
Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Estimativas Inferiores Para Dimensão De Hausdorff De Repulsores Não-Uniformemente Expansores

Oyran Silva Rayzaro

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Tese apresentada ao Instituto de Biociências, Letras
e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista,
Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São José do Rio Preto - 2014

Oyran Silva Rayzaro

**Estimativas Inferiores Para Dimensão De Hausdorff De Repulsores
Não-Uniformemente Expansores**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, área de Concentração - Geometria e Topologia do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto - 2014

Rayzaro, Oyran Silva.

Estimativas Inferiores Para Dimensão De Hausdorff De Repulsores
Não-Uniformemente Expansores / Oyran Silva Rayzaro. - São José do Rio
Preto: [s.n.], 2014.

59 f. : il.

Orientador: Vanderlei Minori Horita

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita
Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Geometria. 2. Topologia Diferencial. 3. Teoria Ergódica.
4. Hausdorff, Medidas de. 5. Teoria da Bifurcação I. Horita, Vanderlei
Minori. II. Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho".
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 513.832

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE

UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Oyran Silva Rayzaro

**Estimativas Inferiores Para Dimensão De Hausdorff De Repulsores
Não-Uniformemente Expansores**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, área de Concentração - Geometria e Topologia do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", de Campus São José do Rio Preto..

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Professor Livre Docente

UNESP - São José do Rio Preto-SP

Prof. Dr. Ali Messaoudi

Professor Livre Docente

UNESP - São José do Rio Preto-SP

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia

Professor Doutor

UNESP - São José do Rio Preto-SP

Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan

Professor Doutor

UFU - Uberlândia-MG

Prof. Dr. Nivaldo Costa Muniz

Professor Doutor

UFMA - São Luis-MA

São José do Rio Preto, 04 de Agosto de 2014

Aos meus pais, Carlos e Sônia, a minha
namorada Kamila, aos meus queridos
irmãos, Moara e Ubirae e ao meu
afilhado Rafael, com amor, Dedico.

Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos, mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa.

Albert Einstein.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS por todas as oportunidades maravilhosas que obtive em minha vida.

Aos meus pais, Carlos e Sônia, meus irmãos Moara e Ubirae, meu afilhado Rafael e meu cunhado Gabriel(Inhame), pelo amor, paciência, respeito e confiança.

A minha namorada Kamila(mais linda), por estar ao meu lado em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis, sempre me dando muito amor, carinho, apoio, incentivo, sem deixar eu desanimar nunca, e o melhor de tudo, sempre com o seu sorriso lindo.

Agradeço aos meus avós maternos Jair e Rosa e aos meus avós paternos Orivaldo (in memoriam) e Arvelina pelo incentivo, apoio e pelos ensinamentos da vida. E a todos meus familiares.

Agradeço muito ao meu orientador, Vanderlei Minori Horita, pela orientação, amizade, paciência, por ter acreditado em mim, e dar-me a oportunidade de aprender com ele e pelos conselhos acadêmicos, profissionais e humanos.

Agradeço a banca examinadora: Prof. Dr. Ali Messaoudi, Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia, Prof. Dr. Nivaldo Costa Muniz e o Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan, pela disponibilidade e pela grande contribuição em meu trabalho.

Agradeço também à todos os professores do departamento de matemática do Ibilce, em especial ao meu orientador do mestrado Prof. Dr. Antonio Aparecido Andrade e ao professor Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi, pelo incentivo, simpatia e acolhida desde o início.

Aos amigos da pós-graduação, pela agradável convivência, em especial aos amigos Canetas, Ruikson, Rodiak, Rubens e ao meu irmão Danilo, aonde estiveram presentes em todas as etapas da minha trajetória, desde os momentos de estudos, quanto aos de festas.

Aos meus amigos moradores da República Kurupi, Danilo, Léo, Gugu, e não moradores aonde tivemos uma excelente convivência, com muitas conversas, sempre muito produtivas.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Estudamos a dimensão de Hausdorff de certos conjuntos invariantes obtidos como repulsores de *aplicações com buraco*. Neste trabalho relacionamos a dimensão de Hausdorff do repulsor Λ com o volume do buraco H , em particular mostramos que a dimensão de Hausdorff de Λ pode ser tomada arbitrariamente próxima da dimensão do ambiente desde que o volume de H seja suficientemente pequeno. Como aplicação dos resultados, mostramos que a dimensão de Hausdorff dos repulsores de uma família desdobrando uma bifurcação de Hopf varia continuamente no parâmetro de bifurcação.

Palavras chave: Dimensão de Hausdorff, repulsores não-hiperbólicos, bifurcação de Hopf, aplicação com buracos.

Abstract

We study the Hausdorff dimension of certain invariant sets obtained as repeller of *maps with hole*. In this work we relate the Hausdorff dimension of the repeller Λ with the volume of the hole H , in particular one show that the Hausdorff dimension of Λ can be made arbitrarily close to the dimension of ambient provided that the volume of H is sufficiently small. As an application, we show that the Hausdorff dimension of repellers of the a family unfolding a Hof bifurcation varies continuously at the bifurcation parameter.

Key words: Hausdorff dimension, non-hyperbolic repellers, Hopf bifurcation, map with holes.

Lista de Figuras

1.1	Gráfico da medida de Hausdorff α —dimensional	19
1.2	Aplicação suave por partes com buracos	21
1.3	O repulsor de uma aplicação suave por partes com buracos.	22
1.4	Gráfico de $\Phi(\mu, ., z)$	28
1.5	Bifurcação de Hopf	29
3.1	Vizinhança de p_μ	53

Sumário

Introdução	13
1 Definições e Resultados	18
1.1 Preliminares	18
1.2 Modelo Abstrato	20
1.3 Bifurcação de Hopf	25
1.4 Difeomorfismos derivados de Anosov	26
2 Prova dos Teoremas 1 e 2	33
2.1 Análise Combinatória sobre a Região Não-Hiperbólica	33
2.2 Prova do Teorema 1	39
2.3 Aplicações Expansoras	43
2.4 Prova do Teorema 2	45
3 Prova do Teorema 3	47
3.1 Partição de Markov	47
3.2 Construção de uma aplicação com buraco	50
3.3 Prova do Teorema 3	51
Índice Remissivo	59

Introdução

Conjuntos invariantes de uma aplicação carregam grande parte das informações de seu comportamento dinâmico, principalmente os *conjuntos limites*, isto é, os conjuntos de pontos de acumulação futuro e passado de uma aplicação. Muitos desses conjuntos possuem estrutura fractal. Invariantes geométricos como dimensão de Hausdorff, capacidade limite, espessura e dimensão dinâmica fornecem informações importantes sobre a estrutura desses conjuntos. Veja [12], [20] e [21], por exemplo.

Entretanto, a maioria dos métodos para estimar esses invariantes requerem *auto-similaridade* do conjunto (pequenas partes do conjunto se parecem muito com o todo). A auto-similaridade pode ser obtida no contexto de sistemas uniformemente hiperbólicos e de sistemas conformes. OS sistemas estudados aqui não possui tal propriedade.

Outra questão de grande interesse é quando a dimensão de Hausdorff e a capacidade limite variam continuamente com a aplicação, ou ainda com o parâmetro em uma família de aplicações.

Dysman [11] estudou repulsores de certas aplicações não-uniformemente expansoras com buracos, também estudado por Horita e Viana [15]. A grosso modo, as aplicações são definidas em um subconjunto de uma variedade, coberto por um número finito de domínios compactos com interiores disjuntos dois a dois, cujos complementos desses domínios são chamados buracos. Ela mostrou que a capacidade limite é menor que a dimensão do ambiente generalizando o resultado em [16] sobre a dimensão de Hausdorff. Como aplicação desses resultados, Horita e Viana [16] apresentam famílias a um parâmetro de difeomorfismos (g_μ) em $\mathbb{T}^3$ começando

em difeomorfismo de Anosov e desdobrando uma bifurcação de Hopf em μ_* . Para valores $\mu > \mu_*$, os repulsores obtidos pelos difeomorfismos g_μ têm dimensão de Hausdorff e capacidade limite estritamente menores que 3.

Além disso, Dysman [11] prova que tanto a capacidade limite quanto a dimensão de Hausdorff dos repulsores das aplicações não-uniformemente expansoras com buracos variam continuamente quando o volume do buraco tende a zero, assumindo hipóteses uniformes sobre o decaimento do volume dos *cilindros ruins*. Essas hipóteses assumidas em [11] não são satisfeitas pelas famílias de derivados de Anosov em [16].

Neste trabalho mostramos que a dimensão de Hausdorff e a capacidade limite dos repulsores nas famílias em [16] tendem a 3 quando o parâmetro converge para o parâmetro de bifurcação. Para esta demonstração fornecemos resultados sobre cotas inferiores para repulsores de um subconjunto de aplicações não-uniformemente expansoras com buracos presentes em [11] e [15].

Muitos autores têm estudado os problemas abordados aqui. Por exemplo, em [17], prova-se que a dimensão de Hausdorff e capacidade limite da ferrudadura depende continuamente da dinâmica e são estritamente menores do que 2, se a dinâmica é pelo menos C^2 .

Um resultado clássico mostrado por Bowen em [3] é que repulsores uniformemente hiperbólicos que não coincidem com a variedade toda, têm medida de Lebesgue zero, se a aplicação é C^2 . É também conhecido que sua dimensão de Hausdorff é menor do que a dimensão da variedade ambiente. Para a dimensão de Hausdorff de conjuntos hiperbólicos e de seus conjuntos estáveis e instáveis, ver Shafikov-Wolf em [22], aonde encontra-se um limite superior para a dimensão de Hausdorff. Por outro lado nosso repulsor Λ nunca será hiperbólico, devido à presença de um círculo invariante criado na variedade centro-instável pela bifurcação de Hopf, pois difeomorfismos em conjuntos hiperbólicos são expansivos, e não existem homeomorfismos expansivos sobre o círculo, ver Walter ([24], Teorema 5.27).

Para resolver nosso problema inicial sobre a convergência dos repulsores obtidos pelos difeomorfismos derivados de Anosov no parâmetro da bifurcação, primeira-

mente vamos lidar com um modelo abstrato, que modela o comportamento deste difeomorfismo ao longo da direção central (não-hiperbólica): seja M uma variedade de dimensão d . Suponha que f é uma aplicação definida sobre domínios $R_i \subset M$, onde $i = 0, 1, \dots, m$, com interiores dois a dois disjuntos, cuja união não é o conjunto todo M . O subconjunto de M onde f não está definido, é chamado de buraco H_f . O objeto principal de interesse é o conjunto Λ_f de pontos de M tais que a órbita futura destes pontos nunca cai no buraco, este conjunto é chamado de repulsor, ou seja, o repulsor é o conjunto maximal, onde a dinâmica está sempre definida. Em [15] Horita-Viana mostraram que a dimensão de Hausdorff desse repulsor é estritamente menor do que d , para isso, eles exigiram que o volume dos *cilindros ruins* decaísse exponencialmente de modo uniforme (Teorema 2.11). Porém neste trabalho, nós não exigiremos esta hipótese, e sim outras hipóteses definidas que explicaremos na Seção 1.2. Assim, primeiramente mostraremos que nossas hipóteses implicam na hipótese de [15] garantindo que a dimensão de Hausdorff do nosso repulsor também é estritamente menor do que d . O objetivo dessas hipóteses é podermos verificar que a dimensão de Hausdorff do repulsor converge para d quando a medida de Lebesgue do buraco vai para zero.

As conclusões acima permitem-nos aplicarmos para o nosso repulsor obtidos dos difeomorfismos de Anosov, verificando as hipóteses do modelo abstrato, de modo que, quando a aplicação se aproxima da bifurcação, o volume do buraco se aproxima de zero.

Nosso trabalho pode ser visto como uma extensão dos resultados de Diaz-Viana que se encontram [10], onde eles estudaram os atratores de aplicações obtidas de difeomorfismos de Anosov sobre $\mathbb{T}^2$. Eles exibiram um conjunto aberto de famílias $(f_t)_t$ de difeomorfismos de Anosov, desdobrando uma bifurcação do tipo sela-nó, tal que a dimensão de Hausdorff do atrator varia descontinuamente no parâmetro da bifurcação. Em contraste, eles também exibiram uma outra família de difeomorfismos do $\mathbb{T}^2$, com uma bifurcação mais degenerada, de modo que a dimensão de Hausdorff varia continuamente sobre o parâmetro. Sua situação é mais simples do que a nossa, pois o problema pode ser reduzido a dimensão 1, projetando ao longo de

uma folheação invariante, e também pelo fato de seus atratores serem hiperbólicos após a bifurcação.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo introduzimos alguns conceitos básicos que compõem a Teoria de Fractais, como Dimensão de Hausdorff e Capacidade Limite, e algumas de suas propriedades. Definiremos o conceito de aplicação com buraco e apresentaremos as hipóteses necessárias para o nosso sistema, enunciando o Teorema 1 e o Teorema 2. Além disso, apresentaremos o conceito de bifurcação de Hopf, obtida pela nossa família de difeomorfismos $(g_\mu)_\mu$ derivado de um difeomorfismo de Anosov G . Por fim definiremos quem é a nossa família de difeomorfismo desdobrando uma bifurcação de Hopf, enunciando o Teorema 3.

