

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“Modos Deslizantes Discretos em Sistemas Incertos com
Atraso na Computação do Sinal de Controle”**

ALESSANDRO DA PONTE CAUN

Orientador: Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha
Solteira, para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de Conhecimento: Automação.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira

Caun, Alessandro da Ponte

C373m Modos deslizantes discretos em sistemas incertos com atraso na computação do sinal de controle / Alessandro da Ponte Caun. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2007
94 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação , 2007

Orientador: José Paulo Fernandes Garcia

Bibliografia: p. 88-90

1. Atraso computacional. 2. Controle robusto. 3. Modos deslizantes.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: Modos Deslizantes Discretos em Sistemas Incertos com Atraso na
Computação do Sinal de Controle**

AUTOR: ALESSANDRO DA PONTE CAUN

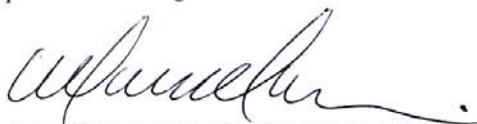
ORIENTADOR: Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA

DATA DA REALIZAÇÃO: 10 de julho de 2007

Aprovada com parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em
ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. **JOSE PAULO FERNANDES GARCIA** - Orientador
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. **HAROLDO RODRIGUES DE AZEVEDO**
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de Uberlândia


Prof. Dr. **MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA**
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

"Um jovem em casa deve amar os pais, e fora de casa respeitar os velhos. Deve ser discreto mas, ao mesmo tempo, falar com convicção quando se fizer necessária a sua ação; deve amar a todos os homens, sem distinção, e alegrar-se com as pessoas de bom coração. Se assim se portar, terá condições de bem se governar e a outros". (Confúcio)

A Deus, que nunca abandona um filho, por todas as coisas maravilhosas que recebo a cada dia em minha vida. Por sempre me guiar pelo caminho da luz, pela força que Ele me confere para superar todos os obstáculos de minha existência.

OFEREÇO

Aos meus pais, Hélio (In memoriam) e Maria, a presença mais forte de Deus em minha vida, pelo apoio incondicional e absoluto. Ao meu irmão Rodrigo, pelo período de convivência, compartilhando nossas expectativas e sonhos.

DEDICO

Agradecimentos

A Ele: Onipotente, Onipresente e Onisciente. Senhor absoluto que rege minha vida e meus passos: **DEUS**.

Aos meus pais **Hélio** (*In memoriam*) e **Maria**, as duas pessoas mais maravilhosas que preenchem minha vida. Pessoas simples, mas com corações enormes. Amo vocês.

Ao meu irmão **Rodrigo**, pelo tempo de convivência e aprendizado mútuo, no período em que moramos juntos em Ilha Solteira.

Ao meu orientador Professor Dr. **José Paulo**, pela amizade, sabedoria, compreensão, educação, conselhos e por ter dispensado em mim sua confiança no momento que mais precisei, minha eterna gratidão.

A Professora **Lizete**, pelo auxílio no desenvolvimento de minha pesquisa científica.

Aos professores **Marcelo** e **Edvaldo**, pela maestria demonstrada durante suas aulas.

Ao meu colega **Jean**, pelo apoio em diversas ocasiões, meu reconhecimento.

Aos meus colegas de laboratório, pelos momentos de descontração.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma nova estratégia de controle discreto. A técnica é baseada em Modos Deslizantes Discretos, utilizando uma lei de controle suave. Quando um algoritmo de controle é implementado em um computador digital, existe um atraso no tempo de computação, devido ao tempo de execução das instruções. Neste trabalho, vamos assumir que estes atrasos são constantes e menores que um período de amostragem. A presença do atraso no tempo de computação não apenas reduz a estabilidade e robustez, mas também degrada a performance de controle. O novo controlador proposto é projetado para atuar na presença destes atrasos, melhorando substancialmente o desempenho do controle. Outra propriedade importante deste controlador é a possibilidade de trabalhar com períodos de amostragem mais altos, garantindo o uso de frequências mais baixas de processamento, ou seja, proporcionando uma economia do hardware de atuação. A nova lei de controle proposta foi aplicada na estabilização de quatro sistemas incertos e de natureza instável: Sistema Bola e Viga, Sistema Pêndulo Invertido Linear, Sistema Pêndulo Invertido Rotacional e Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo. Resultados das simulações são apresentados e comparados com resultados de outro controlador de Modo Deslizante, proposto na literatura, caracterizando um estudo comparativo, onde a eficácia do novo controlador projetado se mostra evidente, devido a seu algoritmo de fácil elaboração prática. Para melhor visualização do comportamento dos sistemas estudados e visando a contribuição no aprendizado de sistemas de controle, modelos de animação em três dimensões foram utilizados.

ABSTRACT

This work presents a new strategy of discrete-time control. The technique is based on Discrete-Time Sliding Modes, using a smooth control law. When a control algorithm is implemented in a digital computer, there is a computation time delay, due the execution time of the instructions. In this work, we go to assume that these delays are constant and smaller than a sampling period. The presence of the computation time delay not only reduces the stability and robustness, but also degrades the control performance. The new considered controller is projected to work in the presence of these delays, improving substantially the performance of the control. Another important property of this controller is the possibility to work with higher sampling periods, guaranteeing the use of lower frequencies of processing, providing an economy of the actuation hardware. The new control law proposal was applied in the stabilization of four uncertain systems with unstable nature: Ball and Beam System, Linear Inverted Pendulum System, Rotational Inverted Pendulum System and Double Rotational Inverted Pendulum System. Simulations results are presented and compared with results of other Sliding Mode controller, proposed in the literature, characterizing a comparative study, where the effectiveness of the new designed controller shows evident, due your algorithm of easy practical elaboration. For better visualization of the behavior of the systems studied and aiming at the contribution in the learning of control systems, models of animation in three dimensions had been used.

Lista de Figuras

Figura 2.1 - A Superfície Deslizante é a intersecção das i-ésimas superfícies existentes.....	19
Figura 2.2 - Ilustração bidimensional do domínio do Modo Deslizante.....	20
Figura 2.3 - Diagrama de blocos do Sistema.....	36
Figura 2.4 - Controle descontínuo sem Camada Limite e com Camada Limite.....	36
Figura 2.5 - Trajetória dos estados e lei de controle sem usar Camada Limite.....	37
Figura 2.6 - Trajetória dos estados e lei de controle usando Camada Limite.....	37
Figura 4.1 - Exemplo de representação gráfica do Sinal de Controle Contínuo $(u(t))$, Sinal de Controle Discreto $(u(k))$, Atraso na Ação do Controle Contínuo (λ) e Atraso Computacional no Controle Discreto (h)	47
Figura 4.2 - Os atrasos h e λ são complementares ao período de amostragem Δ	48
Figura 6.1 - O Sistema Bola e Viga.....	58
Figura 6.2 - O Sistema Pêndulo Invertido Linear.....	61
Figura 6.3 - O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.....	63
Figura 6.4 - O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo.....	65
Figura 7.1 - Modelo animado do Sistema Bola e Viga.....	69
Figura 7.2 - Modelo animado do Sistema Pêndulo Invertido Linear.....	69
Figura 7.3 - Modelo animado do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.....	70
Figura 7.4 - Modelo animado do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo.....	71
Figura 8.1 - Diagrama de blocos para o CDMD na ausência do Atraso no Tempo de Computação.....	72
Figura 8.2 - Diagrama de blocos para o CDMD na presença do Atraso no Tempo de Computação.....	72
Figura 8.3 - Diagrama de blocos para o CDMDS-h na presença do Atraso no Tempo de Computação.....	73
Figura 8.4 - Diagrama de blocos para o CDMD-h na presença do Atraso no Tempo de Computação.....	73
Figura 8.5 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos sem atraso no tempo de computação.....	74
Figura 8.6 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.....	75
Figura 8.7 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMDS-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.....	76
Figura 8.8 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.....	76
Figura 8.9 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos sem atraso no tempo de computação.....	77

Figura 8.10 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.....	78
Figura 8.11 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.....	78
Figura 8.12 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.....	79
Figura 8.13 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.05 segundos sem atraso no tempo de computação.	80
Figura 8.14 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.05 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.04 segundos.....	80
Figura 8.15 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.05 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.04 segundos.....	81
Figura 8.16 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.05 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.04 segundos.....	81
Figura 8.17 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.03 segundos sem atraso no tempo de computação.....	82
Figura 8.18 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.03 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.02 segundos.	83
Figura 8.19 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.03 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.02 segundos.....	83
Figura 8.20 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.03 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.02 segundos.....	84

Lista de Símbolos e Abreviaturas

A/D	Conversor Analógico/Digital
A	Matriz da Planta Contínua
B	Matriz de Entrada Contínua
C	Matriz de Saída Contínua e Discreta
CDMD	Controlador Discreto com Modos Deslizantes
CDMD- h	Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso Computacional
CDMDS- h	Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso Computacional e apresenta Seleção do Sinal de Controle
CEV	Controle com Estrutura Variável
CEVD	Controle com Estrutura Variável Discreto
CEV-MD	Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes
CMD	Controle com Modos Deslizantes
CMDD	Controle com Modos Deslizantes Discreto
D/A	Conversor Digital/Analógico
$f(t, x)$	Matriz de Estados não-linear da Planta
G	Matriz de Ganhos da Superfície Deslizante Discreta
H	Atraso no Tempo de Computação
M	Dimensão do Vetor de Entradas
MD	Modos Deslizantes
MIMO	Sistema com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas
N	Dimensão do Vetor de Estados
P	Dimensão do Vetor de Saída
S_k	Superfície Deslizante Discreta
Sgn	Função Sinal
SISO	Sistema com uma Entrada e uma Saída
$u(t)$	Sinal de Controle Contínuo
u_k	Sinal de Controle Discreto

u_{eq}	Controle Equivalente Contínuo
u_k^{eq}	Controle Equivalente Discreto
u_n	Controle Contínuo que conduz e mantém os Estados em Modo Deslizante
$u_k^\pm$	Controle Discreto que conduz e mantém os Estados em Modo Deslizante
$V(t, x)$	Função de Lyapunov Contínua
V_k	Função de Lyapunov Discreta
VRB	V – Realm Builder
$x(t)$	Estados da Planta no Sistema Contínuo
x_k	Estados da Planta no Sistema Discreto
$y(t)$	Saída Contínua
y_k	Saída Discreta
ZOH	Bloqueador de Ordem Zero
Φ	Matriz da Planta Discreta
Γ	Matriz de Entrada Discreta
Γ_1	1ª Parcela de Separação da Matriz de Entrada Discreta
Γ_2	2ª Parcela de Separação da Matriz de Entrada Discreta
Ψ	Matriz de Transformação Discreta
σ	Superfície Deslizante Contínua
Δ	Período de Amostragem
Δf	Incertezas

Sumário

1. INTRODUÇÃO	12
2. CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES	16
2.1 Modelo do Sistema.....	17
2.1.1 Superfície de Deslizamento	17
2.1.2 Modos Deslizantes.....	18
2.1.3 Condições de Existência de um Modo Deslizante.....	19
2.2 O Método do Controle Equivalente	22
2.3 Redução de Ordem	23
2.4 Forma Regular.....	27
2.5 Projeto do Controlador	29
2.6 Sistemas Incertos e CEV-MD	31
2.7 Trepidação.....	34
2.8 Comentários	37
3. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES.....	39
3.1 Modelo Discreto no Espaço de Estados	39
3.2 Controlador Discreto com Modos Deslizantes (CDMD).....	41
3.2.1 Projeto da Superfície Deslizante.....	41
3.2.2 Projeto da Lei de Controle.....	42
3.2.3 Análise da Robustez da Atratividade.....	43
3.3 Comentários	45
4. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES CONSIDERANDO O ATRASO NO TEMPO DE COMPUTAÇÃO	46
4.1 Modelo Discreto no Espaço de Estados considerando o Atraso Computacional	46
4.2 Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso no Tempo de Computação (CDMD- h).....	49
4.2.1 Projeto da Superfície Deslizante.....	49
4.2.2 Projeto da Lei de Controle.....	50
4.2.3 Análise da Robustez da Atratividade.....	51
4.3 Comentários	52
5. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES CONSIDERANDO O ATRASO NO TEMPO DE COMPUTAÇÃO – OUTRA ABORDAGEM	54
5.1 Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso no Tempo de Computação e apresenta Seleção do Sinal de Controle (CDMDS- h)	54
5.2 Comentários	56
6. SISTEMAS INCERTOS, NÃO-LINEARES E DE NATUREZA INSTÁVEL.....	57
6.1 O Sistema Bola e Viga	58
6.2 O Sistema Pêndulo Invertido.....	60
6.2.1 O Sistema Pêndulo Invertido Linear.....	60
6.2.2 O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.....	62
6.2.3 O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo.....	64
6.3 Comentários	67

7. MODELOS DE ANIMAÇÃO	68
7.1 Modelo para Animação do Sistema Bola e Viga	69
7.2 Modelo para Animação do Sistema Pêndulo Invertido Linear	69
7.3 Modelo para Animação do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.....	70
7.4 Modelo para Animação do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo.....	71
7.5 Comentários	71
8. RESULTADOS - SIMULAÇÕES DOS CONTROLADORES	72
8.1 Resultados das Simulações no Sistema Bola e Viga	74
8.2 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Linear	77
8.3 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Rotacional	79
8.4 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo	82
8.5 Comentários	84
9. CONCLUSÕES	85
9.1 Conclusões Gerais	85
9.2 Trabalhos Publicados e Submetidos.....	86
9.3 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	87
REFERÊNCIAS	88
A. SOLUÇÃO PARA A FORMA NO ESPAÇO DE ESTADOS	91

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, Sistemas de Estrutura Variável com Modos Deslizantes são amplamente utilizados em controle e observação de estados de sistemas dinâmicos incertos, devido principalmente às suas características robustas, no que se refere às incertezas paramétricas e distúrbios externos. A teoria de Modos Deslizantes tem sido desenvolvida em sua maioria para o domínio do tempo contínuo. Neste tipo de estratégia de controle, há uma necessidade de ações descontínuas de alta velocidade para atrair os estados de um sistema para uma superfície deslizante e, subsequente, manter o movimento nesta superfície. Devido a necessidade de ações instantâneas, a implementação de controle de modos deslizantes contínuos em computadores digitais sofre uma deterioração na performance podendo levar à instabilidade do sistema e, mais comumente, ocorre o problema de trepidação devido a taxa de amostragem limitada, efeitos do *sample and hold*, e erros de discretização [1,2].

Para contornar estes problemas, muitas pesquisas em Controle de Estrutura Variável Discreto (CEVD) e Controle de Modos Deslizantes Discreto (CMDD) têm sido apresentadas recentemente. Em [3], a estratégia de controle adaptativo foi incorporada para considerar as incertezas do sistema e projetar uma lei em termos de controle equivalente discreto. Um controle robusto discreto, baseado em modos deslizantes, usando o operador delta (δ) e o conceito de Controle com Atraso no Tempo foi proposto em [4]. Análise detalhada dos efeitos do *sample and hold*, bem como uma investigação do comportamento do controlador discreto de modo deslizante para sistemas lineares, não-lineares e estocásticos foram apresentadas em [2]. O conceito de Controle com Atraso no Tempo também foi usado em [5], para cancelar os efeitos da perturbação do sistema dentro da região de chaveamento. Além disso, foi selecionada uma superfície deslizante que permitia que a resposta transiente fosse ajustada, apenas pela introdução da informação dos estados passados na superfície.

Quando um algoritmo de controle é implementado em um computador digital, existe um atraso no tempo de computação, devido à existência de atraso nas medidas de sinais realimentados, bem como o tempo de execução das instruções. A presença do atraso no tempo de computação não apenas reduz a estabilidade e robustez, mas também degrada a performance de controle [6].

Contudo, na maioria das aplicações, o atraso no tempo de computação é menor que o período de amostragem. Este caso tem sido pouco estudado no projeto de controladores discretos de modos deslizantes. A abordagem discreta de modos deslizantes foi desenvolvida para garantir a estabilidade assintótica de sistemas amostrados incertos, principalmente para reduzir o fenômeno da trepidação, que surge quando uma abordagem contínua de modos deslizantes é implementada em um computador digital. Assim, este atraso no tempo deve ser considerado na estrutura do modo deslizante discreto [7].

São duas as motivações que impulsionam a elaboração deste trabalho de pesquisa: a primeira é fazer com que o controlador proposto em [8] suporte atrasos maiores, bem próximos do período de amostragem, sendo esta uma limitação que merece uma atenção especial. Para tanto, é proposta uma alteração em sua estrutura, gerando um novo controlador. A segunda é testar os controladores em modelos altamente não-lineares e naturalmente instáveis.

Este trabalho propõe uma solução simples e factível ao problema do atraso, através de um controlador robusto discreto, baseado na estratégia de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV-MD), que considera o atraso na computação do sinal de controle. O CEV-MD foi primeiramente proposto e elaborado nos anos 60, na União Soviética, por Utkin [9]. Como mencionado anteriormente, sistemas CEV-MD têm como principais características: robustez na estabilidade e no desempenho, diante de determinadas classes de incertezas e não linearidades [10]. No entanto, tais características podem não existir em sistemas com atraso no sinal de controle, caso tais atrasos não sejam considerados durante o projeto.

Especificamente em CEV-MD, o problema do atraso é mais evidente, uma vez que este método utiliza uma lei de controle com chaveamento de alta velocidade. Este chaveamento depende dos estados atuais e é executado pelo sinal de controle. Se o efeito do atraso não for minimizado, o chaveamento poderá não direcionar a trajetória do sistema para a superfície de deslizamento projetada podendo, com isto, levar o sistema à instabilidade. Para evitar que os efeitos do atraso interfiram de maneira mais acintosa na estrutura de controle, a componente chaveada de controle (CEV), ou seja, a seleção de sinais de controle, não será utilizada,

tratando assim de um controlador apenas em Modos Deslizantes (MD), com sinal de controle único e suave, mas não menos eficiente.

O novo controlador proposto, além de melhorar a performance de controle na presença de atrasos no tempo de computação, também contribui para a utilização de períodos de amostragem maiores, por ser desenvolvido com base na teoria de controle digital. Esta propriedade é de importância relevante, pois implica diretamente na utilização de baixas frequências de processamento, proporcionando a utilização de equipamentos digitais mais baratos e acessíveis.

Para um claro desenvolvimento do novo controlador, outro controlador discreto que não leva em consideração o atraso no tempo de computação será primeiramente apresentado. De forma a verificar sua potencialidade no tratamento do problema de atraso computacional, o novo controlador proposto terá sua performance comparada com o controlador previamente projetado e com outra estrutura de controle [7], onde o atraso no tempo de computação também é considerado. O controlador projetado em [7] apresenta um algoritmo mais complexo, também baseado em Modos Deslizantes Discretos. O objetivo é demonstrar que a simplicidade do algoritmo de controle da nova estratégia apresentada neste trabalho, de fácil implementação prática, bem como o fato de seu projeto considerar os efeitos do atraso, contribui para um excelente desempenho final.

Foram escolhidos quatro sistemas incertos, não-lineares e de natureza instável para as simulações. São eles: o Sistema Bola e Viga, o Sistema Pêndulo Invertido Linear, o Sistema Pêndulo Invertido Rotacional e o Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo. Estes modelos dinâmicos foram escolhidos devido a suas complexas não-linearidades e, mais especificamente, por apresentarem instabilidade à malha aberta, tornando o desafio de controle mais interessante. Com base nos resultados das simulações, podemos comparar o desempenho dos controladores.

Para melhor visualização do comportamento dos sistemas estudados e visando a contribuição no aprendizado de sistemas de controle, modelos de animação em três dimensões foram utilizados, um para cada modelo de simulação.

O Capítulo 2 apresenta a teoria de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes, contínuo no tempo. Toda a teoria CEV-MD começou no meio contínuo (analógico) e, portanto, sua apresentação se faz necessária.

O Capítulo 3 descreve o projeto de um controlador discreto de modos deslizantes, que leva em consideração o processamento digital, mas não leva em conta o atraso na computação do sinal de controle [11].

No Capítulo 4, o novo controlador discreto, com modos deslizantes, é proposto. Este novo controlador leva em consideração, além do processamento digital, o atraso na computação do sinal de controle.

O Capítulo 5 contém a sistemática de projeto do controlador discreto sugerido em [7], que também considera o atraso no tempo de computação, mas com um algoritmo mais complexo.

No Capítulo 6, todos os sistemas utilizados para as simulações são apresentados, acompanhados de seus respectivos modelos matemáticos não-lineares e figuras ilustrativas. Neste capítulo também são apresentados os modelos linearizados (em um ponto de equilíbrio) de cada sistema, necessários para o cálculo dos ganhos da superfície deslizante.

O Capítulo 7 traz os modelos de animação (em três dimensões), que apresentam um propósito didático, contribuindo para o ensino de disciplinas da área de engenharia de controle. Estes modelos animados auxiliam na visualização da resposta dinâmica dos sistemas, quando os mesmos sofrem a atuação do controlador, enriquecendo a aprendizagem teórica.

Finalmente, no Capítulo 8, são apresentados os resultados finais de simulações da nova estratégia de controle discreto, proposto neste trabalho. São mostrados os resultados das simulações de maneira comparativa.

No Capítulo 9 são dadas as conclusões finais e sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2

2. CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES

A característica de um sistema de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV-MD) é uma lei de controle chaveada em alta velocidade, que ocorre quando o estado do sistema cruza certas superfícies descontínuas no espaço de estados. Essas superfícies são projetadas de forma que a dinâmica dos estados obedeça a um comportamento desejado quando em deslizamento. A estrutura de controle é usualmente não-linear e resulta em um sistema com estrutura variável que pode ser considerado como uma combinação de subsistemas, cada um com uma estrutura fixa e que opera em uma região específica do espaço de estados [9].

Assim, a estratégia de CEV-MD utiliza uma lei de controle chaveada para conduzir e manter a trajetória dos estados de uma planta em uma superfície específica (chamada superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento), ou sobre a intersecção de todas as superfícies escolhidas no espaço de estados. Quando a trajetória dos estados atinge esta superfície e nela permanece, diz-se que o sistema está na condição de deslizamento ou em modo deslizante e, nesta situação, o comportamento do sistema sofre menor influência por parte de alterações paramétricas ou de distúrbios externos, o que dá a característica robusta ao sistema controlado.

A existência de um modo deslizante requer a estabilidade da trajetória de estado para a superfície de deslizamento. Uma lei de controle chaveada deve então ser projetada para assegurar que a trajetória de estados se dirija à superfície de deslizamento (alcançabilidade) e nela permaneça durante todo o tempo subsequente (atratividade) [12].

Assegurar a existência de um modo deslizante na superfície de deslizamento é um caminho necessário no projeto de CEV-MD. Projetar a dinâmica da superfície é um caminho complementar do problema.

Assim, são duas as etapas principais no projeto:

- (a) Projeto de uma superfície deslizante, tal que a dinâmica da planta, quando em deslizamento, tenha uma trajetória desejada;
- (b) Desenvolvimento de uma lei de controle tal que satisfaça as condições de existência e alcançabilidade ao modo deslizante.

2.1 Modelo do Sistema

Considera-se uma classe de sistemas não-lineares no vetor de estado $x(t)$ e lineares no vetor controle $u(t)$, da forma [10]

$$\dot{x}(t) = \hat{f}(t, x, u) = f(t, x) + B(t, x)u(t) \quad (2.1)$$

onde o vetor de estado $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, o vetor controle $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $f(t, x) \in \mathfrak{R}^n$, e $B(t, x) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$. Além disso, cada elemento de $f(t, x)$ e $B(t, x)$ são assumidos contínuos, com derivadas contínuas e limitadas com respeito à x .

