IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.008/13

Transitividade e Movimento em Relatividade de de Sitter

Almeira del C. Sampson

Orientador

Prof. Dr. José Geraldo Pereira

Novembro de 2013

.

A mi madre Almeira y

a mis hermanas Rossana y Alejandra,

ayer, hoy y siempre mis pilares.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus mais sinceros agradecimentos a José Geraldo Pereira por sua orientação inestimável e ensino além da física.

Ademais, quero agradecer em espacial a Alberto Sanoja pelo seu apoio, ajuda e valiosos conselhos ao longo da realização deste trabalho.

Agradeço também a CAPES e CNPq pelo financiamento nestes anos de estudo.

Resumo

Existe atualmente um consenso de que a relatividade especial, cuja cinemática é governada pelo grupo de Poincaré, deixa de ser válida próxima à escala de Planck. Como consequência, novas cinemáticas têm sido propostas. Uma alternativa a essas teorias é a relatividade especial de de Sitter, a qual pressupõe uma violação, não da simetria de Lorentz, mas da simetria de translação. Essa teoria inclui a constante cosmológica como um efeito cinemático e não como um elemento exótico que permeia o Universo. Considerando as propriedades de transitividade do espaçotempo de Sitter, são obtidas uma nova corrente conservada e uma nova família de trajetórias. Essas trajetórias introduzem uma nova noção de movimento, dado por uma combinação de translações e transformações conformes próprias.

Palavras Chaves: espaçotempo de de Sitter; Geodésicas; Cinemática do espaçotempo; Relatividade Especial.

Áreas do conhecimento: Gravitação e Cosmologia.

Abstract

There are currently an agreement that special relativity, whose kinematic is ruled by the Poincaré group, fails near the Planck scale. As a consequence, new kinematics have been proposed. An alternative to those theories is the de Sitter special relativity, which assumes a violation, not of the Lorentz symmetry, but of the translation symmetry. In this theory the cosmological constant appears as a kinematic effect and not as an exotic element filling the Universe. Taking into account the appropriate transitivity properties, a new conserved current and a new family of maximizing trajectories are obtained. These trajectories introduce a new notion of motion, given by a combination of translations and proper conformal transformations.

Contents

Introdução

As evidências cosmológicas fornecidas pela observação de supernovas Ia, o efeito de lentes gravitacionais, o mapeamento da radiação cósmica de fundo e o mapeamento das estruturas cósmicas a grande escala sugerem que o Universo está se expandindo aceleradamente [1, 2]. Entre os modelos contendores que tentam explicar a causa física deste fenômeno, encontramos a Energia Escura, que é usualmente interpretada como um fluido exótico com pressão negativa que permeia o Universo todo e gera repulsão gravitacional. Esse fluido pode ser uma energia de vácuo, representada pela Constante Cosmológica ou um campo escalar conhecido como campo de quintessência. A proposta mais natural é a Constante Cosmológica. Porém, essa proposta apresenta um problema: Por quê o valor observacional da Constante Cosmológica é tão pequeno comparado com o valor predito pelo Modelo Padrão da física de partículas? Essa discrepância é conhecida como o problema da Constante Cosmológica. Em vista disso, têm-se proposto outros modelos para explicar a expansão acelerada do Universo além da energia escura, entre elas se encontram as teorias de gravidade modificada e a hipótese de um Universo não homogêneo [3, 4]. A Relatividade de de Sitter propõe mudar o grupo de Poincaré como grupo de covariância da relatividade especial, pelo grupo de de Sitter, dando origem assim a uma nova teoria da Relatividade, conhecida como relatividade especial de de Sitter [5, 6, 7, 8]. Ao se incluir na Relatividade Especial de de Sitter a constante cosmológica como consequência da cinemática da teoria, dá-se uma explicação natural à expansão acelerada do Universo como uma consequência da geometria.

Junto às evidências observacionais de que o Universo está em expansão acelerada, encontra-se uma inconsistência teórica. Ao tentarmos reconciliar a teoria de campos relativísticos com a gravidade, surgem problemas conceituais que sugerem limites a essa teoria. Essas limitações devem-se à existência de uma escala de comprimento invariante —conhecido como o comprimento de Planck l_P— além da qual uma nova física e novas noções devem surgir [9, 10, 11]. Diante desse cenário, torna-se popular assumir que a simetria de Lorentz deve ser violada a pequenas escalas [12, 13], uma vez que no contexto da relatividade especial de Einstein não pode existir um comprimento invariante. Dentro dessa linha, várias teorias, como por exemplo as chamadas *deformed special relativity*, propõem que a cinemática seja governada por um grupo mais geral que o de Poincaré [14, 13, 15, 16]. Em particular, as *deformed special relativity* assumem os grupos de Poincaré k-deformados, nos quais a simetria de Lorentz é violada próxima a escala de Planck. No contexto da Relatividade de de Sitter o comprimento de de Sitter l surge naturalmente como um invariante de Lorentz [17, 18, 19].

Quando consideramos o termo de Constante Cosmológica não nulo nas equações de Einstein no vazio, e o interpretamos como um termo inteiramente geométrico, obtemos como solução o espaçotempo maximalmente simétrico de de Sitter ou anti-de Sitter. Esse espaçotempo além de ser soluções às equações de Einstein, podem ser construído fora do contexto da Relatividade General analogamente ao espaçotempo de Minkowski. Isto acontece por ser um espaço homogêneo, definido como o quociente entre o grupo de de Sitter e o grupo de Lorentz [20].

Na Relatividade Especial de de Sitter, por se conservar a invariância de Lorentz, mantem-se a isotropia e a equivalência de sistemas de referência inerciais, porém se violam as traslações. Consequentemente, o quadrimomento ordinário não é mais uma quantidade conservada. A nova quantidade conservada é uma combinação linear do momento ordinário com o “momento conforme". Desta maneira, os conceitos ordinários de energia e momento são modificados, introduzindo novas noções de energia e momento conformes.

O grupo de de Sitter apresenta dois limites dependendo do valor do parâmetro de comprimento l . Quando este parâmetro é infinitamente grande, ou equivalentemente, quando a constante cosmológica toma valores pequenos $(\Lambda \to 0)$, o grupo de de Sitter se contrai para o grupo de Poincaré, e assim o espaçotempo de de Sitter se reduz ao espaçotempo de Minkowski. Quando tomarmos o parâmetro de comprimento pequeno $(\Lambda \to \infty)$, o grupo de de Sitter se contrai para o grupo de Poincaré conforme, e consequentemente o espaçotempo de de Sitter se reduz ao espaçotempo cônico [21].

Da mesma forma que o grupo de Poincaré generaliza o grupo de Galileo para altas velocidades, o grupo de de Sitter generaliza o grupo de Poincaré para uma cinemática de altas energias. Como consequência temos que a Constante Cosmológica não é mais um parâmetro livre da teoria, mas uma consequência cinemática da mesma [17].

O grupo de covariância de todas as teorias fundamentais da física é o grupo de Poincaré, o qual determina que a cinemática subjacente é a teoria da relatividade especial. Na relatividade de de Sitter as transformações de Lorentz continuam relacionando os referenciais equivalentes. Não entanto, como o espaçotempo de de Sitter é transitivo sob uma combinação de translações e transformações conformes próprias, então a conexão entre os pontos no espaçotempo adquirem novas propriedades, redefinindo os conceitos de transitividade, movimento e quantidades conservadas.

Para estudarmos o movimento, primeiramente devemos entender a transitividade no espaçotempo de de Sitter. Neste espaçotempo a transitividade é definida pelas “translações" de de Sitter; uma combinação de translações ordinárias e transformações conformes própias. A importância relativa destas contribuições para o movimento vem determinada pelo valor do parâmetro de comprimento de de Sitter. Essa propriedade incorporará uma nova definição de movimento e uma nova noção da estrutura causal do espaçotempo de de Sitter, especialmente quando a constante cosmológica toma valores grandes [22]. O objetivo da presente tese é estudar as consequências dessa propriedade para a noção de movimento, bem como para as leis de conservação.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 1 fazemos uma introdução à estrutura geométrica do espaçotempo de de Sitter, à álgebra do grupo de de Sitter e ao processo de contração de Inönü-Wigner [23]. No capítulo 2 estudamos as transformações dos campos no espaçotempo de de Sitter. No capítulo 3 usamos as variações dos campos para conseguir as leis de conservação e as cargas de Noether no contexto da Relatividade Especial de de Sitter. Por último no, capítulo 4, propomos uma nova maneira de entender o movimento no espaçotempo de de Sitter através de uma nova equação de movimento que expresse as propriedades de transitividade do espaçotempo de de Sitter.

Capítulo 1

Espaçotempos e Grupos de de Sitter

1.1 Espaçotempos de de Sitter

Os espaçotempos de Sitter e anti de Sitter têm sido amplamente estudados, porque apresentam propriedades de grande interesse para a cosmologia e as diferentes aproximações a gravidade quântica.

Os espaçotempos de de Sitter são os espaçotempos mais simples depois do espaçotempo de Minkowski. Podem se definir como uma hipersuperficie hiperbólica embebida em um espaçotempo plano pseudo-euclideano $\mathcal{M}^{1,4}$ e $\mathcal{M}^{2,3}$ 5-dimensionais respectivamente, com métrica em coordenadas cartesianas

$$ds^2 = \eta_{AB} d\chi^A d\chi^B \tag{1.1}$$

$$\eta_{AB}\chi^A\chi^B + \epsilon\left(\chi^4\right)^2 = \epsilon l^2 \tag{1.2}$$

onde $\epsilon = 1$ se refere ao espaçotempo de de Sitter e $\epsilon = -1$ ao espaçotempo de anti de Sitter. O comprimento l é conhecido como o comprimento de de Sitter l, e é um invariante de Lorentz.

Além disso, os espaçotempos de de Sitter e de anti de Sitter

$$dS\,(4,1) = {}^{SO(4,1)}/_{\mathcal{L}} \quad \text{and} \quad AdS\,(3,2) = {}^{SO(3,1)}/_{\mathcal{L}}$$

são espaços quociente, portanto podem ser construídos independente das equações de Einstein [24]. Esses espaçotempos têm como grupos de simetrias os grupos especiais e ortogonais $SO\left(4,1\right)$ e $SO\left(3,2\right)$ respectivamente, tendo o grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ como subgrupo [25].

Os espaçotempos de de Sitter e de anti de Sitter também podem se ver como soluções às equações de Einstein no vazio com uma constante cosmológica

$$\Lambda = -\epsilon\frac{3}{l^2}$$

onde l é o comprimento de de Sitter.

Doravante nos centraremos no espaçotempo de de Sitter $\epsilon = +1$, já que por motivações físicas é o espaçotempo que usaremos como espaço cinemático para o desenvolvimento de uma teoria de relatividade. Não entanto, pode se seguir um procedimento análogo ao descrito aqui para considerar o espaço de anti de Sitter como espaçotempo cinemático.

1.2 Sistemas de Coordenadas

Diferentes sistemas de coordenadas nos levam a entender diferentes características do espaçotempo de de Sitter. Para ilustrarmos algumas das características mais importantes, como são a estrutura causal e o movimento geodésico do espaçotempo estudiaremos alguns sistemas de coordenadas específicos, obviando outros sistemas de coordenadas mais frequentemente usados [26, 27].

1.2.1 Coordenadas Globais

Considerando a transformação de coordenadas

$$\begin{aligned}
\chi^0 &= l\sinh\left({}^{\tau}/_{l}\right)\\
\chi^1 &= l\cosh\left({}^{\tau}/_{l}\right)\cos\theta_1\\
\chi^2 &= l\cosh\left({}^{\tau}/_{l}\right)\sin\theta_1\cos\theta_2\\
\chi^3 &= l\cosh\left({}^{\tau}/_{l}\right)\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\
\chi^4 &= l\cosh\left({}^{\tau}/_{l}\right)\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3
\end{aligned}$$

a métrica (1.1) toma a forma

$$ds^2 = d\tau^2 - l^2 \cosh^2 ({}^{\tau}/{}_{l}) \left[d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\theta_3^2 \right) \right] \tag{1.3}$$

As coordenadas $(\tau, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ cobrem todo o espaçotempo, portanto $-\infty < \tau < \infty, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi \quad e \quad 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$. A seção espacial são esferas de curvatura positiva $k = +1$.

1.2.2 Coordenadas Conformes

Se nas coordenadas anteriores definirmos o tempo coordenado por meio da relação

$$\cosh ({}^{\tau}/{}_{l}) = \frac{1}{\cos ({}^{t}/{}_{l})} \qquad -\frac{\pi}{2} < \frac{t}{l} < \frac{\pi}{2}$$

a métrica (1.3) toma a forma

$$d\bar{s}^2 = l^2 \cosh^2 ({}^{t}/{}_{l})\, ds^2 \tag{1.4}$$

Como pode se ver na Figura 1.1, as superfícies $I^+ \, e \, I^-$ são as superfícies nulas de futuro e passado respectivamente, enquanto as líneas tracejadas são as geodésicas nulas.

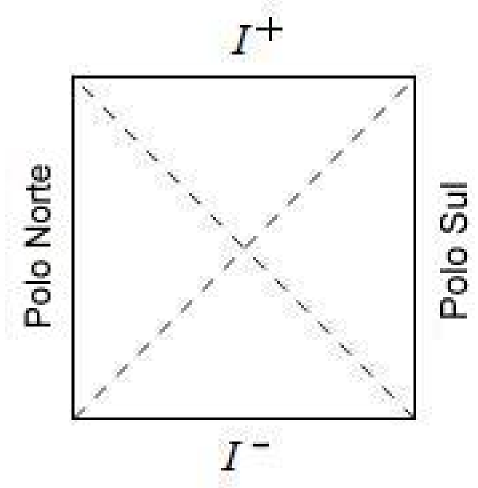

Figura 1.1: Diagrama de Penrose para dS_4

O espaçotempo de de Sitter é geodesicamente completo. No entanto, nenhum observador pode aceder a todo o espaçotempo. Por exemplo, um observador inercial sempre terá regiões sem aceso em seu passado. Isso é diferente do espaçotempo de Minkowski, onde um observador tipo-tempo tem a historia completa do Universo em seu cone de luz passado [26].

1.2.3 Coordenadas Estereográficas

O espaçotempo de de Sitter em coordenadas estereográficas é obtido fazendo uma projeção da hipersuperficie de de Sitter sobre um espaçotempo tangente de Minkowski, obtendo a transformação [28]

$$\chi^a = \Omega\left(x\right) x^a \qquad e \qquad \chi^4 = -l\Omega\left(x\right)\left(1+\frac{\sigma^2}{4l^2}\right) \tag{1.5}$$

onde

$$\Omega\left(x\right) = \left(1-\frac{\sigma^2}{4l^2}\right)^{-1} \qquad e \qquad \sigma^2 = \eta_{ab}x^a x^b \tag{1.6}$$

As coordenadas $\{x^a\}$ tomam valor no espaçotempo de Minkowski, no qual a hipersuperficie é projetada. Nessas coordenadas a métrica (1.1) toma a forma

$$ds^2 = \Omega^2\left(x\right)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.7}$$

Esse sistema de coordenadas será o sistema usado ao longo deste trabalho, já que os geradores tomam uma forma comparável aos geradores do grupo de Poincaré e facilita o processo de contração nos diferentes limites de contração a considerar.