No segundo capítulo faremos a prova dos 2 primeiros teoremas. Para a prova dos dois teoremas, precisaremos definir alguns novos conceitos como os n -cilindros que formam uma cobertura para o nosso repulsor. Além disso, definiremos um conjunto cujo os pontos pertencentes a estes cilindros demoram muito tempo para ter expansão. Para a prova do Teorema 1 necessitaremos de uma análise combinatória sobre a região não hiperbólica, através de um determinado tipo de trajetória. Dessa forma, mostraremos que nosso modelo abstrato satisfaz à hipótese de decaimento exponencial dos volumes dos cilindros ruins, exigida em [15], provando o Teorema 1. Para a prova do Teorema 2, definiremos o conceito de aplicação expansora F , através da nossa aplicação com buraco f . Observaremos que a construção de nossa aplicação expansora F , garante que o repulsor Λ_F está contido no repulsor de Λ_f , por outro lado o buraco de H_F não está contido no buraco de H_f . Usaremos o Teorema 3 em [11], para a prova do Teorema 2.

No terceiro capítulo, apresentaremos o conceito de Partição de Markov, verificando que a família g_μ apresentada na Seção 1.4 possui uma Partição de Markov. Para a prova do Teorema 3, construiremos uma nova família de difeomorfismo $(f_\mu)_\mu$, projetando a dinâmica da família inicial $(g_\mu)_\mu$ na direção central ao longo da folheação estável. Assim, verificaremos que a nossa nova família $(f_\mu)_\mu$ satisfaz as hipóteses de aplicação com buraco e as hipóteses de expansão não-uniforme. Dessa

forma, poderemos aplicar os Teoremas 1 e 2 para os repulsores gerados por essa nova família. Usando o fato da holonomia das folheações estáveis serem $C^{1+\delta}$, concluímos a prova do Teorema 3.

Capítulo 1

Definições e Resultados

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos básicos que compõem a Teoria de Fractais, como Dimensão de Hausdorff e Capacidade Limite. Para maiores detalhes sobre essa teoria, ver as referências Falconer [12], Palis-Takens [20] e Pesin [21]. Além disso, introduzimos os conceitos de aplicação com buraco, de hiperbolicidade não-uniforme e difeomorfismos derivado de Anosov. Por fim, apresentamos os principais resultados deste trabalho.

1.1 Preliminares

Definição 1.1 *Dado $\alpha \geq 0$, define-se $m^\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$, com $n \in \mathbb{N}^*$, como o seguinte limite*

$$m^\alpha(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_\delta^\alpha(X),$$

sendo

$$m_\delta^\alpha(X) = \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^\alpha : \mathcal{U} \text{ é uma cobertura aberta de } X \right. \\ \left. \text{com } \text{diam } U \leq \delta, \text{ para todo } U \in \mathcal{U} \right\}, \quad (1.1)$$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ conjunto das partes do $\mathbb{R}^n$ e $X \subset \mathbb{R}^n$. Denominamos $m^\alpha(X)$ a **medida de Hausdorff α -dimensional** de X .

Observe que a definição de $m_\delta^\alpha(X)$ implica que $m_\delta^\alpha(X)$ cresce quando δ decresce, ou seja, $m_\delta^\alpha(X)$ é monótona com relação a δ , assim o limite converge ou é infinito.

Observamos para $\delta < 1$ que vale a propriedade de monotonicidade em relação a α , ou seja, a função que associa $\alpha \mapsto m^\alpha(X)$ é não crescente. Além disso, se $m^\alpha(X) < \infty$, e $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, então $m^{\alpha_1}(X) = \infty$ e $m^{\alpha_2}(X) = 0$. Assim o gráfico de $m^\alpha(X)$ por α mostra que existe um único valor crítico de α em que $m^\alpha(X)$ dá um salto de ∞ para 0, ver Figura 1.1.

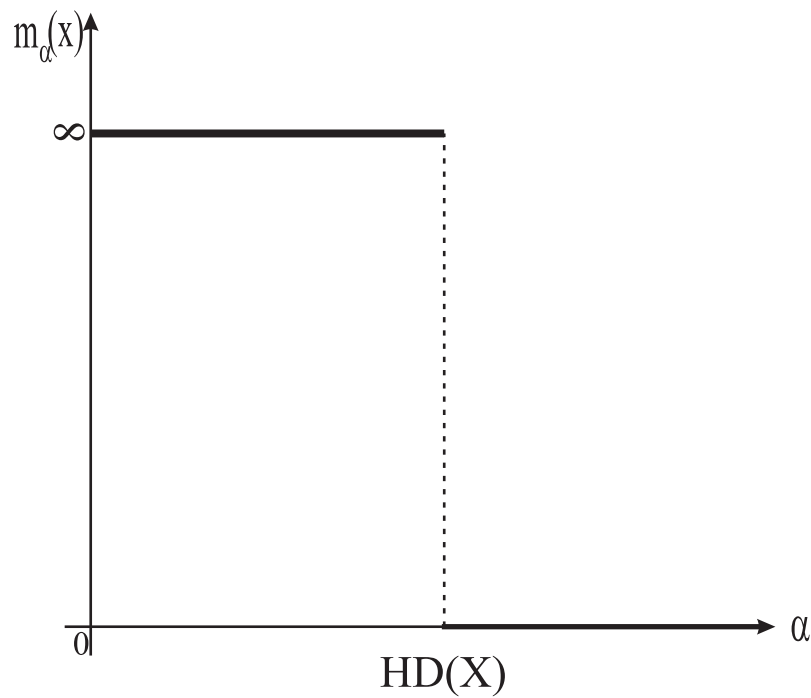


Figura 1.1: Gráfico da medida de Hausdorff α -dimensional

E este único valor será denotado por $HD(X)$, chamado **dimensão de Hausdorff de X**, tal que, $m^\alpha(X) = \infty$ se $\alpha < HD(X)$, e $m^\alpha(X) = 0$ se $\alpha > HD(X)$. Assim,

$$HD(X) = \inf\{\alpha \geq 0 : m^\alpha(X) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : m^\alpha(X) = \infty\}$$

Apresentamos algumas propriedades para Dimensão de Hausdorff, veja ([12], capítulo 2). Suponha que $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, então:

(P1) Se $X \subset Y$, então $HD(X) \leq HD(Y)$;

(P2) Se X é enumerável, então $HD(X) = 0$;

(P3) Se $X_1, \dots, X_n$ é uma sequência enumerável de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ então
 $HD\left(\bigcup_{i=1}^n X_i\right) = \sup_{1 \leq i \leq n} \{HD(X_i)\};$

(P4) Se X é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, então $HD(X) = n$;

(P5) Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função Lipschitz, então $HD(f(X)) \leq HD(X)$;

(P6) Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função bi-Lipschitz, então $HD(f(X)) = HD(X)$.

Proposição 1.2 ([12], Proposição 7.2) *Se $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ são conjuntos de Borel, então*

$$HD(X \times Y) \geq HD(X) + HD(Y) \quad (1.2)$$

Definição 1.3 *Definimos a **capacidade limite** de um subconjunto X do $\mathbb{R}^n$ por:*

$$Cap(X) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(X, \epsilon)}{|\log \epsilon|},$$

onde $n(X, \epsilon)$ é o menor número de ϵ -bolas necessárias para cobrir X .

Com a definição anterior, em ([12], capítulo 3) verifica-se que a capacidade limite é uma estimativa superior para a dimensão de Hausdorff, ou seja, para cada $X \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$HD(X) \leq Cap(X). \quad (1.3)$$

1.2 Modelo Abstrato

Vamos descrever um modelo abstrato para o qual nossos resultados se aplicam.

Considere $f : M \rightarrow M$ uma aplicação sobre uma variedade Riemanniana compacta M de dimensão d , com $d \geq 1$ e $R_0, R_1, \dots, R_m$ domínios com diâmetro interno finito em M , cujos interiores são dois a dois disjuntos ($int R_i \cap int R_j = \emptyset$, $i \neq j$) e cuas fronteiras $\partial R_0, \partial R_1, \dots, \partial R_m$ tenham capacidade limite menor do que d .

O termo domínio, significa um subconjunto compacto e conexo por caminhos. O diâmetro interno de um subconjunto conexo por caminhos R de M é o supremo das

distâncias internas de quaisquer dois pontos em R , onde a distância interna entre dois pontos é o ínfimo de todos os comprimentos de curvas C^1 conectando os dois pontos. Assim, a condição que os domínios R_i têm diâmetro interno finito, significa que existe um $L > 0$, tal que, quaisquer dois pontos em R_i podem ser conectados por uma curva C^1 em R_i com comprimento menor do que L .

Definição 1.4 *Uma aplicação com buraco é uma aplicação $f : R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m \rightarrow M$, tal que, para cada $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ a restrição de f a R_i é um difeomorfismo $C^{1+\epsilon}$ com ($\epsilon > 0$), sobre algum domínio W_i satisfazendo as seguintes propriedades :*

- (a) $W_i \supset R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m$;
- (b) a diferença $H_i = W_i \setminus (R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m)$ tem interior não vazio .

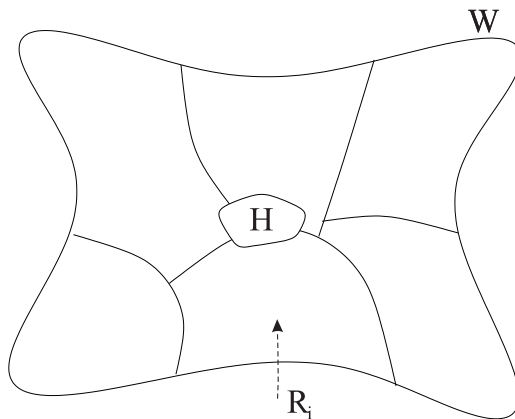


Figura 1.2: Aplicação suave por partes com buracos

A suavidade exigida na definição anterior, significa que $f|_{R_i}$ é um difeomorfismo C^1 , no sentido de Whitney, com o Jacobiano $\det Df$ sendo ϵ -Hölder contínua. A Figura (1.2) descreve um exemplo onde $H_i = H$ e $W_i = W$ para todo i .

Observação 1.5 *A condição que W_i contém $R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m$ e H_i tem interior não-vazio para cada $i = 0, 1, \dots, m$ é muito forte. Mais geralmente, podemos supor que W_i contém $\bigcup_{j \in J(i)} R_j$ para algum subconjunto $J(i)$ de $\{0, 1, \dots, m\}$. Além disso,*

para cada i , existe $l \geq 0$ tal que $f^l(R_i)$ contém algum W_k , cujo $H_k = W_k \setminus \bigcup_{j \in J(k)} R_j$ tem interior não vazio, ou seja, as iteradas de R_i eventualmente caem em algum buraco.

Definição 1.6 *Seja f uma aplicação com buraco:*

- (a) Definimos o **buraco de f** como sendo o conjunto $H_f = M \setminus (R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m)$.
- (b) Definimos o **repulsor de f** por Λ_f , como sendo o conjunto dos pontos de M , cuja órbita futura nunca entra em H_f , isto é:

$$\Lambda_f = \{x \in M : f^n(x) \in R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m, \text{ para todo } n \geq 0\},$$

ver Figura (1.3).

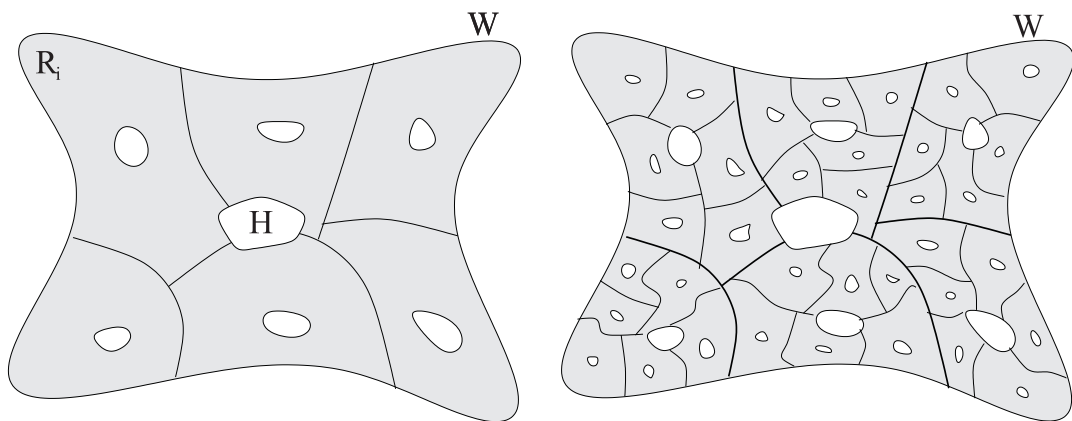


Figura 1.3: O repulsor de uma aplicação suave por partes com buracos.

Observe que se definirmos o **repulsor de tempo n** , por

$$\Lambda_n = \{x \in M : f^j(x) \in R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m, \text{ para todo } j = 0, 1, \dots, n\},$$

obtemos $\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$.

