

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/2025

**Uma Nova Abordagem para Hierarquias Integráveis:
Construções, Classificações e Novos Modelos**

Thaís Campos Santiago

Orientador

José Francisco Gomes

Agosto de 2025

S235n	Santiago, Thaís Campos Uma nova abordagem para hierarquias integráveis: construções, classificações e novos modelos / Thaís Campos Santiago. – São Paulo, 2025 91 f.: il. Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo Orientador: José Francisco Gomes 1. Kac-Moody, Álgebras de. 2. Sólitons. 3. Teoria de campos (Física). I. Título
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

Uma Nova Abordagem para Hierarquias Integráveis:

Construções, Classificações e Novos Modelos

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física Teórica do Câmpus de São Paulo, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Física, Especialidade Física Teórica.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. José Francisco Gomes (Orientador)
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof.^a Dr.^a Angela Foerster
Instituto de Física/UFRGS

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira
Instituto de Física/UFSCAR

Prof. Dr. Giuliano Augustus Pavan Ribeiro
Instituto de Física/UFSCAR

Prof. Dr. Guilherme Starvaggi França
University of California, Berkeley

Conceito: Aprovada

São Paulo, 29 de agosto de 2025.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, José Francisco, pela orientação, por todo o conhecimento generosamente compartilhado, por sempre estar disponível para tirar minhas dúvidas e pelo olhar criterioso em todas as etapas do trabalho.

Aos meus colaboradores Aratyn, Clisthenis e Zimmerman, agradeço pelas discussões semanais e pelas contribuições valiosas à pesquisa: Ao Aratyn, pela atenção aos detalhes e pelas sugestões sempre pertinentes; Ao Clisthenis, pela habilidade em encontrar referências precisas, pelo apoio atento no acompanhamento dos cálculos e pela ajuda cuidadosa na revisão do trabalho; Ao Zimmerman, pela presença constante nas discussões, pelo sorriso contagiante e por ser um exemplo de dedicação e paixão pela pesquisa.

Aos professores do IFT, agradeço por todo o conhecimento compartilhado ao longo desses anos, especialmente ao professor José Geraldo, pelos valiosos conselhos e pelo apoio acadêmico.

Aos colegas Diogo de Souza e Matheus Fabri, agradeço por dividirem comigo a responsabilidade e os desafios da organização do Congresso Paulo Leal.

Aos colegas Isabela Maietto, Matheus Cravo e Raul Palma, agradeço pela colaboração nas atividades que desenvolvemos durante meu mandato como representante discente no CIFT.

Aos funcionários do IFT, agradeço pelas inúmeras vezes em que me ajudaram, especialmente à dona Jô, pelo carinho de sempre, pelo chá mate, pelas conversas descontraídas e pelas receitas que fazia questão de compartilhar.

À minha mãe, dona Maria, agradeço por todo o apoio, amor e carinho. Obrigada por acreditar nas minhas escolhas.

Ao meu noivo, Marcus Vinicius, agradeço pelo apoio, pelo companheirismo e pelas longas caminhadas, que tantas vezes acalmaram a mente e o coração. Por acreditar em mim quando eu duvidava e por me lembrar, todos os dias, de que o mais importante é ser feliz pelo caminho.

Aos queridos Alice, Bruno Santos, Katiele, Leilane e Mari, sou grata pela amizade, pelo exemplo e por estarem sempre presentes, mesmo de longe.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, que me permitiu dedicar-me integralmente à realização desta pesquisa.

Resumo

Apresentamos uma decomposição de Riemann-Hilbert-Birkhoff generalizada que expande o formalismo usual de hierarquias integráveis em dois sentidos: permite que potências inteiras das componentes das matrizes de Lax nas equações de fluxos sejam aumentadas em comparação aos modelos convencionais e incorpora soluções de vácuo constante não nulo.

Dois parâmetros adicionais controlam essas características. O primeiro determina o grau de um elemento semi-simples que, dada uma álgebra de Kac-Moody graduada, define a estrutura algébrica da construção. O segundo parâmetro distingue entre configurações de vácuo nulo e vácuo constante não nulo. Além disso, uma ambiguidade na definição da componente de grau zero das matrizes de dressing introduz um terceiro parâmetro que permite a identificação de modelos integráveis equivalentes por meio de transformações de gauge.

As escolhas tanto da estrutura algébrica quanto dos valores desses parâmetros permitem uma classificação imediata dos modelos. Para vários valores desses parâmetros, construímos e analisamos modelos integráveis equivalentes e suas soluções, demonstrando a ampla aplicabilidade do formalismo estendido.

Palavras-chave: Álgebras de Kac-Moody; Modelos Integráveis; Sólitons.

Áreas do conhecimento: Física; Física Matemática; Teoria de Campos.

Abstract

We present a generalized Riemann-Hilbert-Birkhoff decomposition that expands the usual formalism of integrable hierarchies in two ways: it allows integer powers of the matrix components of Lax in the flow equations to be increased compared to conventional models and it incorporates non-zero constant vacuum solutions.

Two additional parameters control these characteristics. The first determines the degree of a semi-simple element that, given a graded Kac-Moody algebra, defines the algebraic structure of the construction. The second parameter distinguishes between zero vacuum and non-zero constant vacuum configurations. Furthermore, an ambiguity in the definition of the zero-degree component of the dressing matrices introduces a third parameter that allows the identification of equivalent integrable models by means of gauge transformations.

The choices of both the algebraic structure and the values of these parameters allow an immediate classification of the models. For several values of these parameters, we construct and analyze equivalent integrable models and their solutions, demonstrating the wide applicability of the extended formalism.

Keywords: Kac-Moody Algebras; Integrable Models; Solitons.

Areas of knowledge: Physics; Mathematical Physics; Field Theory.

Lista

Lista de Símbolos Matemáticos	
Símbolo	Significado
$a, n, M, d, e, f \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$	Números inteiros positivos
$m, k' \in \mathbb{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$	Números inteiros diferentes de zero
$k, l \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$	Números inteiros
$i, j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Números inteiros não negativos
x, y	Coordenadas espaciais
$t = \{\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_1, t_2, t_3, \dots\}$	Fluxos temporais
$t_m \in t$	Fluxo temporal
$t_M \in \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$	Fluxo temporal positivo
$t_{-M} \in \{t_{-1}, t_{-2}, t_{-3}, \dots\}$	Fluxo temporal negativo
$u_n = u_n(x, t_m)$	Função u_n que depende das variáveis x e t_m
$\partial_x u_n = u_{n,x}$	Derivada parcial da função u_n em relação a variável x
$\mathcal{D}_x u_n = u_{n,x} + u_n \mathcal{D}_x$	Operador $\mathcal{D}_x$ atuando na função u_n
$\partial_x^{-1} u_n = \int^x u_n(y, t_m) dy$	Integral indefinida da função u_n em relação a variável x
A_x e A_{t_m}	Par de Lax
U	Transformação de gauge
Q	Operador de gradação
E	Elemento semi-simples
Θ_+ e Θ_-	Operadores de dressing
$(\dots)_{\geq}$	Soma dos termos com grau não negativo
$(\dots)_{<}$	Soma dos termos com grau negativo
$(\dots)_0$	Soma dos termos com grau zero
$(\dots)_{>}$	Soma dos termos com grau positivo
τ_{ij}	Função tau
δ_{kl}	Delta de Kronecker

Índice

1	Introdução	1
2	Fundamentos Teóricos	4
2.1	Condição de curvatura nula	4
2.2	Estrutura algébrica	6
2.3	Transformações de gauge	6
2.4	Transformações de dressing	7
2.5	Decomposição g-RHB	9
2.6	Construção de hierarquias integráveis	13
2.7	Método de dressing	16
3	Hierarquias Integráveis	20
3.1	Hierarquia mKdV	20
3.1.1	Hierarquia mKdV	21
3.1.2	Hierarquias equivalentes	28
3.2	Hierarquias AKNS e WKI	28
3.2.1	Hierarquia AKNS	28
3.2.2	Hierarquias equivalentes	33
3.3	Hierarquias GI, CLL e KN	34
3.3.1	Hierarquia GI	34
3.3.2	Hierarquias equivalentes	40
3.4	Modelo Integrável com $a = 3$	46
3.5	Reduções	47
3.5.1	Equação do calor	48
3.5.2	Hierarquia KdV	49
3.5.3	Hierarquia de Burgers	49
4	Soluções Solitônicas da Hierarquia CLL e da Hierarquia de Burgers	51
4.1	Função tau	56
4.2	Operadores de vértice	57
4.3	Soluções solitônicas do tipo A	58
4.4	Soluções solitônicas do tipo B	61

5	Transformações de Gauge entre Hierarquias Integráveis	63
5.1	Relação entre as hierarquias mKdV e KdV	63
5.2	Relação entre as hierarquias CLL e AKNS	64
5.3	Mapeamento de soluções	67
6	Conclusões e Perspectivas	69
A	Álgebra de Kac-Moody $\hat{sl}_2$	71
A.1	Gradação principal	72
A.2	Gradação homogênea	73
B	Relações Úteis	75
C	Modelo $m = 2$ da Hierarquia GI	77
D	Elementos de Matriz	81
	Referências	89

Capítulo 1

Introdução

Modelos integráveis clássicos são descritos por sistemas de equações diferenciais parciais não lineares. O critério para a integrabilidade desses modelos pode ser baseado no teorema de Liouville-Arnold, que afirma que um sistema hamiltoniano com um determinado número de graus de liberdade possui soluções analíticas exatas se, e somente se, existir exatamente esse mesmo número de quantidades conservadas independentes e em involução, isto é, seus parênteses de Poisson se anulam [1].

Esses sistemas podem ser construídos a partir da condição de curvatura nula, e surgem integráveis por construção [2]. Essa condição implica na equação de curvatura nula para potenciais de gauge, também conhecidos como pares de Lax. Ao propor potenciais de gauge com a estrutura matemática de uma álgebra de Kac-Moody graduada [3], que é uma álgebra de Lie com dimensão infinita, é possível resolver sistematicamente a equação de curvatura nula, determinando não apenas um modelo integrável, mas uma classe infinita de sistemas de equações de movimento relacionados a diferentes fluxos temporais, que compartilham a parte espacial do seu par de Lax.

Esses sistemas são contínuos, isto é, possuem infinitos graus de liberdade, e apresentam infinitas quantidades conservadas independentes e em involução, o que garante sua integrabilidade. Essa classe infinita de modelos integráveis, que compartilham uma estrutura algébrica comum, constitui o que se chama de hierarquia integrável.

O estudo dessas hierarquias eventualmente recupera modelos já conhecidos e amplamente discutidos na literatura, o que geralmente dá nome à hierarquia, como é o caso das hierarquias Korteweg-de Vries modificada (mKdV) e Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS). Entretanto, propor potenciais de gauge que resultem em um modelo específico, ou mesmo em um modelo não trivial qualquer, não é uma tarefa fácil. Nas referências [4, 5, 6, 7], essa questão foi parcialmente resolvida usando a decomposição de Riemann-Hilbert-Birkhoff (decomposição RHB) para definir tais potenciais. Por exemplo, em [4] o par de Lax do modelo AKNS é

apresentado explicitamente. Já em [5] foram adicionados os fluxos temporais negativos no esquema, possibilitando a construção dos modelos relativísticos sinh-Gordon e Lund-Regge, além de identificar a que hierarquia cada modelo pertence: o modelo sinh-Gordon está contido na hierarquia mKdV, enquanto o modelo Lund-Regge faz parte da hierarquia AKNS. Em [6, 7], estes resultados foram expandidos para a construção de hierarquias integráveis supersimétricas, como a hierarquia que contém os modelos super MKdV e super sinh-Gordon.

Entretanto, algumas hierarquias integráveis mais recentes apresentam potenciais de gauge que não podem ser obtidos a partir da decomposição RHB, como os casos discutidos nas referências [8, 9].

A existência de infinitas leis de conservação implica na presença de soluções do tipo sólitons, que são ondas não lineares, que preservam sua forma ao longo da evolução e interagem elasticamente com outros sólitons. Um método conhecido como método de dressing explora a mesma estrutura algébrica utilizada na construção da hierarquia integrável para encontrar simultaneamente soluções para todos os modelos dessa hierarquia. Esse método gera sólitons não triviais a partir de uma solução trivial chamada de vácuo, por meio de transformações de dressing, que são um tipo de transformações de gauge [10, 11, 12]. Normalmente, esses sólitons são obtidos a partir de uma solução de vácuo nulo, o que fixa condições de contorno nula aos modelos. Recentemente, surgiram modelos integráveis que admitem apenas soluções de vácuo constante não nulo [8], algo não previsto pela decomposição RHB. Além disso, hierarquias de classificação mais alta, como a hierarquia Kaup-Newell (KN), também não podem ser derivadas por esse formalismo [9].

O objetivo deste trabalho é propor uma decomposição de Riemann-Hilbert-Birkhoff generalizada (decomposição g-RHB) capaz de resolver as questões mencionadas. Para isso, adicionamos dois novos parâmetros, a e b , na decomposição RHB. O parâmetro a determina o grau de um elemento semi-simples que, dada uma álgebra de Kac-Moody e sua gradação, define a estrutura algébrica da construção. Modelos com $a > 1$ estão relacionados com hierarquias de classificação mais alta. Já o parâmetro b controla se os modelos possuem condições de contorno nula ou condições de contorno constante não nula. Além disso, uma ambiguidade na definição da componente de grau zero das matrizes de dressing introduz um terceiro parâmetro, o parâmetro c . Embora não afete a decomposição em si, o parâmetro c permite a identificação de modelos integráveis equivalentes por meio de transformações de gauge. As escolhas tanto da estrutura algébrica quanto dos

valores desses parâmetros permitem uma classificação imediata das hierarquias.

Nesta tese, expomos os resultados contidos em [13, 14] da seguinte maneira. No capítulo 2 discutimos a construção de hierarquias integráveis a partir da condição de curvatura nula, introduzimos a decomposição g-RHB e abordamos os aspectos gerais do método de dressing.

No capítulo 3, apresentamos exemplos de hierarquias integráveis construídas a partir da álgebra $\hat{sl}_2$ com gradação principal ou homogênea. Para $a = 1$, construímos as hierarquias Korteweg-de Vries modificada (mKdV) e Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS). Mostramos a equivalência entre a hierarquia AKNS e a hierarquia Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) [15]. Para $a = 2$, construímos a hierarquia Gerdjikov-Ivanov (GI) e mostramos sua equivalência com as hierarquias Chen-Lee-Liu (CLL) e Kaup-Newell (KN) [9]. Ainda, construímos um modelo integrável com $a = 3$, e identificamos a hierarquia Korteweg-de Vries (KdV) e a hierarquia de Burgers por meio de reduções das hierarquias AKNS e CLL, respectivamente. A hierarquia de Burgers apresenta fluxos temporais positivos e negativos, sendo que os fluxos negativos, até onde sabemos, não eram conhecidos.

No capítulo 4, utilizando o método de dressing encontramos soluções solitônicas da hierarquia CLL e da hierarquia de Burgers.

No capítulo 5, observamos que, por meio de uma transformação de gauge entre as hierarquias KdV e mKdV, é possível obter a transformação de Miura, a qual estabelece uma relação entre a equação de KdV e a equação de mKdV [16]. De forma análoga, demonstramos que também existe uma transformação do tipo Miura entre as hierarquias CLL e AKNS. Além disso, comprovamos que, em um certo limite, essa transformação se reduz a transformação de Cole-Hopf, que relaciona a equação de Burger com a equação do calor.

Por fim, no capítulo 6, apresentamos um resumo dos principais resultados obtidos e discutimos possíveis direções para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Hierarquias integráveis são constituídas por uma classe infinita de sistemas de equações diferenciais parciais não lineares e integráveis, todos conectados entre si. Apresentaremos a construção de hierarquias a partir da condição de curvatura nula. Mostraremos como obter o ingrediente fundamental dessa construção, o par de Lax, através da decomposição de Riemann-Hilbert-Birkhoff generalizada. Além disso, será discutido um método para encontrar soluções para esses sistemas de equações de movimento: o método de dressing.

2.1 Condição de curvatura nula

Considere um modelo bidimensional contendo n campos, que pode ser descrito pelo sistema linear

$$(\partial_x + A_x) \Psi = 0, \quad (2.1)$$

$$(\partial_{t_m} + A_{t_m}) \Psi = 0. \quad (2.2)$$

Sendo que o elemento Ψ pertence a um grupo de Lie G , os potenciais A_x e A_{t_m} pertencem a álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ associada a álgebra de Lie $\mathcal{G}$ deste grupo, $m = \pm M$ é um número inteiro com $M > 0$, a variável x é uma coordenada espacial, a variável t_M é um fluxo temporal positivo e a variável t_{-M} é um fluxo temporal negativo. Vamos denotar os campos deste modelo por

$$u(x, t_m) = \{u_1(x, t_m), u_2(x, t_m), \dots, u_n(x, t_m)\}. \quad (2.3)$$

Os elementos A_x e A_{t_m} , também conhecidos como par de Lax, são escritos em termos dos geradores da álgebra, sendo que cada termo é multiplicado por um coeficiente que depende explicitamente de $u, u_x, u_{xx}, \dots, \int u dx, \dots$. A condição de integrabilidade deste sistema é dada pela igualdade

$$\partial_x (\partial_{t_m} \Psi) = \partial_{t_m} (\partial_x \Psi). \quad (2.4)$$

Substituindo as relações (2.1) e (2.2) em (2.4) chegamos na condição de curvatura nula¹

$$\partial_x A_{t_m} - \partial_{t_m} A_x + [A_x, A_{t_m}] = [\mathcal{D}_x + A_x, \mathcal{D}_{t_m} + A_{t_m}] = 0. \quad (2.5)$$

Esta equação é conhecida como equação de curvatura nula. As equações de movimento para os campos do modelo são derivadas da equação de curvatura nula e surgem integráveis por construção.

De fato, os potenciais A_x e A_{t_m} são potenciais puro gauge, isto é,

$$A_x = -(\partial_x \Psi) \Psi^{-1} \quad (2.6)$$

e

$$A_{t_m} = -(\partial_{t_m} \Psi) \Psi^{-1} \quad (2.7)$$

o que implica que a quantidade [7, 17]

$$\Psi = \mathcal{P} e^{\oint A_\mu dx^\mu}, \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{P}$ denota ordenamento espaço temporal na integração, $\mu = 0, 1$ e $(x^1, x^0) = (x, t_m)$, não depende do caminho. Sendo assim, impondo as condições de contorno adequadas, podemos mostrar que

$$\text{Tr} \left(\mathcal{P} e^{\int_{-\infty}^{\infty} A_1(x,0) dx} \right) = \text{Tr} \left(\mathcal{P} e^{\int_{-\infty}^{\infty} A_1(x,\tau) dx} \right) \quad (2.9)$$

para algum valor arbitrário de τ e portanto é uma quantidade conservada no tempo. Em geral os potenciais A_x e A_{t_m} dependem de um parâmetro espectral λ que está associado a loop-álgebra de $\mathcal{G}$. Assim a exponencial ordenada em (2.9) pode ser expandida em potências de λ e define uma infinidade de quantidades conservadas.

Ainda, é possível mostrar que estas quantidades são independentes e estão em involução, isto é, que seus parênteses de Poisson se anulam [4]. E isso garante a integrabilidade do modelo.

Modelos integráveis que pertencem a uma mesma hierarquia integrável possuem uma estrutura algébrica em comum.

¹Para o fluxo t_1 as equações de movimento dos campos $u(x, t_1)$ são as equações triviais $\partial_{t_1} u_1 = \partial_x u_1$, $\partial_{t_1} u_2 = \partial_x u_2$, $\dots$, $\partial_{t_1} u_n = \partial_x u_n$.

2.2 Estrutura algébrica

Seja $\hat{\mathcal{G}}$ uma álgebra de Kac-Moody e $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie correspondente, associada a um grupo de Lie G . O operador de gradação Q decompõe a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ em subespaços graduados $\mathcal{G}^{(k)}$, ou seja

$$\hat{\mathcal{G}} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}^{(k)}, \quad (2.10)$$

com $\mathcal{G}^{(k)}$ igual a um subespaço de grau k tal que

$$[Q, \mathcal{G}^{(k)}] = k\mathcal{G}^{(k)}, \quad [\mathcal{G}^{(k)}, \mathcal{G}^{(l)}] \subset \mathcal{G}^{(k+l)} \quad \text{e} \quad k, l \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Seja $E \in \mathcal{G}^{(l)}$ um elemento semi-simples constante, a escolha de E induz uma segunda decomposição da álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ nos subespaços kernel $\mathcal{K}$ e image $\mathcal{M}$, isto é

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}, \quad (2.12)$$

onde o subespaço kernel é definido da seguinte maneira

$$\mathcal{K} \equiv \{X \in \mathcal{G}^{(k)} \mid [X, E] = 0\} \quad (2.13)$$

e o subespaço image é o seu complemento. Da definição (2.13) e da identidade de Jacobi temos que

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K} \quad \text{e} \quad [\mathcal{K}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}. \quad (2.14)$$

Deste modo, dada uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ e um operador de gradação Q , cada conjunto $\{\hat{\mathcal{G}}, Q, E\}$ define uma estrutura algébrica. Aqui, também vamos nos restringir a escolha de elementos semi-simples que também cumpram a relação

$$[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{K}. \quad (2.15)$$

2.3 Transformações de gauge

As transformações de gauge estabelecem conexões tanto entre configurações distintas de modelos integráveis de uma mesma hierarquia quanto entre configurações distintas de modelos integráveis que pertencem a hierarquias distintas, sem alterar a estrutura da equação de curvatura nula. Considere a transformação $\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi$, onde U é um elemento de um grupo de transformações e conecta a

configuração dada pelo sistema linear (2.1)-(2.2) com outra configuração descrita pelo sistema linear

$$(\partial_x + A'_x) \Psi' = 0, \quad (2.16)$$

$$(\partial_{t_m} + A'_{t_m}) \Psi' = 0. \quad (2.17)$$

Conjugando a equação (2.5) na forma $U(\dots)U^{-1}$ encontramos

$$[\mathcal{D}_x + A'_x, \mathcal{D}_{t_m} + A'_{t_m}] = 0 \quad (2.18)$$

com

$$A'_x = U A_x U^{-1} - (\partial_x U) U^{-1}, \quad (2.19)$$

$$A'_{t_m} = U A_{t_m} U^{-1} - (\partial_{t_m} U) U^{-1}. \quad (2.20)$$

Isto mostra a invariância da equação de curvatura nula por transformações de gauge. Observe que as equações de curvatura nula (2.5) e (2.18) são válidas no mesmo espaço de coordenadas (x, t_m) .

2.4 Transformações de dressing

As transformações de dressing são transformações de gauge que conectam configurações distintas de modelos integráveis de uma mesma hierarquia integrável. Dada a configuração de vácuo

$$(\partial_x + A_x^{vac}) \Psi_0 = 0, \quad (2.21)$$

$$(\partial_{t_m} + A_{t_m}^{vac}) \Psi_0 = 0, \quad (2.22)$$

com n campos $u_0(x, t_m) = \{u_{10}(x, t_m), u_{20}(x, t_m), \dots, u_{n0}(x, t_m)\}$, onde $u_0(x, t_m)$ é uma solução trivial conhecida, denotada por solução de vácuo, da equação de curvatura nula (2.5) da configuração geral (2.1)-(2.2). Podemos afirmar que os elementos Ψ_0 e Ψ pertencem ao mesmo grupo de Lie G , assim como o par de Lax A_x^{vac} e $A_{t_m}^{vac}$ pertence a mesma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ que o par de Lax A_x e A_{t_m} .

Considerando o problema de fatorização de Riemann-Hilbert-Birkhoff para o operador dado por

$$\Theta(t) = \Psi_0 \rho \Psi_0^{-1}, \quad (2.23)$$

onde $\rho \in G$ é um elemento constante e arbitrário com um grau qualquer. Deri-

vando a expressão acima, encontramos

$$\partial_x \Theta = [\Theta, A_x^{vac}], \quad \partial_{t_m} \Theta = [\Theta, A_{t_m}^{vac}]. \quad (2.24)$$

A solução do problema de fatorização (2.23) se dá ao definir o operador Θ no formato da decomposição

$$\Theta(t) \equiv \Theta_{<} \Theta_0 \Theta_{>} = \left(\Theta_{<} \tilde{B}^{-1} \right) \left(\tilde{B} B \Theta_{>} \right) = \Theta_-^{-1} \Theta_+ \quad (2.25)$$

tal que

$$\Theta_+ = \tilde{B} B \Theta_{>} \equiv e^{\theta^{(0)}} \prod_{k=1}^{\infty} e^{\theta^{(k)}} \quad (2.26)$$

e

$$\Theta_- = \tilde{B} \Theta_{<}^{-1} \equiv \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\theta^{(-k)}}. \quad (2.27)$$

Em que $\tilde{B} = 1$ e $B = e^{\theta^{(0)}}$ são elementos do grupo de Lie G , e o elemento $\theta^{(k)} \in \mathcal{G}^{(k)}$, com $k \in \mathbb{Z}$, pertence a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$. Substituindo (2.25) nas derivadas (2.24) obtemos

$$\Theta_+ A_x^{vac} \Theta_+^{-1} - (\partial_x \Theta_+) \Theta_+^{-1} = \Theta_- A_x^{vac} \Theta_-^{-1} - (\partial_x \Theta_-) \Theta_-^{-1}, \quad (2.28)$$

$$\Theta_+ A_{t_m}^{vac} \Theta_+^{-1} - (\partial_{t_m} \Theta_+) \Theta_+^{-1} = \Theta_- A_{t_m}^{vac} \Theta_-^{-1} - (\partial_{t_m} \Theta_-) \Theta_-^{-1}. \quad (2.29)$$

Portanto, Θ_+ e Θ_- são operadores de dressing relacionados com as transformações $\Psi_0 \rightarrow \Psi = \Theta_{\pm} \Psi_0$, dadas as relações

$$A_x = \Theta_{\pm} A_x^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - (\partial_x \Theta_{\pm}) \Theta_{\pm}^{-1} = -\partial_x (\Theta_{\pm} \Psi_0) \Psi_0^{-1} \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (2.30)$$

$$A_{t_m} = \Theta_{\pm} A_{t_m}^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - (\partial_{t_m} \Theta_{\pm}) \Theta_{\pm}^{-1} = -\partial_{t_m} (\Theta_{\pm} \Psi_0) \Psi_0^{-1} \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (2.31)$$

e conectam a configuração de vácuo dada pelo sistema linear (2.21)-(2.22) com a configuração geral descrita pelo sistema linear (2.1)-(2.2).

Vamos estudar hierarquias integráveis cujos os modelos possuem soluções triviais do tipo vácuo nulo $u_0 = \{0, \dots, 0\}$ ou vácuo constante não nulo $u_0 = \{u_{10}, \dots, u_{n0}\}$, onde $u_{10}, \dots, u_{n0}$ são constantes diferentes de zero. Veremos como obter o par de Lax geral A_x e A_{t_m} , e posteriormente a solução geral $u(x, t_m)$, dado um par de Lax A_x^{vac} e $A_{t_m}^{vac}$ de uma solução de vácuo u_0 , a partir da decomposição

$$\Theta_-^{-1} \Theta_+ = \Psi_0 \rho \Psi_0^{-1} \quad (2.32)$$

com Ψ_0 dado pela função Baker-Akhiezer

$$\Psi_0 = \exp \left(- \sum_{M=1}^{\infty} \left(A_{t_M}^{vac} t_M + A_{t_{-M}}^{vac} t_{-M} \right) \right). \quad (2.33)$$

Em que $M \in \mathbb{Z}_+^*$, t_M é um fluxo temporal positivo e t_{-M} é um fluxo temporal negativo.

2.5 Decomposição g-RHB

Neste trabalho, vamos propor uma decomposição de Riemann-Hilbert-Birkhoff generalizada dada por [13]

$$\Theta(t) = \exp \left(- \sum_{M=1}^{\infty} (\mathcal{E}_M t_M + \mathcal{E}_{-M} t_{-M}) \right) g \exp \left(\sum_{M=1}^{\infty} (\mathcal{E}_M t_M + \mathcal{E}_{-M} t_{-M}) \right). \quad (2.34)$$

Do lado direito da fórmula (2.34) temos que $M \in \mathbb{Z}_+^*$, t_M é um fluxo temporal positivo, t_{-M} é um fluxo temporal negativo e $g \in G$ é um elemento arbitrário e constante com um grau qualquer. Os elementos $\mathcal{E}_M$ e $\mathcal{E}_{-M}$ são dados por

$$\mathcal{E}_M = \varepsilon_M^{(aM)} + b \sum_{i=0}^{aM-1} \varepsilon_M^{(i)} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{-M} = \varepsilon_{-M}^{(-aM)} + b \sum_{i=1}^{aM-1} \varepsilon_{-M}^{(-i)}, \quad (2.35)$$

sendo que $\varepsilon_M^{(i)}, \varepsilon_{-M}^{(-i)} \in \hat{\mathcal{G}}$ são elementos constantes de grau i e $-i$, respectivamente, em que $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_1, \varepsilon_1^{(a)} = E \equiv E^{(a)}$, b é igual a 0 ou 1, $a \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i \in \mathbb{Z}_+$. Estes elementos também devem satisfazer as equações de curvatura nula

$$[\mathcal{D}_x + \mathcal{E}_x, \mathcal{D}_{t_{\pm M}} + \mathcal{E}_{\pm M}] = \partial_x \mathcal{E}_{\pm M} - \partial_{t_{\pm M}} \mathcal{E}_x + [\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{\pm M}] = 0, \quad (2.36)$$

isto é, se faz necessário que

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{\pm M}] = 0. \quad (2.37)$$

As equações de curvatura nula (2.36) têm solução do tipo vácuo nulo para $b = 0$ e do tipo vácuo não nulo para $b = 1$.

