Γ_1 e Γ_5 .

- Restrição ao deslocamento no eixo z é aplicado em toda a face frontal e traseira do problema $\Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9$ e Γ_{10} .

$$\Gamma_4 \rightarrow \{q_y = -1 \text{ MPa}\}$$

$$\Gamma_3 \rightarrow \{p = 0 \text{ MPa}\}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \{u_y = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \{u_x = 0 \text{ m}\}$$

$$\Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9, \Gamma_{10} \rightarrow \{u_z = 0 \text{ m}\}$$

Nesse intervalo de carregamento, uma pressão nula volta a ser aplicada na face lateral direita da amostra, de forma a deixá-la permeável novamente e deixar o fluido sair para, após observar o efeito Mandel-Cryer, a pressão se aliviar no interior da amostra.

Essas condições de contorno são aplicadas na malha de elementos finitos da figura 5.25. A malha é composta por elementos tetraédricos de quatro nós, ou seja, funções interpoladoras lineares. Assim como comentado no caso bidimensional, esse problema possui efeito unidirecional, logo a única direção que deveria ser bem discretizada é a horizontal, direção na qual o gradiente de pressão é formado conforme o fluido escoar pela face lateral direita (Γ_3). No entanto, as duas outras direções também foram discretizadas razoavelmente bem.

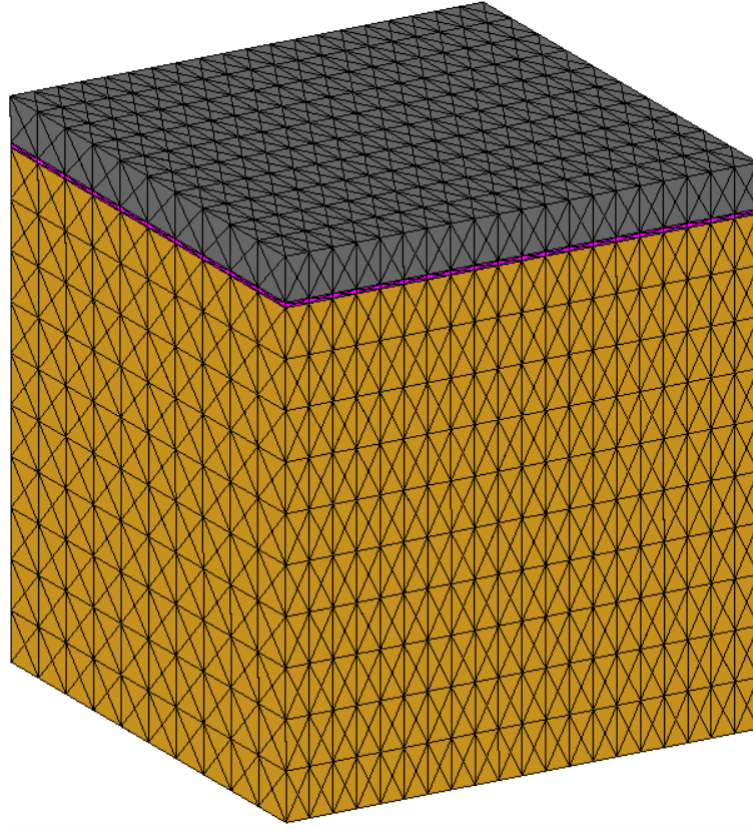


Figura 5.25: Malha em elementos finitos do problema de Mandel 3D

Novamente, os elementos de elevada razão de aspecto são utilizados para a interface placa-amostra, mas agora, em três dimensões (novamente, os elementos de interface estão com sua dimensão vertical exagerada para melhor visualização). Conforme explicado anteriormente, a matriz constitutiva desse elemento é alterada para que a componente de cisalhamento seja extremamente pequeno, portanto, a matriz constitutiva desses elementos fica da seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{interface} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

onde $G_{interface}$ é a componente da matriz constitutiva do elemento de interface referente ao cisalhamento. O valor de $G_{interface}$ nesse elemento é bem pequeno, correspondendo a uma degradação total do elemento ao cisalhamento.

Em relação aos outros parâmetros e dimensões necessárias para a caracterização do material, eles são os mesmos do caso bidimensional, inclusive o valor do $G_{interface}$. Esses valores se encontram na tabela 5.3.

A figura 5.26 mostra as curvas analíticas e numéricas da pressão em função do tempo. Nessa figura, a pressão é medida em três diferentes pontos ao longo da posição horizontal da amostra em relação à sua face lateral esquerda, $0,075\text{ m}$, $0,525\text{ m}$ e $0,875\text{ m}$. É possível observar que a coerência dos resultados numéricos nessa figura, dado que as curvas numéricas estão sobre as analíticas. Além disso, a pressão inicial da expressão analítica é de $0,045614\text{ MPa}$, enquanto que a pressão inicial encontrada numericamente é de $0,045629\text{ MPa}$.