2.1.1 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento $\sigma(x(t)) = 0$ é um espaço fechado $(n - m)$ dimensional em $\mathfrak{R}^n$, determinado pela intersecção de superfícies de chaveamento $\sigma_i(x(t)) = 0$ de dimensão $m(n - 1)$. As superfícies de chaveamento são projetadas tal que o sistema, restrito à superfície $\sigma(x(t)) = 0$, tenha comportamento desejado.

Seja a superfície de deslizamento definida por

$$\{x(t) | \sigma(x(t)) = 0\}. \quad (2.2)$$

Cada entrada $u_i(t)$ do controle chaveado $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ tem a forma

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x), & \text{com } \sigma_i(x(t)) > 0 \\ u_i^-(t, x), & \text{com } \sigma_i(x(t)) < 0 \end{cases}, \quad i=1, \dots, m \quad (2.3)$$

onde $\{x(t) | \sigma_i(x(t)) = 0\}$ é a i -ésima superfície de deslizamento associada com a superfície de deslizamento (2.2) de dimensão $(n - m)$.

As superfícies de deslizamento são projetadas tais que a resposta do sistema restrito à $\{x(t) | \sigma(x(t)) = 0\}$ tenha o comportamento desejado.

Considera-se neste trabalho, a superfície de deslizamento da forma

$$\{x(t) | \sigma(x(t)) = Sx(t) = 0\}, \quad (2.4)$$

em que S é chamada matriz da superfície de deslizamento, sendo $S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$.

Por simplicidade, a notação utilizada para designar a superfície de deslizamento será

$$\sigma(x) = Sx(t) = 0. \quad (2.5)$$

2.1.2 Modos Deslizantes

Depois de projetada a superfície de deslizamento desejada, o próximo aspecto importante de CEV-MD é garantir a existência de um modo deslizante. Um modo deslizante existe se na vizinhança da superfície de deslizamento, $\sigma(x) = 0$, a tangente ou vetor velocidade da trajetória de estado sempre está direcionado para superfície de deslizamento. Conseqüentemente, se a trajetória do estado intercepta a superfície de deslizamento, o valor da trajetória de estado ou “ponto representativo” se mantém dentro de uma vizinhança ε de $\{x | \sigma(x) = 0\}$. Se o modo deslizante existe em $\sigma(x) = 0$, então $\sigma(x)$ é chamada superfície de deslizamento. Como visto na Figura 2.1, o modo deslizante não pode existir na i -ésima superfície deslizante $\sigma_i(x) = 0$ separadamente, mas somente na intersecção de todas as superfícies.

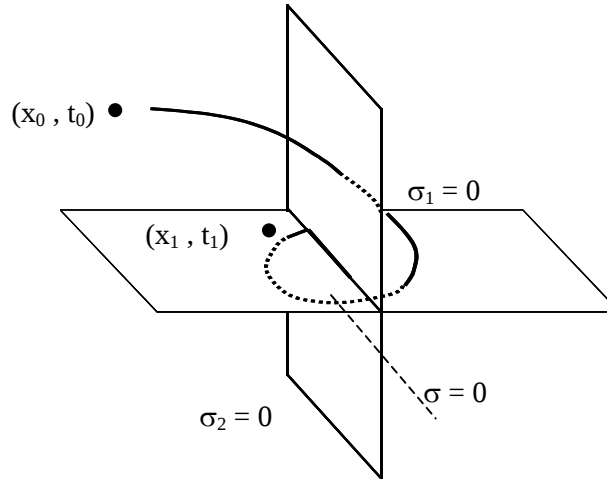


Figura 2.1 - A Superfície Deslizante é a intersecção das i -ésimas superfícies existentes.

Um modo deslizante ideal existe somente quando a trajetória de estado $x(t)$ da planta controlada satisfaz $\sigma[x(t)] = 0$ para todo $t \geq t_0$, para algum t_0 . Isto requer chaveamentos infinitamente rápidos. Em sistemas reais, todas as funções com controle chaveados tem imperfeições tais como retardamento, histereses, etc., que forçam os deslizamentos ocorrerem em uma frequência finita. A trajetória de estado então oscila em uma certa vizinhança da superfície de deslizamento. Esta oscilação é chamada trepidação. Portanto, o modo deslizante real não ocorre sobre as superfícies descontínuas, mas dentro de uma camada limite [9, 12].

2.1.3 Condições de Existência de um Modo Deslizante

A existência de um modo deslizante requer estabilidade da trajetória para a superfície de deslizamento $\sigma(x) = 0$, ou no mínimo para uma vizinhança desta, ou seja, os estados devem aproximar-se da superfície assintoticamente. A maior vizinhança é chamada de região de atração. Geometricamente, o vetor tangente ou derivada no tempo do vetor de estado, deverá apontar para a superfície de deslizamento, na região de atração.

O problema de existência assemelha-se a um problema de estabilidade generalizada. Então, o segundo método de Lyapunov fornece um conjunto natural para a análise. Assim, a estabilidade para a superfície de deslizamento requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada $V(t, x)$ que é definida positiva e tem uma derivada negativa em relação ao tempo, na região de atração [10].

Definição 1: Um domínio D no espaço fechado $\sigma = 0$ é um domínio de modo deslizante se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que qualquer movimento iniciado dentro de uma vizinhança δ de dimensão n de D pode deixar a vizinhança ε de dimensão n de D somente através da vizinhança ε de dimensão n da fronteira de D (Figura 2.2).

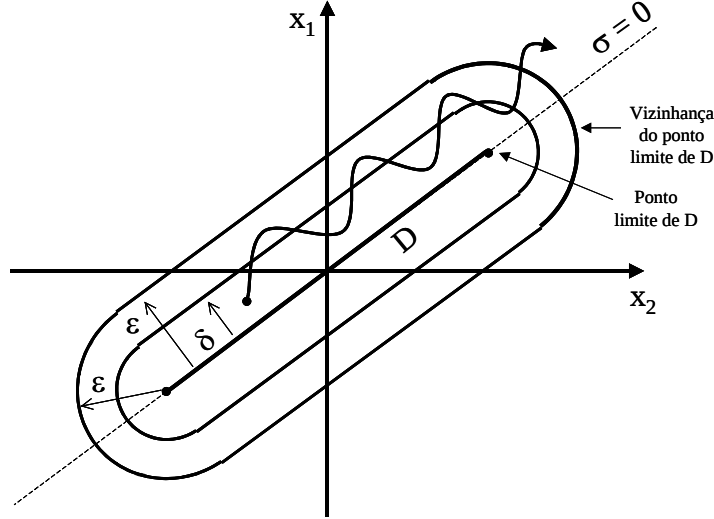


Figura 2.2 - Ilustração bidimensional do domínio do Modo Deslizante.

Teorema 2.1: Para o domínio D , de dimensão $(n - m)$ ser o domínio de um modo deslizante, é suficiente que, para $\Omega \supset D$, de dimensão n , exista uma função $V(t, x, \sigma)$ diferenciável com respeito a todos os seus argumentos, satisfazendo as seguintes condições [9]:

(a) $V(t, x, \sigma)$ é definida positiva em relação à σ , isto é, $V(t, x, \sigma) > 0$ com $\sigma \neq 0$ e t, x arbitrários, $V(t, x, 0) = 0$; e na esfera $\|\sigma\| = \rho$ para todo $x \in \Omega$ e algum t , tem-se:

$$\text{i) } \inf_{\|\sigma\| = \rho} V(t, x, \sigma) = h_\rho, \quad h_\rho > 0 \quad (2.6)$$

$$\text{ii) } \sup_{\|\sigma\| = \rho} V(t, x, \sigma) = H_\rho, \quad H_\rho > 0 \quad (2.7)$$

onde h_ρ e H_ρ dependem de ρ ($h_\rho \neq 0$ se $\rho \neq 0$).

(b) A derivada em relação ao tempo de $V(t, x, \sigma)$ para o sistema (2.1) tem um supremo negativo para todo $x \in \Omega$, exceto para x na superfície de deslizamento onde o controle na entrada não está definido, e por isso a derivada de $V(t, x, \sigma)$ não existe.

Nota 2.1: Um modo deslizante é globalmente alcançado se o domínio de atração é todo o espaço de estados. De outra forma o domínio de atração é um subconjunto do espaço de estado.

Considere o sistema de equação (2.1), com a notação

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) \quad (2.8)$$

e a seguinte estratégia geral de controle

$$u = \begin{cases} u^+(t, x) & \text{se } \sigma(x) > 0 \\ u^-(t, x) & \text{se } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

De acordo com [13], as trajetórias de estado do sistema (2.8), com controle (2.9), na condição de deslizamento, $\sigma(x(t)) = 0$, são as soluções da equação

$$\dot{x}(t) = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^- = f^0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

onde $f^+ = f(t, x, u^+)$, $f^- = f(t, x, u^-)$ e f^0 é o vetor velocidade, resultante da trajetória de estado em modo deslizante.

Resolvendo a equação $\langle d\sigma, f^0 \rangle = 0$ para α tem-se

$$\alpha = \frac{\langle d\sigma, f^- \rangle}{\langle d\sigma, (f^- - f^+) \rangle}.$$

Sendo:

$$(a) \langle d\sigma, (f^- - f^+) \rangle > 0, \text{ e}$$

$$(b) \langle d\sigma, f^+ \rangle \leq 0 \text{ e } \langle d\sigma, f^- \rangle \geq 0, \text{ em que a notação } \langle a, b \rangle, \text{ denota o produto interno entre } a \text{ e } b, \text{ também escrito como } a.b, \text{ e } d\sigma \text{ é o gradiente de } \sigma(x).$$

Assim, pode-se concluir que, a solução de (2.8) com controle (2.9) existe e é unicamente definida em $\sigma(x(t)) = 0$ [13]. Nota-se também que esta técnica pode ser usada para determinar o comportamento da planta no modo deslizante [10, 13].

O método de Filippov [13] apresentado resumidamente acima é uma técnica que torna possível a determinação do movimento de um sistema num modo deslizante. Uma outra técnica mais simples é o método do controle equivalente descrito a seguir.

2.2 O Método do Controle Equivalente

O método do controle equivalente [9, 10] é utilizado para determinar o movimento do sistema restrito à superfície de deslizamento $\sigma(x) = 0$. Suponha que em t_0 , a trajetória de estado da planta intercepta a superfície de deslizamento e um modo deslizante existe para $t \geq t_0$. A existência de um modo deslizante ideal implica que $\dot{\sigma}(x(t)) = 0$ e $\sigma(x(t)) = 0$, para todo $t \geq t_0$.

Diferenciando $\sigma(x) = 0$, em relação à t , tem-se

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = 0.$$

Substituindo $\dot{x}$ por (2.1), tem-se

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(t, x) + B(t, x)u_{eq}] = 0 \quad (2.10)$$

onde u_{eq} é chamado de controle equivalente e é solução da equação (2.10).

Para calcular u_{eq} , assume-se que o produto matricial $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x)$ é não singular para todo t e x . Então,

$$u_{eq} = - \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x). \quad (2.11)$$

Após a substituição deste u_{eq} em (2.1), a equação resultante descreve o comportamento do sistema restrito à superfície de deslizamento, desde que a condição inicial $x(t_0)$ satisfaça $\sigma(x(t_0)) = 0$.

Assim, dado $\sigma(x(t_0)) = 0$, a dinâmica do sistema sobre a superfície de deslizamento para $t \geq t_0$, é dada por

$$\dot{x} = \left[I - B(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(t, x). \quad (2.12)$$

Supondo que a superfície de deslizamento é linear e dada por $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$ então

$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = S$, e (2.12) reduz-se a

$$\dot{x} = \left[I - B(t, x) \left[SB(t, x) \right]^{-1} S \right] f(t, x). \quad (2.13)$$

Observe que (2.12), juntamente com a restrição $\sigma(x) = 0$ determina o movimento do sistema sobre a superfície de deslizamento. Então, o movimento do sistema (2.1), restrito à superfície de deslizamento, será governado por um conjunto de equações de ordem reduzida.

Algumas aplicações de controle requerem uma superfície de deslizamento variando no tempo: $\sigma(t, x) = 0$. Neste caso, $\dot{\sigma}(t, x) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \dot{x}$ e o controle equivalente toma a forma

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right]. \quad (2.14)$$

2.3 Redução de Ordem

Por simplicidade, será estudado o caso em que a superfície de chaveamento é linear, $\sigma(x) = Sx = 0$. Como mencionado anteriormente, em um modo deslizante, o sistema equivalente deve satisfazer não somente a dinâmica de estado de dimensão n , mas também as m equações algébricas, $\sigma(x) = 0$. Estas restrições reduzem a dinâmica do sistema de um modelo de n -ésima ordem para um modelo de ordem $(n - m)$.

Suponha que o sistema não-linear (2.1) é restrito à superfície de deslizamento (2.4), isto é, $\sigma(x) = Sx = 0$, com o sistema dinâmico dado por (2.13). Então, é possível resolver m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ variáveis de estado, se o posto de $[S] = m$.

O posto $[S] = m$, implica que $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x)$ é não singular para todo t e x .

Para obter a solução, resolve-se para as m variáveis de estado $(x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ em termos das $(n - m)$ variáveis de estado restantes. Substituindo estas relações nas $(n - m)$ equações de (2.13) e nas equações correspondendo a m variáveis de estado, o sistema

resultante de ordem $(n - m)$ descreve o sistema equivalente com condição inicial satisfazendo $\sigma(x) = 0$.

Exemplo 2.1: Para esclarecer o procedimento acima, considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A(t, x)x(t) + Bu(t), \text{ sendo que}$$

$$A(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11}(t, x) & a_{12}(t, x) & a_{13}(t, x) & a_{14}(t, x) & a_{15}(t, x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21}(t, x) & a_{22}(t, x) & a_{23}(t, x) & a_{24}(t, x) & a_{25}(t, x) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assume-se que a terceira e quinta linhas de $A(t, x)$ têm elementos não-lineares variantes no tempo e são limitados. O método de controle equivalente leva à seguinte dinâmica, conforme (2.13).

$$\dot{x}(t) = \left[I - B(SB)^{-1}S \right] A(t, x)x(t)$$

dados $\sigma(x(t_0)) = 0$ para qualquer t_0 .

Se os parâmetros da superfície de chaveamento linear são dados por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{bmatrix}$$

então

$$SB = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{15} \\ S_{23} & S_{25} \end{bmatrix}$$

Para simplificar o exemplo, escolhe-se $S_{13}S_{25} - S_{15}S_{23} = 1$. Especificamente, escolhe-se $S_{13} = 2$, $S_{15} = S_{23} = S_{25} = 1$. Assim,

$$(SB)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} S_{25} & -S_{15} \\ -S_{23} & S_{13} \end{bmatrix}}{S_{13}S_{25} - S_{15}S_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

O que leva à seguinte equação,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & 0 & S_{24} - S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & 0 & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} x(t)$$

sujeito a $\sigma(x) = 0$.

De $\sigma(x) = 0$ resulta que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Observa-se da equação, que a principal vantagem do controle com estrutura variável é a eliminação da influência dos parâmetros da planta quando o sistema está sobre a superfície de deslizamento.

Obs.: Isso é válido desde que os parâmetros estejam casados, ou seja, possam ser compensados pelas entradas do sistema.

Resolvendo a equação acima para x_3 e x_5 .

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

O sistema linear equivalente, invariante no tempo, e de ordem reduzida é dado por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & S_{24} - S_{14} \\ S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

sendo que $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\tilde{x}_3 = x_4$.

Um exemplo de como o projeto de controle pode ser realizado é o seguinte: suponha que uma limitação de projeto exige que o sistema equivalente tenha os seguintes pólos $\{-1, -2, -3\}$, resultando na equação característica desejada.

$$\pi_A(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

A equação característica do sistema equivalente é

$$\pi_A(\lambda) = \lambda^3 + (S_{12} - S_{22} + 2S_{24} - S_{14})\lambda^2 + (S_{12}S_{24} - S_{14}S_{22} + S_{11} - S_{21})\lambda + (S_{11}S_{24} - S_{14}S_{21})$$

Os coeficientes de potências semelhantes de λ produzem o conjunto de equações

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & S_{24} & -S_{22} & -1 & 0 & 0 \\ S_{24} & 0 & 0 & -S_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{14} \\ S_{21} \\ S_{22} \\ S_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Uma solução que realiza o objetivo do projeto de controle é:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1.833 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1.833 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluindo, o sistema equivalente de ordem reduzida com os autovalores desejados é $\tilde{\dot{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$, sendo que,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & -1.833 & -6 \end{bmatrix}$$

A facilidade na resolução deste exemplo se deve ao fato de que a dinâmica do sistema original foi dado na forma canônica de *Luenberger*. Os sistemas que não estão nesta forma freqüentemente exigem uma transformação para uma forma mais geral denominada *forma regular*.

2.4 Forma Regular

Suponha que a planta dinâmica (2.1) tenha a seguinte forma regular

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x) + B_2(t, x)u \end{cases} \quad (2.15)$$

onde $x_1 \in \mathfrak{R}^{n-m}$ e $x_2 \in \mathfrak{R}^m$. Assume-se que $B_2(t, x)$ seja uma função matricial, $m \times m$, não singular.

Assume-se uma superfície de deslizamento linear da forma

$$\sigma(x) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.16)$$

com $S_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)}$ e $S_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ não singular.

Então, no modo deslizante

$$x_2 = -S_2^{-1}S_1x_1 \quad (2.17)$$

e

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x) = f_1(t, x_1, -S_2^{-1}S_1x_1) \quad (2.18)$$

Observe que se f_1 tem uma estrutura linear do tipo $\dot{x}_1 = f_1(t, x) = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$ então a dinâmica de ordem reduzida fica,

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}S_2^{-1}S_1 \end{bmatrix} x_1 \quad (2.19)$$

que tem a estrutura de malha fechada “ $A_{11} + A_{12}F$ ” com $F = -S_2^{-1}S_1$. Se o par (A_{11}, A_{12}) é controlável, então é possível calcular F tal que $A_{11} + A_{12}F$ proporcione a característica dinâmica desejada. Tendo encontrado F , pode-se calcular $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}$ tal que $F = -S_2^{-1}S_1$. Assim, completa-se o projeto da superfície de deslizamento.

Para o caso de uma superfície de deslizamento não-linear da forma

$$\sigma(x) = \sigma_1(x_1) + S_2x_2 = 0 \quad (2.20)$$

que é linear em x_2 e não-linear em x_1 , a dinâmica de ordem reduzida do sistema (2.15) num modo deslizante terá a forma

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x) = f_1(t, x_1, -S_2^{-1}\sigma_1(x_1)). \quad (2.21)$$

Nota 2.2: Para transformar o sistema dinâmico (2.1) para a forma regular (2.15), considera-se o caso de uma superfície de deslizamento linear (2.16) e uma transformação invariante no tempo, linear e não singular $z = Tx$. Derivando z em relação a t , vem

$$\dot{z} = T\dot{x} = Tf(t, x) + TB(t, x)u. \quad (2.22)$$

Se

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

então, na nova coordenada, a dinâmica da planta (2.1) é:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \hat{f}_1(t, z) \\ \dot{z}_2 = \hat{f}_2(t, z) + \hat{B}_2(t, z)u \end{cases}. \quad (2.24)$$

Logo, num modo deslizante a dinâmica de ordem reduzida é, por (2.18), dada por

$$\dot{z}_1 = \hat{f}_1(t, z_1, -\hat{S}_2^{-1}\hat{S}_1 z_1) \quad (2.25)$$

onde $\begin{bmatrix} \hat{S}_1 & \hat{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} T^{-1}$.

Nota 2.3: Para transformar o sistema dinâmico (2.1) para a forma regular (2.15), considera-se o caso de uma superfície de deslizamento linear (2.16), e não existindo uma transformação linear tal que (2.23) seja satisfeita, então primeiro deve-se recorrer a uma transformação não-linear da forma

$$z = T(t, x) = \begin{bmatrix} T_1(t, x) \\ T_2(t, x) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde

(a) $T(\cdot, \cdot)$ é uma função diferenciável cuja inversa é também diferenciável,

(b) $T_1(\cdot, \cdot): \Re \times \Re^n \rightarrow \Re^{n-m}$ e

$$T_2(\cdot, \cdot): \Re \times \Re^n \rightarrow \Re^m.$$

Diferenciando z em (2.26) em relação a t , tem-se

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x}(t, x) \dot{x} + \frac{\partial T}{\partial t}(t, x). \quad (2.27)$$

Substituindo (2.1) em (2.27) vem

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x} B(t, x) u(t) + \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Se a transformação tem a propriedade

$$\frac{\partial T}{\partial x} B(t, x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} \end{bmatrix} B(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2(t, x) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

então nas novas coordenadas, as equações descrevendo o sistema (2.1) são:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial T_1}{\partial x} f(t, \tilde{T}(t, z)) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \triangleq \hat{f}_1(t, z) \\ \dot{z}_2 &= \frac{\partial T_2}{\partial x} f(t, \tilde{T}(t, z)) + \frac{\partial T_2}{\partial t} \tilde{T}(t, z) + \frac{\partial T_2}{\partial x} B(t, \tilde{T}(t, z)) u \triangleq \hat{f}_2(t, z) + \hat{B}_2(t, z) u \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.5 Projeto do Controlador

No projeto de controle, o objetivo é a obtenção de uma lei de controle tal que satisfaça as condições de existência e alcançabilidade ao modo deslizante. A suposição é que a superfície de deslizamento já tenha sido projetada.

Em geral, o controle é um vetor m -dimensional que tem a estrutura da forma

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(t, x), & \text{para } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x), & \text{para } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

onde $\sigma(x) = [\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)]^T = 0$.

Uma estrutura muito utilizada para o controle (2.31) é

$$u_i = u_{ieq} + u_{in} \quad (2.32)$$

onde u_{ieq} é a i -ésima componente do controle equivalente (que é contínuo) e onde u_{in} é a parte descontínua ou parte chaveada.

Para o sistema (2.1), com um controlador tendo a estrutura (2.32), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x) &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left[f(t, x) + B(t, x)(u_{eq} + u_n) \right] \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left[f(t, x) + B(t, x)u_{eq} \right] + \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x)u_n \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x)u_n\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assume-se que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) = I$, sendo I a matriz identidade.

Então $\sigma(x) = u_n$. Esta condição permite uma fácil verificação das condições suficientes para a existência e alcançabilidade de um modo deslizante, isto é, condições que satisfazem a condição de Lyapunov $\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0$ quando $\sigma_i(x) \neq 0$. A seguir, relacionam-se algumas possibilidades de estruturas com controle descontínuo u_n .

(a) Função sinal com ganhos constantes:

$$u_{in}(x) = \begin{cases} \alpha_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)), & \sigma_i(x) \neq 0, \quad \alpha_i < 0 \\ 0 & \sigma_i(x) = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

Observe que este controle satisfará as condições suficientes para a existência de um modo deslizante, pois

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \alpha_i \sigma_i(x) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)) < 0, \quad \text{se } \sigma_i(x) \neq 0.$$

(b) Função sinal com ganhos dependentes do estado:

$$u_{in}(x) = \begin{cases} \alpha_i(x) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)), & \sigma_i(x) \neq 0, \quad \alpha_i(\cdot) < 0 \\ 0 & \sigma_i(x) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Logo,

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \alpha_i(x) \sigma_i(x) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)) < 0, \quad \text{se } \sigma_i(x) \neq 0.$$

(c) Malha fechada com ganhos chaveados:

$$u_{in}(x) = \psi x; \quad \psi = [\psi_{ij}], \quad \psi_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \sigma_i x_j > 0 \\ \beta_{ij}, & \sigma_i x_j < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

com $\alpha_{ij} < 0$ e $\beta_{ij} > 0$.