Agora, do lado esquerdo da fórmula (2.34), de maneira explícita, temos

$$\Theta(t) \equiv \Theta_{<} \Theta_0 \Theta_{>} = \left(\Theta_{<} \tilde{B}^{-1} \right) \left(\tilde{B} \Theta_{>} \right) = \Theta_{-}^{-1} \Theta_{+} \quad (2.38)$$

onde

$$\Theta_+ = \tilde{B} B \Theta_> \equiv e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} e^{\theta^{(0)}} \prod_{k=1}^{\infty} e^{\theta^{(k)}} \quad (2.39)$$

e

$$\Theta_- = \tilde{B} \Theta_{<}^{-1} \equiv e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\theta^{(-k)}}. \quad (2.40)$$

Em que $0 \leq c \leq 1$ é um parâmetro constante, $B = e^{\theta^{(0)}}$ e $\tilde{B} = e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}}$ são elementos do grupo de Lie G , e os elementos $\tilde{\theta}^{(0)} \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $\theta^{(k)} \in \mathcal{G}^{(k)}$, com $k \in \mathbb{Z}$, pertencem a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$. O elemento $\tilde{B}$ surge de uma ambiguidade na definição da componente Θ_0 e introduz o parâmetro c . Mais a frente veremos que o parâmetro c , apesar de não aparecer explicitamente em $\Theta(t)$, permite a identificação de modelos integráveis equivalentes por meio de transformações de gauge.

Para determinar as derivadas dos operadores de dressing Θ_+ e Θ_- em relação a um fluxo temporal qualquer, começamos derivando a equação (2.34) em relação a t_M e t_{-M} , o que resultam nos comutadores

$$\partial_{t_M} \Theta = [\Theta, \mathcal{E}_M], \quad \partial_{t_{-M}} \Theta = [\Theta, \mathcal{E}_{-M}]. \quad (2.41)$$

De maneira equivalente

$$\Theta_- \partial_{t_M} (\Theta_-^{-1} \Theta_+) \Theta_+^{-1} = \Theta_+ \mathcal{E}_M \Theta_+^{-1} - \Theta_- \mathcal{E}_M \Theta_-^{-1}, \quad (2.42)$$

$$\Theta_- \partial_{t_{-M}} (\Theta_-^{-1} \Theta_+) \Theta_+^{-1} = \Theta_+ \mathcal{E}_{-M} \Theta_+^{-1} - \Theta_- \mathcal{E}_{-M} \Theta_-^{-1}. \quad (2.43)$$

Expandindo estas relações chegamos nos resultados abaixo

$$\begin{aligned} B \Theta_> \mathcal{E}_M \Theta_>^{-1} B^{-1} - \Theta_<^{-1} \mathcal{E}_M \Theta_< &= \\ &= \Theta_<^{-1} (\partial_{t_M} \Theta_<) + (\partial_{t_M} B) B^{-1} + B (\partial_{t_M} \Theta_>) \Theta_>^{-1} B^{-1}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} B \Theta_> \mathcal{E}_{-M} \Theta_>^{-1} B^{-1} - \Theta_<^{-1} \mathcal{E}_{-M} \Theta_< &= \\ &= \Theta_<^{-1} (\partial_{t_{-M}} \Theta_<) + (\partial_{t_{-M}} B) B^{-1} + B (\partial_{t_{-M}} \Theta_>) \Theta_>^{-1} B^{-1}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Admitindo a forma graduada das equações acima, podemos separar os termos

grau a grau da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\partial_{t_M} B &= B (\Theta_{>} \mathcal{E}_M \Theta_{>}^{-1})_0 - (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_M \Theta_{<})_0 B, \\
\partial_{t_{-M}} B &= B (\Theta_{>} \mathcal{E}_{-M} \Theta_{>}^{-1})_0, \\
\partial_{t_M} \Theta_{>} &= (\Theta_{>} \mathcal{E}_M \Theta_{>}^{-1})_{>} \Theta_{>} - B^{-1} (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_M \Theta_{<})_{>} B \Theta_{>}, \\
\partial_{t_{-M}} \Theta_{>} &= (\Theta_{>} \mathcal{E}_{-M} \Theta_{>}^{-1})_{>} \Theta_{>}, \\
\partial_{t_M} \Theta_{<} &= -\Theta_{<} (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_M \Theta_{<})_{<}, \\
\partial_{t_{-M}} \Theta_{<} &= \Theta_{<} B (\Theta_{>} \mathcal{E}_{-M} \Theta_{>}^{-1})_{<} B^{-1} - \Theta_{<} (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_{-M} \Theta_{<})_{<}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Por consequência, as derivadas de Θ_+ e Θ_- em relação a t_M e t_{-M} são dadas por:

$$\begin{aligned}
\partial_{t_M} \Theta_+ &= \left(\partial_{t_M} \tilde{B} \right) B \Theta_{>} + \tilde{B} (\partial_{t_M} B) \Theta_{>} + \tilde{B} B (\partial_{t_M} \Theta_{>}) \\
&= \left[\left(\partial_{t_M} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1} + \Theta_+ \mathcal{E}_M \Theta_+^{-1} - (\Theta_- \mathcal{E}_M \Theta_-^{-1})_{\geq} \right] \Theta_+,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{t_{-M}} \Theta_+ &= \left(\partial_{t_{-M}} \tilde{B} \right) B \Theta_{>} + \tilde{B} (\partial_{t_{-M}} B) \Theta_{>} + \tilde{B} B (\partial_{t_{-M}} \Theta_{>}) \\
&= \left[\left(\partial_{t_{-M}} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1} + \Theta_+ \mathcal{E}_{-M} \Theta_+^{-1} - (\Theta_+ \mathcal{E}_{-M} \Theta_+^{-1})_{<} \right] \Theta_+,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{t_M} \Theta_- &= \left(\partial_{t_M} \tilde{B} \right) \Theta_{<}^{-1} - \tilde{B} \Theta_{<}^{-1} (\partial_{t_M} \Theta_{<}) \Theta_{<}^{-1} \\
&= \left[\left(\partial_{t_M} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1} + \Theta_- \mathcal{E}_M \Theta_-^{-1} - (\Theta_- \mathcal{E}_M \Theta_-^{-1})_{\geq} \right] \Theta_-,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{t_{-M}} \Theta_- &= \left(\partial_{t_{-M}} \tilde{B} \right) \Theta_{<}^{-1} - \tilde{B} \Theta_{<}^{-1} (\partial_{t_{-M}} \Theta_{<}) \Theta_{<}^{-1} \\
&= \left[\left(\partial_{t_{-M}} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1} + \Theta_- \mathcal{E}_{-M} \Theta_-^{-1} - (\Theta_+ \mathcal{E}_{-M} \Theta_+^{-1})_{<} \right] \Theta_-.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Como veremos a seguir, podemos contruir o par de Lax geral a partir destas projeções $(\Theta_- \mathcal{E}_M \Theta_-^{-1})_{\geq}$ e $(\Theta_+ \mathcal{E}_{-M} \Theta_+^{-1})_{<}$.

Da derivada (2.49), por exemplo, para $M = 1$ temos

$$\partial_x \Theta_- = \left[\left(\partial_x \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1} + \Theta_- \mathcal{E}_x \Theta_-^{-1} - (\Theta_- \mathcal{E}_x \Theta_-^{-1})_{\geq} \right] \Theta_-. \tag{2.51}$$

Trocando a derivada parcial $\partial_x \Theta_-$ por $\mathcal{D}_x \Theta_- = \partial_x \Theta_- + \Theta_- \mathcal{D}_x$, e multiplicando pela direita por Θ_-^{-1} a equação acima, encontramos

$$\Theta_- (\mathcal{D}_x + \mathcal{E}_x) \Theta_-^{-1} = \mathcal{D}_x + (\Theta_- \mathcal{E}_x \Theta_-^{-1})_{\geq} - \left(\partial_x \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1}. \tag{2.52}$$

De maneira equivalente, das derivadas (2.49) e (2.50), temos as relações

$$\Theta_- (\mathcal{D}_{t_M} + \mathcal{E}_M) \Theta_-^{-1} = \mathcal{D}_{t_M} + (\Theta_- \mathcal{E}_M \Theta_-^{-1})_{\geq} - \left(\partial_{t_M} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1}, \quad (2.53)$$

$$\Theta_- (\mathcal{D}_{t_{-M}} + \mathcal{E}_{-M}) \Theta_-^{-1} = \mathcal{D}_{t_{-M}} + (\Theta_+ \mathcal{E}_{-M} \Theta_+^{-1})_{<} - \left(\partial_{t_{-M}} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1}. \quad (2.54)$$

Levando em consideração o fato de que $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_M$ e $\mathcal{E}_{-M}$ devem satisfazer as equações de curvatura nula

$$[\mathcal{D}_x + \mathcal{E}_x, \mathcal{D}_{t_{\pm M}} + \mathcal{E}_{\pm M}] = 0, \quad (2.55)$$

conjugando estas equações temos

$$\begin{aligned} \Theta_- [\mathcal{D}_x + \mathcal{E}_x, \mathcal{D}_{t_{\pm M}} + \mathcal{E}_{\pm M}] \Theta_-^{-1} &= \\ &= [\Theta_- (\mathcal{D}_x + \mathcal{E}_x) \Theta_-^{-1}, \Theta_- (\mathcal{D}_{t_{\pm M}} + \mathcal{E}_{\pm M}) \Theta_-^{-1}] = 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

o que resulta na equação de curvatura nula

$$[\mathcal{D}_x + \tilde{A}_x, \mathcal{D}_{t_m} + \tilde{A}_{t_m}] = 0 \quad (2.57)$$

para o par de Lax

$$\tilde{A}_x = \tilde{B} (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_x \Theta_{<})_{\geq} \tilde{B}^{-1} - \left(\partial_x \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1} \quad (2.58)$$

e

$$\tilde{A}_{t_m} = \begin{cases} \tilde{B} (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_M \Theta_{<})_{\geq} \tilde{B}^{-1} - \left(\partial_{t_M} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1}, & \text{para } m = M, \\ \tilde{B} B (\Theta_{>} \mathcal{E}_{-M} \Theta_{>}^{-1})_{<} B^{-1} \tilde{B}^{-1} - \left(\partial_{t_{-M}} \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1}, & \text{para } m = -M. \end{cases} \quad (2.59)$$

As expressões acima para $\tilde{A}_{t_M}$ e $\tilde{A}_{t_{-M}}$ também poderiam ter sido obtidas a partir das derivadas (2.47) e (2.48), adotando os mesmos passos, e resultam nas somas

$$\tilde{A}_{t_M} = \sum_{i=0}^{aM} \tilde{A}_M^{(i)} = \tilde{A}_M^{(aM)} + \tilde{A}_M^{(aM-1)} + \cdots + \tilde{A}_M^{(0)} \quad (2.60)$$

e

$$\tilde{A}_{t_{-M}} = \sum_{i=0}^{aM} \tilde{A}_{-M}^{(-i)} = \tilde{A}_{-M}^{(-aM)} + \tilde{A}_{-M}^{(-aM+1)} + \cdots + \tilde{A}_{-M}^{(0)} \quad (2.61)$$

onde $\tilde{A}_M^{(i)}, \tilde{A}_{-M}^{(-i)} \in \hat{\mathcal{G}}$ são elementos de grau i e $-i$, respectivamente, em que $\tilde{A}_1^{(a)} = \tilde{B} E^{(a)} \tilde{B}^{-1}$.

O elemento $\tilde{B}$ atua como uma transformação de gauge nos modelos, para se convencer disso basta comparar as relações (2.19) e (2.20) com o par de Lax (2.58) e (2.59). E pode ser interpretado como uma parcela do elemento B , que, por sua vez, deve satisfazer a condição adicional:

$$(\partial_x B) B^{-1} = b B \varepsilon_1^{(0)} B^{-1} - (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_x \Theta_{<})_0. \quad (2.62)$$

Essa interpretação permite visualizar os efeitos de deslocar parte do termo Θ_0 entre os operadores de dressing Θ_+ e Θ_- . Por exemplo, quando assumimos $\tilde{\theta}^{(0)} = \theta^{(0)}$ temos

$$\Theta_-^{-1} \Theta_+ = \left(\dots e^{\theta^{(-2)}} e^{\theta^{(-1)}} e^{c \theta^{(0)}} \right) \left(e^{(1-c) \theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} e^{\theta^{(2)}} \dots \right), \quad (2.63)$$

assim, para $c = 0$ o termo Θ_0 está todo em Θ_+ , enquanto para $c = 1/2$ temos metade de Θ_0 em Θ_+ e a outra metade em Θ_- , já para $c = 1$ o termo Θ_0 está totalmente contido em Θ_- .

A decomposição RHB pode ser recuperada quando tomamos $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$ na decomposição g-RHB.

2.6 Construção de hierarquias integráveis

Recapitulando o que vimos até aqui, dada uma combinação $\{\hat{\mathcal{G}}, Q, E, a, b, c\}$ podemos determinar o Lax espacial da hierarquia a partir da definição (2.58), para $c = 0$, temos

$$A_x = \left(e^{-\theta^{(-1)}} e^{-\theta^{(-2)}} \dots \mathcal{E}_x \dots e^{\theta^{(-2)}} e^{\theta^{(-1)}} \right)_{\geq}, \quad (2.64)$$

onde $\theta^{(i)}$ e $\theta^{(-i)}$ pertencem a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ e possuem grau i e $-i$, respectivamente, em que $i \in \mathbb{Z}_+$, e o elemento $\mathcal{E}_x$ é dado por

$$\mathcal{E}_x = E^{(a)} + b \sum_{i=0}^{a-1} \varepsilon_1^{(i)}, \quad (2.65)$$

sendo que $\varepsilon_1^{(i)} \in \hat{\mathcal{G}}$ é um elemento constante de grau i , $a \in \mathbb{Z}_+^*$ e b é igual a 0 ou 1. Os campos da hierarquia estão contidos nos elementos $\theta^{(0)}, \theta^{(\pm 1)}, \theta^{(\pm 2)}, \dots$. A projeção (2.64) resulta na soma

$$A_x = \sum_{i=0}^a A_1^{(i)} = A_1^{(a)} + A_1^{(a-1)} + \dots + A_1^{(0)}, \quad (2.66)$$

onde $A_1^{(i)} \in \hat{\mathcal{G}}$ é um elemento de grau i , em que $A_1^{(a)} = E^{(a)}$.

Depois de obter o Lax espacial, o substituímos na equação de curvatura nula

$$[\mathcal{D}_x + A_x, \mathcal{D}_{t_m} + A_{t_m}] = 0 \quad (2.67)$$

com

$$A_{t_m} = \begin{cases} A_M^{(aM)} + A_M^{(aM-1)} + \cdots + A_M^{(0)}, & \text{para } m = M, \\ A_{-M}^{(-aM)} + A_{-M}^{(-aM+1)} + \cdots + A_{-M}^{(-1)}, & \text{para } m = -M, \end{cases} \quad (2.68)$$

onde $A_M^{(i)}, A_{-M}^{(-i)} \in \hat{\mathcal{G}}$ são elementos de grau i e $-i$, respectivamente, $m \in \mathbb{Z}^*$ e $M \in \mathbb{Z}_+^*$. Resolvendo de maneira recursiva a equação de curvatura nula, para cada fluxo, é possível determinar o Lax A_{t_m} e as equações de movimento correspondentes.

Além do mais, para $c \neq 0$, hierarquias equivalentes podem ser encontradas a partir do gauge

$$\tilde{A}_x = e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} A_x e^{c\tilde{\theta}^{(0)}} - \left(\partial_x e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} \right) e^{c\tilde{\theta}^{(0)}}, \quad (2.69)$$

$$\tilde{A}_{t_m} = e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} A_{t_m} e^{c\tilde{\theta}^{(0)}} - \left(\partial_{t_m} e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} \right) e^{c\tilde{\theta}^{(0)}}, \quad (2.70)$$

cujas equações de movimento são dadas pela equação de curvatura nula

$$[\mathcal{D}_x + \tilde{A}_x, \mathcal{D}_{t_m} + \tilde{A}_{t_m}] = 0. \quad (2.71)$$

Portanto, um modelo integrável é classificado pela combinação $\{\hat{\mathcal{G}}, Q, E, a, b, c, m\}$. Os modelos integráveis com a estrutura $\{\hat{\mathcal{G}}, Q, E, a, b, c\}$ em comum pertencem a mesma hierarquia integrável. E ainda existem equivalências entre as hierarquias integráveis com a mesma estrutura $\{\hat{\mathcal{G}}, Q, E, a, b\}$.

Caso $a = 1$

Para $a = 1$ a projeção (2.64) resulta em um Lax espacial do tipo

$$A_x = E^{(1)} + A_1^{(0)}. \quad (2.72)$$

Onde os campos da teoria estão contidos em $A_1^{(0)}$ e o elemento semi-simples $E = E^{(1)} \in \mathcal{G}^{(1)}$ decompõe a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ nos subespaços $\mathcal{K}$ e $\mathcal{M}$. A seguir, veremos o passo a passo da resolução da equação de curvatura nula (2.67) para este Lax. A essência da coisa não muda muito para os demais casos, $a \geq 2$.

Fluxos temporais positivos

Para fluxos temporais positivos a equação de curvatura nula (2.67), substituindo o Lax (2.72), resulta em

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_M} + A_M^{(M)} + A_M^{(M-1)} + \cdots + A_M^{(0)} \right] = 0. \quad (2.73)$$

Decompondo este resultado grau a grau, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[E^{(1)}, A_M^{(M)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(M)} + \left[E^{(1)}, A_M^{(M-1)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(M)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(M-1)} + \left[E^{(1)}, A_M^{(M-2)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(M-1)} \right] = 0, \\ & \vdots \\ & \partial_x A_M^{(1)} + \left[E^{(1)}, A_M^{(0)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(1)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(0)} - \partial_{t_M} A_1^{(0)} + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(0)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Dados os elementos $E^{(1)}$ e $A_1^{(0)}$, para cada M , resolvemos primeiro a equação de grau mais alto e a equação seguinte é resolvida usando estes resultados e assim sucessivamente até que a equação de grau mais baixo seja resolvida. As equações de movimento para cada fluxo t_M são dadas pela equação de grau zero

$$\partial_x A_M^{(0)} - \partial_{t_M} A_1^{(0)} + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(0)} \right] = 0. \quad (2.75)$$

Além de separar em graus, também podemos decompor cada equação de (2.74) em uma parte que pertence ao subespaço kernel $\mathcal{K}$ e outra parte que pertence ao subespaço image $\mathcal{M}$. Assim, a equação de grau $M + 1$ determina que $A_M^{(M)} \in \mathcal{K}$, a parte pertencente a $\mathcal{K}$ da equação de grau M determina $A_M^{(M)}$, enquanto a parte pertencente a $\mathcal{M}$ da equação de grau M determina $A_{M\mathcal{M}}^{(M-1)} \in \mathcal{M}$, onde $A_M^{(M-1)} = A_{M\mathcal{K}}^{(M-1)} + A_{M\mathcal{M}}^{(M-1)}$. A parte pertencente a $\mathcal{K}$ da equação de grau $M - 1$ determina $A_{M\mathcal{K}}^{(M-1)} \in \mathcal{K}$, enquanto a parte pertencente a $\mathcal{M}$ da equação de grau $M - 1$ determina $A_{M\mathcal{M}}^{(M-2)} \in \mathcal{M}$, onde $A_M^{(M-2)} = A_{M\mathcal{K}}^{(M-2)} + A_{M\mathcal{M}}^{(M-2)}$. E assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t_M} = A_M^{(M)} + A_M^{(M-1)} + A_M^{(M-2)} + \cdots + A_M^{(0)}$.

Fluxos temporais negativos

Para fluxos temporais negativos a equação de curvatura nula (2.67), substituindo o Lax (2.72), resulta em

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_{-M}} + A_{-M}^{(-M)} + A_{-M}^{(-M+1)} + \cdots + A_{-M}^{(-1)} \right] = 0 \quad (2.76)$$

Decompondo este resultado grau a grau, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_x A_{-M}^{(-M)} + \left[A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-M)} \right] &= 0, \\ \partial_x A_{-M}^{(-M+1)} + \left[E^{(1)}, A_{-M}^{(-M)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-M+1)} \right] &= 0, \\ \partial_x A_{-M}^{(-M+2)} + \left[E^{(1)}, A_{-M}^{(-M+1)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-M+2)} \right] &= 0, \\ &\vdots \\ \partial_x A_{-M}^{(-1)} + \left[E^{(1)}, A_{-M}^{(-2)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-1)} \right] &= 0, \\ \partial_{t_{-M}} A_1^{(0)} - \left[E^{(1)}, A_{-M}^{(-1)} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Dados os elementos $E^{(1)}$ e $A_1^{(0)}$, para cada M , resolvemos primeiro a equação de grau mais negativo e a equação seguinte é resolvida usando estes resultados e assim sucessivamente até que a equação de grau zero seja resolvida. As equações de movimento para cada fluxo t_{-M} são dadas pela equação de grau zero

$$\partial_{t_{-M}} A_1^{(0)} - \left[E^{(1)}, A_{-M}^{(-1)} \right] = 0. \quad (2.78)$$

Assim, a parte pertencente a $\mathcal{K}$ da equação de grau $-M$ determina $A_{-MK}^{(-M)}$, enquanto a parte pertencente a $\mathcal{M}$ da equação de grau $-M$ determina $A_{-MM}^{(-M)} \in \mathcal{M}$, onde $A_{-M}^{(-M)} = A_{-MK}^{(-M)} + A_{-MM}^{(-M)}$. A parte pertencente a $\mathcal{K}$ da equação de grau $-M+1$ determina $A_{-MK}^{(-M+1)} \in \mathcal{K}$, enquanto a parte pertencente a $\mathcal{M}$ da equação de grau $-M+1$ determina $A_{-MM}^{(-M+1)} \in \mathcal{M}$, onde $A_{-M}^{(-M+1)} = A_{-MK}^{(-M+1)} + A_{-MM}^{(-M+1)}$. E assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t_{-M}} = A_{-M}^{(-M)} + A_{-M}^{(-M+1)} + \cdots + A_{-M}^{(-1)}$.

2.7 Método de dressing

O método de dressing é usado para encontrar soluções não triviais de um modelo integrável a partir de uma configuração de vácuo do mesmo. Considere a

configuração de vácuo

$$\left(\partial_x + \tilde{A}_x^{vac}\right) \tilde{\Psi}_0 = 0, \quad (2.79)$$

$$\left(\partial_{t_m} + \tilde{A}_{t_m}^{vac}\right) \tilde{\Psi}_0 = 0, \quad (2.80)$$

do modelo integrável descrito pelo sistema linear

$$\left(\partial_x + \tilde{A}_x\right) \tilde{\Psi} = 0, \quad (2.81)$$

$$\left(\partial_{t_m} + \tilde{A}_{t_m}\right) \tilde{\Psi} = 0. \quad (2.82)$$

Vimos que podemos relacionar a configuração geral com a configuração de vácuo através das tranformações

$$\tilde{A}_x = \Theta_{\pm} \tilde{A}_x^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - (\partial_x \Theta_{\pm}) \Theta_{\pm}^{-1} = -\partial_x \left(\Theta_{\pm} \tilde{\Psi}_0 \right) \tilde{\Psi}_0^{-1} \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (2.83)$$

$$\tilde{A}_{t_m} = \Theta_{\pm} \tilde{A}_{t_m}^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - (\partial_{t_m} \Theta_{\pm}) \Theta_{\pm}^{-1} = -\partial_{t_m} \left(\Theta_{\pm} \tilde{\Psi}_0 \right) \tilde{\Psi}_0^{-1} \Theta_{\pm}^{-1}. \quad (2.84)$$

Os operadores de dressing Θ_+ e Θ_- conectam o par de Lax $\tilde{A}_x$ e $\tilde{A}_{t_m}$ com o par $\tilde{A}_x^{vac}$ e $\tilde{A}_{t_m}^{vac}$ através dessas transformações. Esse é o nome, porque o método funciona dessa maneira, é como se vestíssemos a solução conhecida associada à $\tilde{\Psi}_0$ com Θ_+ ou Θ_- obtendo como resultado dessa operação uma solução nova associada à $\tilde{\Psi} = \Theta_{\pm} \tilde{\Psi}_0$.

A aplicação do método consiste em três etapas, na primeira etapa, dado os potenciais $\tilde{A}_x$ e $\tilde{A}_x^{vac}$, olhando para as transformações

$$\tilde{A}_x = \Theta_{\pm} \tilde{A}_x^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - (\partial_x \Theta_{\pm}) \Theta_{\pm}^{-1} \quad (2.85)$$

onde

$$\Theta_+ = e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} e^{\theta^{(2)}} e^{\theta^{(3)}} \dots \quad (2.86)$$

e

$$\Theta_- = e^{-c\tilde{\theta}^{(0)}} e^{-\theta^{(-1)}} e^{-\theta^{(-2)}} e^{-\theta^{(-3)}} \dots \quad (2.87)$$

Escrevemos os elementos $\tilde{\theta}^{(0)}, \theta^{(0)}, \theta^{(\pm 1)}, \theta^{(\pm 2)}, \dots$ em termos dos geradores da álgebra $\hat{\mathcal{G}}$, sendo que cada termo é multiplicado por um coeficiente, e cada coeficiente é uma função que depende de x e t_m . Essas funções recebem o nome de campos auxiliares. Resolvendo a equação (2.85) de maneira recursiva, determinamos os campos auxiliares em termos dos campos da teoria contidos no Lax $\tilde{A}_x$. Os campos auxiliares são infinitos, basta calcular os primeiros, até obter os campos da teoria

em termos deles.

As próximas etapas do método dependem da função tau e do operador de vértice, definidos a seguir.

Função tau

Um ingrediente importante do método de dressing para determinar os campos auxiliares é a função tau, definida por

$$\tau_{ij} \equiv \langle \lambda_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i | \tilde{\Psi}_0 g \tilde{\Psi}_0^{-1} | \lambda_j \rangle \quad (2.88)$$

com $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Os estados $|\lambda_i\rangle$ e $|\lambda_j\rangle$ são estados de projeção, que permitem determinar a partir do lado esquerdo da equação (2.88) os campos auxiliares em termos das funções: $\{\tau_{00}, \tau_{01}, \tau_{10}, \tau_{11}, \tau_{02}, \dots\}$

Na primeira etapa do método, encontramos as campos da teoria em termos dos campos auxiliares. Na segunda etapa, obtemos os campos auxiliares em termos das funções tau, assim para obter a solução, a última etapa consiste em calcular as funções tau em termos de x e t_m a partir do lado direito da equação (2.88) com o auxílio do vértice.

Operador de vértice

O operador de vértice é o outro ingrediente fundamental do método, e deve satisfazer as relações de comutação

$$[V_f, \tilde{A}_x^{vac}] = (\kappa(\xi_f)) V_f \quad (2.89)$$

e

$$[V_f, \tilde{A}_{t_m}^{vac}] = (\omega_m(\xi_f)) V_f, \quad (2.90)$$

sendo que $f \in \mathbb{Z}_+^*$, ξ_f é um parâmetro que pode ser real ou complexo, $V_f \equiv V(\xi_f)$ é o operador de vértice e as funções $\kappa(\xi_f)$ e $\omega_m(\xi_f)$ são os seus autovalores correspondentes.

A partir da conjugação

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0 V_f \tilde{\Psi}_0^{-1} &= V_f + [V_f, \tilde{A}_x^{vac} x + \tilde{A}_{t_m}^{vac} t_m] + \\ &+ \frac{1}{2} [[V_f, \tilde{A}_x^{vac} x + \tilde{A}_{t_m}^{vac} t_m], \tilde{A}_x^{vac} x + \tilde{A}_{t_m}^{vac} t_m] + \dots, \end{aligned} \quad (2.91)$$

obtemos

$$\tilde{\Psi}_0 V_f \tilde{\Psi}_0^{-1} = e^{\rho_f} V_f, \quad (2.92)$$

com $\rho_f \equiv \rho_f(x, t_m) = (\kappa(\xi_f))x + (\omega_m(\xi_f))t_m$. Usando a identidade $\tilde{\Psi}_0 \tilde{\Psi}_0^{-1} = 1$ para facilitar os cálculos, temos que

$$\tilde{\Psi}_0 (V_f)^d \tilde{\Psi}_0^{-1} = \left(\tilde{\Psi}_0 V_f \tilde{\Psi}_0^{-1} \right)^d \quad (2.93)$$

com $d \in \mathbb{Z}_+^*$. Assim, é fácil expandir o resultado anterior (2.92) para

$$\tilde{\Psi}_0 e^{V_f} \tilde{\Psi}_0^{-1} = \exp(e^{\rho_f} V_f). \quad (2.94)$$

Conhecendo o vértice da teoria e seus autovalores, podemos calcular as funções tau de interesse a partir do lado direito da equação (2.88), assumindo

$$g = \prod_{f=1}^d e^{V_f} \quad (2.95)$$

chegamos em

$$\tau_{ij} = \langle \lambda_i | \prod_{f=1}^d (1 + e^{\rho_f} V_f + e^{2\rho_f} V_f^2 + \dots) | \lambda_j \rangle. \quad (2.96)$$

Geralmente, os termos $\langle \lambda_i | V_f^n | \lambda_j \rangle$ com $n \geq 2$ são nulos, como no exemplo do apêndice D, o que permite truncar a série acima da seguinte maneira:

$$\tau_{ij} = \langle \lambda_i | \prod_{f=1}^d (1 + e^{\rho_f} V_f) | \lambda_j \rangle. \quad (2.97)$$

Para cada valor de d obtemos uma solução. O interessante do método dressing é que encontramos soluções do modelo integrável em questão e de toda a hierarquia que ele pertence simultaneamente, desde que sejam conhecidos os autovalores $\omega_m(\xi_f)$ associados a cada modelo.