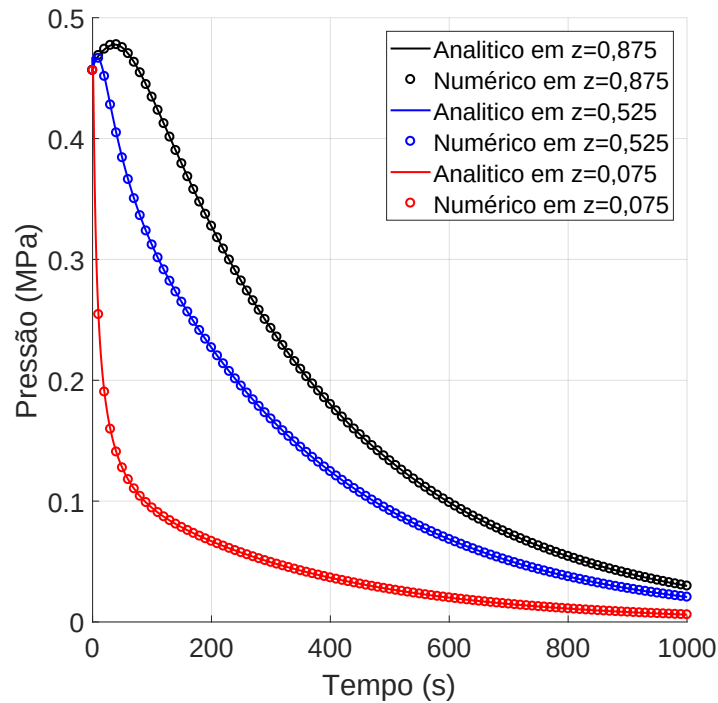


Figura 5.26: Curvas numéricas de pressão em função do tempo em duas diferentes posições verticais da amostra 3D

Conforme já explicado anteriormente, o efeito Mandel-Cryer é fruto de uma alteração nas tensões totais em cada um dos pontos, visando o equilíbrio global do problema. Esse efeito é mostrado na figura 5.27 onde dois pontos foram tomados, um próximo ao centro da amostra (que equivale a um ponto na lateral esquerda do problema simulado) e outro próximo à borda drenada (próximo à lateral direita).

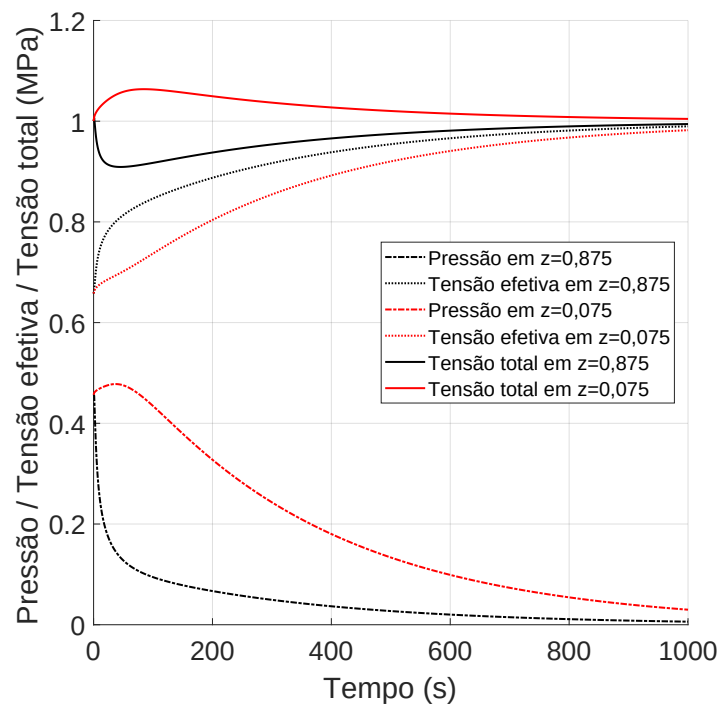


Figura 5.27: Curvas numéricas de pressão, tensão efetiva e tensão total em função do tempo em duas diferentes posições verticais da amostra 3D

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, foi implementado o método totalmente acoplado em um programa de elementos finitos no MatLab. Para verificar a implementação, foram comparados os resultados obtidos pelo programa com resultados analíticos de alguns problemas clássicos da literatura.

A primeira conclusão que pode ser extraída das análises é a boa implementação do código no MatLab, tanto para problemas bidimensionais quanto para problemas tridimensionais. Os resultados numéricos obtidos foram próximos aos analíticos em todas as análises feitas e, onde não houve comparação com curvas analíticas, os resultados foram bem consistentes.

A segunda conclusão que pode ser tirada é em relação ao método dos elementos finitos. Realmente há uma oscilação espúria na pressão para pontos próximos à borda drenada e para tempos pequenos. Porém, essas oscilações não comprometem os resultados para tempos mais avançados, conforme pôde ser visto. Isso mostra que o método dos elementos finitos é capaz de simular problemas hidromecânicos, mesmo usando-se a mesma interpolação para os campos de deslocamento e pressão.

Uma terceira conclusão pode ser tirada em relação à matriz $\mathbf{S}$, matriz que multiplica o termo da variação da pressão em relação ao tempo na equação de conservação de massa aproximada pelo MEF. Ao considerá-la como uma matriz diagonal, é possível observar uma diminuição da oscilação na pressão. Além disso, a forma diagonalizada é mais fácil de ser programada e também economiza tempo computacional.

Capítulo 7

ANEXO A

Nesse anexo estão explicitadas os vetores e matrizes necessários para a aproximação da forma fraca das equações governantes 3.5 e 3.28 assim como a forma dos vetores nas notações de engenharia, que são feitos para facilitarem a programação. É importante notar que essa notação de engenharia é feita com base em pequenas deformações e para materiais isotrópicos, que é o caso do presente trabalho.