Os diferentes objetos geométricos do espaçotempo escritos, em coordenadas estereográfica tomam a forma

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \left(\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\rho}_{\mu} + \delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}\right)\frac{\partial \ln\left(\Omega\right)}{\partial x^\rho} \tag{1.8}$$

sendo esses os símbolos de Christoffel

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\Omega^2}{l^2}\left(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\nu\rho}\right) \tag{1.9}$$

o tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = \frac{3}{l^2}g_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

e o tensor de Ricci

$$R = \frac{12}{l^2} = -4\Lambda \tag{1.11}$$

o escalar de curvatura respectivamente.

1.3 Grupo de de Sitter

O grupo de de Sitter expressa as características cinemáticas de isotropia e homogeneidade do espaçotempo de de Sitter. Este tem como subgrupo o grupo de boots não compacto, incluindo assim o principio de relatividade com uma velocidade máxima c e um comprimento l invariante. Estas características o convertem no grupo cinemático mais general possível com significado físico, junto com o grupo AdS [29].

No grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ as transformações de Lorentz definem a isotropia do espaçotempo de Minkowski, enquanto a transitividade é definida pelas traslações ordinárias. Analogamente, no grupo de de Sitter a isometria do espaçotempo continua sendo garantida pelas transformações de Lorentz, entretanto a transitividade está associada às “translações" de de Sitter.

1.3.1 Geradores do grupo de de Sitter

Os geradores 5-dimensionais do grupo de de Sitter em coordenadas cartesianas $\left\{\chi^A\right\}$ são dados por

$$J_{AB} = \eta_{AC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^B} - \eta_{BC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^A} \tag{1.12}$$

os quais satisfazem as relações de comutação

$$[J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{BC}J_{AD} + \eta_{AD}J_{BC} - \eta_{BD}J_{AC} - \eta_{AC}J_{BD} \tag{1.13}$$

em coordenadas estereográficas $\{x^\mu\}$ esses se dividem em dois tipos

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\lambda}x^\lambda P_\nu - \eta_{\nu\lambda}x^\lambda P_\mu \\ J_{\mu 4} &= lP_\mu - \frac{1}{4l}K_\mu \end{aligned} \tag{1.14}$$

onde

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad K_\mu = \left(2\eta_{\mu\lambda} x^\lambda x^\beta - \sigma^2 \delta_\mu^\beta\right) \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

são os geradores das translações ordinárias e as transformações conformes próprias respectivamente [30, 31]. Esses geradores satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\tau}] &= \eta_{\mu\lambda} J_{\nu\tau} + \eta_{\nu\tau} J_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\tau} - \eta_{\mu\tau} J_{\nu\lambda} \\
[J_{\mu\nu}, J_{\lambda 4}] &= \eta_{\lambda\nu} J_{\mu 4} - \eta_{\lambda\mu} J_{\nu 4} \\
[J_{\mu 4}, J_{\nu 4}] &= J_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Podemos notar que, devido à invariância sob o grupo de Lorentz do termo conforme Ω (1.23), essas relações de comutação se mantêm invariantes quando os operadores são escritos em função da métrica de de Sitter em coordenadas conformes

$$J_{\alpha\beta} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta J_{\mu\nu} = g_{\alpha\gamma} x^\gamma \partial_\beta - g_{\beta\gamma} x^\gamma \partial_\alpha \tag{1.16}$$

com $h^\mu_\alpha = \Omega\left(x\right)$ e

$$J_{\alpha 4} = h^\mu_\alpha J_{\mu 4} = \epsilon \left[l \delta^\beta_\alpha - \frac{1}{4l} \left(2 g_{\alpha\gamma} x^\gamma x^\beta - \sigma^2 \delta^\beta_\alpha\right)\right] \partial_\beta \tag{1.17}$$

com $\sigma^2 = g_{\gamma\delta} x^\gamma x^\delta$. Os operadores (1.16) e (1.17) estão representados no espaçotempo de de Sitter com a métrica (1.7), la cual será usada para subir e descer os índices. Caso tenhamos os operadores (1.14) usaremos a métrica $\eta_{\mu\nu}$ para subir e descer os índices.

O espaçotempo de de Sitter define sua transitividade sob as *traslações de de Sitter;* uma combinação das translações ordinárias e as transformações conformes próprias. Cada uma destas transformações será relevante dependendo do valor da constante cosmológica. Assim, podemos considerar dois tipos de parametrização; um para valores pequenos da constante cosmológica $(l \to \infty)$ e outro para valores grandes da constante cosmológica $(l \to 0)$.

1.4 Contrações de grupo

A contração é um método poderoso que revela a relação entre os grupos e as simetrias. O método de contração de Inönü-Wigner nos mostra que o grupo de de Sitter pode ser contraído a vários limites com diferentes significados físicos. Para obter os diferentes limites é necessário tomar a parametrização correta, realizando essa de uma maneira heurística [23].

Como se ilustra na figura 1.2, as contrações do grupo de de Sitter com significado físico são [32, 20]:

1. Limite não relativista $(c \to \infty)$: neste caso os grupos de de Sitter dS e anti de Sitter AdS se reduzem aos grupos de Newton-Hooke com constante cosmológica positiva N_+ e negativa N_- respectivamente. Esses grupos podem se usar no estúdio de uma física não relativista que considere uma constante cosmológica não nula. Não entanto, experimentalmente não se conhece nenhuma influencia da constante cosmológica à escala da física Newtoniana.

2. Limite espaçotemporal $(l \to \infty,\ l \to 0)$: neste caso os grupos de de Sitter e anti de Sitter se reduzem ao mesmo grupo em cada limite. No limite de $l \to \infty$ se reduzem ao grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ e no limite $l \to 0$ se reduzem ao grupo de Poincaré conforme $\bar{\mathcal{P}}$ [21]. O primeiro de esses grupos é o grupo cinemático da Relatividade Especial e o segundo vamos a explorá-lo mais ao longo deste trabalho.

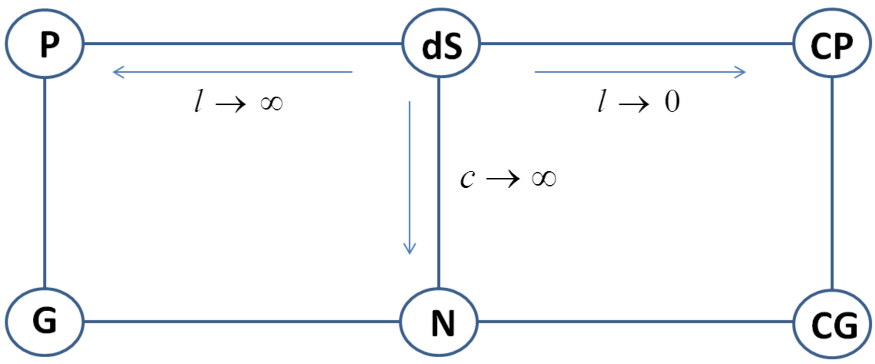

Figura 1.2: Contração de Grupos

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho estaremos interessados nos limites de contração relacionados com o comprimento de de Sitter, mantendo o carácter relativista dos grupos limite.

1.4.1 Limite de constante cosmológica pequena $l \to \infty$

Tomando a parametrização adequada sobre os geradores do grupo de de Sitter, esses geradores se reduzem aos geradores do grupo de Poincaré. Consequentemente, o espaçotempo de de Sitter se reduz ao espaçotempo de Minkowski. Seguindo um método heurístico para realizar a contração, podemos reparametrizar os geradores $J_{\mu 4}$ dividindo-os entre o parâmetro l, obtendo

$$L_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda} x^{\lambda} P_{\nu} - \eta_{\nu\lambda} x^{\lambda} P_{\mu} \tag{1.18}$$

$$\Pi_{\mu} = \frac{J_{\mu 4}}{l} = P_{\mu} - \frac{1}{4l^2} K_{\mu} \tag{1.19}$$

Com essa parametrização, as relações de comutação (1.15) são reescritas da forma

$$\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\tau}] &= \eta_{\mu\lambda} L_{\nu\tau} + \eta_{\nu\tau} L_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} L_{\mu\tau} - \eta_{\mu\tau} L_{\nu\lambda} \\
[L_{\mu\nu}, \Pi_{\lambda}] &= \eta_{\lambda\nu} \Pi_{\mu} - \eta_{\lambda\mu} \Pi_{\nu} \\
[\Pi_{\mu}, \Pi_{\nu}] &= \frac{1}{l^2} L_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Tomando o limite de constante cosmológica pequena $l \to \infty$, obtemos o grupo de Poincaré. O grupo de Lorentz é um subgrupo tanto do grupo de de Sitter quanto do grupo de Poincaré, portanto não experimenta nenhuma variação por meio da contração, e o gerador do grupo de Lorentz se mantêm inalterado

$$\lim_{l \to \infty} J_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}$$

Os geradores das “translações" de de Sitter se reduzem às translações ordinárias

$$\lim_{l \to \infty} \Pi_{\mu} = P_{\mu}$$

satisfazendo o álgebra de Poincaré:

$$
\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\tau}] &= \eta_{\mu\lambda}L_{\nu\tau} + \eta_{\nu\tau}L_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}L_{\mu\tau} - \eta_{\mu\tau}L_{\nu\lambda} \\
[L_{\mu\nu}, P_{\lambda}] &= \eta_{\lambda\nu}P_{\mu} - \eta_{\lambda\mu}P_{\nu} \\
[P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0
\end{aligned}
$$

Devido à relação entre o comprimento de de Sitter e a constante cosmológica, podemos entender esse limite como um limite de constante cosmológica pequena e de curvatura zero $R \to 0$.

1.4.2 Limite de constante cosmológica grande $l \to 0$

Para tomar esse limite devemos reparametrizar nossos geradores como

$$
\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= J_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}x^{\lambda}P_{\nu} - \eta_{\nu\lambda}x^{\lambda}P_{\mu} && (1.21) \\
\bar{\Pi}_{\mu} &= 4lJ_{\mu 4} = 4l^2P_{\mu} - K_{\mu} && (1.22)
\end{aligned}
$$

Sob essa parametrização, as relações de comutação do grupo de de Sitter (1.15) são expressadas como

$$
\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\tau}] &= \eta_{\mu\lambda}L_{\nu\tau} + \eta_{\nu\tau}L_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}L_{\mu\tau} - \eta_{\mu\tau}L_{\nu\lambda} \\
\left[L_{\mu\nu}, \bar{\Pi}_{\lambda}\right] &= \eta_{\lambda\nu}\bar{\Pi}_{\mu} - \eta_{\lambda\mu}\bar{\Pi}_{\nu} \\
\left[\bar{\Pi}_{\mu}, \bar{\Pi}_{\nu}\right] &= 4l^2L_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Ao tomarmos o limite $l \to 0$, as "translações" de de Sitter se reduzem à corrente conforme $\bar{\Pi}_{\mu} \to K_{\mu}$ e as relações de comutação se reduzem à álgebra do grupo de Poincaré Conforme [21]

$$
\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\tau}] &= \eta_{\mu\lambda}L_{\nu\tau} + \eta_{\nu\tau}L_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}L_{\mu\tau} - \eta_{\mu\tau}L_{\nu\lambda} \\
[L_{\mu\nu}, K_{\lambda}] &= \eta_{\lambda\nu}K_{\mu} - \eta_{\lambda\mu}K_{\nu} \\
[K_{\mu}, K_{\nu}] &= 0
\end{aligned}
$$

O grupo de Poincaré Conforme $\bar{\mathcal{P}}$, tem como subgrupo o grupo de Lorentz sendo esse responsável pela isotropia do espaço $\bar{\mathcal{M}}$, enquanto que o subgrupo das transformações conformes próprias são responsáveis pela transitividade. As transformações conformes próprias em $\bar{\mathcal{P}}$, como as translações ordinárias em $\mathcal{P}$, formam um grupo abeliano, a diferencia das *translações de de Sitter* Π, que não formam um grupo independente do grupo de de Sitter.

Neste limite os espaçotempo de de Sitter se reduzem ao espaçotempo Cônico homogêneo

$$\bar{\mathcal{M}} = \frac{\bar{\mathcal{P}}}{\mathcal{L}}$$

onde a noção de espaço e de tempo associadas às translações ordinárias são substituídas por uma nova noção associada ao movimento conforme (próprio).

O grupo de Pincaré conforme e o grupo de Poincaré podem se ver como espaços duais ao respeito da inversão espaçotemporal

$$x^\mu \to \frac{x^\mu}{\sigma^2}$$

sob a qual os geradores das translações se convertem nos geradores das transformações conformes próprias e vice-versa

$$P_\mu \leftrightarrow K_\mu$$

Com essa inversão, os pontos em infinito no espaçotempo Minkowski $\mathcal{M}$ são associados ao vértice do espaço cônico $\bar{\mathcal{M}}$, e aqueles pontos sobre o cone de luz no espaçotempo de Minkowski com o infinito no espaço cônico.

Esse limite deve se entender como um limite matemático, porque fisicamente se espera que, a escalas de comprimento muito pequenas seja necessária uma teoria da gravidade quântica [21].

1.5 Transformações de de Sitter e vetores de Killing

As transformações infinitesimais de coordenadas ao respeito do grupo de de Sitter em 5-dimensões é definida através de seus geradores como

$$\delta\chi^A = \frac{1}{2}\epsilon^{BC} J_{BC} \chi^A \tag{1.23}$$

onde $\epsilon^{BC} = -\epsilon^{CB}$ são os parâmetros da transformação e os geradores J_{BC} são dados por (1.12). Nesta representação 5-dimensional do grupo de de Sitter esta transformação pode ser entendida como uma combinação de boots e rotações em 5-dimensões.

1.5.1 Limite de constante cosmológica pequena $l \to \infty$

Em coordenadas estereográficas a transformação (1.23) toma a forma

$$\delta x^{\mu} \equiv \delta_L x^{\mu} + \delta_{\Pi} x^{\mu} \tag{1.24}$$

onde

$$\delta_L x^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\rho} L_{\nu\rho} x^{\mu} \tag{1.25}$$

representam as transformações infinitesimais do grupo de Lorentz, na qual os geradores $L_{\nu\rho}$ são definimos pela equação (1.18) e

$$\delta_{\Pi} x^{\mu} = \epsilon^{\nu} \Pi_{\nu} x^{\mu} \tag{1.26}$$

são as transformações infinitesimais das "translações" de de Sitter (1.19). Se tomarmos a forma explícita dos geradores, podemos encontrar as transformações infinitesimais em função dos vetores de Killing. Desta maneira, a transformação (1.25) é reescrita como

$$\delta_L x^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\rho} \xi^{\mu}_{(\nu\rho)} \tag{1.27}$$

com

$$\xi^{\mu}_{(\nu\rho)} = \eta_{\nu\sigma} x^{\sigma} \delta^{\mu}_{\rho} - \eta_{\rho\sigma} x^{\sigma} \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.28}$$

sendo os vetores de Killing de Lorentz. A transformação (1.26) é reescrita como

$$\delta_{\Pi} x^{\mu} = \epsilon^{\nu} \xi^{\mu}_{(\nu)} \tag{1.29}$$

onde

$$\xi^{\mu}_{(\nu)} = \delta^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{4l^2}\bar{\delta}^{\mu}_{\nu} \tag{1.30}$$

são os vetores de Killing das translações de de Sitter, com $\bar{\delta}^{\mu}_{(\nu)} = 2\eta_{\nu\sigma}x^{\sigma}x^{\mu} - \sigma^2\delta^{\mu}_{\nu}$ sendo a parte responsável com as transformações conformes própias.