Capítulo 3

Hierarquias Integráveis

Aplicando o método de construção de hierarquias integráveis abordado no capítulo anterior, veremos alguns exemplos de hierarquias integráveis com $a = 1$ e $a = 2$. Todas as combinações estudadas (tabela abaixo), contém a álgebra $\hat{sl}_2$ com gradação principal ou homogênea.¹ Também construímos um modelo integrável com $a = 3$.

Hierarquia	$\hat{\mathcal{G}}$	Q	$E = E^{(a)}$	a	b	c
mKdV	$\hat{sl}_2$	Q_p	$\frac{1}{2}(E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1)$	1	0 ou 1	$0 \leq c \leq 1$
AKNS	$\hat{sl}_2$	Q_h	$\frac{1}{2}H^1$	1	0 ou 1	0
WKI	$\hat{sl}_2$	Q_h	$\frac{1}{2}H^1$	1	0	1
GI	$\hat{sl}_2$	Q_p	$\frac{1}{2}H^1$	2	0 ou 1	0
CLL	$\hat{sl}_2$	Q_p	$\frac{1}{2}H^1$	2	0 ou 1	1/2
KN	$\hat{sl}_2$	Q_p	$\frac{1}{2}H^1$	2	0 ou 1	1
Modelo v_1, v_2 e v_3	$\hat{sl}_2$	Q_p	$\frac{1}{2}(E_\alpha^1 + E_{-\alpha}^2)$	3	0	$0 \leq c \leq 1$

3.1 Hierarquia mKdV

Dadas as combinações $\{\hat{sl}_2, Q_p, E = \frac{1}{2}(E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1), a = 1, b = 0 \text{ ou } b = 1, c = 0\}$, a partir da definição (2.64), obtemos a hierarquia mKdV com condições de contorno nula ($b = 0$) e constante não nula ($b = 1$). Também olhamos para o gauge (2.69), com $c \neq 0$, em busca de hierarquias equivalentes a hierarquia mKdV.

¹Veja o apêndice A

3.1.1 Hierarquia mKdV

Considere a álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}_2$ com gradação principal. Neste caso, o operador de gradação é dado por

$$Q_p = \frac{1}{2}H^0 + 2\zeta \frac{d}{d\zeta}, \quad (3.1)$$

onde ζ é um parâmetro espectral, e decompõe os geradores da álgebra $H^k = \zeta^k H^0$, $E_\alpha^k = \zeta^k E_\alpha^0$ e $E_{-\alpha}^k = \zeta^k E_{-\alpha}^0$ da seguinte maneira

$$\mathcal{G}^{(2k)} = \{H^k\}, \quad \mathcal{G}^{(2k+1)} = \{E_\alpha^k, E_{-\alpha}^{k+1}\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Escolhendo $E = E^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1)$ temos os subespaços

$$\mathcal{K} = \{E_\alpha^k + E_{-\alpha}^{k+1}\}, \quad \mathcal{M} = \{E_\alpha^k - E_{-\alpha}^{k+1}, H^k\}. \quad (3.3)$$

Para esta estrutura algébrica, podemos contruir duas hierarquias integráveis, a primeira com $a = 1$ e $b = 0$ onde os modelos admitem vácuo nulo e outra hierarquia com $a = 1$ e $b = 1$ onde os modelos admitem vácuo constante não nulo. Todos esses modelos possuem apenas um campo $v = v(x, t_m)$ contido em $A_1^{(0)} = vH^0$. Isso ficará mais claro, no que segue.

Os modelos integráveis em questão são construídos a partir da definição (2.64) com $a = 1$, o que resulta na projeção

$$A_{x,mKdV} = E^{(1)} + b\varepsilon_1^{(0)} - [\theta^{(-1)}, E^{(1)}]. \quad (3.4)$$

Devido a (3.2), definimos

$$\theta^{(-1)} = \chi_{-1}E_\alpha^{-1} + \psi_{-1}E_{-\alpha}^0 \quad (3.5)$$

e

$$\varepsilon_1^{(0)} = \alpha_{0,1}H^0, \quad (3.6)$$

onde $\alpha_{0,1}$ é uma constante e os coeficientes χ_{-1} e ψ_{-1} são funções que dependem de x e t_m . Substituindo (3.6) e (3.5) em (3.4), encontramos

$$A_{x,mKdV} = \frac{1}{2}(E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1) + \frac{1}{2}(2b\alpha_{0,1} - \chi_{-1} + \psi_{-1})H^0. \quad (3.7)$$

Definindo a função $v = bv_0 + \frac{1}{2}(\psi_{-1} - \chi_{-1})$ com $v_0 = \alpha_{0,1}$, sendo que $v = v(x, t_m)$ é o campo das hierarquias. Substituindo $\alpha_{0,1} = v_0$ e $\chi_{-1} = \psi_{-1} - 2v + 2bv_0$ em (3.7), obtemos o Lax espacial

$$A_{x,mKdV} = \frac{1}{2} (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1) + vH^0. \quad (3.8)$$

Da equação (2.62), definindo $B = e^{(\phi + bv_0x)H^0}$ onde o coeficiente ϕ é uma função de x e t_m , temos também a condição adicional

$$(\partial_x B) B^{-1} = [\theta^{(-1)}, E^{(1)}] \rightarrow \phi_x = -v. \quad (3.9)$$

Essa função ϕ está relacionada com os fluxos negativos da teoria.

Note que para hierarquia com $b = 0$ existem somente os fluxos temporais ímpares, uma vez que, as condições de comutação

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{\pm M}] = [E^{(1)}, \varepsilon_{\pm M}^{(\pm M)}] = 0 \quad (3.10)$$

implicam que existem $\mathcal{E}_{\pm M}$ diferentes de zero apenas para valores ímpares de M , isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2} (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1), \\ \mathcal{E}_{-1} &= \beta_{-1,-1} (E_\alpha^{-1} + E_{-\alpha}^0), \\ \mathcal{E}_2 &= 0, \\ \mathcal{E}_{-2} &= 0, \\ \mathcal{E}_3 &= \beta_{3,3} (E_\alpha^1 + E_{-\alpha}^2), \\ \mathcal{E}_{-3} &= \beta_{-3,-3} (E_\alpha^{-2} + E_{-\alpha}^{-1}), \\ \mathcal{E}_4 &= 0, \\ \mathcal{E}_{-4} &= 0, \\ \mathcal{E}_5 &= \beta_{5,5} (E_\alpha^2 + E_{-\alpha}^3), \\ \mathcal{E}_{-5} &= \beta_{-5,-5} (E_\alpha^{-3} + E_{-\alpha}^{-2}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

E por aí vai, sendo que $\beta_{-1,-1}$, $\beta_{3,3}$, $\beta_{-3,-3}$, $\beta_{5,5}$ e $\beta_{-5,-5}$ são constantes diferentes de zero. Agora, para hierarquia com $b = 1$, existem os fluxos temporais positivos ímpares e negativos pares, dado que as condições de comutação

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_M] = [E^{(1)} + v_0 H^0, \varepsilon_M^{(M)} + \varepsilon_M^{(M-1)} + \dots + \varepsilon_M^{(0)}] = 0 \quad (3.12)$$

e

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{-M}] = \left[E^{(1)} + v_0 H^0, \varepsilon_{-M}^{(-M)} + \varepsilon_{-M}^{(-M+1)} + \cdots + \varepsilon_{-M}^{(-1)} \right] = 0 \quad (3.13)$$

resultam em

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2} (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1 + 2v_0 H^0), \\ \mathcal{E}_{-1} &= 0, \\ \mathcal{E}_2 &= 0, \\ \mathcal{E}_{-2} &= \beta_{-1,-2} \zeta^{-1} (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1 + 2v_0 H^0), \\ \mathcal{E}_3 &= (\beta_{3,3} \zeta + \beta_{1,3}) (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1 + 2v_0 H^0), \\ \mathcal{E}_{-3} &= 0, \\ \mathcal{E}_4 &= 0, \\ \mathcal{E}_{-4} &= (\beta_{-3,-4} \zeta^{-2} + \beta_{-1,-4} \zeta^{-1}) (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1 + 2v_0 H^0), \\ \mathcal{E}_5 &= (\beta_{5,5} \zeta^2 + \beta_{3,5} \zeta + \beta_{1,5}) (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1 + 2v_0 H^0), \\ \mathcal{E}_{-5} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

E por aí vai, sendo que $\beta_{-1,-2} \neq 0$, $\beta_{3,3} \neq 0$, $\beta_{1,3}$, $\beta_{-3,-4} \neq 0$, $\beta_{-1,-4}$, $\beta_{5,5} \neq 0$, $\beta_{3,5}$ e $\beta_{1,5}$ são constantes. Os fluxos temporais negativos pares da hierarquia mKdV foram considerados pela primeira vez em [8].

A equação de movimento para cada fluxo é obtida através a equação de curvatura nula (2.67), onde

$$A_M^{(2i)} = a_{2i,M} H^i, \quad (3.15)$$

$$A_{-M}^{(-2i)} = a_{-2i,-M} H^{-i}, \quad (3.16)$$

$$A_M^{(2i+1)} = b_{2i+1,M} E_\alpha^i + c_{2i+1,M} E_{-\alpha}^{i+1} \quad (3.17)$$

e

$$A_{-M}^{(-2i-1)} = b_{-2i-1,-M} E_\alpha^{-i-1} + c_{-2i-1,-M} E_{-\alpha}^{-i} \quad (3.18)$$

com $M \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i \in \mathbb{Z}_+$. Os coeficientes $a_{\pm 2i, \pm M}$, $b_{\pm 2i \pm 1, \pm M}$ e $c_{\pm 2i \pm 1, \pm M}$ são funcionais do campo v . Abaixo, resolvendo a equação de curvatura nula, são determinados os operadores de Lax temporais e as respectivas equações de movimentos para os primeiros fluxos temporais da teoria.

Fluxos temporais positivos ímpares

Substituindo o Lax (3.8) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais positivos ímpares

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_M} + A_M^{(M)} + A_M^{(M-1)} + \cdots + A_M^{(0)} \right] = 0 \quad (3.19)$$

onde $M = 2j + 1$ com $j \in \mathbb{Z}_+$. Sendo que $E^{(1)} = \frac{1}{2}(E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1)$ e $A_1^{(0)} = vH^0$. Decompondo este resultado grau a grau, encontramos

$$\begin{aligned} & \left[E^{(1)}, A_{2j+1}^{(2j+1)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_{2j+1}^{(2j+1)} + \left[E^{(1)}, A_{2j+1}^{(2j)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_{2j+1}^{(2j+1)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_{2j+1}^{(2j)} + \left[E^{(1)}, A_{2j+1}^{(2j-1)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_{2j+1}^{(2j)} \right] = 0, \\ & \vdots \\ & \partial_x A_{2j+1}^{(1)} + \left[E^{(1)}, A_{2j+1}^{(0)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_{2j+1}^{(1)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_{2j+1}^{(0)} - \partial_{t_{2j+1}} A_1^{(0)} + \left[A_1^{(0)}, A_{2j+1}^{(0)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para cada j , a equação de grau $2j + 2$ determina os coeficientes $b_{2j+1,2j+1}$ e $c_{2j+1,2j+1}$, depois substituindo $b_{2j+1,2j+1}$ e $c_{2j+1,2j+1}$ na equação de grau $2j + 1$ obtemos o coeficiente $a_{2j,2j+1}$, da equação de grau $2j$ obtemos os coeficientes $b_{2j-1,2j+1}$ e $c_{2j-1,2j+1}$, e assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t_{2j+1}} = A_{2j+1}^{(2j+1)} + A_{2j+1}^{(2j)} + \cdots + A_{2j+1}^{(0)}$. A equação de movimento para o campo v é dada pela equação de grau zero.

Resolvendo (3.19) para os primeiros fluxos, encontramos os resultados abaixo.

Para $j = 0$:

$$A_{t_1, mKdV} = \frac{1}{2} (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^1) + vH^0, \quad (3.21)$$

para $j = 1$:

$$\begin{aligned} A_{t_3, mKdV} = & \frac{1}{2} (E_\alpha^1 + E_{-\alpha}^2) + vH^1 + (v_x - v^2) E_\alpha^0 - (v_x + v^2) E_{-\alpha}^1 + \\ & + (v_{xx} - 2v^3) H^0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

para $j = 2$:

$$\begin{aligned}
 A_{t_5, mKdV} = & \frac{1}{2} (E_\alpha^2 + E_{-\alpha}^3) + vH^2 + (v_x - v^2) E_\alpha^1 - (v_x + v^2) E_{-\alpha}^2 + \\
 & + (v_{xx} - 2v^3) H^1 + [v_{3x} - 2vv_{xx} + v_x (v_x - 6v^2) + 3v^4] E_\alpha^0 + \\
 & - [v_{3x} + 2vv_{xx} - v_x (v_x + 6v^2) - 3v^4] E_{-\alpha}^1 + \\
 & + [v_{4x} - 2v (5vv_{xx} + 5v_x^2 - 3v^4)] H^0,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

o que resulta nas equações de movimento para os primeiros fluxos temporais positivos da teoria

$$v_{t_1} = v_x, \tag{3.24}$$

$$v_{t_3} = v_{3x} - 6v^2 v_x, \tag{3.25}$$

$$v_{t_5} = v_{5x} - 10v^2 v_{3x} - 10v_x (4vv_{2x} + v_x^2 - 3v^4). \tag{3.26}$$

A equação (3.25) é a conhecida equação mKdV. Como esperado, as equações de movimento acima admitem soluções tanto do tipo vácuo nulo $v = 0$ e quanto do tipo vácuo constante não nulo $v = v_0 \neq 0$.

Fluxos temporais negativos ímpares

Substituindo o Lax (3.8) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais negativos ímpares

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_{-M}} + A_{-M}^{(-M)} + A_{-M}^{(-M+1)} + \cdots + A_{-M}^{(-1)} \right] = 0 \tag{3.27}$$

onde $M = 2j+1$ com $j \in \mathbb{Z}_+$. Decompondo este resultado grau a grau, encontramos

$$\begin{aligned}
 & \partial_x A_{-2j-1}^{(-2j-1)} + [A_1^{(0)}, A_{-2j-1}^{(-2j-1)}] = 0, \\
 & \partial_x A_{-2j-1}^{(-2j)} + [E^{(1)}, A_{-2j-1}^{(-2j-1)}] + [A_1^{(0)}, A_{-2j-1}^{(-2j)}] = 0, \\
 & \partial_x A_{-2j-1}^{(-2j+1)} + [E^{(1)}, A_{-2j-1}^{(-2j)}] + [A_1^{(0)}, A_{-2j-1}^{(-2j+1)}] = 0, \\
 & \vdots \\
 & \partial_x A_{-2j-1}^{(-1)} + [E^{(1)}, A_{-2j-1}^{(-2)}] + [A_1^{(0)}, A_{-2j-1}^{(-1)}] = 0, \\
 & \partial_{t_{-2j-1}} A_1^{(0)} - [E^{(1)}, A_{-2j-1}^{(-1)}] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Para cada j , a equação de grau $-2j - 1$ determina os coeficientes $b_{-2j-1, -2j-1}$ e $c_{-2j-1, -2j-1}$, depois substituindo $b_{-2j-1, -2j-1}$ e $c_{-2j-1, -2j-1}$ na equação de grau $-2j$ obtemos o coeficiente $a_{-2j, -2j-1}$, da equação de grau $-2j+1$ obtemos os coeficientes $b_{-2j+1, -2j-1}$ e $c_{-2j+1, -2j-1}$, e assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t_{-2j-1}} = A_{-2j-1}^{(-2j-1)} + A_{-2j-1}^{(-2j)} + \cdots + A_{-2j-1}^{(-1)}$. A equação de movimento do modelo é dada pela equação de grau zero.

Resolvendo (3.27) para os primeiros fluxos temporais, encontramos os resultados abaixo. Para $j = 0$:

$$A_{t_{-1}, mKdV} = \frac{1}{2} (e^{2\phi} E_{\alpha}^{-1} + e^{-2\phi} E_{-\alpha}^0), \quad (3.29)$$

para $j = 1$:

$$\begin{aligned} A_{t_{-3}, mKdV} = & \frac{1}{2} (e^{2\phi} E_{\alpha}^{-2} + e^{-2\phi} E_{-\alpha}^{-1}) + \frac{1}{4} [\partial_x^{-1} (e^{2\phi} - e^{-2\phi})] H^{-1} + \\ & + \frac{1}{4} e^{2\phi} \partial_x^{-1} [e^{-2\phi} \partial_x^{-1} (e^{2\phi} - e^{-2\phi})] E_{\alpha}^{-1} + \\ & - \frac{1}{4} e^{-2\phi} \partial_x^{-1} [e^{2\phi} \partial_x^{-1} (e^{2\phi} - e^{-2\phi})] E_{-\alpha}^0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $\phi = -\partial_x^{-1} v$. O que resulta nas equações de movimento para os primeiros fluxos temporais negativos ímpares da teoria:

$$\phi_{xt_{-1}} = \frac{1}{4} (e^{2\phi} - e^{-2\phi}), \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \phi_{xt_{-3}} = & \frac{1}{8} e^{2\phi} \partial_x^{-1} [e^{-2\phi} \partial_x^{-1} (e^{2\phi} - e^{-2\phi})] + \\ & + \frac{1}{8} e^{-2\phi} \partial_x^{-1} [e^{2\phi} \partial_x^{-1} (e^{2\phi} - e^{-2\phi})]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

As equações de movimento acima admitem solução do tipo vácuo nulo $v = 0$ (ou seja $\phi = 0$). A equação (3.31) é a conhecida equação de sinh-Gordon.

Fluxos temporais negativos pares

Substituindo o Lax (3.8) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais negativos pares

$$[\mathcal{D}_x + E^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_{-M}} + A_{-M}^{(-M)} + A_{-M}^{(-M+1)} + \cdots + A_{-M}^{(-1)}] = 0, \quad (3.33)$$

onde $M = 2j+2$ com $j \in \mathbb{Z}_+$. Decompondo este resultado grau a grau, encontramos

$$\begin{aligned}
& \partial_x A_{-2j-2}^{(-2j-2)} + [A_1^{(0)}, A_{-2j-2}^{(-2j-2)}] = 0, \\
& \partial_x A_{-2j-2}^{(-2j-1)} + [E^{(1)}, A_{-2j-2}^{(-2j-2)}] + [A_1^{(0)}, A_{-2j-2}^{(-2j-1)}] = 0, \\
& \partial_x A_{-2j-2}^{(-2j)} + [E^{(1)}, A_{-2j-2}^{(-2j-1)}] + [A_1^{(0)}, A_{-2j-2}^{(-2j)}] = 0, \\
& \vdots \\
& \partial_x A_{-2j-2}^{(-1)} + [E^{(1)}, A_{-2j-2}^{(-2)}] + [A_1^{(0)}, A_{-2j-2}^{(-1)}] = 0, \\
& \partial_{t-2j-2} A_1^{(0)} - [E^{(1)}, A_{-2j-2}^{(-1)}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Para cada j , a equação de grau $-2j-2$ determina os coeficientes $a_{-2j-2, -2j-2}$, depois substituindo $a_{-2j-2, -2j-2}$ na equação de grau $-2j-1$ obtemos os coeficientes $b_{-2j-1, -2j-1}$ e $c_{-2j-1, -2j-1}$, da equação de grau $-2j$ obtemos o coeficiente $a_{-2j, -2j-1}$, e assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t-2j-2} = A_{-2j-2}^{(-2j-2)} + A_{-2j-2}^{(-2j-1)} + \dots + A_{-2j-2}^{(-1)}$. A equação de movimento do modelo é dada pela equação de grau zero.

Resolvendo (3.33) para os primeiros fluxos, encontramos os resultados abaixo. Para $j = 0$:

$$A_{t-2, mKdV} = \frac{1}{2}H^{-1} + \frac{1}{2}e^{2\phi} (\partial_x^{-1} e^{-2\phi}) E_{\alpha}^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2\phi} (\partial_x^{-1} e^{2\phi}) E_{-\alpha}^0, \tag{3.35}$$

para $j = 1$:

$$\begin{aligned}
A_{t-4, mKdV} = & \frac{1}{2}H^{-2} + \frac{1}{2}e^{2\phi} (\partial_x^{-1} e^{-2\phi}) E_{\alpha}^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2\phi} (\partial_x^{-1} e^{2\phi}) E_{-\alpha}^{-1} + \\
& + \frac{1}{4} (\partial_x^{-1} e^{2\phi}) (\partial_x^{-1} e^{-2\phi}) H^{-1} + \\
& + \frac{1}{4}e^{2\phi} \partial_x^{-1} [e^{-2\phi} (\partial_x^{-1} e^{2\phi}) (\partial_x^{-1} e^{-2\phi})] E_{\alpha}^{-1} + \\
& - \frac{1}{4}e^{-2\phi} \partial_x^{-1} [e^{2\phi} (\partial_x^{-1} e^{2\phi}) (\partial_x^{-1} e^{-2\phi})] E_{-\alpha}^0,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde $\phi = -\partial_x^{-1}v$, o que resulta nas equações de movimento para os primeiros fluxos temporais negativos pares da teoria

$$\phi_{xt-2} = \frac{1}{4}e^{2\phi} \partial_x^{-1} e^{-2\phi} + \frac{1}{4}e^{-2\phi} \partial_x^{-1} e^{2\phi}, \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\phi_{xt-4} &= \frac{1}{8}e^{2\phi}\partial_x^{-1}\left[e^{-2\phi}\left(\partial_x^{-1}e^{2\phi}\right)\left(\partial_x^{-1}e^{-2\phi}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{8}e^{-2\phi}\partial_x^{-1}\left[e^{2\phi}\left(\partial_x^{-1}e^{2\phi}\right)\left(\partial_x^{-1}e^{-2\phi}\right)\right].\end{aligned}\quad (3.38)$$

As equações de movimento acima admitem solução do tipo vácuo constante não nulo $v = v_0 \neq 0$ (ou seja $\phi = -v_0x$).

3.1.2 Hierarquias equivalentes

Hierarquias equivalentes a hierarquia mKdV podem ser encontradas a partir da transformação de gauge

$$\tilde{A}_{x,mKdV} = \tilde{B}A_{x,mKdV}\tilde{B}^{-1} - \left(\partial_x\tilde{B}\right)\tilde{B}^{-1}. \quad (3.39)$$

Definindo $\tilde{B} = e^{-c\tilde{\varphi}H^0}$ com $\tilde{\varphi}_x = -v$ e substituindo (3.8) em (3.39) chegamos no Lax

$$\tilde{A}_{x,mKdV} = \frac{1}{2}\left(e^{-2c\tilde{\varphi}}E_\alpha^0 + e^{2c\tilde{\varphi}}E_{-\alpha}^1\right) + (1-c)vH^0. \quad (3.40)$$

O fato do campo da teoria não mudar após o gauge, uma vez que $e^{-c\tilde{\varphi}H^0}vH^0e^{c\tilde{\varphi}H^0} = vH^0$, implica que os modelos integráveis obtidos a partir do Lax $\tilde{A}_{x,mKdV}$ são os mesmos modelos obtidos do Lax $A_{x,mKdV}$ independente do valor do parâmetro c . O par de Lax $A_{x,mKdV}$ e $A_{t_m,mKdV}$ pode até mudar após o gauge (2.58) e (2.59), mas as equações de movimento de cada fluxo permanecem iguais.

3.2 Hierarquias AKNS e WKI

Dadas as combinações $\{\hat{sl}_2, Q_h, E = \frac{1}{2}H^1, a = 1, b = 0 \text{ ou } b = 1, c = 0\}$, a partir da definição (2.64), obtemos abaixo a hierarquia AKNS com condições de contorno nula ($b = 0$) e constante não nula ($b = 1$). E olhando para o gauge (2.69) com $c = 1$, motramos que existe uma equivalência entre a hierarquia WKI e a hierarquia AKNS com condições de contorno nula.

3.2.1 Hierarquia AKNS

Considere a álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}_2$ com gradação homogênea. Neste caso, o operador de gradação é dado por

$$Q_h = \lambda \frac{d}{d\lambda}, \quad (3.41)$$

onde λ é um parâmetro espectral, e decompõe os geradores da álgebra $H^k = \lambda^k H^0$, $E_\alpha^k = \lambda^k E_\alpha^0$ e $E_{-\alpha}^k = \lambda^k E_{-\alpha}^0$ da seguinte maneira

$$\hat{\mathcal{G}}^{(k)} = \{H^k, E_\alpha^k, E_{-\alpha}^k\}, \quad (3.42)$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Escolhendo $E = E^{(1)} \equiv \frac{1}{2}H^1$ obtemos os subespaços

$$\mathcal{K} = \{H^k\}, \quad \mathcal{M} = \{E_\alpha^k, E_{-\alpha}^k\}. \quad (3.43)$$

Para esta estrutura algébrica, podemos contruir duas hierarquias integráveis, a primeira com $a = 1$ e $b = 0$ onde os modelos admitem vácuo nulo e outra hierarquia com $a = 1$ e $b = 1$ onde os modelos admitem vácuo constante não nulo.

Os modelos integráveis em questão são construídos a partir do Lax (2.64) com $a = 1$, o que resulta na projeção

$$A_{x,AKNS} = E^{(1)} + b\varepsilon_1^{(0)} - [\theta^{(-1)}, E^{(1)}]. \quad (3.44)$$

Devido a (3.42), definimos

$$\theta^{(-1)} = \varphi_{-1}H^{-1} + \chi_{-1}E_\alpha^{-1} + \psi_{-1}E_{-\alpha}^{-1} \quad (3.45)$$

e

$$\varepsilon_1^{(0)} = \alpha_{0,1}H^0 + \beta_{0,1}E_\alpha^0 + \gamma_{0,1}E_{-\alpha}^0, \quad (3.46)$$

onde $\alpha_{0,1}$, $\beta_{0,1}$ e $\gamma_{0,1}$ são constantes e os coeficientes φ_{-1} , χ_{-1} e ψ_{-1} são funções que dependem de x e t_m . Substituindo (3.46) e (3.45) em (3.44), encontramos

$$A_{x,AKNS} = \frac{1}{2}H^1 + b\alpha_{0,1}H^0 + (b\beta_{0,1} + \chi_{-1})E_\alpha^0 + (b\gamma_{0,1} - \psi_{-1})E_{-\alpha}^0. \quad (3.47)$$

Definindo as funções $p = bp_0 + \chi_{-1}$ e $q = bq_0 - \psi_{-1}$ com $p_0 = \beta_{0,1}$ e $q_0 = \gamma_{0,1}$, sendo que $p = p(x, t_m)$ e $q = q(x, t_m)$ são os campos da teoria. Substituindo $\alpha_{0,1} \equiv 0$, $\beta_{0,1} = p_0$, $\gamma_{0,1} = q_0$, $\chi_{-1} = p - bp_0$ e $\psi_{-1} = -q + bq_0$ em (3.47), obtemos o Lax espacial

$$A_{x,AKNS} = \frac{1}{2}H^1 + pE_\alpha^0 + qE_{-\alpha}^0. \quad (3.48)$$

As equações de movimento para cada fluxo são obtidas através da equação de curvatura nula (2.67), onde

$$A_M^{(i)} = a_{i,M}H^i + b_{i,M}E_\alpha^i + c_{i,M}E_{-\alpha}^i \quad (3.49)$$

e

$$A_{-M}^{(-i)} = a_{-i,-M} H^{-i} + b_{-M,-i} E_{\alpha}^{-i} + c_{-i,-M} E_{-\alpha}^{-i} \quad (3.50)$$

com $M \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i \in \mathbb{Z}_+$. E os coeficientes $a_{\pm i, \pm M}$, $b_{\pm i, \pm M}$ e $c_{\pm i, \pm M}$ são funcionais dos campos p e q . Abaixo, resolvendo a equação de curvatura nula, são determinados os operadores de Lax temporais e as respectivas equações de movimentos para os primeiros fluxos temporais da teoria.

Fluxos temporais positivos

Substituindo o Lax (3.48) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais positivos

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_M} + A_M^{(M)} + A_M^{(M-1)} + \cdots + A_M^{(0)} \right] = 0, \quad (3.51)$$

sendo que $E^{(1)} = \frac{1}{2} H^1$ e $A_1^{(0)} = pE_{\alpha}^0 + qE_{-\alpha}^0$. Decompondo este resultado grau a grau, encontramos

$$\begin{aligned} & \left[E^{(1)}, A_M^{(M)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(M)} + \left[E^{(1)}, A_M^{(M-1)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(M)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(M-1)} + \left[E^{(1)}, A_M^{(M-2)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(M-1)} \right] = 0, \\ & \vdots \\ & \partial_x A_M^{(1)} + \left[E^{(1)}, A_M^{(0)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(1)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(0)} - \partial_{t_M} A_1^{(0)} + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(0)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para cada M , a equação de grau $M + 1$ determina os coeficientes $b_{M,M}$ e $c_{M,M}$, depois substituindo $b_{M,M}$ e $c_{M,M}$ na equação de grau M obtemos os coeficientes $a_{M,M}$, $b_{M-1,M}$ e $c_{M-1,M}$, da equação de grau $M - 1$ obtemos os coeficientes $a_{M-1,M}$, $b_{M-2,M}$ e $c_{M-2,M}$, e assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t_M} = A_M^{(M)} + A_M^{(M-1)} + \cdots + A_M^{(0)}$. As equações de movimento para os campos p e q são dadas pela equação de grau zero.