Esse anexo contém as expressões para dois tipos de elementos: triângulos lineares para os casos em 2D e tetraédros lineares para os casos em 3D.

7.1 Problemas bidimensionais

Em casos bidimensionais, nas notações de engenharia, as tensões e as deformações podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}\}^T \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_{xy}\}^T\end{aligned}\tag{7.1}$$

Para essa notação ser possível, o operador divergente e gradiente podem ser escritos pela seguinte matriz:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\tag{7.2}$$

sendo que L^T é o divergente e L é o gradiente.

Além disso, para poder escrever as tensões totais em função das efetivas e da pressão, substituindo-se a matriz identidade I , introduz-se o vetor $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Por último, vale explicitar a forma do operador ∇ , utilizado na equação 3.27:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

sendo que ∇^T é o divergente e ∇ é o gradiente.

7.1.1 Elemento triangular linear

A figura 7.2 mostra um elemento triangular de três nós, ou seja, com funções interpoladoras lineares.

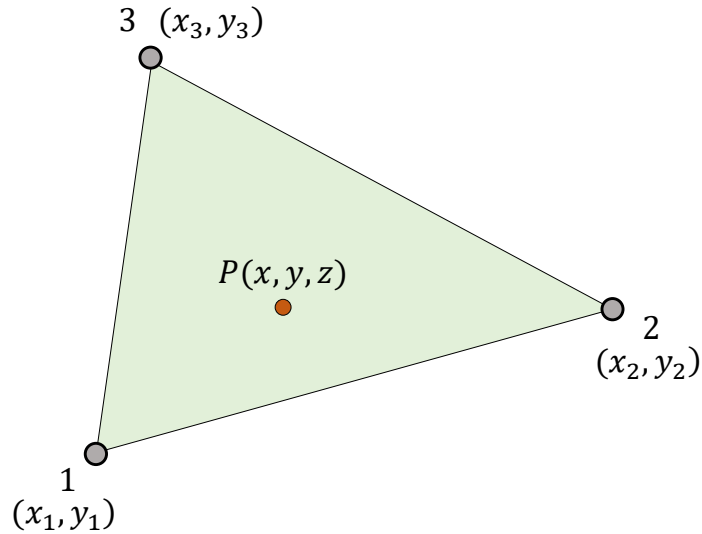


Figura 7.1: Representação de um elemento triangular linear

Expressões do sistema mecânico

Como o elemento é bidimensional e possui três nós, os deslocamentos elementares discretizados em elementos finitos são escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{d}^e = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{2x} \ u_{2y} \ u_{3x} \ u_{3y}]^T \quad (7.5)$$

sendo que u_{ij} é o deslocamento nodal do nó $i = \{1, 2, 3\}$ na direção $j = \{x, y\}$.

Para se descobrir o deslocamento de um ponto P localizado no interior do triângulo, utiliza-se um função de interpolação linear de tal forma que o campo de deslocamentos possa ser escrito conforme a equação 3.6, sendo que a expressão de $\mathbf{N}_u^e(x, y)$ é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{N}_u^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

com N_1^e , N_2^e e N_3^e expressões que dependem das coordenadas de cada um dos nós e que podem ser interpretadas como a área equivalente em relação a cada sub-triângulo da figura 7.2, conectando o ponto P aos vértices. Ou seja, a função de forma N_1^e é área do sub-triângulo formado pelos vértices P23, a função de forma N_2^e é área do sub-triângulo formado pelos vértices P31 e a função de forma N_3^e é área do sub-triângulo formado pelos vértices P12. De acordo com Fish e Belytschko (2007), esses termos são:

$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{1}{2A^e} (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + (y_2^e - y_3^e)x + (x_3^e - x_2^e)y) \\ N_2^e &= \frac{1}{2A^e} (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e + (y_3^e - y_1^e)x + (x_1^e - x_3^e)y) \\ N_3^e &= \frac{1}{2A^e} (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e + (y_1^e - y_2^e)x + (x_2^e - x_1^e)y) \\ 2A^e &= (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) + (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) + (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Além do campo de deslocamentos interpolados, há também a expressão para o campo de deformações, que é dado pela equação 3.7 com $\mathbf{B}_u^e(x, y)$ igual a

$$\mathbf{B}_u^e(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Como N_1^e , N_2^e e N_3^e já foram explicitados na equação 7.7, pode-se reescrever 7.8 da seguinte maneira:

$$\mathbf{B}_u^e(x, y) = \begin{bmatrix} (y_2^e - y_3^e) & 0 & (y_3^e - y_1^e) & 0 & (y_1^e - y_2^e) & 0 \\ 0 & (x_3^e - x_2^e) & 0 & (x_1^e - x_3^e) & 0 & (x_2^e - x_1^e) \\ (x_3^e - x_2^e) & (y_2^e - y_3^e) & (x_1^e - x_3^e) & (y_3^e - y_1^e) & (x_2^e - x_1^e) & (y_1^e - y_2^e) \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Expressões do sistema hidráulico

Ainda com base no elemento bidimensional da figura 7.2, as pressões elementares discretizadas em elementos finitos são escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{p}^e = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T \quad (7.10)$$

com p_1 , p_2 e p_3 as pressões nodais.