Logo,

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \sigma_i (\psi_{i1} x_1 + \psi_{i2} x_2 + \dots + \psi_{in} x_n) < 0.$$

(d) Malha fechada linear e contínua

$$u_{in}(x) = \alpha_i \sigma_i(x) \quad e \quad \alpha_i < 0. \quad (2.36)$$

A condição para a existência de um modo deslizante é

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \alpha_i \sigma_i^2(x) < 0$$

ou de forma mais geral

$$u_n(x) = -L\sigma(x)$$

onde $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz constante definida positiva. A condição para a existência de um modo deslizante é facilmente vista

$$\sigma^T(x) \dot{\sigma}(x) = -\sigma^T(x) L \sigma(x) < 0, \quad \text{se } \sigma(x) \neq 0.$$

(e) Vetor unitário não-linear com fator de escala

$$u_n(x) = \frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\| + \delta} \rho, \quad \rho < 0 \quad e \quad \delta \geq 0. \quad (2.37)$$

A condição de existência é

$$\sigma^T(x) \dot{\sigma}(x) = \|\sigma(x)\| \rho < 0 \quad \text{se } \sigma(x) \neq 0.$$

2.6 Sistemas Incertos e CEV-MD

Aqui a proposta é a apresentação da teoria de Controle com Estrutura Variável (CEV) para sistemas incertos e uma discussão sobre trepidação. Uma boa parte da literatura tem

surgido nos anos recentes interessada na determinação da estabilidade de sistemas tendo parâmetros incertos dentro de limites conhecidos. Tais estratégias de controle são baseadas no segundo método de Lyapunov. A motivação para pesquisar sistemas incertos está no fato de que a representação matemática de sistemas reais na maioria das vezes não é fiel. Assim, pode-se ter não só incertezas paramétricas como também incertezas na própria modelagem do sistema real.

Seja o seguinte sistema incerto

$$\dot{x}(t) = \left[f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t), r(t)) \right] + \left[B(t, x(t)) + \Delta B(t, x(t), r(t)) \right] u(t) \quad (2.38)$$

onde $\Delta f(t, x(t), r(t))$, $\Delta B(t, x(t), r(t))$ e $r(t)$ são funções de parâmetros incertos cujos valores pertencem a algum conjunto fechado e limitado.

Nota 2.4: Um sistema é chamado robusto se a propriedade de interesse do sistema permanece em uma região limitada em face de uma classe de perturbações limitada [9].

Definição 2.1: As parcelas de incertezas Δf e ΔB que encontram-se na imagem de $B(t, x)$ para todos valores de t e x são chamadas incertezas casadas [14].

Considerando que todas as incertezas são do tipo casadas, é possível representá-las em um único vetor $e(t, x(t), r(t), u(t))$. Então o sistema (2.38) pode ser representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u + B(t, x)e(t, x, r, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Considere a seguinte estrutura de controle para o sistema (2.39)

$$u = u_{eq} + u_n \quad (2.40)$$

onde u_{eq} é o controle equivalente assumindo todas incertezas $e(t, x, r, u)$ nulas e u_n é parte não-linear do controle projetado sem desconsiderar as incertezas. Considerando $\sigma(t, x) = 0$, tem-se

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f \right] \quad (2.41)$$

assumindo que $\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) B \right]$ é não singular e que $e(t, x, r, u) = 0$. Agora, é necessário considerar as incertezas na planta e desenvolver uma expressão para u_n . Para isto, assume-se que

$$\|e(t, x, r, u)\|_2 \leq \rho(t, x) \quad (2.42)$$

onde $\rho(t, x)$ é uma função escalar com valores não negativos. Também, introduz-se a função com valores escalares

$$\hat{\rho}(t, x) = \alpha + \rho(t, x) \quad (2.43)$$

onde $\alpha > 0$.

Antes de especificar a estrutura do controle, escolhe-se a função de Lyapunov generalizada,

$$V(t, x) = \frac{1}{2} \sigma^T(t, x) \sigma(t, x). \quad (2.44)$$

Para assegurar a existência de um modo deslizante e atratividade para a superfície, é suficiente escolher um controle com estrutura variável tal que

$$\frac{dV}{dt}(t, x) \triangleq \dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} < 0 \quad (2.45)$$

enquanto $\sigma(t, x) \neq 0$, onde

$$\dot{\sigma}(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x}. \quad (2.46)$$

Utilizando a lei de controle

$$u(t, x) = u_{eq} + u_n = u_{eq} - \frac{B^T(t, x) \nabla_x(V(t, x))}{\|B^T(t, x) \nabla_x(V(t, x))\|_2} \hat{\rho}(t, x) \quad (2.47)$$

quando $\sigma(t, x) \neq 0$, com

$$\nabla_x(V(t, x)) = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \sigma(t, x). \quad (2.48)$$

Sendo $\nabla_x(V(t, x))$ o gradiente da função de Lyapunov (2.44) generalizada, é garantida a atratividade para a superfície de deslizamento.

De fato, diferenciando a equação (2.44) em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{V} = \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f + Bu + Be). \quad (2.49)$$

Substituindo (2.47) em (2.49), vem

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \\ &\quad \left\| B^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \sigma \right\|_2 \rho + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} Be \leq -\alpha \left\| B^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \sigma \right\| < 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.7 Trepidação

Os controladores de estrutura variável desenvolvidos garantem o comportamento desejado do sistema em malha fechada. Estes controladores, porém, exigem um mecanismo de chaveamento infinitamente rápido (no caso ideal) o que não é possível no caso real. Devido ao chaveamento finito, a trajetória do sistema sobre a superfície de deslizamento oscila, produzindo um fenômeno denominado trepidação (*chattering*). As componentes de alta frequência da trepidação são indesejáveis, pois podem excitar dinâmicas de alta frequência não modeladas da planta, resultando em instabilidades não previsíveis.

Uma solução para esse problema consiste em introduzir no controlador uma camada limite, ou seja, permitir que a trajetória do sistema permaneça sobre uma região ao redor da superfície de deslizamento e não restritamente sobre essa superfície.

Define-se o conjunto

$$\{x \mid \|\sigma\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0\}$$

com a chamada Camada Limite de espessura 2ε . Considere a lei de controle:

$$u = \begin{cases} u_{eq} - \frac{B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \sigma(t, x)}{\left\| B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \sigma(t, x) \right\|_2} \hat{\rho}, & \text{se } \|\sigma\| \geq \varepsilon \\ u_{eq} + p, & \text{se } \|\sigma\| < \varepsilon \end{cases}$$

onde u_{eq} é dado por,

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f \right]$$

e sendo $p = p(t, x)$ qualquer função contínua tal que

$$p(t, x) = - \frac{B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \sigma(t, x)}{\left\| B^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \right\|_2} \hat{\rho}$$

toda vez que $\|\sigma\| = \varepsilon$ e $\|p\| \leq \hat{\rho}$. Este controle garante atratividade para a camada limite e no interior da camada limite, oferece uma aproximação contínua para a ação de controle descontínuo de

$$u(t, x) = u_{eq} + u_n = u_{eq} - \frac{B^T(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \sigma(t, x)}{\left\| B^T(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \right\|} \hat{\rho}(t, x)$$

Uma outra lei de controle com camada limite é dada por [15]

$$u(t, x) = u_{eq} + u_N = u_{eq} - \hat{\rho}(t, x) \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \varepsilon}$$

Exemplo 2.2: Para ilustrar o efeito da camada limite sobre a lei de CEV, é mostrado o comportamento de um sistema de segunda ordem utilizando uma lei de controle sem camada limite e uma lei de controle utilizando a camada limite. A planta utilizada tem a seguinte equação,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

cujo comportamento desejado está sobre a seguinte superfície de deslizamento

$$\sigma(x) = x_1 + x_2 = 0$$

e cuja a lei de controle é

$$u(t, x) = u_{eq} + u_N$$

sendo que $u_{eq} = -x_2$,

o controle descontínuo é $u_N = -\frac{\sigma}{|\sigma|}$ ou $u_N = -\frac{\sigma}{|\sigma| + 0.05}$.

Para este sistema temos o seguinte diagrama de blocos, conforme mostra a Figura 2.3.

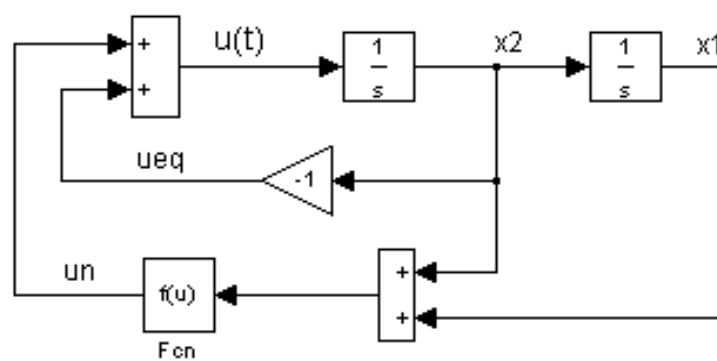


Figura 2.3 - Diagrama de blocos do Sistema.

Este sistema foi simulado no Matlab/Simulink, e os resultados alcançados são mostrados nas figuras a seguir.

A Figura 2.4 mostra como atua a lei de controle variando o valor da superfície, onde se nota que o controle, sem camada limite, atua abruptamente quando a superfície muda de sinal, enquanto que no caso em que se aplica lei com camada limite o controle atua suavemente na mudança de sinal da superfície.

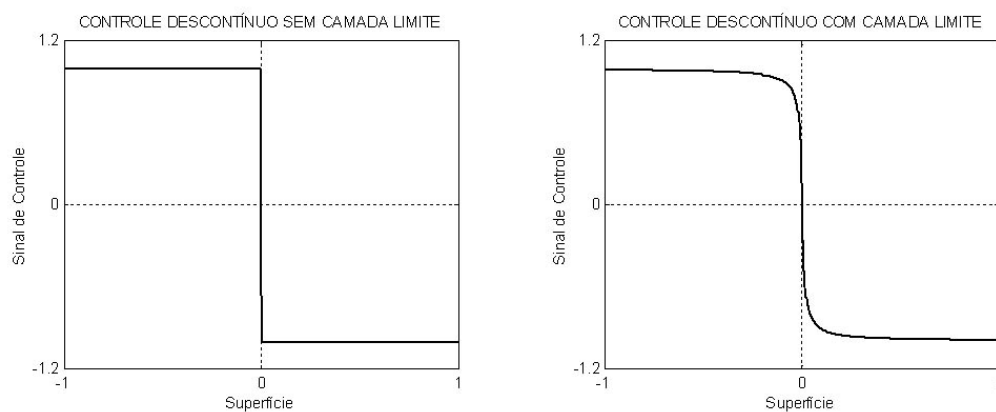


Figura 2.4 - Controle descontínuo sem Camada Limite e com Camada Limite.

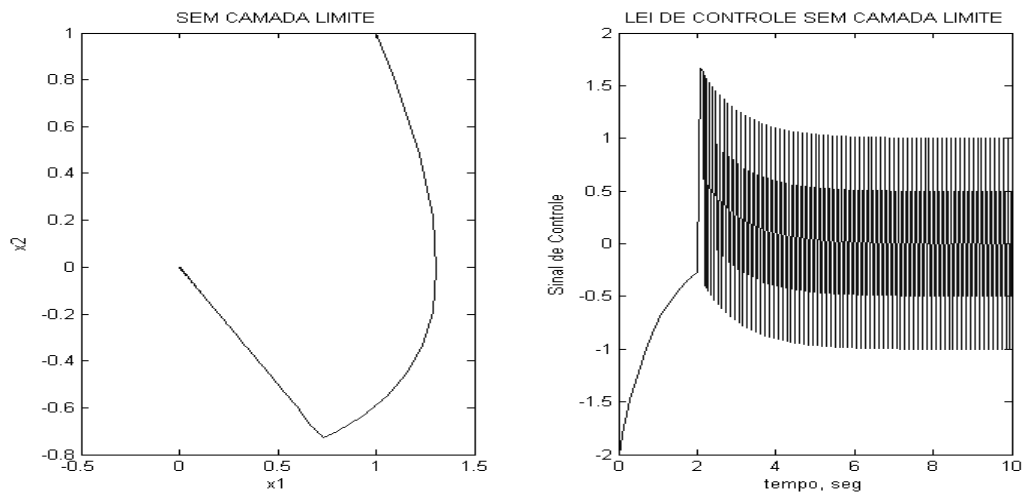


Figura 2.5 - Trajetória dos estados e lei de controle sem usar Camada Limite.

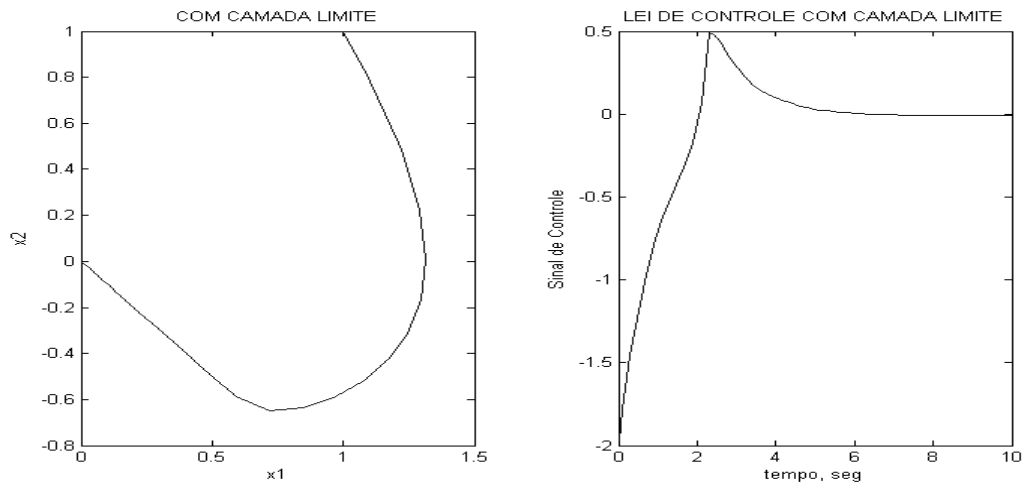


Figura 2.6 - Trajetória dos estados e lei de controle usando Camada Limite.

Comparando as Figuras 2.5 e 2.6 observa-se que o controle u com a camada limite do sistema pode ser considerado como o valor médio do controle u sem a camada limite. Uma outra observação é que o sistema atinge a superfície de deslizamento de forma suave quando usado um controle com camada limite. Porém é importante ressaltar que a trajetória do sistema estará restrita a uma região ao redor da superfície de deslizamento.

2.8 Comentários

Neste capítulo foram apresentados alguns aspectos que envolvem os Sistemas Incertos com Controle de Estrutura Variável e Modos Deslizantes.

O enfoque dado pressupõe o acesso a todos os estados, uma vez que a superfície de deslizamento é definida como função dos mesmos.

Um detalhe importante deve ser observado neste capítulo. Quando a estrutura de controle (2.32) é utilizada, juntamente com a estrutura (2.37), o controlador não mais apresenta a propriedade de seleção de sinais de controle, caracterizando um projeto baseado em camada limite ($\delta > 0$), como visto no Exemplo 2.2. Assim, a denominação correta para este caso é apenas *Controlador de Modos Deslizantes*, perdendo a característica de estrutura variável. Esta propriedade, de sinal de controle único e suave, é levada em consideração no projeto dos novos controladores de modos deslizantes discretos.

Toda a teoria apresentada está voltada para sistemas contínuos no tempo, ou seja, sistemas analógicos. Porém, como mencionado anteriormente, a implementação de controle de modos deslizantes contínuos em computadores digitais sofre uma deterioração de performance. Desse modo, um controlador projetado com técnicas de controle digital se faz necessário.

CAPÍTULO 3

3. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES

A implementação de controle de modos deslizantes contínuos em computadores digitais encontra uma gama considerável de problemas, mencionados no Capítulo 1. Portanto, o projeto com base em ferramentas matemáticas de controle digital se faz necessário, para evitar transtornos inerentes das técnicas de emulação¹.

Quando ambientamos nosso controlador no meio digital (discreto), estamos levando em consideração no projeto os conversores analógico/digital (A/D) e digital/analógico (D/A), bem como o período de amostragem.

Portanto, a planta contínua a ser controlada também deve ter sua dinâmica representada na forma discreta.

3.1 Modelo Discreto no Espaço de Estados

Considere o modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) no espaço de estados contínuo, representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados disponíveis, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de saída e $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ são matrizes constantes.

Uma solução para o sistema (3.1) é dada por [16]

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d(\tau).\tag{3.2}$$

¹ O termo Emulação é usado quando algoritmos contínuos de controle são empregados em dispositivos digitais, tornando imprescindível a utilização de pequenos períodos de amostragem, para fazer com que o sinal discreto se aproxime o máximo possível de um sinal contínuo. Isto implica o uso de altas frequências de processamento e, portanto, exige mais capacidade de processamento do *hardware* responsável pela ação de controle.

sendo t_0 o tempo inicial, $x(t_0)$ as condições iniciais dos estados e $x(t)$ os estados do sistema.

A obtenção de (3.2) é reproduzida no Apêndice A. Esta solução será usada sobre um período de amostragem para obtermos a equação diferença: conseqüentemente é necessário mudar a notação (adote $t = k\Delta + \Delta$ e $t_0 = k\Delta$, onde Δ é o período de amostragem). Assim, surge uma versão particular de (3.2):

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{k\Delta + \Delta} e^{A(k\Delta + \Delta - \tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

Este resultado é independente do tipo de *bloqueio* porque u é especificado em termos de tempo contínuo, $u(t)$, sobre o intervalo de amostragem. Uma suposição comum e tipicamente válida, para um *bloqueador de ordem zero* (ZOH) sem atraso, é que

$$u(\tau) = u(k\Delta), \quad k\Delta \leq \tau < k\Delta + \Delta. \quad (3.4)$$

Para facilitar a solução de (3.3) para um ZOH sem atraso, mudam-se as variáveis na integral de τ para η , tal que

$$\eta = k\Delta + \Delta - \tau. \quad (3.5)$$

Então

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_0^\Delta e^{A\eta}d\eta Bu(k\Delta). \quad (3.6)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{A\Delta} \\ \Gamma &= \int_0^\Delta e^{A\eta}d\eta B, \end{aligned} \quad (3.7)$$

então (3.6) e (3.1) são reduzidas para as equações na forma

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $y_k \in \mathfrak{R}^p$ são os sinais amostrados e $u_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle discreto no tempo. As matrizes constantes são $\Phi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$. Note que $x_k = x(k\Delta)$, $y_k = y(k\Delta)$, $u_k = u(k\Delta)$. Esta nova notação é adotada por questão de simplicidade.

A matriz Φ pode ser calculada pela expansão em séries

$$\Phi = e^{A\Delta} = I + A\Delta + \frac{A^2\Delta^2}{2!} + \frac{A^3\Delta^3}{3!} + \dots$$

sendo I a matriz identidade. Assim, Φ também pode ser escrita como

$$\Phi = I + A\Delta\Psi, \quad (3.9)$$

onde

$$\Psi = I + \frac{A\Delta}{2!} + \frac{A^2\Delta^2}{3!} + \dots \quad (3.10)$$

A integral Γ em (3.7) pode ser validada termo a termo, resultando em

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \Delta^{k+1}}{(k+1)!} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \Delta^k}{(k+1)!} \Delta B$$

$$\Gamma = \Psi \Delta B. \quad (3.11)$$

Pode-se calcular Φ por (3.9) e Γ por (3.11) de maneira mais fácil, e assim representar uma planta contínua no meio discreto.

3.2 Controlador Discreto com Modos Deslizantes (CDMD)

Considere o sistema discreto representado por (3.8). A lei de controle (2.32) é realizada por um computador digital. O controle é dado a cada instante de amostragem $k\Delta$. Em controle digital, a i -ésima entrada de controle $u_i(t)$ tem um valor constante entre as amostragens [11]

$$u_i(t) = u_{ik} = u_{ik}^{eq} + u_{ik}^{\pm}, \quad k\Delta \leq t < (k+1)\Delta \quad (3.12)$$

onde u_{ik}^{eq} é a i -ésima componente do vetor de controle equivalente discreto e $u_{ik}^{\pm}$ é a i -ésima componente do vetor de controle que mantém o sistema na superfície deslizante. A técnica proposta aqui é aplicável a sistemas multivariáveis. Assim, o índice $i = 1, 2, \dots, m$, onde m caracteriza o número máximo de entradas de controle no sistema.

3.2.1 Projeto da Superfície Deslizante

A superfície deslizante discreta S_k é definida como

$$S_k = Gx_k \quad (3.13)$$

onde a matriz $G \in \Re^{m \times n}$, composta pelos ganhos da superfície deslizante, é projetada tal que o sistema, mantido sobre S_k para todo k , seja assintoticamente estável.

Uma lei de controle equivalente para o sistema (3.8), para todo k , é obtida de $S_{k+1} = S_k$. Assim

$$\begin{aligned} u_k^{eq} &= F_{eq} x_k \\ F_{eq} &= -(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Conseqüentemente, dada uma superfície deslizante linear $S_k = Gx_k = 0$, as dinâmicas do sistema em modo deslizante são

$$x_{k+1} = \left[\Phi - \Gamma (G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I) \right] x_k. \quad (3.15)$$

3.2.2 Projeto da Lei de Controle

Agora, a lei de controle $u_k^\pm$, responsável por conduzir os estados do sistema para o modo deslizante, é projetada.

Suponha a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k. \quad (3.16)$$

Para garantir a condição de existência da superfície deslizante discreta,

$$V_{k+1} < V_k, \quad \text{para} \quad \|S_k\| \neq 0. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.16) em (3.17), a condição de existência para a superfície deslizante será

$$\frac{1}{2} S_{k+1}^T S_{k+1} < \frac{1}{2} S_k^T S_k, \quad \|S_k\| \neq 0. \quad (3.18)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = Gx_{k+1} - Gx_k \\ \Delta S_{k+1} &= G(\Phi x_k + \Gamma u_k) - Gx_k \end{aligned} \quad (3.19)$$

e substituindo (3.12) e (3.14) em (3.19), tem-se

$$\Delta S_{k+1} = G\Gamma u_k^\pm. \quad (3.20)$$

Inserindo a relação $S_{k+1} = S_k + \Delta S_{k+1}$ em (3.18), obtém-se

$$\frac{1}{2}(S_k + \Delta S_{k+1})^T (S_k + \Delta S_{k+1}) < \frac{1}{2}S_k^T S_k, \quad \|S_k\| \neq 0 \quad (3.21)$$

$$2\Delta S_{k+1}^T S_k < -\Delta S_{k+1}^T \Delta S_{k+1}, \quad \|S_k\| \neq 0, \quad \|\Delta S_{k+1}\| \neq 0. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.20) em (3.22) resulta em

$$(G\Gamma u_k^\pm)^T S_k < -\frac{1}{2}(G\Gamma u_k^\pm)^T G\Gamma u_k^\pm, \quad \|S_k\| \neq 0. \quad (3.23)$$

Admita que $G\Gamma = I$ (por uma questão de simplicidade). Então, a condição de existência para a superfície deslizante discreta é

$$(u_k^\pm)^T S_k < -\frac{1}{2}(u_k^\pm)^T (u_k^\pm), \quad \|S_k\| \neq 0. \quad (3.24)$$

Uma lei discreta $u_k^\pm$ que satisfaz a condição de existência (3.24) é dada por

$$u_k^\pm = -S_k. \quad (3.25)$$

Dessa forma, a lei de controle discreta apresenta a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{eq} + u_k^\pm \\ u_k &= -\left[(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)x_k + S_k \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

com $S_k = Gx_k$.