Independentemente disso, temos que estes vetores satisfazem a equação de Killing

$$\mathcal{L}_{\xi}g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = 0$$

onde a métrica $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaçotempo de de Sitter em coordenadas estereográficas.

Ao tomarmos o limite formal de $l \to \infty$ recobramos os vetores de Killing do espaçotempo de Minkowski

$$\xi^{\mu}_{(\nu\rho)} = \eta_{\nu\sigma}x^{\sigma}\delta^{\mu}_{\rho} - \eta_{\rho\sigma}x^{\sigma}\delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.31}$$

e

$$\xi^{\mu}_{(\nu)} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.32}$$

para os quais as transformações infinitesimais de coordenadas do grupo de Poincaré são definidas como

$$\delta x^{\mu} = \epsilon^{\nu}\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\rho}\xi^{\mu}_{(\nu\rho)} \tag{1.33}$$

uma soma da transformação gerada pelas translações e as transformações de Lorentz.

1.5.2 Limite de constante cosmológica grande $l \to 0$

Em coordenadas estereográficas sob a parametrização (1.22), a transformação (1.23) toma a forma

$$\delta x^{\mu} \equiv \delta_L x^{\mu} + \delta_{\bar{\Pi}} x^{\mu} \tag{1.34}$$

onde

$$\delta_L x^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\rho}L_{\nu\rho}x^{\mu}$$

representam as transformações infinitesimais de Lorentz dado pela equação (1.21) e

$$\delta_{\bar{\Pi}} x^{\mu} = \epsilon^{\nu} \bar{\Pi}_{\nu} x^{\mu} \tag{1.35}$$

são as transformações infinitesimais geradas pelas das "translações" de de Sitter (1.22).

Se substituirmos estes geradores, podemos encontrar as transformações infinitesimais sob as coordenadas (1.34) em função dos vetores de Killing. O setor de Lorentz se mantem igual ao limite de constante cosmológica pequena com

$$\delta_L x^{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\rho} \xi^{\mu}_{(\nu\rho)} \tag{1.36}$$

e

$$\xi^{\mu}_{(\nu\rho)} = \eta_{\nu\sigma} x^{\sigma} \delta^{\mu}_{\rho} - \eta_{\rho\sigma} x^{\sigma} \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.37}$$

Enquanto o setor das "translações" de de Sitter é definido através da parametrização

$$\delta_{\bar{\Pi}} x^{\mu} = \epsilon^{\nu} \xi^{\mu}_{(\nu)} \tag{1.38}$$

onde

$$\xi^{\mu}_{(\nu)} = 4l^2 \delta^{\mu}_{\nu} - \bar{\delta}^{\mu}_{\nu} \tag{1.39}$$

são os vetores de Killing das translações de de Sitter com $\bar{\delta}^{\mu}_{(\nu)} = 2\eta_{\nu\sigma} x^{\sigma} x^{\mu} - \sigma^2 \delta^{\mu}_{\nu}$ sendo a parte responsável com as transformações conformes própias.

Ao tomarmos o limite de $l \to 0$ recobramos os vetores de Killing das transformações conformes próprias

$$\xi^{\mu}_{(\nu)} = \bar{\delta}^{\mu}_{\nu} \tag{1.40}$$

para os quais as transformações infinitesimais do grupo de Poincaré conforme são

$$\delta_{\bar{P}} x^{\mu} = \epsilon^{\nu} \bar{\delta}^{\mu}_{\nu} \tag{1.41}$$

Alternativamente poderíamos haver conseguido estes vetores por meio da equação de Killing no espaço

$$\nabla_{\nu}\xi_{\mu} + \nabla_{\mu}\xi_{\nu} = 0$$

é fácil verificar que os vetores (1.40) satisfazem esta equação.

Capítulo 2

Campos no espaçotempo de de Sitter

A transformação infinitesimal nas coordenadas gerada pelos vetores de Killing ξ^{μ} é

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon\xi^{\mu} \tag{2.1}$$

Essa transformação induz uma mudança funcional nos campos, que pode ser definida através da derivada de Lie ao longo do vetor de Killing ξ como[1]

$$\delta_{\xi}^{0}\Psi \equiv \Psi'(x) - \Psi(x) = -\mathcal{L}_{\xi}\Psi \tag{2.2}$$

na qual a Derivada de Lie é definida como

$$\mathcal{L}_{\xi}\Psi = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-\epsilon\Psi'(x) - \Psi(x)}{\epsilon}$$

A derivada de Lie compara os campo antes e depois da transformação, sendo eles medidos no mesmo argumento .

Para ilustrarmos as transformações do campo usando a derivada de Lie, consideremos o caso do campo vetorial $\Psi = \psi_{\mu}$, cuja derivada de Lie ao longo dos vetores de Killing ξ é

$$\mathcal{L}_{\xi}\psi_{\mu} = \xi^{\nu}\partial_{\nu}\psi_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\nu}\psi_{\nu} \tag{2.3}$$

[1] O campo Ψ representa um tensor de qualquer rango ou até spinores.

O primeiro termo ao lado direito da equação (2.3) corresponde à representação diferencial, eunquanto que o segundo termo à representação vetorial do grupo de isometrias associado aos vetores de Killing $\{\xi\}$.

Se ψ_μ for uma densidade tensorial, a derivada de Lie vem dada por

$$\mathcal{L}_\xi \psi_\mu = \xi^\nu \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\mu \xi^\nu \psi_\nu + w \psi_\mu \partial_\nu \xi^\nu \tag{2.4}$$

onde w é o peso da densidade tensorial.

Por outro lado, a variação originada pela mudança no argumento, mantendo a forma do objeto invariante, é gerada pela representação orbital do grupo

$$\delta_\xi^a \psi_\mu \equiv \psi_\mu \left(x'\right) - \psi_\mu \left(x\right) = \xi^\nu \partial_\nu \psi_\mu \tag{2.5}$$

A transformação (2.5) é conhecida como um termo de transporte.

Desta maneira, a mudança total no campo é associada à representação matricial das transformações

$$\begin{aligned} \delta_\xi \psi_\mu &\equiv \psi'_\mu \left(x'\right) - \psi_\mu \left(x\right) \\ &= \delta_\xi^0 \Psi + \delta_\xi^a \psi_\mu = -\partial_\mu \xi^\nu \psi_\nu \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se fazermos uma transformação infinitesimal de Poincaré sobre as coordenadas, especificamente uma translação ordinária, que é definida pelos vetores de Killing

$$\xi_P^\mu = \delta_\nu^\mu \epsilon^\nu \tag{2.7}$$

então a variação funcional dos campos

$$\delta_P^0 \Psi = -\delta_P^a \Psi = -\xi_P^\nu \partial_\nu \Psi \tag{2.8}$$

é gerada somente pela representação diferencial das translações e coincide com a transformação gerada nos campos pela mudança no argumento. Uma vez que os vetores de Killing das translações (2.7) são constantes, a variação total nos campos (2.6) é nula

$$\delta_P \Psi = 0 \tag{2.9}$$

A expressão (2.9) revela às translações globais como uma redefinição da origem espaçotemporal no espaçotempo de Minkowski [33].

2.1 Transformações de Lorentz

A transformação infinitesimal do grupo de Lorentz sobre as coordenadas é dada por

$$\delta_L x^\mu = \xi^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\rho}\xi^\mu_{(\nu\rho)} \tag{2.10}$$

onde $\epsilon^{\nu\rho} = -\epsilon^{\rho\nu}$ são os parâmetros constantes da transformação e

$$\xi^\mu_{(\nu\rho)} = \eta_{\nu\sigma}x^\sigma\delta^\mu_\rho - \eta_{\rho\sigma}x^\sigma\delta^\mu_\nu \tag{2.11}$$

são as componentes do campo vetorial de Killing associado ao grupo de Lorentz. A transformação de coordenadas (2.10) induzira mudança nos campos. No caso do campo escalar ψ, sua mudança total é nula

$$\delta_L\psi\left(x\right) = 0$$

e portanto sua representação matricial também é nula. Por outro lado, uma mudança no argumento gera a transformação

$$\delta^a_L\psi\left(x\right) = \epsilon^{\nu\mu}x_\nu\partial_\mu\psi\left(x\right)$$

a qual coincide com a mudança funcional no campo ψ

$$\delta^0_L\psi\left(x\right) = -\delta^a_L\psi\left(x\right) = -\epsilon^{\nu\mu}x_\nu\partial_\mu\psi\left(x\right)$$

Se considerarmos o campo vetorial de spin-1 ψ_μ, a mudança funcional do campo vetorial ψ_μ a respeito do grupo de Lorentz é dado pela derivada de Lie ao longo da direção dos vetores de Killing (2.11)

$$\delta^0_L\psi_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\xi^\nu_{(\rho\sigma)}\partial_\nu\psi_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\partial_\mu\xi^\nu_{(\rho\sigma)}\psi_\nu \tag{2.12}$$

a qual podemos escrever em função dos geradores da transformação como

$$\delta_L^0 \psi_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}\psi_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} \left(S_{\rho\sigma}\right)_\mu^{\ \nu} \psi_\nu \tag{2.13}$$

onde

$$L_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\nu} x^\nu \partial_\sigma - \eta_{\sigma\nu} x^\nu \partial_\rho \tag{2.14}$$

são os geradores orbitais do grupo de Lorentz e

$$\left(S_{\rho\sigma}\right)_\mu^{\ \nu} \equiv \partial_\mu \xi^\nu_{(\rho\sigma)} = \eta_{\rho\mu}\delta_\sigma^{\ \nu} - \eta_{\sigma\mu}\delta_\rho^{\ \nu} \tag{2.15}$$

é a representação vetorial correspondente. A combinação

$$J_{\rho\sigma} = L_{\rho\sigma} + S_{\rho\sigma} \tag{2.16}$$

satisfaz a álgebra do grupo de Lorentz

$$[J_{\rho\sigma}, J_{\mu\nu}] = \eta_{\rho\nu} J_{\sigma\mu} + \eta_{\sigma\mu} J_{\rho\nu} - \eta_{\sigma\nu} J_{\rho\mu} - \eta_{\rho\mu} J_{\sigma\nu} \tag{2.17}$$

Aliás $L_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}$ satisfazem independentemente a álgebra (2.17), uma vez que comutam entre si

$$[L_{\mu\nu}, S_{\mu\nu}] = 0 \tag{2.18}$$

A variação no argumento é dada pela representação orbital

$$\delta_L^a \psi_\mu(x) = \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}\psi_\mu(x) \tag{2.19}$$

e a variação total do campo vem gerada pela representação vetorial

$$\delta_L \psi_\mu(x) \equiv \psi'_\mu(x') - \psi_\mu(x) = -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\left(S_{\rho\sigma}\right)_\mu^{\ \nu}\psi_\nu(x) \tag{2.20}$$

A transformação (2.20) na relatividade especial nos diz como é visto um vetor em dois sistemas de coordenadas inerciais diferentes.

No caso de campos de 2^a ordem $\psi_{\mu\nu}$, a variação funcional do campo vem definida pela derivada de Lie ao longo do vetor de Killing ξ^μ

$$\delta_L^0 \psi_{\mu\nu} = -\left(\mathcal{L}_\xi \psi\right)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\xi^\tau_{(\rho\sigma)}\partial_\tau\psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\partial_\mu\xi^\tau_{(\rho\sigma)}\psi_{\tau\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\partial_\nu\xi^\tau_{(\rho\sigma)}\psi_{\mu\tau}$$

que não é outra coisa que a combinação de dois representações vetoriais, que em função dos geradores pode se reescrever como

$$\delta_L^0 \psi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}\psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} \left(S_{\rho\sigma}\right)_\mu^{\ \tau} \psi_{\tau\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} \left(S_{\rho\sigma}\right)_\nu^{\ \tau} \psi_{\mu\tau} \tag{2.21}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.21) definirá a transformação no argumento, assim

$$\delta_L^a \psi_{\mu\nu}\left(x\right) = \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}\psi_{\mu\nu} \tag{2.22}$$

A combinação dos últimos dois termos do lado direito da equação (2.21) respondem pela variação total do campo sob as transformações globais de Lorentz

$$\delta_L \psi_{\mu\nu}\left(x\right) = -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} \left(S_{\rho\sigma}\right)_\mu^{\ \tau} \psi_{\tau\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma} \left(S_{\rho\sigma}\right)_\nu^{\ \tau} \psi_{\mu\tau} \tag{2.23}$$

Essas definições serão de especial interesse no estudo das variações da métrica e para o cálculo das quantidades conservadas.

Para deduzir as transformações spinoriais, construamos um fibrado, de modo que

$$g_{ab} = h_a^{\ \mu} h_b^{\ \nu} g_{\mu\nu} \tag{2.24}$$

As tétradas $h_a^{\ \mu}$ relacionam o espaço tempo de métrica $g_{\mu\nu}$ com o espaço interno de métrica g_{ab} .

Consideremos uma transformação infinitesimal nas coordenadas do espaço tangente, a respeito da qual as tétradas transformam como

$$h'{}_a^{\ \mu} = \Lambda_a^{\ b}\left(x\right) h_b^{\ \mu} \tag{2.25}$$

onde as matrizes Λ são a representação vetorial do grupo, a qual denotaremos como[2]

$$\Lambda_a^{\ b} = \delta_a^{\ b} - \epsilon^i \left(\Sigma_i\right)_a^{\ b} \tag{2.26}$$

Portanto, a transformação funcional, ou a ponto fixo, das tétradas é gerada através de transformação (2.26). Assim

[2] O índice i representa qualquer ordem, podendo ser $i = c$ o $i = c, d$, $i = c, d, ..$

$$\delta^0 h_a^{\ \mu} = h'^{\ \mu}_a - h_a^{\ \mu} = -\epsilon^i \left(\Sigma_i\right)_a^{\ b} h_b^{\ \mu} \tag{2.27}$$

Se fazer uma transformação global de coordenadas sobre o espaçotempo

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

onde ξ^{μ} são os vetores de Killing associados ao espaçotempo cinemático, a transformação funcional da tétrada a respeito da transformação de coordenadas é definida pela derivada de Lie ao longo do campo de Killing ξ^{μ}

$$\delta_{\xi}^0 h_a^{\ \mu} = -\left(\mathcal{L}_{\xi} h_a\right)^{\mu} = -\xi^{\nu}\partial_{\nu} h_a^{\ \mu} - \partial_{\nu}\xi^{\mu} h_a^{\ \nu} \tag{2.28}$$

Assim, podemos relacionar a transformação interna do campo de tétrada (2.27) com a transformação sobre o espaçotempo (2.28) através de

$$\epsilon^i \left(\Sigma_i\right)_a^{\ b} = h_{\ \mu}^{b} \left(\xi^{\nu}\partial_{\nu} h_a^{\ \mu} - \partial_{\nu}\xi^{\mu} h_a^{\ \nu}\right) \tag{2.29}$$

Por outro lado, consideremos a transformação sobre o campo spinorial

$$\Psi'\left(x'\right) = S\left(\Lambda\right)\Psi\left(x\right) \tag{2.30}$$

onde

$$S\left(\Lambda\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\epsilon^{cd} S_{cd}\right) \qquad com \qquad S_{cd} = \left(S_{cd}\right)^{ab}\gamma_a\gamma_b \tag{2.31}$$