Assim como para os deslocamentos, para se saber a pressão de um ponto P, utiliza-se as mesmas expressões da função de forma dos deslocamentos N_1^e , N_2^e e N_3^e , conforme mostrados na equação 7.7. No entanto, o vetor $\mathbf{N}_p^e(x, y)$ da equação 3.9 possui a seguinte forma:

$$\mathbf{N}_p^e(x, y) = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e] \quad (7.11)$$

Para o gradiente de pressão, foi definida a matriz $\mathbf{B}_p^e$ na equação 3.30, que é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_p^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Como N_1^e , N_2^e e N_3^e já foram explicitados na equação 7.7, pode-se reescrever 7.12 da seguinte maneira:

$$\mathbf{B}_p^e(x, y) = \begin{bmatrix} (y_2^e - y_3^e) & (y_3^e - y_1^e) & (y_1^e - y_2^e) \\ (x_3^e - x_2^e) & (x_1^e - x_3^e) & (x_2^e - x_1^e) \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

7.2 Problemas tridimensionais

Em casos tridimensionais, nas notações de engenharia, as tensões e as deformações podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz}\}^T \quad (7.14)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{xz} \ \epsilon_{yz}\}^T$$

Para essa notação ser possível, o operador divergente e gradiente podem ser escritos pela seguinte matriz:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

sendo que L^T é o divergente e L é o gradiente.

Além disso, para poder escrever as tensões totais em função das efetivas e da pressão, substituindo-se a matriz identidade I , introduz-se o vetor $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Por último, vale explicitar a forma do operador ∇ , utilizado na equação 3.27:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

sendo que ∇^T é o divergente e ∇ é o gradiente.

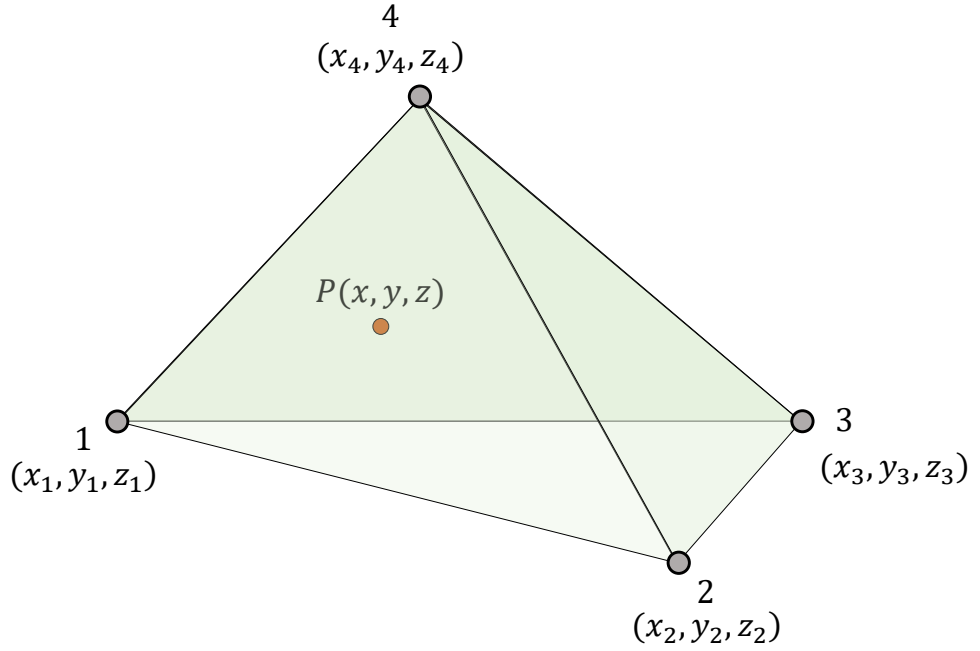


Figura 7.2: Representação de um elemento tetraédrico linear

7.2.1 Elemento tetraédrico linear

Expressões do sistema mecânico

Como o elemento é bidimensional e possui três nós, os deslocamentos elementares discretizados em elementos finitos são escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{d}^e = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{1z} \ u_{2x} \ u_{2y} \ u_{2z} \ u_{3x} \ u_{3y} \ u_{3z} \ u_{4x} \ u_{4y} \ u_{4z}]^T \quad (7.18)$$

sendo que u_{ij} é o deslocamento nodal do nó $i = \{1, 2, 3, 4\}$ na direção $j = \{x, y, z\}$.

Para se descobrir o deslocamento de um ponto P localizado no interior do triângulo, utiliza-se uma função de interpolação linear de tal forma que o campo de deslocamentos possa ser escrito conforme a equação 3.6, sendo que a expressão de $\mathbf{N}_u^e(x, y)$ é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{N}_u^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 & N_4^e & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 & N_4^e \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

com N_1^e , N_2^e , N_3^e e N_4^e expressões que dependem das coordenadas de cada um dos nós. Assim como para o triângulo linear, em que as funções de forma é a área dos sub-triângulos, para o tetraedro linear, a função de forma é o volume do sub-tetraedro formado pelo ponto P e pelos três outros vértices opostos ao nó. Ou seja, N_1^e é o volume do tetraedro formado

pelos vértices P234, N_2^e é o volume do tetraédro formado pelos vértices P134, N_3^e é o volume do tetraédro formado pelos vértices P124 e N_4^e é o volume do tetraédro formado pelos vértices P123.