Definição 1.7 *Sejam V, W espaços vetoriais normados e $A : V \rightarrow W$ uma transformação linear invertível. Definimos a norma e a co-norma de A respectivamente por*

$$\|A\| = \sup\{\|Av\| : \|v\| = 1, v \in V\}$$

e

$$m(A) = \inf\{\|Av\| : \|v\| = 1, v \in V\}.$$

Pela definição anterior, observamos que $\|A^{-1}\| = m(A)^{-1}$ e que $m(A^{-1}) = \|A\|^{-1}$.

Usaremos as seguintes notações no decorrer do nosso trabalho:

- (i) $Leb(H_f) = \lambda$, onde Leb é a notação para medida de Lebesgue.
- (ii) $|\det Df(x)| = \text{Jac} f(x)$.

Seja f uma aplicação com buraco H_f . Suponha que $Leb(H_f) = \lambda > 0$, $f^{-1}(R_0) \subset R_0$. e $Leb(R_0) > 2\lambda$.

Faremos algumas considerações sobre a aplicação f , de modo que f seja uniformemente expansora em todo domínio, exceto possivelmente em um dos R_i , digamos R_0 , com Jacobiano limitado em todo domínio, e f esteja expandindo o volume fora de H_f . Assumiremos,

(H1) $\|(Df(x))^{-1}\|^{-1} \geq \sigma$, para todo $x \in R_1 \cup \dots \cup R_m$, com $\sigma > 3$;

(H2) $\log \text{Jac} f(x) \geq K_1 \lambda$ para todo $x \in R_0$, com $1 < K_1 < 2$.

Por **(H2)** temos que o $\text{Jac} f^{-1}(x) \leq e^{-K_1 \lambda}$ para todo $x \in R_0$, conseqüentemente

$$\text{Jac} f^{-j}(x) \leq e^{-(K_1 \lambda)j}$$

para todo $x \in R_0$. Logo, pela fórmula da mudança de variáveis para conjuntos mensuráveis, temos que

$$Leb(f^{-j}(R_0)) = \int_{R_0} \text{Jac} f^{-j}(x) dx \leq e^{-(K_1 \lambda)j} Leb(R_0)$$

ou seja,

$$Leb(f^{-j}(R_0)) \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Portanto, dado $\lambda = Leb(H_f) > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Leb(f^{-n}(R_0)) < \lambda$. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ dependendo de λ , onde $k_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}\}$, tal que $Leb(f^{-k_0-1}(R_0)) < \lambda$.

Dessa forma, definimos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= f^{-k_0-1}(R_0) \\ V &= f^{-k_0}(R_0) \\ V_j &= f^j(V), \text{ para todo } j = 1, \dots, k_0 \\ V_0 &= V \\ V_{-1} &= \tilde{V}.\end{aligned}$$

Consideraremos as seguintes hipóteses:

(H3) $\log \|(Df(x))^{-1}\|^{-1} \geq -\lambda + \text{Leb}(V_j) \geq 0$, para todo $x \in V_j \setminus V_{j-1}$, com $j = 0, 1, 2, \dots, k_0$;

(H4) $\log \|(Df(x))^{-1}\|^{-1} \geq -K_2\lambda$ para todo $x \in \tilde{V}$, com $0 < K_2 < 1$;

A hipótese (H4), diz que a aplicação f pode contrair em algumas direções em $\tilde{V}$.

(H5) $\text{Jac}f(x) \leq 1 - K_3\lambda + K_4\text{Leb}(V_j)$, para todo $x \in V_j \setminus V_{j-1}$, com $j = 0, 1, 2, \dots, k_0$ e $1 < K_3 < K_4$.

(H6) a imagem de um domínio intersecta um número finito de domínios, denotamos por η o número de interseções, de modo que $\eta < K_5\sigma^d$, com $K_5 > 1$.

Como nossas estimativas envolvem um grande número de constantes, ao invés de mantermos um controle sobre todas estas constantes, optamos por utilizar valores explícitos. No entanto estes valores são apenas técnicos, não significam ser os melhores. Consideramos então $K_1 = 5/4$, $K_2 = 1/10$, $K_3 = 2$, $K_4 = 3$ e $K_5 = 1000$.

Teorema 1 *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação com buraco satisfazendo (H1) – (H6), então $HD(\Lambda) < d$.*

Teorema 2 *Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação com buraco satisfazendo (H1) – (H6) com $\text{Leb}(H_f) < \delta$, então $HD(\Lambda_f) \geq d - \epsilon$.*

Como $HD(X) \leq \text{Cap}(X)$ por 1.3, segue imediatamente

Corolário 1 *Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação com buraco satisfazendo (H1) – (H6) com $\text{Leb}(H_f) < \delta$ então $\text{Cap}(\Lambda) \geq d - \epsilon$.*

1.3 Bifurcação de Hopf

Para completitude da apresentação, recordaremos alguns conceitos apresentados em ([16], Seção 2.3). Dessa forma, no decorrer do trabalho utilizaremos as mesmas notações.

Seja $\varphi_\mu : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de difeomorfismos de classe C^1 , onde U é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$. Assumimos existir uma curva de pontos fixos p_μ (ou periódicos) para cada φ_μ e existir um parâmetro μ_* tal que:

- (a) $D\varphi_\mu(p_\mu)$ tem dois autovalores complexos distintos, $\lambda(\mu)$ e $\overline{\lambda(\mu)}$, para todo μ próximo de μ_* ;
- (b) $|\lambda(\mu_*)| = 1$, mas $\lambda(\mu_*)^k \neq 1$ para $k = 1, 2, 3$ e 4 ;
- (c) A derivada da norma $|\lambda(\mu)|$ é não nula em $\mu = \mu_*$.

Dependendo se a derivada é negativa ou positiva, o ponto fixo p_μ muda de um repulsor para um atrator ou de um atrator para um repulsor, quando o parâmetro passa por μ_* .

Assumindo que a família φ_μ é de classe C^5 , por [19] esta bifurcação admite a seguinte forma normal em coordenadas polares,

$$\varphi_\mu(\rho, \theta) = F_\mu(\rho, \theta) + O(\rho^5),$$

com

$$F_\mu(\rho, \theta) = (a(\mu)\rho + b_1(\mu)\rho^3, \theta + \phi(\mu) + b_2(\mu)\rho^2), \quad (1.4)$$

onde $a(\mu)$ e $\phi(\mu)$ são respectivamente a norma e o argumento do autovalor $\lambda(\mu)$. Além disso, assumimos também que

- (d) o coeficiente $b_1(\mu)$ é não nulo em $\mu = \mu_*$.

Então dizemos que a família $(\varphi_\mu)_\mu$ desdobra uma bifurcação de Hopf genérica no parâmetro $\mu = \mu_*$. Uma característica importante desta bifurcação é a formação

de um círculo $C(\varphi_\mu)$, φ_μ -invariante, próximo ao círculo F_μ -invariante

$$C(F_\mu) = \{(\rho, \theta) : b_1(\mu)\rho^2 = 1 - a(\mu)\}. \quad (1.5)$$

Estes círculos invariantes são definidos para $\mu > \mu_*$ ou $\mu < \mu_*$ (próximo a μ_*), dependendo dos sinais da derivada $da/d\mu$ e de $b_1(\mu)$ em $\mu = \mu_*$.

Agora, considere $(\psi_\mu)_\mu$ uma família de difeomorfismo sobre alguma variedade, admitindo uma família suave de pontos fixos p_μ (ou periódicos) e um parâmetro μ_* tal que:

- (i) para $\mu = \mu_*$ a derivada $D\psi_\mu(p_\mu)$ tem dois autovalores complexos conjugados com norma 1, e todos os outros autovalores estão todos dentro ou estão todos fora do círculo unitário;
- (ii) existe uma família suave N_μ , definida para todo μ próximo de μ_* , de variedades (centrais) ψ_μ -invariantes por p_u , de dimensão 2 e tangentes ao autoespaço associado ao par dos autovalores complexos de (i);
- (iii) a restrição $\varphi_\mu = \psi_\mu|_{N_\mu}$ desdobra uma bifurcação de Hopf genérica no parâmetro μ_* , no sentido das condições (a) a (d).

Consequentemente, dizemos também que $(\varphi_\mu)_\mu$ desdobra uma bifurcação de Hopf genérica no parâmetro μ_* . Note que os pontos fixos mudam de um atrator/repulsor para a sela de codimensão 2, ou o contrário, quando μ passa pelo parâmetro da bifurcação. De acordo com as observações anteriores, isto acontece em um círculo invariante $C(\psi_\mu) = C(\varphi_\mu)$, formado dentro da variedade central N_μ ou para $\mu > \mu_*$ ou para $\mu < \mu_*$.

1.4 Difeomorfismos derivados de Anosov

Definição 1.8 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo sobre uma variedade M . Dizemos que um subconjunto compacto e invariante $\Lambda \subseteq M$ é hiperbólico para f se para cada $x \in \Lambda$, existem subespaços $E^s(x) \subset T_x M$ e $E^u(x) \subset T_x M$ satisfazendo*

- (a) $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$;

- (b) $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ e $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$;
- (c) *Existem constantes $C > 0$ e $0 < \gamma < 1$ tais que*
- (i) $\|Df_x^n v_s\| \leq C\gamma^n \|v_s\| \quad \forall v \in E^s(x) \text{ e } n \geq 0$
- (ii) $\|Df_x^{-n} v_u\| \leq C\gamma^n \|v_u\| \quad \forall v \in E^u(x) \text{ e } n \geq 0$.

Definição 1.9 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Dizemos que f é um difeomorfismo de Anosov se M é um conjunto hiperbólico.*

Definição 1.10 *Seja M um espaço topológico e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Dizemos que f é transitivo se*

- (a) $\exists x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$ ou equivalente
- (b) *dados A e B abertos em M , $\exists n \geq 0$, tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.*

Proposição 1.11 ([18], Teorema C) *Seja $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ um difeomorfismo de Anosov, então f é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov linear de $\mathbb{T}^n$.*

Seja $M = \mathbb{T}^3$ o toro de dimensão 3. Consideramos um difeomorfismo de Anosov linear G sobre M , com um autovalor real $\gamma \in (0, 1)$ e dois autovalores complexos conjugados $\sigma e^{\pm i\alpha}$, com $\sigma > 3$. Assumimos $k\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ para $k = 1, 2, 3, 4$. Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) definidas próxima ao ponto fixo $(0, 0, 0)$, temos

$$G(\rho, \theta, z) = (\sigma\rho, \theta + \alpha, \lambda z).$$

Vamos obter de G uma família de difeomorfismos $\hat{g}_\mu$, com $\mu \in [-1, 1]$, desdobrando uma bifurcação de Hopf em $\mu = 0$. Para este objetivo, consideramos $\Phi(\mu, w, z)$ uma função real C^∞ , definida sobre o cubo unitário $[-1, 1]^3$, tal que, para algum $C_0 > 0$, e algum $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, satisfaz as seguintes condições:

- (C₁) $\Phi(\mu, 0, 0) = 1 - \mu \leq \Phi(\mu, w, z)$ para todo $w \geq 0$;
- (C₂) $\Phi(\mu, w, z) = \sigma$ quando ou $w \geq \delta_0$ ou $|z| \geq \delta_0$;
- (C₃) $0 < \partial_w \Phi(\mu, w, z) \leq C_0/\delta_0$, quando $0 \leq w < \delta_0$ e $|z| < \delta_0$;

(C₄) Existem $\sigma_1 \in (0, \sigma)$ e $\delta_1 \in (0, \delta_0)$, tal que $\Phi(\mu, w, z) > \sigma_1$ para todo $w \geq \delta_1$ e $\partial_w \Phi(\mu, w, z) \geq \partial_w \Phi(\mu, 0, 0)$ para todo $w \in [0, \delta_1]$.

Ver Figura 1.4 para o gráfico da função Φ .