é a transformação gerada pelas transformações de Lorentz sobre o campo spinorial. Dessa maneira, a transformação funcional, ou a ponto fixo do campo spinorial, é determinada tanto pela representação diferencial (ou orbital) quanto pela representação spinorial das transformações de Lorentz

$$\begin{aligned}\Psi'\left(x\right) - \Psi\left(x\right) &= \frac{1}{4}\epsilon^{cd}\left(S_{cd}\right)_a^{\ b}\gamma^a\gamma_b\Psi\left(x\right) - \epsilon\xi^{\mu}\partial_{\mu}\Psi\left(x\right) \\ &= \frac{1}{4}\epsilon h_{\ \mu}^{b}\left(\xi^{\nu}\partial_{\nu} h_a^{\ \mu} - \partial_{\nu}\xi^{\mu} h_a^{\ \nu}\right)\gamma^a\gamma_b\Psi\left(x\right) - \epsilon\xi^{\mu}\partial_{\mu}\Psi\left(x\right)\end{aligned} \tag{2.32}$$

Considerando o espaçotempo de de Sitter

$$h_a^{\ \mu} = \delta_a^{\ \mu}$$

com os vetores de Killing relacionados com os geradores das transformações de Lorentz

$$\xi^{\mu} = \xi^{\mu}_{(\alpha\beta)}\epsilon^{\alpha\beta}$$

Assim a derivada de Lie pode ser escrita da maneira mais geral como

$$\delta^0_{\xi}\Psi = -\mathcal{L}_{\xi}\Psi = -\epsilon^{\alpha\beta}\xi^{\mu}_{(\alpha\beta)}\partial_{\mu}\Psi\left(x\right) - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_{\nu}\xi^{\mu}_{(\alpha\beta)}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu}\Psi\left(x\right) \tag{2.33}$$

a qual podemos escrever como

$$\delta^0_{L}\Psi = -\mathcal{L}_{\xi_L}\Psi = -\epsilon^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}\Psi\left(x\right) - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\left(S_{\alpha\beta}\right)_{\nu\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\Psi\left(x\right) \tag{2.34}$$

Uma vez que a variação no argumento é gerada pela representação diferencial

$$\delta^a_{L}\Psi = \Psi\left(x'\right) - \Psi\left(x\right) = \epsilon^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}\Psi\left(x\right) \tag{2.35}$$

a variação total dos spinores será dada por

$$\delta\Psi = \delta^0_{L}\Psi + \delta^a_{L}\Psi = -\frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\left(S_{\alpha\beta}\right)_{\nu\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\Psi \tag{2.36}$$

a qual é a representação matricial spinorial do grupo de Lorentz.

Os campos de diferente ordem sob uma transformação infinitesimal do grupo de Poincaré têm representação matricial associada ao subgrupo de Lorentz, mas não ao respeito do grupo das translações. Isto define a transitividade do espaçotempo de Minkowski a respeito das translações espaçotemporais globais.

2.2 “Translação" de de Sitter

A transformação infinitesimal gerada sobre as coordenadas pelas “Translação" de de Sitter é determinada por

$$\delta_{\Pi}x^{\mu} = \epsilon^{\nu}\xi^{\mu}_{(\nu)} \tag{2.37}$$

onde o vetor de Killing $\xi^{\mu}_{(\nu)}$ será expresso na parametrização adequada para cada limite de contração. O primeiro limite será apropriado para o estudo de valores pequenos da Constante Cosmológica Λ, enquanto o segundo limite será apropriado para o estudo de valores grandes de Λ.

2.2.1 Limite de constante cosmológica pequena $l \to \infty$

Para obtermos o limite de constante cosmológica pequena, devemos tomar a parametrização dos vetores de Killing

$$\xi^{\mu}_{\ (\nu)} = \delta^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{4l^2}\left(2\eta_{\nu\rho}x^{\rho}x^{\mu} - \sigma^2\delta^{\mu}_{\ \nu}\right) \tag{2.38}$$

Caso de campos escalares, estes são invariantes e a variação total é nula

$$\delta_{\Pi}\psi\left(x\right) = 0$$

apresentando somente mudança no argumento

$$\delta^{a}_{\Pi}\psi\left(x\right) = -\delta^{0}_{\Pi}\psi\left(x\right) = \epsilon^{\mu}\Pi_{\mu}\psi\left(x\right)$$

sendo igual à transformação funcional $\delta^{0}_{\Pi}\psi$, na qual Π_{μ} são os geradores diferenciais da transformação dados por

$$\Pi_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{1}{4l^2}\left(2\eta_{\mu\lambda}x^{\lambda}x^{\nu} - \sigma^2\delta^{\nu}_{\mu}\right)\partial_{\nu} \tag{2.39}$$

que satisfazem a álgebra do grupo de de Sitter (1.20).

O comportamento do campo vetorial ψ_{μ} a respeito de uma “Translação" de de Sitter é dado pela derivada de Lie ao longo dos vetores de Killing (2.38)

$$\delta^{0}_{\Pi}\psi_{\mu}\left(x\right) = -\left(\mathcal{L}_{\xi}\psi\right)_{\mu} = -\epsilon^{\rho}\xi^{\nu}_{\ (\rho)}\partial_{\nu}\psi_{\mu} - \epsilon^{\rho}\partial_{\mu}\xi^{\nu}_{\ (\rho)}\psi_{\nu} \tag{2.40}$$

que reescrevemos como

$$\delta^{0}_{\Pi}\psi_{\mu}\left(x\right) = -\epsilon^{\rho}\Pi_{\rho}\psi_{\mu}\left(x\right) - \epsilon^{\rho}\left(\Sigma_{\rho}\right)_{\mu}^{\ \nu}\psi_{\nu}\left(x\right) \tag{2.41}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.41) refere-se aos geradores diferenciais (2.39), enquanto o segundo termo dado pelo operador

$$\left(\Sigma_{\rho}\right)_{\mu}^{\ \nu} = -\frac{1}{2l^2}\left(\eta_{\rho\mu}x^{\nu} + \eta_{\rho\sigma}x^{\sigma}\delta_{\mu}^{\ \nu} - \eta_{\mu\sigma}x^{\sigma}\delta_{\rho}^{\ \nu}\right) \tag{2.42}$$

corresponde à representação vetorial das “Translações" de de Sitter. Assim, podemos reescrever a variação funcional dos campos como

$$\delta^0_\Pi \psi_\mu \left(x\right) = -\epsilon^\rho \Delta_\rho \psi_\mu \left(x\right) \tag{2.43}$$

onde o operador

$$\Delta_\rho = \Pi_\rho + \Sigma_\rho \tag{2.44}$$

satisfaz a álgebra do grupo de Sitter

$$\left[\Delta_\rho, J_{\mu\nu}\right] = \eta_{\rho\mu}\Delta_\nu - \eta_{\rho\nu}\Delta_\mu \tag{2.45}$$

e

$$\left[\Delta_\mu, \Delta_\nu\right] = \frac{1}{l^2} J_{\mu\nu} \tag{2.46}$$

com $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$. Consequentemente, dadas as relações de comutação (2.45) e (2.46), podemos dizer que os operadores Δ_μ são geradores de de Sitter.

A diferencia dos operadores das representações vetoriais de Lorentz, os operadores Σ_ρ da representação vetorial das “Translações" de de Sitter (2.42) não satisfazem a álgebra de de Sitter (1.20), portanto esses operadores não são geradores de de Sitter isoladamente, enquanto que os operadores diferenciais Π_ρ são geradores do grupo de de Sitter [34]. Além disso, os operadores Σ_ρ e Π_ρ não comutam entre si.

A respeito de uma “Translação" de de Sitter, a transformação de um campo vetorial originada pela mudança no ponto espaçotemporal é

$$\delta^a_\Pi \psi_\mu = \epsilon^\nu \Pi_\nu \psi_\mu \tag{2.47}$$

Como no grupo de Lorentz, a variação total do campo é gerada pelos operadores matriciais

$$\delta_\Pi \psi_\mu = \delta^0_\Pi \psi_\mu + \delta^a_\Pi \psi_\mu = -\epsilon^\rho \left(\Sigma_\rho\right)_\mu^{\ \nu} \psi_\nu \tag{2.48}$$

Contudo, a transformação (2.48) não pode ser considerada uma transformação de de Sitter, uma vez que os operadores Σ_ρ não são geradores de de Sitter.

Se tomar o limite de $l \to \infty$ recuperamos a representação de Poincaré

$$\lim_{l\to\infty} \Delta_\rho = P_\rho$$

a qual não tem representação matricial $\Sigma \to 0$. Desta maneira, o grupo de de Sitter se reduz ao grupo de Poincaré.

Para estudar um pouco mais o significado do setor matricial das “Translações" de de Sitter, vejamos em detalhe o caso de campos de 2^a ordem $\psi_{\mu\nu}$, para os quais a variação funcional está definida pela derivada de Lie como

$$\delta^0_\Pi \psi_{\mu\nu} = \left(\mathcal{L}_\Pi \psi\right)_{\mu\nu} = -\epsilon^\rho \xi^\sigma_{\ (\rho)} \partial_\sigma \psi_{\mu\nu} - \epsilon^\rho \partial_\mu \xi^\sigma_{\ (\rho)} \psi_{\sigma\nu} - \epsilon^\rho \partial_\nu \xi^\sigma_{\ (\rho)} \psi_{\mu\sigma} \tag{2.49}$$

a que podemos escrever em função dos operadores (2.38)

$$\delta^0_\Pi \psi_{\mu\nu} \equiv -\epsilon^\rho \Pi_\rho \psi_{\mu\nu} - \epsilon^\rho \left(\Sigma_\rho\right)_\mu^{\ \sigma} \psi_{\sigma\nu} - \epsilon^\rho \left(\Sigma_\rho\right)_\nu^{\ \sigma} \psi_{\mu\sigma}$$

Considerando a métrica como um caso específico de tensor de 2^a ordem, teremos que a variação funcional (2.49) será dada por

$$\delta^0_\Pi g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\Pi g_{\mu\nu} = -\epsilon^\rho \Pi_\rho g_{\mu\nu} - \epsilon^\rho \left(\Sigma_\rho\right)_\mu^{\ \sigma} g_{\sigma\nu} - \epsilon^\rho \left(\Sigma_\rho\right)_\nu^{\ \sigma} g_{\mu\sigma} \tag{2.50}$$

Uma vez que a métrica $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaçotempo de de Sitter, e os vetores ξ^μ são seus vetores de Killing, a variação funcional definida em (2.49) é nula

$$\delta^0_\Pi g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.51}$$

A variação no argumento da métrica é dada pelos geradores diferenciais das “translações" de de Sitter (2.39)

$$\delta^a_\Pi g_{\mu\nu} = \epsilon^\rho \Pi_\rho g_{\mu\nu} \tag{2.52}$$

sendo essa variação igual em forma à variação total da métrica

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta^0_\Pi g_{\mu\nu} + \delta^a_\Pi g_{\mu\nu} = \epsilon^\rho \Pi_\rho g_{\mu\nu} \tag{2.53}$$

que pode ser escrita, usando (2.39), como

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{\epsilon^\rho}{l^2} \eta_{\rho\sigma} x^\sigma g_{\mu\nu} \tag{2.54}$$

ou equivalentemente

$$g'_{\mu\nu}\left(x'\right) = \omega^2 g_{\mu\nu}\left(x\right) \tag{2.55}$$

A transformação (2.55) representa um reescalonamento conforme da métrica $g_{\mu\nu}$.

O fator conforme ω em (2.55) é dado por

$$\omega^2 = 1 + \frac{\epsilon^\rho x_\rho}{l^2} \tag{2.56}$$

Ao tomar o limite de valores grandes de Λ, conseguimos que $\omega^2 \to 1$ e a variação total da métrica (2.54) se anula

$$\delta g_{\mu\nu} = 0$$

Consequentemente, recuperamos as transformações geradas na métrica a respeito das translações ordinárias.

Anteriormente estudamos o caso da transformação do campo spinorial a respeito do grupo de Lorentz. Contudo, ao contrario do grupo de Poincaré, os spinores sob o grupo de de Sitter não podem ser considerados somente como spinores de Lorentz, uma vez que o setor “translacional" de de Sitter também contribuirá.

Na seção anterior, conseguimos que os campos spinoriais invariantes de de Sitter em um espaçotempo de de Sitter transformam satisfazendo a lei (2.32)

$$\delta_\xi^0 \Psi = \Psi'(x) - \Psi(x) = -\xi^\mu \partial_\mu \Psi(x) - \frac{1}{4} \partial_\nu \xi^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \Psi(x) \tag{2.57}$$

onde os vetores de Killing ξ^μ são os vetores de Killing associados às isometrias do grupo de de Sitter.

Como os vetores de Killing assoaciados às “translação" de de Sitter são

$$\xi^\mu = \epsilon^\alpha \xi^\mu_{(\alpha)}$$

a variação funcional dos spinores (2.57) é determinada por

$$\delta_\Pi^0 \Psi = -\epsilon^\alpha \Delta_\alpha \Psi(x) \tag{2.58}$$

com os geradores definidos como

$$\Delta_\alpha = \Pi_\alpha + \frac{1}{4}\sigma_\alpha \tag{2.59}$$

onde

$$\sigma_\alpha = (\Sigma_\alpha)_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \tag{2.60}$$

é a representação spinorial das “translações" de de Sitter.

Assim, a transformação no argumento é gerada pelos operadores diferenciais

$$\delta^a_\Pi \Psi = \epsilon^\alpha \Pi_\alpha \Psi \tag{2.61}$$

enquanto a variação total do campo é dada pela representação spinorial (2.60)

$$\delta_\Pi \Psi = -\frac{1}{4}\epsilon^\alpha \sigma_\alpha \Psi \tag{2.62}$$

Os geradores (2.59) satisfazem as relações de comutação do grupo de de Sitter (1.20) [35]. No entanto, como no caso vetorial, os operadores σ_α não satisfazem aisladamente a álgebra de de Sitter, portanto, a transformação (2.62) não poderia se considerar uma transformação de de Sitter.

Caso dos campos spinoriais, observamos que nossa aproximação difere de outras formas de escrever os campos spinoriais invariantes sob o grupo de de Sitter [36]. A diferença está no fato de que se consideramos o espaço de de Sitter em 5 dimensões, uma vez que os geradores representam as rotações generalizadas, os geradores das transformações sobre os campos spinoriais são tradicionalmente definidos como uma generalização da representação spinorial do grupo de Lorentz, por meio da transformação

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\,\Psi(x)$$

com

$$S(\Lambda) = \exp\left(S^{AB}\epsilon_{AB}\right) \qquad com \qquad S^{AB} = \frac{1}{4}\left[\gamma^A, \gamma^B\right] \tag{2.63}$$

sendo as matrizes γ^A uma generalização das matrizes de Dirac em 5-dimensões. Assim, quando estes geradores são projetados a 4-dimensões se obtêm os operadores

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \qquad e \qquad \sigma^\mu = S^{\mu 4} = \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^5 \tag{2.64}$$

os quais satisfazem a álgebra de de Sitter. Além disso, os operadores da representação spinorial e da representação diferencial comutam

$$[\Pi_\mu, \sigma_\nu] = 0$$

No entanto, se não expressarmos a transformação do campo spinorial a respeito do grupo de de Sitter como (2.63) mas como uma contração da representação vetorial e as matrizes gamma em 5-dimensões

$$S(\Lambda) = \exp\left(S^{AB}\epsilon_{AB}\right) \qquad com \qquad S^{AB} = \left(S^{AB}\right)_{CD}\gamma^C\gamma^D \tag{2.65}$$

onde a representação vetorial é dada através de

$$\left(S^{AB}\right)_{CD} = \partial_C \xi_D^{(AB)} \tag{2.66}$$

com

$$\xi_D^{(AB)} = \chi^A \delta_D^B - \chi^B \delta_D^A$$

sendo os vetores de Killing 5-dimensionais de de Sitter.