Para desenvolver a expressão das funções de forma, primeiramente define-se os volumes total e de cada um dos sub-tetraédros V , V_1 , V_2 , V_3 e V_4 , respectivamente.

$$\mathbf{V} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V}_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 & x_4 \\ y_1 & y & y_3 & y_4 \\ z_1 & z & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (7.20)$$

$$\mathbf{V}_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x & x_4 \\ y_1 & y_2 & y & y_4 \\ z_1 & z_2 & z & z_4 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V}_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \\ N_4^e \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} V_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ V_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ V_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ V_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

sendo que os coeficientes a_i , b_i e c_i são definidos como:

$$\begin{aligned} a_i &= (z_j y_k - z_k y_j) + (z_k y_l - z_l y_k) + (z_l y_j - z_j y_l) \\ b_i &= (z_j x_k - z_k x_j) + (z_k x_l - z_l x_k) + (z_l x_j - z_j x_l) \\ c_i &= (y_j x_k - y_k x_j) + (y_k x_l - y_l x_k) + (y_l x_j - y_j x_l) \end{aligned} \quad (7.22)$$

com i, j, k e l em ordem cíclica (i.e., $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$).

Além do campo de deslocamentos interpolados, há também a expressão para o campo de deformações, que é dado pela equação 3.7 com $\mathbf{B}_u^e(x, y)$ igual a

$$\mathbf{B}_u^e(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & \frac{\partial N_4^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial z} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial z} & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Como N_1^e , N_2^e , N_3^e e N_4^e já foram explicitados na equação 7.21, pode-se reescrever 7.23 da seguinte maneira:

$$\mathbf{B}_u^e(x, y) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 \\ b_1 & a_1 & 0 & b_2 & a_2 & 0 & b_3 & a_3 & 0 & b_4 & a_4 & 0 \\ c_1 & 0 & a_1 & c_2 & 0 & a_2 & c_3 & 0 & a_3 & c_4 & 0 & a_4 \\ 0 & c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

Expressões do sistema hidráulico

Ainda com base no elemento bidimensional da figura 7.2, as pressões elementares discretizadas em elementos finitos são escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{p}^e = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T \quad (7.25)$$

com p_1 , p_2 , p_3 e p_4 as pressões nodais.

Assim como para os deslocamentos, para se saber a pressão de um ponto P, utiliza-se as mesmas expressões da função de forma dos deslocamentos N_1^e , N_2^e e N_3^e , conforme mostrados na equação 7.21. No entanto, o vetor $\mathbf{N}_p^e(x, y)$ da equação 3.9 possui a seguinte forma:

$$\mathbf{N}_p^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e & N_4^e \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Para o gradiente de pressão, foi definida a matriz $\mathbf{B}_p^e$ na equação 3.30, que é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_p^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & \frac{\partial N_3^e}{\partial z} & \frac{\partial N_4^e}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Como N_1^e , N_2^e e N_3^e já foram explicitados na equação 7.21, pode-se reescrever 7.27 da seguinte maneira:

$$\mathbf{B}_p^e(x, y) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Capítulo 8

ANEXO B

8.1 Método de Newton-Raphson

Há diferentes não linearidades que podem ser consideradas no sistema acoplado hidromecânico, como por exemplo a não linearidade material, a variação da porosidade com relação à variação da deformação volumétrica ou até a variação da permeabilidade com relação à variação da porosidade.

Para tratar numericamente dessas não linearidades, o método de Newton-Raphson foi escolhido. Trata-se de um método numérico popular para encontrar as raízes de uma equação ou para encontrar soluções de equações não lineares (KIM, 2014). Basicamente, para encontrar a solução do problema não linear, deve se assumir uma estimativa inicial $\mathbf{x}_0$ da solução e então encontra-se o incremento do passo $\Delta\mathbf{x}$, de modo com que, com um incremento suficientemente pequeno, $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ é mais próximo da solução do que $\mathbf{x}_0$. Para encontrar o incremento do passo, a equação não linear é aproximada por uma linear no ponto $\mathbf{x}_0$. Esse processo pode ser repetido até que a equação não linear seja satisfeita.

Para exemplificar o método, considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \quad (8.1)$$

onde $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ é o vetor de incógnitas do problema, $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T$ é um vetor com valores conhecidos e $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \{P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \dots, P_n(\mathbf{x})\}^T$ é o vetor de funções não lineares de $\mathbf{x}$.

Suponha que a solução da i -ésima iteração é conhecida e designada por $\mathbf{x}^i$. A solução da próxima iteração pode ser aproximada, de acordo com a série de Taylor, como:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}^{i+1}) \approx \mathbf{P}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{K}^i(\mathbf{x}^i) \cdot \Delta\mathbf{x}^i = \mathbf{f} \quad (8.2)$$

onde $\mathbf{K}^i(\mathbf{x}^i) = (\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{x})^i$ é a matriz Jacobiana da i -ésima iteração.