Resolvendo (3.51) para os primeiros fluxos, encontramos os resultados abaixo. Para $M = 1$:

$$A_{t_1, AKNS} = \frac{1}{2} H^1 + pE_{\alpha}^0 + qE_{-\alpha}^0, \quad (3.53)$$

para $M = 2$:

$$A_{t_2, AKNS} = \frac{1}{2}H^2 + pE_\alpha^1 + qE_{-\alpha}^1 - (pq - bp_0q_0)H^0 - p_xE_\alpha^0 + q_xE_{-\alpha}^0, \quad (3.54)$$

para $M = 3$:

$$\begin{aligned} A_{t_3, AKNS} = & \frac{1}{2}H^3 + pE_\alpha^2 + qE_{-\alpha}^2 - pqH^1 - p_xE_\alpha^1 + q_xE_{-\alpha}^1 + \\ & + (p_xq - pq_x)H^0 + (p_{xx} - 2p^2q)E_\alpha^0 + (q_{xx} - 2pq^2)E_{-\alpha}^0, \end{aligned} \quad (3.55)$$

o que resulta nas equações de movimento para os primeiros fluxos temporais positivos da teoria

$$p_{t_1} = p_x, \quad (3.56)$$

$$q_{t_1} = q_x, \quad (3.57)$$

$$p_{t_2} = -p_{xx} + 2p(pq - bp_0q_0), \quad (3.58)$$

$$q_{t_2} = q_{xx} - 2q(pq - bp_0q_0), \quad (3.59)$$

$$p_{t_3} = p_{3x} - 6pqp_x, \quad (3.60)$$

$$q_{t_3} = q_{3x} - 6pqq_x. \quad (3.61)$$

As equações de movimento acima admitem tanto solução do tipo vácuo nulo $b = 0$, $p = 0$ e $q = 0$ quanto solução do tipo vácuo não nulo $b = 1$, $p = p_0 \neq 0$ e $q = q_0 \neq 0$.

Fluxos temporais negativos

Substituindo o Lax (3.48) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais negativos

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_{-M}} + A_{-M}^{(-M)} + A_{-M}^{(-M-1)} + \cdots + A_{-M}^{(-1)} \right] = 0. \quad (3.62)$$

Note que para hierarquia com $b = 1$ não existe o fluxo temporal t_{-1} , dado que a condição de comutação

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{-M}] = \left[E^{(1)} + p_0E_\alpha^0 + q_0E_{-\alpha}^0, \varepsilon_{-M}^{(-M)} + \varepsilon_{-M}^{(-M+1)} + \cdots + \varepsilon_{-M}^{(-1)} \right] = 0 \quad (3.63)$$

implica que existem $\mathcal{E}_{-M}$ diferentes de zero apenas para $M > 1$.

Para $M = 1$, separando a curvatura nula (3.62) grau a grau, encontramos

$$\partial_x A_{-1}^{(-1)} + [A_1^{(0)}, A_{-1}^{(-1)}] = 0, \quad (3.64)$$

$$\partial_{t_{-1}} A_1^{(0)} - [E^{(1)}, A_{-M}^{(-1)}] = 0. \quad (3.65)$$

Da equação (2.62), temos a condição adicional

$$A_1^{(0)} = -B_x B^{-1}. \quad (3.66)$$

Assumindo $B \equiv e^{\bar{\chi} e^{-\varphi} E_{-\alpha}^0} e^{\varphi H^0} e^{\bar{\psi} e^{-\varphi} E_{\alpha}^0}$, sendo que os coeficientes $\bar{\chi}$, φ e $\bar{\psi}$ são funções de x e t_{-M} , chegamos em

$$A_1^{(0)} = -\frac{\bar{\psi}_x e^{\varphi}}{1 + \bar{\chi} \bar{\psi}} E_{\alpha}^0 - \bar{\chi}_x e^{-\varphi} E_{-\alpha}^0. \quad (3.67)$$

Substituindo (3.66) na equação (3.64) de grau -1 , temos a solução:

$$\begin{aligned} A_{-1}^{(-1)} &= \frac{1}{2} B H^{-1} B^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2\bar{\chi} \bar{\psi}) H^{-1} - \bar{\psi} e^{\varphi} E_{\alpha}^{-1} + \bar{\chi} e^{-\varphi} (1 + \bar{\chi} \bar{\psi}) E_{-\alpha}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

e a equação (3.65) de grau zero resulta nas equações de movimento do modelo

$$\partial_{t_{-1}} (B_x B^{-1}) + \frac{1}{4} [H^1, B H^{-1} B^{-1}] = 0, \quad (3.69)$$

$$\partial_x (B^{-1} B_{t_{-1}}) - \frac{1}{4} [H^1, B H^{-1} B^{-1}] = 0. \quad (3.70)$$

Para obter a primeira equação (3.69) basta substituir (3.66) e (3.68) em (3.65). A segunda equação (3.70) foi obtida a partir da primeira, expandindo-a e conjugando o resultado no formato $B^{-1} (\dots) B$. Estas equações implicam nos vínculos adicionais:

$$\text{Tr} (B_x B^{-1} H^0) = 0 \rightarrow \varphi_x = \frac{\bar{\chi} \bar{\psi}_x}{1 + \bar{\chi} \bar{\psi}} \quad (3.71)$$

$$\text{Tr} (B^{-1} B_{t_{-1}} H^0) = 0 \rightarrow \varphi_{t_{-1}} = \frac{\bar{\psi} \bar{\chi}_{t_{-1}}}{1 + \bar{\chi} \bar{\psi}} \quad (3.72)$$

Usando esses vínculos e substituindo o par de Lax (3.67) e (3.68) na equação (3.69),

chegamos nas equações de movimento do modelo relativístico Lund-Regge [18]

$$\partial_{t_{-1}} \left(\frac{\bar{\psi}_x}{1 + \bar{\chi}\bar{\psi}} \right) + \frac{\bar{\psi}\bar{\psi}_x\bar{\chi}_{t_{-1}}}{(1 + \bar{\chi}\bar{\psi})^2} - \bar{\psi} = 0, \quad (3.73)$$

$$\partial_{t_{-1}} \left(\frac{\bar{\chi}_x}{1 + \bar{\chi}\bar{\psi}} \right) + \frac{\bar{\chi}\bar{\chi}_x\bar{\psi}_{t_{-1}}}{(1 + \bar{\chi}\bar{\psi})^2} - \bar{\chi} = 0. \quad (3.74)$$

3.2.2 Hierarquias equivalentes

Hierarquias equivalentes a hierarquia AKNS podem ser encontradas a partir da transformação de gauge (2.69). Para o caso em que $c = 1$ e $b = 0$, o gauge é dado por

$$A_{x,WKI} = \tilde{B} \left(\frac{1}{2} H^1 + \chi_{-1} E_\alpha^0 - \psi_{-1} E_{-\alpha}^0 \right) \tilde{B}^{-1} - \left(\partial_x \tilde{B} \right) \tilde{B}^{-1}. \quad (3.75)$$

Assumindo $\tilde{B} = B^{-1}$ com $B \equiv e^{\chi E_\alpha^0} e^{\varphi H^0} e^{\psi E_\alpha^0}$, da equação (2.62), temos

$$(\partial_x B) B^{-1} = [\theta^{(-1)}, E^{(1)}], \quad (3.76)$$

o que leva nas condições adicionais

$$\chi_{-1} = -\psi_x e^{2\varphi}, \quad \psi_{-1} = \chi_x + \chi^2 \psi_x e^{2\varphi}, \quad \varphi_x = \chi \psi_x e^{2\varphi}. \quad (3.77)$$

Substituindo as relações acima em (3.75), chegamos no Lax

$$A_{x,WKI} = \frac{1}{2} (1 + 2\chi\psi e^{2\varphi}) H^1 + (1 + \chi\psi e^{2\varphi}) \psi E_\alpha^1 - \chi e^{2\varphi} E_{-\alpha}^1. \quad (3.78)$$

Fazendo a transformação de Bäcklund recíproca proposta em [19, 20], podemos redefinir o Lax (3.78), obtendo:

$$\begin{aligned} A'_{x,WKI} &= \frac{1}{2} H^1 + \frac{\psi + \chi\psi^2 e^{2\varphi}}{1 + 2\chi\psi e^{2\varphi}} E_\alpha^1 - \frac{\chi e^{2\varphi}}{1 + 2\chi\psi e^{2\varphi}} E_{-\alpha}^1 \\ &\equiv \frac{1}{2} H^1 + \tilde{p} E_\alpha^1 + \tilde{q} E_{-\alpha}^1. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Resolvendo a equação de curvatura nula para o fluxo temporal t'_2 , encontramos as equações de movimento para os campos $\tilde{p} = \tilde{p}(x', t'_2)$ e $\tilde{q} = \tilde{q}(x', t'_2)$ iguais a [15]

$$\tilde{p}_{t'_2} = -\partial_{x'}^2 \left(\frac{\tilde{p}}{\sqrt{1 + 4\tilde{p}\tilde{q}}} \right), \quad (3.80)$$

$$\tilde{q}_{t'_2} = \partial_{x'}^2 \left(\frac{\tilde{q}}{\sqrt{1 + 4\tilde{p}\tilde{q}}} \right). \quad (3.81)$$

3.3 Hierarquias GI, CLL e KN

Dadas as combinações $\{\hat{sl}_2, Q_p, E = \frac{1}{2}H^1, a = 2, b = 0 \text{ ou } b = 1, c = 0\}$, a partir da definição (2.64), obtemos abaixo a hierarquia GI com condições de contorno nula ($b = 0$) e constante não nula ($b = 1$). Depois, olhando para o gauge (2.69) com $c = 1/2$ e $c = 1$, encontramos as hierarquias CLL e KN, respectivamente.

3.3.1 Hierarquia GI

Considere a álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}_2$ com gradação principal. Neste caso, o operador de gradação é dado por

$$Q_p = \frac{1}{2}H^0 + 2\zeta \frac{d}{d\zeta}, \quad (3.82)$$

onde ζ é um parâmetro espectral, e decompõe os geradores da álgebra $H^k = \zeta^k H^0$, $E_\alpha^k = \zeta^k E_\alpha^0$ e $E_{-\alpha}^k = \zeta^k E_{-\alpha}^0$ da seguinte maneira

$$\hat{\mathcal{G}}^{(2k)} = \{H^k\}, \quad \hat{\mathcal{G}}^{(2k+1)} = \{E_\alpha^k, E_{-\alpha}^{k+1}\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.83)$$

Escolhendo $E = E^{(2)} \equiv \frac{1}{2}H^1$ obtemos os subespaços

$$\mathcal{K} = \{H^k\}, \quad \mathcal{M} = \{E_\alpha^k, E_{-\alpha}^k\}. \quad (3.84)$$

Para esta estrutura algébrica, podemos contruir duas hierarquias integráveis, a primeira com $a = 2$ e $b = 0$ onde os modelos admitem vácuo nulo e outra hierarquia com $a = 2$ e $b = 1$ onde os modelos admitem vácuo constante não nulo.

Os modelos integráveis em questão são construídos a partir da definição (2.64)

com $a = 2$, o que resulta na projeção

$$\begin{aligned} A_{x,GI} = & E^{(2)} + b\varepsilon_1^{(1)} + b\varepsilon_1^{(0)} + \\ & - [\theta^{(-1)}, E^{(2)}] - b[\theta^{(-1)}, \varepsilon_1^{(1)}] - [\theta^{(-2)}, E^{(2)}] + \\ & + \frac{1}{2}[\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, E^{(2)}]]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Devido a (3.83), definimos

$$\theta^{(-2)} = \varphi_{-2} H^{-1}, \quad (3.86)$$

$$\theta^{(-1)} = \chi_{-1} E_{\alpha}^{-1} + \psi_{-1} E_{-\alpha}^0, \quad (3.87)$$

$$\varepsilon_1^{(0)} = \alpha_{0,1} H^0 \quad (3.88)$$

e

$$\varepsilon_1^{(1)} = \beta_{1,1} E_{\alpha}^0 + \gamma_{1,1} E_{-\alpha}^1, \quad (3.89)$$

onde $\alpha_{0,1}$, $\beta_{1,1}$ e $\gamma_{1,1}$ são constantes e os coeficientes φ_{-2} , χ_{-1} e ψ_{-1} são funções que dependem de x e t_m . Substituindo (3.86), (3.87), (3.88) e (3.89) em (3.85), encontramos

$$\begin{aligned} A_{x,GI} = & \frac{1}{2} H^1 + (b\beta_{1,1} + \chi_{-1}) E_{\alpha}^0 + (b\gamma_{1,1} - \psi_{-1}) E_{-\alpha}^1 + \\ & + [b\alpha_{0,1} - b\gamma_{1,1}\chi_{-1} + (b\beta_{1,1} + \chi_{-1})\psi_{-1}] H^0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Definindo as funções $r = br_0 + \chi_{-1}$ e $s = bs_0 - \psi_{-1}$ com $r_0 = \beta_{1,1}$ e $s_0 = \gamma_{1,1}$. E substituindo $\alpha_{0,1} \equiv -br_0s_0$, $\beta_{1,1} = r_0$, $\gamma_{1,1} = s_0$, $\chi_{-1} = r - br_0$ e $\psi_{-1} = -s + bs_0$ em (3.90), obtemos o Lax espacial [21]

$$A_{x,GI} = \frac{1}{2} H^1 + r E_{\alpha}^0 + s E_{-\alpha}^1 - rs H^0, \quad (3.91)$$

sendo que $r = r(x, t_m)$ e $s = s(x, t_m)$ são os campos da teoria. Definindo $B = e^{(\phi - br_0s_0x)H^0}$ onde o coeficiente ϕ é uma função de x e t_m , da equação (2.62), temos

$$(\partial_x B) B^{-1} = b[\theta^{(-1)}, \varepsilon_1^{(1)}] - \frac{1}{2}[\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, E^{(2)}]], \quad (3.92)$$

o que leva a condição adicional²

$$\phi_x = rs. \quad (3.93)$$

²Por definição $b^2 = b$.

Observe que para hierarquia com $b = 0$ todos os fluxos temporais são permitidos, uma vez que, as condições de comutação

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{\pm M}] = [E^{(2)}, \varepsilon_{\pm M}^{(\pm 2M)}] = 0 \quad (3.94)$$

resultam em

$$\mathcal{E}_M = \alpha_{2M,M} H^M \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{-M} = \alpha_{-2M,-M} H^{-M}. \quad (3.95)$$

Sendo que $\alpha_{2M,M}$ e $\alpha_{-2M,-M}$ são constantes diferentes de zero, com $\alpha_{2,1} = 1/2$. Agora, para hierarquia com $b = 1$, não existe o fluxo temporal t_{-1} , dado que as condições de comutação

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_M] = [E^{(2)} + r_0 E_\alpha^0 + s_0 E_{-\alpha}^1 - r_0 s_0 H^0, \varepsilon_M^{(2M)} + \dots + \varepsilon_M^{(0)}] = 0 \quad (3.96)$$

e

$$[\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{-M}] = [E^{(2)} + r_0 E_\alpha^0 + s_0 E_{-\alpha}^1 - r_0 s_0 H^0, \varepsilon_{-M}^{(-2M)} + \dots + \varepsilon_{-M}^{(-1)}] = 0 \quad (3.97)$$

resultam em

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2} H^1 + r_0 E_\alpha^0 + s_0 E_{-\alpha}^1 - r_0 s_0 H^0, \\ \mathcal{E}_{-1} &= 0, \\ \mathcal{E}_2 &= 2(\alpha_{4,2}(\zeta + 2r_0 s_0) + \alpha_{2,2}) \mathcal{E}_1, \\ \mathcal{E}_{-2} &= -\frac{\alpha_{-4,-2}}{r_0 s_0} \zeta^{-2} \mathcal{E}_1, \\ \mathcal{E}_3 &= 2(\alpha_{6,3}(\zeta^2 + 2r_0 s_0(\zeta + 2r_0 s_0)) + \alpha_{4,3}(\zeta + 2r_0 s_0) + \alpha_{2,3}) \mathcal{E}_1, \\ \mathcal{E}_{-3} &= -\left(\frac{\alpha_{-6,-3}(\zeta + 2r_0 s_0)}{2r_0^2 s_0^2} \zeta^{-3} + \frac{\alpha_{-4,-3}}{r_0 s_0} \zeta^{-2} \right) \mathcal{E}_1. \end{aligned} \quad (3.98)$$

E por aí vai, sendo que $\alpha_{4,2} \neq 0$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{-4,-2} \neq 0$, $\alpha_{6,3} \neq 0$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{-6,-3} \neq 0$ e $\alpha_{-4,-3}$ são constantes.

As equações de movimento para cada fluxo são obtidas através da equação de curvatura nula (2.67), onde

$$A_M^{(2i)} = a_{2i,M} H^i, \quad (3.99)$$

$$A_{-M}^{(-2i)} = a_{-2i,-M} H^{-i}, \quad (3.100)$$

$$A_M^{(2i+1)} = b_{2i+1,M} E_\alpha^i + c_{2i+1,M} E_{-\alpha}^{i+1} \quad (3.101)$$

e

$$A_{-M}^{(-2i-1)} = b_{-2i-1, -M} E_{\alpha}^{-i-1} + c_{-2i-1, -M} E_{-\alpha}^{-i} \quad (3.102)$$

com $M \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i \in \mathbb{Z}_+$. Os coeficientes $a_{\pm 2i, \pm M}$, $b_{\pm 2i \pm 1, \pm M}$ e $c_{\pm 2i \pm 1, \pm M}$ são funcionais dos campos r e s . Abaixo, resolvendo a equação de curvatura nula, são determinados os operadores de Lax temporais e as respectivas equações de movimento para os primeiros fluxos temporais da teoria.

Fluxos temporais positivos

Substituindo o Lax (3.91) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais positivos

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(2)} + A_1^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_M} + A_M^{(2M)} + A_M^{(2M-1)} + \cdots + A_M^{(0)} \right] = 0, \quad (3.103)$$

sendo que $E^{(2)} = \frac{1}{2}H^1$, $A_1^{(1)} = rE_{\alpha}^0 + sE_{-\alpha}^1$ e $A_1^{(0)} = -rsH^0$. Decompondo este resultado grau a grau, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[E^{(2)}, A_M^{(2M)} \right] = 0, \\ & \left[E^{(2)}, A_M^{(2M-1)} \right] + \left[A_1^{(1)}, A_M^{(2M)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(2M)} + \left[E^{(2)}, A_M^{(2M-2)} \right] + \left[A_1^{(1)}, A_M^{(2M-1)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(2M)} \right] = 0, \\ & \vdots \\ & \partial_x A_M^{(2)} + \left[E^{(2)}, A_M^{(0)} \right] + \left[A_1^{(1)}, A_M^{(1)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(2)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(1)} - \partial_{t_M} A_1^{(1)} + \left[A_1^{(1)}, A_M^{(0)} \right] + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(1)} \right] = 0, \\ & \partial_x A_M^{(0)} - \partial_{t_M} A_1^{(0)} + \left[A_1^{(0)}, A_M^{(0)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Para cada M , a equação de grau $2M + 1$ determina os coeficientes $b_{2M-1, M}$ e $c_{2M-1, M}$, depois substituindo $b_{2M-1, M}$ e $c_{2M-1, M}$ na equação de grau $2M$ obtemos o coeficiente $a_{2M, M}$, e assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t_M} = A_M^{(2M)} + A_M^{(2M-1)} + \cdots + A_M^{(0)}$. As equações de movimento para os campos r e s são dadas pela equação de grau 1.

Resolvendo (3.103) para os primeiros fluxos, encontramos os resultados abaixo. Para $M = 1$:

$$A_{t_1, GI} = \frac{1}{2}H^1 + rE_{\alpha}^0 + sE_{-\alpha}^1 - rsH^0, \quad (3.105)$$

para $M = 2$:³

$$A_{t_2,GI} = \frac{1}{2}H^2 + rE_\alpha^1 + sE_{-\alpha}^2 - rsH^1 - r_xE_\alpha^0 + s_xE_{-\alpha}^1 + \\ - (rs_x - r_xs + r^2s^2 - br_0^2s_0^2) H^0, \quad (3.106)$$

para $M = 3$:

$$A_{t_3,GI} = \frac{1}{2}H^3 + rE_\alpha^2 + sE_{-\alpha}^3 - rsH^2 - r_xE_\alpha^1 + s_xE_{-\alpha}^2 + \\ - (rs_x - sr_x + r^2s^2) H^1 + [r_{xx} - 2r^2(s_x + rs^2)] E_\alpha^0 + \\ + [s_{xx} + 2s^2(r_x - r^2s)] E_{-\alpha}^1 + \\ - (rs_{xx} + r_{xx}s - r_xs_x - 2r^3s^3) H^0, \quad (3.107)$$

o que resulta nas equações de movimento para os primeiros fluxos temporais positivos da teoria

$$r_{t_1} = r_x, \quad (3.108)$$

$$s_{t_1} = s_x, \quad (3.109)$$

$$r_{t_2} = -r_{xx} + 2r(r^2s^2 - br_0^2s_0^2 + rs_x), \quad (3.110)$$

$$s_{t_2} = s_{xx} - 2s(r^2s^2 - br_0^2s_0^2 - r_xs), \quad (3.111)$$

$$r_{t_3} = r_{3x} - 6rr_x(rs^2 + s_x), \quad (3.112)$$

$$s_{t_3} = s_{3x} - 6ss_x(r^2s - r_x). \quad (3.113)$$

Note que as equações de movimento acima admitem tanto solução do tipo vácuo nulo $b = 0, r = 0$ e $s = 0$ quanto solução do tipo vácuo constante não nulo $b = 1, r = r_0 \neq 0$ e $s = s_0 \neq 0$.

Fluxos temporais negativos

Substituindo o Lax (3.91) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais negativos

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(2)} + A_1^{(1)} + A_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t-M} + A_{-M}^{(-2M)} + A_{-M}^{(-2M+1)} + \dots + A_{-M}^{(-1)} \right] = 0. \quad (3.114)$$

³O termo constante em (3.106) é fixado por uma escolha de constantes de integração, veja o apêndice C.

Decompondo este resultado grau a grau, obtemos

$$\begin{aligned}
& \partial_x A_{-M}^{(-2M)} + [A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-2M)}] = 0, \\
& \partial_x A_{-M}^{(-2M+1)} + [A_1^{(1)}, A_{-M}^{(-2M)}] + [A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-2M+1)}] = 0, \\
& \partial_x A_{-M}^{(-2M+2)} + [E^{(2)}, A_{-M}^{(-2M)}] + [A_1^{(1)}, A_{-M}^{(-2M+1)}] + [A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-2M+2)}] = 0, \\
& \vdots \\
& \partial_x A_{-M}^{(-1)} + [E^{(2)}, A_{-M}^{(-3)}] + [A_1^{(1)}, A_{-M}^{(-2)}] + [A_1^{(0)}, A_{-M}^{(-1)}] = 0, \\
& \partial_{t_{-M}} A_1^{(0)} - [E^{(2)}, A_{-M}^{(-2)}] - [A_1^{(1)}, A_{-M}^{(-1)}] = 0, \\
& \partial_{t_{-M}} A_1^{(1)} - [E^{(2)}, A_{-M}^{(-1)}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Para cada M , a equação de grau $-2M$ determina o coeficiente $a_{-2M, -M}$, depois substituindo $a_{-2M, -M}$ na equação de grau $-2M + 1$ obtemos os coeficientes $b_{-2M+1, -M}$ e $c_{-2M+1, -M}$, e assim sucessivamente até que seja determinado todo o Lax $A_{t_{-M}} = A_{-M}^{(-2M)} + A_{-M}^{(-2M+1)} + \dots + A_{-M}^{(-1)}$. As equações de movimento para os campos r e s são dadas pela equação de grau 1.

Resolvendo (3.114) para os primeiros fluxos, encontramos os resultados abaixo. Para $M = 1$:

$$A_{t_{-1}, GI} = \frac{1}{2} H^{-1} + e^{2\phi} R E_{\alpha}^{-1} - e^{-2\phi} S E_{-\alpha}^0, \tag{3.116}$$

para $M = 2$:

$$\begin{aligned}
A_{t_{-2}, GI} = & \frac{1}{2} H^{-2} + e^{2\phi} R E_{\alpha}^{-2} - e^{-2\phi} S E_{-\alpha}^{-1} + R S H^{-1} + \\
& - e^{2\phi} \partial_x^{-1} (R - S \partial_x R^2) E_{\alpha}^{-1} - e^{-2\phi} \partial_x^{-1} (S + R \partial_x S^2) E_{-\alpha}^0,
\end{aligned} \tag{3.117}$$

sendo que R e S são iguais a

$$R \equiv R(x, t_{-M}) \equiv \partial_x^{-1} (r e^{-2\phi}) \tag{3.118}$$

e

$$S \equiv S(x, t_{-M}) \equiv \partial_x^{-1} (s e^{2\phi}) \tag{3.119}$$

com $\phi = \partial_x^{-1} (rs)$. Vale dizer que definimos as integrais R e S para expressar $A_{t_{-1}, GI}$ e $A_{t_{-2}, GI}$ de maneira compacta, não é uma mudança de variável. As equações de movimento para os primeiros fluxos temporais negativos da teoria são dadas por:

$$r_{t_{-1}} = e^{2\phi} \partial_x^{-1} (r e^{-2\phi}), \tag{3.120}$$

$$s_{t_{-1}} = e^{-2\phi} \partial_x^{-1} (se^{2\phi}), \quad (3.121)$$

$$r_{t_{-2}} = -e^{2\phi} \partial_x^{-1} [\partial_x^{-1} (re^{-2\phi}) - 2re^{-2\phi} \partial_x^{-1} (re^{-2\phi}) \partial_x^{-1} (se^{2\phi})], \quad (3.122)$$

$$s_{t_{-2}} = e^{-2\phi} \partial_x^{-1} [\partial_x^{-1} (se^{2\phi}) + 2se^{2\phi} \partial_x^{-1} (re^{-2\phi}) \partial_x^{-1} (se^{2\phi})], \quad (3.123)$$

e admitem solução do tipo vácuo nulo $r = 0$ e $s = 0$. E as equações (3.122) e (3.123) também admitem solução do tipo vácuo constante não nulo $r = r_0 \neq 0$ e $s = s_0 \neq 0$.

3.3.2 Hierarquias equivalentes

Hierarquias equivalentes a hierarquia GI podem ser encontradas a partir da transformação de gauge

$$\tilde{A}_{x,c} = \tilde{B} A_{x,GI} \tilde{B}^{-1} - (\partial_x \tilde{B}) \tilde{B}^{-1}. \quad (3.124)$$

Definindo $\tilde{B} = e^{-c\tilde{\varphi}H^0}$ com $\tilde{\varphi}_x = rs$, substituindo (3.91) em (3.124), e redefinindo $\tilde{r} = re^{-2c\tilde{\varphi}}$ e $\tilde{s} = se^{2c\tilde{\varphi}}$, chegamos no Lax

$$\tilde{A}_{x,c} = \frac{1}{2}H^1 + \tilde{r}E_\alpha^0 + \tilde{s}E_{-\alpha}^1 - (1-c)\tilde{r}\tilde{s}H^0 \quad (3.125)$$

onde $\tilde{r} = \tilde{r}(x, t_m)$ e $\tilde{s} = \tilde{s}(x, t_m)$ são os campos da teoria. Para $c = 0$ temos que $\tilde{r} \rightarrow r$ e $\tilde{s} \rightarrow s$, e recuperamos os resultados da subseção 3.3.1. No que segue, vamos olhar para as equações de movimento do caso geral.