Os geradores 5-dimensionais S^{AB} satisfazem a álgebra do grupo de de Sitter e são equivalentes a (2.63). Os geradores (2.65) ao ser projetados a 4-dimensões se reduzem a

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \tag{2.67}$$

e

$$S^{\mu 4} = \sigma^\mu = \left(\Sigma^\mu\right)_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta = \frac{1}{2l^2}x_\beta\left(\eta^{\mu\beta} - 2\gamma^\mu\gamma^\beta\right) \tag{2.68}$$

Esses operadores satisfazem isoladamente a álgebra de de Sitter (1.20). Aliás, os operadores (2.68) comutam com os operadores diferenciais (2.39) das “translações" de de Sitter.

Sob a parametrização (2.60) observamos -como é esperado- que ao tomar o limite de constante cosmológica pequena σ_α se anula

$$\lim_{l\to\infty} \sigma_\alpha \to 0$$

dessa maneira recobramos o sentido escalar dos spinores a respeito das translações ordinárias.

2.2.2 Limite de constante cosmológica grande $l \to 0$

A transformação das “Translações" de de Sitter devem ser reparametrizadas como

$$\delta_{\bar{\Pi}} x^{\mu} = \epsilon^{\nu} \xi^{\mu}_{(\nu)} \tag{2.69}$$

onde a componente do campo vetorial de Killing

$$\xi^{\mu}_{(\nu)} = 4l^2 \delta^{\mu}_{\nu} - \left(2\eta_{\nu\rho} x^{\rho} x^{\mu} - \sigma^2 \delta^{\mu}_{\nu} \right) \tag{2.70}$$

é reparametrizada da maneira mais conveniente para fazer o limite de contração de constante cosmológica grande, e assim recuperar os geradores do grupo de Poincaré conforme.

A transformação (2.69) induz nos campos vetoriais ψ_{μ} a transformação funcional (2.40)

$$\delta^0_{\Pi} \psi_{\mu} = - \left(\mathcal{L}_{\xi} \psi \right)_{\mu} = -\epsilon^{\rho} \xi^{\nu}_{(\rho)} \partial_{\nu} \psi_{\mu} - \epsilon^{\rho} \partial_{\mu} \xi^{\nu}_{(\rho)} \psi_{\nu}$$

a qual pode ser rescrita como

$$\delta^0_{\Pi} \psi_{\mu} = -\epsilon^{\rho} \bar{\Pi}_{\rho} \psi_{\mu} - \epsilon^{\rho} \left(\bar{\Sigma}_{\rho} \right)_{\mu}^{\ \nu} \psi_{\nu} \tag{2.71}$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação (2.71), refere-se aos geradores diferenciais (1.22)

$$\bar{\Pi}_{\mu} = 4l^2 P_{\mu} - K_{\mu} \tag{2.72}$$

e o segundo termo

$$\left(\bar{\Sigma}_{\rho} \right)_{\mu}^{\ \nu} = -2 \left(\eta_{\rho\mu} x^{\nu} + \eta_{\rho\sigma} x^{\sigma} \delta_{\mu}^{\ \nu} - \eta_{\mu\sigma} x^{\sigma} \delta_{\rho}^{\ \nu} \right) \tag{2.73}$$

corresponde à representação matricial das “translações" de de Sitter. Assim podemos escrever a transformação funcional do campo vetorial com respeito a uma “translações" de de Sitter como

$$\delta^0_{\Pi}\psi_\mu = -\epsilon^\rho \bar{\Delta}_\rho \psi_\mu \tag{2.74}$$

onde

$$\bar{\Delta}_\rho = \bar{\Pi}_\rho + \bar{\Sigma}_\rho \tag{2.75}$$

satisfazem a álgebra de de Sitter

$$\left[\bar{\Delta}_\rho, J_{\mu\nu}\right] = \eta_{\rho\mu}\bar{\Delta}_\nu - \eta_{\rho\nu}\bar{\Delta}_\mu \tag{2.76}$$

$$\left[\bar{\Delta}_{\mu,}\bar{\Delta}_\nu\right] = l^2 J_{\mu\nu} \tag{2.77}$$

com $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$. Consequentemente, os operadores $\bar{\Delta}_\mu$ são geradores de de Sitter. No entanto, os operadores $\bar{\Sigma}_\rho$ e $\bar{\Pi}_\rho$ não comutam entre si.

Se tomarmos o limite de $l \to 0$ recuperamos a representação vetorial do grupo de Poincaré conforme

$$\lim_{l\to 0} \bar{\Delta}_\rho = K_\rho + \bar{\Sigma}_\rho \tag{2.78}$$

e

$$\left[\bar{\Delta}_\mu, \bar{\Delta}_\nu\right] = 0 \tag{2.79}$$

que satisfazem a álgebra conforme [37].

Para o caso de campos de 2^a ordem a transformação funcional a respeito de uma “translação" de de Sitter é dada por

$$\delta^0_{\bar{\Pi}}\psi_{\mu\nu} \equiv -\epsilon^\rho \bar{\Pi}_\rho \psi_{\mu\nu} - \epsilon^\rho \left(\bar{\Sigma}_\rho\right)_\mu^{\ \sigma} \psi_{\sigma\nu} - \epsilon^\rho \left(\bar{\Sigma}_\rho\right)_\nu^{\ \sigma} \psi_{\mu\sigma} \tag{2.80}$$

A variação no argumento do campo é dada pelos operadores diferenciais

$$\delta^a_{\bar{\Pi}}\psi_{\mu\nu} = \epsilon^\rho \bar{\Pi}_\rho \psi_{\mu\nu} \tag{2.81}$$

Por exemplo, se considerarmos a métrica como caso específico de um tensor de 2^a ordem, a variação total sobre a métrica é dada pelos operadores da representação vetorial

$$\delta_{\bar{\Pi}} g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu}(x) = -\epsilon^{\rho}\left(\bar{\Sigma}_{\rho}\right)_{\mu}^{\ \sigma} g_{\sigma\nu} - \epsilon^{\rho}\left(\bar{\Sigma}_{\rho}\right)_{\nu}^{\ \sigma} g_{\mu\sigma} \tag{2.82}$$

essa variação pode ser escrita como

$$\delta_{\bar{\Pi}} g_{\mu\nu} = 4\epsilon^{\rho} x_{\rho} g_{\mu\nu} \tag{2.83}$$

onde temos usado (2.73).

Ao tomarmos o limite formal de valores grandes da constante cosmológica $l \to 0$, os operadores diferenciais (2.72) se reduzem à transformação conforme própria

$$\lim_{l\to 0} \bar{\Pi}_{\mu} \to K_{\mu}$$

Análogo ao caso dos campos tensoriais, no limite de contante cosmológica grande os campos spinoriais não se mostram como escalares com respeito às transformações conformes própias. Assim

$$\mathcal{L}_{\xi}\Psi = \epsilon^{\alpha}\bar{\Delta}_{\alpha}\Psi(x) \tag{2.84}$$

onde o operador Δ_{α} é expressado como

$$\bar{\Delta}_{\alpha} = \bar{\Pi}_{\alpha} + \frac{1}{4}\bar{\sigma}_{\alpha} \tag{2.85}$$

o qual ao tomarmos o limite formal de $l \to 0$ se reduz às transformações conformes própias

$$\lim_{l\to 0} \bar{\Delta}_{\alpha} \to K_{\alpha} + \frac{1}{2}x^{\beta}\left(\eta_{\alpha\beta} - 2\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\right)$$

definindo a transformação total dos spinores ao respeito das transformações conformes próprias.

2.3 Translações de de Sitter e transitividade

O estudo da geometria conforme, ou seja, o conjunto de todas as métricas $\tilde{g}_{\mu\nu}$ conformes à métrica física $g_{\mu\nu}$, é equivalente ao estudo das relações causais espaçotemporais. Devemos notar que a respeito dessas transformações da métrica, uma curva geodésica não continuará sendo-o, ao menos que seja nula, e inclusive neste caso o parâmetro afim ao longo da curva não deve ser o mesmo parâmetro afim.

Em geral, o reescalonamento conforme da métrica não está associado com o difeomorfismo no espaçotempo [38]. De fato, a invariância de um sistema física sob tal reescalonamento não está relacionado com nenhuma lei de conservação através do teorema de Noether [39, 40]. No entanto, quando considerarmos difeomorfismo em espaçotempo localmente de Sitter, como temos visto, além da transformação usual da métrica aparece um reescalonamento conforme da métrica. Isto significa que quando usarmos este difeomorfismo para obter as leis de conservação através do teorema de Noether ou na obtenção das equações por meio de um princípio variacional, devemos considerar a transformação agregando o reescalonamento conforme.

Considerando que o espaçotempo de de Sitter é transitivo sob as “translações" de de Sitter, uma "translação" global de de Sitter representará uma redefinição da origem do espaçotempo e consequentemente, no afetará os campos localmente. Assim teremos

$$\Psi'\left(x'\right) - \Psi\left(x\right) = 0 \tag{2.86}$$

Isto significa que a transformação relacionada com a transitividade do espaçotempo de de Sitter é dada pelas “translações" de de Sitter mais um reescalonamento sobre o campo [41]. Para um campo vetorial este é definido como:

$$\delta^0_\Pi \psi_\mu = -\left(\mathcal{L}_\Pi \psi\right)_\mu + \epsilon^\alpha \left(\Sigma_\alpha\right)_\mu^{\ \gamma} \psi_\gamma \tag{2.87}$$

O último termo adicional remove a parte indesejável da transformação, deixando uma “translação" pura de de Sitter. Consequentemente, sob “translações" de de Sitter, qualquer campo Ψ tem uma variação total nula

$$\delta_\Pi \Psi = 0$$

definindo a transitividade no espaçotempo de de Sitter através das "translações" de de Sitter.

Capítulo 3

Leis de Conservação

O espaçotempo de de Sitter como o espaçotempo de Minkowski é um espaço fundamental. Esses espaçotempos, além de satisfazer as equações de Einstein, podem ser construídos independentemente delas. Portanto, são espaçotempos sobre os quais pode se construir qualquer teoria física [20]. Consequentemente, quando mudarmos o grupo de covariância de Poincaré pelo grupo de de Sitter, ou equivalentemente a teoria da relatividade especial de Einstein pela Relatividade de de Sitter. Estamos mudando somente a cinemática da teoria, mas a dinâmica em ambas as teorias continua sendo a mesma. Por exemplo, a teoria da relatividade geral pode ser formulada considerando sua cinemática local sendo governada pelo grupo de Poincaré ou pelo grupo de de Sitter. Dessa maneira, somente se muda o principio de equivalência forte, a qual afirma que; *sempre é possível encontrar um sistema local no qual as leis da física se reduzam às da Relatividade Especial.* Se o espaçotempo local for de Minkowski, a cinemática local será governada pelo grupo de Poincaré. Se o espaçotempo local for de de Sitter, a cinemática local será governada pelo grupo de de Sitter.

Considerando que a cinemática é governada pelo grupo de de Sitter, podem se obter as quantidades conservadas associadas às simetrias do espaçotempo de de Sitter através do teorema de Noether.

3.1 Teorema de Noether

Se um observador em um sistema S escreve a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$, outro observador em um sistema S' deve escrever a mesma densidade Lagrangiana. Portanto, a Lagrangiana deve ser invariante ao respeito das transformações do grupo de covariância.

Definimos a ação dependente só dos extremos Σ_1 e Σ_2, os quais são as superfícies fronteira de alguma região 4-dimensional Ω

$$I\left(\Sigma_1, \Sigma_2\right) = \int\limits_{\Omega} d^4x \mathcal{L}\left(x\right)$$

onde $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L$ é a densidade lagrangiana. "*Sob uma mudança geral e infinitesimal de coordenadas, a primeira variação na ação é a diferença entre a função superfície entre os extremos da região integral*":

$$\delta I\left(\Sigma_1, \Sigma_2\right) = F\left(\Sigma_2\right) - F\left(\Sigma_1\right)$$

Considerando que a mudança infinitesimal de coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \tag{3.1}$$

é gerada pelas transformações infinitesimais do grupo de covariância, então a primeira variação da ação é

$$\delta I\left(\Sigma\right) = \int\limits_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'\left(x'\right) - \int\limits_{\Omega} d^4x \mathcal{L}\left(x\right)$$

a qual pode ser escrita como uma soma da variação total e funcional da ação capítulo 2

$$\delta I = \delta^a I + \delta^0 I \tag{3.2}$$

Assim, a variação da ação ao respeito de uma mudança no ponto é dada por

$$\delta^a I = \int\limits_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'\left(x'\right) - \int\limits_{\Omega} d^4x \mathcal{L}'\left(x\right) = \int\limits_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'\left(x + \delta x\right) - \int\limits_{\Omega} d^4x \mathcal{L}'\left(x\right)$$

Expandindo o primeiro termo, usando o teorema de Taylor até primeira ordem, obtemos

$$\delta^a I = \int\limits_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'\left(x\right) + \int\limits_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \mathcal{L}\left(x\right) \delta x^{\mu} - \int\limits_{\Omega} d^4x \mathcal{L}'\left(x\right)$$

onde a transformação no elemento de volume é dado pelo determinante da transformação de coordenadas (3.1)

$$\begin{aligned} d^4x' &= \left|\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right| d^4x \\ &= \left(1+\partial_\mu \delta x^\mu\right) d^4x \end{aligned}$$

Portanto

$$\delta^a I\left(\Sigma\right) = \int\limits_{\Omega} d^4x \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}\left(x\right) + \int\limits_{\Omega} d^4x \partial_\mu \mathcal{L}\left(x\right) \delta x^\mu = \int\limits_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L}\left(x\right)\right] \tag{3.3}$$

Usando o teorema de Gauss, a variação (3.51) vira um termo de superficie

$$\int\limits_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L}\left(x\right)\right] = \int\limits_{\Sigma} d\Sigma_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L}\left(x\right)\right] = G\left(\Sigma\right) \tag{3.4}$$

Pelo outro lado temos que a variação funcional da ação é dada por

$$\delta^0 I = \int\limits_{\Omega} d^4x \delta^0 \mathcal{L}\left(x\right)$$

com a variação da densidade lagrangiana dada em função de todos os campos[1]

$$\delta^0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta^0 \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta \psi_i\right)} \delta^0 \left(\partial_\beta \psi_i\right)$$

onde o último termo do lado direito da última expressão satisfaz

$$\delta^0 \left(\partial_\mu \psi_i\right) = \partial_\mu \left(\delta^0 \psi_i\right)$$

Portanto, podemos escrever a variação funcional da ação como:

$$\delta^0 I = \int\limits_{\Omega} d^4x \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_i\right)} \delta^0 \psi_i\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta^0 \psi_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_i\right)}\right] \delta^0 \psi_i \right\} \tag{3.5}$$

onde o primeiro termo em (3.5) é uma contribuição de superfície, que junto a (3.4) formam a densidade de corrente

[1] El subíndice i em los campos simboliza qualquer ordem, podendo ser $\phi, \phi_\mu, \phi_{\mu\nu}, ...$ o incluso spinores, também existe suma sobre este índice.

$$\mathcal{J}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \psi_i\right)} \delta^0 \psi_i + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \tag{3.6}$$

que em função de variações totais dos campos

$$\mathcal{J}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \psi_i\right)} \delta \psi_i + \delta x^{\nu} \left(\delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \psi_i\right)} \partial_{\nu} \psi_i \right) \tag{3.7}$$

Assim, a primeira variação total da ação é

$$\delta I = \int\limits_{\Omega} d^4 x \delta^0 \psi_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_i} + \int\limits_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \psi_i\right)} \delta \psi_i + \delta x^{\nu} \left(\delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \psi_i\right)} \partial_{\nu} \psi_i \right) \right\}$$

A ação é invariante ao respeito das transformações induzidas por $\delta x^{\mu}(x)$ e $\delta \phi_i$. Portanto, satisfeitas as equações de movimento conseguimos a conservação da corrente

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} J^{\mu} \right) = \nabla_{\mu} J^{\mu} = 0 \tag{3.8}$$

com

$$J^{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \left(\partial_{\mu} \psi_i\right)} \delta \psi_i + \delta x^{\nu} \left(\delta^{\mu}_{\nu} L - \frac{\partial L}{\partial \left(\partial_{\mu} \psi_i\right)} \partial_{\nu} \psi_i \right) \tag{3.9}$$

sendo a corrente associada à densidade lagrangiana L.