3.2.3 Análise da Robustez da Atratividade

A lei de controle discreta proposta em (3.26), além de uma rápida computação, apresenta robustez para uma classe de incertezas, como mostrado a seguir.

Considere o sistema discreto incerto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k + \Delta f(x_k) \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $\Delta f(x_k) \in \mathfrak{R}^n$ é a função discreta que representa as incertezas da planta.

Para a análise da robustez da atratividade, o seguinte teorema foi proposto [8]:

Teorema 3.1:

Se $\|Gx_k\| > \|G\Delta f(x_k)\|$ para todo k , então o sistema (3.27), com lei de controle discreta (3.26), apresenta uma condição de atratividade para a superfície deslizante.

Prova:

Considerando as incertezas, tem-se:

$$\Delta S_{k+1} = S_{k+1} - S_k = Gx_{k+1} - Gx_k$$

$$\Delta S_{k+1} = G(\Phi x_k + \Gamma u_k + \Delta f(x_k)) - Gx_k. \quad (3.28)$$

e, substituindo (3.12) e (3.14) em (3.28),

$$\Delta S_{k+1} = G\Gamma u_k^\pm + G\Delta f(x_k). \quad (3.29)$$

Para a candidata a função de Lyapunov $V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k$, segue-se que

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} S_{k+1}^T S_{k+1} \quad (3.30)$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (S_k + \Delta S_{k+1})^T (S_k + \Delta S_{k+1}). \quad (3.31)$$

Substituindo (3.29) em (3.31) resulta em

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (S_k + G\Gamma u_k^\pm + G\Delta f(x_k))^T (S_k + G\Gamma u_k^\pm + G\Delta f(x_k)). \quad (3.32)$$

Considerando que $u_k^\pm = -S_k$, $G\Gamma = I$ e substituindo em (3.32)

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (S_k - S_k + G\Delta f(x_k))^T (S_k - S_k + G\Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (G\Delta f(x_k))^T (G\Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} \|G\Delta f(x_k)\|^2. \quad (3.33)$$

Sabe-se também que

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k = \frac{1}{2} (Gx_k)^T (Gx_k)$$

$$V_k = \frac{1}{2} \|Gx_k\|^2. \quad (3.34)$$

Se $\|Gx_k\| > \|G\Delta f(x_k)\|$, então de (3.33) e (3.34), tem-se que

$$V_k > V_{k+1} \quad (3.35)$$

e a condição de atratividade é satisfeita.

3.3 Comentários

Este capítulo apresentou o projeto de um Controlador Discreto com Modos Deslizantes (CDMD), levando em consideração os conversores (A/D) e (D/A), bem como o período de amostragem. É interessante observar a simplicidade na realização desta lei e a garantia de que sua computação, através de um dispositivo digital, é bastante rápida. Como o controlador em questão é apenas de modos deslizantes, sua lei de controle é suave, pois não há chaveamento. Esta propriedade também contribui para evitar os efeitos degenerativos da trepidação, presente em controladores de estrutura variável, que efetuam uma seleção de sinais de controle.

Porém, a lei de controle proposta neste capítulo não considera os efeitos do atraso na computação. Assim, na presença de tal problema, sua performance sofrerá deterioração, como será mostrado no Capítulo 8, através dos resultados das simulações.

O projeto de um CDMD, que considere o atraso no tempo de computação, se faz necessário, para garantir a estabilidade e performance em face deste problema, inerente em controle digital.

CAPÍTULO 4

4. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES CONSIDERANDO O ATRASO NO TEMPO DE COMPUTAÇÃO

O uso de dispositivos digitais programáveis para realizar o controle robusto pode causar um atraso considerável no sinal de controle, devido ao tempo de processamento.

Conseqüentemente, quando um algoritmo é implementado por um computador digital, existe um atraso h , causado principalmente pelo tempo de execução das instruções que geram o sinal de controle, após o instante de amostragem. Neste trabalho é assumido que este atraso é conhecido, constante e menor que um período de amostragem Δ ($0 < h < \Delta$).

Este capítulo apresenta o projeto de um novo controlador com modos deslizantes que, além de considerar os conversores A/D - D/A e o período de amostragem, também considera o atraso no tempo de computação. Este fator é decisivo, pois contribui de maneira significativa para a melhoria da performance de controle.

Contudo, a planta contínua a ser controlada deve ter sua dinâmica representada na forma discreta, mas agora através de um modelo que também considera o atraso computacional.

4.1 Modelo Discreto no Espaço de Estados considerando o Atraso Computacional

Considere o modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) no espaço de estados contínuo, com um atraso λ na ação de controle, representado por [16]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \lambda) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados disponíveis, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são matrizes constantes.

A solução geral para (4.1) é dada por (3.2). Assim

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau-\lambda)d\tau. \quad (4.2)$$

sendo t_0 o tempo inicial, $x(t_0)$ as condições iniciais dos estados e $x(t)$ os estados do sistema.

Definindo $t_0 = k\Delta$ e $t = k\Delta + \Delta$, então

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{k\Delta+\Delta} e^{A(k\Delta+\Delta-\tau)}Bu(\tau-\lambda)d\tau. \quad (4.3)$$

Substituindo-se $k\Delta + \Delta - \tau$ por η ($\eta = k\Delta + \Delta - \tau$) e τ por $k\Delta + \Delta - \eta$ na integral, encontra-se uma modificação de (3.6) em função de η ,

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_{\Delta}^0 e^{A\eta}Bu(k\Delta + \Delta - \lambda - \eta)(-d\eta)$$

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_0^{\Delta} e^{A\eta}Bu(k\Delta + \Delta - \lambda - \eta)d\eta. \quad (4.4)$$

O atraso λ é uma fração do período de amostragem, complementar ao atraso computacional, que pode ser obtido da relação

$$\lambda = \Delta - h, \quad (4.5)$$

onde h é o atraso no tempo de computação.

Esta relação pode ser verificada na Figura 4.1 e Figura 4.2.

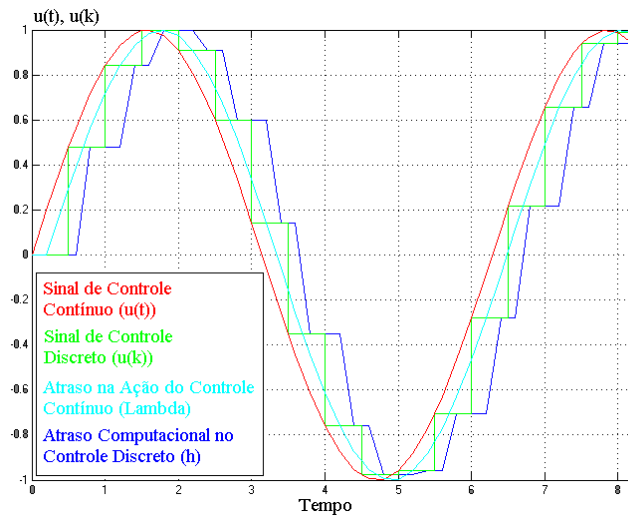


Figura 4.1 - Exemplo de representação gráfica do Sinal de Controle Contínuo ($u(t)$), Sinal de Controle Discreto ($u(k)$), Atraso na Ação do Controle Contínuo (λ) e Atraso Computacional no Controle Discreto (h).

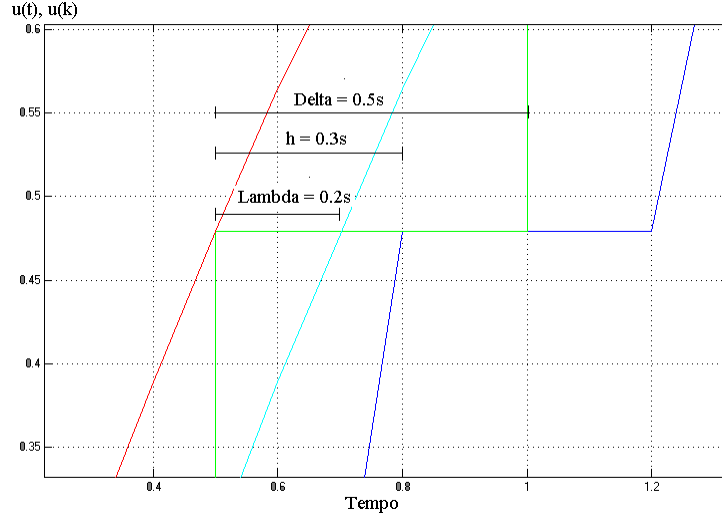


Figura 4.2 - Os atrasos h e λ são complementares ao período de amostragem Δ .

Com esta substituição, o sistema discreto pode ser escrito como

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_0^\Delta e^{A\eta}Bu(k\Delta + h - \eta)d\eta. \quad (4.6)$$

A integral de (4.6) vai de 0 até Δ . Assim, é possível dividi-la em duas partes, obtendo

$$x(k\Delta + \Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_0^h e^{A\eta}Bd\eta u(k\Delta) + \int_h^\Delta e^{A\eta}Bd\eta u(k\Delta - \Delta)$$

$$x(k\Delta + \Delta) = \Phi x(k\Delta) + \Gamma_1 u(k\Delta - \Delta) + \Gamma_2 u(k\Delta). \quad (4.7)$$

Em (4.7) define-se

$$\Phi = e^{A\Delta}, \quad \Gamma_1 = \int_h^\Delta e^{A\eta}Bd\eta \quad e \quad \Gamma_2 = \int_0^h e^{A\eta}Bd\eta. \quad (4.8)$$

Dessa forma, o modelo discreto que considera o atraso computacional é dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $y_k \in \mathfrak{R}^p$ são os sinais amostrados e $u_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle discreto no tempo. As matrizes constantes são $\Phi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, Γ_1 e $\Gamma_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$. Note que $x_k = x(k\Delta)$, $y_k = y(k\Delta)$, $u_k = u(k\Delta)$. Esta nova notação é adotada por questão de simplicidade.

Neste modelo, a controlabilidade e a observabilidade são preservadas, mesmo na presença do atraso no tempo de computação. A matriz de entrada Γ satisfaz a relação $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

As matriz Φ , do sistema discreto, é calculada da mesma forma que em (3.9). As parcelas da matriz de entrada, Γ_1 e Γ_2 , podem ser calculadas de maneira mais simples, através das seguintes relações matriciais

$$\Gamma_1 = (\Delta - h)\Phi_h\Psi_{\Delta-h}B \quad (4.10)$$

$$\Gamma_2 = h\Psi_h B. \quad (4.11)$$

onde Φ_h é a matriz do sistema discreto calculada da forma apresentada em (3.9), mas substituindo-se o valor de Δ por h , $\Psi_{\Delta-h}$ é a matriz de transformação cujo cálculo foi apresentado em (3.10), porém substituindo o valor de Δ por $\Delta - h$ e Ψ_h obtida de forma similar, com a substituição do valor de Δ por h .

4.2 Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso no Tempo de Computação (CDMD- h)

Considere o sistema discreto representado por (4.9). A lei de controle (2.32) é realizada por um computador digital. O controle é dado a cada instante de amostragem $k\Delta$ com um atraso de computação h , constante e menor que Δ . Em controle digital, a i -ésima entrada de controle $u_i(t)$ tem um valor constante entre as amostragens [8, 23]

$$u_i(t) = u_{ik} = u_{ik}^{eq} + u_{ik}^{\pm}, \quad k\Delta + h \leq t < (k+1)\Delta + h \quad (4.12)$$

onde u_{ik}^{eq} é a i -ésima componente do vetor de controle equivalente discreto e $u_{ik}^{\pm}$ é a i -ésima componente do vetor de controle que mantém o sistema na superfície deslizante. A técnica proposta aqui é aplicável a sistemas multivariáveis. Assim, o índice $i = 1, 2, \dots, m$, onde m caracteriza o número máximo de entradas de controle no sistema.

4.2.1 Projeto da Superfície Deslizante

A superfície deslizante discreta S_k é definida como

$$S_k = Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1} \quad (4.13)$$

onde a matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, composta pelos ganhos da superfície deslizante, é projetada tal que o sistema, mantido sobre S_k para todo k , seja assintoticamente estável. Observe que esta nova superfície depende da componente atrasada do sinal de controle, e este sinal é acessível. A escolha desta superfície é o que compensa o atraso na computação do sinal de controle, sendo uma das contribuições deste trabalho.

Uma lei de controle equivalente para o sistema (4.9), para todo k , é obtida de $S_{k+1} = S_k$. Então

$$\begin{aligned} Gx_{k+1} + G\Gamma_1 u_k^{eq} &= Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}^{eq} \\ G(\Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1}^{eq} + \Gamma_2 u_k^{eq}) + G\Gamma_1 u_k^{eq} &= Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}^{eq} \\ G\Phi x_k + G\Gamma_1 u_k^{eq} + G\Gamma_2 u_k^{eq} &= Gx_k \end{aligned}$$

Considerando que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, o resultado é

$$\begin{aligned} u_k^{eq} &= F_{eq} x_k \\ F_{eq} &= -(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como (3.14) é igual a (4.14), o controle equivalente é o mesmo para os dois controladores.

4.2.2 Projeto da Lei de Controle

Agora, a lei de controle $u_k^\pm$, responsável por conduzir os estados do sistema para o modo deslizante, será projetada levando em consideração o atraso computacional. Considerando (3.16) à (3.18) e (4.14), tem-se

$$\Delta S_{k+1} = S_{k+1} - S_k = Gx_{k+1} + G\Gamma_1 u_k - Gx_k - G\Gamma_1 u_{k-1} \quad (4.15)$$

que também resulta em

$$\Delta S_{k+1} = G\Gamma u_k^\pm. \quad (4.16)$$

Já que (3.20) e (4.16) são iguais, os passos para o cálculo da lei de controle são os mesmos de (3.21) à (3.24), também resultando em

$$u_k^\pm = -S_k. \quad (4.17)$$

Dessa forma, a lei de controle discreta que considera o atraso no tempo de computação apresenta a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{eq} + u_k^\pm \\ u_k &= - \left[(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)x_k + S_k \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

com $S_k = Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}$.

4.2.3 Análise da Robustez da Atratividade

A lei de controle discreta proposta em (4.18), além de uma rápida computação, apresenta robustez para uma classe de incertezas, como mostrado a seguir.

Considere o sistema discreto incerto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k + \Delta f(x_k) \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $\Delta f(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é a função discreta que representa as incertezas da planta.

Para a análise da robustez da atratividade, o seguinte teorema foi proposto [8]:

Teorema 4.1:

Se $\|Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}\| > \|G\Delta f(x_k)\|$ para todo k , então o sistema (4.19), com lei de controle discreta (4.18), apresenta uma condição de atratividade para a superfície deslizante.

Prova:

Considerando as incertezas, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = Gx_{k+1} + G\Gamma_1 u_k - Gx_k - G\Gamma_1 u_{k-1} \\ \Delta S_{k+1} &= G(\Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k + \Delta f(x_k)) - Gx_k. \end{aligned} \quad (4.20)$$

e, substituindo (4.12) e (4.14) em (4.20),

$$\Delta S_{k+1} = G\Gamma_2 u_k^\pm + G\Delta f(x_k). \quad (4.21)$$

Para a candidata a função de Lyapunov $V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k$, segue-se que

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} S_{k+1}^T S_{k+1} \quad (4.22)$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (S_k + \Delta S_{k+1})^T (S_k + \Delta S_{k+1}). \quad (4.23)$$

Substituindo (4.21) em (4.23) resulta em

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (S_k + G\Gamma u_k^\pm + G\Delta f(x_k))^T (S_k + G\Gamma u_k^\pm + G\Delta f(x_k)). \quad (4.24)$$

Considerando que $u_k^\pm = -S_k$, $G\Gamma = I$ e substituindo em (4.24)

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (S_k - S_k + G\Delta f(x_k))^T (S_k - S_k + G\Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} (G\Delta f(x_k))^T (G\Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} \|G\Delta f(x_k)\|^2. \quad (4.25)$$

Sabe-se também que

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k = \frac{1}{2} (Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1})^T (Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1})$$

$$V_k = \frac{1}{2} \|Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}\|^2. \quad (4.26)$$

Se $\|Gx_k + G\Gamma_1 u_{k-1}\| > \|G\Delta f(x_k)\|$, então de (4.25) e (4.26), tem-se que

$$V_k > V_{k+1} \quad (4.27)$$

e a condição de atratividade é satisfeita.

4.3 Comentários

O projeto do novo controlador proposto neste capítulo necessita que o sistema discreto seja representado por um modelo que considere o atraso. Este novo modelo é importantíssimo, pois é com base nas parcelas da matriz de entrada, Γ_1 e Γ_2 , que seu desenvolvimento se torna possível.

A separação da matriz de entrada do sistema discreto em Γ_1 e Γ_2 , feita da forma apresentada neste capítulo, é o que possibilita ao controlador suportar atrasos muito próximos do período de amostragem. Esta situação não era possível em [8].

Como a superfície deslizante S_k é composta diretamente com os valores de Γ_1 , podem existir inúmeras superfícies, dependendo dos limites de integração adotados em (4.8). A diferença marcante entre esta nova lei de controle, e a proposta em [8], está na superfície deslizante.

Os efeitos do atraso computacional são suprimidos através da escolha adequada da superfície deslizante, que depende da componente atrasada do sinal de controle.

Pode-se notar que sua realização é muito simples, com um algoritmo de rápida execução.

Como demonstrado pelo Teorema 4.1, este controlador também é robusto com respeito a uma classe de incertezas paramétricas da planta.

CAPÍTULO 5

5. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES CONSIDERANDO O ATRASO NO TEMPO DE COMPUTAÇÃO – OUTRA ABORDAGEM

Este capítulo apresenta a sistemática de projeto de outro controlador de modos deslizantes que também considera o atraso computacional em seu projeto. O procedimento é sugerido em [7].

O objetivo aqui é mostrar que outras estruturas de controle também podem atuar de maneira a suprimir os efeitos indesejados do atraso. Porém, neste caso, com uma lei mais complexa.

5.1 Controlador Discreto com Modos Deslizantes que considera o Atraso no Tempo de Computação e apresenta Seleção do Sinal de Controle (CDMDS- h)

Considere o modelo discreto descrito em (4.9), mas com as matrizes Γ_1 e Γ_2 calculadas da seguinte maneira

$$\Gamma_1 = \int_{\Delta-h}^{\Delta} e^{A\eta} B d\eta \quad e \quad \Gamma_2 = \int_0^{\Delta-h} e^{A\eta} B d\eta. \quad (5.1)$$

A lei de controle é dada da seguinte forma

$$u(t) = u_k, \quad \text{para} \quad k\Delta + h \leq t < (k+1)\Delta + h. \quad (5.2)$$

Para um sistema discreto SISO, a superfície deslizante é definida pelas seguintes equações

$$S_k^c = G\tilde{x}_k, \quad \tilde{x}_k = r_k - x_k \quad (5.3)$$

onde $r_k = \begin{bmatrix} (r_k^1)^T & r_k^2 \end{bmatrix}^T$, $r_k^1 \in \Re^{n-1}$ e $r_k^2 \in \Re$, é a referência; $\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} (\tilde{x}_k^1)^T & \tilde{x}_k^2 \end{bmatrix}^T$, $\tilde{x}_k^1 \in \Re^{n-1}$ e $\tilde{x}_k^2 \in \Re$, o erro de rastreamento; e G o vetor linha n -dimensional tal que $G\Gamma \neq 0$ e $G\Gamma_2 \neq 0$.

Para a planta nominal, o seguinte controle equivalente pode ser obtido

$$u_k^{eq} = (G\Gamma_2)^{-1} G\Phi\tilde{x}_k - (G\Gamma_2)^{-1} G\Gamma_1 u_{k-1} + (G\Gamma_2)^{-1} G(r_{k+1} - \Phi r_k). \quad (5.4)$$

Para as dinâmicas da função deslizante desejada $S_{k+1}^c = \beta S_k^c$, a entrada de controle que pode ajustar a resposta transiente é obtida por

$$u_k^\beta = u_k^{eq} - (G\Gamma_2)^{-1} \beta S_k^c, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (5.5)$$

Para a compensação da perturbação desconhecida, a entrada compensatória de perturbação v_k é adicionada a entrada de controle (5.5), obtendo-se

$$u_k = u_k^\beta + v_k = u_k^{eq} - (G\Gamma_2)^{-1} \beta S_k^c + v_k. \quad (5.6)$$

Note que a entrada de controle u_{k-1} está incluída no controle equivalente u_k^{eq} . Como u_{k-1} contém a entrada de controle atrasada v_{k-1} , a entrada u_k^{eq} definida para a planta nominal pode ser modificada para excluir o termo de controle v_{k-1} . Sendo $u_{k-1} = u_{k-1}^\beta + v_{k-1}$, pode-se redefinir a entrada de controle u_k^{eq} da seguinte forma

$$u_k^{eq} = (G\Gamma_2)^{-1} G\Phi\tilde{x}_k - (G\Gamma_2)^{-1} G\Gamma_1 u_{k-1}^\beta + (G\Gamma_2)^{-1} G(r_{k+1} - \Phi r_k). \quad (5.7)$$

Observe que o termo de controle u_{k-1} é substituído por u_{k-1}^β . Então, a seguinte equação é obtida quando (5.7) é inserida na expressão de S_{k+1}^c

$$S_{k+1}^c = -G\Gamma_1 v_{k-1} - G\Gamma_2 v_k - G\Gamma f_k + \beta S_k^c. \quad (5.8)$$

Assumindo que a perturbação f_k é limitada e mais lenta do que a frequência de amostragem $1/\Delta$, f_{k-1} pode ser usada como uma estimativa de f_k . De (5.8), atrasando um passo, a perturbação fica

$$f_{k-1} = -(G\Gamma)^{-1} (G\Gamma_2 v_{k-1} + G\Gamma_1 v_{k-2}) - (G\Gamma)^{-1} (S_k^c - \beta S_{k-1}^c) \quad (5.9)$$

A entrada de compensação v_k é definida como uma estimativa de $-f_k$, isto é, $v_k = -\hat{f}_k = -f_{k-1}$. Então, de (5.9), a seguinte lei de estimação de perturbação pode ser obtida

$$v_k = (G\Gamma)^{-1} (G\Gamma_2 v_{k-1} + G\Gamma_1 v_{k-2}) + (G\Gamma)^{-1} (S_k^c - \beta S_{k-1}^c). \quad (5.10)$$

A entrada de controle u_k é selecionada da seguinte forma

$$u_k = \begin{cases} u_k & \text{se } |u_k| \leq u_0, \\ u_0 \frac{u_k}{|u_k|} & \text{se } |u_k| > u_0, \end{cases} \quad (5.11)$$

onde u_0 é o atual limite de controle. Esta lei de controle também força os erros a alcançarem o modo deslizante discreto com uma sequência decrescente $|f_k - f_{k-1}|$.

5.2 Comentários

Algumas observações são pertinentes a este capítulo. A primeira diz respeito a forma como as matrizes Γ_1 e Γ_2 são obtidas. Os limites de integração, para este projeto, são diferentes dos limites utilizados no controlador do Capítulo 4.