Fluxos temporais positivos

Substituindo o Lax (3.125) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais positivos

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(2)} + \tilde{A}_1^{(1)} + \tilde{A}_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_M} + \tilde{A}_M^{(2M)} + \tilde{A}_M^{(2M-1)} + \cdots + \tilde{A}_M^{(0)} \right] = 0. \quad (3.126)$$

Resolvendo esta equação para os primeiros fluxos, encontramos os resultados abaixo. Para $M = 1$:

$$\tilde{A}_{t_1,c} = \frac{1}{2}H^1 + \tilde{r}E_\alpha^0 + \tilde{s}E_{-\alpha}^1 - (1-c)\tilde{r}\tilde{s}H^0, \quad (3.127)$$

para $M = 2$:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{t_2,c} = & \frac{1}{2}H^2 + \tilde{r}E_\alpha^1 + \tilde{s}E_{-\alpha}^2 - \tilde{r}\tilde{s}H^1 - (\tilde{r}_x + 2c\tilde{r}^2\tilde{s})E_\alpha^0 + \\ & + (\tilde{s}_x - 2c\tilde{r}\tilde{s}^2)E_{-\alpha}^1 - (1-c)[\tilde{r}\tilde{s}_x - \tilde{s}\tilde{r}_x + \\ & + (1-4c)\tilde{r}^2\tilde{s}^2 - (1-2c)b\tilde{r}_0^2\tilde{s}_0^2]H^0,\end{aligned}\quad (3.128)$$

para $M = 3$:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{t_3,c} = & \frac{1}{2}H^3 + \tilde{r}E_\alpha^2 + \tilde{s}E_{-\alpha}^3 - \tilde{r}\tilde{s}H^2 - (\tilde{r}_x + 2c\tilde{r}^2\tilde{s})E_\alpha^1 + \\ & + (\tilde{s}_x - 2c\tilde{r}\tilde{s}^2)E_{-\alpha}^2 - [\tilde{r}\tilde{s}_x - \tilde{r}_x\tilde{s} + (1-4c)\tilde{r}^2\tilde{s}^2]H^1 + \\ & + \{\tilde{r}_{xx} + 2\tilde{r}[3c\tilde{r}_x\tilde{s} - (1-c)\tilde{r}\tilde{s}_x - (1-2c(1+c))\tilde{r}^2\tilde{s}^2]\}E_\alpha^0 + \\ & + \{\tilde{s}_{xx} - 2\tilde{s}[3c\tilde{r}\tilde{s}_x - (1-c)\tilde{r}_x\tilde{s} + (1-2c(1+c))\tilde{r}^2\tilde{s}^2]\}E_{-\alpha}^1 + \\ & - (1-c)[\tilde{r}_{xx}\tilde{s} + \tilde{r}\tilde{s}_{xx} - \tilde{r}_x\tilde{s}_x + 6c\tilde{r}\tilde{s}(\tilde{r}_x\tilde{s} - \tilde{r}\tilde{s}_x) + \\ & - 2(1-6c^2)\tilde{r}^3\tilde{s}^3 + 4(1-2c)cb\tilde{r}_0^3\tilde{s}_0^3]H^0,\end{aligned}\quad (3.129)$$

o que resulta nas equações de movimento para os primeiros fluxos temporais positivos da teoria

$$\tilde{r}_{t_1} = \tilde{r}_x, \quad (3.130)$$

$$\tilde{s}_{t_1} = \tilde{s}_x, \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{t_2} = & -\tilde{r}_{xx} + 2(1-c)(1-2c)\tilde{r}(\tilde{r}^2\tilde{s}^2 - b\tilde{r}_0^2\tilde{s}_0^2) + \\ & + 2(1-c)\tilde{r}^2\tilde{s}_x - 2c\partial_x(\tilde{r}^2\tilde{s}),\end{aligned}\quad (3.132)$$

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{t_2} = & \tilde{s}_{xx} - 2(1-c)(1-2c)\tilde{s}(\tilde{r}^2\tilde{s}^2 - b\tilde{r}_0^2\tilde{s}_0^2) + \\ & + 2(1-c)\tilde{s}^2\tilde{r}_x - 2c\partial_x(\tilde{r}\tilde{s}^2),\end{aligned}\quad (3.133)$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{t_3} = & \tilde{r}_{3x} - 8c(1-c)(1-2c)\tilde{r}(\tilde{r}^3\tilde{s}^3 - b\tilde{r}_0^3\tilde{s}_0^3) - 6(1-c)(1-4c)\tilde{r}^2\tilde{s}^2\tilde{r}_x + \\ & - 6(1-c)\tilde{r}\tilde{r}_x\tilde{s}_x - 6c\partial_x[(1-2c)\tilde{r}^3\tilde{s}^2 - \tilde{r}\tilde{s}\tilde{r}_x],\end{aligned}\quad (3.134)$$

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{t_3} = & \tilde{s}_{3x} + 8c(1-c)(1-2c)\tilde{s}(\tilde{r}^3\tilde{s}^3 - b\tilde{r}_0^3\tilde{s}_0^3) - 6(1-c)(1-4c)\tilde{r}^2\tilde{s}^2\tilde{s}_x + \\ & + 6(1-c)\tilde{s}\tilde{r}_x\tilde{s}_x - 6c\partial_x[(1-2c)\tilde{r}^2\tilde{s}^3 + \tilde{r}\tilde{s}\tilde{s}_x].\end{aligned}\quad (3.135)$$

As equações de movimento acima admitem tanto solução do tipo vácuo nulo $b = 0$, $\tilde{r} = 0$ e $\tilde{s} = 0$ quanto solução do tipo vácuo constante não nulo $b = 1$, $\tilde{r} = \tilde{r}_0 \neq 0$ e $\tilde{s} = \tilde{s}_0 \neq 0$.

Fluxos temporais negativos

Substituindo o Lax (3.125) na equação de curvatura nula, obtemos para fluxos temporais negativos

$$\left[\mathcal{D}_x + E^{(2)} + \tilde{A}_1^{(1)} + \tilde{A}_1^{(0)}, \mathcal{D}_{t_{-M}} + \tilde{A}_{-M}^{(-2M)} + \tilde{A}_{-M}^{(-2M+1)} + \cdots + \tilde{A}_{-M}^{(0)} \right] = 0. \quad (3.136)$$

Resolvendo esta equação para os primeiros fluxos, encontramos os resultados abaixo. Para $M = 1$:

$$\tilde{A}_{t_{-1},c} = \frac{1}{2}H^{-1} + \tilde{R}e^{2(1-c)\tilde{\varphi}}E_{\alpha}^{-1} - \tilde{S}e^{-2(1-c)\tilde{\varphi}}E_{-\alpha}^0 + c\tilde{R}\tilde{S}H^0, \quad (3.137)$$

para $M = 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{t_{-2},c} = & \frac{1}{2}H^{-2} + \tilde{R}e^{2(1-c)\tilde{\varphi}}E_{\alpha}^{-2} - \tilde{S}e^{-2(1-c)\tilde{\varphi}}E_{-\alpha}^{-1} + \tilde{R}\tilde{S}H^{-1} + \\ & - e^{2(1-c)\tilde{\varphi}}\partial_x^{-1} \left(\tilde{R} - \tilde{S}\partial_x\tilde{R}^2 \right) E_{\alpha}^{-1} - e^{-2(1-c)\tilde{\varphi}}\partial_x^{-1} \left(\tilde{S} + \tilde{R}\partial_x\tilde{S}^2 \right) E_{-\alpha}^0 + \\ & - c \left[\tilde{R}^2\tilde{S}^2 - \tilde{R}\partial_x^{-1} \left(\tilde{S} + \tilde{R}\partial_x\tilde{S}^2 \right) + \tilde{S}\partial_x^{-1} \left(\tilde{R} - \tilde{S}\partial_x\tilde{R}^2 \right) \right] H^0, \end{aligned} \quad (3.138)$$

sendo que $\tilde{R}$ e $\tilde{S}$ são iguais a

$$\tilde{R} \equiv \tilde{R}(x, t_{-M}) \equiv \partial_x^{-1} (\tilde{r}e^{-2(1-c)\tilde{\varphi}}) \quad (3.139)$$

e

$$\tilde{S} \equiv \tilde{S}(x, t_{-M}) \equiv \partial_x^{-1} (\tilde{s}e^{2(1-c)\tilde{\varphi}}) \quad (3.140)$$

com $\tilde{\varphi} = \partial_x^{-1} (\tilde{r}\tilde{s})$. As equações de movimento para os primeiros fluxos temporais negativos da teoria são dadas por:

$$\tilde{r}_{t_{-1}} = \tilde{R}e^{2(1-c)\tilde{\varphi}} - 2c\tilde{r}\tilde{R}\tilde{S}, \quad (3.141)$$

$$\tilde{s}_{t_{-1}} = \tilde{S}e^{-2(1-c)\tilde{\varphi}} + 2c\tilde{s}\tilde{R}\tilde{S}, \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{t_{-2}} = & -e^{2(1-c)\tilde{\varphi}}\partial_x^{-1} \left(\tilde{R} - \tilde{S}\partial_x\tilde{R}^2 \right) + \\ & + 2c\tilde{r} \left[\tilde{R}^2\tilde{S}^2 - \tilde{R}\partial_x^{-1} \left(\tilde{S} + \tilde{R}\partial_x\tilde{S}^2 \right) + \tilde{S}\partial_x^{-1} \left(\tilde{R} - \tilde{S}\partial_x\tilde{R}^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{t_{-2}} = & e^{-2(1-c)\tilde{\varphi}}\partial_x^{-1} \left(\tilde{S} + \tilde{R}\partial_x\tilde{S}^2 \right) + \\ & - 2c\tilde{s} \left[\tilde{R}^2\tilde{S}^2 - \tilde{R}\partial_x^{-1} \left(\tilde{S} + \tilde{R}\partial_x\tilde{S}^2 \right) + \tilde{S}\partial_x^{-1} \left(\tilde{R} - \tilde{S}\partial_x\tilde{R}^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Estas equações admitem solução do tipo vácuo nulo $\tilde{r} = 0$, $\tilde{s} = 0$, $\tilde{R} = 0$ e $\tilde{S} = 0$ para qualquer valor de c .

No limite de vácuo constante não nulo, fazemos as seguintes mudanças:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &\rightarrow \tilde{r}_0 \neq 0, \\ \tilde{s} &\rightarrow \tilde{s}_0 \neq 0, \\ \tilde{R} &\rightarrow -\frac{1}{2(1-c)\tilde{s}_0} e^{-2(1-c)\tilde{r}_0\tilde{s}_0x}, \\ \tilde{S} &\rightarrow \frac{1}{2(1-c)\tilde{r}_0} e^{2(1-c)\tilde{r}_0\tilde{s}_0x}.\end{aligned}\tag{3.145}$$

Considerando este limite nas equações de movimento (3.141) e (3.142), obtemos as expressões

$$\frac{1-2c}{2(1-c)^2s_0} = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{1-2c}{2(1-c)^2r_0} = 0,\tag{3.146}$$

e podemos concluir que o fluxo t_{-1} só admite vácuo constante não nulo para $c = 1/2$. Já para o fluxo t_{-2} , fazendo as mudanças (3.145) nas equações de movimento (3.143) e (3.144), obtemos as expressões

$$-\frac{3(1-2c)c}{8(1-c)^2r_0s_0^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{3(1-2c)c}{8(1-c)^2r_0^2s_0} = 0,\tag{3.147}$$

ou seja, o fluxo t_{-2} admite vácuo constante não nulo para $c = 0$ e $c = 1/2$.

As equações (3.141) e (3.142) com $c = 1$, considerando $\tilde{r} = \partial_x \tilde{R}$ e $\tilde{s} = \partial_x \tilde{S}$, resultam no modelo relativístico Mikhailov [9, 22]

$$\partial_{t_{-1}} \partial_x \tilde{R} = \tilde{R} - 2\tilde{R}\tilde{S} \partial_x \tilde{R},\tag{3.148}$$

$$\partial_{t_{-1}} \partial_x \tilde{S} = \tilde{S} + 2\tilde{R}\tilde{S} \partial_x \tilde{S}.\tag{3.149}$$

Hierarquia CLL

Para $c = 1/2$ temos que $\tilde{r} \rightarrow r' = re^{-\tilde{\varphi}}$, $\tilde{s} \rightarrow s' = se^{\tilde{\varphi}}$, por simplicidade redefinimos $r' \equiv r$ e $s' \equiv s$, e o Lax (3.125) se reduz a

$$A_{x,CLL} = \frac{1}{2}H^1 + rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1 - \frac{1}{2}rsH^0.\tag{3.150}$$

Este Lax é conhecido e está relacionado com a hierarquia CLL [23].

As equações de movimento para os primeiros fluxos da teoria são:

$$r_{t_1} = r_x, \quad (3.151)$$

$$s_{t_1} = s_x, \quad (3.152)$$

$$r_{t_2} = -r_{xx} - 2rsr_x, \quad (3.153)$$

$$s_{t_2} = s_{xx} - 2rss_x, \quad (3.154)$$

$$r_{t_3} = r_{3x} + 3r^2s^2r_x + 3s\partial_x(rr_x), \quad (3.155)$$

$$s_{t_3} = s_{3x} + 3r^2s^2s_x - 3r\partial_x(ss_x), \quad (3.156)$$

$$r_{t_{-1}} = \left[e^{\partial_x^{-1}(rs)} - r\partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] \partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right), \quad (3.157)$$

$$s_{t_{-1}} = \left[e^{-\partial_x^{-1}(rs)} + s\partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] \partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right), \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} r_{t_{-2}} = & - \left[e^{\partial_x^{-1}(rs)} - r\partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] \partial_x^{-2} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) + \\ & + r \left[\partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right]^2 \left[\partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right]^2 + \\ & - r\partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-2} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) + \\ & + 2e^{\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left[re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] + \\ & - 2r\partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left[se^{\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] + \\ & - 2r\partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left[re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\begin{aligned} s_{t_{-2}} = & \left[e^{-\partial_x^{-1}(rs)} + s\partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] \partial_x^{-2} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) + \\ & - s \left[\partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right]^2 \left[\partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right]^2 + \\ & - s\partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-2} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) + \\ & + 2e^{-\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left[se^{\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] + \\ & + 2s\partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left[re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right] + \\ & + 2s\partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left[se^{\partial_x^{-1}(rs)} \partial_x^{-1} \left(re^{-\partial_x^{-1}(rs)} \right) \partial_x^{-1} \left(se^{\partial_x^{-1}(rs)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.160)$$

A hierarquia CLL admite tanto solução do tipo vácuo nulo $r = 0$ e $s = 0$ quanto solução do tipo vácuo não nulo $r = r_0 \neq 0$ e $s = s_0 \neq 0$ para as equações acima. Mas isso não significa que a hierarquia como um todo possui vácuo constante, e de fato não tem, os fluxos negativos não admitem o vácuo misto $r = 0$ e $s = s_0$ (ou $r = r_0$ e $s = 0$).

Hierarquia KN

Para $c = 1$ temos que $\tilde{r} \rightarrow r' = re^{-2\tilde{\varphi}}$, $\tilde{s} \rightarrow s' = se^{2\tilde{\varphi}}$, por simplicidade redefinimos $r' \equiv r$ e $s' \equiv s$, e o Lax (3.125) se reduz a

$$A_{x,KN} = \frac{1}{2}H^1 + rE_{\alpha}^0 + sE_{-\alpha}^1. \quad (3.161)$$

Este Lax é conhecido e está relacionado com a hierarquia KN [24]. Os fluxos temporais negativos da hierarquia KN foram considerados pela primeira vez em [9].

As equações de movimento para os primeiros fluxos da teoria são:

$$r_{t_1} = r_x, \quad (3.162)$$

$$s_{t_1} = s_x, \quad (3.163)$$

$$r_{t_2} = -r_{xx} - 2\partial_x(r^2s), \quad (3.164)$$

$$s_{t_2} = s_{xx} - 2\partial_x(rs^2), \quad (3.165)$$

$$r_{t_3} = r_{3x} + 6\partial_x(r^3s^2 + rsr_x), \quad (3.166)$$

$$s_{t_3} = s_{3x} + 6\partial_x(r^2s^3 - rss_x), \quad (3.167)$$

$$r_{t_{-1}} = (1 - 2r\partial_x^{-1}s) \partial_x^{-1}r, \quad (3.168)$$

$$s_{t_{-1}} = (1 + 2s\partial_x^{-1}r) \partial_x^{-1}s, \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned}
r_{t-2} = & - (1 - 2r\partial_x^{-1}s) \partial_x^{-2}r + 2r \left[(\partial_x^{-1}r)^2 (\partial_x^{-1}s)^2 - (\partial_x^{-1}r) \partial_x^{-2}s \right] + \\
& + 2 (1 - 2r\partial_x^{-1}s) \partial_x^{-1} [r (\partial_x^{-1}s) (\partial_x^{-1}r)] + \\
& - 4r (\partial_x^{-1}r) \partial_x^{-1} [s (\partial_x^{-1}r) (\partial_x^{-1}s)],
\end{aligned} \tag{3.170}$$

$$\begin{aligned}
s_{t-2} = & (1 + 2s\partial_x^{-1}r) \partial_x^{-2}s - 2s \left[(\partial_x^{-1}r)^2 (\partial_x^{-1}s)^2 + (\partial_x^{-1}s) \partial_x^{-2}r \right] + \\
& + 2 (1 + 2s\partial_x^{-1}r) \partial_x^{-1} [s (\partial_x^{-1}r) (\partial_x^{-1}s)] + \\
& + 4s (\partial_x^{-1}s) \partial_x^{-1} [r (\partial_x^{-1}s) (\partial_x^{-1}r)].
\end{aligned} \tag{3.171}$$

3.4 Modelo Integrável com $a = 3$

O modelo integrável classificado por $\{\hat{sl}_2, Q_p, E = E^{(3)} \equiv \frac{1}{2}(E_\alpha^1 + E_{-\alpha}^2), a = 3, b = 0, 0 \leq c \leq 1, m = 3\}$ é construído a partir do Lax espacial dado por

$$\tilde{A}_{x,c} = e^{-c\tilde{\varphi}H^0} \left(e^{-\theta^{(-1)}} e^{-\theta^{(-2)}} \dots E^{(3)} \dots e^{\theta^{(-2)}} e^{\theta^{(-1)}} \right)_{\geq} e^{c\tilde{\varphi}H^0} + c\tilde{\varphi}_x H^0 \tag{3.172}$$

o que resulta na projeção

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{x,c} = & e^{-c\tilde{\varphi}H^0} E^{(3)} e^{c\tilde{\varphi}H^0} - [\theta^{(-1)}, E^{(3)}] - e^{-c\tilde{\varphi}H^0} [\theta^{(-2)}, E^{(3)}] e^{c\tilde{\varphi}H^0} + \\
& - [\theta^{(-3)}, E^{(3)}] + \frac{1}{2} e^{-c\tilde{\varphi}H^0} [\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, E^{(3)}]] e^{c\tilde{\varphi}H^0} + \\
& + \frac{1}{2} [\theta^{(-1)}, [\theta^{(-2)}, E^{(3)}]] - \frac{1}{6} [\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, E^{(3)}]]] + c\tilde{\varphi}_x H^0.
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Escrevendo os elementos $\theta^{(-3)}$, $\theta^{(-2)}$ e $\theta^{(-1)}$ da seguinte forma $\theta^{(-3)} = \chi_{-3}E_\alpha^{-2} + \psi_{-3}E_{-\alpha}^{-1}$, $\theta^{(-2)} = \varphi_{-2}H^{-1}$ e $\theta^{(-1)} = \chi_{-1}E_\alpha^{-1} + \psi_{-1}E_{-\alpha}^0$, onde os coeficientes χ_{-3} , ψ_{-3} , φ_{-2} , χ_{-1} e ψ_{-1} são funções de x e t_3 , obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{x,c} = & \frac{1}{2} (e^{-2c\tilde{\varphi}} E_\alpha^1 + e^{2c\tilde{\varphi}} E_{-\alpha}^2) + \frac{1}{2} (\psi_{-1} - \chi_{-1}) H^1 + \\
& - \left(\varphi_{-2} + \frac{1}{2} \chi_{-1} (\psi_{-1} - \chi_{-1}) \right) e^{-2c\tilde{\varphi}} E_\alpha^0 + \\
& + \left(\varphi_{-2} - \frac{1}{2} \psi_{-1} (\psi_{-1} - \chi_{-1}) \right) e^{2c\tilde{\varphi}} E_{-\alpha}^1 + \\
& + \left(\frac{1}{3} \chi_{-1} \psi_{-1} (\psi_{-1} - \chi_{-1}) - \frac{1}{2} \varphi_{-2} (\psi_{-1} + \chi_{-1}) \right) H^0 + \\
& + \frac{1}{2} (\psi_{-3} - \chi_{-3}) H^0 + c\tilde{\varphi}_x H^0.
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Definindo as funções $v_1 = \frac{1}{2}(\psi_{-1} - \chi_{-1})$, $v_2 = \varphi_{-2} - v_1\psi_{-1}$ e $v_3 = \frac{1}{2}(\psi_{-3} - \chi_{-3}) - v_2\psi_{-1} - \frac{1}{3}v_1(v_1 + \psi_{-1})$, sendo que $v_1 = v_1(x, t_3)$, $v_2 = v_2(x, t_3)$ e $v_3 = v_3(x, t_3)$ são os campos do modelo integrável em questão. Considerando $\tilde{\varphi}_x \equiv -v_1v_2 - v_3$, $\chi_{-1} = \psi_{-1} - 2v_1$, $\varphi_{-2} = v_2 + v_1\psi_{-1}$ e $\chi_{-3} = -2v_3 + \psi_{-3} - 2v_2\psi_{-1} - \frac{2}{3}v_1(v_1 + \psi_{-1})$ em (3.174), chegamos no Lax espacial do modelo igual a

$$\tilde{A}_x = \frac{1}{2} (e^{-2c\tilde{\varphi}} E_\alpha^1 + e^{2c\tilde{\varphi}} E_{-\alpha}^2) + v_1 H^1 - (2v_1^2 + v_2) e^{-2c\tilde{\varphi}} E_\alpha^0 + v_2 e^{2c\tilde{\varphi}} E_{-\alpha}^1 + (1 - c) \tilde{\varphi}_x H^0. \quad (3.175)$$

As equações de movimento do modelo são obtidas resolvendo a equação de curvatura nula, para o Lax acima encontramos o sistema de equações:

$$v_{1,t_3} = v_{1,3x} - 6(v_1^2 + v_2) \left(v_{1,x}^2 + (v_2^2 - 2v_1v_3)^2 \right) - 6\partial_x (v_1v_3^2) + \\ - 6v_3\partial_x (v_1^4 + 2v_1^2v_2) + 2v_2^2\partial_x (v_1^3 + 3v_3 + 3v_1v_2), \quad (3.176)$$

$$v_{2,t_3} = v_{2,3x} + 6(v_1v_2 - v_3) \left(v_{1,x}^2 + (v_2^2 - 2v_1v_3)^2 \right) - 6v_3^2v_{2,x} + \\ - 6\partial_x (v_1^2v_2^3 + (v_2^2 - 2v_1v_3)v_{1,x}) - 12v_1v_2\partial_x (v_2v_3) + \\ + 4v_1^2\partial_x (v_2^3 + 3v_3^2) + 6(v_{1,xx} + 4v_1^2v_2v_3)v_{1,x}, \quad (3.177)$$

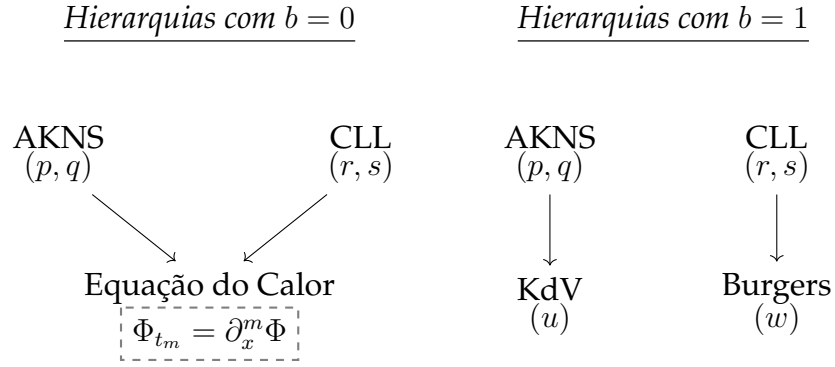
$$v_{3,t_3} = v_{3,3x} - 6(v_2^2 + v_1v_3) \left(v_{1,x}^2 - (v_2^2 - 2v_1v_3)^2 \right) - 6(v_2^3 + v_3^2)v_{3,x} + \\ - 6\partial_x (-4v_1^3v_3^2 + 3v_1^2v_2^2v_3 - 2v_1^2v_3v_{1,x} + (v_2^2 - 2v_1v_3)v_{2,x}) + \\ + 6v_1v_2\partial_x (v_2^3 - v_2v_{1,x}) - 6v_{1,x}(v_1v_2v_{2,x} - \partial_x (v_1v_{1,x})) + \\ + 24v_1v_3(v_{1,x}^2 - v_1^2v_{3,x}) + 3\partial_x (v_{1,x}v_{2,x}). \quad (3.178)$$

O sistema de equações acima não depende explicitamente do parâmetro c , assim como no caso da hierarquia mKdV, as equivalências estudadas não mudam as equações de movimento da teoria. Esse sistema admite a solução de vácuo nulo $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ e $v_3 = 0$, e no limite em que $v_1 \rightarrow 0$, $v_2 \rightarrow 0$ e $v_3 \rightarrow v$ se reduz a equação mKdV

$$v_{t_3} = v_{3x} - 6v^2v_x. \quad (3.179)$$

3.5 Reduções

Entre as hierarquias estudadas neste capítulo, é possível obter reduções imediatas daquelas com dois campos, fazendo o limite em que um dos campos tende ao vácuo correspondente, como ilustrado a seguir:



3.5.1 Equação do calor

Partindo da hierarquia AKNS com condições de contorno nula, considerando $p = 0$ e $q = \Phi$, temos a redução dada pelo Lax

$$A_{x, Calor} = \frac{1}{2} H^1 + \Phi E_{-\alpha}^0, \quad (3.180)$$

onde $\Phi = \Phi(x, t_m)$ é o campo da redução. As equações de movimento para os primeiros fluxos da teoria são

$$\Phi_{t_1} = \Phi_x, \quad (3.181)$$

$$\Phi_{t_2} = \Phi_{xx}, \quad (3.182)$$

$$\Phi_{t_3} = \Phi_{3x}, \quad (3.183)$$

$$\Phi_{t_{-1}} = \partial_x^{-1} \Phi, \quad (3.184)$$

$$\Phi_{t_{-2}} = \partial_x^{-2} \Phi, \quad (3.185)$$

$$\Phi_{t_{-3}} = \partial_x^{-3} \Phi. \quad (3.186)$$

As equações acima podem ser escritas em um formato fechado, o que resulta na conhecida equação do calor

$$\Phi_{t_m} = \partial_x^m \Phi. \quad (3.187)$$

3.5.2 Hierarquia KdV

Partindo da hierarquia AKNS com condições de contorno não nula, considerando $p = 1$ e $q = u$, temos a redução dada pelo Lax

$$A_{x,KdV} = \frac{1}{2}H^1 + E_\alpha^0 + uE_{-\alpha}^0, \quad (3.188)$$

onde $u = u(x, t_m)$ é o campo da redução. Este Lax é conhecido e está relacionado com a hierarquia KdV.

As equações de movimento para os primeiros fluxos positivos da hierarquia KdV são

$$u_{t_3} = u_{3x} - 6uu_x, \quad (3.189)$$

$$u_{t_5} = u_{5x} - 10uu_{3x} + 10u_x(3u^2 - 2u_{xx}), \quad (3.190)$$

$$\begin{aligned} u_{t_7} = & u_{7x} - 14uu_{5x} + 70u_{3x}(u^2 - u_{xx}) + \\ & - 14u_x(10u^3 - 5u_x^2 - 20uu_{xx} + 3u_{4x}). \end{aligned} \quad (3.191)$$

A primeira equação é a conhecida equação KdV.

3.5.3 Hierarquia de Burgers

Partindo da hierarquia CLL com condições de contorno não nula, considerando $r = 1$ e $s = w$, temos a redução dada pelo Lax

$$A_{x,Burgers} = \frac{1}{2}H^1 + E_\alpha^0 + wE_{-\alpha}^1 - \frac{1}{2}wH^0, \quad (3.192)$$

onde $w = w(x, t_m)$ é o campo da redução. Este Lax está relacionado com a hierarquia de Burgers [25, 26].

As equações de movimento para os primeiros fluxos da hierarquia de Burgers são

$$w_{t_1} = w_x, \quad (3.193)$$

$$w_{t_2} = w_{xx} - 2ww_x, \quad (3.194)$$

$$w_{t_3} = w_{3x} + 3w^2w_x - 3\partial_x(ww_x), \quad (3.195)$$

$$w_{t_{-1}} = 1 + we^{\partial_x^{-1}w} \partial_x^{-1} \left(e^{-\partial_x^{-1}w} \right), \quad (3.196)$$

$$w_{t_{-2}} = e^{\partial_x^{-1}w} \partial_x^{-1} \left(e^{-\partial_x^{-1}w} \right) + we^{\partial_x^{-1}w} \partial_x^{-2} \left(e^{-\partial_x^{-1}w} \right), \quad (3.197)$$

$$w_{t_{-3}} = e^{\partial_x^{-1}w} \partial_x^{-2} \left(e^{-\partial_x^{-1}w} \right) + we^{\partial_x^{-1}w} \partial_x^{-3} \left(e^{-\partial_x^{-1}w} \right). \quad (3.198)$$

As equações (3.194) e (3.195) são as conhecidas equação de Burgers e equação Sharma-Tasso-Olver, respectivamente. Todas as equações acima admitem vácuo não nulo, $w = w_0 \neq 0$. Os fluxos positivos também possuem vácuo nulo, $w = 0$. Os fluxos negativos da hierarquia de Burgers, até onde sabemos, não eram conhecidos. E podemos escrever estas equações de movimento no formato fechado:

$$w_{t_m} = \begin{cases} -\partial_x \left[e^{\int^x w(y,t_m)dy} \left(\partial_x^m e^{-\int^x w(y,t_m)dy} \right) \right], & \text{para } m > 0, \\ \partial_x \left[e^{\int^x w(y,t_m)dy} \left(\partial_x^m e^{-\int^x w(y,t_m)dy} \right) \right], & \text{para } m < 0. \end{cases} \quad (3.199)$$

Capítulo 4

Soluções Solitônicas da Hierarquia CLL e da Hierarquia de Burgers

Neste capítulo, aplicando o método de dressing obtemos soluções do tipo sólito da hierarquia CLL com condições de contorno nula e constante não nula. Ambos os casos, possuem dois operadores de vértice, cujos autovalores, para o mesmo fluxo, diferem entre si por um sinal global. A partir daí, podemos construir dois tipos de soluções, a do tipo A, envolvendo apenas um dos vértices, e a do tipo B, envolvendo os dois vértices [14]. No caso da hierarquia CLL com condições de contorno nula, somente as soluções do tipo B resultam em soluções não triviais. Já no caso da hierarquia CLL com condições de contorno constante não nula, as soluções do tipo A e B resultam em soluções não triviais, além disso, as soluções do tipo A estão relacionadas com as soluções solitônicas da Hierarquia de Burgers.