Para se calcular $\Delta\mathbf{x}^i$, basta organizar o sistema de equações 8.2 da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}^i(\mathbf{x}^i) \cdot \Delta \mathbf{x}^i = \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{x}^i) \quad (8.3)$$

Do qual se obtém o incremento de passo $\Delta \mathbf{x}^i$.

Assim, uma nova solução aproximada é obtida:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x}^i \quad (8.4)$$

Em geral, essa solução não satisfaz a equação não linear, havendo então um resíduo, calculado da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}^{i+1} = \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{x}^{i+1}) \quad (8.5)$$

Se o resíduo for menor que uma certa tolerância, pode-se considerar que $\mathbf{x}^{i+1}$ é a resposta da equação, caso contrário, repetem-se as equações 8.2, 8.3 e 8.4, encontra-se $\mathbf{x}^{i+1}$ e assim por diante, até que o resíduo seja menor do que a tolerância.

A figura 8.1 mostra (apenas em uma dimensão, utilizando a variável x_n , por questões de ilustração) a ideia do incremento de passo para chegar cada vez mais próximo do solução, conforme descrito anteriormente.

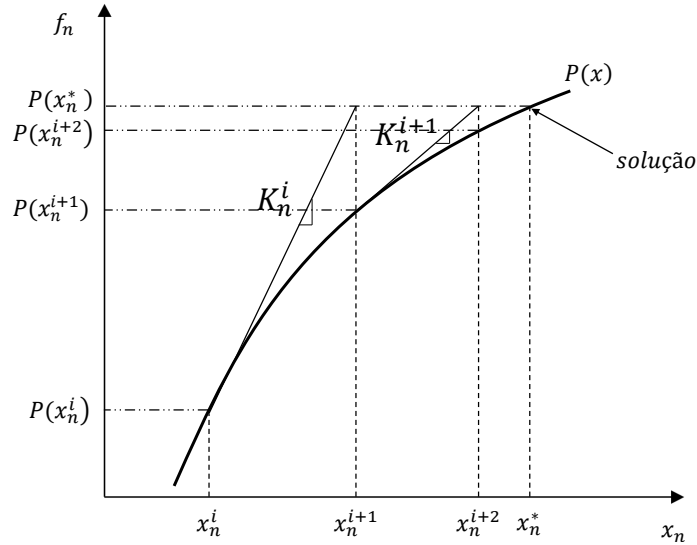


Figura 8.1: Ilustração do método de Newton-Raphson para solução de equações não lineares

sendo que x_n^* é a solução valor da variável x_n e $P(x_n^*)$ é o valor da função a qual se deseja alcançar, ou seja, o $\mathbf{f}$ da equação 8.1.

8.1.1 Resolução do sistema de equações algébricas

Antes de encontrar a solução do sistema de equações discretas da equação 3.44 através do método de Newton-Raphson, introduzem-se as derivadas temporais dos deslocamentos

e das pressões (equação 3.45) no sistema de equações aproximados pelo MEF do problema hidromecânico (equação 3.44):

Escreve-se novamente o sistema de equações com discretização temporal em diferenças finitas da equação 8.6:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{F}_u^{ext} \\ \mathbf{Q}^T \left[\frac{(\mathbf{d} - \mathbf{d}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{S} \left[\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p^{ext} \end{cases} \quad (8.6)$$

Para aplicar o método de Newton-Raphson nesse sistema, primeiramente obtém-se sua matriz Jacobiana na iteração atual i , que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^i & -\mathbf{Q}^i \\ \mathbf{Q}^{*T\ i} & \mathbf{E}^i \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

sendo $\mathbf{J}^i$ a matriz Jacobiana (também conhecida por matriz tangente), equivalente à matriz $\mathbf{K}^i$ da equação 8.3. As matrizes $\mathbf{Q}^{*T\ i}$ e $\mathbf{E}^i$ são matrizes escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^{*T\ i} = \frac{\mathbf{Q}^{T\ i}}{\Delta t} \\ \mathbf{E}^i = \frac{\mathbf{S}^i}{\Delta t} + \mathbf{H}^i \end{cases} \quad (8.8)$$

Próximo passo é encontrar o valor da função na iteração atual, que pode ser simplesmente calculado por 8.6 no valor das variáveis atuais na iteração:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_u^{inti} &= \mathbf{K}^i \mathbf{d}^i - \mathbf{Q}^i \mathbf{p}^i \\ \mathbf{F}_p^{inti} &= \mathbf{Q}^{T\ i} \left[\frac{(\mathbf{d}^i - \mathbf{d}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{S}^i \left[\frac{(\mathbf{p}^i - \mathbf{p}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \right] + \mathbf{H}^i \mathbf{p}^i \end{aligned} \quad (8.9)$$

sendo $\mathbf{d}^i$ e $\mathbf{p}^i$ os deslocamentos e pressões na iteração do passo atual, $\mathbf{d}_{t-\Delta t}$ e $\mathbf{p}_{t-\Delta t}$ os valores convergidos (ou seja, após n iterações de Newton-Raphson) do passo de tempo anterior.