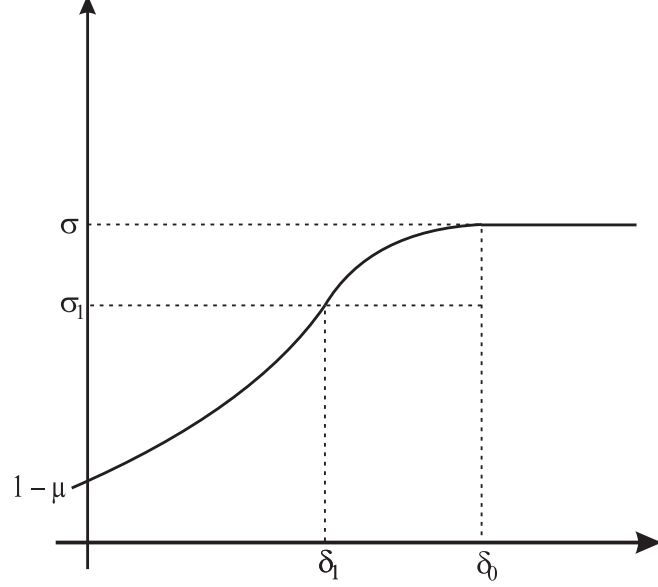


Figura 1.4: Gráfico de $\Phi(\mu, \cdot, z)$

Tomamos $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, de modo que o domínio

$$\{(\rho, \theta, z) : \rho^2 \leq \delta_0 \text{ e } |z| \leq \delta_0\},$$

esteja contido em uma pequena vizinhança $V \subset M$ da origem, tal que o fecho de V esteja contido no interior de algum retângulo de uma partição de Markov S para G . Deformamos G dentro de V , obtendo uma família de difeomorfismos $\hat{g}_\mu$ a um parâmetro μ , coincidindo com G fora de V , e cuja restrição a V é dado em coordenadas cilíndricas por

$$\hat{g}_\mu(\rho, \theta, z) = (\Phi(\mu, \rho^2, z)\rho, \theta + \alpha, \lambda z). \quad (1.6)$$

Note que a origem é um ponto fixo de $\hat{g}_\mu$ para todo μ . Veremos que este ponto fixo passa por uma bifurcação do tipo Hopf em $\mu = 0$: para $\mu > 0$ o ponto fixo torna-se um atrator. Um modelo que temos em mente é descrito pela Figura 1.5

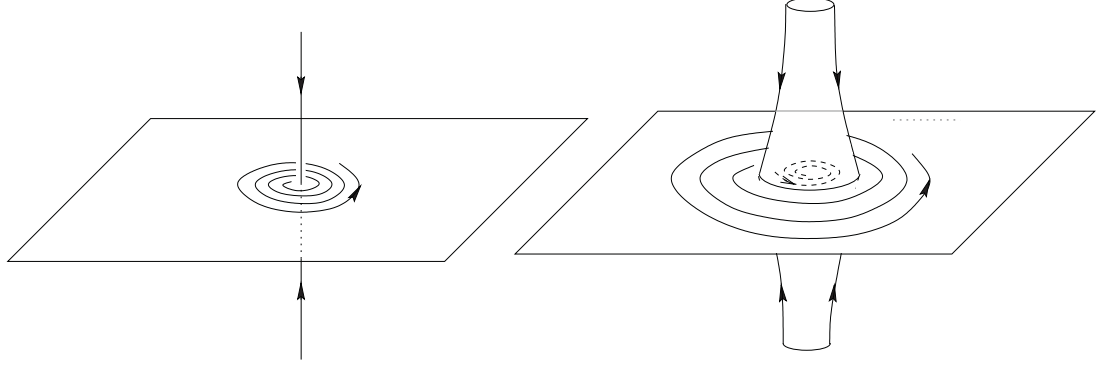


Figura 1.5: Bifurcação de Hopf

Além disso, para qualquer família de difeomorfismos $(g_\mu)_\mu$ próxima à família $(\hat{g}_\mu)_\mu$, existe uma única curva de pontos fixos p_μ próximos a origem, e estes pontos fixos também passam por uma bifurcação de Hopf, aonde o parâmetro μ_* da bifurcação de Hopf está próximo de zero e depende continuamente da família. A proximidade aqui será na topologia C^5 ou maior, ver Marsden-McMacken [19] e a Seção 1.3.

Proposição 1.12 ([16], Proposição 2.5) *A família de difeomorfismos $(\hat{g}_\mu)_\mu$ como em (1.6) desdobra uma bifurcação de Hopf, com $p_u = 0$, $\mu_* = 0$, $a(\mu) = 1 - u$, $b_1(\mu) > 0$ e $b_2(\mu) = 0$.*

Como por [19] o desdobramento de uma bifurcação de Hopf genérica é uma propriedade aberta no espaço de famílias de classe C^5 (o parâmetro μ_* depende da família), temos pela proposição anterior que qualquer família $(\hat{g}_\mu)_\mu$ de difeomorfismos numa C^5 -vizinhança de $(g_\mu)_\mu$, apresenta uma curva de pontos fixos $(p_\mu)_\mu$ e existe μ_* próximo de zero, tal que p_μ é uma sela hiperbólica de g_μ para $\mu < \mu_*$, e este ponto passa por uma bifurcação de Hopf genérica em $\mu = \mu_*$, tornando-se um atrator para $\mu > \mu_*$, permanecendo todo o tempo dentro de V .

A partir de agora, vamos analisar a dinâmica local de $f_\mu = g_\mu|_{\{z=0\}}$. Consideramos a vizinhança $V_1 = \{(\rho, \theta) : \rho^2 \leq \delta_1\}$ de $\rho_\mu = 0$ restrita a $\{z = 0\}$, onde $\delta_1 > 0$ é como na condição (C_4) dada no início da Seção 1.4. A seguinte proposição foi verificada por [16]:

Proposição 1.13 ([16], Proposição 2.6) Para μ próximo de zero, temos que

- (a) f_μ é expansora fora de $V_1 : \|Df_\mu^{-1}\|^{-1} \geq \sigma_1$;
- (b) $b_1(\mu)\rho^2 \leq 1/100$ para todo $(\rho, \theta) \in V_1$;
- (c) $\|Df_\mu^{-1} - DF_\mu^{-1}\| \leq b_1(\mu)\rho^2/10$ dentro de V_1 ;
- (d) $|\det Df_\mu - \det DF_\mu| \leq b_1(\mu)\rho^2/100$ dentro de V_1 .

Note que neste ambiente, o ponto fixo p_μ muda de uma sela (com duas direções expansoras) para um atrator, quando μ cresce após $\mu_* = 0$. Visto que $b_1(\mu) > 0$ e $da/d_\mu < 0$, o círculo invariante $C(g_\mu) = C(\varphi_\mu)$ está definido para $\mu > \mu_*$. A relação 1.5 diz que o $C(F_\mu)$ para a forma normal F_μ de $g_\mu = \hat{g}_\mu$ é o círculo de raio

$$\rho_0 = \left(\frac{\mu}{b_1(\mu)} \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Em geral, o círculo invariante $C(g_\mu)$ é descrito por

$$a(\mu)\rho + b_1(\mu)\rho^3 + O(\rho^5) = \rho.$$

Assumindo g_μ próximo a $\hat{g}_\mu$ e μ próximo ao parâmetro da bifurcação μ_* , o círculo está próximo a origem. Então o terceiro termo é insignificante relativo ao segundo, e assim concluímos que $C(g_\mu)$ está contido em uma coroa limitada pelos círculos de raio $\rho_1 < \rho_2$ com $\rho_i \approx ((1 - a(\mu)/b_1(\mu)))^{1/2}$ para $i = 1, 2$, onde $\approx$ significa igualdade até um fator que pode ser escolhido arbitrariamente próximo a 1 se g_μ está próximo a $\hat{g}_\mu$ e μ está próximo ao parâmetro da bifurcação. Além disso, $1 - a(\mu) \approx (\mu - \mu_*)$, pois $da/d_\mu \approx 1$. Assim,

$$\rho_i \approx \left(\frac{\mu - \mu_*}{b_1(\mu)} \right)^{1/2}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Observação 1.14 Até reparametrizarmos a família de difeomorfismos, nós vamos sempre supor que $\mu_* = 0$ e $a(\mu) = 1 - \mu$.

Os difeomorfismos g_μ são parcialmente hiperbólicos para cada μ próximo de zero: existe uma decomposição do fibrado tangente $TM = E_\mu^{ss} \oplus E_\mu^{cu}$, invariante sob a derivada Dg_μ , dominada e tal que E_μ^{ss} é uniformemente contratora. Como hiperbolicidade parcial é uma propriedade aberta, relativa à topologia C^1 , é suficiente

provar que $\hat{g}_\mu$ é parcialmente hiperbólico para qualquer μ suficientemente pequeno. Isto é feito na proposição abaixo, cuja prova encontra-se em [16].

Proposição 1.15 ([16], Proposição 2.1) *Fixamos $\epsilon > 0$ e assumimos δ_0 suficientemente pequeno, então existe uma decomposição do fibrado tangente $TM = E_\mu^{ss} \oplus E_\mu^{cu}$, invariante sob a derivada $D\hat{g}_\mu$, e existem constantes positivas K_s, K_c, K tais que*

- (a) E_μ^{cu} coincide com o (ρ, θ) -plano;
- (b) $\|D\hat{g}_\mu^n|_{E_\mu^{ss}}\| \leq K_s \lambda^n$ para todo $n \geq 1$ (contração uniforme);
- (c) $\|D\hat{g}_\mu^n|_{E_\mu^{cu}}\| \leq K_c(\sigma + \epsilon)^n$ para todo $n \geq 1$;
- (d) $\|D\hat{g}_\mu^{-n}|_{E_\mu^{cu}}\| \leq K(1 - \mu)^{-n}$ para todo $n \geq 1$;
- (e) $\|D\hat{g}_\mu^{-n}|_{E_\mu^{cu}}\| \|D\hat{g}_\mu^n|_{E_\mu^{ss}}\| < 1/2$ para algum $n \geq 1$ (dominação.).

Observação 1.16 *Como $\hat{g}_\mu$ coincide com G fora de V , ele expande o fibrado centro-instável E_μ^{cu} :*

$$\|(D\hat{g}_\mu(x)|_{E_\mu^{cu}(x)})^{-1}\| \leq \sigma^{-1} \text{ para todo } x \in M \setminus V.$$

É verdade também para qualquer g_μ próximo a $\hat{g}_\mu$, reduzindo $\sigma > 3$ bem pouco, se necessário.

Corolário 1.17 ([16], Corolário 2.4) *Existe $\delta > 0$, tal que para qualquer μ próximo de zero, os difeomorfismos g_μ admitem uma folheação $\mathcal{F}_\mu^{ss}$ de classe $C^{1+\delta}$ de codimensão 2, invariante por g_μ e cujo fibrado tangente está inteiramente contido no cone C_μ^{ss} . Consequentemente, as folhas de $\mathcal{F}_\mu^{ss}$ são uniformemente contratoras para g_μ .*

O principal resultado em [16] é:

Teorema 1.18 ([16], Teorema A) *Seja $(g_\mu)_\mu$ uma família de difeomorfismos em uma C^5 -vizinhança de $(\hat{g}_\mu)_\mu$. Para cada $\mu > \mu_*$, seja Λ_μ o complementar da bacia de atração $W^s(p_\mu)$ do ponto fixo atrator p_μ . Então a capacidade limite deste repulsor satisfaz*

$$c(\Lambda_\mu) < 3, \text{ para todo } \mu > \mu_*, \text{ próximo a } \mu_*.$$

Em particular, a dimensão de Hausdorff $HD(\Lambda_\mu) < 3$ para todo $\mu > \mu_*$ próximo a μ_* .

Teorema 3 *Seja $(g_\mu)_\mu$ uma família de difeomorfismos em uma C^5 -vizinhança de $(\hat{g}_\mu)_\mu$. Se $\mu \rightarrow \mu_*$ então $HD(\Lambda_\mu) \rightarrow 3$.*

O resultado abaixo é consequência do Teorema 3, do Teorema 1.18 e da desigualdade $HD(X) \leq Cap(X)$ e do Teorema do Confronto.

Corolário 2 *Seja $(g_\mu)_\mu$ uma família de difeomorfismos em uma C^5 -vizinhança de $(\hat{g}_\mu)_\mu$. Se $\mu \rightarrow \mu_*$ então $c(\Lambda_\mu) \rightarrow 3$.*

Capítulo 2

Prova dos Teoremas 1 e 2

Neste capítulo apresentamos as provas dos Teoremas 1 e 2. Para a prova do Teorema 1, introduziremos os conceitos de cilindros, de modo que estes conjuntos formam uma cobertura para o nosso repulsor Λ_f e de seus *cilindros ruins*, ou seja, são aqueles cujos os pontos pertencentes a eles demoram muito tempo para ter uma expansão, assim usando o resultado de [15] concluimos o resultado. Para a prova do Teorema 2, construímos uma aplicação induzida da f , c -expansora, e usamos um resultado visto em [11] para concluir a prova do Teorema 2.

2.1 Análise Combinatória sobre a Região Não-Hiperbólica

Definição 2.1 *Dado um difeomorfismo local f , denotamos por $f^{(-1)}$ qualquer ramo inverso de f . Assim, dado $n \geq 1$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\{0, 1, \dots, m\}$, definimos o n -cilindro para f como sendo o conjunto*

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = R_{\alpha_1} \cap f^{-1}(R_{\alpha_2}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(R_{\alpha_n}),$$

onde os R_i são os domínios visto na Definição 1.4.

Observação 2.2 *Um n -cilindro, consiste de todos seus pontos até a sua $(n - 1)$ -ésima iterada permanecendo em seu domínio $R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_m$. Logo os n -*

cilindros formam uma cobertura disjunta para o repulsor Λ_f , para cada $n \geq 1$.

Definição 2.3 *Seja f uma aplicação com buraco. Definimos a **média da menor expansão** pela função*

$$\phi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \inf_{x \in C_j} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os x em $C_j = C(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$.

Note que, se $\phi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq c_0 > 0$ então a derivada Df^n expande cada vetor. De fato, como $\phi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq c_0$ então $\prod_{j=1}^n \|Df^{-1}(f^j(x))\| \leq e^{-c_0 n}$. Dessa forma, usando a regra da cadeia e propriedades de norma, obtemos

$$\|Df^{-n}(f^n(x))\| \leq \prod_{j=1}^n \|Df^{-1}(f^j(x))\| \leq e^{-c_0 n},$$

para todo $x \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Dado $c_0 > 0$ e $Leb(H_f) = \lambda > 0$.