Antes de aplicar o método, é preciso fazer um pequeno ajuste nos pares de Lax da teoria. Na construção da hierarquia CLL com condições de contorno nula e constante não nula, não usamos a álgebra de Kac-Moody completa, $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}_2$, consideramos somente a loop-álgebra de sl_2 . No entanto, o método de dressing exige que se leve em consideração a álgebra completa, já que precisamos dos estados de peso mais alto e estes só existem para a álgebra com o termo central. Por esse motivo, adicionamos um termo a mais nos potenciais

$$A_{x,CLL} \rightarrow A_{x,CLL} - \frac{1}{2}\nu_x \hat{c} \quad (4.1)$$

e

$$A_{t_m,CLL} \rightarrow A_{t_m,CLL} - \frac{1}{2}\nu_{t_m} \hat{c}, \quad (4.2)$$

onde $\nu = \nu(x, t_m)$ é uma função a ser determinada que tende a zero nos limites de vácuo nulo e constante não nulo. O operador $\hat{c}$ comuta com todos os outros operadores da álgebra, portanto, essas mudanças não alteram as equações de movimento da teoria.

Depois do ajuste, partimos das transformações de gauge

$$A_{x,CLL} = \Theta_{\pm} A_{x,CLL}^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - (\partial_x \Theta_{\pm}) \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (4.3)$$

$$A_{t_m,CLL} = \Theta_{\pm} A_{t_m,CLL}^{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - (\partial_{t_m} \Theta_{\pm}) \Theta_{\pm}^{-1}. \quad (4.4)$$

Neste caso, os operadores de dressing Θ_+ e Θ_- são dados por

$$\Theta_+ = e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} e^{\theta^{(2)}} e^{\theta^{(3)}} e^{\theta^{(4)}} \dots \quad (4.5)$$

e

$$\Theta_- = e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} e^{-\theta^{(-1)}} e^{-\theta^{(-2)}} e^{-\theta^{(-3)}} \dots, \quad (4.6)$$

sendo que os elementos de grau zero, $\tilde{\theta}^{(0)}$ e $\theta^{(0)}$, são definidos por

$$\tilde{\theta}^{(0)} = \tilde{\varphi} H^0 + \tilde{v} \hat{c}, \quad (4.7)$$

$$\theta^{(0)} = \varphi H^0 + v \hat{c}, \quad (4.8)$$

e os elementos de demais ordens são definidos por

$$\theta^{(2k')} = \varphi_{2k'} H^{k'} \quad \text{e} \quad \theta^{(2k+1)} = \chi_{2k+1} E_{\alpha}^k + \psi_{2k+1} E_{-\alpha}^{k+1}, \quad (4.9)$$

com $k' \in \mathbb{Z}^*$ e $k \in \mathbb{Z}$. Os coeficientes $\tilde{\varphi}, \tilde{v}, \varphi, v, \chi_{\pm 1}, \psi_{\pm 1}, \varphi_{\pm 2}, \dots$, conhecidos como campos auxiliares, são funções que dependem de x e t_m . Resolvendo a equação (4.3) de maneira recursiva, determinamos os campos auxiliares em termos dos campos da teoria.

Olhando para a equação (4.3) para a transformação Θ_+ , de maneira explícita, temos a igualdade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (H^1 - r s H^0) + r E_{\alpha}^0 + s E_{-\alpha}^1 - \frac{1}{2} \nu_x \hat{c} = \\ & = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} \dots (H^1 - b r_0 s_0 H^0) \dots e^{-\theta^{(1)}} e^{-\theta^{(0)}} e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\ & + b e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} \dots (r_0 E_{\alpha}^0 + s_0 E_{-\alpha}^1) \dots e^{-\theta^{(1)}} e^{-\theta^{(0)}} e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\ & - \left[\partial_x \left(e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} e^{\theta^{(2)}} \dots \right) \right] \dots e^{-\theta^{(2)}} e^{-\theta^{(1)}} e^{-\theta^{(0)}} e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Decompondo a equação acima grau a grau, da equação de grau zero

$$-\frac{1}{2}rsH^0 - \frac{1}{2}\nu_x\hat{c} = -\frac{1}{2}br_0s_0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}H^0e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \quad (4.11)$$

$$- \left(\partial_x e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}} \right) e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}$$

obtemos

$$\nu_x = -\tilde{\nu}_x + 2v_x, \quad (4.12)$$

$$\varphi_x = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_x + \frac{1}{2}rs - \frac{1}{2}br_0s_0.$$

Da equação de grau um

$$rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1 = be^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}(r_0E_\alpha^0 + s_0E_{-\alpha}^1)e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \quad (4.13)$$

$$- \frac{1}{2}br_0s_0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}[\theta^{(1)}, H^0]e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} +$$

$$- e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}(\partial_x\theta^{(1)})e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}$$

temos que

$$\partial_x\theta^{(1)} + \frac{1}{2}br_0s_0[\theta^{(1)}, H^0] = -re^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}E_\alpha^0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}} + \quad (4.14)$$

$$- se^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}E_{-\alpha}^1e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}} +$$

$$+ b(r_0E_\alpha^0 + s_0E_{-\alpha}^1).$$

Usando as relações $e^{\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0}E_\alpha^0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0} = e^{\tilde{\varphi}}E_\alpha^0$ e $e^{\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0}E_{-\alpha}^1e^{-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0} = e^{-\tilde{\varphi}}E_{-\alpha}^1$ no resultado anterior, obtemos

$$\chi_{1,x} - br_0s_0\chi_1 = - (re^{\tilde{\varphi}-2\varphi} - br_0), \quad (4.15)$$

$$\psi_{1,x} + br_0s_0\psi_1 = - (se^{-(\tilde{\varphi}-2\varphi)} - bs_0).$$

Da equação de grau dois

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}H^1 &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}H^1e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\
 &+ be^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}[\theta^{(1)}, r_0E_\alpha^0 + s_0E_{-\alpha}^1]e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\
 &- \frac{1}{2}br_0s_0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}[\theta^{(2)}, H^0]e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\
 &- \frac{1}{4}br_0s_0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}[\theta^{(1)}, [\theta^{(1)}, H^0]]e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\
 &+ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{\theta^{(0)}}[\partial_x\theta^{(1)}, \theta^{(1)}]e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\
 &- e^{\frac{1}{2}\theta^{(0)}}e^{\theta^{(1)}}(\partial_x\theta^{(2)})e^{-\theta^{(0)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

é possível determinar o coeficiente φ_2 . E assim por diante, até que todo Θ_+ seja determinado.

Agora, olhando para a equação (4.3) para a transformação Θ_- , de maneira explícita, temos a igualdade

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(H^1 - rsH^0) + rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1 - \frac{1}{2}\nu_x\hat{c} &= \\
 &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{-\theta^{(-1)}} \dots (H^1 - br_0s_0H^0) \dots e^{\theta^{(-1)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\
 &+ be^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{-\theta^{(-1)}} \dots (r_0E_\alpha^0 + s_0E_{-\alpha}^1) \dots e^{\theta^{(-1)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\
 &- \left[\partial_x \left(e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}e^{-\theta^{(-1)}}e^{-\theta^{(-2)}} \dots \right) \right] \dots e^{\theta^{(-2)}}e^{\theta^{(-1)}}e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Decompondo a equação acima grau a grau, da equação de grau dois, temos a igualdade

$$\frac{1}{2}H^1 = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}H^1e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}. \tag{4.18}$$

Da equação de grau um

$$rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1 = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}[\theta^{(-1)}, H^1]e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + be^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}(r_0E_\alpha^0 + s_0E_{-\alpha}^1)e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} \tag{4.19}$$

temos que

$$\frac{1}{2}[\theta^{(-1)}, H^1] = -re^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}E_\alpha^0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} - se^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}E_{-\alpha}^1e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + b(r_0E_\alpha^0 + s_0E_{-\alpha}^1). \tag{4.20}$$

Usando as relações $e^{\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0}E_\alpha^0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0} = e^{\tilde{\varphi}}E_\alpha^0$ e $e^{\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0}E_{-\alpha}^1e^{-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}H^0} = e^{-\tilde{\varphi}}E_{-\alpha}^1$ no resul-

tado anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\chi_{-1} &= (re^{\tilde{\varphi}} - br_0), \\ \psi_{-1} &= -(se^{-\tilde{\varphi}} - bs_0).\end{aligned}\tag{4.21}$$

Da equação de grau zero

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}rsH^0 - \frac{1}{2}\nu_x\hat{c} &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} [\theta^{(-2)}, H^1] e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\ &+ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} [\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, H^1]] e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\ &- be^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} [\theta^{(-1)}, r_0E_\alpha^0 + s_0E_{-\alpha}^1] e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\ &- \frac{1}{2}br_0s_0e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} H^0 e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}} + \\ &- \left(\partial_x e^{-\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}\right) e^{\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(0)}}\end{aligned}\tag{4.22}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} [\theta^{(-2)}, H^1] &= \frac{1}{4} [2\chi_{-1}\psi_{-1} (H^0 - \hat{c}) + 2\chi_{-1}\psi_{-1}H^0] + \\ &- b [s_0\chi_{-1} (H^0 - \hat{c}) - r_0\psi_{-1}H^0] + \\ &- \frac{1}{2}br_0s_0H^0 + \frac{1}{2}rsH^0 + \frac{1}{2}\nu_x\hat{c} + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_xH^0 + \frac{1}{2}\tilde{v}_x\hat{c}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Substituindo as equações em (4.21) na equação acima, encontramos

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_x &= rs - br_0s_0, \\ \varphi_{-2} &= -\tilde{v}_x - \frac{1}{2} (re^{\tilde{\varphi}} - br_0) (se^{-\tilde{\varphi}} - bs_0) - bs_0 (re^{\tilde{\varphi}} - br_0).\end{aligned}\tag{4.24}$$

E assim por diante, até que todo Θ_- seja determinado.

Observe que se considerarmos $\tilde{\varphi}_x = rs - br_0s_0$ na expressão

$$\varphi_x = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_x + \frac{1}{2}rs - \frac{1}{2}br_0s_0,\tag{4.25}$$

obtemos $\varphi_x = \tilde{\varphi}_x$. Por esse motivo, a partir daqui adotaremos $\tilde{\varphi} = \varphi$.

Com essa identificação, as equações em (4.21) permitem escrever os campos $r = r(x, t_m)$ e $s = s(x, t_m)$ em termos dos campos auxiliares φ , χ_{-1} e ψ_{-1} , da seguinte maneira

$$r = (br_0 + \chi_{-1}) e^{-\varphi}\tag{4.26}$$

e

$$s = (bs_0 - \psi_{-1}) e^{\varphi}.\tag{4.27}$$

4.1 Função tau

Um ingrediente importante do método de dressing para determinar os campos auxiliares é a função tau, definida por

$$\tau_{ij} \equiv \langle \lambda_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i | \tilde{\Psi}_0 g \tilde{\Psi}_0^{-1} | \lambda_j \rangle \quad (4.28)$$

com $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Os estados $|\lambda_i\rangle$ e $|\lambda_j\rangle$ são os estados de projeção

$$\begin{aligned} |\lambda_0\rangle &= |\mu_0\rangle, & |\lambda_1\rangle &= |\mu_1\rangle, \\ |\lambda_2\rangle &= E_\alpha^{-1} |\mu_0\rangle, & |\lambda_4\rangle &= E_\alpha^{-2} |\mu_0\rangle, \quad \dots & |\lambda_{2f}\rangle &= E_\alpha^{-f} |\mu_0\rangle, \\ |\lambda_3\rangle &= E_{-\alpha}^0 |\mu_1\rangle, & |\lambda_5\rangle &= E_{-\alpha}^{-1} |\mu_1\rangle, \quad \dots & |\lambda_{2f+1}\rangle &= E_{-\alpha}^{-f+1} |\mu_1\rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde os estados $|\mu_0\rangle$ e $|\mu_1\rangle$ são os estados de peso mais alto da álgebra $\hat{sl}_2$ e $f \in \mathbb{Z}_+^*$.¹ Vamos escolher os estados de projeção

$$|\lambda_0\rangle = |\mu_0\rangle, \quad (4.30)$$

$$|\lambda_1\rangle = |\mu_1\rangle, \quad (4.31)$$

$$|\lambda_2\rangle = E_\alpha^{-1} |\mu_0\rangle \quad (4.32)$$

e

$$|\lambda_3\rangle = E_{-\alpha}^0 |\mu_1\rangle. \quad (4.33)$$

Calculando as funções τ_{00} , τ_{11} , τ_{20} , e τ_{31} do lado esquerdo da equação (4.28) encontramos²

$$\tau_{00} = \langle \mu_0 | \dots e^{\theta^{(-1)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} \dots | \mu_0 \rangle = \langle \mu_0 | e^{v\hat{c}} | \mu_0 \rangle = e^v, \quad (4.34)$$

$$\tau_{11} = \langle \mu_1 | \dots e^{\theta^{(-1)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} \dots | \mu_1 \rangle = \langle \mu_1 | e^{\varphi H^0 + v\hat{c}} | \mu_1 \rangle = e^{\varphi + v}, \quad (4.35)$$

$$\tau_{20} = \langle \mu_0 | E_{-\alpha}^1 \dots e^{\theta^{(-1)}} e^{\theta^{(0)}} e^{\theta^{(1)}} \dots | \mu_0 \rangle = -e^v \langle \mu_0 | [\theta^{(-1)}, E_{-\alpha}^1] | \mu_0 \rangle = \chi_{-1} e^v \quad (4.36)$$

e

$$\tau_{31} = \langle \mu_0 | E_\alpha^0 \dots e^{\theta^{(-1)}} e^{\theta^{(0)}} \dots | \mu_1 \rangle = -e^{\varphi + v} \langle \mu_1 | [\theta^{(-1)}, E_\alpha^0] | \mu_1 \rangle = \psi_{-1} e^{\varphi + v}, \quad (4.37)$$

¹Veja o apêndice A

²As relações do apêndice B são úteis aqui

o que resulta nas relações

$$\begin{aligned} e^v &= \tau_{00}, & \tau_{11} &= e^{\varphi+v}, \\ \psi_{-1} &= \frac{\tau_{31}}{\tau_{11}}, & \frac{\tau_{20}}{\tau_{00}} &= \chi_{-1}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Substituindo estas relações em (4.26) e (4.27), encontramos que os campos $r = r(x, t_m)$ e $s = s(x, t_m)$ em termos das funções τ_{00} , τ_{11} , τ_{20} , e τ_{31} são

$$r = \frac{br_0\tau_{00} + \tau_{20}}{\tau_{11}} \quad (4.39)$$

e

$$s = \frac{bs_0\tau_{11} - \tau_{31}}{\tau_{00}}. \quad (4.40)$$

E por fim, é preciso usar os operadores de vértice, dados a seguir, para determinar a partir do lado direito da equação (4.28) as funções τ_{00} , τ_{11} , τ_{20} , e τ_{31} em termos de x e t_m , e com isso obter as soluções desejadas.

4.2 Operadores de vértice

Os operadores de vértice da hierarquia CLL com condições de contorno nula e constante não nula são ³

$$V_f^+ = -br_0\hat{c} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (br_0\xi_f^{-k}H^k + br_0^2\xi_f^{-k}E_{\alpha}^{k-1} - \xi_f^{-k+1}E_{-\alpha}^k) \quad (4.41)$$

e

$$V_f^- = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (bs_0\xi_f^{-k}H^k - \xi_f^{-k+1}E_{\alpha}^{k-1} + bs_0^2\xi_f^{-k}E_{-\alpha}^k), \quad (4.42)$$

sendo que $f \in \mathbb{Z}_+^*$, ξ_f é um parâmetro não nulo que pode ser real ou complexo e os vértices satisfazem as relações de comutação

$$[V_f^{\pm}, A_{x,CLL}^{vac}] = \pm (\kappa(\xi_f)) V_f^{\pm}, \quad (4.43)$$

$$[V_f^{\pm}, A_{t_m,CLL}^{vac}] = \pm (\omega_m(\xi_f)) V_f^{\pm}, \quad (4.44)$$

onde os autovalores são funções do parâmetro ξ_f .

A partir dos potenciais de Lax encontrados no capítulo anterior, fazendo os

³Veja o apêndice D

limites de vácuo nulo e constante não nulo, obtemos os potenciais de Lax triviais:

$$A_{x,CLL}^{vac} = \frac{1}{2}H^1 + br_0E_\alpha^0 + bs_0E_{-\alpha}^1 - \frac{1}{2}br_0s_0H^0, \quad (4.45)$$

$$A_{t_{-1},CLL}^{vac} = \frac{1}{2}H^{-1} - \frac{b}{s_0}E_\alpha^{-1} - \frac{b}{r_0}E_{-\alpha}^0 - \frac{b}{2r_0s_0}H^0, \quad (4.46)$$

$$A_{t_2,CLL}^{vac} = (\zeta - br_0s_0) \left(\frac{1}{2}H^1 + br_0E_\alpha^0 + bs_0E_{-\alpha}^1 - \frac{1}{2}br_0s_0H^0 \right), \quad (4.47)$$

$$A_{t_{-2},CLL}^{vac} = \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{b}{r_0s_0} \right) \left(\frac{1}{2}H^{-1} - \frac{b}{s_0}E_\alpha^{-1} - \frac{b}{r_0}E_{-\alpha}^0 - \frac{b}{2r_0s_0}H^0 \right), \quad (4.48)$$

$$A_{t_3,CLL}^{vac} = (\zeta^2 - br_0s_0(\zeta - br_0s_0)) \left(\frac{1}{2}H^1 + br_0E_\alpha^0 + bs_0E_{-\alpha}^1 - \frac{1}{2}br_0s_0H^0 \right). \quad (4.49)$$

Substituindo os potenciais de Lax triviais acima nas relações de comutação (4.43) e (4.44) para os vértices (4.41) e (4.42), encontramos

$$\kappa(\xi_f) = \xi_f + br_0s_0, \quad (4.50)$$

$$\omega_m(\xi_f) = \begin{cases} \xi_f^m - b(-r_0s_0)^m, & \text{para } m = M, \\ (1 - 2b)\xi_f^m + b(-r_0s_0)^m, & \text{para } m = -M. \end{cases} \quad (4.51)$$

4.3 Soluções solitônicas do tipo A

As soluções do tipo A envolvem somente um dos vértices V_f^+ e V_f^- , assim, do lado direito da equação (4.28), escolhendo o vértice V_f^+ , temos

$$\tau_{ij} = \langle \lambda_i | \tilde{\Psi}_0 \left(\prod_{f=1}^n e^{V_f^+} \right) \tilde{\Psi}_0^{-1} | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i | \prod_{f=1}^n (1 + e^{\rho_f} V_f^+) | \lambda_j \rangle \quad (4.52)$$

onde

$$\rho_f = (\xi_f + br_0s_0)x + (\omega_m(\xi_f))t_m. \quad (4.53)$$

Calculando as funções τ_{00} , τ_{11} , τ_{20} , e τ_{31} a partir da relação acima, considerando os elementos de matriz do apêndice D, encontramos os resultados abaixo. Para

$n = 1$:

$$\begin{aligned}\tau_{00} &= 1 - br_0 e^{\rho_1}, \\ \tau_{11} &= 1, \\ \tau_{20} &= br_0^2 e^{\rho_1}, \\ \tau_{31} &= -\xi_1 e^{\rho_1},\end{aligned}\tag{4.54}$$

para $n = 2$:

$$\begin{aligned}\tau_{00} &= 1 - br_0 (e^{\rho_1} + e^{\rho_2}), \\ \tau_{11} &= 1, \\ \tau_{20} &= br_0^2 (e^{\rho_1} + e^{\rho_2}), \\ \tau_{31} &= -(\xi_1 e^{\rho_1} + \xi_2 e^{\rho_2}),\end{aligned}\tag{4.55}$$

para $n = 3$:

$$\begin{aligned}\tau_{00} &= 1 - br_0 (e^{\rho_1} + e^{\rho_2} + e^{\rho_3}), \\ \tau_{11} &= 1, \\ \tau_{20} &= br_0^2 (e^{\rho_1} + e^{\rho_2} + e^{\rho_3}), \\ \tau_{31} &= -(\xi_1 e^{\rho_1} + \xi_2 e^{\rho_2} + \xi_3 e^{\rho_3}).\end{aligned}\tag{4.56}$$

Solução 1-sóliton

Substituindo as relações em (4.54) nas equações (4.39) e (4.40) chegamos na solução

$$r(x, t_m) = br_0\tag{4.57}$$

e

$$s(x, t_m) = \frac{bs_0 + \xi_1 e^{\rho_1}}{1 - br_0 e^{\rho_1}}.\tag{4.58}$$

Solução 2-sólitons

Substituindo as relações em (4.55) nas equações (4.39) e (4.40) chegamos na solução

$$r(x, t_m) = br_0\tag{4.59}$$

e

$$s(x, t_m) = \frac{bs_0 + \xi_1 e^{\rho_1} + \xi_2 e^{\rho_2}}{1 - br_0 (e^{\rho_1} + e^{\rho_2})}.\tag{4.60}$$

Solução 3-sólitons

Substituindo as relações em (4.56) nas equações (4.39) e (4.40) chegamos na solução

$$r(x, t_m) = br_0 \quad (4.61)$$

e

$$s(x, t_m) = \frac{bs_0 + \xi_1 e^{\rho_1} + \xi_2 e^{\rho_2} + \xi_3 e^{\rho_3}}{1 - br_0 (e^{\rho_1} + e^{\rho_2} + e^{\rho_3})}. \quad (4.62)$$

Solução n -sólitons

As soluções do tipo A usando o vértice V_f^+ sempre resultam em r igual a constante br_0 e s igual a função

$$s(x, t_m) = \frac{bs_0 + \sum_{f=1}^n \xi_f e^{\rho_f}}{1 - br_0 \sum_{f=1}^n e^{\rho_f}}. \quad (4.63)$$

No caso em que $b = 0$ temos $r = 0$ e s é uma solução trivial da equação do calor. Já, no caso em que $b = 1$ e $r_0 = 1$ temos $r = 1$ e s resulta na solução n -sólitons da hierarquia de Burgers.

Se trocarmos V_f^+ por V_f^- em (4.52), encontramos s igual a constante bs_0 e r igual a função

$$r(x, t_m) = \frac{br_0 - \sum_{f=1}^n \xi_f e^{-\rho_f}}{1 + bs_0 \sum_{f=1}^n e^{-\rho_f}}. \quad (4.64)$$

4.4 Soluções solitônicas do tipo B

As soluções do tipo B envolvem os dois vértices V_f^+ e V_f^- , assim, do lado direito da equação (4.28), temos

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \langle \lambda_i | \tilde{\Psi}_0 \left(\prod_{f=1}^n e^{V_f^+} e^{V_{f+1}^-} \right) \tilde{\Psi}_0^{-1} | \lambda_j \rangle \\ &= \langle \lambda_i | \prod_{f=1}^n (1 + e^{\rho_f} V_f^+ + e^{-\rho_{f+1}} V_{f+1}^- + e^{\rho_f} e^{-\rho_{f+1}} V_f^+ V_{f+1}^-) | \lambda_j \rangle.\end{aligned}\quad (4.65)$$

Calculando as funções τ_{00} , τ_{11} , τ_{20} , e τ_{31} a partir da relação acima, considerando os elementos de matriz do apêndice D, encontramos para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\tau_{00} &= 1 - br_0 e^{\rho_1} + \frac{\xi_2 (\xi_1 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_1 - \rho_2}, \\ \tau_{11} &= 1 + bs_0 e^{-\rho_2} + \frac{\xi_1 (\xi_2 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_1 - \rho_2}, \\ \tau_{20} &= br_0^2 e^{\rho_1} - \xi_2 e^{-\rho_2} + \frac{br_0 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2 + 2br_0 s_0)}{\xi_2 - \xi_1} e^{\rho_1 - \rho_2}, \\ \tau_{31} &= -\xi_1 e^{\rho_1} + bs_0^2 e^{-\rho_2} + \frac{bs_0 \xi_1 (\xi_1 + \xi_2 + 2br_0 s_0)}{\xi_2 - \xi_1} e^{\rho_1 - \rho_2}.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Solução 2-sólitons

Substituindo as relações em (4.66) nas equações (4.39) e (4.40) chegamos na solução 2-sólitons da hierarquia CLL

$$r(x, t_m) = \frac{br_0 - \xi_2 e^{-\rho_2} + \frac{br_0 \xi_2 (\xi_2 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_1 - \rho_2}}{1 + bs_0 e^{-\rho_2} + \frac{\xi_1 (\xi_2 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_1 - \rho_2}} \quad (4.67)$$

e

$$s(x, t_m) = \frac{bs_0 + \xi_1 e^{\rho_1} + \frac{bs_0 \xi_1 (\xi_1 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_1 - \rho_2}}{1 - br_0 e^{\rho_1} + \frac{\xi_2 (\xi_1 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_1 - \rho_2}}. \quad (4.68)$$

Por outro lado, considerando $n = 1$ em (4.65) e trocando $e^{V_1^+} e^{V_2^-}$ por $e^{V_1^-} e^{V_2^+}$

chegamos na outra solução 2-sólitons da hierarquia CLL

$$r(x, t_m) = \frac{br_0 - \xi_1 e^{-\rho_1} + \frac{br_0 \xi_1 (\xi_1 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_2 - \rho_1}}{1 + bs_0 e^{-\rho_1} + \frac{\xi_2 (\xi_1 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_2 - \rho_1}} \quad (4.69)$$

e

$$s(x, t_m) = \frac{bs_0 + \xi_2 e^{\rho_2} + \frac{bs_0 \xi_2 (\xi_2 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_2 - \rho_1}}{1 - br_0 e^{\rho_2} + \frac{\xi_1 (\xi_2 + br_0 s_0)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} e^{\rho_2 - \rho_1}}. \quad (4.70)$$

Capítulo 5

Transformações de Gauge entre Hierarquias Integráveis

Hierarquias integráveis estão relacionadas entre si através de transformações de gauge. Vamos explicar como a transformação de gauge entre as hierarquias KdV e mKdV implica na transformação de Miura. E depois, mostraremos como a transformação de gauge entre a hierarquia da equação do calor e a hierarquia de Burgers resulta na conhecida transformação de Cole-Hopf [27], que é portanto uma transformação do tipo Miura.