No método de Newton-Raphson, a fim de encontrar o incremento das variáveis $\Delta \mathbf{d}^i$ e $\Delta \mathbf{p}^i$, deve-se conhecer o valor da função onde se quer chegar, representado por $\mathbf{f}$ na equação 8.1, que no caso do sistema hidromecânico são os valores das forças externas e fluxos impostos nas condições de contorno, ou seja, os próprios vetores $\mathbf{F}_u^{ext}$ e $\mathbf{F}_p^{ext}$. Logo, o sistema a se resolver fica da seguinte forma:

$$\mathbf{J}^i \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^i \\ \Delta \mathbf{p}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{ext} \\ \mathbf{F}_p^{ext} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{inti} \\ \mathbf{F}_p^{inti} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Invertendo a matriz $\mathbf{J}^i$, pode-se obter os incrementos $\Delta \mathbf{d}^i$ e $\Delta \mathbf{p}^i$, e então, encontrar

os valores aproximados dos deslocamentos e pressões, $\mathbf{d}^{i+1}$ e $\mathbf{p}^{i+1}$, respectivamente, com a ajuda da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{i+1} &= \mathbf{d}^i + \Delta \mathbf{d}^i \\ \mathbf{p}^{i+1} &= \mathbf{p}^i + \Delta \mathbf{p}^i\end{aligned}\tag{8.11}$$

Para ver se a solução encontrada é satisfatória, pode-se calcular a diferença entre o valor do sistema nos pontos $\mathbf{d}^{i+1}$ e $\mathbf{p}^{i+1}$ e as forças externas:

$$\mathbf{R}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{ext} \\ \mathbf{F}_p^{ext} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{int(i+1)} \\ \mathbf{F}_p^{int(i+1)} \end{bmatrix}\tag{8.12}$$

sendo que o vetor de forças internas na iteração $i + 1$ pode ser calculado da mesma forma que o da iteração i , conforme a equação 8.9, basta apenas atualizar as matrizes e as variáveis para os valores da iteração $i + 1$.

Referências Bibliográficas

- ALPAK, F. O. *et al.* Robust fully-implicit coupled multiphase-flow and geomechanics simulation. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 20, n. 06, p. 1–366, 2015.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. [S.l.]: American Elsevier publishing company, Inc., 1972.
- BEAR, J.; BACHMAT, Y. *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 4.
- BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, AIP, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941.
- BOER, R. D. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory. *Applied Mechanics Reviews*, American Society of Mechanical Engineers, v. 49, n. 4, p. 201–262, 1996.
- BOER, R. D.; SCHIFFMAN, R.; GIBSON, R. E. The origins of the theory of consolidation: the terzaghi—fillunger dispute. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 46, n. 2, p. 175–186, 1996.
- BORST, R. de. *Computational Methods for Fracture in Porous Media: Isogeometric and Extended Finite Element Methods*. [S.l.]: Elsevier, 2017.
- CHIN, L.; THOMAS, L.; SYLTE, J.; PIERSON, R. Iterative coupled analysis of geomechanics and fluid flow for rock compaction in reservoir simulation. *Oil & Gas Science and Technology*, EDP Sciences, v. 57, n. 5, p. 485–497, 2002.
- CLETO, P. R. *Simulação de fraturamento hidráulico usando elementos finitos de elevada razão de aspecto com acoplamento hidromecânico*. Dissertação (Mestrado) — UNESP, 2016.
- COUSSY, O. *Poromechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- DEAN, R. H.; GAI, X.; STONE, C. M.; MINKOFF, S. E. *et al.* A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. *Spe Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 11, n. 01, p. 132–140, 2006.
- DEMIRDŽIĆ, I.; MUZAFERIJA, S. Finite volume method for stress analysis in complex domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 37, n. 21, p. 3751–3766, 1994.
- DETOURNAY, E.; CHENG, A. H.-D. Fundamentals of poroelasticity. In: *Analysis and design methods*. [S.l.]: Elsevier, 1995. p. 113–171.

- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A first course in finite elements*. [S.l.]: John Wiley, 2007.
- GAI, X. *A coupled geomechanics and reservoir flow model on parallel computers*. Tese (Doutorado) — University of Texas at Austin, 2004.
- GEERTSMA, J. *et al.* The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks. *Petroleum Transactions, AIME*, Society of Petroleum Engineers, 1957.
- GIBSON, R. A critical experiments to examine theories of three-dimensional consolidation. In: *Proc. Europ. Conf. Soil Mech., 1963*. [S.l.: s.n.], 1963.
- GUTIERREX, M.; LEWIS, R. *et al.* The role of geomechanics in reservoir simulation. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*. [S.l.], 1998.
- HAIMSON, B.; FAIRHURST, C. *et al.* Hydraulic fracturing in porous-permeable materials. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 21, n. 07, p. 811–817, 1969.
- KIM, J. *Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 2010.
- KIM, J.; TCHELEPI, H. A.; JUANES, R. *et al.* Stability, accuracy and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE reservoir simulation symposium*. [S.l.], 2009.
- KIM, N.-H. *Introduction to nonlinear finite element analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2014.
- LEWIS, R. W.; SCHREFLER, B. A. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. [S.l.]: John Wiley, 1998.
- LI, W.; WEI, C. Minimum time-step size in transient finite element analysis of coupled poromechanical problems. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 98, p. 197–204, 2018.
- LONGUEMARE, P.; MAINGUY, M.; LEMONNIER, P.; ONAIS, A.; GÉRARD, C.; KOUTSABELOULIS, N. Geomechanics in reservoir simulation: overview of coupling methods and field case study. *Oil & Gas Science and Technology*, EDP Sciences, v. 57, n. 5, p. 471–483, 2002.
- MAINGUY, M.; LONGUEMARE, P. Coupling fluid flow and rock mechanics: formulations of the partial coupling between reservoir and geomechanical simulators. *Oil & Gas Science and Technology*, EDP Sciences, v. 57, n. 4, p. 355–367, 2002.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2017.
- MANZOLI, O. L.; GAMINO, A. L.; RODRIGUES, E.; CLARO, G. Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 94, p. 70–82, 2012.
- MINKOFF, S. E.; STONE, C. M.; BRYANT, S.; PESZYNSKA, M.; WHEELER, M. F. Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 38, n. 1-2, p. 37–56, 2003.