Como podemos notar por (5.11), há uma seleção de sinais de controle, mas este chaveamento não implica em uma estrutura variável, como mostrada em (2.31).

O fato mais importante está na complexidade de seu algoritmo, com muito mais cálculos a serem efetuados.

No Capítulo 8, em que as performances dos controladores serão comparadas, será possível notar que mesmo uma estrutura de computação mais simples pode garantir um melhor desempenho e estabilidade na presença de grandes atrasos computacionais, sendo este o principal aspecto do controlador proposto neste trabalho.

A seguir, no próximo capítulo, os sistemas utilizados na aplicação das leis de controle serão apresentados.

CAPÍTULO 6

6. SISTEMAS INCERTOS, NÃO-LINEARES E DE NATUREZA INSTÁVEL

A maioria dos problemas de controle que encontramos no meio prático são diretamente controláveis. Um importante conjunto de sistemas é, ou por projeto ou por natureza, instável e o controle realimentado é essencial para fazê-los operarem de maneira segura. Muitos processos industriais modernos e sistemas tecnológicos são intrinsecamente instáveis podendo ser usados sem controle de estabilização por realimentação.

Importantes exemplos práticos de sistemas instáveis são:

1. **Nas indústrias de processos químicos** – o controle de reações químicas exotérmicas. Se uma reação química gera calor e conseqüentemente a reação acelera com o aumento da temperatura, então o controle pode ser usado para estabilizar a temperatura da reação química evitando uma reação de “fuga”. Reações exotérmicas são usadas para produzir muitos produtos químicos que usamos em nosso cotidiano. Sem controle realimentado estes produtos não estariam disponíveis.

2. **Na geração de energia** – o controle de posição do plasma na Junta Européia Torus (JET). O objetivo aqui é o controle da posição vertical de um anel de plasma dentro de um container toroidal de metal vazio. O controle é feito usando campos magnéticos aplicados através da toróide e o plasma move-se verticalmente, de maneira instável, em resposta aos campos de controle.

3. **No campo aeroespacial** – o controle de um foguete ou aeronave durante seu lançamento vertical. Os ângulos dos propulsores devem ser continuamente controlados para prevenir que o foguete ou a aeronave caiam ou saiam da rota pré-estabelecida.

O controle de sistemas instáveis é criticamente importante por serem de difícil estabilização. O problema é que os sistemas instáveis reais são geralmente perigosos e não podem ser trazidos para dentro de um laboratório. Por esta razão, alguns modelos mais seguros são utilizados para o estudo e simulação. A seguir, são apresentados quatro modelos incertos, não-lineares e de natureza instável, facilmente encontrados em laboratórios de pesquisa em controle.

6.1 O Sistema Bola e Viga

O Sistema Bola e Viga é um dos mais populares e importantes modelos laboratoriais presentes no aprendizado de engenharia de sistemas de controle. É amplamente utilizado porque é um sistema de fácil compreensão, e conseqüentemente permite que inúmeras técnicas de controle, clássicas ou modernas, possam ser estudadas. Além da presença de dinâmicas não-lineares, possui uma outra propriedade importante – instabilidade à malha aberta.

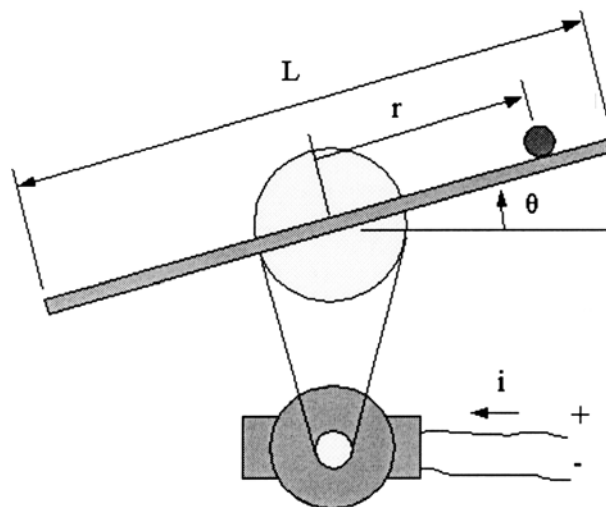


Figura 6.1 - O Sistema Bola e Viga.

O sistema mostrado na Figura 6.1 [17] é muito simples. Trata-se de uma bola de metal rolando do topo ao longo da viga. A viga é montada na saída do eixo de um motor elétrico e então ela pode ser girada em torno de seu eixo central pela ação de um sinal de controle elétrico, que é amplificado e aplicado ao motor. A posição da bola na viga pode ser medida através de um sensor especial.

O trabalho do controle é o de regular automaticamente a posição da bola na viga apenas pela alteração do ângulo da viga. Existe uma dificuldade para se efetuar o controle porque a

bola não permanece em um lugar fixo, mas se move com uma aceleração que é proporcional ao giro da viga. Em tecnologia de controle o sistema é instável à malha aberta porque a saída do sistema (a posição da bola) aumenta sem limite para uma entrada fixa (ângulo da viga). Controle por realimentação pode ser utilizado para manter a bola em uma posição desejada sobre a viga.

As equações diferenciais que governam as dinâmicas do sistema são [17]

$$\ddot{\theta} = \frac{K_m u - mgr \cos \theta}{J_R}$$

$$\ddot{r} = \frac{-mg \sin \theta - F_R \dot{r}}{\frac{J_B}{R^2} + m}$$
(6.1)

Nas dinâmicas apresentadas em (6.1), θ é o ângulo da viga, r é a posição da bola, u é a corrente aplicada ao motor (entrada de controle) e os demais parâmetros são dados na Tabela 6.1 [17].

Tabela 6.1
Parâmetros Físicos do Sistema Bola e Viga

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidades
Constante do motor e engrenagens	K_m	7.35	Nm/A
Massa da bola	m	0.05	Kg
Constante gravitacional	g	9.8	m/s^2
Momento de inércia da viga	J_R	0.049	Kgm^2
Coeficiente de fricção da bola	F_R	0.07	Kg/s
Momento de inércia da bola	J_B	0.000008	Kgm^2
Raio da bola	R	0.02	m
Comprimento da viga	L	1	m

Linearizando o sistema no ponto de equilíbrio na origem, ou seja, $\begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, obtêm-se o seguinte modelo linear

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} u. \quad (6.2)$$

Através da equação matricial linear (6.2), é possível calcular os ganhos da superfície deslizante e implementar os controladores, admitindo-se o acesso a todos os estados da planta.

6.2 O Sistema Pêndulo Invertido

Pêndulos Invertidos são excelentes modelos para demonstrações de técnicas de controle automático. Eles são sistemas não-lineares, instáveis, excelentes para aplicações de métodos de controle moderno e são muito interessantes de serem observados. O mais simples modelo de pêndulo invertido consiste de uma haste diretamente acoplada ao eixo de um motor. Esta configuração pode ser controlada à malha aberta através do uso de um motor de passo, conseqüentemente sendo muito simples para ser considerado em um estudo. Assim, o sistema pêndulo invertido a ser considerado deve ter no mínimo dois graus de liberdade, um para a posição da base do pêndulo e outro para seu ângulo.

Em dois graus de liberdade, a base do pêndulo tem seu movimento restrito a apenas uma dimensão (linear ou rotacional), enquanto o ângulo do pêndulo pode variar em apenas uma dimensão.

6.2.1 O Sistema Pêndulo Invertido Linear

Considere o sistema mostrado na Figura 6.2 [8], onde o pêndulo invertido é montado sobre um carrinho com motor, que está sobre um trilho. Este é o Sistema Pêndulo Invertido Linear, pois a base do pêndulo (carrinho motorizado) pode se mover apenas em cima do trilho ao qual ela está posicionada. Portanto, apenas o problema bi-dimensional será considerado.

Este modelo pode ser considerado como um sistema de lançamento de foguetes, cujo objetivo é manter a nave na posição vertical no momento de seu lançamento.

Na Figura 6.2, u é a força de controle, M é a massa do carro, m é a massa do pêndulo, x é a posição do carro sobre o trilho e θ é o ângulo do pêndulo.

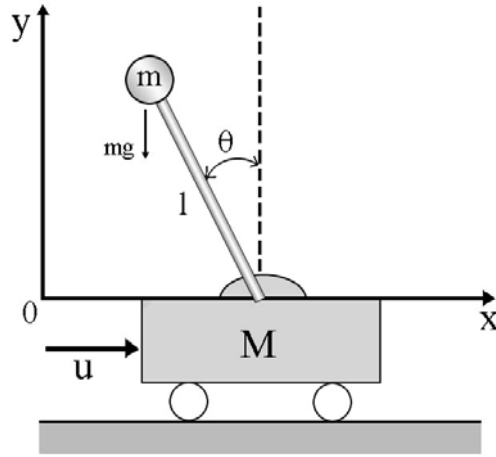


Figura 6.2 - O Sistema Pêndulo Invertido Linear.

As equações diferenciais dinâmicas para este sistema são dadas a seguir [18]

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} &= u \\ m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} &= mg \sin \theta \end{aligned} \quad (6.3)$$

que também podem ser escritas através da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{(M + m)g \sin \theta - m(\sin \theta)\dot{\theta}^2 \cos \theta + b\dot{x} \cos \theta}{l(M + m \sin^2 \theta)} \\ \dot{x} \\ \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - mg \sin \theta - b\dot{x}}{(M + m - m \cos \theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a \cos \theta}{l(M + m \sin^2 \theta)} \\ 0 \\ \frac{a}{(M + m - m \cos \theta)} \end{bmatrix} V \quad (6.4)$$

onde a relação entre a força de controle u e a tensão V , em Volts, gerada pelo computador digital é

$$u = aV - b\dot{x} \quad (6.5)$$

e os valores numéricos de a e b , bem como de todos os outros parâmetros são dados na Tabela 6.2 [18].

Tabela 6.2
Parâmetros Físicos do Sistema Pêndulo Invertido Linear

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidades
Comprimento do pêndulo	l	0.61	m
Massa do pêndulo	m	0.21	Kg
Massa do carro	M	0.4573	Kg
Constante gravitacional	g	9.8	m/s^2
Dado da placa de aquisição	a	1.7378	-
Dado da placa de aquisição	b	7.6832	-

Quando o sistema é linearizado no ponto de equilíbrio $[\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$, obtêm-se o seguinte modelo linear

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & \frac{b}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{Ml} \\ 0 \\ \frac{a}{M} \end{bmatrix} V \quad (6.6)$$

que após substituição dos valores da Tabela 6.2 resulta em

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 46.9 & 0 & 0 & 55.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.5 & 0 & 0 & -16.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -12.5 \\ 0 \\ 3.8 \end{bmatrix} V. \quad (6.7)$$

6.2.2 O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

Para a configuração rotacional, como mostrado pela Figura 6.3 [19], a base do pêndulo é presa a uma haste horizontal através de uma junta. Esta haste é chamada de braço do pêndulo. O eixo de revolução do pêndulo é colinear com o eixo da haste horizontal. O ângulo do pêndulo é α . O braço é acoplado diretamente, ou através de engrenagens, ao eixo do motor, dando a ele o movimento rotacional. A posição angular do braço é θ . A entrada do sistema é o torque T , aplicado pelo motor.

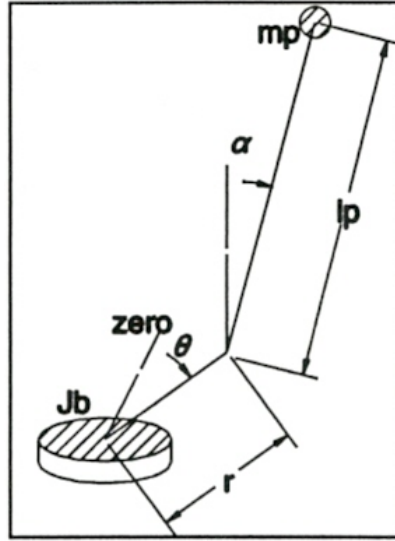


Figura 6.3 - O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.

Na Figura 6.3, J_b é a inércia total após a caixa de engrenagens incluindo o braço, r é o tamanho do braço, θ é o ângulo do braço e α é o ângulo do pêndulo. Note que l_p é metade do tamanho do pêndulo ($l_p = 0.5L_p$).

O modelo matemático usado aqui é dado por [19]. As equações dinâmicas não-lineares, que representam o comportamento do pêndulo, são

$$\begin{aligned} (m_p r^2 + J_b) \ddot{\theta} + m_p r \ddot{\alpha} l_p \cos(\alpha) - m_p r \dot{\alpha}^2 l_p \sin(\alpha) &= T \\ m_p l_p \cos(\alpha) \ddot{\theta} r - m_p l_p \sin(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} r + m_p \ddot{\alpha} l_p^2 - m_p g l_p \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

O modelo desenvolvido é baseado em um torque T aplicado ao braço. O sistema real, por outro lado, é controlado por voltagem. A relação entre o torque de controle T , e a tensão V , em Volts, é

$$T = V \frac{K_m K_g}{R} - \frac{K_m^2 K_g^2}{R} \dot{\theta}. \quad (6.9)$$

Os valores de todos os parâmetros físicos para esta configuração de pêndulo invertido são dados na Tabela 6.3 [19]. Todos os valores contidos nesta tabela são baseados nas medidas do sistema real, dando maior confiabilidade ao modelo matemático.

Tabela 6.3
Parâmetros Físicos do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidades
Constante de torque do motor	K_m	0.00767	Nm/A
Resistência de armadura do motor	R	2.6	Ω
Relação total de engrenagens	K_g	60.5	-
Inércia total após a caixa de engrenagens incluindo o braço	J_b	0.0044	Kgm^2
Comprimento real do pêndulo	L_p	0.43	m
Massa do pêndulo	m_p	0.14	Kg
Comprimento do braço	r	0.2	m
Constante gravitacional	g	9.8	m/s^2

Após linearizar o sistema no ponto de equilíbrio $[\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m_p r g / J_b & 0 & 0 \\ 0 & g(m_p r^2 + J_b) / l_p J_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/J_b \\ -r/J_b l_p \end{bmatrix} T. \quad (6.10)$$

Substituindo a relação (6.9) na equação matricial (6.10) e, inserindo os valores paramétricos dados pela Tabela 6.3, obtêm-se o seguinte modelo linear

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -67.4 & -25.6 & 0 \\ 0 & 112.8 & 25.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 47.4 \\ -47.4 \end{bmatrix} V. \quad (6.11)$$

6.2.3 O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo

A Figura 6.4 [20] mostra a configuração básica de um pêndulo invertido rotacional de dupla haste.

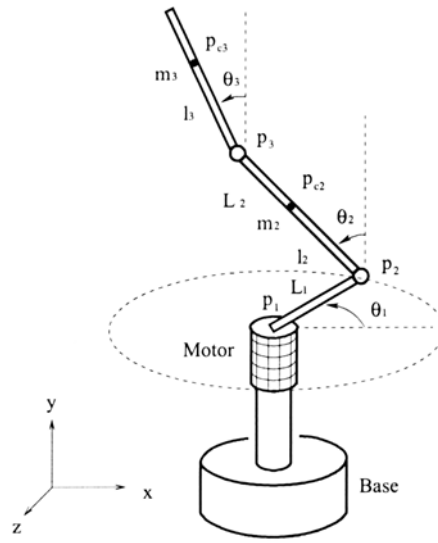


Figura 6.4 - O Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo.

As setas nos arcos denotam a direção positiva para as variáveis de estado da planta. As linhas pontilhadas representam o ponto zero de deslocamento dos estados. Pela figura, θ_1 é o ângulo de deslocamento do braço, θ_2 e θ_3 correspondem ao deslocamento angular da haste que se liga ao braço do pêndulo, através da junta P_2 , e da haste conectada ao final da primeira, através da junta P_3 , respectivamente. A junta P_1 conecta o braço ao motor, conferindo-lhe o movimento rotacional. O sinal de controle é o torque τ aplicado pelo motor. Este sistema é bem mais complexo que as outras configurações de pêndulos invertidos apresentadas anteriormente.

As equações dinâmicas para este modelo de pêndulo são dadas por [21]

$$\begin{aligned} \tau - b_1 \dot{\theta}_1 &= h_1 \ddot{\theta}_1 + h_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + h_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - h_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - h_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 \\ -b_2 \dot{\theta}_2 &= h_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + h_4 \ddot{\theta}_2 + h_5 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) - h_5 \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_3 - \theta_2) + h_7 \sin \theta_2 \\ -b_3 \dot{\theta}_3 &= h_3 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_3 + h_5 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + h_6 \ddot{\theta}_3 + h_5 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_3 - \theta_2) + h_8 \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $h_1 = J_1 + L_1^2(m_2 + m_3)$, $h_2 = L_1(m_2 l_2 + m_3 L_2)$, $h_3 = L_1 m_3 l_3$, $h_4 = J_2 + L_2^2 m_3 + l_2^2 m_2$, $h_5 = L_2 m_3 l_3$, $h_6 = J_3 + l_3^2 m_3$, $h_7 = g(m_2 l_2 + m_3 L_2)$ e $h_8 = g m_3 l_3$.

Todos os parâmetros físicos do pêndulo invertido rotacional duplo são dados na Tabela 6.4 [21].

Tabela 6.4
Parâmetros Físicos do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidades
Massa do link 2	m_2	0.370	Kg
Massa do link 3	m_3	0.088	Kg
Fricção viscosa do link 1	b_1	0.0001	Nms
Fricção viscosa do link 2	b_2	0.00028	Nms
Fricção viscosa do link 3	b_3	0.00028	Nms
Comprimento do centro de rotação do link 2 ao seu centro de massa	l_2	0.269	m
Comprimento do centro de rotação do link 3 ao seu centro de massa	l_3	0.152	m
Comprimento do link 1	L_1	0.278	m
Comprimento do link 2	L_2	0.313	m
Momento de inércia sobre o centro de rotação do link 1	J_1	0.0248	Kgm^2
Momento de inércia sobre o centro de rotação do link 2	J_2	0.0304	Kgm^2
Momento de inércia sobre o centro de rotação do link 3	J_3	0.00561	Kgm^2
Constante gravitacional	g	9.8	m/s^2

Linearizando o sistema no ponto de equilíbrio na origem, $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, e utilizando os valores apresentados na Tabela 6.4, é possível obter o seguinte modelo linear

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 16.2604 & -0.1515 & -0.0024 & 0.0037 & -0.0001 \\ 0 & -27.7075 & 0.1529 & 0.0013 & -0.0062 & 0.0002 \\ 0 & 0.4758 & -1.1249 & 0 & 0.0002 & -0.0024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 24.2384 \\ -12.9946 \\ -0.3061 \end{bmatrix} \tau. \quad (6.13)$$

6.3 Comentários

Neste capítulo foram apresentados os modelos matemáticos de todos os sistemas que serão utilizados para comprovar a funcionalidade dos controladores descritos nos capítulos anteriores.

Todos os sistemas são governados por equações dinâmicas não-lineares, e todos apresentam a propriedade de instabilidade à malha aberta, ou seja, são sistemas de natureza instável.

Quando um sistema é modelado, alguns dos parâmetros podem não ser considerados no projeto, porque é muito difícil representar com perfeição as dinâmicas reais por um modelo matemático. Assim, a utilização de controladores robustos, capazes de suprimir as incertezas paramétricas da planta, são essenciais.

Os controladores robustos propostos neste trabalho necessitam de acesso a todos os estados da planta, para compor a superfície deslizante. O fato é que, em sistemas reais, nem todos os estados podem estar disponíveis para serem utilizados, ou os sensores responsáveis pela sua medição podem ser muito dispendiosos. Uma solução muito utilizada é a aplicação de observadores de estado, que fazem uma estimação do estado inacessível.

Nesta pesquisa é assumido que todos os estados da planta estão acessíveis, dispensando o uso de observadores.

CAPÍTULO 7

7. MODELOS DE ANIMAÇÃO

O primeiro passo após o projeto de uma lei de controle é o teste através de softwares, para garantir sua funcionalidade antes da aplicação no modelo físico real. Este procedimento garante que o equipamento não sofra danos. Mas, para uma idéia clara do comportamento do sistema real, modelos de animação podem ser utilizados, sendo importantes ferramentas gráficas.

O objetivo, além de enriquecer apresentações, é o de auxiliar os estudantes de graduação e pós-graduação no projeto e aplicação de diversas leis de controle, tornando-se uma poderosa ferramenta de propósito educacional para o Laboratório de Pesquisa em Controle da FEIS.

Para o caso dos Sistemas Pêndulo Invertido Rotacional e Rotacional Duplo, os modelos tridimensionais foram obtidos de [21] e adaptados para serem utilizados com o Simulink. Estes modelos foram importantíssimos, pois serviram de base para o aprendizado da técnica de construção de modelos virtuais em três dimensões.

Os outros dois modelos animados, referentes aos Sistemas Bola e Viga e Pêndulo Invertido Linear, foram criados com base nos modelos previamente obtidos e com o auxílio do programa V-Realm Builder (VRB), presente no software Matlab.

O VRB é um poderoso pacote tridimensional para a criação de objetos 3D e “Mundos Virtuais”. O programa não tem o intuito de copiar os pacotes de modelagem existentes, que criam incríveis objetos realísticos com 5 a 10 milhões de polígonos [22]. Seu objetivo é proporcionar arquivos de tamanho reduzido facilmente transportados pela Internet, visando aplicações em tempo real. Contudo, pode ser utilizado para aplicações em computadores locais, como é o caso deste trabalho. Sua interface é muito simples de ser usada.

7.1 Modelo para Animação do Sistema Bola e Viga

A Figura 7.1 apresenta o modelo bidimensional utilizado para animação do Sistema Bola e Viga.

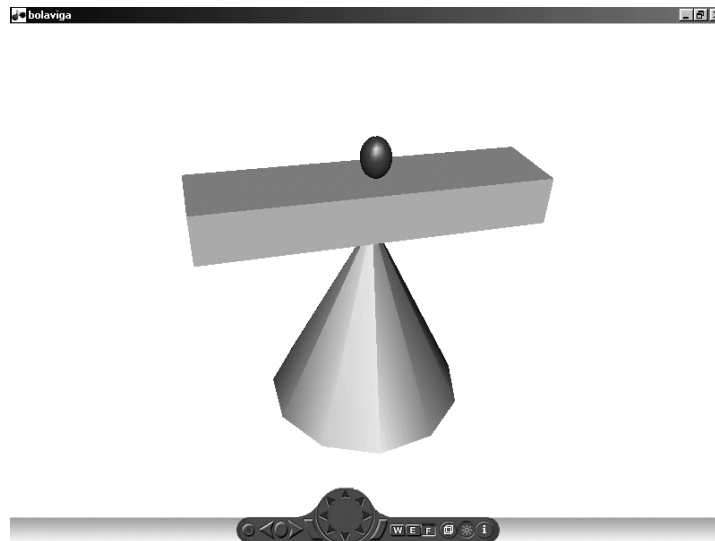


Figura 7.1 - Modelo animado do Sistema Bola e Viga.

Para que a animação seja possível, o modelo necessita dos sinais de posição da bola (r), ângulo da viga (θ) e entrada de controle (u). O resultado é uma demonstração do comportamento do sistema controlado.

7.2 Modelo para Animação do Sistema Pêndulo Invertido Linear

A Figura 7.2 apresenta o modelo bidimensional utilizado para animação do Sistema Pêndulo Invertido Linear.