3.1.1 Tensor Energia Momento Canônico

Considerando as "translações" de de Sitter, geradas pelas transformações infinitesimais de coordenadas:

$$\delta x^{\nu} = \xi^{\nu}_{(\alpha)} \epsilon^{\alpha} \tag{3.10}$$

Estudamos a continuação os dois limites de contração.

Limite de Constante Cosmológica pequena $l \to \infty$

Sendo $\xi^{\nu}_{(\alpha)}$ é o vetor de Killing translacional de de Sitter (1.30), a variação total nos campos é:

$$\delta\psi_i = 0$$

Ao respeito desta transformação, a densidade de corrente conservada toma a forma

$$J^\mu = \xi^\nu_{(\alpha)}\epsilon^\alpha T^\mu_{c\;\nu} \tag{3.11}$$

onde

$$T^\mu_{c\;\nu} = \left(\delta^\mu_\nu L - \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\psi_i\right)}\partial_\nu\psi_i\right) \tag{3.12}$$

é o tensor energia-momento canônico usual.

Desta maneira, podemos definir o tensor de energia-momento canônico de de Sitter como

$$\Pi^\mu_{c\;\alpha} = \xi^\nu_{(\alpha)} T^\mu_{c\;\nu} \tag{3.13}$$

Assim, a corrente conservada é determinada por

$$J^\mu = \epsilon^\alpha \Pi^\mu_{c\;\alpha} \tag{3.14}$$

Uma vez que ϵ^α é arbitrário concluímos que

$$\nabla_\mu \Pi^\mu_{c\;\alpha} = 0 \tag{3.15}$$

Tomando o limite formal de valores da constante cosmológica pequena $l \to \infty$ o tensor (3.13) se reduz ao tensor energia-momento canônico

$$\lim_{l\to\infty} \Pi^{\mu\nu}_c = T^{\mu\nu}_c \tag{3.16}$$

O espaçotempo de de Sitter se reduz ao espaçotempo de Minkowski, transformando a lei de conservação

$$\nabla_\mu \Pi^{\mu\nu}_c = 0$$

em

$$\partial_\mu T_c^{\mu\nu} = 0 \tag{3.17}$$

a lei de conservação do tensor energia-momento canônico usual.

Limite de Constante Cosmológica grande $l \to 0$

Consideremos $\xi^\nu_{(\alpha)}$ como o vetor de Killing translacional de de Sitter (1.39) que gera a variação nos campos

$$\delta\psi_i = 0$$

Ao respeito desta transformação, a densidade de corrente conservada toma a forma

$$J^\mu = \bar{\Pi}_{c\ \alpha}^{\mu}\epsilon^\alpha \tag{3.18}$$

onde $\bar{\Pi}_{c\ \alpha}^{\mu}$ é definido como o tensor energia-momento equivalente a (3.13). Dado que ϵ^α é arbitrário, deve ser satisfeita a lei de conservação

$$\nabla_\mu \bar{\Pi}_{c\ \alpha}^{\mu} = 0 \tag{3.19}$$

Ao tomarmos o limite formal de valores da constante cosmológica grande $l \to 0$

$$\lim_{l\to 0} \bar{\Pi}_c^{\mu\nu} = K^{\mu\nu} \tag{3.20}$$

o tensor (3.18) se reduz à corrente conforme, e o espaçotempo de de Sitter se reduz ao espaçotempo canônico, satisfazendo a lei de conservação

$$\bar{\nabla}_\mu K^{\mu\nu} = 0 \tag{3.21}$$

A equação (3.21) indica a conservação da corrente conforme [37, 42, 31], onde $\bar{\nabla}_\mu$ é a derivada covariante no espaçotempo canônico.

3.2 Tensor Energia-Momento como fonte de gravidade

A mudança nas simetrias locais do espaçotempo trará consequências na conservação das quantidades locais e portanto, é necessária uma redefinição da fonte da gravidade.

A conservação covariante (local) do tensor de energia-momento em relatividade geral está associada à invariância da ação de Einstein-Hilbert ao respeito de uma translação local sobre as coordenadas [43]

$$\delta x^{\mu} = \epsilon^{\nu}(x)\, G_{\nu} x^{\mu} \tag{3.22}$$

onde $\epsilon^{\nu}(x)$ são os parâmetros da transformação e G_{ν} são os geradores das translações, que em função dos vetores de Killing podem ser escritos como

$$G_{\nu} = \xi^{\rho}_{\nu} \partial_{\rho} \tag{3.23}$$

com $\xi^{\rho}_{\nu} = \delta^{\rho}_{\nu}$. Assim a variação das coordenadas em função dos vetores de Killing, toma a forma

$$\delta x^{\mu} = \epsilon^{\nu}(x)\, \delta^{\mu}_{\nu} \tag{3.24}$$

Considerando um espaçotempo curvo geral e um campo de matéria geral com densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_m$, cuja integral de ação é

$$I_m = -\frac{1}{2c}\int d^4x \mathcal{L}_m$$

Se considerarmos uma transformação de coordenadas, a variação na ação é dada por [44]

$$\delta I_m = -\frac{1}{2c}\int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta^0_P g_{\mu\nu} \tag{3.25}$$

onde

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{3.26}$$

é o tensor energia-momento simétrico.

Sob a transformação de coordenadas (3.24), a variação funcional da métrica é

$$\delta_P^0 g_{\mu\nu} = -\partial_\gamma g_{\mu\nu}\epsilon^\rho(x)\,\delta^\gamma_\rho - g_{\gamma\nu}\partial_\mu\left(\epsilon^\rho(x)\,\delta^\gamma_\rho\right) - g_{\mu\gamma}\partial_\nu\left(\epsilon^\rho(x)\,\delta^\gamma_\rho\right) \tag{3.27}$$

Ao substituir (3.27) em (3.25), e considerando a simetria de $T^{\mu\nu}$, conseguimos que

$$\delta I_m = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\left[g_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\nu\gamma}\epsilon^\rho(x)\,\delta^\gamma_\rho + g_{\gamma\nu}\partial_\mu\left(\epsilon^\rho(x)\,\delta^\gamma_\rho\right)\right] \tag{3.28}$$

a qual pode ser reescrita como

$$\delta I_m = \int d^4x\nabla_\mu\left(T^\mu_{\ \nu}\delta^\nu_{\ \rho}\right)\epsilon^\rho(x) \tag{3.29}$$

Uma vez que os parâmetros ϵ^ρ são arbitrários, a invariância da ação da matéria ao respeito das transformações locais (3.24) exige a conservação covariante

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.30}$$

onde $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}\delta^\rho_\nu$ é o tensor de energia-momento simétrico fonte da gravidade.

Pelo outro lado, considerando que a cinemática local é governada pelo grupo de de Sitter, o espaçotempo subjacente é necessariamente o espaçotempo de de Sitter, onde agora devemos considerar a transformação local

$$\delta x^\mu = \epsilon^\nu(x)\,G_\nu x^\mu$$

na qual $\epsilon^\nu(x)$ são os parâmetros da transformação e G_ν são os geradores das translações de de Sitter, que em função dos vetores de Killing podem ser escritos como

$$G_\nu = \xi^\rho_\nu\partial_\rho$$

onde ξ^ρ_ν podem ser expressos da forma (1.30) ou (1.39), dependendo do limite de contração de nosso interesse. A transformação nas coordenadas, em função dos vetores de Killing, toma a forma

$$\delta x^\mu = \epsilon^\nu(x)\,\xi^\mu_\nu \tag{3.31}$$

A variação da ação de matéria ao respeito das transformações (3.31) é

$$\delta I_m = -\frac{1}{2c}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta^0_\Pi g_{\mu\nu} \tag{3.32}$$

onde

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}}$$

é o tensor energia-momento ordinário simétrico.

Sob a transformação (3.31), a variação funcional da métrica é dada por (2.50), variação que explicitamente podemos escrever como

$$\delta^0_\Pi g_{\mu\nu} \quad = \quad -\left(\mathcal{L}_\Pi g\right)_{\mu\nu} + \epsilon^\alpha\left(\Sigma_\alpha\right)_\mu^{\ \gamma} g_{\gamma\nu} + \epsilon^\alpha\left(\Sigma_\alpha\right)_\nu^{\ \gamma} g_{\gamma\mu} \tag{3.33}$$

onde a derivada de Lie é dada por

$$\left(\mathcal{L}_\Pi g\right)_{\mu\nu} = \nabla_\mu\left(\xi_{\nu(\alpha)}\epsilon^\alpha\right) + \nabla_\nu\left(\xi_{\mu(\alpha)}\epsilon^\alpha\right) \tag{3.34}$$

Consequentemente, a variação funcional da métrica vem dada por

$$\delta^0_\Pi g_{\mu\nu} = -\xi_{\nu(\alpha)}\nabla_\mu\epsilon^\alpha - \xi_{\mu(\alpha)}\nabla_\nu\epsilon^\alpha \tag{3.35}$$

Portanto, a variação da ação (3.32) é

$$\delta I_m = -\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\left(\xi_{\nu(\alpha)}\nabla_\mu\epsilon^\alpha + \xi_{\mu(\alpha)}\nabla_\nu\epsilon^\alpha\right) \tag{3.36}$$

Dada a simetria em $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, podemos escrever esta variação como

$$\delta I_m = -2\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_\nu^{\ (\alpha)}\nabla_\mu\epsilon_\alpha \tag{3.37}$$

integrando por partes obtemos

$$\delta I_m = 2\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\left(T^{\mu\nu}\xi_\nu^{\ (\alpha)}\right)\epsilon_\alpha\left(x\right) \tag{3.38}$$

Como o parâmetro ϵ^α é arbitrário, a invariância da ação é dada pela lei de conservação

$$\nabla_\mu \left(T^{\mu\nu} \xi_\nu{}^{(\alpha)} \right) = 0 \tag{3.39}$$

ou equivalentemente

$$\nabla_\mu \Pi^{\mu\alpha} = 0 \tag{3.40}$$

onde ∇_μ é a derivada covariante associada à conexão da métrica g não necessariamente de de Sitter. Definindo a conservação covariante do tensor, que define uma nova noção de energia-momento

$$\Pi^{\mu\alpha} \equiv T^{\mu\alpha} - \frac{1}{4l^2} K^{\mu\alpha} \tag{3.41}$$

onde

$$T^{\mu\alpha} = T^{\mu\nu} \delta^{\alpha}_{\ \nu} \tag{3.42}$$

é o tensor energia-momento simétrico ordinário, e

$$K^{\mu\alpha} \equiv T^{\mu\nu} \bar{\delta}^{\alpha}_{\ \nu} = T^{\mu\nu} \left(2 g_{\nu\beta} x^{\beta} x^{\alpha} - \sigma^2 \delta^{\alpha}_{\ \nu} \right) \tag{3.43}$$

é a corrente conforme [30].

Limite de Constante Cosmológica pequena $l \to \infty$

Ao considerarmos os vetores de Killing de de Sitter como sendo

$$\xi^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu} - \frac{1}{4l^2} \bar{\delta}^{\mu}_{\ \nu}$$

e tomando o limite formal de $l \to \infty$, a lei de conservação (3.40) se reduz à lei de conservação do tensor energia-momento simétrico

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha} = 0 \tag{3.44}$$

onde o tensor $T^{\mu\alpha}$ é o tensor de energia-momento simetrico.

Limite de Constante Cosmológica grande $l \to 0$

Se considerarmos os vetores de Killing de de Sitter como sendo

$$\xi^{\mu}_{\nu} = 4l^2\delta^{\mu}_{\nu} - \bar{\delta}^{\mu}_{\nu}$$

conseguimos a lei de conservação

$$\nabla_{\mu}\bar{\Pi}^{\mu\alpha} = 0 \tag{3.45}$$

onde

$$\bar{\Pi}^{\mu\alpha} = 4l^2 T^{\mu\alpha} - K^{\mu\alpha} \tag{3.46}$$

Ao tomarmos o limite formal de $l \to 0$ em (3.45), encontra-se a lei de conservação

$$\nabla_{\mu}K^{\mu\alpha} = 0 \tag{3.47}$$

que expressa a conservação da corrente conforme no espaçotempo cone.

Seguindo o mesmo procedimento anterior, e considerando a invariância sob transformações locais de Lorentz

$$\delta x^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\rho}(x)\,\xi^{\mu}_{\nu\rho} = \epsilon^{\mu\nu}(x)\,x_{\nu} \tag{3.48}$$

conseguimos a lei de conservação

$$\nabla_{\rho}M^{\rho\mu\nu} = 0 \tag{3.49}$$

onde

$$M^{\rho\mu\nu} = x^{\mu}T^{\rho\nu} - x^{\nu}T^{\rho\mu} \tag{3.50}$$

é o momento angular total.

3.3 Limites de Contração das leis de Conservação

Como temos visto, tanto $T^{\mu\nu}$ quanto $K^{\mu\nu}$ não são conservadas independentemente, mas dado que a corrente conforme tem a forma (3.43), podemos observar que se satisfazem as relações:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{2T^\mu_{\ \mu} x^\nu}{4l^2 - \sigma^2} \qquad e \qquad \nabla_\mu K^{\mu\nu} = \frac{2T^\mu_{\ \mu} x^\nu}{1 - \sigma^2/4l^2} \tag{3.51}$$

Somente quando o traço do tensor energia-momento é nulo, ambas as correntes $T^{\mu\nu}$ e $K^{\mu\nu}$ se conservam independentemente, consistente com o fato da aparição da simetria conforme quando temos campos sim massa. No limite formal de constante cosmológica nula $l \to \infty$, obtemos as leis de conservação usual sobre o espaçotempo de Minkowski [30]

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad e \qquad \nabla_\mu K^{\mu\nu} = 2T^\mu_{\ \mu} x^\nu \tag{3.52}$$

Pelo outro lado, no limite formal de constante cosmológica infinita $l \to 0$, obtemos:

$$\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = -2T^\mu_{\ \mu} \frac{x^\nu}{x^2} \qquad e \qquad \bar{\nabla}_\mu K^{\mu\nu} = 0 \tag{3.53}$$

onde $\bar{\nabla}_\mu$ é a derivada covariante no espaçotempo canônico. Neste limite a física é invariante conforme.