5.1 Relação entre as hierarquias mKdV e KdV

A transformação de gauge entre as hierarquias mKdV e KdV é tal que

$$A_{x,KdV} = U A_{x,mKdV} U^{-1} - (\partial_x U) U^{-1}. \quad (5.1)$$

Com o intuito de deixar ambas teorias no mesmo pé de igualdade, vamos escrever tanto a hierarquia KdV quanto a hierarquia mKdV com gradação homogênea, assim, os Laxes espaciais das hierarquias são

$$A_{x,KdV} = \frac{1}{2} H^1 + E_\alpha^0 + u E_{-\alpha}^0 \quad (5.2)$$

e

$$A_{x,mKdV} = \frac{1}{2} H^1 + v (E_\alpha^0 + E_{-\alpha}^0). \quad (5.3)$$

As hierarquias construídas tanto pelo Lax (3.8) quanto pelo Lax (5.3) resultam nas mesmas equações de movimentos encontradas na seção 3.1.1.¹ Dito isso,

¹A transformação de gauge entre as formulações da hierarquia mKdV com gradação principal e homogênea é dada por $A_{x,mKdV}^{hom} = U_0 A_{x,mKdV}^{prin} U_0^{-1}$ com $U_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$ e $\zeta = \lambda^2$.

escrevendo a matriz de transformação U na forma geral

$$U = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

e substituindo (5.2) e (5.3) na transformação (5.1), encontramos o sistema de equações

$$\alpha_x - v\beta + \gamma = 0, \quad (5.5)$$

$$\beta_x - v\alpha + \lambda\beta + \delta = 0, \quad (5.6)$$

$$\gamma_x + u\alpha - \lambda\gamma - v\delta = 0, \quad (5.7)$$

$$\delta_x + u\beta - v\gamma = 0. \quad (5.8)$$

Assumindo que $\alpha \sim \lambda^0$, da equação (5.5) obtemos que $\beta \sim \lambda^0$ e $\gamma \sim \lambda^0$. Para que o sistema de equações acima seja consistente com esta escolha, temos que o elemento $\delta \sim \lambda^0 + \eta\lambda^1$. Portanto, a solução para o sistema de equações é dada por

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon v & v - \epsilon\lambda \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

e a relação entre os campos das teorias resulta na transformação de Miura

$$u = v^2 - \epsilon v_x \quad \text{com} \quad \epsilon^2 = 1. \quad (5.10)$$

5.2 Relação entre as hierarquias CLL e AKNS

As transformações de gauge entre as hierarquias CLL e AKNS são dadas por

$$A_{x,CLL} = U A_{x,AKNS} U^{-1} - (\partial_x U) U^{-1}. \quad (5.11)$$

Com o intuito de deixar ambas teorias no mesmo pé de igualdade, para a hierarquia AKNS vamos trocar o parâmetro espectral λ por λ^2 na construção da hierarquia, assim

$$A_{x,AKNS} = \frac{1}{2} H^2 + p E_\alpha^0 + q E_{-\alpha}^0, \quad (5.12)$$

e para a hierarquia CLL vamos escrever o Lax $A_{x,CLL}$ considerando a gradação homogênea da seguinte maneira

$$A_{x,CLL} = \frac{1}{2} (H^2 - rsH^0) + rE_\alpha^1 + sE_{-\alpha}^1. \quad (5.13)$$

Não existem problemas nestas escolhas, uma vez que, as hierarquias AKNS e CLL também podem ser construídas a partir dos Lax (5.12) e (5.13), chegando nas mesmas equações de movimentos encontradas no capítulo 3.² Dito isso, escrevendo a matriz de transformação U na forma geral

$$U = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

e substituindo (5.12) e (5.13) na transformação (5.11), encontramos o sistema de equações

$$\alpha_x - \frac{1}{2}rs\alpha - q\beta + \lambda r\gamma = 0, \quad (5.15)$$

$$\beta_x - \frac{1}{2}rs\beta - p\alpha + \lambda r\delta + \lambda^2\beta = 0, \quad (5.16)$$

$$\gamma_x + \frac{1}{2}rs\gamma - q\delta + \lambda s\alpha - \lambda^2\gamma = 0, \quad (5.17)$$

$$\delta_x + \frac{1}{2}rs\delta - p\gamma + \lambda s\beta = 0. \quad (5.18)$$

Assumindo que $\alpha \sim \lambda^0$, da equação (5.15) obtemos que $\beta \sim \lambda^0$ e $\gamma \sim \lambda^{-1}$. Para que o sistema de equações seja consistente com esta escolha, temos que $\beta = 0$ e $\delta \sim \lambda^{-1}$ ou $\gamma = 0$ e $\delta \sim \lambda$. Assim, chegamos em duas soluções para o sistema de equações. A primeira solução, com $\gamma = 0$ e $\delta \sim \lambda$, é dada por

$$U_1 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\partial_x^{-1}(rs) + \frac{1}{2}C_m(t_m)} & -re^{\frac{1}{2}\partial_x^{-1}(rs) - \frac{1}{2}C_m(t_m)} \\ 0 & \lambda e^{\frac{1}{2}\partial_x^{-1}(rs) - \frac{1}{2}C_m(t_m)} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

onde $C_m(t_m)$ é uma função de t_m a ser determinada, e as relações entre os campos das teorias são

$$p = -r_x e^{\partial_x^{-1}(rs) - C_m(t_m)}, \quad (5.20)$$

$$q = s e^{-\partial_x^{-1}(rs) + C_m(t_m)}. \quad (5.21)$$

²A transformação de gauge entre as formulações da hierarquia CLL com gradação principal e homogênea é dada por $A_{x,CLL}^{hom} = U_0 A_{x,CLL}^{prin} U_0^{-1}$ com $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ e $\zeta = \lambda^2$.

A segunda solução, com $\beta = 0$ e $\delta \sim \lambda^{-1}$, é dada por

$$U_2 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\partial_x^{-1}(rs) + \frac{1}{2}C_m(t_m)} & 0 \\ \lambda^{-1}s e^{-\frac{1}{2}\partial_x^{-1}(rs) + \frac{1}{2}C_m(t_m)} & \lambda^{-1}e^{\frac{1}{2}\int r s dx - \frac{1}{2}C_m(t_m)} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

e as relações entre os campos das teorias são

$$p = r e^{\partial_x^{-1}(rs) - C_m(t_m)}, \quad (5.23)$$

$$q = s_x e^{-\partial_x^{-1}(rs) + C_m(t_m)}. \quad (5.24)$$

Resumindo, as hierarquias AKNS e CLL estão relacionadas através de duas transformações de gauge, U_1 e U_2 . Para a transformação U_1 , os campos $p = p(x, t_m)$ e $q = q(x, t_m)$ podem ser escritos em função dos campos $r = r(x, t_m)$ e $s = s(x, t_m)$ da seguinte maneira

$$p = -r_x e^{\partial_x^{-1}(rs) - C_m(t_m)}, \quad (5.25)$$

$$q = s e^{-\partial_x^{-1}(rs) + C_m(t_m)}. \quad (5.26)$$

No limite em que $r = 1$ e $s = w(x, t_m)$, obtemos

$$p = 0, \quad (5.27)$$

$$q = -\partial_x \left(e^{-\int^x w(y, t_m) dy + C_m(t_m)} \right) \equiv -\partial_x (\Phi). \quad (5.28)$$

Observe que neste caso conseguimos relacionar o campo $w = w(x, t_m)$ da hierarquia de Burgers com o campo $\Phi = \Phi(x, t_m)$ que satisfaz a equação do calor

$$\Phi_{t_m} = \partial_x^m \Phi \quad (5.29)$$

através da transformação

$$\Phi = e^{-\int^x w(y, t_m) dy + C_m(t_m)} \quad \leftrightarrow \quad w = -\frac{\Phi_x}{\Phi}. \quad (5.30)$$

Esta transformação é denotada por transformação de Cole-Hopf e permite obter soluções da hierarquia de Burgers a partir de soluções da equação do calor. Em geral, é mais fácil resolver a equação do calor do que a equação de Burgers.

Para a transformação U_2 , os campos $p = p(x, t_m)$ e $q = q(x, t_m)$ da hierarquia AKNS em função dos campos $r = r(x, t_m)$ e $s = s(x, t_m)$ da hierarquia CLL são

dados por

$$p = r e^{\partial_x^{-1}(rs) - C_m(t_m)}, \quad (5.31)$$

$$q = s_x e^{-\partial_x^{-1}(rs) + C_m(t_m)}. \quad (5.32)$$

No limite em que $r = 1$ e $s = w(x, t_m)$, obtemos

$$p = e^{\int^x w(y, t_m) dy - C_m(t_m)} = \frac{1}{\Phi}, \quad (5.33)$$

$$q = w_x e^{-\int^x w(y, t_m) dy + C_m(t_m)} = -\Phi_{xx} + \frac{\Phi_x^2}{\Phi}. \quad (5.34)$$

O que também resulta na transformação (5.30), uma vez que, considerando os campos $p = \Phi^{-1}$ e $q = -\Phi_{xx} + \Phi^{-1}\Phi_x^2$, as equações de movimento da hierarquia AKNS também se reduzem a

$$\Phi_{t_m} = \partial_x^m \Phi. \quad (5.35)$$

5.3 Mapeamento de soluções

Transformações de gauge entre hierarquias integráveis distintas permitem mapear soluções novas a partir das soluções já conhecidas. Usando as relações encontradas neste capítulo e as soluções mais simples do capítulo anterior vamos mostrar como isso é possível.

Considerando as soluções de vácuo da hierarquia CLL com condições de contorno nula e não nula obtemos os mapas:

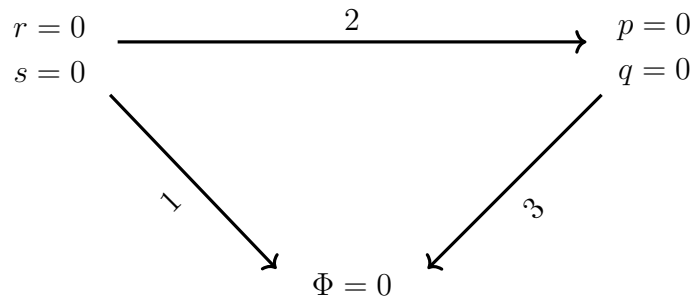


Figura 5.1: Mapa de soluções obtidas a partir da solução de vácuo nulo $r = 0$, $s = 0$ e $b = 0$. Considerando a transformação U_1 e as reduções correspondentes. 1 - Redução da hierarquia CLL que leva na equação do calor. 2 - Transformação U_1 que leva em (5.25) e (5.26). 3 - Redução da hierarquia AKNS que leva na equação do calor.

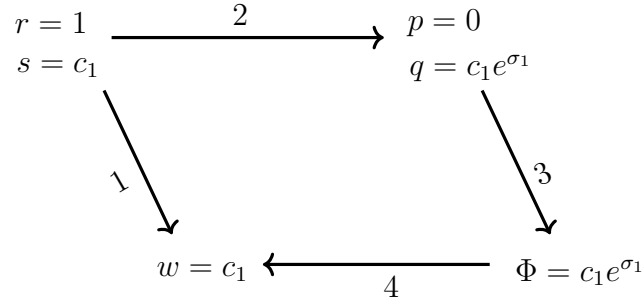


Figura 5.2: Mapa de soluções obtidas a partir da solução de vácuo não nulo $r = r_0$, $s = s_0$ e $b = 1$. Considerando a transformação U_1 , a transformação de Cole-Hopf e as reduções correspondentes, onde assumimos $r_0 = 1$ e $s_0 = c_1$, sendo que $\sigma_1 = -c_1 x + C_m(t_m)$ e c_1 é uma constante não nula. 1 - Redução da hierarquia CLL que leva na hierarquia de Burgers. 2 - Transformação U_1 que leva em (5.25) e (5.26). 3 - Redução da hierarquia AKNS que leva na equação do calor. 4 - Transformação de Cole-Hopf que leva em (5.30).

Considerando as soluções (4.57) e (4.58) da hierarquia CLL com condições de contorno constante não nula obtemos o mapa:

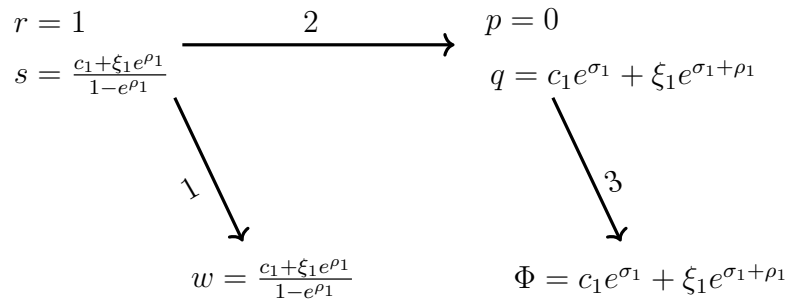


Figura 5.3: Mapa de soluções obtidas a partir da solução (4.57) e (4.58) com $b = 1$. Considerando a transformação U_1 e as reduções correspondentes, onde assumimos $r_0 = 1$ e $s_0 = c_1$, sendo que $\sigma_1 = -c_1 x + C_m(t_m)$, c_1 é uma constante não nula e $\rho_1 = (\xi_1 + c_1) x + (\omega_m(\xi_1)) t_m$. 1 - Redução da hierarquia CLL que leva na hierarquia de Burgers. 2 - Transformação U_1 que leva em (5.25) e (5.26). 3 - Redução da hierarquia AKNS que leva na equação do calor.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, propusemos uma decomposição de Riemann-Hilbert-Birkhoff generalizada capaz de gerar o ingrediente fundamental do método de construção de hierarquias integráveis por meio da condição de curvatura nula, o par de Lax. Apresentamos a construção de hierarquias a partir da condição de curvatura nula, e discutimos o método de dressing usado para encontrar soluções do tipo sólitons para essas hierarquias.

A decomposição g-RHB proposta expande o formalismo usual de hierarquias integráveis, permitindo a construção não apenas de hierarquias usuais com $a = 1$ e condições de contorno nula, como a hierarquia mKdV com condições de contorno nula e a hierarquia AKNS com condições de contorno nula, mas também de hierarquias integráveis com $a = 1$ e condições de contorno constante não nula, além de hierarquias integráveis de classificação mais alta ($a \geq 2$) com condições de contorno nula e constante não nula.

Para $a = 1$ com gradação principal, construímos a hierarquia mKdV com condições de contorno nula e constante não nula, obtendo os primeiros modelos integráveis da teoria, entre eles os modelos mKdV e sinh-Gordon.

Para $a = 1$ com gradação homogênea, construímos a hierarquia AKNS com condições de contorno nula e constante não nula, obtendo os primeiros modelos integráveis da teoria, entre eles o modelo AKNS o modelo relativístico Lund-Regge. Demostramos a equivalência entre a hierarquia AKNS com condições de contorno nula e a hierarquia WKI e, a partir de uma redução da hierarquia AKNS com condições contorno constante não nula encontramos a hierarquia KdV, incluindo a equação KdV.

Para $a = 2$ com gradação principal, construímos a hierarquia GI com condições de contorno nula e constante não nula, obtendo os primeiros modelos integráveis da teoria, entre eles o modelo GI. Demostramos a equivalência entre a hierarquia GI com as hierarquias CLL e KN. Em seguida, construímos as hierarquias CLL e KN com condições de contorno nula e constante não nula, obtendo os primeiros modelos integráveis de cada teoria, entre eles o modelo CLL, o modelo KN e o

modelo relativístico Mikhailov.

A única hierarquia apresentada com classificação $a = 2$, na qual todos os fluxos admitem vácuo constante não nulo, incluindo o fluxo t_{-1} , foi a hierarquia CLL. Isso permitiu derivar a hierarquia de Burgers por meio de uma redução da hierarquia CLL com condições de contorno constante não nula. Os fluxos positivos e negativos expostos da hierarquia de Burgers levaram ao formato fechado das equações da hierarquia, incluindo a equação de Burgers, a equação Sharma-Tasso-Olver e os fluxos temporais negativos que, até onde sabemos, não eram conhecidos.

Além disso, construímos um novo modelo integrável para $a = 3$ com gradação principal e condições de contorno nula, que em determinado limite retoma a equação de mKdV.

Aplicamos o método de dressing para encontrar as soluções do tipo sóliton da hierarquia CLL e da hierarquia de Burgers. Determinamos os operadores de vértice e seus autovalores tanto para a hierarquia CLL com condições de contorno nula quanto para a hierarquia CLL com condições de contorno constante não nula. Encontramos as soluções 1-sóliton, 2-sólitons e 3-sólitons da hierarquia de Burgers, sugerindo o formato da solução n -sólitons. Também calculamos explicitamente as soluções 2-sólitons da hierarquia CLL com condições de contorno nula e constante não nula.

Por fim, mostramos a partir da transformação de gauge entre as hierarquias KdV e mKdV, que é possível obter a transformação de Miura, a qual estabelece uma relação entre a equação de KdV e a equação de mKdV. De forma análoga, demonstramos que também existe uma transformação do tipo Miura entre as hierarquias CLL e AKNS que, em certo limite, se reduz à transformação de Cole-Hopf, que relaciona a equação de Burgers com a equação do calor. Até então a origem da transformação de Cole-Hopf não era conhecida.

A estrutura algébrica das hierarquias integráveis estudadas é dada pela álgebra de Kac-Moody $\hat{sl}_2$ com gradação principal ou homogênea, adotando o elemento semi-simples $E^{(a)}$, com a igual a 1 ou 2. Para $E^{(1)}$ com gradação principal obtivemos a hierarquia mKdV, com gradação homogênea obtivemos as hierarquias AKNS e WKI. Para $E^{(2)}$ com gradação principal obtivemos as hierarquias GI, CLL e KN. Em trabalhos futuros, propomos investigar outros casos, por exemplo, $E^{(2)}$ com gradação homogênea e $E^{(4)}$ com gradação principal. Também é possível trocar a álgebra $\hat{sl}_2$ por uma álgebra maior $\hat{sl}_{n+1}$, com $n \geq 2$.

Apêndice A

Álgebra de Kac-Moody $\hat{sl}_2$

Considere a álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}_2$ de dimensão infinita obtida através da álgebra de Lie $\mathcal{G} = sl_2$ de dimensão finita, que possui somente uma raiz α . Os geradores de $\hat{sl}_2$ são $\{H^k, E_\alpha^k, E_{-\alpha}^k, \hat{c}, \hat{d}\}$ e vamos escolher a normalização $\alpha^2 = 2$. Assim, as relações de comutação da álgebra $\hat{sl}_2$ na base de Chevalley são

$$\begin{aligned}
 [H^k, H^l] &= 2k\delta_{k+l,0}\hat{c}, \\
 [H^k, E_{\pm\alpha}^l] &= \pm 2E_{\pm\alpha}^{k+l}, \\
 [E_\alpha^k, E_{-\alpha}^l] &= H^{k+l} + k\delta_{k+l,0}\hat{c}, \\
 [E_{\pm\alpha}^k, E_{\pm\alpha}^l] &= 0, \\
 [\hat{c}, E_{\pm\alpha}^k] &= [\hat{c}, H^k] = [\hat{c}, \hat{d}] = 0, \\
 [\hat{d}, E_{\pm\alpha}^k] &= kE_{\pm\alpha}^k, \\
 [\hat{d}, H^k] &= kH^k.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Onde $k, l \in \mathbb{Z}$. Neste caso, existem duas gradações possíveis, a gradação principal e a homogênea, cujos operadores de gradação são

$$Q_p = \frac{1}{2}H^0 + 2\hat{d} \quad \text{e} \quad Q_h = \hat{d}. \tag{A.2}$$

É importante lembrar, o método de construção de hierarquia integráveis por meio da condição de curvatura nula não envolve a álgebra completa $\hat{\mathcal{G}}$, consideramos somente a loop-álgebra $L(\mathcal{G})$. No entanto, o método de dressing para obtenção das soluções das equações de movimento exige que se leve em consideração a álgebra completa, já que precisamos usar os estados de peso mais alto e estes só existem para a álgebra com o termo central $\hat{c}$.

A loop-álgebra de sl_2 é dada pelas relações de comutação em (A.1) com o termo central igual a zero. E os estados de peso mais alto da álgebra completa $\hat{sl}_2$ são

$|\mu_0\rangle$ e $|\mu_1\rangle$, tais que

$$H^k |\mu_0\rangle = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{A.3})$$

$$E_\alpha^k |\mu_0\rangle = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{A.4})$$

$$E_{-\alpha}^k |\mu_0\rangle = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{c} |\mu_0\rangle = |\mu_0\rangle, \quad (\text{A.6})$$

$$H^0 |\mu_1\rangle = |\mu_1\rangle, \quad (\text{A.7})$$

$$H^k |\mu_1\rangle = 0, \quad k > 0, \quad (\text{A.8})$$

$$E_\alpha^k |\mu_1\rangle = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{A.9})$$

$$E_{-\alpha}^k |\mu_1\rangle = 0, \quad k > 0 \quad (\text{A.10})$$

e

$$\hat{c} |\mu_1\rangle = |\mu_1\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Em resumo, os estados de peso mais alto $|\mu_0\rangle$ e $|\mu_1\rangle$ são aniquilados por todos os geradores de grau positivo ($k > 0$). O estado $|\mu_0\rangle$ é aniquilado por todos os geradores, exceto pelo termo central. As relações adjuntas são $(H^k)^\dagger = H^{-k}$, $(E_{\pm\alpha}^k)^\dagger = E_{\mp\alpha}^{-k}$ e $(\hat{c})^\dagger = \hat{c}$, assim, $\langle\mu_0|$ e $\langle\mu_1|$ são aniquilados por todos os geradores de grau negativo ($k < 0$).

A.1 Gradação principal

O operador gradação decompõe a álgebra em subespaços graduados. No caso da álgebra $\hat{sl}_2$, o operador gradação da gradação principal é igual a

$$Q_p = \frac{1}{2}H^0 + 2\hat{d}. \quad (\text{A.12})$$

Sendo que $\hat{d} = \zeta \frac{d}{d\zeta}$ onde ζ é um parâmetro espectral. Para o operador (A.12), os geradores da álgebra $H^k = \zeta^k H^0$, $E_\alpha^k = \zeta^k E_\alpha^0$, $E_{-\alpha}^k = \zeta^k E_{-\alpha}^0$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ se decompõem da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_1^{(0)} &= \{H^0, \hat{c}, \hat{d}\}, \\ \hat{\mathcal{G}}_1^{(2k')} &= \{H^{k'}\}, \\ \hat{\mathcal{G}}_1^{(2k+1)} &= \{E_\alpha^k, E_{-\alpha}^{k+1}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

com $k' \in \mathbb{Z}^*$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Uma representação matricial 2×2 da loop-álgebra de sl_2 é dada por

$$H^k = \begin{pmatrix} \zeta^k & 0 \\ 0 & -\zeta^k \end{pmatrix}, \quad E_\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Assumindo a loop-álgebra de sl_2 com gradação principal, podemos definir os operadores de interesse como

$$\begin{aligned} B &= e^{\varphi H^0}, & \tilde{B} &= e^{-c\tilde{\varphi} H^0}, \\ \theta^{(2M)} &= \varphi_{2M} H^M, & \theta^{(2M-1)} &= \chi_{2M-1} E_\alpha^{M-1} + \psi_{2M-1} E_{-\alpha}^M, \\ \theta^{(-2M)} &= \varphi_{-2M} H^{-M}, & \theta^{(-2M+1)} &= \chi_{-2M+1} E_\alpha^{-M} + \psi_{-2M+1} E_{-\alpha}^{-M+1}, \\ \varepsilon_M^{(2i)} &= \alpha_{2i,M} H^i, & \varepsilon_M^{(2i+1)} &= \beta_{2i+1,M} E_\alpha^i + \gamma_{2i+1,M} E_{-\alpha}^{i+1}, \\ \varepsilon_{-M}^{(-2i)} &= \alpha_{-2i,-M} H^{-i}, & \varepsilon_{-M}^{(-2i-1)} &= \beta_{-2i-1,-M} E_\alpha^{-i-1} + \gamma_{-2i-1,-M} E_{-\alpha}^{-i}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Os coeficientes $\tilde{\varphi}$, φ , $\varphi_{\pm 2M}$, $\chi_{\pm 2M \mp 1}$ e $\psi_{\pm 2M \mp 1}$ são funções que dependem de x e t_m . Já os coeficientes $\alpha_{\pm 2i \pm 1, \pm M}$, $\beta_{\pm 2i \pm 1, \pm M}$ e $\gamma_{\pm 2i, \pm M}$ são constantes, onde $M \in \mathbb{Z}_+$ e $i \in \mathbb{Z}_+$.

A.2 Gradação homogênea

No caso da álgebra $\hat{sl}_2$, o operador gradação da gradação homogênea é igual a

$$Q_h = \hat{d}. \quad (\text{A.16})$$

Sendo que $\hat{d} = \lambda \frac{d}{d\lambda}$ onde λ é um parâmetro espectral. Para o operador (A.16), os geradores da álgebra $H^k = \lambda^k H^0$, $E_\alpha^k = \lambda^k E_\alpha^0$, $E_{-\alpha}^k = \lambda^k E_{-\alpha}^0$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ se decompõem da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_1^{(0)} &= \{H^0, E_\alpha^0, E_{-\alpha}^0, \hat{c}, \hat{d}\}, \\ \hat{\mathcal{G}}_1^{(k')} &= \{H^{k'}, E_\alpha^{k'}, E_{-\alpha}^{k'}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

com $k' \in \mathbb{Z}^*$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Uma representação matricial 2×2 da loop-álgebra de sl_2 é dada por

$$H^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & -\lambda^k \end{pmatrix}, \quad E_\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Assumindo a loop-álgebra de sl_2 com gradação homogênea, podemos definir

os operadores

$$\begin{aligned}
 B &= e^{\chi E_{-\alpha}^0} e^{\varphi H^0} e^{\psi E_{\alpha}^0}, \\
 \theta^{(M)} &= \varphi_M H^M + \chi_M E_{\alpha}^M + \psi_M E_{-\alpha}^M, \\
 \theta^{(-M)} &= \varphi_{-M} H^{-M} + \chi_{-M} E_{\alpha}^{-M} + \psi_{-M} E_{-\alpha}^{-M}, \\
 \varepsilon_M^{(i)} &= \alpha_{i,M} H^i + \beta_{i,M} E_{\alpha}^i + \gamma_{i,M} E_{-\alpha}^i, \\
 \varepsilon_{-M}^{(-i)} &= \alpha_{-i,-M} H^{-i} + \beta_{-i,-M} E_{\alpha}^{-i} + \gamma_{-i,-M} E_{-\alpha}^{-i}.
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Os coeficientes $\chi, \varphi, \psi, \chi_{\pm M}, \varphi_{\pm M}$ e $\psi_{\pm M}$ são funções que dependem de x e t_m . E os coeficientes $\alpha_{\pm i, \pm M}, \beta_{\pm i, \pm M}$ e $\gamma_{\pm i, \pm M}$ são constantes, onde $M \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i \in \mathbb{Z}_+$.

Apêndice B

Relações Úteis

Considerando os operadores arbitrários L e T , é possível verificar que as relações abaixo são válidas:

$$\partial_{t_m} L^{-1} = -L^{-1} (\partial_{t_m} L) L^{-1}, \quad (\text{B.1})$$

$$e^L T e^{-L} = T + [L, T] + \frac{1}{2!} [L, [L, T]] + \frac{1}{3!} [L, [L, [L, T]]] + \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$(\partial_{t_m} e^L) e^{-L} = \partial_{t_m} L - \frac{1}{2!} [\partial_{t_m} L, L] + \frac{1}{3!} [[\partial_{t_m} L, L], L] + \dots. \quad (\text{B.3})$$

Ao longo do texto, as relações acima foram úteis para efetuar alguns cálculos, por exemplo, podemos usar a relação (B.2) para executar as projeções

$$(\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_x \Theta_{<})_{\geq} = \left(e^{-\theta^{(-1)}} e^{-\theta^{(-2)}} \dots \mathcal{E}_x \dots e^{\theta^{(-2)}} e^{\theta^{(-1)}} \right)_{\geq} \quad (\text{B.4})$$

e

$$(\Theta_{>} \mathcal{E}_x \Theta_{>}^{-1})_0 = \left(e^{\theta^{(1)}} e^{\theta^{(2)}} \dots \mathcal{E}_x \dots e^{-\theta^{(2)}} e^{-\theta^{(1)}} \right)_0, \quad (\text{B.5})$$

com

$$\mathcal{E}_x = E^{(a)} + b \left(\varepsilon_1^{(a-1)} + \dots + \varepsilon_1^{(0)} \right). \quad (\text{B.6})$$

Para determinados valores de a , obtemos os resultados abaixo. Para $a = 1$:

$$(\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_x \Theta_{<})_{\geq} = E^{(1)} + b \varepsilon_1^{(0)} - [\theta^{(-1)}, E^{(1)}], \quad (\text{B.7})$$

para $a = 2$:

$$\begin{aligned} (\Theta_{<}^{-1} \mathcal{E}_x \Theta_{<})_{\geq} &= E^{(2)} + b \varepsilon_1^{(1)} + b \varepsilon_1^{(0)} + \\ &- [\theta^{(-1)}, E^{(2)}] - b [\theta^{(-1)}, \varepsilon_1^{(1)}] - [\theta^{(-2)}, E^{(2)}] + \\ &+ \frac{1}{2} [\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, E^{(2)}]], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

para qualquer valor de a :

$$(\Theta_{>} \mathcal{E}_x \Theta_{>}^{-1})_0 = b\varepsilon_1^{(0)}. \quad (\text{B.9})$$

Apêndice C

Modelo $m = 2$ da Hierarquia GI

Para exemplificar com ainda mais detalhes como resolver a equação de curvatura nula dado um Lax espacial, veremos de maneira explícita o caso do modelo $m = 2$ da hierarquia GI onde

$$A_{x,GI} = \frac{1}{2}H^1 + rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1 - rsH^0. \quad (C.1)$$

Substituindo o Lax acima na equação de curvatura nula, obtemos para o fluxo temporal t_2

$$\left[\mathcal{D}_x + \frac{1}{2}H^1 + rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1 - rsH^0, \mathcal{D}_{t_2} + \sum_{i=0}^4 A_2^{(i)} \right] = 0. \quad (C.2)$$

Decompondo este resultado grau a grau, temos

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}H^1, A_2^{(4)} \right] &= 0, \\ \left[\frac{1}{2}H^1, A_2^{(3)} \right] + \left[rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1, A_2^{(4)} \right] &= 0, \\ \partial_x A_2^{(4)} + \left[\frac{1}{2}H^1, A_2^{(2)} \right] + \left[rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1, A_2^{(3)} \right] - \left[rsH^0, A_2^{(4)} \right] &= 0, \\ \partial_x A_2^{(3)} + \left[\frac{1}{2}H^1, A_2^{(1)} \right] + \left[rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1, A_2^{(2)} \right] - \left[rsH^0, A_2^{(3)} \right] &= 0, \\ \partial_x A_2^{(2)} + \left[\frac{1}{2}H^1, A_2^{(0)} \right] + \left[rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1, A_2^{(1)} \right] - \left[rsH^0, A_2^{(2)} \right] &= 0, \\ \partial_x A_2^{(1)} - \partial_{t_2} (rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1) + \left[rE_\alpha^0 + sE_{-\alpha}^1, A_2^{(0)} \right] - \left[rsH^0, A_2^{(1)} \right] &= 0, \\ \partial_x A_2^{(0)} + \partial_{t_2} (rsH^0) - \left[rsH^0, A_2^{(0)} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Sendo que $A_2^{(4)} = a_{4,2}H^2$, $A_2^{(3)} = b_{3,2}E_\alpha^1 + c_{3,2}E_{-\alpha}^2$, $A_2^{(2)} = a_{2,2}H^1$, $A_2^{(1)} = b_{1,2}E_\alpha^0 + c_{1,2}E_{-\alpha}^1$ e $A_2^{(0)} = a_{0,2}H^0$, em que os coeficientes $a_{4,2}$, $b_{3,2}$, $c_{3,2}$, $a_{2,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2}$ e $a_{0,2}$, a princípio, são funções de x e t_2 .