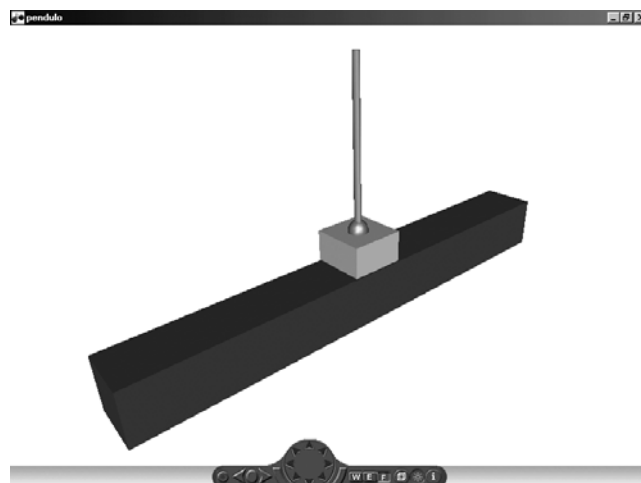


Figura 7.2 - Modelo animado do Sistema Pêndulo Invertido Linear.

Este modelo necessita do sinal de posição do carro (x), do ângulo do pêndulo (θ) e do sinal de referência que o carrinho deve seguir. Assim, é possível observar o comportamento do sistema controlado de forma dinâmica.

7.3 Modelo para Animação do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

A Figura 7.3 apresenta o modelo tridimensional utilizado para animação do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.

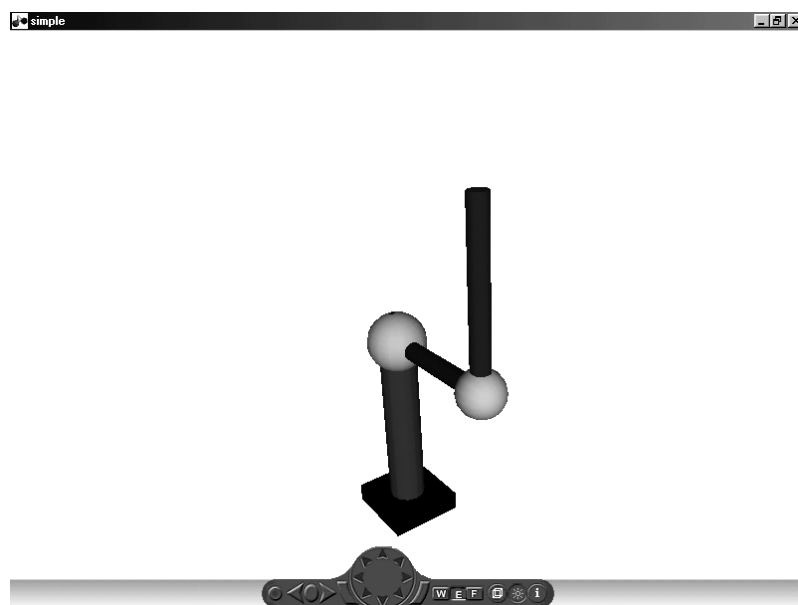


Figura 7.3 - Modelo animado do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional.

Para este modelo 3D bastam apenas os sinais de ângulo do braço (θ) e ângulo do pêndulo (α).

É possível notar pela Figura 7.3 que o modelo virtual apresenta uma aproximação da geometria real do pêndulo. As duas esferas representam as juntas que conferem ao pêndulo o movimento rotacional.

Durante sua confecção, cada parte que o compõe é relacionada com um determinado grau de liberdade de rotação ou translação. Neste caso, apenas o movimento de rotação das juntas foi utilizado.

7.4 Modelo para Animação do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo

A Figura 7.4 apresenta o modelo tridimensional utilizado para animação do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo.

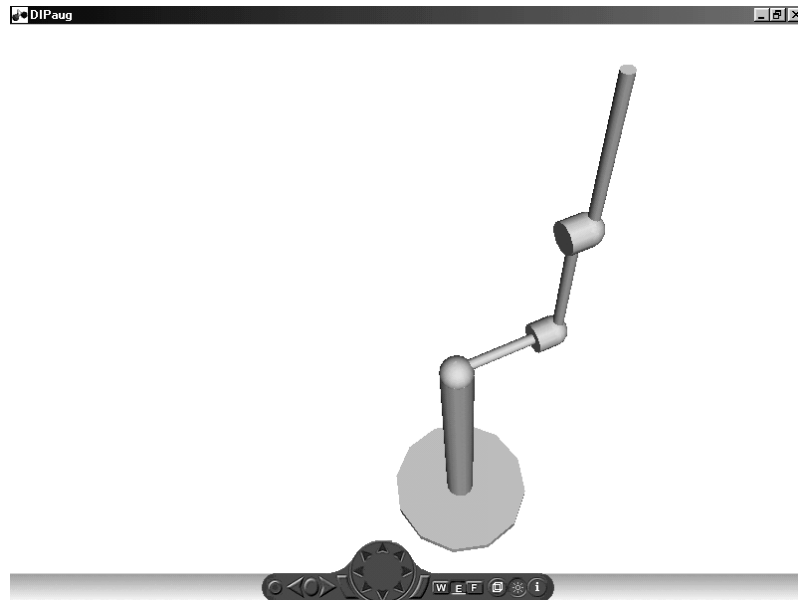


Figura 7.4 - Modelo animado do Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo.

O modelo necessita dos sinais de ângulo do braço (θ_1), ângulo do pêndulo inferior ligado ao braço (θ_2) e ângulo do pêndulo superior (θ_3) para efetuar a animação.

Mais uma vez mostra-se uma aproximação geométrica do pêndulo real. As juntas que conectam as hastes do pêndulo conferem-lhe o movimento rotacional.

7.5 Comentários

Todos os modelos para animação apresentados neste capítulo podem ser facilmente relacionados com o Simulink, através de blocos que referenciam arquivos *WRL* (extensão para os arquivos criados pelo VRB). Isto facilita muito o processo de análise das animações, uma vez que os resultados obtidos nas simulações, que serão mostrados no próximo capítulo, foram obtidos através da utilização do Simulink.

Outra importante observação está no fato de que todos os modelos podem ser usados para acompanharem o comportamento do sistema real, simplesmente fazendo com que as entradas para as representações virtuais venham diretamente das medidas reais dos sistemas. Assim, podem ser utilizadas em simulações de tempo real.

CAPÍTULO 8

8. RESULTADOS - SIMULAÇÕES DOS CONTROLADORES

As simulações dos controladores atuando sobre cada sistema do Capítulo 6 são apresentadas. Todos os resultados foram obtidos após a implementação dos modelos matemáticos com o auxílio do Simulink, presente no software Matlab.

Representações, em diagramas de blocos, são mostradas pelas Figuras 8.1 à 8.4.

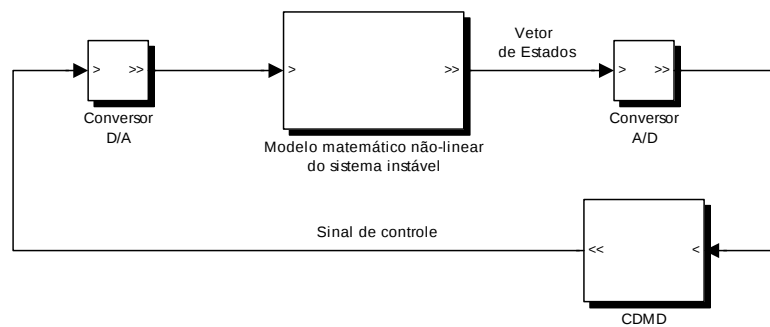


Figura 8.1 - Diagrama de blocos para o CDMD na ausência do Atraso no Tempo de Computação.

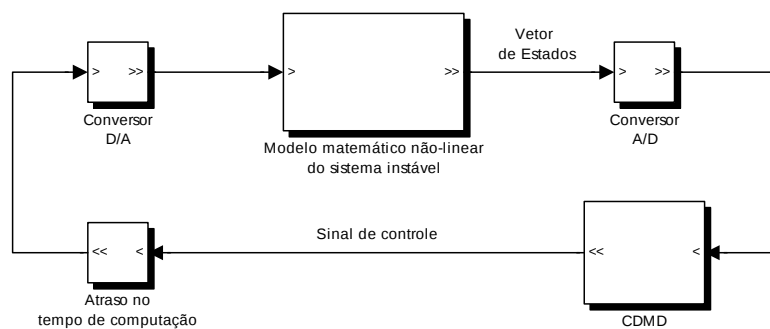


Figura 8.2 - Diagrama de blocos para o CDMD na presença do Atraso no Tempo de Computação.

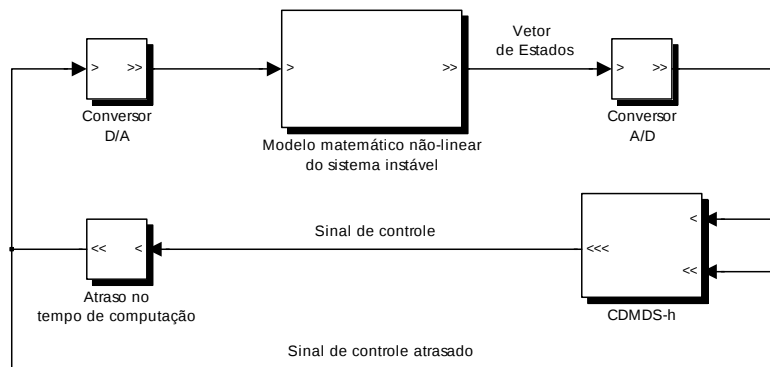


Figura 8.3 - Diagrama de blocos para o CDMDS-h na presença do Atraso no Tempo de Computação.

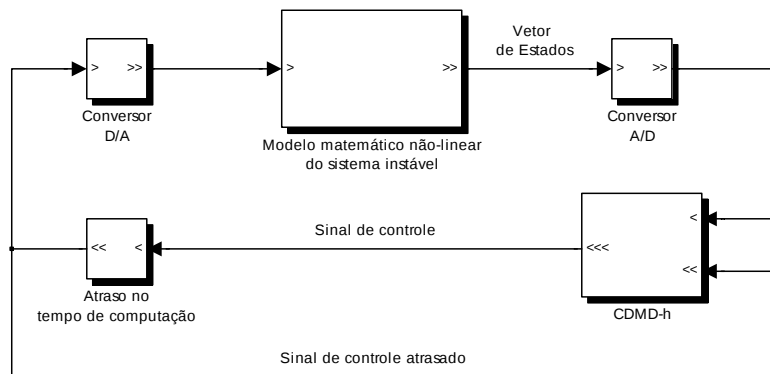


Figura 8.4 - Diagrama de blocos para o CDMD-h na presença do Atraso no Tempo de Computação.

Os resultados serão apresentados na mesma sequência das figuras acima. Cada dinâmica não-linear, de seus respectivos sistemas, é inserida no bloco intitulado “Modelo matemático não-linear do sistema instável”. O CDMD é simulado primeiro, na ausência e na presença do atraso computacional. Isto nos dá uma idéia clara de como este problema deteriora a performance de controle. Na sequência são simulados os controladores CDMDS- h e CDMD- h , na presença do mesmo atraso aplicado ao CDMD.

É utilizada apenas uma situação crítica de atraso, ou seja, h muito próximo de Δ . Isto facilita e torna mais interessante a análise de desempenho dos controladores.

8.1 Resultados das Simulações no Sistema Bola e Viga

Para uma melhor análise, foi estabelecido que a bola seguisse uma referência, representada por linhas pontilhadas nas figuras, de onda quadrada com uma amplitude de 0.3 metros. A bola deve correr de um extremo ao outro da viga partindo de sua posição inicial, na origem.

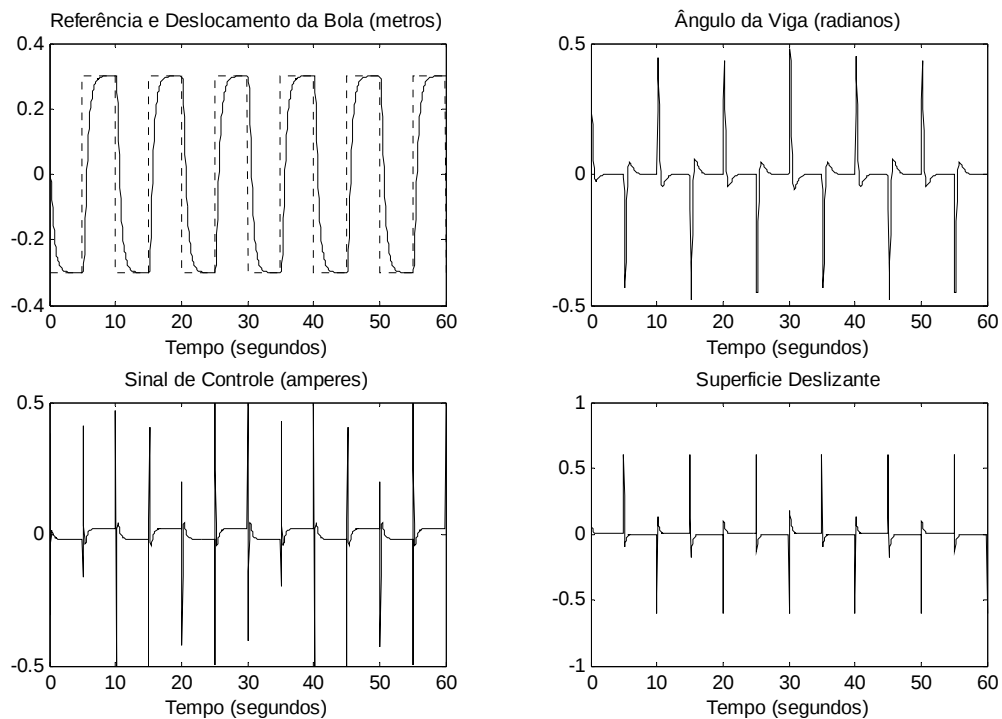


Figura 8.5 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos sem atraso no tempo de computação.

A Figura 8.5 mostra que o CDMD tem um bom desempenho. O período de amostragem utilizado é alto ($\Delta = 0.06$ segundos), o que garante a utilização de uma baixa capacidade de processamento do microcomputador responsável pela ação de controle. Uma especificação do modelo físico real é que seu sinal de controle tem uma saturação de ± 0.5 amperes. Assim, esta limitação foi introduzida nas simulações, expondo o controlador a uma situação mais próxima da realidade.

Deve-se notar que o CDMD não foi sujeito a nenhum atraso computacional ($h = 0$) durante esta simulação.

A Figura 8.6 mostra bem os efeitos degenerativos que o atraso acarreta no desempenho dos controladores.

Agora, o CDMD será simulado na presença de um atraso computacional crítico, ($h = 0.05$ segundos), bem próximo de seu período de amostragem.

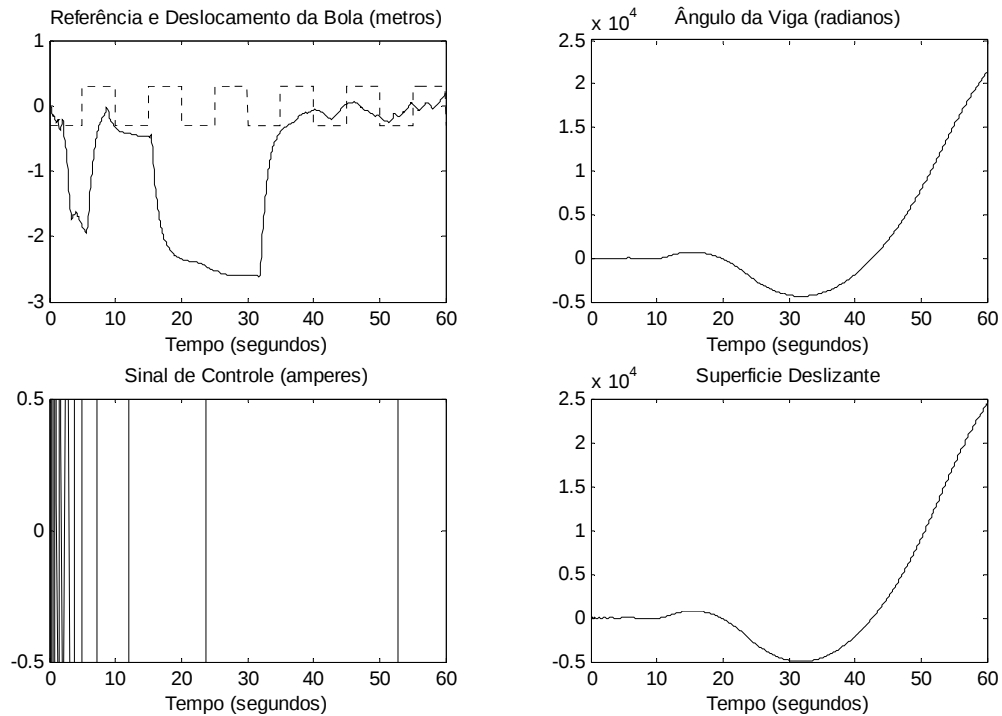


Figura 8.6 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.

Pode-se notar que o CDMD, que não considera o atraso em seu projeto, tem sua performance afetada de maneira negativa. Neste caso, não foi possível manter o sistema estável.

Fica mais do que evidente a necessidade de controladores dedicados a lidar com este tipo de problema, muito comum em processos de controle digital.

As Figuras 8.7 e 8.8 mostram os resultados para o controlador CDMD- h (proposto em [7]) e para o novo controlador CDMD- h , proposto neste trabalho. Ambos consideram os efeitos do atraso em seu projeto, visando suprimi-los.

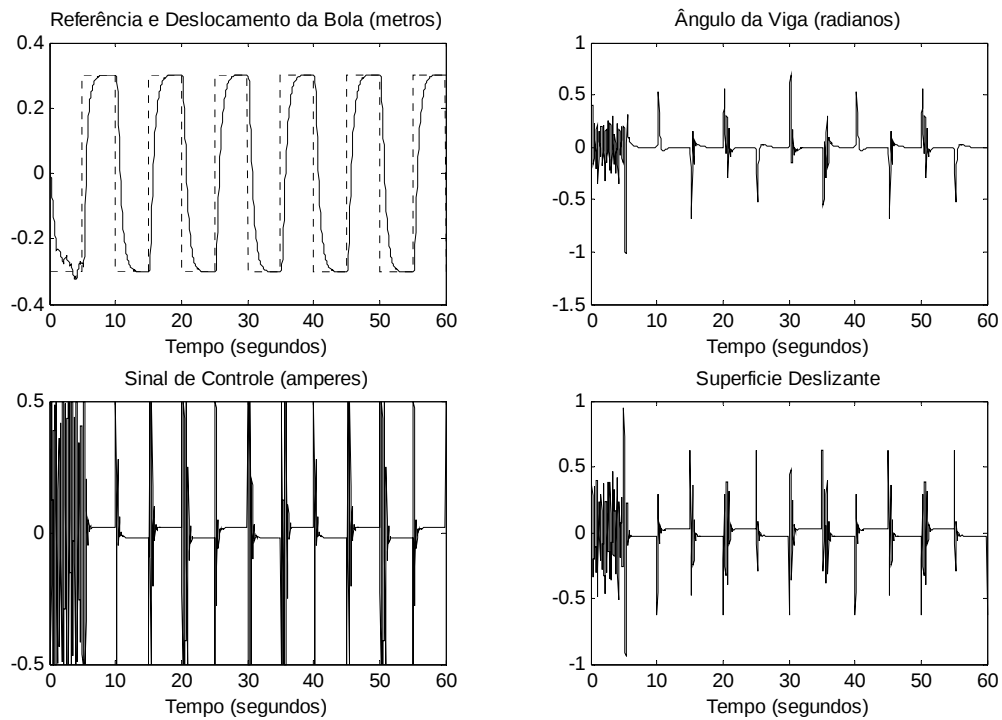


Figura 8.7 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMDS-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.

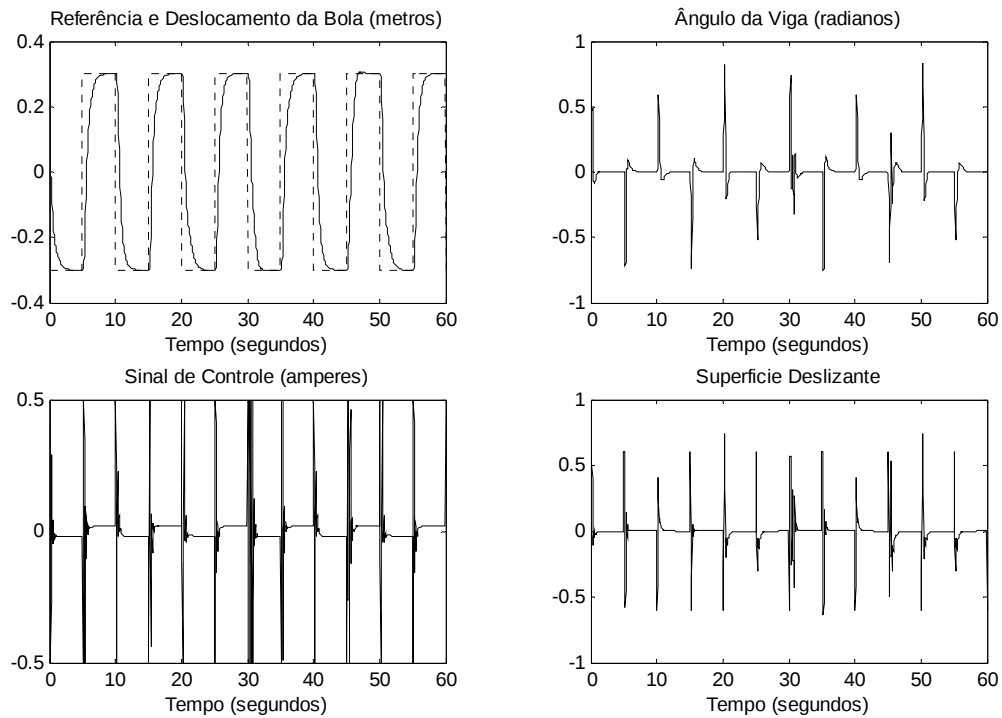


Figura 8.8 - Sistema Bola e Viga controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.

Os controladores que consideram o atraso no tempo de computação em seu projeto conseguem manter um excelente desempenho mesmo na presença de um atraso grande, bem próximo do período de amostragem.

Porém, vale destacar que o CDMD- h apresenta resultados um pouco melhores que o CDMD- s , como visto nas figuras anteriores, apesar de ambos conseguirem estabilizar o sistema.

8.2 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Linear

As simulações no Pêndulo Invertido Linear ocorreram de forma que o carrinho seguisse uma referência de onda quadrada (linha pontilhada), com amplitude de ± 0.05 metros.

Os resultados são apresentados pela Figura 8.9 à Figura 8.12.