Seja f uma aplicação com buraco satisfazendo as hipóteses $(H1) - (H6)$. Vamos agora definir dois tipos de conjuntos, o primeiro conjunto significa que os pontos pertencentes a ele, demoram muito tempo para ter uma expansão, já o segundo conjunto, significa que os pontos pertencentes a ele demoram um certo tempo finito n para ter expansão.

(1) $B_n(c_0\lambda)$ o conjunto dos pontos que pertence a algum cilindro $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, tal que $\phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \leq c_0\lambda$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, ou seja,

$$B_n(c_0\lambda) = \left\{ x \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n); \phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \leq c_0\lambda \right. \\ \left. \text{para cada } j \in \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (2.1)$$

(2) $S_0(c_0\lambda)$ o conjunto dos pontos que pertence a algum cilindro $C(\alpha_1)$, tal que $\phi_1(\alpha_1) > c_0\lambda$ e para $n \geq 1$, $S_n(c_0\lambda) = B_n(c_0\lambda) \setminus (B_{n+1}(c_0\lambda) \cup f^{-n}(H_f))$, ou seja

$$S_0(c_0\lambda) = \{x \in C(\alpha_1); \phi_1(\alpha_1) > c_0\lambda\} \quad (2.2)$$

e

$$S_n(c_0\lambda) = \left\{ x \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}); \phi_{n+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) > c_0\lambda \right. \\ \left. \text{e } \phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \leq c_0\lambda \text{ para cada } j \in \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (2.3)$$

Observamos que o conjunto $B_n(c_0\lambda)$ é a união de n -cilindros e que $S_n(c_0\lambda)$ é a união de $(n+1)$ -cilindros para $n \geq 0$. Além disso, os conjuntos $S_n(c_0\lambda)$ são disjuntos para $n \geq 0$.

Dados inteiros $n \geq 1$, $t \geq 1$ e k_j, l_j para $1 \leq j \leq t$, com

$$k_1 + l_1 + k_2 + l_2 + \dots + k_t + l_t = n,$$

definimos por $C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$ o conjunto de todos os n -cilindros C_n extendidos, que permanecem alternativamente, k_i iteradas fora de R_0 e l_i iteradas dentro de R_0 . Portanto, temos que $C_n = C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ pertence a $C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$, se e somente se, $\alpha_j > 0$, sempre que j pertence a um dos intervalos

$$[0, k_1), [k_1 + l_1, k_1 + l_1 + k_2), \dots, [k_1 + \dots + l_{t-1}, k_1 + \dots + l_{t-1} + k_t), \quad (2.4)$$

e $\alpha_j = 0$, para todo j no complementar destes intervalos. Aqui $k_1 \geq 0$ e $l_t \geq 0$, e todos os outros k_i e l_i são estritamente positivos.

Dado $0 \leq l \leq n$, denotamos por $C(n, l, t)$ a união de todos os n -cilindros extendidos $C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$, com $l_1 + l_2 + \dots + l_t = l$.

Usando a hipótese (H6) que a imagem de qualquer domínio intersecta no máximo η domínios, onde $\eta \leq K_5\sigma^d$, o resultado abaixo segue de [16]:

Lema 2.4 ([16], Lema 4.3) *Suponha que $\alpha_j \in \{0, 1, \dots, m\}$, para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Então para cada $n, l, t, k_1, l_1, \dots, k_t, l_t$ tem-se:*

(a) $\#C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t) \leq \eta^k$, onde $k = k_1 + k_2 + \dots + k_t = n - l$;

$$(b) \#C(n, l, t) \leq \binom{l}{t-1} \binom{n-l}{t-1} \eta^k.$$

Demonstração: (a) Note que cada cilindro $C_n = C(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ é unicamente determinado pela sequência α_j , e dado qualquer α_j , existem no máximo η valores

possíveis para α_{j+1} . Agora, no caso se $C_n \in C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$, então l símbolos α_j são iguais a zero, logo existem no máximo η^k sequências possíveis para os cilindros C_n . Portanto,

$$\#C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t) \leq \eta^k \text{ onde } k = k_1 + k_2 + \dots + k_t = n - l.$$

(b) Antes de começarmos a demonstração, recordamos o seguinte resultado. Dados inteiros positivos, $1 \leq t \leq s$, existem

$$\binom{s-1}{t-1}$$

modos de decompor s como a soma de t inteiros estritamente positivos.

Como $l_1 + l_2 + \dots + l_t = l$, com $l_i \geq 1$, para $i < t$, e $l_t \geq 0$, temos dois casos a considerar. Se $l_t > 0$, então existem

$$\binom{l-1}{t-1}$$

modos de decompor l como a soma de t inteiros positivos. Agora, no caso de $l_t = 0$, existem

$$\binom{l-1}{t-2}$$

modos de decompor l como a soma de $(t-1)$ inteiros positivos. Portanto, existem

$$\binom{l-1}{t-1} + \binom{l-1}{t-2} = \binom{l}{t-1}.$$

modos de decompor l .

De modo análogo, como $k_i \geq 1$, para $1 < i \leq t$ e $k_1 \geq 0$ existem

$$\binom{n-l}{t-1}$$

soluções para equação $k_1 + k_2 + \dots + k_t = n - l = k$.

Portanto o conjunto $C(n, l, t)$ é formado por no máximo

$$\binom{l}{t-1} \binom{n-l}{t-1}$$

conjuntos $C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$. Desta forma, junto com a parte **(a)** concluimos que

$$\#C(n, l, t) \leq \binom{l}{t-1} \binom{n-l}{t-1} \eta^k.$$

Lema 2.5 Para cada $k_1, l_1, \dots, k_t, l_t$ e $C_n \in C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$, temos □

$$\sum_{j=1}^n \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} \geq -\frac{9}{50}t \log \lambda - \frac{1}{10}\lambda l + (n-l) \log \sigma,$$

onde $\lambda = \text{Leb}(H_f)$.

Demonstração: Seja $x \in C_n$. Como $C_n \in C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$, temos que l_i é o número de iterados de uma órbita de x durante uma visita à R_0 para cada $i = 1, \dots, t$, e k_i é o número de iteradas de uma órbita de x durante uma visita fora de R_0 para cada $i = 1, \dots, t$. Sabendo que $l_1 + \dots + l_t = l$ e $k_1 + \dots + k_t = k = (n-l)$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} &= \\ &= \sum_{i=1}^t \left[\sum_{j=1}^{l_i} \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} + \sum_{j=1}^{k_i} \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Agora consideremos o seguinte subconjunto de R_0 :

Por (H2) sabemos que $\text{Leb}(f^{-j}(R_0)) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, então existe $q \in \mathbb{N}$ dependendo de λ tal que $\text{Leb}(f^{(-q-1)}(R_0)) < 2\lambda$, de modo que $\text{Leb}(f^{-q}(R_0)) \geq 2\lambda$. Seja $V_q = f^{-q}(R_0)$ e $V_j = f^j(V_q)$, $j = 1, \dots, q$ subconjuntos de R_0 .

Além disso, supomos que $\lambda = \text{Leb}(H_f)$ está suficientemente próximo de zero, de modo que

$$\frac{\text{Leb}(f(V_q))}{\text{Leb}(f^{q+1}(V_q))} = \frac{\text{Leb}(V_1)}{\text{Leb}(f(R_0))} \leq \lambda^{9/10}. \quad (2.5)$$

Escrevendo $R_0 = (R_0 \setminus V_q) \cup V_q$, então por (H3) e (H4)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{l_i} \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} &= \\
&= \sum_{j=1}^q \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} + \sum_{j=q+1}^{l_i} \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} \\
&\geq \sum_{j=1}^q (-\lambda + Leb(V_j)) - \frac{1}{10} \lambda (l_i - q) \\
&\geq \sum_{j=1}^q (-\lambda + Leb(V_j)) - \frac{1}{10} \lambda l_i
\end{aligned}$$

onde $V_j = f^j(V_q)$ quando $x \in \partial V_q$.

Por (H5), obtemos $\frac{Leb(V_{j+1})}{Leb(V_j)} \leq 1 - 2\lambda + 3Leb(V_j)$, então por (2.5)

$$1 = \frac{Leb(V_1)}{Leb(f(R_0))} \prod_{j=1}^q \frac{Leb(V_{j+1})}{Leb(V_j)} \leq \lambda^{9/10} \prod_{j=1}^q (1 - 2\lambda + 3Leb(V_j)). \quad (2.6)$$

Usando o fato elementar

$$\log(1 - a + b) \leq -\frac{9}{10}a + \frac{11}{10}b \text{ para } 0 < a, b \leq \frac{1}{10},$$

temos para λ suficientemente pequeno que

$$\log(1 - 2\lambda + 3Leb(V_j)) \leq -\frac{18}{10}\lambda + \frac{33}{10}Leb(V_j). \quad (2.7)$$

Como $Leb(V_q) \geq 2\lambda$, verifica-se que

$$-\lambda + Leb(V_j) \geq \frac{1}{5} \left(-\frac{18}{10}\lambda + \frac{33}{10}Leb(V_j) \right). \quad (2.8)$$

Portanto, por (2.6), (2.7) e (2.8)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^q (-\lambda + Leb(V_j)) &\geq \frac{1}{5} \sum_{j=1}^q \left(-\frac{18}{10}\lambda + \frac{33}{10}Leb(V_j) \right) \\
&\geq \frac{1}{5} \log \prod_{j=1}^q (1 - 2\lambda + 3Leb(V_j)) \geq \frac{1}{5} \log \lambda^{-9/10} = -\frac{9}{50} \log \lambda
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Lembrando que $\log \|Df^{-1}(x)\|^{-1} \geq \sigma$, para cada $x \notin R_0$ e que $k = (n-l)$, concluimos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \inf_{x \in C_n} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} &\geq \sum_{i=1}^t \left(-\frac{9}{50} \log \lambda - \frac{1}{10} \lambda l_i + K_i \log \sigma \right) \\
&\geq -\frac{9}{50} t \log \lambda - \frac{1}{10} \lambda l + (n-l) \log \sigma.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.6 ([16], Lema 4.6) Para cada $k_1, l_1, \dots, k_t, l_t$ e $C_n \in C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$, existem pontos $x_i \in f^{k_1+l_1+\dots+k_i}(C_n) \subset R_0$, tais que

$$Leb(C_n) \leq \sigma^{-d(n-l)} \prod_{i=1}^t \text{Jac} f^{l_i}(x_i)^{-1},$$

onde $3 < \sigma \leq \|Df^{-1}(x)\|^{-1}$, para todo $x \notin R_0$.

Demonstração: Seja $C_n = C(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{n-1}) \in C(k_1, l_1, \dots, k_t, l_t)$. Lembramos que $C_n = R_{\alpha_0} \cap f^{-1}(R_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f^{-j}(R_{\alpha_j}) \dots \cap f^{-(n-1)}(R_{\alpha_{n-1}})$, assim, se $\alpha_j > 0$, então $f^j(C_n)$ está contido em $R_1 \cup \dots \cup R_m$. Por (H1), sabemos que $\|Df^{-1}(x)\|^{-1} > \sigma$ para todo $x \in R_1 \cup \dots \cup R_m$, então $\text{Jac} f(x) > \sigma^d$. Isto acontece para $n-l$ valores de j , e para cada um destes valores temos

$$Leb(f^{j+1}(C_n)) \geq \sigma^d Leb(f^j(C_n)). \quad (2.10)$$

Agora considere $j = k_1 + l_1 + \dots + k_i$, para cada $1 \leq i \leq t$. Então $f^j(C_n)$ está contido em R_0 e permanece por lá l_i iteradas. Assim,

$$Leb(f^{k_1+l_1+\dots+k_i+l_i}(C_n)) \geq \text{Jac} f^{l_i}(x_i) Leb(f^{k_1+l_1+\dots+k_i}(C_n)) \quad (2.11)$$

para algum x_i com no enunciado. Usando o fato que $Leb(f^n(C_n)) \leq 1$ e as equações (2.10) e (2.11), concluimos o lema. $\square$

2.2 Prova do Teorema 1

Lembramos que $B_n(c_0\lambda)$, é o conjunto dos pontos que pertencem à algum cilindro $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, tal que

$$\phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \leq c_0\lambda \text{ para cada } j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.12)$$

Definimos o seguinte conjunto:

$$B_{\lambda,n,l,t} = B_n(c_0\lambda) \cap C(n, l, t), \quad (2.13)$$

que é conjunto formado pelos n -cilindros satisfazendo (2.12), com um determinado tipo de trajetória: t visitas ao domínio R_0 , permanecendo um total de l iteradas lá. Dessa forma, dividimos $B_n(c_0\lambda)$ como a união disjunta de todos os $B_{\lambda,n,l,t}$, sobre todos l e t .

Do Lema 2.5, temos

$$\sum_{j=1}^n \inf_{x \in C_j} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} \geq -\frac{9}{50}t \log \lambda - \frac{1}{10}\lambda l + (n-l) \log \sigma,$$

para cada $C_n \in C(n, l, t)$.