3.4 Quantidades conservadas

Integrando a lei de conservação covariante (3.20) conseguimos que

$$\frac{d}{ds}\pi^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} u^\mu \pi^\rho = 0 \tag{3.54}$$

onde

$$\pi^\nu = \int dv \Pi^{0\nu} \tag{3.55}$$

é o quadrimomento no espaçotempo de Sitter. Portanto, em presença da constante cosmológica, a definição usual de energia e momento são modificadas, incorporando além da definição ordinário um setor conforme.

Limite de Constante Cosmológica pequena $l \to \infty$

Em analogia com os geradores, o momento de de Sitter definido como (3.55) se reduz ao momento linear

$$\lim_{l \to \infty} \pi^{\nu} = p^{\nu}$$

o qual

$$\frac{dp^{\nu}}{ds} = 0$$

é conservado.

Limite de Constante Cosmológica grande $l \to 0$

A carga de Noether neste limite é

$$\bar{\pi}^{\nu} = \int dv \bar{\Pi}^{0\nu}$$

que ao tomarmos o limite $l \to 0$, este se reduz a

$$\bar{\pi}^{\nu} \to \kappa^{\nu}$$

onde κ^{ν} é o momento conforme [30]. Por outro lado, observamos que no espaço canônico as noções de energia e momento ordinárias devem ser substituídas por noções conformes.

Capítulo 4

Equações de Movimento

Embora o espaçotempo de de Sitter seja geodésicamente completo, tem pontos não conectados geodésicamente entre si [27], propriedade que nos motiva a procurarmos uma nova geodésica que descreva o movimento no espaçotempo de de Sitter. Já que a transitividade está relacionada com a noção de movimento, por exemplo, o espaçotempo de Minkowski é transitivo sob translações espaçotemporais, o que define as geodésicas ordinárias. Quando considerarmos que o espaçotempo de de Sitter é transitivo sob uma combinação de translações e transformações conformes próprias, a presença dessas transformações conformes próprias tem consequências nas equações de movimento. Considerando as propriedades de transitividade do espaçotempo de de Sitter no principio variacional, uma nova família de trajetórias pode ser obtida.

4.1 Geodésicas em de Sitter

O espaçotempo 5-dimensional de de Sitter, entendido como um hiperboloide submergido em um espaçotempo de Minkowski de 5-dimensoes apresenta um problema geodésico. Mesmo sendo geodésicamente completo, sempre haverão pontos que não serão unidos por geodésicas [45, 46, 47]. Isto deve se a que o espaço de de Sitter é um hiperquadrado de 5-dimensoes [48]

4.2 Método de Mathisson-Papapetrou

Para obtermos a equação de movimento, primeiramente usaremos a aproximação de mono-polo [49, 50, 43]. Considerando a lei de conservação sobre o tensor composto [17]

$$\Pi^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{4l^2} K^{\mu\nu} \tag{4.1}$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento simétrico e $K^{\mu\nu}$ a corrente conforme própria vem dada por

$$K^{\mu\alpha} \equiv T^{\mu\nu} \bar{\delta}^{\alpha}_{\ \nu} = T^{\mu\nu} \left(2 g_{\nu\beta} x^{\beta} x^{\alpha} - \sigma^2 \delta^{\alpha}_{\ \nu} \right) \tag{4.2}$$

Para obtermos a equação de movimento partimos da lei de conservação

$$\nabla_{\mu} \Pi^{\mu\nu} = 0 \tag{4.3}$$

a qual pode ser escrita explicitamente como

$$\partial_{\mu} \Pi^{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho} \Pi^{\mu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\ \mu\rho} \Pi^{\rho\nu} = 0 \tag{4.4}$$

onde a conexão de Levi-civita é a conexão que define o espaçotempo de de Sitter

$$\Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho} = \frac{1}{2l^2} x^{\alpha} \left[g_{\alpha\rho} \delta^{\nu}_{\ \mu} + g_{\alpha\mu} \delta^{\nu}_{\ \rho} - g_{\mu\rho} \delta^{\nu}_{\ \alpha} \right]$$

e

$$\Gamma^{\mu}_{\ \mu\rho} = \frac{2}{l^2} x^{\alpha} g_{\alpha\rho} = \partial_{\rho} \left(\ln \sqrt{-g} \right)$$

Assim, a equação (3.2) toma a forma

$$\partial_{\mu} \Pi^{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho} \Pi^{\mu\rho} + \partial_{\mu} \left(\ln \sqrt{-g} \right) \Pi^{\mu\nu} = 0 \tag{4.5}$$

se multiplicarmos a equação (4.5) por $\sqrt{-g}$, essa toma a forma

$$\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} \Pi^{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g} \Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho} \Pi^{\mu\rho} = 0 \tag{4.6}$$

Além da equação (4.6) usaremos a equação

$$\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} \Pi^{\mu\nu} x^{\sigma} \right) + \sqrt{-g} \Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho} \Pi^{\mu\rho} x^{\sigma} - \sqrt{-g} \Pi^{\sigma\nu} = 0 \tag{4.7}$$

a qual é a derivada diretamente de (4.6). Se considerarmos que o tensor (4.1) descreve uma partícula de prova, e integrarmos sobre uma hipersuperfície 3-dimensional tipo espaço, esse tensor toma valores somente dentro de um tubo “mundo" de uma seção espacial muito pequena, e assim podemos aplicar o teorema de Gauss para obter de (4.6)

$$\frac{d}{dt}\int dv\sqrt{-g}\Pi^{0\nu}+\int dv\sqrt{-g}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\Pi^{\mu\rho}=0, \tag{4.8}$$

e de (4.7)

$$\frac{d}{dt}\int dv\sqrt{-g}\Pi^{0\nu}x^{\sigma}+\int dv\sqrt{-g}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\Pi^{\mu\rho}x^{\sigma}-\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\sigma\nu}=0. \tag{4.9}$$

A conexão $\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}$ pode ser expandida em série de potências:

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}={}_0\,\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}+{}_0\,\Gamma^{\nu}_{\mu\rho,\sigma}\delta x^{\sigma}+\ldots, \tag{4.10}$$

onde $\delta x^{\sigma}=x^{\sigma}-x^{\sigma}_0$.

Introduzimos a expansão 4.10 nas equações (4.8) e (4.9) e usamos a aproximação de *single-pole particle* [50, 49]; considerando que ao menos alguma das integrais é diferente de zero

$$\int dv\Pi^{\mu\nu}\neq 0$$

enquanto que todas as integrais com um ou mais fatores variacionais δx^{σ} são nulas. Desta maneira, encontramos de (4.8)

$$\frac{d}{dt}\int dv\sqrt{-g}\Pi^{0\nu}+{}_0\,\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\mu\rho}=0 \tag{4.11}$$

e de (4.9)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int dv\sqrt{-g}\Pi^{0\nu}\left(\delta x^{\sigma}+x^{\sigma}_0\right)+{}_0\,\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\mu\rho}\left(\delta x^{\sigma}+x^{\sigma}_0\right)-\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\sigma\nu} &= 0\\ \frac{d}{dt}\left(x^{\sigma}_0\int dv\sqrt{-g}\Pi^{0\nu}\right)+{}_0\,\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}x^{\sigma}_0\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\mu\rho}-\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\sigma\nu} &= 0\end{aligned}$$

a qual é simplificada usando a equação (4.11) para obtermos

$$\frac{dx_0^\sigma}{dt}\int dv\sqrt{-g}\Pi^{0\nu}-\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\sigma\nu}=0 \tag{4.12}$$

Definindo o tensor

$$M^{\sigma\nu}\equiv\int dv\sqrt{-g}\Pi^{\sigma\nu} \tag{4.13}$$

e denotando $u^\sigma=\frac{dx^\sigma}{ds}$, podemos reescrever as equações (4.11) e (4.12) como

$$\frac{d}{ds}\left(M^{0\nu}\right)+\Gamma^\nu_{\mu\rho}M^{\mu\rho}=0 \tag{4.14}$$

e

$$u^\sigma M^{0\nu}=M^{\sigma\nu} \tag{4.15}$$

A equação (4.14) pode ser escrita como

$$\frac{d}{ds}\pi^\nu+\Gamma^\nu_{\mu\rho}u^\mu\pi^\rho=0 \tag{4.16}$$

onde

$$\pi^\nu=\int dv\sqrt{-g}\Pi^{0\nu}=M^{0\nu} \tag{4.17}$$

é o quadrimomento de de Sitter, sendo essa a quantidade conservada relacionada com as "translações" de de Sitter. Semelhantemente ao que acontece na relatividade especial ordinaria, na realtividade espacial de de Sitter, as trajetórias (4.16) coincide com a conservação de momento.

4.3 Equação de Movimento através de princípio variacional

Uma partícula de massa m em um espaçotempo geral com métrica $g_{\alpha\beta}$ é descrita pela ação funcional

$$I=-mc\int_a^b ds, \tag{4.18}$$

onde $ds = \left(g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}\right)^{1/2}$.

Para considerar todas as possíveis trajetórias entre os pontos a e b, o princípio variacional deve considerar as propriedades de transitividade do espaçotempo. Para considerarmos no espaçotempo de de Sitter as propriedades de transitividade fazemos as variações espaçotemporais

$$\delta_{\Pi} x^{\gamma} = \xi^{\gamma}_{\ \rho} \epsilon^{\rho} \tag{4.19}$$

onde ϵ^{ρ} é o parâmetro da transformação.

Usando (4.19) a variação da ação (4.18) resulta

$$\delta I = -mc \int_a^b \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} u^{\alpha} dx^{\beta} \delta_{\Pi} x^{\gamma} + 2 g_{\alpha\beta} u^{\alpha} \delta_{\Pi} \left(dx^{\beta}\right) \right], \tag{4.20}$$

onde $u^{\alpha} = dx^{\alpha}/ds$ é a quadrivelocidade ordinária. Usando a identidade $\delta_{\Pi}\left(dx^{\beta}\right) = d\left(\delta_{\Pi} x^{\beta}\right)$ no último termo, podemos escrever (4.20) como

$$\delta I = -mc \int_a^b \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} u^{\alpha} dx^{\beta} \delta_{\Pi} x^{\gamma} + 2 g_{\alpha\beta} u^{\alpha} d\left(\delta_{\Pi} x^{\beta}\right) \right], \tag{4.21}$$

Integrando o último termo por partes e desprezando o termo de superfície, a variação da ação resulta

$$\delta I = -mc \int_b^a ds \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} u^{\alpha} u^{\beta} - \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\gamma} u^{\alpha}\right) \right] \xi^{\gamma}_{\ \rho} \epsilon^{\rho} ds \tag{4.22}$$

Considerando a simetria no primeiro termo de (4.22), podemos escrever a variação da ação em função da derivada covariante

$$\delta I = mc \int_b^a ds \left(g_{\alpha\beta} u^{\gamma} \nabla_{\gamma} u^{\alpha} \xi^{\beta}_{\ \rho} \right) \epsilon^{\rho} \tag{4.23}$$

Definindo a quadrivelocidade

$$U^{\rho} = \xi_{\alpha}^{\ \rho} u^{\alpha} \tag{4.24}$$

podemos reescrever (4.23) como

$$\delta I = mc \int_b^a ds \left[u^{\gamma} \nabla_{\gamma} U^{\rho} - \frac{1}{2} u^{\alpha} u^{\gamma} \left(\nabla_{\gamma} \xi_{\alpha}^{\ \rho} + \nabla_{\alpha} \xi_{\gamma}^{\ \rho} \right) \right] \epsilon_{\rho} \tag{4.25}$$

Una vez dada uma métrica qualquer, os vetores de Killing dados por (4.19), satisfazem a relação

$$\nabla_\gamma \xi_\alpha^{\ \rho} + \nabla_\alpha \xi_\gamma^{\ \rho} = \frac{1}{2}\left(\nabla^\nu \xi_\nu^\rho\right) g_{\alpha\gamma} = -\frac{x^\rho}{l^2} g_{\alpha\gamma} \tag{4.26}$$

substituindo (4.26) na equação (4.25) obtemos a equação

$$\delta I = mc \int_b^a ds \left(u^\gamma \nabla_\gamma U^\rho + \frac{x^\rho}{2l^2} \right) \epsilon_\rho \tag{4.27}$$

Se considerarmos as propriedades de transitividade do espaçotempo de de Sitter, vemos que o princípio variacional inclui um reescalonamento conforme. Desta maneira, o segundo termo da integral (4.27) representa somente um reescalonamento conforme da métrica. Se fazermos uma transformação conforme infinitesimal $g_{\alpha\gamma} \to \omega^2 g_{\alpha\gamma}$, com o fator conforme dado por

$$\omega^2 = 1 + \frac{x^\rho \epsilon_\rho}{l^2} \tag{4.28}$$

o elemento de linha sob esta transformação transforma como

$$ds \to \omega ds \tag{4.29}$$

Realizando o reescalonamento conforme da métrica, a variação da ação toma a forma

$$\delta I = mc \int_b^a ds \, u^\gamma \nabla_\gamma U^\rho \epsilon_\rho \tag{4.30}$$

Devido à invariância da ação, e considerando a arbitrariedade ϵ^ρ, obtemos a equação de movimento

$$\frac{dU^\rho}{ds} + \Gamma^\rho_{\ \gamma\nu} U^\nu u^\gamma = 0 \tag{4.31}$$

a qual representa a trajetória da partícula no espaçotempo de de Sitter. A equação (4.31) é consistente com as propriedades do espaçotempo de de Sitter. Consequentemente quaisquer dos pontos deste espaço serão conectados por uma trajetória desta família. Por esta razão, pode ser considerada a verdadeira geodésica do espaçotempo de de Sitter [22]. Além disso, como na relatividade especial ordinária, a equação de movimento coincide com a conservação do quadrimomento. De fato, pode ser escrita da forma

$$\frac{d\pi^\rho}{ds} + \Gamma^\rho_{\gamma\nu}\pi^\nu u^\gamma = 0. \tag{4.32}$$

com

$$\pi^\rho = \xi^\rho_\beta p^\beta, \tag{4.33}$$

sendo o quadrimomento da partícula.

Embora a equação (4.32) seja calculada usando coordenadas estereográficas, também é válida em todos os sistemas de coordenadas, devido a sua forma tensorial. Consequentemente o momento de de Sitter π^ρ terá diferente forma dependendo das coordenadas, mas a equação de movimento permanece formalmente a mesma. A utilidade de usarmos as coordenadas estereográficas é a separação na corrente conservada entre momento ordinário e momento conforme próprio. Facilitando o limite de contração tanto a valores pequenos de constante cosmológica como a valores grandes da mesma.