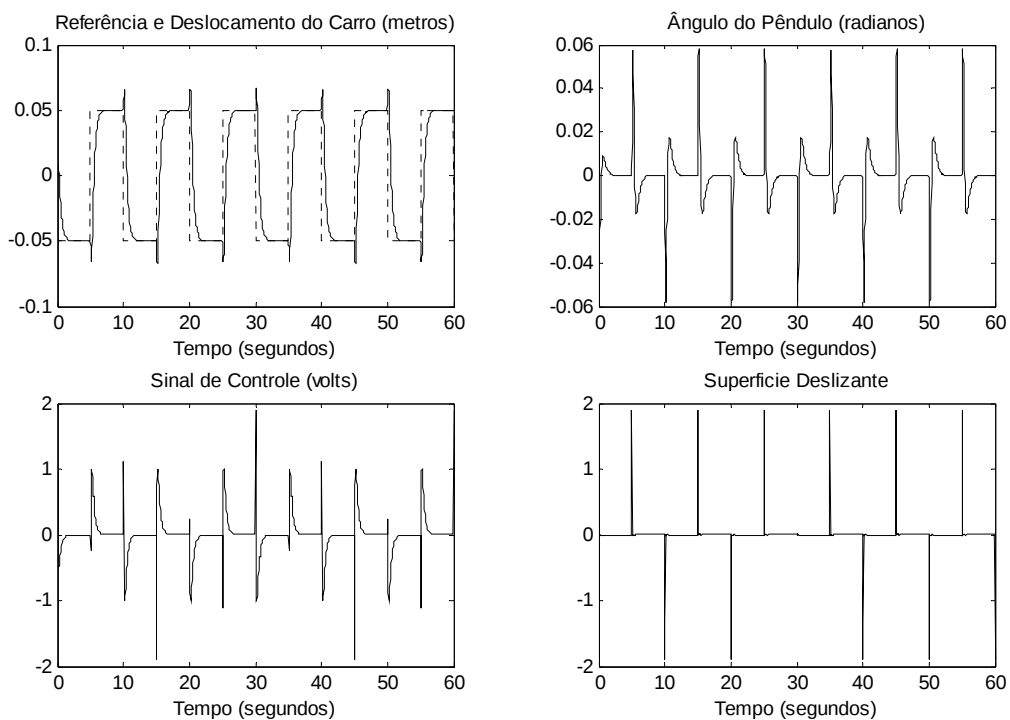


Figura 8.9 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos sem atraso no tempo de computação.

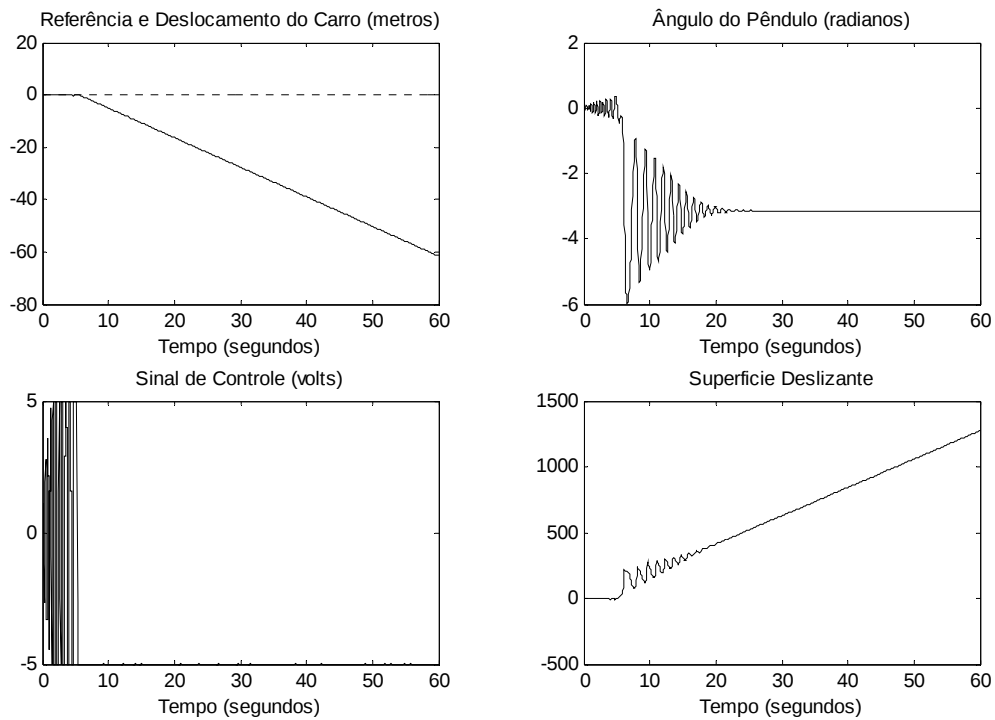


Figura 8.10 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.

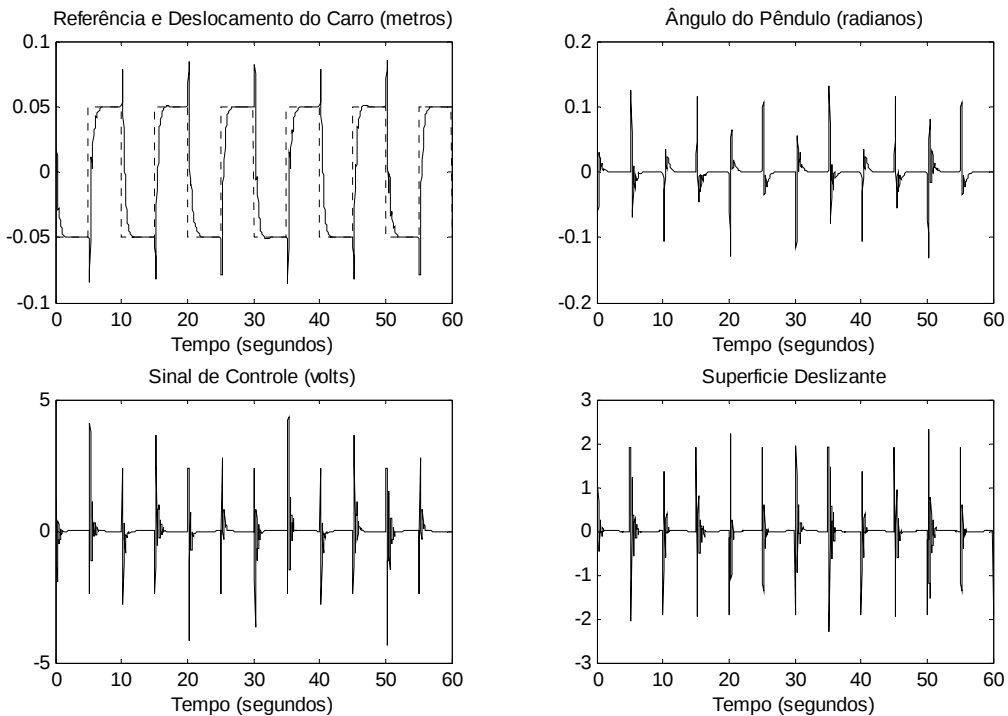


Figura 8.11 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMDs-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.

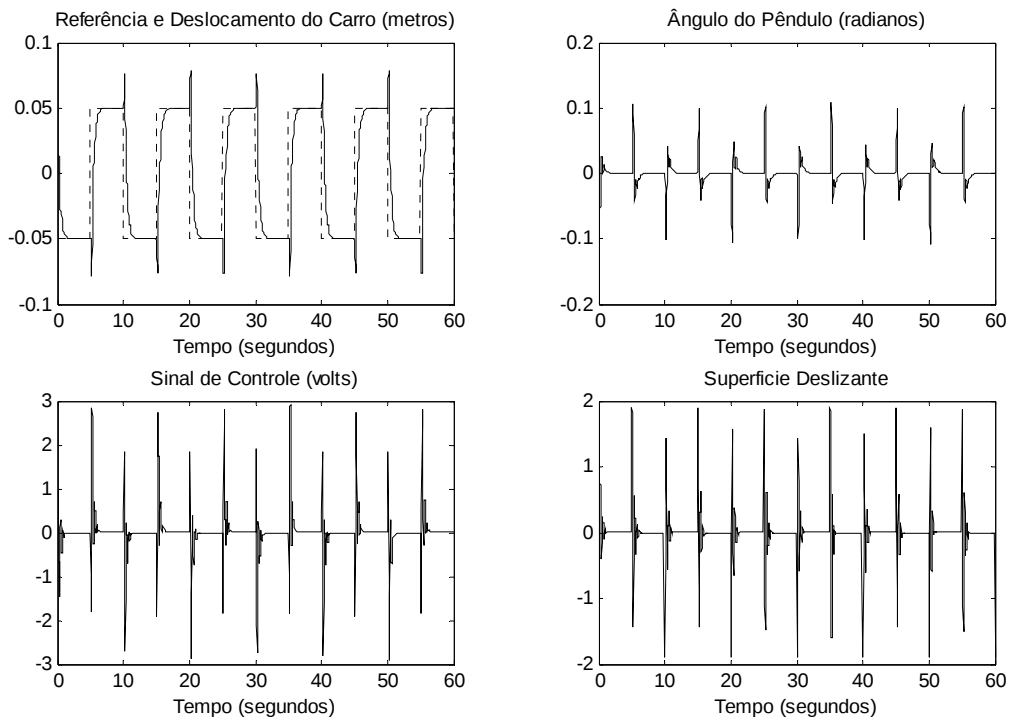


Figura 8.12 - Sistema Pêndulo Invertido Linear controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.06 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.05 segundos.

Mais uma vez foi possível observar os efeitos degenerativos causados pelo atraso em um sistema cujo controlador não considera este tipo de adversidade. O CDMD não foi capaz de manter a estabilidade do pêndulo enquanto o carrinho seguia a referência. Na Figura 8.10 é possível notar que o sinal de controle saturou em ± 5 volts. Esta condição foi imposta baseada numa característica do modelo físico real, também com a finalidade de trazer os resultados a um nível mais próximo da realidade.

Por outro lado, os dois controladores dedicados conseguiram estabilizar o sistema na presença de um grande atraso computacional. Mas devemos observar que o CDMD-h apresentou um sinal de controle mais baixo em relação ao CDMDs-h.

8.3 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Rotacional

Nas simulações de controle do Pêndulo Invertido Rotacional foi imposta a condição de o braço do pêndulo seguir uma referência (linha pontilhada) em onda quadrada de amplitude ± 0.6109 radianos ($\pm 35^\circ$).

Os resultados são mostrados nas figuras a seguir.

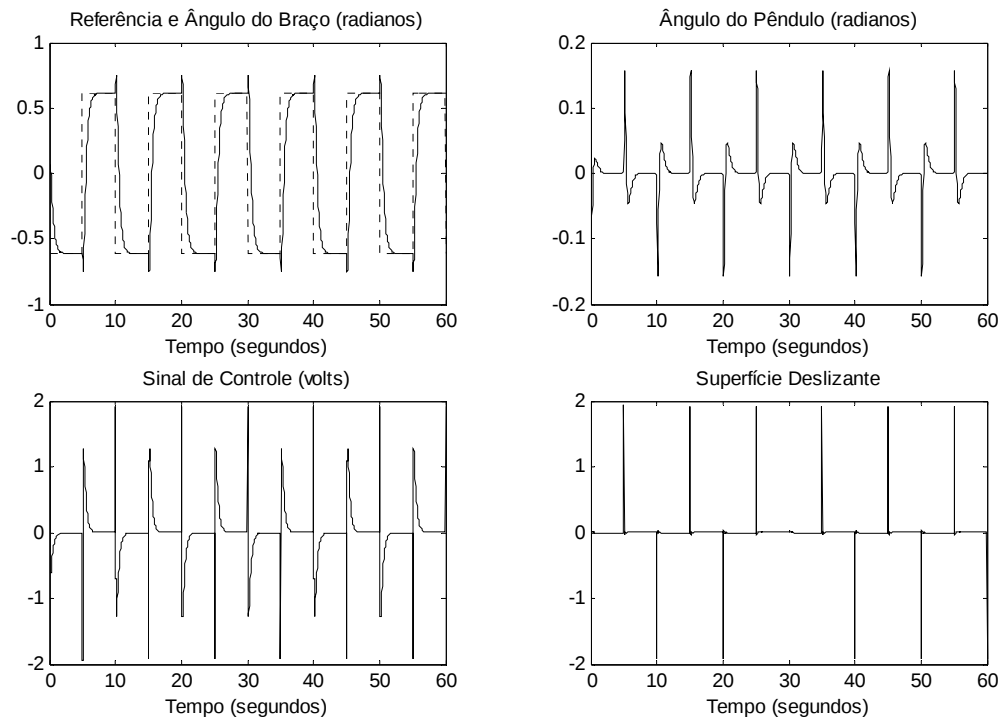


Figura 8.13 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.05 segundos sem atraso no tempo de computação.

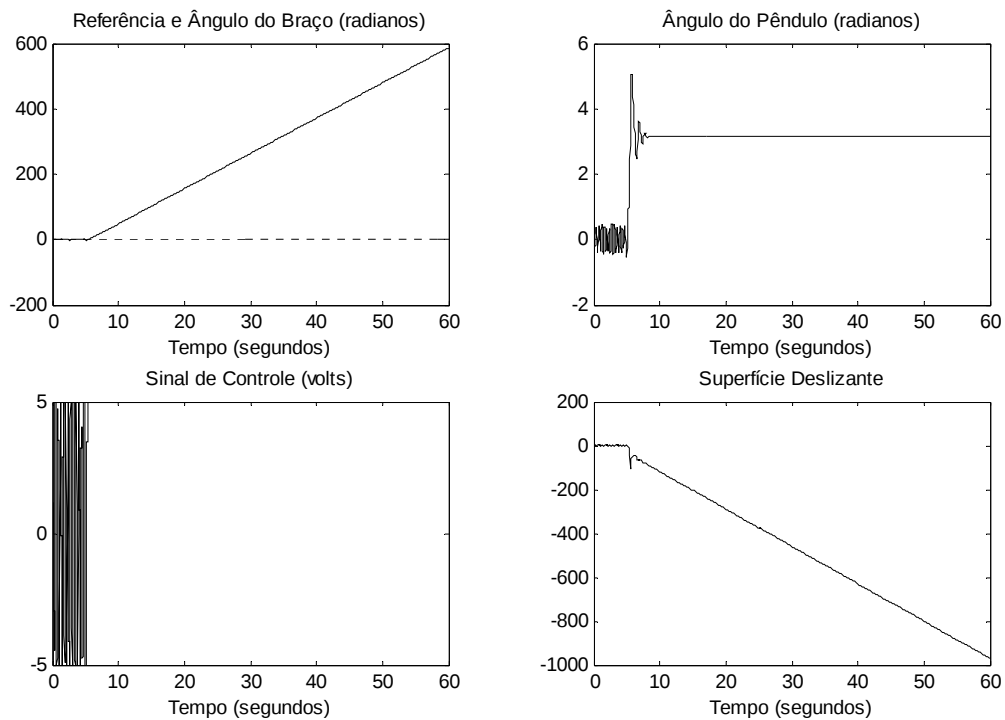


Figura 8.14 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.05 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.04 segundos.

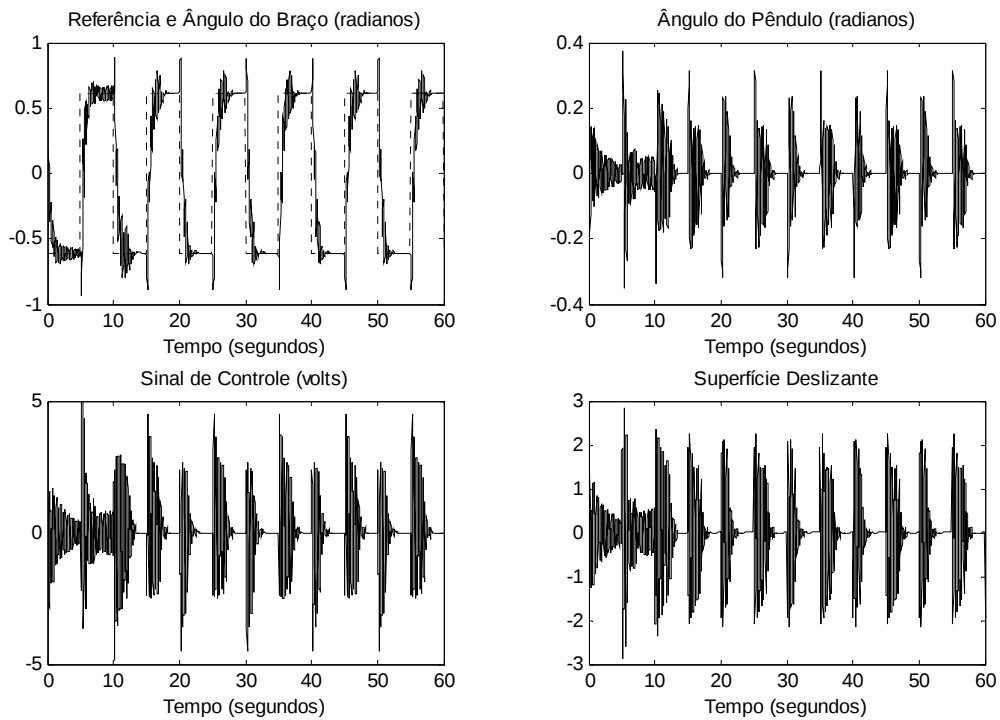


Figura 8.15 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMDS-h com período de amostragem de 0.05 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.04 segundos.

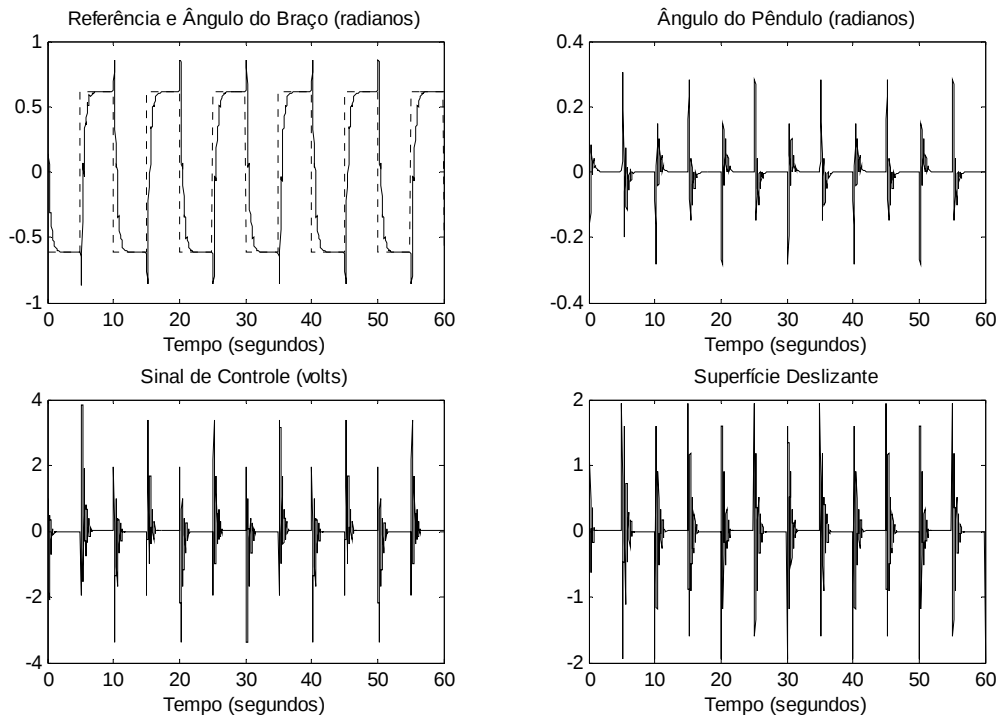


Figura 8.16 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.05 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.04 segundos.

O CDMD sofreu novamente com os efeitos da presença do atraso computacional, não conseguindo manter a estabilidade do pêndulo.

Novamente foi imposta uma saturação de ± 5 volts no sinal de controle, com base na limitação do hardware responsável por entregar o sinal ao sistema físico real.

O novo controlador apresentado neste trabalho (CDMD-*h*) mostrou melhores resultados na presença do atraso no tempo de computação, como podemos ver pela Figura 8.16.

8.4 Resultados das Simulações no Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo

O Pêndulo Invertido Rotacional de dupla haste é, dentre os sistemas apresentados neste trabalho, o mais não-linear e o mais instável. Devido a esta característica, não é possível fazer seu braço seguir uma referência de onda quadrada, pois haveria uma mudança brusca de posição que desestabilizaria o sistema. Dessa forma, a referência utilizada foi uma senóide com uma amplitude de ± 0.1745 radianos ($\pm 10^\circ$), pois a transição é mais suave e possibilita o rastreamento por parte do braço.

Os resultados se encontram nas figuras a seguir.

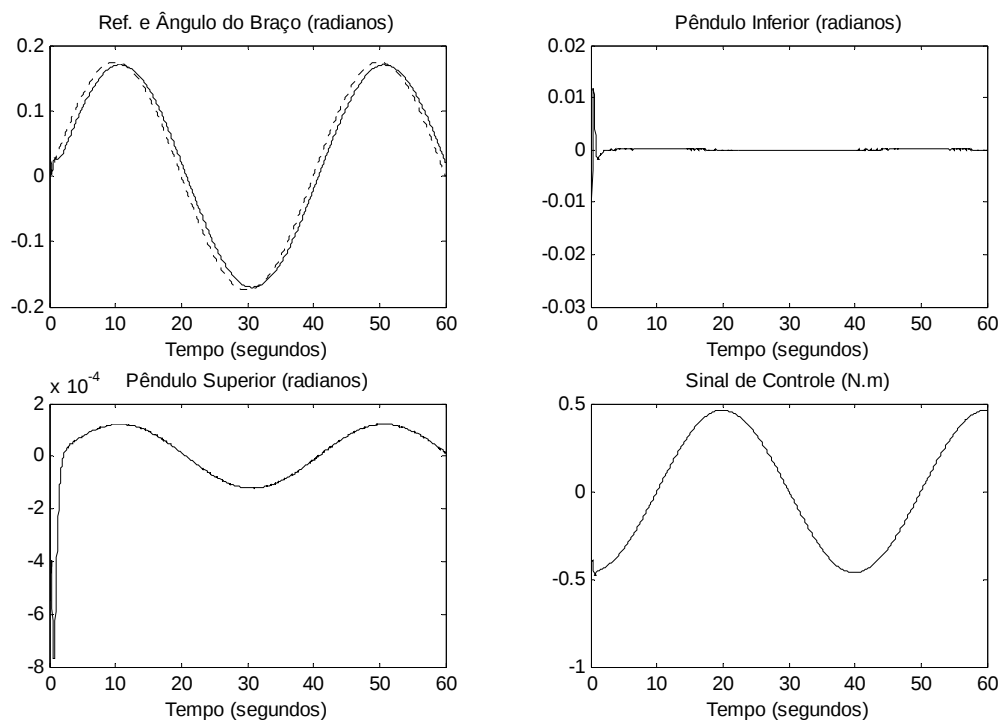


Figura 8.17 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.03 segundos sem atraso no tempo de computação.