OLIVELLA, X. O.; BOSCH, C. Agelet de S. *Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems*. 2017.

OSORIO, J. G.; CHEN, H.-Y.; TEUFEL, L. W. *et al.* Numerical simulation of coupled fluid-flow/geomechanical behavior of tight gas reservoirs with stress sensitive permeability. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*. [S.l.], 1997.

PIZZOL, A. D.; MALISKA, C. R. A finite volume method for the solution of fluid flows coupled with the mechanical behavior of compacting porous media. In: AIP. *AIP Conference Proceedings* 4. [S.l.], 2012. v. 1453, n. 1, p. 205–210.

PREISIG, M.; PRÉVOST, J. H. Stabilization procedures in coupled poromechanics problems: A critical assessment. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley Online Library, v. 35, n. 11, p. 1207–1225, 2011.

RAHM, D. Regulating hydraulic fracturing in shale gas plays: The case of texas. *Energy Policy*, Elsevier, v. 39, n. 5, p. 2974–2981, 2011.

RIBEIRO, G. G. *Volumes finitos baseado em elementos para problemas de poroelasticidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

SAMIER, P.; GENNARO, S. D. *et al.* Practical iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.], 2007.

SAMIER, P.; ONAIS, A.; FONTAINE, G. *et al.* Comparisons of uncoupled and various coupling techniques for practical field examples. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 11, n. 01, p. 89–102, 2006.

SEN, V.; SETTARI, A. Coupled geomechanical and flow modeling of compacting reservoirs. *The Leading Edge*, Society of Exploration Geophysicists, v. 24, n. 12, p. 1284–1286, 2005.

SETTARI, A.; WALTERS, D. A. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. *Society of Petroleum Engineers*, Society of Petroleum Engineers, v. 6, n. 03, p. 334–342, 1999.

SETTARI, A.; WALTERS, D. A. *et al.* Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. *Spe Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 6, n. 03, p. 334–342, 2001.

STONE, T.; BOWEN, G.; PAPANASTASIOU, P.; FULLER, J. *et al.* Fully coupled geomechanics in a commercial reservoir simulator. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE European Petroleum Conference*. [S.l.], 2000.

TERZAGHI, K. *OK: Theorie der Setzung von Tonschichten—Eine Einführung in die analytische Tonmechanik*. [S.l.]: Leipzig und Wien: Franz Deuticke, 1936.

TERZAGHI, K. V. Die berechnung der durchlässigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen. *Akad. Wiss. Wien. Math-naturw*, 1923.

- TERZAGHI, K. V. Die theorie der hydrodynamischen spannungserscheinungen und ihr erdbautechnisches anwendungsgebiet. *Proceedings of the international congress for applied mechanics*, 1924.
- TRAN, D.; NGHIEM, L.; BUCHANAN, L. *et al.* An overview of iterative coupling between geomechanical deformation and reservoir flow. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE International Thermal Operations and Heavy Oil Symposium*. [S.l.], 2005.
- TRAN, D.; NGHIEM, L.; BUCHANAN, L. *et al.* Aspects of coupling between petroleum reservoir flow and geomechanics. In: AMERICAN ROCK MECHANICS ASSOCIATION. *43rd US Rock Mechanics Symposium & 4th US-Canada Rock Mechanics Symposium*. [S.l.], 2009.
- VERMEER, P.; VERRUIJT, A. An accuracy condition for consolidation by finite elements. *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Wiley Online Library, v. 5, n. 1, p. 1–14, 1981.
- VERRUIJT, A. Elastic storage of aquifers. *Flow through porous media*, Academic Press, New York, p. 331–376, 1969.
- VERRUIJT, A. Consolidation of soils. *Encyclopedia of Hydrological Sciences*, Wiley Online Library, 2008.
- VERRUIJT, A. Theory and problems of poroelasticity. *Delft University of Technology*, 2013.
- WAN, J.; DURLOFSKY, L.; HUGHES, T.; AZIZ, K. *et al.* Stabilized finite element methods for coupled geomechanics-reservoir flow simulations. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.], 2003.
- WANG, H. F. *Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology*. [S.l.]: Princeton University Press, 2000.
- WHITE, J. A.; BORJA, R. I. Stabilized low-order finite elements for coupled solid-deformation/fluid-diffusion and their application to fault zone transients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 49-50, p. 4353–4366, 2008.
- ZIENKIEWICZ, O.; SHIOMI, T. Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized biot formulation and its numerical solution. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Wiley Online Library, v. 8, n. 1, p. 71–96, 1984.