4.4 Geodésicas nulas

4.4.1 espaçotempo de Minkowski

No contexto da óptica geométrica, a propagação da luz no espaçotempo de Minkowski é descrito pela equação

$$\frac{dk^\alpha}{d\lambda} = 0 \tag{4.34}$$

onde λ é um parâmetro afim que varia ao longo da trajetória e k é o quadrivetor de onda. Dado que esse vetor é tangente à trajetória, tem a forma $k^\alpha = {dx^\alpha}/{d\lambda}$. O caráter nulo das trajetórias é expressado pela condição

$$\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0 \tag{4.35}$$

O espaçotempo de Minkowski é somente transitivo ao respeito das translações ordinárias, e o tensor energia-momento é conservado:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{4.36}$$

Integrando esta lei em uma seção espacial do espaçotempo de Minkowski com

$$k^\mu = \int d^3x\sqrt{-g}T^{0\mu} \tag{4.37}$$

se obtêm a equação das geodésicas nulas (4.34).

4.4.2 espaçotempo de de Sitter

O espaçotempo de de Sitter é transitivo ao respeito de uma combinação de translações e transformações conformes próprias. Porém, uma vez que as trajetórias nulas estão relacionadas ao tensor energia-momento sem traca: $T^\mu_{\ \mu} = 0$. Da equação (3.51), observamos que tanto o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ quanto a corrente conforme $K^{\mu\nu}$ são conservados independentemente:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad e \qquad \nabla_\mu K^{\mu\nu} = 0 \tag{4.38}$$

Seguindo o mesmo procedimento do caso massivo, e integrando as equações (4.38) em uma seção espacial do espaçotempo de de Sitter para obter as correspondentes geodésicas. Usando a aproximação *single-pole* [50], a primeira lei de conservação de (4.38) nos leva para

$$k^\gamma \nabla_\gamma k^\mu \equiv \frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\gamma} k^\nu k^\gamma = 0 \tag{4.39}$$

com $\Gamma^\mu_{\nu\gamma}$ sendo a conexão de Levi-civita de de Sitter. Por outro lado, a segunda lei de conservação de (4.38), origina a equação

$$k^\gamma \nabla_\gamma \kappa^\mu \equiv \frac{d\kappa^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\gamma} \kappa^\nu k^\gamma = 0 \tag{4.40}$$

onde

$$\kappa^\mu = \int d^3x\sqrt{-g}K^{0\mu} \tag{4.41}$$

é o vetor de onda relacionado com as transformações conformes próprias. Os vetores de onda k^μ e κ^μ satisfaz a relação

$$\kappa^\mu \equiv \bar{\delta}^\mu_{\ \gamma} k^\gamma = \left(2\delta^\mu_{\ \alpha} x^\alpha x_\gamma - \sigma^2 \delta^\mu_{\ \gamma}\right) k^\gamma \tag{4.42}$$

Consequentemente, a equação (4.40) se reduz a

$$k^\gamma \nabla_\gamma k^\alpha = 0 \tag{4.43}$$

a qual é a equação da geodésica (4.39). Usando a relação (4.42), é possível demonstrar que $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$, e portanto $g_{\mu\nu}\kappa^\mu \kappa^\nu = 0$. Assim, as geodésicas (4.39) e (4.40) descrevem as mesmas trajetórias. No primeiro caso é descrito em termos da energia-momento, enquanto que no segundo caso é descrita em termos da corrente conforme própria.

Conclusões

Sabemos que os geradores das transformações infinitesimais do grupo de Lorentz são dados por

$$J_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}$$

os quais são compostos por uma parte diferencial (ou orbital) $L_{\alpha\beta}$, que tem a mesma forma para todos os campos, e uma parte matricial $S_{\alpha\beta}$, cuja forma explícita depende do spin dos campos sob consideração. Cada uma destas partes satisfaz a mesma relação de comutação que os geradores gerais $J_{\alpha\beta}$. Além disso, $L_{\alpha\beta}$ e $S_{\alpha\beta}$ comutam entre si. Em contraste, os geradores infinitesimais das “translações" de de Sitter são dados pelo operador

$$\Delta_{\alpha} = \Pi_{\alpha} + \Sigma_{\alpha}$$

o qual está composto também por dois setores, um diferencial Π_{α}, que tem a mesma forma para todos os campos, e um outro setor matricial $\Sigma_{\alpha},$ cuja forma explícita depende do spin de cada campo em consideração. Não obstante, há uma diferença fundamental entre o caso das transformações de Lorentz e as “translações" de de Sitter, uma vez que nas últimas Π_{α} e Σ_{α} não comutam entre si. Além disso, os operadores Σ_{α} não satisfazem a álgebra de de Sitter isoladamente, portanto não são geradores de de Sitter. No caso específico do tensor métrico, os operadores Σ_{α} geram um reescalonamento conforme da métrica.

Essas transformações, ainda que sejam relevantes para a estrutura completa do grupo de de Sitter, não estão relacionadas com difeomorfismos do espaçotempo. Quando definimos a transitividade do espaçotempo de de Sitter através das “translações" de de Sitter, o setor matricial da transformação não pode influir sobre os campos. Para garantir a transitividade do espaçotempo e assim, conseguir conectar todos os pontos de espaçotempo com uma mesma família de trajetórias. Portanto, no momento de estudar as quantidades conservadas, vemos que a parte matricial das “translações" de de Sitter não está relacionada com o teorema de Noether, da mesma maneira que não está relacionada com o princípio variacional.

A transitividade está intimamente relacionada com a noção de movimento. No espaçotempo de Minkowski quaisquer dois pontos estão conectados através de uma traslação ordinária, portanto o movimento neste espaçotempo é descrito por trajetórias cujos pontos são conectados por translações ordinárias. Uma vez que é definida a transitividade através das “translações" de de Sitter, os pontos no do espaçotempo são conectados através das “translações" de de Sitter. Consequentemente, a noção de movimento no espaçotempo de de Sitter muda em relação ao caso do espaçotempo de Minkowski, descrevendo trajetórias cujos puntos não são mais conectados pelas translações ordinárias, mas através de uma combinação de translações ordinárias e transformações conformes próprias.

Desta maneira, obtemos uma nova família de trajetórias dadas por

$$\frac{dU_\gamma}{ds} - \Gamma^\nu_{\mu\gamma} U_\nu u^\mu = 0$$

onde

$$U_\gamma = \xi^\beta_\gamma u_\beta = \left[\delta^\beta_\gamma - \frac{1}{4l^2}\left(\eta_{\gamma\alpha} x^\alpha x^\beta - \sigma^2 \delta^\beta_\gamma\right)\right] u_\beta$$

é uma quadrivelocidade não holonômica, a qual considera as direções translacionais e conformes próprias do espaçotempo de de Sitter. Consequentemente, as trajetórias correspondentes incluem ambas as noções de movimento; a translacional e a conforma própria. Além disso, como na relatividade especial ordinária, essas trajetórias coincidem com a conservação do momento, o que no caso de de Sitter constitui uma adição do momento ordinário e o momento conforme próprio.

Uma vez que a expressão que descreve as trajetórias pode ser obtida de um princípio variacional, e portanto são curvas maximizadas, essas trajetórias podem ser interpretadas como as verdadeiras “geodésicas" do espaçotempo de de Sitter.

A nova noção de movimento obtida não se mantem somente no espaçotempo de de Sitter, mas também em qualquer generalização de espaçotempos curvos gravitacionalmente que se reduzam localmente ao espaçotempo de de Sitter. A relativa importância entre as noções de movimento translacional ordinário e de movimento conforme está determinada pelo valor do pseudo-raio de de Sitter l. Para valores grandes de l em relação ao comprimento de Planck l_P, o movimento será preponderantemente determinado pelas translações ordinárias espaçotemporais. No limite formal $l \to \infty$, o espaçotempo de de Sitter se contrai ao espaçotempo de Minkowski, e o movimento será determinado somente pelas translações ordinárias. Nesse caso, os graus de liberdade conformes são eliminados. Para valores de l da ordem do comprimento de Planck l_P, o movimento será dominado pelas transformações conformes próprias. No limite formal de $l \to 0$, o espaçotempo de de Sitter se contrai para o espaçotempo cônico, sendo o movimento determinado apenas pelo setor conforme. Se a cinemática do espaçotempo é governada pelo grupo de de Sitter, essas novas noções de movimento podem ter importantes consequências na física da escala de Planck, onde a invariância conforme exerce um papel fundamental.

Referências Bibliográficas

[1] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess *et al.*, "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," *Astron.J.* **116** (1998) 1009–1038, arXiv:9805201 [astro-ph].

[2] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, "Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae," *Astrophys.J.* **517** (1999) 565–586, arXiv:9812133 [astro-ph].

[3] J. Frieman, M. Turner, and D. Huterer, "Dark Energy and the Accelerating Universe," *Ann.Rev.Astron.Astrophys.* **46** (2008) 385–432, arXiv:0803.0982 [astro-ph].

[4] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, "4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space," *Phys.Lett.* **B485** (2000) 208–214, arXiv:0005016 [hep-th].

[5] R. Aldrovandi, J. Beltran Almeida, and J. Pereira, "de Sitter special relativity," *Class.Quant.Grav.* **24** (2007) 1385–1404, arXiv:0606122 [gr-qc].

[6] S. Cacciatori, V. Gorini, and A. Kamenshchik, "Special Relativity in the 21st century," *Annalen Phys.* **17** (2008) 728–768, arXiv:0807.3009 [gr-qc].

[7] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Z. Xu, and B. Zhou, "On special relativity with cosmological constant," *Phys.Lett.* **A331** (2004) 1–7, arXiv:0403171 [hep-th].

[8] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, H.-T. Wu, and B. Zhou, "Snyder's Model - de Sitter Special Relativity Duality and de Sitter Gravity," *Class.Quant.Grav.* **24** (2007) 4009–4036, arXiv:0703078 [gr-qc].

[9] G. Dvali, S. Folkerts, and C. Germani, "Physics of Trans-Planckian Gravity," *Phys.Rev.* **D84** (2011) 024039, arXiv:1006.0984 [hep-th].

[10] K. Noui, “Motion in Quantum Gravity,” *Fundam.Theor.Phys.* **162** (2011) 531–559, arXiv:1003.6019 [gr-qc].

[11] S. Hossenfelder, “Self-consistency in theories with a minimal length,” *Class.Quant.Grav.* **23** (2006) 1815–1821, arXiv:0510245 [hep-th].

[12] J. Magueijo and L. Smolin, “Lorentz invariance with an invariant energy scale,” *Phys.Rev.Lett.* **88** (2002) 190403, arXiv:0112090 [hep-th].

[13] G. Amelino-Camelia, “Relativity in space-times with short distance structure governed by an observer independent (Planckian) length scale,” *Int.J.Mod.Phys.* **D11** (2002) 35–60, arXiv:0012051 [gr-qc].

[14] G. Amelino-Camelia, “Testable scenario for relativity with minimum length,” *Phys.Lett.* **B510** (2001) 255–263, arXiv:0012238 [hep-th].

[15] J. Kowalski-Glikman, “Introduction to doubly special relativity,” *Lect.Notes Phys.* **669** (2005) 131–159, arXiv:0405273 [hep-th].

[16] J. Kowalski-Glikman, “Doubly special relativity: Facts and prospects,” arXiv:0603022 [gr-qc].

[17] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, “de Sitter Relativity: a New Road to Quantum Gravity,” *Found. Phys.* **39** (2009) 1–19, arXiv:0711.2274 [gr-qc].

[18] R. Aldrovandi, J. P. Beltran Almeida, C. S. O. Mayor, and J. G. Pereira, “de Sitter Relativity and Quantum Physics,” *AIP Conf. Proc.* **962** (2007) 175–184, arXiv:0710.0610 [gr-qc].

[19] R. Aldrovandi and J. Pereira, “De Sitter Special Relativity: Effects on Cosmology,” *Grav.Cosmol.* **15** (2009) 287–294, arXiv:0812.3438 [gr-qc].

[20] H. Bacry and J. Levy-Leblond, “Possible kinematics,” *J.Math.Phys.* **9** (1968) 1605–1614.

[21] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, “A second Poincare group,” arXiv:9809061 [gr-qc].

[22] J. Pereira and A. Sampson, “de Sitter geodesics: Reappraising the notion of motion,” *Gen.Rel.Grav.* **44** (2012) 1299–1308, arXiv:1110.0965 [gr-qc].

[23] E. Inönü and E. P. Wigner, “On the Contraction of Groups and Their Representations,” *Proc. Natl. Acad. Scien.* **39** (1953) 510.

[24] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Classics Library, 1963.

[25] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to geometrical Physics*. World Scientific, Singapore, 1995.

[26] M. Spradlin, A. Strominger, and A. Volovich, "Les Houches lectures on de Sitter space," arXiv:0110007 [hep-th].

[27] S. Hawking and G. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, New York, 1973.

[28] E. Inönü, *in Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*. Istanbul Summer School of Theoretical Physics, Gordon and Breach, New York, 1962.

[29] C.-G. Huang, Y. Tian, X.-N. Wu, Z. Xu, and B. Zhou, "Geometries for Possible Kinematics," *Sci.China* **G55** (2012) 1978–2003, arXiv:1007.3618 [math-ph].

[30] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[31] J. Wess, "The Conformal Invariance in Quantum Field Theory," *Il Novo Cimento* **XVIII** (1969) 1086.

[32] A. S. McRae, "Clifford Algebras and Possible Kinematics," *SIGMA* **3** (2007) 079, arXiv:0707.2869 [math-ph].

[33] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*. Westview Press; Second Edition, 1997.

[34] N. Chernikov and E. Tagirov, "Quantum theory of scalar fields in de Sitter space-time," *Annales Poincare Phys.Theor.* **A9** (1968) 109.

[35] G. Borner and H. Durr, "Classical and Quantum Fields in de Sitter Space," *Il Novo Cimento* **LXIV A N.3** (1969) 669–714.

[36] S. A. Pol'shin, "Quantization of fields over de Sitter space by the method of generalized coherent states," *J.Phys.* **A33** (2000) 5077, arXiv:0007091 [hep-th].

[37] G. Mack and A. Salam, "Finite component field representations of the conformal group," *Annals Phys.* **53** (1969) 174–202.

[38] G. Wald, *General relativity*. Chicago Press, Chicago, 1984.

[39] S. R. Coleman and R. Jackiw, “Why dilatation generators do not generate dilatations?,” *Annals Phys.* **67** (1971) 552–598.

[40] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*. Springer, New York, 1997.

[41] J. Pereira and A. Sampson, “de Sitter transitivity, conformal transformations and conservation laws,”. Submitted for publication.

[42] J. Callan, Curtis G., S. R. Coleman, and R. Jackiw, “A New improved energy - momentum tensor,” *Annals Phys.* **59** (1970) 42–73.

[43] V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*. World Scientific Publishing, 1985.

[44] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*. Wiley New York, 1972.

[45] J. Flores and M. Sánchez, “Geodesic connectedness and conjugate points in GRW space-times,” *Journal of Geometry and Physics* **36** (Dec., 2000) 285–314, arXiv:math/0003037.

[46] E. Calabi and L. Markus, “Relativistic Space Forms,” *Annals of Mathematics.* **75** (1962) 63–76.

[47] M. Guediri, “On the geodesic connectedness of symple connected Lorentz surfaces,” *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* **Tome 6** (1997) 499–510, arXiv:1001.4810 [hep-th].

[48] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, San Diego, 1983.

[49] M. Mathisson, “Neue mechanik materieller systemes,” *Acta Phys.Polon.* **6** (1937) 163–2900.

[50] A. Papapetrou, “Spinning test particles in general relativity. 1,” *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A209** (1951) 248–258.