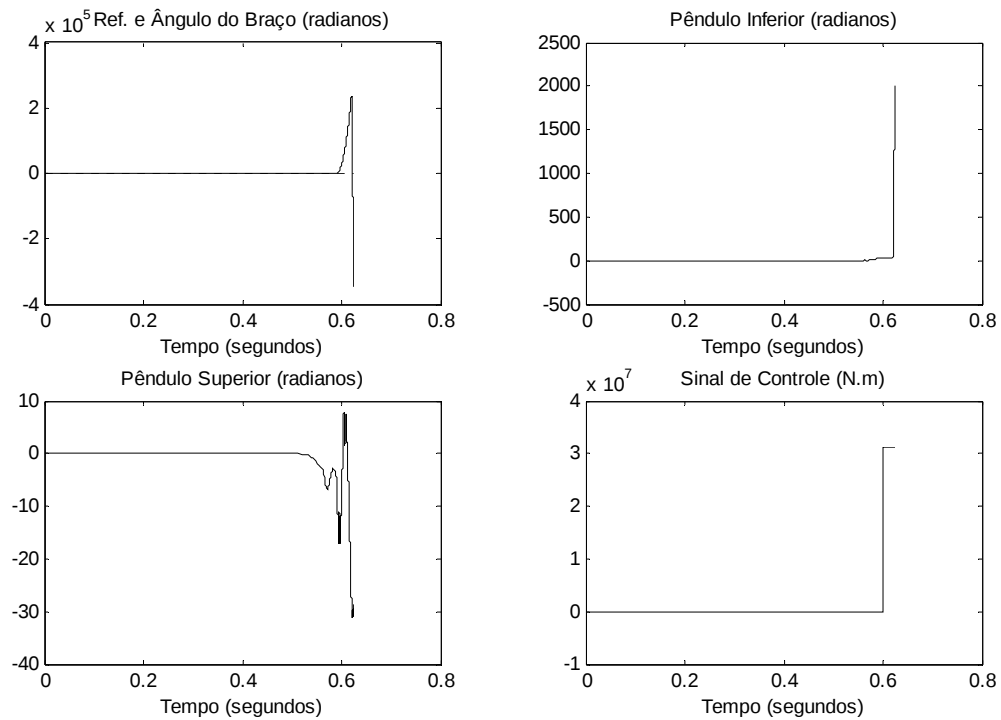


Figura 8.18 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMD com período de amostragem de 0.03 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.02 segundos.

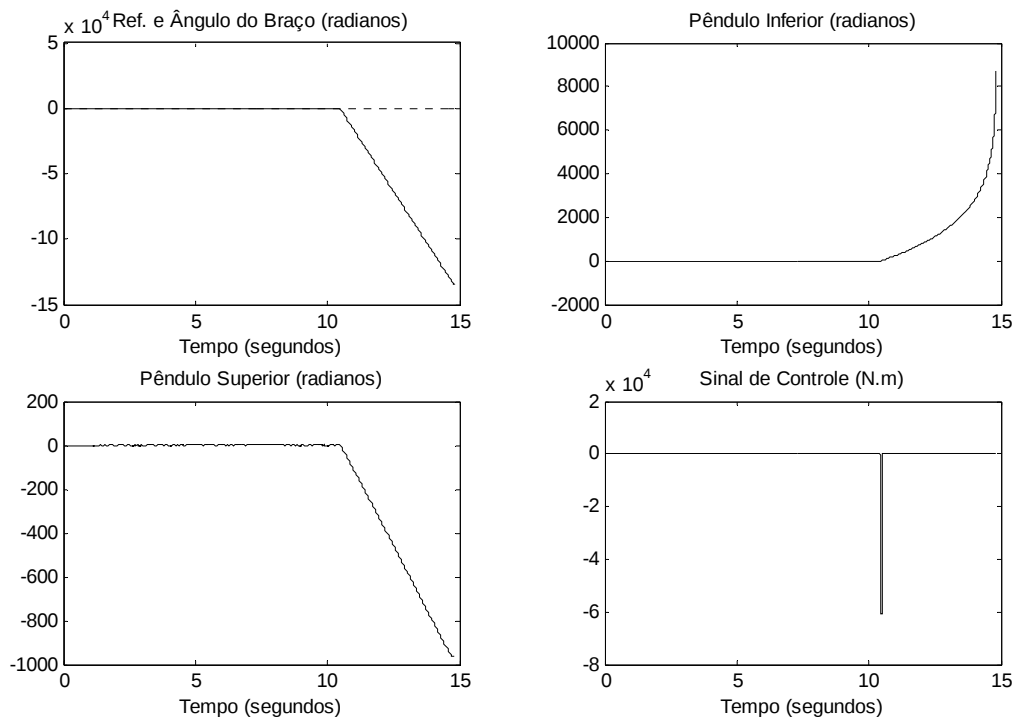


Figura 8.19 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMDs-h com período de amostragem de 0.03 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.02 segundos.

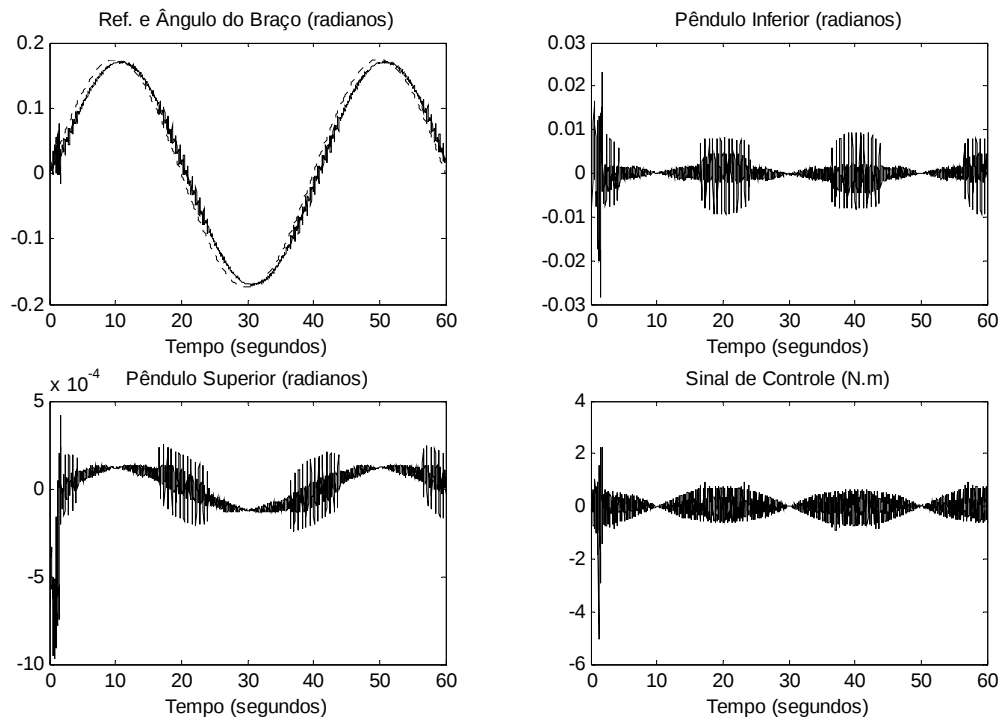


Figura 8.20 - Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo controlado pelo CDMD-h com período de amostragem de 0.03 segundos e com atraso no tempo de computação de 0.02 segundos.

Este modelo apresentou-se como um verdadeiro desafio para os controladores. Apenas o CDMD (sem a presença de atraso) e o CDMD-*h* (na presença do atraso) conseguiram manter a estabilidade e o equilíbrio do sistema.

8.5 Comentários

Este capítulo apresentou os resultados das simulações dos controladores aplicados a sistemas incertos, não-lineares e de natureza instável. O CDMD mostrou-se eficaz no controle de sistemas sem atraso. Porém, não conseguiu manter esta eficácia na presença deste. O novo controlador proposto CDMD-*h*, comparado com o CDMD-*h* [7], mostrou uma performance semelhante e, em alguns casos muito melhor, ao suprimir os efeitos do atraso e garantir a estabilidade dos sistemas. Algumas limitações físicas de cada sistema foram impostas, de forma a tornar as simulações mais condizentes com a realidade.

Os estudos destes resultados ficam mais interessantes quando utilizamos os modelos de animação apresentados no Capítulo 7.

CAPÍTULO 9

9. CONCLUSÕES

9.1 Conclusões Gerais

Este trabalho apresentou uma nova estratégia de controle, baseada em modos deslizantes discreto, que leva em consideração a presença do atraso no tempo de computação do sinal de controle (CDMD- h). O atraso computacional presente em controle digital, não apenas reduz relativamente a estabilidade e robustez, mas também degrada a performance de controle. Para um claro desenvolvimento do CDMD- h , foi apresentado primeiramente o projeto de um controlador que não considera os efeitos do atraso (CDMD). Com o objetivo de comparação de performance, a estrutura de outro controlador que também considera o atraso em seu projeto foi apresentada (CDMDS- h) [7]. Foi assumido que o atraso computacional h é constante e menor que um período de amostragem Δ .

O CDMD apresentou excelentes resultados na estabilização e controle dos sistemas abordados. O emprego deste controlador também contribuiu para a utilização de períodos de amostragem grandes, garantindo uma baixa exigência das taxas de processamento do hardware.

Porém, o CDMD não apresentou uma performance satisfatória quando colocado na presença do atraso. Em nenhum dos casos mostrados este controlador conseguiu manter os sistemas estáveis.

Daí a necessidade de controladores dedicados a atuar na presença de grandes atrasos computacionais, o que foi um estímulo maior para a pesquisa de melhorias no controlador proposto em [8].

Com base no CDMD, foi possível projetar o CDMD- h . Esta nova estrutura de controle considera o atraso em seu projeto. Assim, como constatado pelos resultados obtidos no

Capítulo 8, o CDMD- h foi capaz de atuar em condições não suportadas pelo CDMD, ou seja, na presença de atrasos.

O outro controlador, cujo projeto foi proposto por [7] e que também considera os efeitos do atraso (CDMDS- h) foi apresentado unicamente com a finalidade de proporcionar um estudo comparativo.

O objetivo maior era mostrar que o CDMD- h , composto por um algoritmo simples e por uma lei de controle única e suave, ou seja, um controlador apenas de modo deslizante, apresentaria um desempenho equiparado ao CDMDS- h , que apresenta um algoritmo muito mais complexo e uma condição de seleção do sinal de controle.

Contudo, os resultados mostraram que o CDMD- h conseguiu se sobressair ao CDMDS- h , apresentando melhor performance e garantindo estabilidade, principalmente se o caso do controle do pêndulo invertido rotacional duplo for observado.

As modificações realizadas, no que diz respeito a separação da matriz de entrada em Γ_1 e Γ_2 , foi o ponto chave que permitiu ao controlador trabalhar com atrasos elevados, muito próximos do período de amostragem.

Os sistemas para aplicação das leis de controle foram escolhidos por suas características de instabilidade à malha aberta e não-linearidades mais fortes, proporcionando um desafio de controle mais interessante. O grau de complexidade nas dinâmicas foi aumentando do Sistema Bola e Viga (mais simples) até o Sistema Pêndulo Invertido Rotacional Duplo (mais complexo).

Com o auxílio dos modelos de animação, apresentados no Capítulo 7, a análise dos resultados se torna mais didática. Estes modelos foram adaptados e criados com o objetivo de contribuir para o aprendizado de disciplinas da área de controle. Além disso, para evitar possíveis danos no modelo real, o modelo virtual se torna importante, principalmente na fase de testes dos controladores.

É importante salientar que este trabalho de pesquisa gerou publicações e que abriu caminho para novas investigações e análises, conforme descrito no item 9.2.

9.2 Trabalhos Publicados e Submetidos

CAUN, A. P.; GARCIA, J. P. F.; GARCIA, L. M. C. F. Modo deslizante discreto aplicado ao sistema pêndulo invertido rotacional com atraso na computação do sinal de controle. **DINCON'07 - 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications**, São José do Rio Preto, p. 705-712, 2007.

GARCIA, J. P. F.; CAUN, A. P.; GARCIA, L. M. C. F. Modo deslizante discreto aplicado ao sistema bola e viga com atraso no tempo de computação do sinal de controle. **IEEE RITA – Revista Iberoamericana de Tecnologias de Aprendizagem**, 2007. (Submetido - em Revisão)

GARCIA, J. P. F.; CAUN, A. P.; GARCIA, L. M. C. F. Modo deslizante discreto aplicado ao sistema pêndulo invertido rotacional duplo com atraso na computação do sinal de controle. **SBAI – Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, Florianópolis, 2007. (Trabalho Aceito)

9.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Sugere-se para trabalhos futuros:

- i) Pesquisa e implementação de observadores discretos;
- ii) Teste dos controladores em sistemas MIMO;
- iii) Aplicação de LMI para o problema do atraso computacional;

REFERÊNCIAS

- [1] FURUTA, K. Sliding mode control of a discrete system. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 14, n. 2, p. 145-152, 1990.
- [2] SU, W. C.; DRAKUNOV, S. V.; ÖZGÜNER, Ü. Implementation of variable structure control for sampled-data systems. **Lectures Notes in Control and Information Sciences Series**, Berlim, n. 217, p. 87-106, 1996.
- [3] BARTOLINI, G.; FERRARA, A.; UTKIN, V. L. Adaptive sliding mode control in discrete-time systems. **Automatica**, Tarrytown, v. 31, n. 5, p. 769-773, 1995.
- [4] TEFAYE, A.; TOMIZUKA, M. Robust control of discretized continuous systems using the theory of sliding modes. **International Journal of Control**, London, v. 62, n. 1, p. 209-226, 1995.
- [5] CORRADINI, M. L.; ORLANDO, G. Variable structure control for uncertain sampled-data systems. In: PROCEEDINGS of 1996 IEEE Workshop on Variable Structure Systems. Tokyo: IEEE, 1996. p. 117-121.
- [6] HA, C. K.; LY, U. L. Sampled-data system with computation time delay: optimal w-synthesis method. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, Reston, v. 19, n. 3, p. 584-591, 1996.
- [7] LEE, S. M.; LEE, B. H. Discrete-time sliding mode controller an observer with computation time delay. **Control Engineering Practice**, London, v. 7, n. 8, p. 943-955, 1999.
- [8] RIBEIRO, J. M. S. **Controle discreto com modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no sinal de controle**. 2006, 126f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- [9] UTKIN, V. I. **Sliding modes and their applications in variable structure systems**. Moscow: MIR Publishers, 1978. 257 p.
- [10] DeCARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. **Proceedings of the IEEE**, v. 76, n. 3, p. 212-232, 1988.
- [11] GARCIA, J. P. F.; RIBEIRO, J. M. S.; SILVA J. J. F.; MARTINS E. S. Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished using a computer. **Proceedings of IEE Control and Theory Applications**, Stevenage, v. 152, n. 2, p. 220-228, 2005.

- [12] UTKIN, V. I. **Sliding modes in control and optimization**. Berlim: Springer-Verlag, 1992. 284p.
- [13] FILLIPOV, A. F. **Differential equations with discontinuous righthand sides**. USA: Kluwer Academic Publishers, 1988. 304 p.
- [14] DRAZENOVIC, B. The invariance conditions in variable structure systems. **Automatica**, Elmsford, v. 5, n. 3, p. 287-295, 1969.
- [15] BAG, S.K.; SPURGEON, S.K.; EDWARDS, C. Output feedback sliding mode design for linear uncertain systems. **Proceedings of IEE Control and Theory Applications**, Stevenage, v. 144, n. 3, p. 209-216, 1997.
- [16] FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. **Digital control of dynamics systems**. 3 ed. California: Addison Wesley Longman, 1998. 741 p.
- [17] BALL and beam apparatus. Nottingham: TQ Education and Training, 2000. (CE, 106).
- [18] INVERTED pendulum. Ontario: Quanser Consulting, 1998.
- [19] SELF-ERECTING, rotary motion inverted pendulum. Ontario: Quanser Consulting, 1996. p. 1-16.
- [20] BROCKETT, R. W.; LI, H. A light weight rotary double pendulum: maximizing the domain of attraction. In: CONFERENCE on decision and control, 42, 2003, Maui. **Proceedings...** Maui: IEEE, 2003. v. 4, p. 3299-3304.
- [21] DRIVER, J.; THORPE, D. **Design, build and control of a single/double rotational inverted pendulum**. Australia: University of Adelaide, School of Mechanical Engineering, 2004. Disponível em: http://www.mecheng.adelaide.edu.au/robotics/wpage.php?wpage_id=15 Acessado em: 17 Out 2006.
- [22] V-REALM builder. Savannah: Ligos Corporation, 1997. 105 p.
- [23] RIBEIRO, J. M. S.; GARCIA, J. P. F.; JACOMELI, J. R.; GARCIA, L. M. C. F. Discrete-time sliding mode control of input-delay systems applied on a power generation system. **Proceedings of IEEE ISIE 2006**, Montreal, v. 3, p. 1794-1799, 2006.
- [24] QU, S. C.; SUN, C.; WANG, Y. J. Design sliding mode control for neutral time-delay systems. In: INTERNATIONAL Conference on Control and Automation (ICCA '05). Budapest: IEEE, 2005. v. 1, p. 49-52.
- [25] PANG, H. P.; LIU, C. J.; MENG, X. Z. Sliding mode control for linear uncertain systems with input and state delays. In: INTERNATIONAL Conference on Information Acquisition. Weihai: IEEE, 2006. p. 1333-1338.

- [26] RICHARD, J. P. Time delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, Elmsford, v. 39, n. 10, p. 1667-1694, 2003.
- [27] KOLMANOVSKII, V. B.; MYSHKIS, A. **Introduction to the theory and applications of functional differential equations**. Dordrecht: Kluwer Academy, 1999. 643 p.
- [28] GARCIA, C. **Modelagem e simulação de sistemas**. São Paulo: Edusp, 1997. 457 p.
- [29] UTKIS, U. **Control systems of variable structure**. New York: Wiley, 1976. 214 p.
- [30] GARCIA, L. M. C. F.; BENNATON, J. F. Sliding mode control for uncertain input-delay systems with only plant output access. In: INTERNATIONAL workshop on variable structure systems, 7, 2002, Sarajevo. **Proceedings...** Sarajevo: IEEE, 2002. p. 175-184.
- [31] DUGARD, L.; VERRIEST, E. I. **Stability and control of time-delay systems: lectures notes in computer science**. Berlin: Springer, 1997. 228 p.
- [32] MAHMOUD, M. S. **Robust control and filtering for time-delay systems**. New York: Marcel Dekker, 2000. 425 p.
- [33] KOSHKOUEI, A. J.; ZINOBER, A. S. I. Sliding mode time-delay systems. **Proceedings of IEEE International Workshop on Variable Structure Systems VSS '96**, Tokyo, p. 97-101, 1996.
- [34] PRADO, M. L. M. **Controle multivariável aplicado a sistemas com atraso**. 2000. 122f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2000.
- [35] HALE, J. **Theory of functional differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1977. 365p.
- [36] SILVA, S. G.; GARCIA, J. P. F.; TEIXEIRA, M. C. M. Variable structure controller and observer applied to induction machine. In: ADVANCED motion control, 1998. AMC '98-Coimbra, 1998 5th international workshop on, Coimbra: IEEE, 1998. p. 123-128.
- [37] GARCIA, L. M. C. F. **Controle com estrutura variável e modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no controle**. 2002. 92f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

APÊNDICE A

A. SOLUÇÃO PARA A FORMA NO ESPAÇO DE ESTADOS

Considere o modelo no espaço de estados contínuo, representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_1\omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde $u(t)$ é a entrada escalar de controle e $\omega(t)$ é uma entrada escalar de distúrbios. A saída escalar $y(t)$ foi expressa como uma combinação linear dos estados, $x(t)$, e da entrada, $u(t)$.

A representação dada por (A.1) não é única. Dada uma representação de estados, qualquer transformação linear não-singular da forma $Px(t) = Tx(t)$ é também uma possível realização para o mesmo sistema.

De fato, assumindo $\zeta(t) = Tx(t)$ em (A.1), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= T\dot{x}(t) = T(Ax(t) + Bu(t) + B_1\omega(t)) \\ \dot{\zeta}(t) &= T\dot{x}(t) = TAx(t) + TBu(t) + TB_1\omega(t) \\ \dot{\zeta}(t) &= TAT^{-1}\zeta(t) + TBu(t) + TB_1\omega(t) \\ y(t) &= T^{-1}\zeta(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{A.2}$$

Se as matrizes do sistema forem designadas para o novo estado $\zeta(t)$ como F , G , H e J , então

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + Gu(t) + G_1\omega(t) \\ y(t) &= H\zeta(t) + Ju(t)\end{aligned}\tag{A.3}$$

onde $F = TAT^{-1}$, $G = TB$, $G_1 = TB_1$, $H = T^{-1}$ e $J = D$.

Inicialmente, resolve-se a equação apenas com condições iniciais e sem entrada externa. Assim, é obtida a seguinte equação homogênea

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (\text{A.4})$$

Para resolver isto, assume-se a expansão em série como uma possível solução

$$x(t) = F_0 + F_1(t-t_0) + F_2(t-t_0)^2 + \dots. \quad (\text{A.5})$$

Se for assumido que $t = t_0$, encontrar-se-á imediatamente que $F_0 = x_0$. Diferenciando (A.5) e substituindo em (A.4),

$$F_1 + 2F_2(t-t_0) + 3F_3(t-t_0)^2 + \dots = Ax(t) \quad (\text{A.6})$$

e, em $t = t_0$, $F_1 = Ax_0$. Continuando a diferenciar as séries e a equação diferencial, igualando-as em t_0 , surge uma nova série

$$x(t) = \left[I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{6} + \dots \right] x_0. \quad (\text{A.7})$$

Esta série é definida como uma exponencial matricial

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0), \quad (\text{A.8})$$

onde, por definição, a exponencial matricial é

$$e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + A^3 \frac{(t-t_0)^3}{3!} + \dots$$

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-t_0)^k}{k!}. \quad (\text{A.9})$$

É possível mostrar que a solução dada por (A.8) é única, e leva a propriedades interessantes. Por exemplo, considere dois valores de t : t_1 e t_2 . Assim

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)} x(t_0)$$

e

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_0)} x(t_0).$$

Pelo fato de t_0 ser arbitrário, é possível expressar $x(t_2)$ como se a solução da equação começasse em t_1 , ou seja

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1).$$

Substituindo o valor de $x(t_1)$ obtêm-se

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}x(t_0).$$

Agora há duas expressões separadas para $x(t_2)$ e, se a solução é única, ambas devem ser iguais. Conseqüentemente, concluí-se que

$$e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)} \quad (\text{A.10})$$

para todo t_2 , t_1 e t_0 . Note especialmente que se $t_2 = t_0$,

$$I = e^{-A(t_1-t_0)}e^{A(t_1-t_0)}.$$

Assim é possível obter a inversa de e^{At} meramente mudando o sinal de t . Este resultado é utilizado para calcular a solução particular de (A.1).

A solução particular quando $u(t)$ é diferente de zero é obtida usando o *método da variação de parâmetros* (proposto por Joseph Louis Lagrange, matemático francês, 1736-1813. Assumimos $\omega(t) = 0$. Pelo fato das equações serem lineares, os efeitos de $\omega(t)$ podem ser inseridos posteriormente). Deseja-se que a solução esteja na forma

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}v(t), \quad (\text{A.11})$$

onde $v(t)$ é um vetor de parâmetros variáveis a serem determinados (como contraste aos parâmetros constantes $x(t_0)$ em (A.8)). Substituindo (A.11) em (A.1), obtêm-se

$$Ae^{A(t-t_0)}v(t) + e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t) = Ae^{A(t-t_0)}v(t) + Bu(t),$$

e, usando o fato de que a inversa é encontrada pela troca do sinal do expoente, é possível resolver $\dot{v}(t)$ como

$$\dot{v}(t) = e^{-A(t-t_0)}Bu(t).$$

Assumindo que o controle $u(t)$ é zero para $t < t_0$, pode-se integrar $\dot{v}(t)$ de t_0 a t , obtendo

$$v(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} Bu(\tau) d\tau.$$

Conseqüentemente, de (A.11), tem-se

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} Bu(\tau) d\tau,$$

e simplificando, usando os resultados de (A.10), surge a solução particular (convolução)

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (\text{A.12})$$

A solução total para $\omega(t) = 0$ e $u(t) \neq 0$ é a soma de (A.8) e (A.12)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (\text{A.13})$$