Por outro lado, da Definição 2.3 da média da menor expansão, como $C_n \in B_n(c_0\lambda)$ tem-se que

$$\sum_{j=1}^n \inf_{x \in C_j} \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} \leq c_0\lambda n.$$

Assim uma condição necessária para um cilindro $C_n \in C(n, l, t)$ estar em $B_{\lambda, n, l, t}$ é

$$-\frac{9}{50}t \log \lambda - \frac{1}{10}\lambda l + (n-l) \log \sigma \leq c_0\lambda n. \quad (2.14)$$

Fixamos $c_0 = \frac{1}{200}$.

Lema 2.7 *Se $C_n \in B_{\lambda, n, l, t}$, então*

$$(a) \quad \frac{n-l}{l} \leq \frac{1}{9} \frac{\lambda}{\log \sigma}$$

$$(b) \quad \frac{t}{l} \leq \frac{3}{4} \frac{\lambda}{(-\log \lambda)}.$$

Demonstração: Item (a). Consideramos $\text{Leb}(H_f) = \lambda$ suficientemente pequeno.

Como $-\frac{9}{50}t \log \lambda$ é maior do que zero, pela equação (2.14) temos

$$\begin{aligned} (n-l) \log \sigma &\leq c_0 n \lambda + \frac{1}{10} \lambda l \\ &= c_0(n-l) \lambda + c_0 l \lambda + \frac{1}{10} \lambda l \\ &= c_0(n-l) \lambda + \left(\frac{1}{10} + c_0 \right) l \lambda \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como $c_0 = 1/200$, segue da desigualdade acima

$$\begin{aligned} \frac{n-l}{l} &\leq \frac{(1/10 + c_0) \lambda}{\log \sigma - c_0 \lambda} \leq \frac{(1/10 + 2c_0) \lambda}{\log \sigma} \\ &\leq \frac{1}{9} \frac{\lambda}{\log \sigma} \quad (\leq 1), \end{aligned}$$

concluindo o item (a).

Agora para o item (b), como $\log \sigma > 0$ e $n > l$, a equação (2.14) implica que

$$-\frac{9}{50}t \log \lambda \leq c_0 n \lambda + \frac{1}{10} \lambda l. \quad (2.16)$$

Por (a) temos que $n \leq 2l$ e como $c_0 = 1/200$, segue que

$$\begin{aligned} -\frac{9}{50}t \log \lambda &\leq \left(\frac{1}{10} + 2c_0 \right) l \lambda \leq \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} \right) l \lambda \leq \\ &\leq \frac{27}{200} l \lambda. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{t}{l} \leq \frac{3}{4 - \log \lambda} \lambda. \quad (2.17)$$

□

Lema 2.8 ([16], Lema 4.6) *Dado $\tau > 0$, existem $l_0 \geq 1$ e $\kappa > 0$ tal que, para cada $l \geq l_0$ e $0 < \kappa \leq \kappa_0$,*

$$\log \binom{l}{t} \leq l(1 + \tau)\kappa \log \frac{1}{\kappa}, \text{ sempre que } 0 \leq t \leq \kappa l.$$

Proposição 2.9 *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação com buraco satisfazendo as hipóteses (H1) – (H6). Então existem $c_0 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $n_0(\lambda) \geq 1$, tal que para cada $0 < \lambda \leq \lambda_0$,*

$$\text{Leb}(B_n(c_0\lambda)) \leq e^{-c_1 n \lambda}, \forall n \geq n_0(\lambda). \quad (2.18)$$

Demonstração: Pelo item (b) do Lema 2.7, para considerarmos $t \leq \kappa l$, basta tomar

$$\kappa = \frac{3}{4} \frac{\lambda}{(-\log(\lambda))}.$$

Além disso, fixamos $\tau = 1/1000$, e assumimos λ suficientemente pequeno de modo que $\kappa \leq \kappa_0$ como no Lema 2.8.

Pelos Lemas 2.4 e 2.6, temos que

$$\log \sum_{C \in B_{\lambda, n, l, t}} Leb(C) \leq \log \binom{l}{t-1} \binom{n-l}{t-1} \left(\frac{\eta}{\sigma^d}\right)^{n-l} \prod_{i=1}^t \text{Jac} f^{l_i}(x_i)^{-1}. \quad (2.19)$$

Usando o Lema 2.8, a hipótese (H2) e a relação elementar

$$\binom{n}{k} \leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n,$$

obtemos

$$\log \sum_{C \in B_{\lambda, n, l, t}} Leb(C) \leq l(1+\tau)\kappa \log \frac{1}{\kappa} + (n-l) \log 2 + (n-l) \log \frac{\eta}{\sigma^d} - \frac{9}{5}l\lambda. \quad (2.20)$$

Usando o item (a) do Lema 2.7, temos que

$$\begin{aligned} (n-l) \log 2 + (n-l) \log \frac{\eta}{\sigma^d} &\leq (n-l) \log(2000) \leq 8(n-l) \\ &\leq \frac{8}{9} \frac{\lambda}{\log \sigma} l \leq \frac{8}{9} \lambda l \end{aligned} \quad (2.21)$$

A última desigualdade segue do fato que $\sigma > 3$.

Usando a desigualdade anterior na equação (2.20), obtemos

$$\log \sum_{C \in B_{\lambda, n, l, t}} Leb(C) \leq l(1+\tau)\kappa \log \frac{1}{\kappa} - \frac{41}{45}l\lambda. \quad (2.22)$$

Por outro lado, note que

$$\frac{1}{\lambda} \kappa \log \frac{1}{\kappa} = \frac{\log((-4/3) \log(\lambda))}{(-4/3) \log(\lambda)} - \frac{3}{4} \frac{\log(\lambda)}{(-\log(\lambda))} \quad (2.23)$$

converge para $3/4$ quando λ tende à zero. Portanto assumindo λ suficientemente pequeno, temos que $l(1+\tau)\kappa \log \frac{1}{\kappa}$ é menor do que $\frac{36}{45}l\lambda$. Para isto, basta considerar λ tal que $\frac{1}{\lambda} \kappa \log \frac{1}{\kappa} < \frac{36}{45(1+\tau)}$. Assim, segue que

$$\log \sum_{C \in B_{\lambda, n, l, t}} Leb(C) \leq -\frac{1}{9}l\lambda \leq -\frac{1}{18}n\lambda, \quad (2.24)$$

pois $n \leq 2l$ pelo Lema 2.7. Para completar a prova do teorema, nós precisamos realizar esta soma sobre todos l e t . Como $l \leq n$ e $t \leq \kappa l$, segue que $tl \leq \kappa n^2$, então

$$Leb(B_n(c_0\lambda)) \leq \kappa n^2 e^{-\frac{n\lambda}{18}} \leq e^{-\frac{n\lambda}{36}},$$

Para a última desigualdade da equação anterior, basta escolhermos um $n_0(\lambda)$ suficientemente grande, de modo que $\kappa n^2 \leq e^{\frac{n\lambda}{36}}$, para todo $n \geq n_0(\lambda)$. Assim, tomando $c_1 = 1/36$, obtemos

$$\text{Leb}(B_n(c_0\lambda)) \leq e^{-c_1 n\lambda}. \quad (2.25)$$

Observação 2.10 *Dado $c_0 > 0$, denotamos por $\mathfrak{L}_n(c_0\lambda)$ a união de todos os n -cilindros $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, tal que $\phi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq c_0\lambda$. Dessa forma, podemos observar que $B_n(c_0\lambda)$ (definido como (2.1)) está contido na união dos cilindros $C \in \mathfrak{L}_n(c_0\lambda)$.* $\square$

Teorema 2.11 ([15], Teorema 1) *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação com buraco, e Λ_f o repulsor de f . Se existem $c_0, c_1 > 0$ tais que $\sum_{C \in \mathfrak{L}_n(c_0)} \text{Leb}(C) \leq e^{-c_1 n}$ para cada n suficientemente grande, então*

$$HD(\Lambda_f) < d.$$

Demonstração: (Teorema 1) Pela Proposição (2.9) existem $c_0, c_1 > 0$, tal que $\text{Leb}(B_n(c_0\lambda)) \leq e^{-c_1 n\lambda}$, e como pela Observação (2.10) $\text{Leb}(B_n(c_0\lambda)) \leq \sum_{C \in \mathfrak{L}_n(c_0\lambda)} \text{Leb}(C)$, o Teorema 1 segue do Teorema (2.11). $\square$

2.3 Aplicações Expansoras

Dado $c_0 > 0$, dizemos que um difeomorfismo local F é c_0 -**expansora**, se existir n tal que a derivada de qualquer ramo inverso satisfaz $\|DF^{-n}(x)\| \leq e^{-c_0 n}$, para todo x no seu domínio de definição.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação com buraco, com $\text{Leb}(H_f) = \lambda > 0$. Considere a aplicação $F : \bigcup_{n \geq 0} S_n(c_0\lambda) \rightarrow M$, definida por

$$F(x) = f^{n+1}(x) \text{ se } x \in S_n(c_0\lambda), \quad (2.26)$$

onde $S_n(c_0\lambda)$ é definido como em (2.3).

Proposição 2.12 *A aplicação F é $c_0\lambda$ -expansora.*

Demonstração: De fato, seja $x \in \bigcup_{n \geq 0} S_n(c_0\lambda)$, sem perda de generalidade supomos que $x \in S_{n-1}(c_0\lambda)$, então por definição $x \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ com

$$\phi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) > c_0\lambda.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \log \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} &= \log \prod_{j=1}^n \|Df^{-1}(f^j(x))\|^{-1} > c_0 n \lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow \prod_{j=1}^n \|Df^{-1}(f^j(x))\| &< e^{-c_0 n \lambda}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $x \in S_{n-1}(c_0\lambda)$, então $F(x) = f^n(x)$, segue que

$$\|DF^{-1}(F(x))\| = \|Df^{-n}(f^n(x))\| \leq \prod_{j=1}^n \|Df^{-1}(f^j(x))\| < e^{-c_0 n \lambda},$$

portanto F é $c_0\lambda$ -expansora. $\square$

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação com buraco. Pela definição da aplicação F dado em (2.26), definimos o repulsor da F e o buraco da F , respectivamente por

$$\begin{aligned} \Lambda_F &= \left\{ x \in M; F^j(x) \in \bigcup_{n \geq 0} S_n(c_0\lambda), \forall j \geq 0 \right\} \quad e \\ H_F &= M \setminus \bigcup_{n \geq 0} S_n(c_0\lambda). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, pela Definição 1.6 podemos observar que o $\Lambda_F \subset \Lambda_f$, mas o $H_F \not\subset H_f$. Dymam em [11], mostrou que a dimensão de Hausdorff do repulsor para aplicações expansoras converge para dimensão ambiente, quando a medida de Lebesgue do buraco tende a zero, ou seja:

Teorema 2.13 ([11], Teorema 3) *Dado $c_0 > 0$, seja F uma aplicação c_0 -expansora com buraco H_F . Então existe uma aplicação*

$$\psi : [0, 1] \rightarrow [0, d],$$

onde $\psi(x)$ converge para d quando x converge para zero, tal que

$$HD(\Lambda_F) \geq \psi(Leb(H_F)).$$

2.4 Prova do Teorema 2

Proposição 2.14 *Seja f uma aplicação com buraco satisfazendo as hipóteses (H1)–(H6). Então para cada n suficientemente grande, existem $c_0 > 0$, $c_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$, tal que*

$$Leb(B_n(c_0\lambda)) \leq e^{c_2 \log(\lambda)}, \text{ para cada } 0 < \lambda < \lambda_1. \quad (2.28)$$

Demonstração: Pelo Lema (2.7) item (b)

$$\frac{t}{l} \leq \frac{3}{4 - \log(\lambda)} \lambda, \quad (2.29)$$

segue que

$$-l\lambda \leq -\frac{4}{3}t(-\log(\lambda)) \leq \frac{4}{3}\log(\lambda), \quad (2.30)$$

a última desigualdade segue do fato que $t \geq 1$. Portanto, por (2.24) tem-se que

$$\log \sum_{C \in B_{\lambda, n, l, t}} Leb(C) \leq -\frac{1}{9}l\lambda \leq \frac{4}{27}\log \lambda. \quad (2.31)$$

Somando sobre todos l e t , obtemos

$$Leb(B_n(c_0\lambda)) \leq \kappa n^2 e^{\frac{4}{27}\log \lambda} \leq e^{\frac{4}{27}\log \lambda},$$

para todo $0 < \lambda < \lambda_1(n)$. A última desigualdade segue do fato que $\kappa \rightarrow 0$, quando $\lambda \rightarrow 0$. Assim, tomando $c_2 = 4/27$, obtemos o resultado. $\square$

Demonstração: (Prova do Teorema 2)

Considere a aplicação F_n , tal que $\forall j \leq n$, definimos $F_n(x) = f^j(x)$ se $x \in B_{j-1}(c_0\lambda) \setminus (B_j(c_0\lambda) \cup f^{-(j-1)}(H_f))$. Note que F_n não está definido em $B_n(c_0\lambda)$, logo o buraco de F_n é dado por

$$H_{F_n} = B_n(c_0\lambda) \cup H_f \cup (f^{-1}(H_f) \cap B_1(c_0\lambda)) \cup \dots \cup (f^{-(n-1)}(H_f) \cap B_{n-1}(c_0\lambda)).$$

Denotando $H_f \cap B_0(c_0\lambda) = H_f$, e usando o fato dos conjuntos $(f^{-j}(H_f)) \cap B_j(c_0\lambda)$ serem disjuntos para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$, tem-se que

$$Leb(H_{F_n}) = Leb(B_n(c_0\lambda)) + \sum_{j=0}^{n-1} Leb(f^{-j}(H_f) \cap B_j(c_0\lambda)).$$

Como $\|Df^{-1}\| < 1$, segue do teorema da mudança de variáveis que

$$Leb(f^{-j}(H_f)) \leq Leb(H_f).$$

Por outro lado, como $Leb(f^{-j}(H_f)) \cap B_j(c_0\lambda)$ é limitado pelo número de cilindros em B_j multiplicado pelo máximo da medida de Lebesgue de $f^{-j}(H_f)$ para cada ramo inverso, e como a soma de cilindros em B_j é limitado por $(m+1)^j$, obtemos

$$Leb(f^{-j}(H_f) \cap B_j(c_0\lambda)) \leq (m+1)^j Leb(f^{-j}(H_f)) \leq (m+1)^j Leb(H_f).$$

Pela Proposição 2.14, $Leb(B_n(c_0\lambda)) \leq e^{c_2 \log(\lambda)}$, para λ suficientemente pequeno, portanto

$$Leb(H_{F_n}) \leq e^{c_2 \log(\lambda)} + \lambda \sum_{j=0}^{n-1} (m+1)^j. \quad (2.32)$$

Assim, dado uma aplicação com buraco f , considere n suficientemente grande fixado, e definimos $F = F_n$ para este n fixado.