Analisando a equação de curvatura nula, grau a grau, começando pelo grau mais alto, da equação de grau 6, temos a igualdade

$$\left[\frac{1}{2} H^1, a_{4,2} H^2 \right] = 0. \quad (\text{C.4})$$

Da equação de grau 5, temos que

$$\left[\frac{1}{2} H^1, b_{3,2} E_\alpha^1 + c_{3,2} E_{-\alpha}^2 \right] + [r E_\alpha^0 + s E_{-\alpha}^1, a_{4,2} H^2] = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$(b_{3,2} - 2ra_{4,2}) E_\alpha^2 - (c_{3,2} - 2sa_{4,2}) E_{-\alpha}^3 = 0, \quad (\text{C.6})$$

o que resulta em

$$b_{3,2} = 2ra_{4,2}, \quad (\text{C.7})$$

$$c_{3,2} = 2sa_{4,2}. \quad (\text{C.8})$$

Da equação de grau 4, temos que

$$\partial_x (a_{4,2} H^2) + [r E_\alpha^0 + s E_{-\alpha}^1, b_{3,2} E_\alpha^1 + c_{3,2} E_{-\alpha}^2] = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$(\partial_x a_{4,2} + rc_{3,2} - sb_{3,2}) H^2 = 0, \quad (\text{C.10})$$

o que resulta em

$$\partial_x a_{4,2} = -rc_{3,2} + sb_{3,2}. \quad (\text{C.11})$$

Substituindo as relações (C.7) e (C.8) na equação (C.11), encontramos a solução

$$\begin{cases} a_{4,2} = \mathbb{C}_1, \\ b_{3,2} = 2r\mathbb{C}_1, \\ c_{3,2} = 2s\mathbb{C}_1, \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

onde $\mathbb{C}_1$ é uma constante de integração. Da equação de grau 3, encontramos as relações

$$b_{1,2} = -\partial_x b_{3,2} + 2r(a_{2,2} + sb_{3,2}), \quad (\text{C.13})$$

$$c_{1,2} = \partial_x c_{3,2} + 2s(a_{2,2} + rc_{3,2}). \quad (\text{C.14})$$

Da equação de grau 2, obtemos

$$\partial_x a_{2,2} = sb_{1,2} - rc_{1,2}. \quad (\text{C.15})$$

Substituindo as relações (C.13) e (C.14) na equação (C.15), e considerando as relações em (C.12), encontramos a solução

$$\begin{cases} a_{4,2} = \mathbb{C}_1, \\ b_{3,2} = 2r\mathbb{C}_1, \\ c_{3,2} = 2s\mathbb{C}_1, \\ a_{2,2} = \mathbb{C}_2 - 2\mathbb{C}_1rs \\ b_{1,2} = 2\mathbb{C}_2r - 2\mathbb{C}_1r_x, \\ c_{1,2} = 2\mathbb{C}_2s + 2\mathbb{C}_1s_x, \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

onde $\mathbb{C}_2$ é outra constante de integração. Da equação de grau 1, obtemos as equações de movimento do modelo

$$r_{t_2} = \partial_x b_{1,2} - 2r(a_{0,2} + sb_{1,2}), \quad (\text{C.17})$$

$$s_{t_2} = \partial_x c_{1,2} + 2s(a_{0,2} + rc_{1,2}). \quad (\text{C.18})$$

Da equação de grau 0, obtemos

$$\partial_x a_{0,2} = -rs_{t_2} - sr_{t_2}. \quad (\text{C.19})$$

Substituindo as relações (C.17) e (C.18) na equação (C.19), e considerando as relações em (C.16), encontramos a solução

$$\begin{cases} a_{4,2} = \mathbb{C}_1, \\ b_{3,2} = 2r\mathbb{C}_1, \\ c_{3,2} = 2s\mathbb{C}_1, \\ a_{2,2} = \mathbb{C}_2 - 2\mathbb{C}_1rs \\ b_{1,2} = 2\mathbb{C}_2r - 2\mathbb{C}_1r_x, \\ c_{1,2} = 2\mathbb{C}_2s + 2\mathbb{C}_1s_x, \\ a_{0,2} = \mathbb{C}_3 - 2s(r(\mathbb{C}_2 + \mathbb{C}_1rs) - \mathbb{C}_1r_x) - 2\mathbb{C}_1rs_x, \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

onde $\mathbb{C}_3$ é mais uma constante de integração.

Lembrando que o Lax $A_{t_2} = \sum_{i=0}^4 A_2^{(i)}$ no limite de vácuo nulo se reduz a $A_{t_2}^{vac} = \alpha_{4,2}H^2$, com $\alpha_{4,2}$ dado por uma constante, e no limite de vácuo constante

não nulo se reduz a

$$A_{t_2}^{vac} = 2 (\alpha_{4,2} (\zeta + 2r_0 s_0) + \alpha_{2,2}) \left(\frac{1}{2} H^1 + r_0 E_\alpha^0 + s_0 E_{-\alpha}^1 - r_0 s_0 H^0 \right) \quad (C.21)$$

onde $\alpha_{4,2} \neq 0$ e $\alpha_{2,2}$ são duas constantes arbitrárias. Olhando para as relações em (C.20) no vácuo, temos que

$$\begin{cases} a_{4,2} = \mathbb{C}_1, \\ b_{3,2} = 2br_0\mathbb{C}_1, \\ c_{3,2} = 2bs_0\mathbb{C}_1, \\ a_{2,2} = \mathbb{C}_2 - 2b\mathbb{C}_1r_0s_0 \\ b_{1,2} = 2b\mathbb{C}_2r_0, \\ c_{1,2} = 2b\mathbb{C}_2s_0, \\ a_{0,2} = \mathbb{C}_3 - 2bs_0r_0(\mathbb{C}_2 + \mathbb{C}_1r_0s_0), \end{cases} \quad (C.22)$$

ou seja

$$\mathbb{C}_1 = \alpha_{4,2}, \quad \mathbb{C}_2 = b(2r_0s_0\alpha_{4,2} + \alpha_{2,2}), \quad \mathbb{C}_3 = 2br_0^2s_0^2\alpha_{4,2}. \quad (C.23)$$

E por último, voltando nas equações de movimento do modelo, tínhamos encontrado que

$$r_{t_2} = -2\mathbb{C}_1r_{xx} + 2\mathbb{C}_2r_x + 2r(-\mathbb{C}_3 + 2\mathbb{C}_1r(s_x + rs^2)), \quad (C.24)$$

$$s_{t_2} = 2\mathbb{C}_1s_{xx} + 2\mathbb{C}_2s_x + 2s(\mathbb{C}_3 + 2\mathbb{C}_1s(r_x - r^2s)). \quad (C.25)$$

As equações de movimento acima admitem as soluções de vácuo $r = br_0$ e $s = bs_0$ para os valores (C.23). Considerando $\mathbb{C}_1 = \frac{1}{2}$, $\mathbb{C}_2 = 0$ e $\mathbb{C}_3 = br_0^2s_0^2$, onde, por simplicidade, adotamos $\alpha_{4,2} = \frac{1}{2}$ e $\alpha_{2,2} = -r_0s_0$, chegamos nas equações

$$r_{t_2} = -r_{xx} + 2r(r^2s^2 - br_0^2s_0^2 + rs_x), \quad (C.26)$$

$$s_{t_2} = s_{xx} - 2s(r^2s^2 - br_0^2s_0^2 - sr_x). \quad (C.27)$$

Apêndice D

Elementos de Matriz

Alguns dos elementos de matriz necessários para obter as soluções solitônicas da hierarquia CLL com condições de contorno nula e constante não nula apresentadas no capítulo 4 estão calculados aqui.

Vimos que os operadores de vértices para a hierarquia CLL, para os casos de vácuo nulo ($b = 0$) e constante não nulo ($b = 1$), são

$$V_f^+ = -br_0\hat{c} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (br_0\xi_f^{-k}H^k + br_0^2\xi_f^{-k}E_{\alpha}^{k-1} - \xi_f^{-k+1}E_{-\alpha}^k) \quad (D.1)$$

e

$$V_f^- = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (bs_0\xi_f^{-k}H^k - \xi_f^{-k+1}E_{\alpha}^{k-1} + bs_0^2\xi_f^{-k}E_{-\alpha}^k), \quad (D.2)$$

com $\xi_f \neq 0$, $f \in \mathbb{Z}_+^*$ e $k \in \mathbb{Z}$. Inicialmente, vamos verificar as relações de comutação

$$[V_f^+, A_{x,CLL}^{vac}] = (\xi_f + br_0s_0) V_f^+ \quad (D.3)$$

e

$$[V_f^-, A_{x,CLL}^{vac}] = -(\xi_f + br_0s_0) V_f^-. \quad (D.4)$$

Para isso, começamos calculando o comutador

$$\begin{aligned} [V_f^+, A_{x,CLL}^{vac}] &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0\xi_f^{-k} \left[H^k, \frac{1}{2} (H^1 - br_0s_0H^0) + br_0E_{\alpha}^0 + bs_0E_{-\alpha}^1 \right] + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0^2\xi_f^{-k} \left[E_{\alpha}^{k-1}, \frac{1}{2} (H^1 - br_0s_0H^0) + br_0E_{\alpha}^0 + bs_0E_{-\alpha}^1 \right] + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \left[E_{-\alpha}^k, \frac{1}{2} (H^1 - br_0s_0H^0) + br_0E_{\alpha}^0 + bs_0E_{-\alpha}^1 \right], \end{aligned} \quad (D.5)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 [V_f^+, A_{x,CLL}^{vac}] &= \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0 \xi_f^{-k} (k (\delta_{k+1,0} - br_0 s_0 \delta_{k,0}) \hat{c} + 2br_0 E_{\alpha}^k - 2bs_0 E_{-\alpha}^{k+1}) + \\
 &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} (-E_{\alpha}^k + br_0 s_0 E_{\alpha}^{k-1} + bs_0 (H^k + (k-1)\delta_{k,0}\hat{c})) + \\
 &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} (E_{-\alpha}^{k+1} - br_0 s_0 E_{-\alpha}^k - br_0 H^k), \tag{D.6}
 \end{aligned}$$

o que leva no resultado esperado

$$\begin{aligned}
 [V_f^+, A_{x,CLL}^{vac}] &= \\
 &= (\xi_f + br_0 s_0) \left(-br_0 \hat{c} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (br_0 \xi_f^{-k} H^k + br_0^2 \xi_f^{-k} E_{\alpha}^{k-1} - \xi_f^{-k+1} E_{-\alpha}^k) \right). \tag{D.7}
 \end{aligned}$$

Para V_f^- é preciso calcular o comutador

$$\begin{aligned}
 [V_f^-, A_{x,CLL}^{vac}] &= \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} bs_0 \xi_f^{-k} \left[H^k, \frac{1}{2} (H^1 - br_0 s_0 H^0) + br_0 E_{\alpha}^0 + bs_0 E_{-\alpha}^1 \right] + \\
 &- \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \left[E_{\alpha}^{k-1}, \frac{1}{2} (H^1 - br_0 s_0 H^0) + br_0 E_{\alpha}^0 + bs_0 E_{-\alpha}^1 \right] + \\
 &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} bs_0^2 \xi_f^{-k} \left[E_{-\alpha}^k, \frac{1}{2} (H^1 - br_0 s_0 H^0) + br_0 E_{\alpha}^0 + bs_0 E_{-\alpha}^1 \right], \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
 [V_f^-, A_{x,CLL}^{vac}] &= \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} bs_0 \xi_f^{-k} (k (\delta_{k+1,0} - br_0 s_0 \delta_{k,0}) \hat{c} + 2br_0 E_{\alpha}^k - 2bs_0 E_{-\alpha}^{k+1}) + \\
 &- \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} (-E_{\alpha}^k + br_0 s_0 E_{\alpha}^{k-1} + bs_0 (H^k + (k-1)\delta_{k,0}\hat{c})) + \\
 &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} bs_0^2 \xi_f^{-k} (E_{-\alpha}^{k+1} - br_0 s_0 E_{-\alpha}^k - br_0 H^k), \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

chegando no resultado esperado

$$\begin{aligned} [V_f^-, A_{x, CLL}^{vac}] &= \\ &= -(\xi_f + br_0 s_0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (bs_0 \xi_f^{-k} H^k - \xi_f^{-k+1} E_{\alpha}^{k-1} + bs_0^2 \xi_f^{-k} E_{-\alpha}^k). \end{aligned} \quad (D.10)$$

Após verificar que o vértice (D.1) satisfaz a relação de comutação (D.7) e o vértice (D.2) satisfaz a relação de comutação (D.10), podemos usa-lós para determinar os elementos de matriz de interesse. Vamos começar por

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i | V_f^+ | \lambda_j \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0 \xi_f^{-k} \langle \lambda_i | H^k | \lambda_j \rangle - br_0 \langle \lambda_i | \hat{c} | \lambda_j \rangle + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \langle \lambda_i | E_{\alpha}^{k-1} | \lambda_j \rangle - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \langle \lambda_i | E_{-\alpha}^k | \lambda_j \rangle \end{aligned} \quad (D.11)$$

com $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Para os estados $|\lambda_0\rangle = |\mu_0\rangle$, $|\lambda_1\rangle = |\mu_1\rangle$, $|\lambda_2\rangle = E_{\alpha}^{-1} |\mu_0\rangle$ e $|\lambda_3\rangle = E_{-\alpha}^0 |\mu_1\rangle$, encontramos os elementos de matriz:

$$\langle \lambda_0 | V_f^+ | \lambda_0 \rangle = -br_0, \quad (D.12)$$

$$\langle \lambda_1 | V_f^+ | \lambda_1 \rangle = br_0 - br_0 = 0, \quad (D.13)$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_2 | V_f^+ | \lambda_0 \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \langle \mu_0 | [E_{-\alpha}^1, E_{\alpha}^{k-1}] | \mu_0 \rangle \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \langle \mu_0 | (H^k + (k-1)\delta_{k,0}\hat{c}) | \mu_0 \rangle \\ &= br_0^2, \end{aligned} \quad (D.14)$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 | V_f^+ | \lambda_1 \rangle &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \langle \mu_1 | [E_{\alpha}^0, E_{-\alpha}^k] | \mu_1 \rangle \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \langle \mu_1 | H^k | \mu_1 \rangle \\ &= -\xi_f. \end{aligned} \quad (D.15)$$

No caso do vértice V_f^- determinamos os elementos de matriz $\langle \lambda_i | V_f^- | \lambda_j \rangle$ a partir

de

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i | V_f^- | \lambda_j \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b s_0 \xi_f^{-k} \langle \lambda_i | H^k | \lambda_j \rangle - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \langle \lambda_i | E_{\alpha}^{k-1} | \lambda_j \rangle + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} b s_0^2 \xi_f^{-k} \langle \lambda_i | E_{-\alpha}^k | \lambda_j \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Para os estados $|\lambda_0\rangle = |\mu_0\rangle$, $|\lambda_1\rangle = |\mu_1\rangle$, $|\lambda_2\rangle = E_{\alpha}^{-1} |\mu_0\rangle$ e $|\lambda_3\rangle = E_{-\alpha}^0 |\mu_1\rangle$, encontramos os elementos de matriz:

$$\langle \lambda_0 | V_f^- | \lambda_0 \rangle = 0, \quad (\text{D.17})$$

$$\langle \lambda_1 | V_f^- | \lambda_1 \rangle = b s_0, \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_2 | V_f^- | \lambda_0 \rangle &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \langle \mu_0 | [E_{-\alpha}^1, E_{\alpha}^{k-1}] | \mu_0 \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \langle \mu_0 | (H^k + (k-1)\delta_{k,0}\hat{c}) | \mu_0 \rangle \\ &= -\xi_f, \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 | V_f^- | \lambda_1 \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b s_0^2 \xi_f^{-k} \langle \mu_1 | [E_{\alpha}^0, E_{-\alpha}^k] | \mu_1 \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b s_0^2 \xi_f^{-k} \langle \mu_1 | H^k | \mu_1 \rangle \\ &= b s_0^2. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Os elementos de matriz do produto $V_f^+ V_d^+$ são determinados a partir da ex-

pressão abaixo

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_i | V_f^+ V_d^+ | \lambda_j \rangle = & \\
 = & \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l} \langle \lambda_i | H^k H^l | \lambda_j \rangle - \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \langle \lambda_i | H^k | \lambda_j \rangle + \\
 & + \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0^3 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l} \langle \lambda_i | H^k E_{\alpha}^{l-1} | \lambda_j \rangle + \\
 & - \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l+1} \langle \lambda_i | H^k E_{-\alpha}^l | \lambda_j \rangle + \\
 & - br_0 \langle \lambda_i | V_d^+ | \lambda_j \rangle + \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0^3 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l} \langle \lambda_i | E_{\alpha}^{k-1} H^l | \lambda_j \rangle + \\
 & - \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0^3 \xi_f^{-k} \langle \lambda_i | E_{\alpha}^{k-1} | \lambda_j \rangle + \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0^4 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l} \langle \lambda_i | E_{\alpha}^{k-1} E_{\alpha}^{l-1} | \lambda_j \rangle + \\
 & - \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l+1} \langle \lambda_i | E_{\alpha}^{k-1} E_{-\alpha}^l | \lambda_j \rangle + \\
 & - \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0 \xi_f^{-k+1} \xi_d^{-l} \langle \lambda_i | E_{-\alpha}^k H^l | \lambda_j \rangle + \\
 & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} br_0 \xi_f^{-k+1} \langle \lambda_i | E_{-\alpha}^k | \lambda_j \rangle + \\
 & - \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k+1} \xi_d^{-l} \langle \lambda_i | E_{-\alpha}^k E_{\alpha}^{l-1} | \lambda_j \rangle + \\
 & + \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \xi_f^{-k+1} \xi_d^{-l+1} \langle \lambda_i | E_{-\alpha}^k E_{-\alpha}^l | \lambda_j \rangle
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

com $f, d \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Para $\langle \lambda_0 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_0 \rangle$ os termos não aniquilados imediatamente pelo estado $|\lambda_0\rangle = |\mu_0\rangle$ são

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_0 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_0 \rangle = & br_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l} \langle \mu_0 | [H^k, H^l] | \mu_0 \rangle + \\
 & - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l+1} \langle \mu_0 | [E_{\alpha}^{k-1}, E_{-\alpha}^l] | \mu_0 \rangle + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^0 br_0^2 \xi_f^{-k+1} \xi_d^{-l} \langle \mu_0 | [E_{\alpha}^{l-1}, E_{-\alpha}^k] | \mu_0 \rangle,
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_0 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_0 \rangle &= br_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^l k \delta_{k-l,0} + \\
 &\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{l+1} (k-1) \delta_{k-l-1,0} + \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} br_0^2 \xi_f^{-k+1} \xi_d^l (l+1) \delta_{k-l-1,0},
 \end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_0 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_0 \rangle &= br_0^2 + 2br_0^2 \frac{\xi_d}{\xi_f} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^{k-1} + \\
 &\quad - br_0^2 \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} l \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^{l-1} - br_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^{k-1}.
 \end{aligned} \tag{D.24}$$

Considerando a série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x)^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \tag{D.25}$$

e assumindo $\xi_d/\xi_f < 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^{k-1} = \left(1 - \frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^{-2}. \tag{D.26}$$

Usando a relação acima em (D.24) obtemos que

$$\langle \lambda_0 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_0 \rangle = br_0^2 + \left(2br_0^2 \frac{\xi_d}{\xi_f} - br_0^2 \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^2 - br_0^2 \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^2} \tag{D.27}$$

é zero

$$\langle \lambda_0 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_0 \rangle = br_0^2 - br_0^2 \frac{\left(1 - \frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^2}{\left(1 - \frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^2} = 0. \tag{D.28}$$

Voltando na expressão (D.21), para $\langle \lambda_1 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_1 \rangle$ os termos não aniquilados

imediatamente pelo estado $|\lambda_1\rangle = |\mu_1\rangle$ são

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_1 \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^0 br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l} \langle \mu_1 | (H^l H^k + [H^k, H^l]) | \mu_1 \rangle + \\ &- br_0^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^0 br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l+1} \langle \mu_1 | [E_{\alpha}^{k-1}, E_{-\alpha}^l] | \mu_1 \rangle + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^0 br_0^2 \xi_f^{-k+1} \xi_d^{-l} \langle \mu_1 | [E_{\alpha}^{l-1}, E_{-\alpha}^k] | \mu_1 \rangle, \end{aligned} \quad (D.29)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_1 \rangle &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^0 br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l} k \delta_{k+l,0} + \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^0 br_0^2 \xi_f^{-k} \xi_d^{-l+1} k \delta_{k+l-1,0} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^0 br_0^2 \xi_f^{-k+1} \xi_d^{-l} l \delta_{k+l-1,0}, \end{aligned} \quad (D.30)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 | V_f^+ V_d^+ | \lambda_1 \rangle &= \\ &= 2br_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^k - br_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^k - br_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} l \left(\frac{\xi_d}{\xi_f} \right)^l \\ &= 0. \end{aligned} \quad (D.31)$$

É possível verificar, de maneira geral, que os elementos $\langle \lambda_i | V_f^+ V_d^+ | \lambda_j \rangle$ são nulos para todos os estados em questão. Além disso, assim como $\langle \lambda_i | V_f^+ V_d^+ | \lambda_j \rangle = 0$ também é possível verificar que:

$$\langle \lambda_i | V_f^+ V_d^+ V_e^+ | \lambda_j \rangle = 0, \quad (D.32)$$

onde $f, d, e \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Os mesmos resultados são válido para o vértice V_f^- , ou seja:

$$\langle \lambda_i | V_f^- V_d^- | \lambda_j \rangle = 0, \quad (D.33)$$

$$\langle \lambda_i | V_f^- V_d^- V_e^- | \lambda_j \rangle = 0. \quad (D.34)$$

Já para o produto de V_f^+ com V_d^- , os elementos de matriz são:

$$\langle \lambda_0 | V_f^+ V_d^- | \lambda_0 \rangle = \frac{\xi_d (\xi_f + br_0 s_0)^2}{(\xi_f - \xi_d)^2}, \quad (\text{D.35})$$

$$\langle \lambda_1 | V_f^+ V_d^- | \lambda_1 \rangle = \frac{\xi_f (\xi_d + br_0 s_0)^2}{(\xi_f - \xi_d)^2}, \quad (\text{D.36})$$

$$\langle \lambda_2 | V_f^+ V_d^- | \lambda_0 \rangle = -\frac{br_0 \xi_d (\xi_f + \xi_d + 2br_0 s_0)}{\xi_f - \xi_d}, \quad (\text{D.37})$$

$$\langle \lambda_3 | V_f^+ V_d^- | \lambda_1 \rangle = -\frac{bs_0 \xi_f (\xi_f + \xi_d + 2br_0 s_0)}{\xi_f - \xi_d}. \quad (\text{D.38})$$

E para o produto de V_f^- com V_d^+ são:

$$\langle \lambda_0 | V_f^- V_d^+ | \lambda_0 \rangle = \frac{\xi_f (\xi_d + br_0 s_0)^2}{(\xi_f - \xi_d)^2}, \quad (\text{D.39})$$

$$\langle \lambda_1 | V_f^- V_d^+ | \lambda_1 \rangle = \frac{\xi_d (\xi_f + br_0 s_0)^2}{(\xi_f - \xi_d)^2}, \quad (\text{D.40})$$

$$\langle \lambda_2 | V_f^- V_d^+ | \lambda_0 \rangle = \frac{br_0 \xi_f (\xi_f + \xi_d + 2br_0 s_0)}{\xi_f - \xi_d}, \quad (\text{D.41})$$

$$\langle \lambda_3 | V_f^- V_d^+ | \lambda_1 \rangle = \frac{bs_0 \xi_d (\xi_f + \xi_d + 2br_0 s_0)}{\xi_f - \xi_d}. \quad (\text{D.42})$$

Referências

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1978.
- [2] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [3] V. G. Kac. *Infinite-Dimensional Lie Algebras*. Cambridge University Press, 3rd edition, 1994.
- [4] H. Aratyn, J.F. Gomes, A.H. Zimerman, E. Nissimov, and S. Pacheva. Symmetry Flows, Conservation Laws and Dressing Approach to the Integrable Models. In *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories*, pages 243–275. Springer, 2001. ([arXiv:nlin/0012042v1](#)).
- [5] H. Aratyn, J.F. Gomes, and A.H. Zimerman. Integrable Hierarchy for Multidimensional Toda Equations and Topological-Anti-Topological Fusion. *Journal of Geometry and Physics*, 46(1):21–47, 2003. ([arXiv:hep-th/0107056v3](#)).
- [6] H. Aratyn, J.F. Gomes, and A.H. Zimerman. Supersymmetry and the KdV Equations for Integrable Hierarchies with a Half-Integer Gradation. *Nuclear Physics B*, 676(3):537–571, 2004. ([arXiv:hep-th/0309099v1](#)).
- [7] H. Aratyn, J.F. Gomes, and A. H. Zimerman. Algebraic Construction of Integrable and Super Integrable Hierarchies. In *Proceedings of the XI International Conference on Symmetry Methods in Physics*, 2004. ([arXiv:hep-th/0408231v1](#)).
- [8] J.F. Gomes, G. S. França, G.R. De Melo, and A. H. Zimerman. Negative Even Grade mKdV Hierarchy and its Soliton Solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(44):445204, 2009. ([arXiv:hep-th/0906.5579v1](#)).
- [9] G. S. França, J. F. Gomes, and A. H. Zimerman. The Algebraic Structure Behind the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(30):305201, 2013. ([arXiv:hep-th/1306.4027v2](#)).
- [10] O. Babelon and D. Bernard. Dressing Symmetries. *Communications in Mathematical Physics*, 149:279–306, 1992. ([arXiv:hep-th/9111036v1](#)).

- [11] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, and J. S. Guillén. Tau-Functions and Dressing Transformations for Zero-Curvature Affine Integrable Equations. *Journal of Mathematical Physics*, 38(2):882–901, 1997. ([arXiv:hep-th/9606066v1](#)).
- [12] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J. F. Gomes, and A. H. Zimerman. Solitons from Dressing in an Algebraic Approach to the Constrained KP Hierachy. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(47):9483, 1998. ([arXiv:solv-int/9709004v1](#)).
- [13] H. Aratyn, C. P. Constantinidis, J. F. Gomes, T. C. Santiago, and A. H. Zimerman. Generalized Riemann-Hilbert-Birkhoff Decomposition and a New Class of Higher Grading Integrable Hierarchies. *Nuclear Physics B*, 1018:117080, 2025. ([arXiv:2507.10744v1](#)).
- [14] H. Aratyn, C. P. Constantinidis, J. F. Gomes, T. C. Santiago, and A. H. Zimerman. Soliton Solutions of Hierarchies Chen-Lee-Liu and Burgers. Em preparação.
- [15] G. S. Franca, J. F. Gomes, and A. H. Zimerman. The Higher Grading Structure of the WKI Hierarchy and the Two-Component Short Pulse Equation. *Journal of High Energy Physics*, 120(8):1–25, 2012. ([arXiv:1206.2855v3](#)).
- [16] J. F. Gomes, A. L. Retore, and A. H. Zimerman. Miura and Generalized Bäcklund Transformation for KdV Hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(50):504003, 2016. ([arXiv:1610.02303v1](#)).
- [17] G. S. França. Estrutura Algébrica dos Modelos Integráveis. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2007.
- [18] F. Lund and T. Regge. Unified Approach to Strings and Vortices with Soliton Solutions. *Physical Review D*, 14(6):1524, 1976.
- [19] C. Rogers and P. Wong. On Reciprocal Bäcklund Transformations of Inverse Scattering Schemes. *Physica Scripta*, 30(1):10, 1984.
- [20] Y. Ishimori. A Relationship between the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur and Wadati-Konno-Ichikawa Schemes of the Inverse Scattering Method. *Journal of the Physical Society of Japan*, 51(9):3036–3041, 1982.
- [21] V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, and P. P. Kulish. Quadratic Bundle and Nonlinear Equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 44(3):784–795, 1980.

-
- [22] L. A. Ferreira, J. L. Gervais, J. S. Guillén, and M. V. Saveliev. Affine Toda Systems Coupled to Matter Fields. *Nuclear Physics B*, 470(1-2):236–288, 1996. ([arXiv:hep-th/9512105v1](#)).
- [23] D. Chen. k -Constraint for the modified Kadomtsev-Petviashvili System. *Journal of Mathematical Physics*, 43(4):1956–1965, 2002.
- [24] D. J. Kaup and A. C. Newell. An Exact Solution for a Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 19(4):798–801, 1978.
- [25] N. A. Kudryashov. Self-Similar Solutions of the Burgers Hierarchy. *Applied Mathematics and Computation*, 215(5):1990–1993, 2009. ([arXiv:1112.5708v1](#)).
- [26] D. Zhang. The Discrete Burgers Equation. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 5:100362, 2022.
- [27] H. Aratyn, E. Nissimov, and S. Pacheva. On Integrable Models and their Interrelations. ([arXiv:solv-int/9510009v2](#)), 1995.