Logo por definição das F_n temos que F é $c_0\lambda$ -expansora. Assim, pelo Teorema 2.13, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $Leb(H_F) < \delta$ então $HD(\Lambda_F) \geq d - \epsilon$. Pela equação 2.32, seja λ suficientemente pequeno, tal que $e^{c_2 \log(\lambda)} + \lambda \sum_{j=0}^{n-1} (m+1)^j < \delta$, então $Leb(H_F) < \delta$. Como $\Lambda_F \subset \Lambda_f$, segue que $HD(\Lambda) \geq d - \epsilon$.

□

Capítulo 3

Prova do Teorema 3

Neste capítulo apresentamos o conceito de Partição de Markov, verificando que a família g_μ apresentada na Seção 1.4 possui uma Partição de Markov. Dessa forma construiremos uma aplicação com buraco, satisfazendo as hipóteses (H1)-(H6) do modelo abstrato. Por fim provamos o Teorema 3, usando a suavidade da holonomia das folheações estáveis e a propriedade de Dimensão de Hausdorff para o produto cartesiano de dois conjuntos.

3.1 Partição de Markov

O objetivo desta seção é verificar que as aplicações g_μ tem partições de Markov, e a imagem de qualquer retângulo de Markov intersecta um número finito de retângulos de Markov. Primeiramente recordamos alguns conceitos envolvendo partições de Markov. Para maiores detalhes, ver [3] e [23].

Definição 3.1 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov. Um subconjunto $S_i \subset M$ é um retângulo de Markov, se:*

- (a) S_i é um domínio compacto com diâmetro pequeno;*
- (b) S_i coincide com o fecho do seu interior, $S_i = \overline{\text{int}(S_i)}$,*
- (c) para quaisquer $x, y \in S_i$, temos que $[x, y] = W_{loc}^u(x) \cap W_{loc}^s(y) \in S_i$.*

Para cada $x \in S_i$, denotaremos as componentes conexas de $W^s(x) \cap S_i$ e de $W^u(x) \cap S_i$ que contém x por $W_i^s(x)$ e $W_i^u(x)$, respectivamente.

Definição 3.2 *Uma partição de Markov para $f : M \rightarrow M$ é uma cobertura finita $S = \{S_0, S_1, \dots, S_m\}$ de M por retângulos de Markov, tais que.*

- (a) $\text{int}(S_i) \cap \text{int}(S_j) = \emptyset$ para $i \neq j$,
- (b) $f(W_i^s(x)) \subset W_j^s(f(x))$ e $f(W_i^u(x)) \supset W_j^u(f(x))$, para todo $x \in S_i \cap f^{-1}(S_j)$.

A condição (b) é a condição de Markov.

Definição 3.3 *Definimos a fronteira estável e instável de um retângulo de Markov, por*

$$\begin{aligned}\partial^s S_i &= \{x \in S_i : x \notin \text{int}(W_i^u(x))\} \\ \partial^u S_i &= \{x \in S_i : x \notin \text{int}(W_i^s(x))\}.\end{aligned}$$

Pela definição de retângulos de Markov, e o fato que $(x, y) \mapsto [x, y]$ é uma aplicação contínua, vemos que $\partial^s S_i$ é a união de conjuntos estáveis $W_i^s(z)$ e $\partial^u S_i$ é a união de conjuntos instáveis $W_i^u(z)$. Denotando por $\partial^s S = \cup_i \partial^s S_i$ e $\partial^u S = \cup_i \partial^u S_i$, pela Definição 3.2 item (b), temos que $f(\partial^s S) \subset \partial^s S$ e $f^{-1}(\partial^u S) \subset \partial^u S$.

Usando uma partição de Markov, podemos associar a f uma aplicação quociente ϕ no espaço de todas folhas estáveis $W_i^s(x)$ enviando cada $W_i^s(x)$ na folha estável $W_j^s(y)$ que contém ela (ϕ pode assumir vários valores nas fronteiras dos retângulos de Markov.). Esta aplicação quociente é uniformemente expansora e tem a propriedade de Markov: denotando $R_i = \{W_i^s(x) : x \in S_i\}$,

$$\phi(\text{int}(R_i)) \cap \text{int}(R_j) \neq \emptyset \Rightarrow \phi(R_i) \supset R_j. \quad (3.1)$$

Teorema 3.4 ([3], Teorema 3.12) *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de Anosov, então f admite uma partição de Markov, com diâmetro arbitrariamente pequeno.*

Retornando ao nosso ambiente da Seção 1.4, pelo teorema anterior podemos garantir a existência de uma partição de Markov $S = \{S_0, S_1, \dots, S_m\}$ para o difeomorfismo de Anosov G , de modo que o fecho de V esteja contido no interior de algum retângulo S_0 de Markov de S . [16] mostrou o seguinte resultado.

Proposição 3.5 ([16], Seção 2.3) *Existe uma família suave $(G_\mu)_\mu$ de difeomorfismo de Anosov em $\mathbb{T}^3$, C^1 próxima de G , tal que $g_\mu = G_\mu$ fora de V para todo μ .*

Definição 3.6 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Dizemos que f é C^r -estruturalmente estável, se existe uma vizinhança $\mathcal{U}(f) \subset \text{Diff}^r(M)$, tal que, se $g \in \mathcal{U}(f)$ então existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Teorema 3.7 *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de Anosov, então f é C^1 -estruturalmente estável.*

Por hipótese, nosso difeomorfismo G é Anosov, e pela Proposição 3.5, G_μ é C^1 -próxima de G , logo existe um homeomorfismo $h_\mu : M \rightarrow M$, tal que $G_\mu \circ h_\mu = h_\mu \circ G$. Então a família

$$S_\mu = \{S_{i,\mu} = h_\mu(S_i) : S_i \in S\}$$

é uma partição de Markov para G_μ . Além disso, a conjugação h_μ é C^0 próxima a identidade, se G_μ está próximo a G .

Assumindo $(g_\mu)_\mu$ suficientemente próxima à $(\hat{g}_\mu)_\mu$, podemos garantir que o fecho de V está contido no interior de $S_{0,\mu} = h_\mu(S_0)$ para todo μ . Como $g_\mu = G_\mu$ fora de V , segue que $g_\mu(S_{i,\mu}) = G_\mu(S_{i,\mu})$ para todo i (incluindo $i = 0$). Podemos ver também que, como as iteradas futuras de todos os pontos em $\partial^s(S_\mu)$ por G_μ nunca passam pela região V , elas coincidem com as correspondentes iteradas por g_μ .

O mesmo é verdadeiro para o difeomorfismo parcialmente hiperbólico g_μ com folhas fortemente-estáveis no lugar de variedades estáveis, pois as iteradas futuras dos pontos em $\partial^s(h_\mu(S_i))$ nunca passam pela região perturbada V , e assim suas folhas locais fortemente-estáveis para g_μ coincidem com as variedades estáveis locais para G . Segue ainda que podemos definir uma aplicação quociente no espaço das folhas locais fortemente-estáveis de g_μ , e isto ainda é Markov, como em (3.1): os domínios $R_{i,\mu}$ para as aplicações quocientes de g_μ e G_μ coincidem, e as imagens deles sob estas aplicações quocientes também coincidem.

Neste sentido que dizemos que S_μ também é uma partição de Markov para nosso difeomorfismo parcialmente hiperbólico g_μ .

Observação 3.8 ([16], Seção 2.3) *Para determinar o número de retângulos intersectados pela imagem de qualquer um deles, observamos o seguinte: a média do número de retângulos intersectados por cada retângulo de Markov é dado pelo jacobiano na direção instável/central, no qual para G é σ^2 . Claro que podem ocorrer algumas oscilações em relação a esta média, se alguns retângulos são maiores que os outros, mas a menos de uma constante $\tilde{k} > 1$, podemos garantir que imagem de qualquer retângulo intersecta no máximo $\eta \leq \tilde{k}\sigma^2$ retângulos.*

3.2 Construção de uma aplicação com buraco

O primeiro passo é associar a cada difeomorfismo g_μ uma aplicação com buraco f_μ de dimensão 2. Seja $S_\mu = \{S_0, S_1, \dots, S_m\}$ uma partição de Markov para g_μ como na seção anterior. Relembre que para cada $x \in S_i$, denotamos por $W_i^s(x)$ a componente conexa de $W^s \cap S_i$ que contém x .

Definimos para cada μ os seguintes domínios: $R_{i,\mu} \subset W^{cu}(p_\mu)$ que intersecta cada folha estável $W_i^s(x)$ em exatamente um ponto, para cada $i \geq 1$, e para $i = 0$ análogo, apenas denotamos o domínio por $R_{0,\mu}^*$ e exigimos que $p_\mu \in R_{0,\mu}^*$. Sejam

$$W_\mu = R_{0,\mu}^* \cup R_{1,\mu} \cup \dots \cup R_{m,\mu} \quad (3.2)$$

$$H_\mu = R_{0,\mu}^* \cap W_{loc}^s(p_\mu)$$

$$R_{0,\mu} = R_{0,\mu}^* \setminus H_\mu \quad e$$

$$\pi_\mu : M \rightarrow W_\mu$$

a projeção ao longo das folhas $W_j^s(x)$ dentro de cada S_j . Pelo Corolário 1.17, π_μ é de classe $C^{1+\delta}$ restrita a cada retângulo. Então definimos

$$f_\mu : W_\mu \rightarrow W_\mu, \text{ por } f_\mu = \pi_\mu \circ g_\mu,$$

então f_μ também é uma aplicação de classe $C^{1+\delta}$.

Esta aplicação f_μ é uma aplicação com buraco, no sentido da Definição 1.4.

Primeiramente, notamos que os retângulos de Markov têm diâmetros internos finitos, e a capacidade limite das suas fronteiras é menor do que a dimensão de W_u .

Esses fatos, segue dos seguintes resultados, encontrados em [16]:

Lema 3.9 ([16], Proposição 3.4) *Dado um difeomorfismo de Anosov $\Phi : M \rightarrow M$ com índice estável 1, e uma partição de Markov $\mathcal{R}$ para Φ , existe $L > 0$ tal que para quaisquer x, y em algum retângulo de Markov, existe uma curva suave por partes $\gamma \subset R$ ligando x e y com $l(\gamma) < L$.*

Lema 3.10 ([16], Proposição 3.5) *Dado um difeomorfismo de Anosov $\Phi : M \rightarrow M$ e uma partição de Markov $\mathcal{R}$ para Φ , a capacidade limite $c(\partial^u \mathcal{R})$ da união das fronteiras instáveis dos retângulos de Markov é estritamente menor do que a dimensão instável de Φ .*

Para completar a construção da aplicação com buraco, falta verificar a condição de Markov da aplicação de buraco, para isso, usaremos a Observação 1.5.

Considere $\mu > 0$ suficientemente próximo de zero. Além disso, vamos omitir a referência para os parâmetro nos subscritos dos retângulos de Markov. Tomamos $H_0 = H_\mu$ e $H_i = \emptyset$ para $i \geq 1$. Por (3.2), H_0 tem interior não vazio. Como S_μ é uma partição de Markov, qualquer imagem $f_\mu(R_i)$ é a união de domínios R_j sobre algum subconjunto $J(i)$ de índices j . Por outro lado, como nossas aplicações de Anosov G_μ são conjugadas a um difeomorfismo de Anosov linear, segue que os G_μ são transitivos, e então para qualquer $0 \leq i \leq m$, existe $l \geq 0$ tal que $f_\mu^l(R_i)$ contém R_0 . Por fim, $H_0 = f_\mu(R_0) \setminus \{R_0, \dots, R_m\}$ tem interior não vazio, completando a verificação.

3.3 Prova do Teorema 3

Nesta seção, primeiramente vamos verificar as condições (H1)-(H6) para a aplicação com buraco f_μ definida na seção anterior. Muitos dos resultados se encontram em [16]. E por fim, faremos a prova para o Teorema 3.

Antes de começarmos a verificar as condições (H1)-(H6), faremos algumas considerações. No modelo abstrato, as condições são feitas em relação a $Leb(H_f) = \lambda$.

Agora no nosso ambiente de Hopf, as condições serão verificadas em relação ao parâmetro μ . Pois, basta observarmos, que o raio do círculo invariante criado pela bifurcação de Hopf em (1.7) é $\rho_0(\mu) = (\mu/b_1(\mu))^{1/2}$, e como a aplicação f_μ está definida no plano (ρ, θ) , então a medida de Lebesgue do buraco da f_μ , $(Leb(H_\mu))$, é equivalente ao seu parâmetro, ou seja

$$\mu \rightarrow 0 \Leftrightarrow Leb(H_\mu) \rightarrow 0.$$

Por simplicidade de notação denotamos $W_\mu \cap V$ também por V . Relembre que $V_1 \subset V$ é uma vizinhança de p_μ introduzida na Proposição 1.13. Agora dado $x = (\rho_1, \theta) \in V_1$, temos que ρ_1^2 é equivalente, a menos de uma constante, ao volume $Leb(V')$, onde $V' = \{(\rho, \theta); \rho \leq \rho_1\}$.

A **(condição H1)** segue direto do fato que $Df_\mu = Dg_\mu|_{E_\mu^{cu}}$ e da Observação 1.16.

Para as condições (H2)-(H4) vamos apresentar alguns resultados, cujas provas se encontram em [16].

Lema 3.11 ([16], Lema 4.1) *Seja $(g_\mu)_\mu$ como no nosso ambiente. Então existe uma constante $\mu_1 > 0$ tal que para cada $0 < \mu \leq \mu_1$, temos $H_\mu \subset V$ e existe uma vizinhança $V_2(\mu) \subset H_\mu$ de p_μ tal que:*

- (a) $\log \|(Df_\mu(x))^{-1}\|^{-1} \geq -\frac{33}{32}\mu + \frac{31}{32}b_1(\mu)\rho^2$, para qualquer $x = (\rho, \theta) \in V_1$;
- (b) $\log \|(Df_\mu(x))^{-1}\|^{-1} \geq -\frac{3}{32}\mu$ para qualquer x fora de $V_2(\mu)$;
- (c) $\log \text{Jac} f_u(x) \geq \frac{61}{32}\mu$ para qualquer x fora de $V_2(\mu)$.

A vizinhança $V_2(\mu)$ de p_μ é dada em coordenadas polares por

$$\left\{ (\rho, \theta) : \rho < \left(\frac{127}{128} \right)^{1/2} \rho_0(\mu) \right\},$$

a figura 3.1 descreve as vizinhanças de p_μ .

Para as **(condições H2-H4)** consideremos

$$\hat{V}(\mu) = \left\{ (\rho, \theta) : \rho^2 < \frac{33}{31} \frac{\mu}{b_1(\mu)} \right\},$$

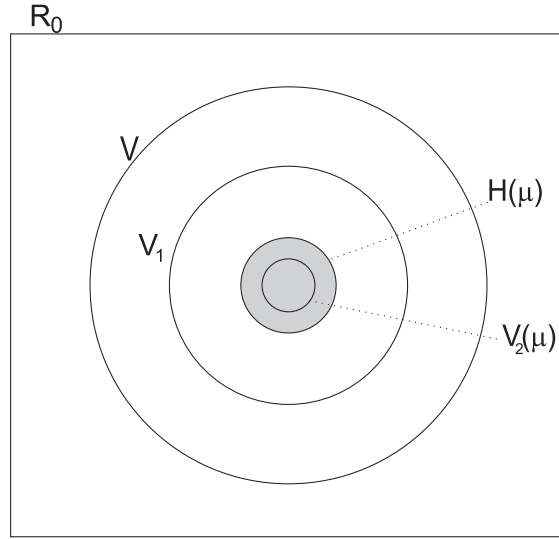


Figura 3.1: Vizinhança de p_μ

definindo $\tilde{V}(\mu) = \hat{V}(\mu) \setminus V_2(\mu)$, essas condições seguem direto do lema anterior e das considerações feitas anteriormente.

Lema 3.12 *Para qualquer $x = (\rho, \theta) \notin \tilde{V}(\mu)$ temos*

$$\text{Jac} f_\mu(x) \leq 1 - 2\mu + 5b_1(\mu)\rho^2.$$

Demonstração: Seja

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_{(\rho, \theta)}, \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\rho, \theta)} \right\},$$

a imagem da base canônica no $\mathbb{R}^2$ sob a mudança de coordenadas $\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

A base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_{(\rho, \theta)}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\rho, \theta)} \right\}, \quad (3.3)$$

é ortonormal, relativa à métrica Euclideana. Da expressão da forma normal dada em (1.4) e da Observação 1.14, temos

$$F_u(\rho, \theta) = ((1 - \mu)\rho + b_1(\mu)\rho^3, \theta + \phi(\mu) + b_2(\mu)\rho^2),$$

assim

$$DF_\mu \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_{(\rho, \theta)} = (1 - \mu + 3b_1(\mu)\rho^2) \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_{F_\mu(\rho, \theta)} + 2b_2(\mu)\rho \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{F_\mu(\rho, \theta)}$$

e

$$DF_\mu \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\rho, \theta)} = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{F_\mu(\rho, \theta)}.$$

Portanto, a matriz de DF_μ relativa ao sistema (3.3) é

$$DF_\mu(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} (1 - \mu) + 3b_1(\mu)\rho^2 & 0 \\ 2b_2(\mu)\rho((1 - \mu)\rho + b_1(\mu)^3) & (1 - \mu) + b_1(\mu)\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\text{Jac}F_\mu(x) = (1 - \mu)^2 + 4b_1(\mu)\rho^2(1 - \mu) + 3(b_1(\mu)\rho^2)^2$. Portanto para μ suficientemente pequeno, usando a Proposição 1.13 item (d) e o fato que $x \notin \tilde{V}(\mu)$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Jac}f_\mu(x) &\leq (1 - \mu)^2 + 4b_1(\mu)\rho^2(1 - \mu) + 3(b_1(\mu)\rho^2)^2 + b_1(\mu)\rho^2/100 \\ &\leq 1 - 2\mu + \mu^2 + 4b_1(\mu)\rho^2 + 3(b_1(\mu)\rho^2)^2 + b_1(\mu)\rho^2/100 \\ &\leq 1 - 2\mu + 4b_1(\mu)\rho^2 + 4(b_1(\mu)\rho^2)^2 + b_1(\mu)\rho^2/100 \\ &\leq 1 - 2\mu + 5b_1(\mu)\rho^2. \end{aligned}$$

A **(condição H5)** segue do lema anterior . □

A **(Condição H6)** segue da Observação 3.8.

Como nossa aplicação f_μ construída na Seção 3.2 é uma aplicação com buraco, e satisfaz as condições (H1)-(H6), então estamos em condições de aplicar os Teoremas 1 e 2 para o conjunto dos pontos em W_μ que nunca caem em H_μ . Denotando este conjunto por Λ_{f_μ} , obtemos para cada μ suficientemente pequeno, que

$$HD(\Lambda_{f_\mu}) \geq 2 - \epsilon.$$

Demonstração: (Teorema 3) Como $HD(\Lambda_{f_\mu}) \geq 2 - \epsilon$, então existe um disco de raio $r > 0$, $D_r \subset W_\mu$, com $\Lambda_{f_\mu} \cap D_r \neq \emptyset$, tal que $HD(\Lambda_{f_\mu} \cap D_r) \geq 2 - \epsilon$.

Agora, como Λ_μ é saturado pelas folheações estáveis, e pelo Corolário 1.17 a holonomia das folheações estáveis são $C^{1+\delta}$, em particular Lipschitz, segue que Λ_μ

é localmente homeomorfa Lipschitz à $\mathcal{F}_{loc}^{ss}(x) \times (\Lambda_{f_\mu} \cap D_r)$, com $x \in (\Lambda_{f_\mu} \cap D_r)$. Assim, como $HD(\mathcal{F}_{loc}^{ss}(x)) = 1$, segue da Proposição 1.2 que

$$HD(\Lambda_\mu) \geq 3 - \epsilon.$$

Portanto, se $\mu \rightarrow \mu_*$ então $HD(\Lambda_\mu) \rightarrow 3$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] L. Barreira. **Dimension estimates in nonconformal hyperbolic dynamics.** Nonlinearity, 16:1657-1672, 2003.
- [2] C. Bonatti and M. Viana. **SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting.** Israel J. Math., 115:157-193, 2000.
- [3] R. Bowen, **Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms**, volume 470 of Lect. Notes in Math. Springer Verlag, 1975.
- [4] R. Bowen and D. Ruelle. **The ergodic theory of Axiom A flows.** Invent. Math., 29:181-202, 1975.
- [5] M. Carvalho. **Sinai-Ruelle-Bowen measures for n-dimensional derived from Anosov diffeomorphisms.** Ergod. Theor. Dynam. Syst. 13:21-44, 1993.
- [6] N. Chernov and R. Markarian. **Anosov maps with rectangular holes, non-ergodic cases.** Bol. Soc. Brasil. Mat., 28:315-242, 1997.
- [7] N. Chernov and R. Markarian. **Ergodic properties of Anosov maps with rectangular holes.** Bol. Soc. Brasil. Mat., 28:271-314, 1997.
- [8] N. Chernov, R. Markarian, and S. Troubetzkoy **Conditional invariant measures for Anosov maps with small holes.** Ergod. Theor. Dynam. Syst., 18:1049-1073, 1998.

-
- [9] N. Chernov, R. Markarian, and S. Troubetzkoy **Invariant measures for Anosov maps with small holes**. Ergod. Theor. Dynam. Syst., 20:1007-1044, 2000.
 - [10] L.J.Díaz and M.Viana, **Discontinuity of Hausdorff dimension and limit capacity on arcs of diffeomorphisms**. Ergodic Theory Dynamic Systems, 9:403-425, 1989.
 - [11] M.Dysman, **Fractal dimensions for repellers of maps with holes**. J. Stat. Physics, 120: 479-509, 2005.
 - [12] K.Falconer, **Fractal geometry**. John Wiley & Sons Ltd., 1990. Mathematical foundations and applications.
 - [13] K. Gelfert. **Dimension Estimates beyond conformal and hyperbolic dynamics**. Dyn. Syst., 20:267-280, 2005.
 - [14] M.Hirsh, C.Pugh, and M.Shub, **Invariant Manifolds**, volume 583 of Lect. Notes in Math. Springer Verlag, 1977.
 - [15] V.Horita and M.Viana, **Hausdorff dimension of non-hyperbolic repellers I: Maps with holes**. J. Stat. Physics, 105:835-862, 2001.
 - [16] V.Horita and M.Viana, **Hausdorff dimension of non-hyperbolic repellers II: DA diffeomorphisms**. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 13 1125-1152, 2005.
 - [17] A. Manning and H. McCluskey, **Hausdorff dimension of horseshoes**. Ergod. Theor. Dynam. Sys., 3:251-260, 1983.
 - [18] A. Manning, **There are no new Anosov diffeomorphisms on tori**. Amer. J. Math., 96(3): 422-42, 1974
 - [19] M.Marsden and M. McCracken, **The Hopf bifurcation and its applications**. Springer Verlag, 1976.

- [20] J.Palis and F.Takens, **Hyperbolicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations**. Cambridge University Press, 1993.
- [21] Ya. Pesin, **Dimension theory in dynamical systems**. University of Chicago Press, 1997. Contemporary views and applications.
- [22] R. Shafikov and C. Wolf. **Stable sets, hyperbolicity and dimension**. Volume 584 of Lect. Discrete Con. Dyn. Syst., 12:403-412, 2005.
- [23] Ya. Sinai, **Markov partitions and C-diffeomorphisms**. Func. Anal. and Appl., 2:64-89, 1968.
- [24] P. Walters, **An introduction to ergodic theory**. Springer Verlag, 1982.

Índice Remissivo

- n -Cilindro, 33
- Aplicação com Buraco, 21
- Bifurcação de Hopf, 25
- Buraco, 22
- Capacidade Limite, 20
- co-Norma, 22
- Conjunto Hiperbólico, 26
- Difeomorfismo
 - c-expansora, 43
 - de Anosov, 27
 - transitivo, 27
- Dimensão de Hausdorff, 19
- Domínio, 20
- Estruturalmente Estável, 49
- Fronteira
 - estável, 48
 - instável, 48
- Média da Menor Expansão, 34
- Medida
 - de Hausdorff α -dimensional, 18
- Norma, 22
- Partição Markov, 48
- Repulsor, 22
- Retângulo de Markov, 47